理論物理學導論

柔體力學

乙酉學社叢書第一集

柔 體 力 學

(理論物理學導論卷二)

INTRODUCTION TO THEORETICAL PHYSICS

VOL. II

THE MECHANICS OF DEFORMABLE BODIES

原 著 者 : **MAX PLANCK**

諾貝爾獎金獲獎人,英國皇家學會國外會員,柏林大學理論物理學教授, Kaiser Wilhelm 研究院主任

譯 述 者 : 陸 學 善

英國 Manchester 大學物理學博士

中 華 書 局 印 行

(天)

乙酉學社叢書第一集

緣　起

民國三十有四年之初，抗日戰事猶酣，曙光未露，殊深風雨如晦之感。本社同人蟄處遐濱，幽憂隱憤，共相策勵，亟思藉韜潛之光陰，從事於嚴正科學之述作，爲將來復興作育人才之準備上略效涓埃之助，而苦於經濟拮据，徒有心餘力絀之慨。

適袁良、黄伯樵兩先生見告：實業家章榮初先生疎財好義，擬於否塞之會作有意義之舉，問其道於兩先生；兩先生固夙稔同人之志事者，遂爲之介。一席傾談，章氏毅然任編輯上經濟之責；並相與約定同人個人暨章氏均拋棄版稅，期減輕成書售價，以利讀者。

於是邀集同人，詳加商討。僉認爲國內文化界中最感貧乏者，莫過於大學所需嚴正科學之教本；補救之道則莫善於迻譯國外名著。蓋泰西名家著述既正確可靠，且由經驗所積，深合講授之用；況當前需要至亟，尤須爭取時間，爲求剋期觀成，則譯述尚焉。爰商定叢書第一集應採之原本及分任譯述之人選如次：

R. Courant: Differential-und Integral-rechnung		朱言鈞
L. Bieberbach: Theorie der Differentialgleichungen		沈　璿
Grimsehl-Thomaschek: Lehrbuch der Physik:		
	Mechanik	裘維裕
	Wärmelehre-Akustik	許國保
	Elektromagnetisches Feld	史鍾奇
	Optik	葉蘊理
	Atomphysik	王福山
M. Planck: Vorlesungen der theoretische Physik:		
	Allgemeine Mechanik Mechanik deformierbarer Körper	陸學善

Abraham-Becker: Theorie der Elektrizität: Band I: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität 楊肇燫

Hildebrand: Principles of Chemistry 曹惠群

Latimer-Hildebrand: Reference Book of Inorganic Chemistry 曹惠群

以上各書均期以一年告竣。又爲編撰程式之規劃及名詞之統一，推定下走爲總編輯。遂於是年二月初開始工作。當時承中國科學社惠借房屋一間爲編輯室。每星期六日同人集會一次，互作各方面之商榷。並延趙學士孟養襄理編校及其他事務；後趙君他就，改由許學士森繼之。兩君皆黽勉將事，爲助良多。

一年之中，同人昕夕從事，雖環境艱危，生活窘迫，仍莫不精神煥發，視爲樂事，故均獲完成。嗣中華書局鑒於本集叢書之重要，雖丁此經濟萬分艱苦之時期，慨然擔任出版，本集叢書乃得問世。

茲值付梓，爰誌其涯略，俾讀者知本集之獲蕆事，實由於章榮初氏崇學之熱忱，與夫袁、黃兩先生之多方贊助，同人均深紉佩；而方子衞先生以其餘暇，不吝協力，並此申謝。

所望海內學者，對於本集惠予指正，俾於再版時得減少瑕疵，同人不敏，敢不拜嘉；會當勉竭庸愚，繼爲第二集之譯述，請以本集爲其息壤云爾。

中華民國三十六年一月三十一日 楊肇燫

原　序

本卷所提出之問題與夫所用以解答之方法，所需詮釋者要與卷一力學概論序中所述者無殊．著者竊望此微薄之獻能助讀者對基本概念得一清晰之觀念，且明其相互關係．蓋柔體力學發展之跡，乃力學概論必然之結果．讀者畢此二書後，不僅對更詳盡或更深邃之著述宜可完全瞭解，且亦當藉透澈之獨立研究有以補充之．

本卷提及卷一中所述之定理及方程式處，其所用之表記，已爲之簡化．凡指此卷者均以羅馬數字 I 代表之．例如:(I·1.4.9)即指卷一第一篇第四章第九方程式．爲節省篇幅計，若干公式及中間計算皆行略去．對數學有相當訓練之讀者，欲求其全豹可自爲之也．

Max Planck.

Berlin, Grunewald,

1919年2月.

第三版序

在此新版中有若干排印錯誤已爲之改正，且添入幾許新材料.

Max Planck.

Berlin, Grunewald,

1932年2月.

柔體力學

目錄

發　凡

0.0.1　柔體[1]者，與剛體[2]有別，其形狀可全體或部分變易者也．嚴格言之，自然間一切物體皆屬柔體，蓋迄未有運動而參加此運動之物體不隨以形狀變遷者，要皆爲程度之不同耳．然在甚多情形中，縈諸擺、槓桿、陀螺，爲初步與實際近似計，參加此諸運動之物體，俱可假定爲剛體．剛體運動前於力學概論中已詳論之矣，此際所欲討論者，爲可產生特別重要形變之運動，故不得不將物體組成之狀況加以更精密之假定．吾人初可假定凡物體所據有之空間，有物質連續充塞之．此假定與剛性同，自祇爲一種理想之抽象觀，自然中永未諧嚴實現者，蓋嚴格言之，一切物體皆屬微粒構造．然爲初步與實際近似計，此簡化假定此際亦已足．正如吾人於成立槓桿基本定律時，欲將實際所遇之槓桿彎曲兼顧在內爲多餘且復無益之事，故於討論聲波或液體流動之基本定律時，如起始卽言體內之分子或不變之原子，則其所取方法未免失之不智，況卽以原子論，亦祇代表一種理想之抽象觀念乎？須知大自然之本體固非可以人類思想爲之完全顯示者．

理論物理學家最要且最難之工作，卽在討論某問題而欲求其數學表式時能採用適當之簡明假定，取其對所討論之物理過程中諸性質有特別重要者假定之，將無關大體而徒增數學之重負者略去之．所不得不公認者，卽各種問題所採用之各種假定須互不抵觸，否則此世界之物理觀將失其統一性，有時或可對同一問題得二種各不相容之解答．

爲方便計，本書將分三篇敍述之．第一篇中吾人將尋求連續延伸物體運動之普遍定律，初不問其集團態爲如何，在第二及第三篇中，吾人將應用之於最重要之運動，或具無限小之形變者，或具有限之形變者．

---

(1)Deformable body．(2)Rigid body．

柔體力學

第一篇　連續開展物體之一般運動定律

第一章　運動學定律

1.1.1. 關於柔體之討論，吾人亦將與質點及剛體之力學概論中同，先論運動之本體，暫不問致動之因爲若何，且儘量以數學言語表達之．一質點之運動，僅於構成此物體一切質點之運動已知時，換言之，僅於此諸質點之每一質點其位置已知爲時間之函數時，始完全決定．欲甄別一物體之某質點，可以此物體在 $t=0$ 時間之狀態爲定．命坐標爲 a, b, c，參照於靜止之正交右手坐標系（卷 I 第 1.2.1 節）．則 a,b,c 三量並可用以甄別往後在時間 t 之此點，是際坐標由 a,b,c 變換至 x,y,z，此三量質賦該點以專名，藉此可在任何時間跡得之．故如構成此物體之每一質點 a,b,c 已知 x,y,z 爲 t 之函數，卽如：

$$\left.\begin{aligned} x&=f(a,b,c,t)\\ y&=\phi(a,b,c,t)\\ z&=\psi(a,b,c,t)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.1)$$

則此物體之整個運動完全決定，是處 f,ϕ,ψ 爲 a,b,c,t 之單値有限函數．吾人假定此物體在運動過程中不致分裂，故此三函數並可假定爲連續者．依據上述規定，在 $t=0$ 有：

$$x=a,\quad y=b,\quad z=c\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.1a)$$

方程式(1.1.1)所示者，其可能性甚夥，故不如將時距 t 暫爲規定，換言之，吾人將限於討論該物體自 $t=0$ 至 $t=t$ 時間內所發生之變遷*，

---

* 此後"變遷"(change)一名詞將用爲"位置變遷"之縮稱．若以數學之觀點爲主，則當以用"變換"二字爲[illegible]

t 可為任何不變值．故吾人可於(1.1.1)式中將 t 完全略去而式乃更簡：

$$\left.\begin{aligned} x&=f(a,b,c)\\ y&=\phi(a,b,c)\\ z&=\psi(a,b,c)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1.1.2)$$

此諸方程式示物體自已知之"初位置"變易至某特定之"終位置"，在變易過程中，質點(a,b,c)之位置自(a,b,c)遷至(x,y,z)．因是故，

$$x-a=u,\quad y-b=v,\quad z-c=w\cdots\cdots(1.1.3)$$

諸量謂之此點之分位移[1]．

如解方程式(1.1.2)以求 a,b,c，則可得 a,b,c 為 x,y,z 之函數，對於變遷後坐標為 x,y,z 之質點其變遷前之位置何在之問題，乃得以解答．此諸函數實代表本問題之反變遷，亦假定為等值有限而連續者．

1.1.2. 為示例計吾人將先討論直綫變遷之普遍情形：

$$\left.\begin{aligned} x&=\lambda_0+\lambda_1 a+\lambda_2 b+\lambda_3 c\\ y&=\mu_0+\mu_1 a+\mu_2 b+\mu_3 c\\ c&=\nu_0+\nu_1 a+\nu_2 b+\nu_3 c\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1.1.4)$$

式中諸常數選定字母 λ,μ,ν 與字母 x,y,z 相當，而數字1,2,3與字母 a,b,c 相當，λ_0,μ_0,ν_0 三量示變遷前在坐標原點之質點之位移．

解方程式(1.1.4)以求 a,b,c 得：

$$\left.\begin{aligned} a&=\lambda'_1(x-\lambda_0)+\mu'_1(y-\mu_0)+\nu'_1(z-\nu_0)\\ b&=\lambda'_2(x-\lambda_0)+\mu'_2(y-\mu_0)+\nu'_2(z-\nu_0)\\ c&=\lambda'_3(x-\lambda_0)+\mu'_3(y-\mu_0)+\nu'_3(z-\nu_0)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1.1.5)$$

是處：

$$\lambda'_1=\frac{[\lambda_1]}{D},\text{等等}\cdots\cdots(1.1.6)$$

簡寫 D 乃用以代表習稱之函數行列式：

(1)Components of displacement.

$$\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3\\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3\end{vmatrix}=D \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.7)$$

而行列式中 λ_1 素之子式表記如下：

$$\mu_2\nu_3-\mu_3\nu_2=[\lambda_1]，等等\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.8)$$

無論有撇或無撇之一切常數俱假定為有限者，故函數行列式 D 之值不能為零；吾人可自此立得 D 之正負．蓋在有限時間 t 內，變遷非突進而為漸進者．故此變遷之常數 λ,μ,ν 及行列式 D 俱可視為 t 之連續函數．在變遷之前——即當 $t=0$ 時——有：

$$\lambda_0=0,\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=0，等等\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.9)$$

故 $D=1$．是則在變遷過程中，D 之值自 1 起始，連續變遷，然永不為零．因之 D 常為正量：

$$D>0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.10)$$

1.1.3. 直綫變遷之一特殊情形為移動(卷I．第 2.2.11 節)，在此變遷中物體之一切質點俱依同一方向同一數量而位移，位移之大小可任意．蓋在此情形由(1.1.3)有：

$$x-a=恆量,\quad y-b=恆量,\quad z-c=恆量$$

乃(1.1.4)之一特例．

直綫變遷之另一特例為依任何軸經任何大小角之轉動(卷I．第 2.2.10節)．欲證明此點當先設立一任意有限轉動之方程式，吾人將假定有固定空間之坐標系，其原點在轉動軸上．除此外尚有第二坐標系，固定於體內而可運動於空間．後一坐標系須選擇在變遷前二系之相當軸各相叠合者，變遷後，如二系中各取一軸，則每二軸互成一角，諸軸之方向餘弦將命之為 $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$，字母 α,β,γ 指第一坐標系之軸，下標 1,2,3 指第二系之軸．

在變遷前，物體內某質點對二坐標系任何一系之坐標均為 a,b,c．變遷後則不然，此點對第一系之坐標為 x,y,z 而對第二系則仍為 a,b,c．

故 x, y, z 與 a, b, c 之關係與空間一點之坐標自一坐標系變換至另一坐標系之關係相同，此另一坐標系由已知之九個方向餘弦標識之，或由(I.2.2.17)

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha_1 a+\alpha_2 b+\alpha_3 c\\ y&=\beta_1 a+\beta_2 b+\beta_3 c\\ z&=\gamma_1 a+\gamma_2 b+\gamma_3 c \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.11)$$

此仍爲(1.1.4)之一特例.

