Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Vorlesung 20

Produktvarietäten

Zu Mengen M und N kann man bekanntlich das Produkt $M \times N$ definieren, das aus allen Paaren (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$ besteht. Wenn die beteiligten Mengen weitere Strukturen besitzen, so übertragen sich diese häufig direkt auf die Produktmenge. Beispielsweise ist das Produkt von Gruppen wieder eine Gruppe, das Produkt von Vektorräumen ist wieder ein Vektorraum, das Produkt von topologischen Räumen ist mit der Produkttopologie wieder ein topologischer Raum, das Produkt von Mannigfaltigkeiten ist wieder eine Mannigfaltigkeit. Hier interessieren wir uns für das Produkt von affin-algebraischen Mengen, wie dieses zu definieren ist, wie der Koordinatenring dazu aussieht und wie sich die Krulldimension dabei verhält. Für Vektorräume gilt $K^r \times K^s = K^{r+s}$, das bedeutet, dass die Dimension des Produktraumes die Summe der beiden einzelnen Dimensionen ist. Dies wird sich auch für die Dimension von Produktvarietäten ergeben. Wir stellen eine allgemeine Vorüberlegung an, inwiefern auf den beteiligten Mengen (Räumen, Mannigfaltigkeiten, Varietäten) definierte Funktionen auch Funktionen auf der Produktmenge ergeben.

Bemerkung 20.1. Es seien V und W geometrische Objekte (topologische Räume, Mannigfaltigkeiten, Varietäten, beringte Räume), wobei klar sein soll, was die darauf adäquaten definierten Funktionen sein sollen. Jedenfalls soll eine Funktion von der Form $f\colon V \to K$ in einen festgelegten Körper K sein, wodurch eine Ringstruktur auf der Menge der Funktionen gestiftet wird. Über die Projektionen

$$p_V\colon V \times W \longrightarrow V$$

und

$$p_W\colon V \times W \longrightarrow W$$

definiert eine Funktion auf V (bzw. auf W) direkt eine Funktion auf $V \times W$, indem man einfach die Hintereinanderschaltung

$$V \times W \xrightarrow{p_V} V \xrightarrow{f} K$$

betrachtet. Zu einer Funktion f auf V und einer Funktion g auf W kann man auf $V \times W$ die Funktion

$$V \times W \xrightarrow{f \times g} K \times K \xrightarrow{\cdot} K$$

betrachten, wobei $\cdot$ die Multiplikation auf dem Körper bezeichnet. Diese Abbildung bezeichnen wir (aus gutem Grund) mit $f \otimes g$. Es ist also

$$(f \otimes g)\,(x, y) \,=\, f(x) \cdot g(y).$$

Dabei stimmt $f \otimes 1$ mit der über die Projektion nach V gewonnene Funktion $f \circ p_V$ überein. Ferner gilt im Ring der Funktionen auf der Produktmenge die Beziehung

$$f \otimes g \,=\, (f \otimes 1) \cdot (1 \otimes g)\,.$$

Keineswegs sind alle Funktionen auf $V \times W$ von diesem Produkttyp, beispielsweise kann man $(f \otimes 1) + (1 \otimes g)$ im Allgemeinen nicht auf diese Gestalt bringen.

Im algebraischen Kontext sind die relevanten Funktionen die Polynomfunktionen auf dem affinen Raum $\mathbb{A}_K^n$ und ihre Einschränkungen auf abgeschlossene Teilmengen und daraus konstruierte rationale Funktionen. Die natürliche Identität

$$\mathbb{A}_K^m \times \mathbb{A}_K^n \,=\, \mathbb{A}_K^{m+n}$$

kann man auf der Ebene der Polynomringe folgendermaßen interpretieren: Einerseits hat man für die beiden affinen Räume die Polynomringe $K[X_1, \ldots, X_m]$ und $K[Y_1, \ldots, Y_n]$, andererseits einen Polynomring in $m+n$ Variablen. Diesen kann man aber direkt als $K[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n]$ ansetzen, da ein Polynom aus $K[X_1, \ldots, X_m]$ über die Projektion

$$\mathbb{A}_K^m \times \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^m$$

zu einer polynomialen Funktion auf der Produktmenge wird. Über diesen Weg wird ein Polynom in den ersten m Variablen einfach als ein Polynom in $m+n$ Variablen aufgefasst, in dem die hinteren Variablen nicht explizit vorkommen. Eine direkte Überlegung zeigt

$$K[X_1, \ldots, X_m] \otimes_K K[Y_1, \ldots, Y_n] \,\cong\, K[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n]$$

(siehe auch Beispiel Anhang 11.2). Die oben formulierte naive funktionentheoretische Interpretation des Tensorzeichens stimmt mit der algebraischen Definition des Tensorproduktes überein.