如在此轉動(1.1.11)中再加一分位移爲 λ_0, μ_0, ν_0 之移動，則可得剛體之最普遍變遷，以方程式表之當如下：

$$\left.\begin{aligned} x&=\lambda_0+\alpha_1 a+\alpha_2 b+\alpha_3 c\\ y&=\mu_0+\beta_1 a+\beta_2 b+\beta_3 c\\ z&=\nu_0+\gamma_1 a+\gamma_2 b+\gamma_3 c \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.12)$$

然此變遷亦係普通直線變遷(1.1.4)之一特例，蓋上式之十二常數並非各自獨立者．故如有問在何種情形下一物體之直綫變遷始無形變發生，則當答之曰：此變遷 λ, μ, ν 諸係數間之關係與(1.1.12)式相當係數間之關係同．由(I.2.2.19)及(I.2.2.20)，此關係凡六，其中三者之形式爲：

$$\lambda_1{}^2+\mu_1{}^2+\nu_1{}^2=1,\ 等等\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.13)$$

其他三者之形式爲：

$$\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2=0,\ 等等\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.14)$$

此諸關係同時兼蓄其他關係，例如，自(1.1.13)及(1.1.14)中將字母 λ, μ, ν 與數字 1,2,3 排列之可得六關係 [(I.2.2.21)及(I.2.2.22)]；由(I.2.3.79)有：

$$D=1\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.15)$$

此外尚有九關係(I.2.3.80)，其形式爲

$$\lambda_1=\mu_2\nu_3-\mu_3\nu_2=[\lambda_1]=\lambda'_1,\ 等等\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.16)$$

因此種關係之存在，故在相反變遷中，方程式(1.1.5)中之有撇係

數應取類似之無數值.

1.1.4. 再返觀直綫變遷之一般情形而將其性質縷述之.第一,變遷前在一平面內之諸點迨變遷後亦在一平面內,此理甚易知之.蓋在一平面內之質點(a,b,c)常適合下列之一次方程式:

$$Aa+Bb+Cc+D=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1.1.17)$$

變遷後此諸點之位置爲x,y,z,由方程式(1.1.4)定之.故如a,b,c適合方程式(1.1.17),則x,y,z亦適合一條件,可將(1.1.5)之值代入(1.1.17)以消去a,b,c卽得.此仍爲一次方程式,故(x,y,z)亦在一平面內.

上述結果卽平面不失定理(1),由此直接可得者,爲直線不失定理,蓋直線爲兩平面之交綫也.吾人由此並可推得曲面級次不變定理(2),蓋曲面之級次係由其與直線之交點數而定.

在直綫變遷中,平行綫亦係保守者,蓋如變遷前平行之二質點平面在變遷後不復平行,則兩平面應在有限區域中相交,其交綫將由變遷前在無窮遠之諸質點(a,b,c)所組成——此謂雖x,y,z爲有限量,a,b,c至少有無限者.然由方程式(1.1.5)此係不可能之事.

衆平面不失定理與平行不變定理(3)而言,可知一切平行六面體(4)亦係保守者.然角及體積則可變.今請計算任何平行六面體體積之變遷,設自某物體內割取一平行六面體,以任意選擇之角點$a_1,b_1,c_1,\cdots a_4,b_4,c_4$標識之.變遷前此平行六面體之體積爲:

$$V=\pm\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (1.1.18)$$

變遷後爲:

(1)Theorem of conservation of plane. (2)Theorem of conservation of the order of any surface. (3)Theorem of conservation of parallelism. (4)Parallelopiped.

$$V' = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.19)$$

是處之 x, y, z 藉方程式(1.1.4)與其同下標之 a, b, c 相連繫.

V 與 V' 間之關係最易自行列式(1.1.18)乘以函數行列式(1.1.7)而得之.函數行列式可書爲第四級行列式如下:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_0 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = D \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.20)$$

依據行列式乘法定理,(1.1.18)與(1.1.20)二行列式之乘積,仍爲一第四級之行列式,吾人如取一式之任何一行與其他一式之任何一行將其相似位置之各項互乘而加所得諸乘積,即可得此行列式之各項.故在求得之行列式中,其第一行之第一項爲:

$$a_1 \cdot \lambda_1 + b_1 \cdot \lambda_2 + c_1 \cdot \lambda_3 + 1 \cdot \lambda_0$$

第一行之第二項爲:

$$a_1 \cdot \mu_1 + b_1 \cdot \mu_2 + c_1 \cdot \mu_3 + 1 \cdot \mu_0$$

第一行之第四項爲:

$$a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + 1 \cdot 1$$

其餘依此類推.由(1.1.4)可知此整個行列式之形式與行列式(1.1.19)恰同.故:

$$V \cdot D = V' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.21)$$

且 V, V', D 三量俱爲正.

此關係與所討論平行六面體之大小及形狀無關,亦自適合於無限小之平行六面體,故吾人可推廣方程式(1.1.21)至任何自物體內割取之任意體積而得一定理如下:在直線變遷中,物體各部均勻變遷,變遷

前後任何部分體積之比，即等於其函數行列式．由(1.1.15)，已知剛體之變遷，其函數行列式等於1，此與現在之結果合．

體積變遷與原體積之比，謂之此體積之"膨脹[1]".故在直綫變遷中體積膨脹：

$$\frac{V'-V}{V}=D-1 \cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.22)$$

是否爲正或負當視此變遷之爲膨脹或收縮而定．

1.1.5. 如一物體逐次經二次或二次以上之直綫變遷，則所得者仍爲一直綫變遷．此可自變遷前及末次變遷後任何質點坐標間之關係立知之．如某點當第一次變遷後在(x,y,z)，第二次變遷後在(x',y',z')，依次以進，至末次變遷後其位置爲(x^*,y^*,z^*)，則消去中途諸坐標可得$(a,b,c,)$與$(x^*,y^*z,^*)$間之關係，此關係爲一次方程式，其理甚明．

反之，任何直綫變遷可分解爲一連串之直綫變遷，然以物理意義言，其先後順序不可倖然倒置，分解時各變遷之性質愈簡愈佳，且須易於藉物理方法顯示者．如此乃得將直綫變遷之普遍情形(1.1.4)化爲若干易於步趨之較簡變遷，同時變遷之常數λ,μ,ν其物理意義，可明示無餘．

第一步，可將變遷(1.1.4)化至另一變遷，於此變遷中，質點$a=0$，$b=0,c=0$保持其位置不變．其法可賦物體以一移動，使分位移爲λ_0，μ_0,ν_0，則此點將安於其最後位置上，所餘者仍爲一所謂"均勻變遷"，其一般形式爲：

$$\left.\begin{aligned} x&=\lambda_1 a+\lambda_2 b+\lambda_3 c\\ y&=\mu_1 a+\mu_2 b+\mu_3 c\\ c&=\nu_1 a+\nu_2 b+\nu_3 c\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.23)$$

茲將此變遷一詳論之．

試專論變遷前在一球面上之一切質點，此球面以坐標之原點爲心，半徑爲任意值R，卽：

(1)Dilatation.

$$a^2+b^2+c^2=R^2 \cdots\cdots(1.1.24)$$

由第 1.1.4 節，可知變遷後此諸點在第二級之曲面上，諸點無移動至無窮遠者，故此曲面必為一橢圓球，心在坐標之原點，此甚易自(1.1.24)藉(1.1.23)以 x,y,z 代 a,b,c 諸量而知之．一般而論，變遷前與坐標軸疊合之諸質點直綫，變遷後將不復相互垂直．吾人所可說者，此諸綫在變遷後成一橢圓球配徑(1)之三合組(2)——此謂經橢圓球任何直徑一端之切面與通過其他二直徑之平面平行．其理由有二：第一，三坐標軸與任何互相垂直之三直綫同，成一球體配徑之三合組；第二，組成相配三合組之性質非屬於可因直綫變遷而消失者，蓋切面與平行性均屬保守者也．

在橢圓球之一切配徑三合組中，其相互以直角組成者惟一，此三合組即橢圓球之諸軸；故在變遷後與橢圓球各軸疊合之三質點直線在變遷前亦當互相垂直，蓋此時對球體而論為相配者也．換言之，吾人有三特定之質點直綫在變遷前後均互相垂直．

藉此定理之助，**凡均勻直線變遷均可分解為二**：(1)一依坐標原點之簡單轉動，使上述之三直綫入新方向中；(2)某直綫變遷，其性質須使相互垂直之三直綫方向不變．後一變遷，謂之**在三互垂方向之膨脹**．

1.1.6. 欲詳細討論在三互垂方向膨脹之性質，可選取坐標軸即在此三方向中——即所謂"膨脹軸(3)"——而觀如何一均勻直綫變遷之普遍方程式(1.1.23)可因所述假定而簡化之情形．如 x 軸之方向不變，則必有 $y=0$，與 $z=0$，此因 $b=0$，與 $c=0$——即 $\mu_1=0$ 與 $\nu_1=0$．其他二軸之情形亦同．故在三坐標軸方向之膨脹，其普遍方程式當如下：

$$x=\lambda_1 a,\quad y=\mu_2 b,\quad z=\nu_3 c \cdots\cdots(1.1.25)$$

由(1.1.7)與(1.1.10)其函數行列式為：

$$D=\lambda_1\mu_2\nu_3>0 \cdots\cdots(1.1.26)$$

三係數各為正，蓋坐標軸並不反其方向也．

---

(1)Conjugate diameters. (2)Triplet. (3)Dilatation axes.

然坐標軸至少以一般情形而論為不受變遷影響之僅有方向，蓋變遷前在一直綫上之諸質點在變遷後亦必成一直綫，如變遷前之直線其向比為 $\alpha:\beta:\gamma=a:b:c$，則變遷後之直綫其向比為

$$x:y:z=\lambda_1\alpha:\mu_2\beta:\nu_3\gamma.$$

由(1.1.22)體積膨脹為：

$$D-1=\lambda_1\mu_2\nu_3-1 \cdots\cdots\cdots\cdots (1.1.27)$$

吾人如將一直綫二點間之距離變遷除以二點間之原有距離，即得此直綫之膨脹．故此三軸之膨脹為：

$$\frac{x-a}{a}=\lambda_1-1,\quad \frac{y-b}{b}=\mu_2-1,\quad \frac{z-c}{c}=\nu_3-1 \cdots\cdots (1.1.28)$$

習常謂之"主膨脹(1)"，變遷之三係數藉此乃得一明晰之物理解釋．

在 $\lambda_1=\mu_2=\nu_3$ 之特殊情形，三主膨脹彼此相等，或正或負，一切直綫方向不變，膨脹軸乃成不定，此物體於各方向之開展或收縮均等，在此過程中，物體各部其形狀不變．

1.1.7 吾人已知任何直線位移可視為由一移動、一轉動及一在三互垂方向之膨脹所產生者矣．次一工作當為求方程式(1.1.4)所示變遷之各單獨步驟，換言之，吾人將自已知之係數 λ,μ,ν 計算其相當之單獨變遷．初須徵信者有一事：欲計算一切需求之量，則所可利用之方程式之數必恰等於未知量之數．以實際情形言，方程式(1.1.4)中，有十二個各自獨立之常數 λ,μ,ν，視為已知，標識各單獨變遷之量，其數亦相埒——以移動言，其數為三，以轉動言，其數亦為三，而以三互垂方向之膨脹言，其數為六．蓋藉以定膨脹軸方向者有三量，而藉以定主膨脹者，另有三量．

第1.1.5節已示移動部分之值為 λ_0，μ_0，ν_0，減去後可得均勻變遷之方程式(1.1.23)．欲將此方程式之九個係數與轉動及膨脹之特性相連繫，可設想該物體初經一在三互垂方向之膨脹，然後再經一依坐標

(1)Principal dilatation.

原點之轉動，乃計算某一特定質點(a,b,c)因此諸運動所起之位置變遷．一般而論，三膨脹軸之方向並不定與坐標軸合，試以九方向餘弦$\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$代表之，命膨脹常數為$l_0,m_0,n_0$，蓋(1.1.23)中之$\lambda,\mu,\nu$已有別義，不堪復用也．欲應用方程式(1.1.25)於此膨脹，吾人將使質點(a,b,c)參照於膨脹軸為坐標軸，其坐標乃為：

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 a+\beta_1 b+\gamma_1 c&=\xi\\ \alpha_2 a+\beta_2 b+\gamma_2 c&=\eta\\ \alpha_3 a+\beta_3 b+\gamma_3 c&=\zeta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.29)$$

然後使該物體膨脹，自(1.1.25)可得變遷後上述質點對膨脹軸之坐標為：

$$\xi'=l_0\xi,\ \ \eta'=m_0\eta,\ \ \zeta'=n_0\zeta\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.30)$$

乃可使該物體轉動，命膨脹軸自α,β,γ所示之方向轉入與方向餘弦$\alpha'_1,\beta'_1,\gamma'_1,\alpha'_2,\beta'_2,\gamma'_2,\alpha'_3,\beta'_3,\gamma'_3$相當之方向，此時上述質點對$(\alpha',\beta',\gamma')$三方向之坐標為$\xi',\eta',\zeta'$，蓋其對膨脹軸之位置迄未因轉動而變也．然對固定空間之原坐標系而言，其坐標已為x,y,z，蓋當轉動完成時，該物體之總變遷已畢事．故有：

$$\left.\begin{aligned}x&=\alpha'_1\xi'+\alpha'_2\eta'+\alpha'_3\zeta'\\ y&=\beta'_1\xi'+\beta'_2\eta'+\beta'_3\zeta'\\ z&=\gamma'_1\xi'+\gamma'_2\eta'+\gamma'_3\zeta'\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.31)$$

有此諸式，吾人用達標的之橋樑已具，吾人已化坐標x,y,z為含坐標a,b,c之項．所需者，僅將ξ',η',ζ'藉(1.1.30)以ξ,η,ζ表示之，然後再將後者藉(1.1.29)以a,b,c表示之．則以所得之三方程式與直綫均勻變遷之普遍方程式(1.1.23)相較，可得下列之九關係：

$$\left.\begin{aligned}l_0\alpha_1\alpha'_1+m_0\alpha_2\alpha'_2+n_0\alpha_3\alpha'_3&=\lambda_1\\ l_0\beta_1\alpha'_1+m_0\beta_2\alpha'_2+n_0\beta_3\alpha'_3&=\lambda_2\\ l_0\gamma_1\alpha'_1+m_0\gamma_2\alpha'_2+n_0\gamma_3\alpha'_3&=\lambda_3\end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l}
l_0\alpha_1\beta'_1+m_0\alpha_2\beta'_2+n_0\alpha_3\beta'_3=\mu_1\\
l_0\beta_1\beta'_1+m_0\beta_2\beta'_2+n_0\beta_3\beta'_3=\mu_2\\
l_0\gamma_1\beta'_1+m_0\gamma_2\beta'_2+n_0\gamma_3\beta'_3=\mu_3\\
l_0\alpha_1\gamma'_1+m_0\alpha_2\gamma'_2+n_0\alpha_3\gamma'_3=\nu_1\\
l_0\beta_1\gamma'_1+m_0\beta_2\gamma'_2+n_0\beta_3\gamma'_3=\nu_2\\
l_0\gamma_1\gamma'_1+m_0\gamma_2\gamma'_2+n_0\gamma_3\gamma'_3=\nu_3
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.32)$$

其結構方法非常明顯，如 λ, μ, ν 已知，則可自此九關係求所含之九未知量.

1.1.8. 在實際計算時吾人將限於討論無限小直線變遷之特殊情形.在多數過程中，此情形與實際相去無幾，尤以涉及固體之過程爲甚，然於有限變遷中，此亦常有其重要在，蓋自然間之有限變遷常於有限時間內發生，故可分解爲無數之無限小變遷，遞次於無限小之時間內實現之.

欲將無限小變遷之情形以方便形式簡化之，則以不用質點之最後坐標 x, y, z 而用其無限小分位移(1.1.3)爲上.方程式(1.1.4)成:

$$\left.\begin{array}{l}
u=\lambda_0+\lambda a+\lambda_2 b+\lambda_3 c\\
v=\mu_0+\mu_1 a+\mu b+\mu_3 c\\
w=\nu_0+\nu_1 a+\nu_2 b+\nu c
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.33)$$

是處曾簡寫:

$$\lambda_1-1=\lambda,\ \mu_2-1=\mu,\ \nu_3-1=\nu\cdots\cdots\cdots(1.1.34)$$

在(1.1.33)中所有十二係數 λ, μ, ν 均屬無限小者.

一面主膨脹(1.1.28)當然爲無限小者.故吾人命:

$$l_0-1=l,\ m_0-1=m,\ n_0-1=n\cdots\cdots\cdots(1.1.35)$$

更有進者，膨脹軸之方向餘弦 α, β, γ，以其本身而論，一般爲有限值甚明，然由轉動所起之變遷，則僅爲諸無限小變遷，故可書:

$$\alpha'_1=\alpha_1+d\alpha_1,\ \beta'_1=\beta_1+d\beta_1,\text{等等}.$$

如將此一切值代入方程式(1.1.32)中而更加入一般適用於方向餘

弦間之關係(I·2.2.21, I·2.2.22)及其微分間之關係(I·2.2.23, I·2.2.24),則此九關係取下列之形式:

$$\left.\begin{aligned}
l\alpha_1^2+m\alpha_2^2+n\alpha_3^2&=\lambda\\
l\alpha_1\beta_1+m\alpha_2\beta_2+n\alpha_3\beta_3-\zeta&=\lambda_2\\
l\alpha_1\gamma_1+m\alpha_2\gamma_2+n\alpha_3\gamma_3+\eta&=\lambda_3\\
l\alpha_1\beta_1+m\alpha_2\beta_2+n\alpha_3\beta_3+\zeta&=\mu_1\\
l\beta_1^2+m\beta_2^2+n\beta_3^2&=\mu\\
l\beta_1\gamma_1+m\beta_2\gamma_2+n\beta_3\gamma_3-\xi&=\mu_3\\
l\alpha_1\gamma_1+m\alpha_2\gamma_2+n\alpha_3\gamma_3-\eta&=\nu_1\\
l\beta_1\gamma_1+m\beta_2\gamma_2+n\beta_3\gamma_3+\xi&=\nu_2\\
l\gamma_1^2+m\gamma_2^2+n\gamma_3^2&=\nu
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.36)$$

是處 ξ,η,ζ 由卷I第2.2.10節乃使膨脹軸自(α,β,γ)方向至(α',β',γ')方向之無限小轉動之部分.其值可直接得為:

$$\xi=\frac{\nu_2-\mu_3}{2},\quad \eta=\frac{\lambda_3-\nu_1}{2},\quad \zeta=\frac{\mu_1-\lambda_2}{2}\cdots\cdots\cdots(1.1.37)$$

而膨脹之大小及方向則仍有下列之六方程式:

$$\left.\begin{aligned}
l\alpha_1^2+m\alpha_2^2+n\alpha_3^2&=\lambda\\
l\beta_1^2+m\beta_2^2+n\beta_3^2&=\mu\\
l\gamma_1^2+m\gamma_2^2+n\gamma_3^2&=\nu\\
l\beta_1\gamma_1+m\beta_2\gamma_2+n\beta_3\gamma_3&=\frac{\nu_2+\mu_3}{2}\\
l\gamma_1\alpha_1+m\gamma_2\alpha_2+n\gamma_3\alpha_3&=\frac{\lambda_3+\nu_1}{2}\\
l\alpha_1\beta_1+m\alpha_2\beta_2+n\alpha_3\beta_3&=\frac{\mu_1+\lambda_2}{2}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(1.1.38)$$

有此結果,吾人乃可視(1.1.7)式內行列式D之值以定除移動外其變遷是否限於三互垂方向之膨脹或尚有轉動與之相連繫. 蓋如此行列式為對稱者——即如行列互易而外貌不變——則ξ,η與ζ均為零,即無轉動發生.於此須注意者,即所不轉動者僅為膨脹軸,其他直線,則即

在純粹膨脹之情形亦變其方向，此已見於第 1.1.6 節中.

與此相反者卽變遷除移動外僅限於轉動之情形，此情形之特徵爲主膨脹 l,m,n 均消失.故由(1.1.38)及(1.1.37)：

$$\lambda=\mu=\nu=0,$$

$$\nu_2=-\mu_3=\xi,\ \lambda_3=-\nu_1=\eta,\ \mu_1=-\lambda_2=\zeta,$$

而分位移之方程式(1.1.33)成：

$$\left.\begin{aligned} u&=\lambda_0-\zeta b+\eta c\\ v&=\mu_0+\zeta a-\xi c\\ w&=\nu_0-\eta a+\xi b\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(1.1.39)$$

此與剛體各點位移之普遍方程式(I·2.2.36)全等.

今所餘之問題乃自方程式(1.1.38)以計算主膨脹 l,m,n 及方向餘弦(α,β,γ). 計算時吾人仍利用方向餘弦間之普遍關係，惟此時則採取(I·2.2.19)及(I·2.2.20)所示之形式.藉此之助，可自(1.1.38)立得下列諸關係：

$$\left.\begin{aligned} \lambda\alpha_1+\frac{\mu_1+\lambda_2}{2}\beta_1+\frac{\lambda_3+\nu_1}{2}\gamma_1&=l\alpha_1\\ \frac{\mu_1+\lambda_2}{2}\alpha_1+\mu\beta_1+\frac{\nu_2+\mu_3}{2}\gamma_1&=l\beta_1\\ \frac{\lambda_3+\nu_1}{2}\alpha_1+\frac{\nu_2+\mu_3}{2}\beta_1+\nu\gamma_1&=l\gamma_1\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1.1.40)$$

此爲 $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ 之平直齊次方程式.三量不能同時爲零，故此諸方程式之行列式必爲零——換言之，吾人須有：

$$\begin{vmatrix} \lambda-l & \frac{\mu_1+\lambda_2}{2} & \frac{\lambda_3+\nu_1}{2}\\ \frac{\mu_1+\lambda_2}{2} & \mu-l & \frac{\nu_2+\mu_3}{2}\\ \frac{\lambda_3+\nu_1}{2} & \frac{\nu_2+\mu_3}{2} & \nu-l\end{vmatrix}=0\cdots\cdots(1.1.41)$$

l 之一三次方程式.在(1.1.40)式之諸係數中，下標 1 並未有若何獨異處，故卽此同一之方程式(1.1.41)並適用於其他二主膨脹 m 與 n，換

言之，此方程式之三根即代表l,m,n之值，故亦常爲實根．三根中何者可代表l,m或n當然仍未決定；例如，吾人可同意使$l\geqq m\geqq n$而無損於問題之普遍性．已知l,m,n可由(1.1.40)計算其相當之α,β,γ，惟其公共之正負號則仍未定．

以體積膨脹(1.1.22)而論，則在無限小變遷之情形，吾人如加入(1.1.34)之關係而略去較高級之無限小量，可自函數行列式(1.1.7)得下列之值：

$$D-1=\lambda+\mu+\nu \cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.42)$$

由此觀之，有關於體積膨脹者僅此行列式之對角線項而已．讀者如記取轉動與體積膨脹全無關連之事實，則所得之結論亦當如此．故由(1.1.27)及(1.1.35)：

$$D-1=l_0m_0n_0-1=l+m+n \cdots\cdots(1.1.43)$$

此乃l之三次方程式——即(1.1.41)——三根之和，故等於此方程式中l之係數：

$$l+m+n=\lambda+\mu+\nu \cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.44)$$

讀者如將(1.1.38)之首三式互加之則直接所見之結果與此正相同．

1.1.9. 一直線變換之分解爲一移動、一轉動及一沿三互垂方向之膨脹，並非惟一之可能分解法，所以見其重要者，其物理意義特簡故耳．此外亦尚有比較簡單之分解法在．例如，下列之無限小均勻變換：

$$\left.\begin{aligned} u&=\lambda a+\lambda_2b+\lambda_3c\\ v&=\mu_1a+\mu b+\mu_3c\\ w&=\nu_1a+\nu_2b+\nu c\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.45)$$

得視爲由一沿三坐標軸方向之膨脹所產生，其主膨脹爲λ,μ,ν，此外再加六變換，以方程式$u=\lambda_2b$，$v=0$，$w=0$，$u=\lambda_3c$，$v=0$，$w=0$等等代表之．諸變換遂行之先後，無關重要，蓋因次序變更而生之差別僅爲較小之數量級也（參閱卷 I 第 2.2.10 節）．六變換各具一簡單意義：在第一變換中，位移均發生於x軸之方向，與a及c無關——此

即每一平行於 xz 平面之平面各行一簡單之移動，整個平面向 x 方向位移，並無轉動或形變發生，惟位移之大小則依平面而異．此一變換與剪刀兩半上下滑動之狀況相似，故謂之一剪變．吾人因得一定理：凡無限小之均勻變換均可由一個沿三坐標軸方向之膨脹及平行於坐標平面之六個平面剪變生之，剪變運動係沿坐標軸之方向．

此定理視之甚簡，然一般而論其物理涵義則較繁．例如，取無限小轉動 $u=-\zeta b, v=\zeta a,\ w=0$ 而論，此乃普遍位移(1.1.39)之一特例，依據目前之觀點，可視為由二連續剪變所產生——即所謂由有關物體形變之變換所產生．後者之引用無寧為多餘之事，蓋當然互相消去也．