Lemma 20.2. *Es seien* $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^m$ *und* $V(\mathfrak{b}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ *affin-algebraische Mengen. Dann ist*

$$V(\mathfrak{a}) \times V(\mathfrak{b}) \,\subseteq\, \mathbb{A}_K^m \times \mathbb{A}_K^n \,=\, \mathbb{A}_K^{m+n}$$

eine affin-algebraische Menge, die durch das Ideal

$$\mathfrak{a}K[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n] + \mathfrak{b}K[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n]$$

beschrieben wird.

Beweis. Ein Punkt $P \,\in\, V(\mathfrak{a})$ ist ein Tupel $(x_1, \ldots, x_m)$, in dem alle Polynome aus $\mathfrak{a} \,\subseteq\, K[X_1, \ldots, X_m]$ verschwinden. Ein Punkt

$$(P, Q) \,\in\, V(\mathfrak{a}) \times V(\mathfrak{b})$$

ist entsprechend ein Tupel $(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n)$, in dem sowohl alle Polynome aus $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \ldots, X_m]$ als auch alle Polynome aus $\mathfrak{b} \subseteq K[Y_1, \ldots, Y_n]$ verschwinden, wobei diese Bedingungen jeweils nur vom vorderen bzw. vom hinteren Teiltupel abhängen. Dies ist äquivalent dazu, dass alle Polynome aus

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}K[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n] + \mathfrak{b}K[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n]& \\ \subseteq K[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n]&\end{aligned}$$

verschwinden, da diese Eigenschaft durch ein Erzeugendensystem des Ideals festgelegt ist. □

Wenn die beiden Ideale durch Erzeuger gegeben sind, sagen wir

$$\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_r)$$

und $\mathfrak{b} = (g_1, \ldots, g_s)$, so ist das Ideal, das die Produktmenge beschreibt, einfach gleich $(f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s) \subseteq K[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n]$.

Definition 20.3. Zu affin-algebraischen Mengen $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^m$ und $V(\mathfrak{b}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ nennt man

$$V(\mathfrak{a}) \times V(\mathfrak{b}) \subseteq \mathbb{A}_K^m \times \mathbb{A}_K^n = \mathbb{A}_K^{m+n}$$

mit der induzierten Zariski-Topologie des $\mathbb{A}_K^{m+n}$ das *Produkt* der beiden affin-algebraischen Mengen.

Nach Konstruktion ist das Produkt $V(\mathfrak{a}) \times V(\mathfrak{b})$ als Punktmenge einfach die rein mengentheoretische Produktmenge. Allerdings kommt noch die Zariski-Topologie hinzu, die unter Bezug auf die umgebenden Räume definiert wird. Diese Topologie ist nicht die Produkttopologie der beiden einzelnen Topologien auf den Varietäten (dies stimmt schon nicht für $\mathbb{A}_K^2 = \mathbb{A}_K^1 \times \mathbb{A}_K^1$). Von daher ist es nicht selbstverständlich, dass diese Topologie auf der Produktmenge unabhängig von der Restklassenrepräsentierung der beiden Koordinatenringe ist, und wie man den Koordinatenring der Produktvarietät aus den beiden Koordinatenringen berechnet. Beide Probleme werden durch das folgende Lemma erledigt.

Lemma 20.4. *Es seien A und B kommutative R-Algebren und $\mathfrak{a} \subseteq A$, $\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideale. Dann gibt es eine kanonische R-Algebraisomorphie*

$$A \otimes_R B / (\mathfrak{a}(A \otimes_R B) + \mathfrak{b}(A \otimes_R B)) \longrightarrow A/\mathfrak{a} \otimes_R B/\mathfrak{b}.$$

Beweis. Dabei ist $\mathfrak{a}(A \otimes_R B)$ das Erweiterungsideal unter dem kanonischen Ringhomomorphismus

$$A \longrightarrow A \otimes_R B,\ a \longmapsto a \otimes 1.$$

Dies ist auch das Bild von $\mathfrak{a} \otimes_R B$ in $(A \otimes_R B)$, und dieses gehört zum Kern von $A \otimes_R B \to A/\mathfrak{a} \otimes_R B/\mathfrak{b}$. Zum Nachweis, dass die angegebene Idealsumme der ganze Kern ist, machen wir eine *Diagrammjagd.* Wir gehen aus von den surjektiven R-Algebrahomomorphismen $A \to A/\mathfrak{a}$ und $B \to B/\mathfrak{b}$. Die kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{a} \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow \mathfrak{b} \longrightarrow B \longrightarrow B/\mathfrak{b} \longrightarrow 0$$