1.1.10. 上節所論之直線變換，讀者非當僅以簡單之特例視之，在任意有限變換之最普遍情形中，此有其極端重要在．今試重取方程式(1.1.2)而檢討之．其主要之理由有可得言者，任何任意函數可視為在變數之無限小區域內之一次函數．

試專論一質點 P_0，其坐標為 a_0,b_0,c_0，變換後移至 x_0,y_0,z_0，其值由(1.1.2)為：

$$x_0=f(a_0,b_0,c_0),y_0=\phi(a_0,b_0,c_0),z_0=\psi(a_0,b_0,c_0)\cdots\cdots(1.1.46)$$

如在 P_0 點之貼鄰再取一質點，其坐標為：

$$a=a_0+a',\quad b=b_0+b',\quad c=c_0+c'\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.47)$$

設變換後移至一點：

$$x=x_0+x',\quad y=y_0+y',\quad z=z_0+z'\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.48)$$

則依據吾人之假定，a',b',c' 為無限小者，故由(1.1.2)及(1.1.46)如用 Taylor 定理展開之可得：

$$\left.\begin{aligned}
x'&=\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_0 a'+\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)_0 b'+\left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)_0 c'\\
y'&=\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_0 a'+\left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)_0 b'+\left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)_0 c'\\
z'&=\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)_0 a'+\left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)_0 b'+\left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)_0 c'
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.49)$$

使 a',b',c' 遍經一切可能無限小值，則自此諸方程式可得物體內環繞 P_0 點之無限小部分內之變遷，故吾人可視作產生此變遷者，乃一有限移動，其成分為：

$$x_0-a_0=u_0,\quad y_0-b_0=v_0,\quad z_0-c_0=w_0,$$

使一點 P 自(a,b,c)之位置移至：

$$a+u_0=x_0+a',\quad b+v_0=y_0+b',\quad c+w_0=z_0+c'.$$

再加一有限之直線均勻變換(1.1.49)，以 P_0 點為靜止之初點，在此過程中 P 點自坐標(a',b',c')換至坐標(x',y',z').

吾人如應用下列之前書於變換(1.1.49)之九係數：

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_0=\lambda_1,\ \left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)_0=\lambda_2,\ \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)_0=\lambda_3\\ \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_0=\mu_1,\ \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)_0=\mu_2,\ \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)_0=\mu_3\\ \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)_0=\nu_1,\ \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)_0=\nu_2,\ \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)_0=\nu_3\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.50)$$

則在形式上所得者亦為方程式(1.1.23)，前述諸結果因之自得.

由此觀之，凡物體以任何方式變換時，物體各無限小部分或物體之各"素"均行直綫變遷，此與前述之直綫變換惟一之區別，卽在此變換之係數(λ,μ,ν)則因"素"之不同而易其值. 吾人今可將由此事實所可得之最重要定理縷述之.

卽在最普遍之變換中，無限小平行六面體仍保持其為平行六面體，僅其角度可有任意之變遷；同樣，無限小曲面之級次亦持續不變.例如，一無限小球體可變換為一橢圓球，球心成橢圓球之心. 由此，可得一結論，初視之甚覺奇特.此結論卽謂，物體曲面所由組成之質點，變換後與變換前同. 蓋凡變遷前不在該曲面之質點可視為完全處於物體內部一球體之心，此中心亦當持續處物體之內部，同樣當然亦適用於其相反變換，此結論乃證明.

體積膨脹與(1.1.22)式中同由函數行列式(1.1.7)定之：

$$D=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c}\\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{y\partial}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c}\\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c}\end{vmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.51)$$

爲簡便計，是處已將下標 0 略去．D 之值卽代表體內含質點(a,b,c)之素變遷後與變遷前體積之比．

吾人如解方程式(1.1.49)以求 a', b', c'，則所得者爲一平直齊次式，其係數(λ',μ',ν')之值可自(1.1.6)得之：

$$\lambda'_1=\frac{[\lambda_1]}{D}=\frac{\left[\frac{\partial x}{\partial a}\right]}{D}=\frac{\frac{\partial y}{\partial b}\ \frac{\partial z}{\partial c}-\frac{\partial y}{\partial c}\ \frac{\partial z}{\partial b}}{D},\text{等等}\cdots(1.1.52)$$

然在另一方面，吾人亦可先解方程式(1.1.2)以求 a,b,c，然後祇將(1.1.47)及(1.1.48)之代換依據 Taylor 定理展開之．如是可得類似(1.1.49)之諸式：

$$a'=\frac{\partial a}{\partial x}x'+\frac{\partial a}{\partial y}y'+\frac{\partial a}{\partial z}z',$$

$$b'=\frac{\partial b}{\partial y}x'+\frac{\partial b}{\partial y}y'+\frac{\partial b}{\partial z}z',$$

$$c'=\frac{\partial c}{\partial x}x'+\frac{\partial c}{\partial y}y'+\frac{\partial c}{\partial z}z'.$$

是處之諸係數必當與諸(λ',μ',ν')合．乃成立下列之變換公式：

$$\frac{\partial a}{\partial x}=\frac{\left[\frac{\partial x}{\partial a}\right]}{D},\quad \frac{\partial a}{\partial y}=\frac{\left[\frac{\partial y}{\partial a}\right]}{D}\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.53)$$

使以 x,y,z 爲獨立量之微分係數一般與以 a,b,c 爲獨立量之微分係數相連繫．

其自 x,y,z 至 a,b,c 爲獨立量之相反過渡當然亦有類似之公式可成立．此際之函數行列式：

$$D'=\begin{vmatrix}\frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial a}{\partial z}\\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial z}\\ \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial x}\\ \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial y}\\ \frac{\partial a}{\partial z} & \frac{\partial b}{\partial z} & \frac{\partial c}{\partial z}\end{vmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.54)$$

乃指當一質點自 x,y,z 位置移至 a,b,c 位置時，體內一素體積變更之比．二過渡適相抵消，故有：

$$D\cdot D'=1.$$

此關係亦可直接求得，吾人所須為者，乃應用行列式乘法定理（第1.1.4節）之第二形式於(1.1.51)及(1.1.54)，並記取：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial x}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial c}\cdot\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\partial x}{\partial x}=1,\\&\frac{\partial x}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial c}\cdot\frac{\partial c}{\partial y}=\frac{\partial x}{\partial y}=0,\text{等等}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1.1.56)$$

所關特殊重要者非僅體素之體積膨脹 $D-1$，並其轉動及膨脹．均可應用九係數 λ,μ,ν 之値(1.1.50)自方程式(1.1.32)得之．

1.1.11． 為示實際計算情形，吾人將討論一任何無限小變換之特例．設此變換具分位移(1.1.3)，為 a,b,c 之任意無限小函數．則第1.1.8節中所述之一切定理當適用於此物體含 a_0,b_0,c_0 點之素．轉動可藉(1.1.37)知之，膨脹可由(1.1.38)知之，而諸無限小係數(λ,μ,ν)則由(1.1.50),(1.1.3)及(1.1.34)當有下列諸値：

$$\left.\begin{aligned}&\lambda=\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)_0,\ \lambda_2=\left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)_0,\ \lambda_3=\left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)_0,\\&\mu_1=\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)_0,\ \mu\ =\left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)_0,\ \mu_3=\left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)_0,\\&\nu_1=\left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)_0,\ \nu_2=\left(\frac{\partial w}{\partial b}\right)_0,\ \nu=\left(\frac{\partial w}{\partial c}\right)_0.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1.1.57)$$

採用分位移 u,v,w 後，字母 x,y,z 於其前具之意義，此際已屬多

餘，蓋凡遇 x,y,z 處，均可以 $a+u$, $b+v$, $c+w$ 代之也．故 x,y,z 常用以代表前用之 a,b,c，而 a,b,c 可完全屏置不用．然在無限小位移之情形，即一切前用符號仍保持其固有意義，亦可在一切微分係數中以 x,y,z 替代 a,b,c 而不致有甚大錯誤發生．例如：

$$\frac{\partial u}{\partial a}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial a}$$

或由(1.1.3)：

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial a}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial a}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.58)$$

較高級之微量可不計也．一切其他之微分係數其結果亦同．

今如再略去各處之下標 0，則由 (1.1.37) 及 (1.1.57) 可得分轉動爲：

$$\xi=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right),\eta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right),\zeta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdots\cdots(1.1.59)$$

欲計算膨脹，可簡書：

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial u}{\partial x}=x_x,\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=y_y,\ \dfrac{\partial w}{\partial z}=z_z\\ \dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}=y_z,\ \dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}=z_x,\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=x_y\end{array}\right\}\cdots\cdots(1.1.60)$$

是處顯有：

$$y_z=z_y,\quad z_x=x_z,\quad x_y=y_x\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.60a)$$

則由(1.1.42)及(1.1.57)體積膨脹爲：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=x_x+y_y+z_z\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.61)$$

更由(1.1.57)主膨脹爲三次方程式(1.1.41)內 l 之三根：

$$\begin{vmatrix}x_x-l & \frac{1}{2}x_y & \frac{1}{2}x_z\\ \frac{1}{2}y_x & y_y-l & \frac{1}{2}y_z\\ \frac{1}{2}z_x & \frac{1}{2}z_y & z_z-l\end{vmatrix}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.62)$$

其相當膨脹軸之方向可藉(1.1.40)及(1.1.57)自下列方程式中任何二式得之:

$$\left.\begin{aligned}(x_x-l)\alpha+\frac{x_y}{2}\beta+\frac{x_z}{2}\gamma=0\\ \frac{y_x}{2}\alpha+(y_y-l)\beta+\frac{y_z}{2}\gamma=0\\ \frac{z_x}{2}\alpha+\frac{z_y}{2}\beta+(z_z-l)\gamma=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.63)$$

是處諸方向餘弦之公共正負號則仍爲未定.

反之,如主膨脹l,m,n及其相當之膨脹軸已知在(α,β,γ)之方向,則由(1.1.38)膨脹之成分卽唯一決定:

$$\left.\begin{aligned}x_x=l\alpha_1{}^2+m\alpha_2{}^2+n\alpha_3{}^2,\cdots\cdots\\ \frac{1}{2}z_y=\frac{1}{2}y_z=l\beta_1\gamma_1+m\beta_2\gamma_2+n\beta_3\gamma_3\cdots\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1.1.64)$$

1.1.12. 是諸種種關係不僅於柔體理論中爲不可少,且在物理學之其他若干部門中亦見其重要性,矢量徵積學乃特各賦以專名而以簡單符號表示之.則由成分爲u,v,w之位移矢量q所得之矢量,其成分爲(1.1.59)式中之括弧內諸量者,謂之矢量q之"旋量"(curl),而成分爲ξ,η,ζ之旋量$\mathbf{o}$可不用(1.1.59)之三方程式而以一式表示之:

$$\mathbf{o}=\frac{1}{2}\operatorname{curl}\ q\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.65)$$

在上式中機械轉動並不等於旋量之全部而僅等於其半,此形式上之弱點,爲無法否認者.然此命名法之本身亦有其可成立之道在,旋量之運算在力學中並無多所應用處,故此弱點亦不甚顯著,其最大之應用在熱力學中,則並無轉動之問題發生.

復次,位移q經(1.1.61)所示運算所得之標量謂之"散量[1]"(div),而體積膨脹(1.1.61)可書如下式:

$$\operatorname{div}\ q\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.1.66)$$

(1)Divergence.

一切對於某特定坐標系之參照，此情形亦均所不許.

最後，關於在三互垂方向之膨脹，則與矢量不同，不能以一單獨之有向量標識之，此代表一種較高級之構合，謂之"張量[1]"；如吾人視矢量爲第一級之張量；則在三互垂方向之膨脹係屬於第二級之張量三合組.此張量由六個各自獨立量決定之——此六量或爲三"主值" l,m,n 與三相當之互垂"主軸"（$\alpha_1,\cdots\cdots\gamma_3$），各軸之二相反方向完全等值可以互易，或爲 $x_x,y_y,z_z,\frac{1}{2}y_z,\frac{1}{2}z_x,\frac{1}{2}x_y$ 之六"分量". 因有(1.1.60a)之關係，故此張量謂之對稱張量.主值、主軸之方向及分量間有(1.1.62),(1.1.63)及(1.1.64)之關係.在主值l,m,n各等之特殊情形(均勻膨脹)，則有：

$$x_x=y_y=z_z=l=m=n,$$

$$x_y=y_z=z_x=0.$$

主軸乃完全無定.

對稱張量之其他諸性質當俟下文詳述之(第1.2.7節).

---

(1)Tensor.

第二章 動力學定律

1.2.1. 純粹靜力學之探討既畢,乃可開始討論動力學部分,所謂動力學者,係指研求產生物體形變之力而言也.今先論平衡之條件.

試取一任何物體,因或種力之作用而已形變——例如,一彎曲之桿,一扭轉之綫,或爲一壓縮之氣體.作用於此物體上之諸力,可別爲二類:

(1) 作用於物體所有部分兼括其內部之力——"體力(1)". 吾人命之與物體諸素之質量成比例,例如重力.

設某質素之體積爲 $d\tau=dx\cdot dy\cdot dz$, 其密度爲 k, 則可命作用於此質素上之體力,其成分爲(參閱卷I第1.3.4節):

$$Xkd\tau,\quad Ykd\tau,\quad Zkd\tau \cdots\cdots\cdots\cdots(1.2.1)$$

X,Y,Z 諸量視爲有限者.

(2) 作用於物體面上之力——"面力(2)". 以物體面上任何部分 σ 言,作用其上之合力與 σ 之面積二者之商謂之在 σ 上之"平均壓力"如此部分縮爲一面素 $d\sigma$, 則此商簡稱爲在 $d\sigma$ 上之"脅強(3)",當視爲一有限量.作用於 $d\sigma$ 上之面力,非僅與 $d\sigma$ 之位置有關,且與 $d\sigma$ 之方向亦有關,故欲表示在 $d\sigma$ 面上之面力,須將其分力 X,Y,Z 各字母附以下標 ν, ν 爲 $d\sigma$ 之法綫,指向物體內部.則作用於面素 $d\sigma$ 上面力之分力爲:

$$X_\nu d\sigma,\quad Y_\nu d\sigma,\quad Z_\nu d\sigma \cdots\cdots\cdots\cdots(1.2.2)$$

此面力之方向與法綫 ν 可成任何之角.如二方向合,則面力作用於使物體壓縮之向旨,如氣體之壓力是.如二方向適相反,則面力作用於使物體膨脹之向旨,如緊張綫之張力是.如二方向互相正交,則面力作用於剪變之向旨(第1.1.9節),如扭力或摩擦力之情形是.

分力爲 X_ν,Y_ν,Z_ν 之壓力,其量綱當爲力與面之商,或 $[ML^{-1}T^{-2}]$

(1) Body-force. (2) Surface-force. (3) Stress.

(參閱卷 I 第 1.1.6 節).

1.2.2. 柔體平衡諸定律蘊含於下列之普遍力學定律中(卷 I.第2.2.21 節): 如某點系在平衡狀態中,則所作用於此視爲剛性點系之諸外力互持平衡.

此定律之所以得廣遍應用者，乃緣物體之任何部分均可視爲一點系也.例如,吾人可以任何假想之曲面 σ,分物體爲 1 及 2 二部(圖1.2.1)而取 1 爲一點系,則物體之此部分可設想爲剛性者，當因所加外力之作用而平衡，然依據卷 I 第 2.2.21 節,此外力除體力與作用於真實面上之面力外，當兼括作用於假想面 σ 上之力.此力係由 2 所發生，如欲將 2 部移去而 1 部仍持平衡,則必加另力以替代之,此卽等於 2 部所加於 1 部之力.

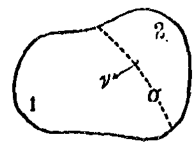

圖 1.2.1

以吾人所定之術語述之，此物體第 1 部面上之每一面素 $d\sigma$ 均有一面力作用於其上,其成分爲(1.2.2)式所示者. 吾人乃不得不假定物體內部之各點均有壓力存在,作用於完全特定之方向. 壓力之大小,除與方面素 $d\sigma$ 之位置有關外,且與面素或其法綫 ν 之方向有關. 如 ν 之向反——此卽謂吾人以該物體之第 2 部爲一點系——則 (1.2.2) 當代以 1 部所加於 2 部在 $d\sigma$ 面素上之面力，依照作用與反作用相等原理，此與前者適相反.故一般有:

$$X_{-\nu}=-X_{\nu},\quad Y_{-\nu}=-Y_{\nu},\quad Z_{-\nu}=-Z_{\nu}\cdots\cdots\cdots\cdots(1.2.3)$$

欲知壓力可因所在點 $d\sigma$ 方向不同而異其值之情形，可討論一水平圓柱之例.此圓柱在其長度之方向有相等而相反之力緊張之(圖 1.2.2). 試在其內部割一水平面,

圖 1.2.2

而視在水平面上者爲一點系，則作用於 P 點面素上之壓力爲零,蓋吾人如將其下部移去,此圓柱之平衡迄未稍擾也.然如經過此同一點 P 割一豎直平面而視在平面之左之部分爲一點系，則多少有壓力作用於 P

點之面素上，蓋如將其右部移去，除非有另加之力，此點系將失其平衡.

關於物體在某定點 P 之壓力其大小及方向與經過 P 點面素之法綫方向有關之普遍定律，將於第 1.2.4 節中自動力學諸關係闡述之.

1.2.3. 柔體平衡之定律既化為普通力學之定律矣.更推廣之，柔體運動之定律，亦得以普通力學之定律演化之.此僅須應用d'Alembert原理，卽謂在質點系之任何運動中，作用於假定係剛體之物體上之外力及慣性阻力，無論何時，均持平衡.

因一質素之慣性阻力：

$$-\frac{d^2x}{dt^2}kd\tau,\quad -\frac{d^2y}{dt^2}kd\tau,\quad -\frac{d^2z}{dt^2}kd\tau\cdots\cdots\cdots\cdots(1.2.4)$$

與此質素之質量成比例，故屬於體力.柔體動力學與靜力學之全部區別，卽在負分加速度之須加於每單位質量之分力 X,Y,Z(1.2.1)中.

故如應用剛體平衡之六條件方程式(I·2.1.26 a)於此際之情形，而仍用前引之符號，則可得柔體運動之六方程式如下：

$$\int\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)kd\tau+\int X_\nu d\sigma=0,\text{等等}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.2.5)$$

$$\int\left\{y\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)-z\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right\}kd\tau$$

$$+\int(yZ_\nu-zY_\nu)d\sigma=0,\text{等等}\cdots\cdots(1.2.6)$$

是處 $d\tau$ 乃物體中任何選定部分之體積素，$d\sigma$ 爲其面素，積分係指運算於此部分而言，此諸方程式當然亦適用於物體之全部.

方程式(1.2.5)及(1.2.6)已將力與加速度間之關係明示無餘.於下列諸節中吾人僅將進而檢討其內容.

1.2.4. 玆先應用方程式(1.2.5)於物體內部某無限小之質素，其形狀選定如下：經任意一點 P 畫三直線各與坐標軸之正向平行(圖1.2.3)，與此三直線相交者有一平面，其距離無限近於 P，圖中在 P 之

前面．如是可得一四面體．三邊互以直角相遇於頂點P．如命相對於P點之面其面積為$d\sigma$，其指向四面體內部之法綫為ν，而其餘各依照其法綫為$d\sigma_x$，$d\sigma_y$，$d\sigma_z$，則後述之三面即代表$d\sigma$在三坐標平面上之投影，故有下列之關係：

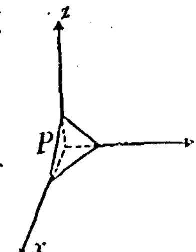

圖 1.2.3

$$d\sigma_x = -d\sigma\cos(\nu x),\ d\sigma_y = -d\sigma\cos(\nu y),$$
$$d\sigma_z = -d\sigma\cos(\nu z) \cdots\cdots\cdots\cdots (1.2.7)$$

蓋一切面積皆係正量而法綫ν與三坐標軸方向所成之角皆係鈍角也．

在方程式(1.2.5)中，體積分在此情形化為一單獨項，含四面體之體積$d\tau$為一因子，而面積分則等於四項之和，每項相當於四面體之一面而與其面積成比例．因$d\tau$為第三級微量而諸$d\sigma$為第二級微量，故體積分與面積分之各項較，可略去不論．方程式(1.2.5)乃成：

$$X_x d\sigma_x + X_y d\sigma_y + X_z d\sigma_z + X_\nu d\sigma = 0,$$

式中吾人命四面體各面之內法綫以x, y, z, ν代表之．此與(1.2.7)併合可得：

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= X_x\cos(\nu x) + X_y\cos(\nu y) + X_z\cos(\nu z) \\ &\text{同樣可自(1.2.5)之其餘二方程式得：} \\ Y_\nu &= Y_x\cos(\nu x) + Y_y\cos(\nu y) + Y_z\cos(\nu z) \\ Z_\nu &= Z_x\cos(\nu x) + Z_y\cos(\nu y) + Z_z\cos(\nu z) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (1.2.8)$$

此諸方程式示在物體內每一點P，壓力X_ν, Y_ν, Z_ν之大小及方向與面素法綫ν之方向二者間之關係(參閱第1.2.2節末段)．$d\sigma$是否適經過P點或僅無限近於P點，諸分壓力之有限值無稍區別也．

因之，如九個分壓力$X_x, \cdots\cdots Z_z$已知，則在任何ν之方向之壓力即定．如ν與一坐標軸疊合，則此諸方式為恆等式．上列方程式並普遍適合(1.2.3)之條件，蓋當ν反向時餘弦之正負亦變也．

相當於坐標面$d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z$之九個分壓力，其在對角綫上者，$X_x, Y_y, Z_z$代表與面正交之壓力；且正值常指壓縮而言，與坐標軸方

向之選擇無關，如氣體之壓力是；負值常指張力而言，如緊張綫之情形是(參閱第 1.2.1 節).蓋當坐標反向時，面力成分與內向之法綫均易其正負也.三正交之壓力當然並不定需具同一之正負.

其餘之六分壓力為切線壓力或剪壓力(1)(剪力(2))，如扭轉(3)或摩擦所過者是.最後吾人當記取，上述種種，均係指物體之無限小質素而言，分壓力之值因質素而各異.故一般而論，九分壓力 X_x，……Z_z 應視作 x,y,z 之函數.

1.2.5. 欲利用動力學方程式(1.2.5)及(1.2.6)而求更有所得，則必先明一數學定理，於其他場合，為用亦多，此卽關於空間積分之變換為面積分也.命 ϕ 為空間坐標 x,y,z 之一單值連續函數.試尋求下列積分之值：

$$\int\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot d\tau \cdots\cdots\cdots\cdots(1.2.9)$$

此積分當運算於空間中之一特定區域.為普遍計，在第 1.2.4 圖中此區域外包之曲面，自外視之，有凹隙處.實者此曲面可由不同且分立之種種面構成之，並無礙於下述諸定理之成立.

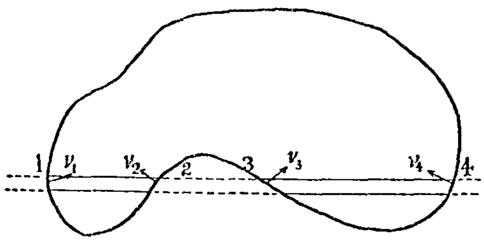

圖 1.2.4

命 $d\tau=dx\cdot dy\cdot dz$，先依 x 取積分，y,z 及 dy，dz 保持不變——此謂將截面為 $dy\cdot dz$ 而平行於 x 軸之無限薄圓柱體之諸體積素綜加之.

如此圓柱體割積分空間之曲面於 1,2,3,4 諸點，則圓柱體被割為數段，整個圓柱體之積分卽等於圓柱體各段積分之和——在所討論之情形卽：

(1)Shearing pressure. (2)Shear. (3)Torsion.

$$dy\,dz(\phi_2-\phi_1+\phi_4-\phi_3)\cdots\cdots\cdots\cdots(1.2.10)$$

如命圓柱體自積分空間曲面上所割取之面素其面積爲 $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3, d\sigma_4$,而其內指法綫爲 $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$,則:

$$dy\,dz=d\sigma_1\cos(\nu_1 x)=-d\sigma_2\cos(\nu_2 x)$$
$$=d\sigma_3\cos(\nu_3 x)=-d\sigma_4\cos(\nu_4 x)\cdots\cdots\cdots\cdots(1.2.11)$$

而運算於全圓柱體之積分(1.2.10)爲:

$$-\phi_1\cos(\nu_1 x)d\sigma_1-\phi_2\cos(\nu_2 x)d\sigma_2-\phi_3\cos(\nu_3 x)d\sigma_3$$
$$-\phi_4\cos(\nu_4 x)d\sigma_4$$

吾人可設想整個積分空間分爲無窮數平行於x軸之無限薄圓柱體,每一無限薄之圓柱體卽有一相當之式,將此諸式互加卽得所求之積分,可書爲:

$$\int\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot d\tau=-\int\phi\cos(\nu x)d\sigma\cdots\cdots\cdots\cdots(1.2.12)$$

此當運算於積分空間曲面上之一切面素 $d\sigma$.

例如,如使 $\phi=$常數,則可得一恆等式:

$$\int\cos(\nu x)d\sigma=0.$$

此恆等式得適用於任何形狀之曲面,其理甚明,可應用(1.2.11)之關係以知之.