ergeben nach Proposition Anhang 5.4 durch verschiedene Tensorierungen das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{a} \otimes_R \mathfrak{b} & \longrightarrow & A \otimes_R \mathfrak{b} & \longrightarrow & A/\mathfrak{a} \otimes_R \mathfrak{b} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathfrak{a} \otimes_R B & \longrightarrow & A \otimes_R B & \longrightarrow & A/\mathfrak{a} \otimes_R B & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathfrak{a} \otimes_R B/\mathfrak{b} & \longrightarrow & A \otimes_R B/\mathfrak{b} & \longrightarrow & A/\mathfrak{a} \otimes_R B/\mathfrak{b} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0\,.
\end{array}$$

Sei $z \in A \otimes_R B$ ein Element, das rechts unten (in $A/\mathfrak{a} \otimes_R B/\mathfrak{b}$) auf 0 geht. Dann rührt das Bild y von z in $A/\mathfrak{a} \otimes_R B$ von einem Element $x \in A/\mathfrak{a} \otimes_R \mathfrak{b}$ und dieses von einem Element $u \in A \otimes_R \mathfrak{b}$ her. Es sei u' das Bild davon in $A \otimes_R B$. Dann wird $z - u'$ nach rechts auf 0 abgebildet. Daher existiert ein $v \in \mathfrak{a} \otimes_R B$ mit $v' = z - u'$. Also ist $z = u' + v'$ wie behauptet. □

Da man $V(\mathfrak{a})$ mitsamt der Topologie als das K-Spektrum aus dem Koordinatenring $K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$ rekonstruieren kann, kann man auch die Topologie der Produktvarietät aus dem Tensorprodukt der beiden Koordinanteringe rekonstruieren. Dass das Tensorprodukt auf der algebraischen Ebene die richtige Beschreibung des Produktes der geometrischen Mengen liefert, wird auch durch den folgenden Satz bestätigt.

Satz 20.5. *Zu kommutativen K-Algebren A und B gilt*

$$K - \operatorname{Spec}(A \otimes_K B) \,=\, K - \operatorname{Spec}(A) \times K - \operatorname{Spec}(B)\,.$$

Beweis. Die Aussage bedeutet einfach

$$\operatorname{Hom}_K^{\text{alg}}(A \otimes_K B, K) \,=\, \operatorname{Hom}_K^{\text{alg}}(A, K) \times \operatorname{Hom}_K^{\text{alg}}(B, K)$$

und ist somit ein Spezialfall von Satz Anhang 11.5. □

Lemma 20.6. *Für jeden Punkt $x \in V$ ist $x \times W \subseteq V \times W$ mit der induzierten Topologie homöomorph zu W.*

Beweis. Sei $V \subseteq \mathbb{A}_K^m$ und $W \subseteq \mathbb{A}_K^n$. Die Abbildung (zu einem fixierten $x \in V$)

$$W \longrightarrow V \times W,\; y \longmapsto (x, y),$$

ist eine Einschränkung der Abbildung

$$\mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^m \times \mathbb{A}_K^n,\; y \longmapsto (x, y).$$

Diese induziert eine Bijektion auf die abgeschlossene Teilmenge $x \times \mathbb{A}_K^n$. Sie ist stetig, da Urbilder von Nullstellenmengen wieder Nullstellenmengen sind, und sie bildet Nullstellenmengen auf Nullstelenmengen ab, da man beschreibende Polynome in den n Variablen direkt in den $m+n$ Variablen auffassen kann. Es werden also abgeschlossene Teilmengen auf abgeschlossene Teilmengen abgebildet und somit liegt eine Homöomorphie vor. Diese Eigenschaften übertragen sich auf die Einschränkung. □

Lemma 20.7. *Es seien V und W affine Varietäten über einem Körper K. Dann ist auch das Produkt $V \times W$ irreduzibel.*