關於上述公式今再論若干更普遍及更特殊之例,於往後所遇問題中不無助益.

如命 ψ 爲任何另一單值連續函數,則方程式:

$$\frac{\partial(\phi\cdot\psi)}{\partial x}=\phi\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

當積分於任何區域時,依據(1.2.12),其左首可得一面積分,其右首可得二空間積分,故可書:

$$\int\phi\frac{\partial\psi}{\partial x}d\tau=-\int\phi\psi\cos(\nu x)d\sigma-\int\psi\frac{\partial\phi}{\partial x}d\tau\cdots\cdots\cdots(1.2.13)$$

此關係所示者，爲分部積分法應用於三維區域之定理.

下文所列爲方程式(1.2.13)應用之一，其用甚廣.

$$\int\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)d\tau$$
$$=-\int\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\cos(\nu x)+\frac{\partial\phi}{\partial y}\cos(\nu y)+\frac{\partial\phi}{\partial z}\cos(\nu z)\right)\psi\,d\sigma$$
$$-\int\psi\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)d\tau$$

或由(I·1.3.39a)及(I·1.3.48)：

$$\int\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)d\tau$$
$$=-\int\psi\frac{\partial\phi}{\partial\nu}d\sigma-\int\psi\cdot\Delta\phi\cdot d\tau\cdots\text{(1.2.14)}$$

在 $\psi=\phi$ 之特殊情形，則得：

$$\int\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right\}d\tau$$
$$=-\int\phi\frac{\partial\phi}{\partial\nu}d\sigma-\int\phi\cdot\Delta\phi\cdot d\tau\cdots\text{(1.2.15)}$$

如 $\psi=$ 常數，則：

$$\int\Delta\phi\cdot d\tau=-\int\frac{\partial\phi}{\partial\nu}d\sigma\cdots\cdots\cdots\text{(1.2.16)}$$

1.2.6. 今仍取動力學方程式(1.2.5)以應用於物體之任何部分.所取者設爲其第一式，吾人可將其中之 X_ν 以(1.2.8)代之，則由(1.2.12)，面積可書爲一空間積分，例如：

$$\int X_x\cos(\nu,x)d\sigma=-\int\frac{\partial X_x}{\partial x}d\tau,$$

此空間積分可與(1.2.5)之第一個積分合成一單獨之空間積分.再如選取之物體部分爲無限小之體積 $d\tau$，則此空間積分化爲一單獨項，屏去因子 $d\tau$ 可得：

$$\left.\begin{aligned}&\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)k-\frac{\partial X_x}{\partial x}-\frac{\partial X_y}{\partial y}-\frac{\partial X_z}{\partial z}=0\\ &\text{同樣有：}\\ &\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)k-\frac{\partial Y_x}{\partial x}-\frac{\partial Y_y}{\partial y}-\frac{\partial Y_z}{\partial z}=0\\ &\text{及：}\\ &\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)k-\frac{\partial Z_x}{\partial x}-\frac{\partial Z_y}{\partial y}-\frac{\partial Z_z}{\partial z}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1.2.17)$$

得適用於物體之任何一點.

此諸方程式之特徵,乃在式中並無分壓力之絕對值,所見者僅爲其空間微分係數.

一均勻之壓力,不論其如何龐大,迄不能有運動因以產生. 欲產生運動者,必須有壓力之空間變動, 換言之,必須有一"壓力梯度[1]".故依此觀點,壓力之物理意義有與勢之意義相似處（參閱卷 I 第 1.3.12 節及以後諸節).

在動力學方程式 (1.2.6) 中吾人可同樣依照下列之式將面積分變換爲一空間積分：

$$\int yZ_x\cos(\nu x)\,d\sigma=-\int\frac{\partial(yZ_x)}{\partial x}d\tau.$$

自其第一式可得：

$$\left\{y\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)-z\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right\}k-\frac{\partial}{\partial x}(yZ_x-zY_x)$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}(yZ_y-zY_y)-\frac{\partial}{\partial z}(yZ_z-zY_z)=0.$$

再如藉(1.2.17)以消去體力而取導數則：

$$\left.\begin{aligned}&Z_y=Y_z\\ \text{同樣可得：}\quad&X_z=Z_x\\ \text{與：}\quad&Y_x=X_y\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1.2.18)$$

---

(1) Pressure gradient.

然則壓力之切綫成分兩兩相等而九個分壓力 $X_x, \cdots\cdots Z_z$ 可普遍化爲六個.

自物理觀點言，方程式(1.2.17),(1.2.18)與方程式(1.2.5)，(1.2.6)可等量齊觀，蓋於物體之任何部分取積分可自前者以至後者也.下文吾人將以此諸方程式爲討論一切關於平衡及運動問題之張本.

1.2.7. 有(1.2.18)之關係,(1.2.8)所示關於體內某點壓力情形之定律得因以簡化多多,次將此諸定律之形式更詳論之. 吾人先問:如六分壓力賦以任意值，則有否壓力與之垂直之面素.——換言之,卽有否壓力之方向與所作用點面素法綫之方向疊合之情形.其條件爲:

$$X_\nu = p\cos(\nu x), \quad Y_\nu = p\cos(\nu y), \quad Z_\nu = p\cos(\nu z).$$

是處 p 指壓力之值.代入(1.2.8)式得:

$$\left.\begin{aligned} (X_x - p)\cos(\nu x) + X_y\cos(\nu y) + X_z\cos(\nu z) = 0 \\ Y_x\cos(\nu x) + (Y_y - p)\cos(\nu y) + Y_z\cos(\nu z) = 0 \\ Z_x\cos(\nu x) + Z_y\cos(\nu y) + (Z_z - p)\cos(\nu z) = 0 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(1.2.19)$$

此諸式除所用之名稱及此際所論者僅爲有限量一事外，完全與方程式(1.1.40)或(1.1.63)恆等;故由此所可得之結論亦同，茲扼要述之如下.

物體內某素之壓力狀態，常可以一對稱張量代表之，或爲壓力張量,或爲張力張量,其成分爲六分壓力,其主値卽所謂之“主壓力”p,q,r，三主壓力卽具(1.1.62)形式之一三次方程式之根.此張量之主軸,卽壓力與之垂直之面素之法綫,故同時卽爲相當主壓力之方向.整個壓力狀態之可藉由具(1.1.64)形式諸方程式而得之主壓力之大小及方向完全決定，正如其可藉對任何坐標系之六分壓力而完全決定也. 在特殊情形,如三主壓力各各相等(此於完全具彈性液體之情形中常遇之,第2.4.1節),則法綫壓力 $X_x = Y_y = Z_z = p = q = r$,切綫壓力 $X_y = Y_z = Z_x = 0$,而主軸之方向無定.

欲於壓力(X_ν, Y_ν, Z_ν)及面素法綫 ν 之方向二者間關係之一般情

形得一圖示之觀，可構成下列之理想第二級曲面(橢圓球面[1]或雙曲面[2])：

$$X_x x^2+Y_y y^2+Z_z z^2+2Y_z yz+2Z_x zx+2X_y xy=\pm 1 \cdots\cdots(1.2.20)$$

式中右邊之正負號當取其使形學運算爲眞實者.

於此曲面，下列定理可證明成立：如此曲面之一直徑其方向爲 ν，則在此直徑一端之曲面法綫，其方向卽爲作用於與 ν 正交一面素上壓力之方向.

蓋如 $f(x,y,z)=0$ 爲此曲面之方程式，則：

$$\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial f}{\partial z} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1.2.21)$$

乃此曲面上於 (x,y,z) 點法綫之向比，再如此點處於方向爲 ν 之直徑上，則：

$$x:y:z=\cos(\nu x):\cos(\nu y):\cos(\nu z).$$

如將此諸値與(1.2.20)式並用於函數 f，則(1.2.21)所示之比卽變爲 $X_\nu:Y_\nu:Z_\nu$，此可自(1.2.8)一望而知也.

依據吾人所賦與曲面(1.2.20)之物理意義，其形狀及位置俱與坐標系之選擇無關.曲面之各軸卽各主壓力之軸，至屬明顯，如 $p=q=r$，則此曲面爲一球面.

普遍言之，自坐標 x,y,z 以至另一正交直線坐標，(1.2.20)式持續不變.蓋如捨(1.2.20)而以 x',y',z' 代 x,y,z，同時以 $X'_{x'},\cdots Z'_{z'}$ 代 $X_x,\cdots Z_z$ 而得之方程式，代表同一曲面也.故有撇分壓力 $X'_{x'},\cdots$ 與無撇分壓力 $X_x,\cdots$ 間之關係必須爲以無撇成分及無撇坐標代替有撇成分及有撇坐標所得者仍爲(1.2.20)式.此定理實綜括坐標變易時分壓力變換之定律.

所須明瞭者，上文所述之一切關係，並非僅指壓力張量而言，對於形變張量亦同樣成立，實則對於一切第二級之對稱張量，均成立也.各

(1)Ellipsoid.　(2)Hyperboloid.

情形之所異者，僅爲其物理涵義，此多少具重要性．一物體對經過某定點各方向之轉動慣量(卷I第2.4.4節)亦可由一對稱張量代表之，此張量之主値(轉動主慣量)常爲正量．(1.2.20)所示之曲面乃成一慣性橢圓球[1]．蓋常有之，大自然在其外表所示之現象每形態各殊，然所用之方法則簡單而周納，令人興殊途同歸之感，亦至饒興趣之事也．否則人類思想所維以啓發其定律者，將艱困萬端，自非僅藉類似性質以直諭及演繹所得舉事矣．

在進而討論動力學方程式(1.2.17)諸應用之前，吾人必先瞭然於應力及形變間所有之關係．此關係必然引起關於組成物體之材料一問題，爲吾人前所未論者．乃於下文詳述之．

(1)Ellipsoid of inertia.

第二篇　無限小形變

第一章　剛體概論

2.1.1.　於本卷第一篇中，吾人已知欲求柔體運動定律之確立，則尚須知形變張量[1]與壓力張量間之關係．欲求此關係，則必先立一假說，以爲往後討論之張本．此假說卽謂壓力常到處僅與同時之局部形變有關，反之亦然．在大自然中，此假定非恆可適合者也．嚴格言之，在一切剛體情形中，其形變不僅多少與卽時所受之力有關，且多少與其過去所受處理之性質有關．不僅此也，剛體之形變且與溫度有關，溫度之變動，一般與壓力及形變無關．當上述假定得實際應用於某物體時，則此物體謂之"完全具彈性者"．

完全彈性之條件當然亦可述之如下：凡完全具彈性之物體，當一時受任何形變力之作用而作用停止時其所取之平衡狀態與力未加前所具者無殊；蓋形變爲零與壓力爲零相當，其關係唯一也．故一物體如具彈性滯後[2]或疲乏[3]現象——此謂當形變力停止作用後，此物體僅逐漸回復其原來之平衡狀態——則此物體爲不完全具彈性者．在另一方面，則某一定壓力所生形變之大小，則與完全彈性之問題無涉．於此，科學之用語與日常習用之言語略有區別，在日常生活中，吾人每以彈性甚大之觀念與形變甚大之觀念相連繫，例如，吾人謂橡皮較玻璃爲更具彈性者．在科學意義中則正相反：玻璃爲較橡皮更具彈性者，蓋其所具彈性滯後之性質遠較橡皮所具者爲小也．

實驗曉示吾人，祇須形變不超過某一定之値，則一切物體皆得視爲具完全彈性者，此某一定値謂之"完全彈性限度[4]"．故在吾人此後之探討中當指一切物體而言，然其形變則不得超過彈性限．爲數學處理簡

---

(1)Deformation tensor.　(2)Hysteresis.　(3)Fatigue.　(4)Limit for perfect elasticity.

易計，吾人將假定形變爲無限小者.

2.1.2. 凡物體在一切方向其物理價值相等者，謂之"各向同性體[1]"；反之，凡物體在某某方向其物理性質有異者，謂之"非各相同性體[2]".以各向同性體言，形變及壓力間之關係不難立時得之；蓋壓力可全由形變決定，在任何形變之情形，壓力張量之主軸必與形變張量之主軸合.然在非各向同性體之情形，此結論卽不成立，蓋尙有若干獨異之方向須一併考慮在內也.下文之討論將兼括晶體而言，——此卽非各向同性體——爲求進展計，必採用更普遍之處理法.

形變張量之標識爲其六成分 $x_x, x_y, \cdots$(第1.1.11節)，壓力張量之標識爲其六成分 $X_x, X_y, \cdots$(第1.2.6節)，後者爲前者之特定函數.形變成分爲無限小者，故於 Taylor 級數之展開中，僅須留其第一項，而得一結論如下：壓力成分爲形變成分之一次函數，且爲其齊次函數；蓋形變之計算始於壓力爲零之時——此謂以物體之"自然"狀態爲起點也.故形變成分消失，壓力成分亦同時消失.

試依 $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$ 之次序附標號1,2,3,4,5,6於形變成分下，再依 $X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y$ 之次序將此諸標號附於壓力成分下，則壓力依形變之關係，其普遍表示有六方程式：

$$\left.\begin{array}{l} X_x = a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{13}z_z + a_{14}y_z + a_{15}z_x + a_{16}x_y \\ Y_y = a_{21}x_x + a_{22}y_y + a_{23}z_z + a_{24}y_z + a_{25}z_x + a_{26}x_y \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \cdots(2.1.1)$$

式中三十六個常數 a 由物體之結構決定之.如將此諸式代入(1.2.17)之運動方程式中，則可得運動之普遍定律.

吾人次須問者爲諸常數 a 是否各相獨立，或其間尙有特定之關係，因而方程式(2.1.1)尙得簡化.在晶體構造中，吾人知其有對稱存在，故常數 a 之數將少於36，情形乃得簡化多多，其理至明.然爲目前計，吾人仍須討論一完全不對稱晶體之普遍情形，蓋欲將其置於某條件之下，此

(1)Isotropic body. (2)Anisotropic body.

條件爲吾人前所未用而在自然中常得適合者——此卽能量不滅之定律.讀者將知藉此定律(2.1.1)諸方程式可得一普遍而可觀之簡化.

2.1.3. 依據能量不滅原理(I·2.3.11),在 dt 時素內一質系總能 $L+U$ 之變遷卽等於同時在此質系上外力所作之功:

$$d(L+U)=A \cdots\cdots (2.1.2)$$

吾人現將應用此方程式於此際之情形,與第1.2.2節中同,吾人將選取全物質之任何部分爲一質系而討論之.

以能量之第一部分卽動能 L 言,此祇爲物體所討論部分一切質素 $k\cdot d\tau$ 諸動能之和,卽:

$$L=\frac{1}{2}\int\left\{\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right\}k\,d\tau \cdots\cdots (2.1.3)$$

是處 u, v, w 乃質點自其自然位置之分位移,積分當運算於所討論之物體部分.

能量之第二部分卽勢能 U,亦爲各質素之勢能之和,具下列之形式:

$$U=\int F\cdot d\tau \cdots\cdots (2.1.4)$$

是處函數 F 爲每單位體積之勢能,由於物體之完全彈性,故僅與所論體積素形變之狀態有關——此謂僅與與六形變成分 $x_x, y_y, \cdots$ 有關也.在勢能之情形吾人所關注者非勢能之絕對值而僅爲值之變遷,故可命物體在自然狀態中 $F=0$,殊無礙於問題之普遍性,所謂自然狀態者卽無形變之狀態也.

最後,以外功 A 而論,則由第1.2.1節,可知其所包括者,爲作用於所論物體部分一切質素上諸體力之功,及自外作用於同部分曲面上諸點諸壓力之功,卽:

$$A=\int(X\,du+Y\,dv+Z\,dw)k\,d\tau$$
$$+\int(X_\nu\,du+Y_\nu\,dv+Z_\nu\,dw)\,d\sigma \cdots\cdots (2.1.5)$$

是處第一積分須運算於物體所論部分之體積中,第二積分須運算於所

論部分之曲面上.

欲應用(2.1.2)所示之能量原理公設[1],可先求 dL 之表式,因質量 $kd\tau$ 與時間無關,故亦可直接取(2.1.3)之導數:

$$dL=\int\left(\frac{d^2u}{dt^2}du+\frac{d^2v}{dt^2}dv+\frac{d^2w}{dt^2}dw\right)kd\tau,$$

或如以三分加速度代以自運動方程式(1.2.17)所得之值,則:

$$dL=\int(Xdu+Ydv+Zdw)kd\tau$$

$$-\int d\tau\cdot\left\{\begin{aligned} & du\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right)\\ + & dv\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)\\ + & dw\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial z}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(2.1.6)$$

今如應用變換公式(1.2.13)於每個由分解上列第二空間積分所得之九個空間積分,而同時兼顧(1.2.8)之關係,則可得:

$$dL=\int(Xdu+Ydv+Zdw)kd\tau$$

$$+\int d\tau\cdot\left\{\begin{aligned} & X_x\frac{\partial du}{\partial x}+X_y\frac{\partial du}{\partial y}+X_z\frac{\partial du}{\partial z}\\ + & Y_x\frac{\partial dv}{\partial x}+Y_y\frac{\partial dv}{\partial y}+Y_z\frac{\partial dv}{\partial z}\\ + & Z_x\frac{\partial dw}{\partial x}+Z_y\frac{\partial dw}{\partial y}+Z_z\frac{\partial dw}{\partial z}\end{aligned}\right\}$$

$$+\int d\sigma\cdot(X_\nu du+X_\nu dv+Z_\nu dw)\cdots\cdots\cdots(2.1.7)$$

將此 dL 之式代入能量方程式(2.1.2),則能量方程式右邊由外功 A 所生之項即(2.1.5)所代表者與其左邊相等之項適相抵消,故所餘者僅爲勢能 dU 與(2.1.7)式中之第二空間積分.後者猶可以更簡之形式出之.吾人首須記取者,在 $\frac{\partial du}{\partial x}$ 等等式中,符號 ∂ 係指依空間以取導

(1)Postulate.

數而言，而符號 d 則係指依時間以取導數而言，二運算各不相涉．故有：

$$\frac{\partial du}{\partial x}=d\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial du}{\partial y}=d\frac{\partial u}{\partial y},\ 等等.$$

更如利用(1.2.18)之關係及(1.1.60)之簡書，則能量方程式最後所取之形式爲：

$$dU+\int(X_x dx_x+Y_y dy_y+Z_z dz_z$$
$$+Y_z dy_z+Z_x dz_x+X_y dx_y)d\tau=0 \cdots\cdots(2.1.8)$$

由(2.1.4)乃可書勢能之變動爲：

$$dU=\int dF\cdot d\tau \cdots\cdots\cdots\cdots(2.1.9)$$

嚴格言之，此處尚有一項未加入，乃係由體積素 $d\tau$ 之值依時間之變遷所致者——即 $\int Fd(d\tau)$ 之項，第一個 d 係指時間變動言，第二個 d 係指空間變動言．然在無限小形變之情形，體積素之依時變遷，即在有限時間中，與體積素本身之大小較，亦爲無限小者，而勢能 F 之依時變遷則與此能量具同一之數量級．故此項可略去不論．

利用(2.1.9)，吾人可將(2.1.8)式書作一單獨之空間積分當運算於物體之所論部分．如假定此部分爲無限小者——即謂一單獨之體積素 $d\tau$，則積分號可闕去，以物體之每單獨體積素言，可得：

$$-dF=X_x dx_x+Y_y dy_y+Z_z dz_z+Y_z dy_z+Z_x dz_x+X_y dx_y.$$

然 F 由六形變成分決定之，故有：

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x_x}dx_x+\frac{\partial F}{\partial y_y}dy_y+\frac{\partial F}{\partial z_z}dz_z+\frac{\partial F}{\partial y_z}dy_z$$
$$+\frac{\partial F}{\partial z_x}dz_x+\frac{\partial F}{\partial x_y}dx_y.$$

且因形變成分與其變動均各自獨立，故一般有：

$$\left.\begin{aligned}X_x=-\frac{\partial F}{\partial x_x},\ Y_y=-\frac{\partial F}{\partial y_y},\ Z_z=-\frac{\partial F}{\partial z_z}\\ Y_z=-\frac{\partial F}{\partial y_z},\ Z_x=-\frac{\partial F}{\partial z_x},\ X_y=-\frac{\partial F}{\partial x_y}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2.1.10)$$

此示壓力張量之成分爲形變成分一單獨函數依該成分之負導數，正如在有心力之情形，分力爲坐標之一單獨函數(勢)依該坐標之負導數(I·1.3.26).故單位體積之勢能 F 亦謂之彈性勢[1].

由(2.1.1)可知彈性勢爲形變成分之二次函數，且爲齊次函數，蓋由前述假定，不僅其一次項消失，且絕對項亦消失也.

2.1.4. 據前種種結果，可得彈性勢之普遍表式如下：

$$\begin{aligned}F=\frac{a_{11}}{2}x_x^2+a_{12}x_xy_y+a_{13}x_xz_z+a_{14}x_xy_z+a_{15}x_xz_x+a_{16}x_xx_y\\+\frac{a_{22}}{2}y_y^2+a_{23}y_yz_z+a_{24}y_yy_z+a_{25}y_yz_x+a_{26}y_yx_y\\+\frac{a_{33}}{2}z_z^2+a_{34}z_zy_z+a_{35}z_zz_x+a_{36}z_zx_y\\+\frac{a_{44}}{2}y_z^2+a_{45}y_zz_x+a_{46}y_zx_y\\+\frac{a_{55}}{2}z_x^2+a_{56}z_xx_y\\+\frac{a_{66}}{2}x_y^2\end{aligned}\tag{2.1.11}$$

自此由(2.1.10)可得六壓力成分爲形變成分之平直齊次函數.此與前在(2.1.1)中所得者同，所異者此際有 $a_{12}=a_{21}$，等等關係.換言之，彈性勢之存在，卽等於在彈常性數 a_{ij} 中有二指數 i,j 得互易之情形.與第 2.1.2 所述之理論較，此際已簡化多多，一物體之彈性性質，其所依之常數，將不復爲三十六，而僅有二十一. 此際吾人對此諸常數可有所說者有一事，並不須論及物體之特殊性質者也——此卽，此諸常數在任何場合，可滿足勢 F 爲正之條件.蓋彈性勢者，形變之勢能也，此有一性質在：當物體自形變狀態返至自然狀態時——卽當勢之値自 F 至零之時——勢能變爲動能，而動能爲正量，故其本身亦必須爲正量.前於卷 I 第1.3.24節中曾得一普遍之定理：與穩定平衡狀態相當者，常有

(1) Elastic potential.

一勢能之最小值，於此乃獲一實例．凡物體之自然(未形變)狀態所代表者乃一穩定平衡狀態，故在任何形變之狀態，勢能之值必較在自然狀態所有者爲大——卽大於零也．

自此可更得一結論焉：六常數 $a_{11}, a_{22}, \cdots a_{66}$ 均爲正．蓋如 a_{11} 爲負，則吾人祇須使 x_x 不爲零而假定其他一切形變成分爲零，所得者將爲負勢，於理未合也．此他諸常數 a 亦必滿足某種不整齊之規則，此際暫不論．

2.1.5. 實際所遇之問題常爲有已知外力作用於某物體上而尋求此物體所起之變遷．首要者爲解此問題之唯一性——卽已知外壓力，此物體是否有一完全特定之變遷與之相當，抑有數種變遷可均適合該問題之方程式．吾人將限於討論平衡之情形．

今假定作用於物體面上之壓力 X_ν, Y_ν, Z_ν 及體力 X, Y, Z 均已知；且假定 x, y, z 之三函數 u, v, w 已尋得．此三函數可視作物體 x, z, y 點之位移，適合一切平衡條件——此謂於物體內部適合方程式(1.2.17)：

$$\left.\begin{aligned} Xk &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ Yk &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\ Zk &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.1.12)$$

而於物體面上適合方程式(1.2.8)．此一切方程式中，其壓力成分 X_x, $\cdots$，必須將自位移 u, v, w 公式中所計得之值代入之，初由(1.1.60)可得相當之形變成分，再由(2.1.10)卽得壓力成分．

吾人更將假定另有 x, y, z 之三函數 u', v', w' 存在，與前述函數不同，然亦適合一切之平衡條件．則如自(1.1.60)計算形變成分 x'_x, x'_y, $\cdots$，用 u', v', w' 而不用 u, v, w，然後將此諸值代入(2.1.10)式，卽得壓力成分 $X'_x, X'_y, \cdots$，此諸壓力成分同樣適合方程式(2.1.12)與(1

2.8).