Beweis. Es sei
$$V \times W = Z_1 \cup Z_2$$
eine Zerlegung in abgeschlossene Teilmengen. Wir betrachten
$$V_i = \{x \in V | \, x \times W \subseteq Z_i\}$$
für $i = 1, 2$. Die Mengen $x \times W \cong W$ sind irreduzibel nach Lemma 20.6. Wegen
$$x \times W \subseteq V \times W = Z_1 \cup Z_2$$
gilt $x \times W \subseteq Z_1$ oder $x \times W \subseteq Z_2$. Also ist $V = V_1 \cup V_2$. Die Mengen V_i sind abgeschlossen. Wir zeigen dazu, dass das Komplement $V \setminus V_1$ offen ist. Sei dazu $x \in V \setminus V_1$ und somit $x \times W \not\subseteq Z_1$. Somit gibt es $y \in W$ mit
$$(x, y) \notin Z_1.$$
Da $(V \times y) \cap (V \times W \setminus Z_1) \subseteq V \times y \cong V$ nach Lemma 20.6 offen ist und x enthält, gilt auch für (x', y) mit x' aus einer offenen Umgebung von x, dass $(x', y) \notin Z_1$ und damit
$$x' \times W \not\subseteq Z_1,$$
also $x' \notin V_1$. Wegen der Irreduzibilität von V folgt $V_1 = V$ oder $V_2 = V$, also $Z_1 = V \times W$ oder $Z_2 = V \times W$. □

Den folgenden Satz formulieren wir nur für einen algebraisch abgeschlossenen Körper, da nur in diesem Fall die Übersetzung von Primidealen in irreduzible Teilmengen unproblematisch ist.

Satz 20.8. *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien V und W affine Varietäten über K der Dimension r bzw. s. Dann besitzt die Produktvarietät die Dimension $r + s$.*

Beweis. Wir betrachten Realisierungen $V \subseteq \mathbb{A}_K^m$ und $W \subseteq \mathbb{A}_K^n$. Es seien Ketten von irreduziblen Mengen
$$V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{r-1} \subset V_r = V \subset V_{r+1} \subset \ldots \subset V_{m-1} \subset V_m = \mathbb{A}^m$$
und
$$W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_{s-1} \subset W_s = W \subset W_{s+1} \subset \ldots \subset W_{n-1} \subset W_n = \mathbb{A}^n$$

gegeben. Solche Ketten gibt es nach Satz 19.4. Somit liegt eine Kette

$$\begin{aligned} V_0 \times W_0 & \subset \ldots \subset V_r \times W_0 \\ & \subset \ldots \subset V_r \times W_s \\ & \subset \ldots \subset V_m \times W_s \\ & \subset \ldots \subset V_m \times W_n = \mathbb{A}_K^{m+n} \end{aligned}$$

von nach Lemma 20.7 irreduziblen Teilmengen vor. Die Kette von $V_0 \times W_0$ bis $V_r \times W_s = V \times W$ zeigt, dass die Dimension von $V \times W$ zumindest $r+s$ ist. Würde es in $V \times W$ eine längere Kette geben, sagen wir der Länge $t > r+s$, so könnte man diese durch die obige Teilkette von $V \times W$ bis $V_m \times W_n$ zu einer Kette der Länge

$$t+m-r+n-s > r+s+m-r+n-s = m+n$$

des $\mathbb{A}_K^{m+n}$ führen, was nach Satz Anhang 2.15 und Satz 19.1 nicht sein kann. □

Diese Aussage gilt auch für beliebige affin-agebraische Mengen, siehe Aufgabe 20.17.

Die Einbettungsdimension

Definition 20.9. Es sei R ein lokaler kommutativer noetherscher Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Dann heißt die minimale Idealerzeugendenzahl für $\mathfrak{m}$ die *Einbettungsdimension* von R, geschrieben

$$\operatorname{embdim}(R).$$

Lemma 20.10. *Sei $(R, \mathfrak{m}, K)$ ein noetherscher lokaler Ring. Dann ist die Einbettungsdimension gleich*

$$\mu(\mathfrak{m}) = \dim_K \left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right).$$

Beweis. Dies folgt sofort aus dem Lemma von Nakayama angewandt auf das Ideal $\mathfrak{m}$ und den endlich erzeugten R-Modul $\mathfrak{m}$. □

Lemma 20.11. *Sei R ein noetherscher kommutativer Ring und $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal. Es sei $S = R_\mathfrak{n}$ die Lokalisierung an $\mathfrak{n}$ mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}R_\mathfrak{n}$. Dann ist*

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2.$$

Insbesondere ist die Einbettungsdimension der Lokalisierung gleich

$$\dim_{R/\mathfrak{n}} (\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2).$$

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Lemma 17.5. □

Satz 20.12. *In einem noetherschen lokalen Ring R gilt*

$$\dim(R) \leq \operatorname{embdim}(R).$$

Beweis. Die Einbettungsdimension von R ist die minimale Erzeugendenzahl des maximalen Ideals $\mathfrak{m}$. Sei also

$$(f_1, \ldots, f_e) = \mathfrak{m}.$$

Dann ist nach Satz 18.7 die Höhe von $\mathfrak{m}$ höchstens gleich e, und diese ist die Dimension von R. $\square$

Abbildungsverzeichnis