今試討論下列之 x,y,z 函數:

$$u_0=u'-u,\quad v_0=v'-v,\quad w_0=w'-w\cdots\cdots\cdots\cdots(2.1.13)$$

吾人探求此諸函數時可視爲分位移所代表之物體變遷.第一,由(1.1.60)可自此諸函數得形變成分爲:

$$x_{x_0}=x'_x-x_x,\quad x_{y_0}=x'_y-x_y,\cdots\cdots\cdots\cdots(2.1.14)$$

再由(2.1.10)可得壓力成分爲:

$$X_{x_0}=X'_x-X_x,\quad X_{y_0}=X'_y-X_y,\cdots\cdots\cdots\cdots(2.1.15)$$

一面吾人如將含無撇壓力成分之方程式(2.1.12)自含有撇壓力成分之同一方程式(2.1.12)減去而記取已知之體力 X,Y,Z,在二方程式系中相同,則可得:

$$0=\frac{\partial X_{z_0}}{\partial x}+\frac{\partial X_{y_0}}{\partial y}+\frac{\partial X_{z_0}}{\partial z},\cdots\cdots\cdots\cdots(2.1.16)$$

最後,以物體之面言,將無撇方程式(1.2.8)自有撇方程式(1.2.8)減去,則因已知之面上壓力 X_ν,Y_ν,Z_ν 在二方程式系中相同,故:

$$0=X_{x_0}\cos(\nu x)+X_{y_0}\cos(\nu y)+X_{z_0}\cos(\nu z),\cdots\cdots(2.1.17)$$

於此有一疑問:在二式相減之運算中二方程式系中方向餘弦之值是否相同?蓋物體曲面之形式在此二種變遷中固各異者.此疑問可解答如下:由此所生之差誤,其値屬較小之數量級.蓋曲面法綫之方向餘弦爲有限者;故該物體之任何無限小變遷,其値僅與物體在自然狀態所有者,相差一無限小量,而以壓力成分 $X_x,\cdots$ 言,則在此變遷中,其變易之值與壓力成分本身相較,殊屬可觀.

方程式(2.1.16)與(2.1.17)具一至明晰之物理意義.二式所表示者爲 u_0,v_0,w_0 變遷之條件,在此變遷中既無外力作用於質素上,亦無外力作用於物體之面上.前於已知外力之情形所發關於解 u,v,w 之唯一性之問題乃化爲一較簡之課題:在無任何外來影響時;此物體是否有 u_0,v_0,w_0 一變遷之可能?此變遷不爲零.

此題之答案可藉下述辯證以答之．如吾人將(2.1.16)之三方程式依次各乘以 u_0, v_0, w_0 而互加，再乘以體積素 $d\tau$，最後積分於整個物體，則可得一方程式，內含九空間積分，每一空間積分可藉(1.2.13)變換之如下：

$$\int u_0 \frac{\partial X_{x_0}}{\partial x} d\tau = -\int \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot X_{x_0} \cdot d\tau - \int u_0 X_{x_0} \cos(\nu x) d\sigma.$$

故所得之方程式由(1.2.17)之關係可變換爲：

$$\int (X_{x_0} x_{x_0} + Y_{y_0} y_{y_0} + Z_{z_0} z_{z_0} + Y_{z_0} y_{z_0} + Z_{x_0} z_{x_0} + X_{y_0} x_{y_0}) d\tau = 0,$$

或以由(2.1.10)所得之壓力成分之值代入，則：

$$\int F_0 \cdot d\tau = 0,$$

是處 F_0 乃指(2.1.11)式，吾人祇須加一下標 0 於每個壓力成分上．讀者須知 F_0 常爲正，僅於形變能量消失之極限情形始爲零．故由上列方程式可知每一單獨之體積素其 F_0 之值均爲零，因之一切形變成分 x_{x_0}，x_{y_0}，… 各等於零．換言之，如無任何之外力作用於此物體上，則其形變必等於零．

吾人次須問者爲變遷 u_0, v_0, w_0 是否亦消失？欲決定此點，可問當六形變成分消失時：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0 \\ &\frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.1.18)$$

分位移 u_0, v_0, w_0 是否亦必爲零？吾人之答案爲否，此甚易知之．u_0，v_0，w_0 實乃微分方程式(2.1.18)之通解，可得之如下．以 u_0 言下列三條件可成立：

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0,$$

後二者乃自含 $\frac{\partial u_0}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial u_0}{\partial z}$ 之方程式取導數得之.故 u_0 之形式必為:

同樣可得:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \lambda + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda' yz \\ v_0 &= \mu + \mu_1 x + \mu_3 x + \mu' xz \\ w_0 &= \nu + \nu_1 x + \nu_2 y + \nu' xy \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(2.1.19)$$

是處之十二係數 λ, μ, ν 乃常數.更由(2.1.18):

$$\mu_3 + \mu' x + \nu_2 + \nu' x = 0,$$

$$\nu_1 + \nu' y + \lambda_3 + \lambda' y = 0,$$

$$\lambda_2 + \lambda' z + \mu_1 + \mu' z = 0.$$

故:

$$\lambda' = 0, \qquad \mu' = 0, \qquad \nu' = 0,$$

$$\nu_2 + \mu_3 = 0, \qquad \lambda_3 + \nu_1 = 0, \qquad \mu_1 + \lambda_2 = 0.$$

此六條件使(2.1.18)式與(1.1.39)式完全恆等,所以示一物體在不受形變條件下所能有之最普遍無限小變遷也——一移動及一轉動——此結果不喻自明,初可以想見者.吾人乃得一定理如下:所加於物體內部及面上之外力實未能唯一決定位移成分 u, v, w,然該問題各種解答所代表之變遷其各相區異之點僅在整個物體之移動及轉動.故以形變論,各答案所示者實同.依此意義,吾人亦得謂凡平衡之問題可藉所立方程式唯一解決之.此後於討論同樣問題時,對此未能決定之六常數將任意選取其值,蓋已知其無多關注之必要矣.

2.1.6. 具對稱構造之物體. 晶系.

為討論便利計,一均勻晶體之彈性行為所依之二十一常數可依照下列方式排列之:

$$\left.\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{matrix}\right\} \cdots\cdots \quad \cdots\cdots(2.1.20)$$

$$\begin{matrix} a_{55} & a_{56} \\ & a_{66} \end{matrix}\Bigg)$$

然各常數 a 之值並不僅與晶體之性質有關，一般且與坐標系之選擇有關——此謂與坐標軸對晶體構造中某若干獨異之向之方位有關．讀者如記取彈性勢 F——卽彈性能——無與坐標選擇相關之可能，此結果當不難立見．如將任何形變 $x_x, x_y, \cdots$ 變換至另一坐標系 x', y', z' 而於新得之形變成分上各加一撇，則由(2.1.11)可得：

$$\frac{a_{11}}{2}x_x^2 + a_{12}x_x y_y + \cdots = \frac{a'_{11}}{2}x'^2_{x'} + a_{12}x'_{x'}y'_{y'} + \cdots \cdots\cdots(2.1.21)$$

在此恆等式中，如將有撇形變成分以無撇成分表示之，而以相當項列於等式兩邊，則可得有撇常數與無撇常數間之關係，與有撇坐標及無撇坐標間之關係相當．一般而論，有撇常數可完全或部分與無撇常數異．

設有一晶體，如於坐標系之某特定變遷中，a' 與 a 均相等——卽常數 a 對此坐標變遷言爲不變者——則此晶體謂之具某種對稱者．此種坐標變遷之數愈多，則此晶體之對稱程度愈高．

各種對稱之條件亦可不藉彈性常數對相當坐標變換之不變性而以他法表示之——此卽保持原有之坐標系，使晶體變遷後其最後對原坐標系所取之方位與依照第一觀點，晶體不動，其對有撇坐標系所取之方位相同．故對稱之存在可以下述之事實表示之：在變遷後該晶體在一切方向之性質與變遷前同，或謂：變遷之結果使該晶體與其本身疊合．此兩種對稱定義完全等效，實二而一也．爲吾人計，其第一種定義卽對坐標變換常數 a 不變之條件，較爲便利，故於下文用之．

晶體可依據其所示之對稱程度分成若干類．由上所述，可知分類所用之原理初非固定，且非可由直接推理以唯一決定者，吾人無寧謂有某程度之選取自由，僅以其便利而使用也．此處將依照習用分晶體爲六系，坐標之變換當以採用坐標系之轉動爲最便．

設晶體之彈性常數 a 對坐標系依坐標軸轉經一 $\frac{2\pi}{n}$ 角之轉動均爲

不變者(或如晶體轉經一$\frac{2\pi}{n}$角後得與其本身疊合者)，則此軸謂之晶體之"n次對稱軸[1]".

當然，對稱軸並非一特定之直綫，祇爲一特定之方向，一切平行之直線均完全等效也.

一個一次對稱軸之存在，並未足爲眞正之對稱情形，蓋經2π角之轉動後其坐標系迄未有變也. 凡晶體僅具一個一次對稱軸者屬於最後(第六)之晶系卽不對稱[2](三斜)晶系[3].硫酸銅卽是一例.其彈性行爲與二十一常數有關，如(2.1.20)之所表列者.

凡晶體除具一單獨之二次對稱軸外無較高之對稱者，屬第五晶系卽單對稱[4](單斜)晶系[5]，如雲母或酸性碳酸鈉是.欲求此晶系中晶體彈性行爲之狀況，可先求當坐標系依z軸轉經一$\frac{2\pi}{2}=\pi$角時有撇與無撇彈性常數a間之一般關係.此有:

$$x'=-x,\quad y'=-y,\quad z'=z.$$

故:

$$u'=-u,\quad v'=-v,\quad w'=w.$$

且由(1.1.60):

$$x'_x=x_x,\qquad y'_y=y_y,\qquad z'_z=z_z,$$
$$y'_y=-y_z,\quad z'_x=-z_x,\quad x'_y=x_y.$$

如將此諸值代入恆等式(2.1.21)，則在二十一常數a'中，有十三個與具同一下標之常數a各等，其餘則爲:

$$a'_{14}=-a_{14},\quad a'_{15}=-a_{15},\quad a'_{24}=-a_{24},\quad a'_{25}=-a_{25},$$
$$a'_{34}=-a_{34},\quad a'_{35}=-a_{35},\quad a'_{46}=-a_{46},\quad a'_{56}=-a_{56}.$$

此諸關係得普遍適合於每一晶體. 如z軸爲一二次對稱軸，則一切a之量皆係不變者，故在變換中易正負之常數必爲零.因之一單對稱晶體之彈性行爲由(2.1.20)應具下列之方式:

(1)n-fold axis of symmetry. (2)Asymmetrical. (3)Triclinic system.
(4)Monosymmetrical. (5)Monoclinic system.

$$\left.\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & a_{26} \\ & & a_{33} & 0 & 0 & a_{36} \\ & & & a_{44} & a_{45} & 0 \\ & & & & a_{55} & 0 \\ & & & & & a_{66} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(2.1.22)$$

如除z軸外其餘二坐標軸之一——設爲x軸——亦爲二次對稱軸，則吾人所得者爲第四晶系即**正交晶系**[1]，爲其代表者有鉀硝石、文石[2]及黃晶[3].與之相當者有下列之方式,求得之法與前同:

$$\left.\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{44} & 0 & 0 \\ & & & & a_{55} & 0 \\ & & & & & a_{66} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(2.1.23)$$

自其結構可立知在此情形，其第三坐標軸——即y軸——亦爲二次對稱軸.

自正交晶系進一步，可得第三晶系即**四方(二次)晶系**[4]（例如鋯[5]*），祇須再加一條件，即其坐標軸之一——設爲z軸——爲四次對稱軸.則依z軸轉$\frac{\pi}{2}$角之轉動當有下列之變換公式:

$$\begin{array}{lll} x'=y, & y'=-x, & z'=z, \\ u'=v, & v'=-u, & w'=w, \\ x'_x=y_y, & y'_y=x_x, & z'_z=z_z, \\ y'_z=-x_z, & z'_x=z_y, & x'_y=-x_y. \end{array}$$

---

(1)Orthorhombic system. (2)Aragonite. (3)Topaz. (4)Tetragonal system. (5)Zirconium.

*譯者按:鋯屬六角晶系,原著有誤.四方晶系之例爲金紅石.

由(2.1.21)可於正交系之九常數中得下列之普遍關係:

$$a'_{11}=a_{22},\quad a'_{12}=a_{12},\quad a'_{13}=a_{23},$$
$$a'_{22}=a_{11},\quad a'_{23}=a_{13},\quad a'_{33}=a_{33},$$
$$a'_{44}=a_{55},\quad a'_{55}=a_{44},\quad a'_{66}=a_{66}.$$

如所有之有撇 a' 均等於相當之無撇 a,則:

$$a_{11}=a_{22},\quad a_{13}=a_{23},\quad a_{44}=a_{55}.$$

故由(2.1.11),凡四方晶體之彈性勢爲:

$$F=\frac{a_{11}}{2}(x_x^2+y_y^2)+a_{12}x_xy_y+a_{13}(x_x+y_y)z_z$$
$$+\frac{a_{33}}{2}z_z^2+\frac{a_{44}}{2}(y_z^2+z_x^2)+\frac{a_{66}}{2}x_y^2\cdots\cdots\cdots(2.1.24)$$

凡晶體之具三次或六次對稱軸者屬第二晶系卽**六角晶系**[1],其代表至夥,例如鈉硝石、方解石、石墨、電氣石[2]及冰是.

最後,自四方晶系更進一步可得第一晶系卽**正方晶系**[3],祇須使第二坐標軸亦爲一四次對稱軸,因之其第三坐標軸亦必爲四次對稱軸.正方晶體之彈性勢,由(2.1.24)其式爲:

$$F=\frac{a_{11}}{2}(x_x^2+y_y^2+z_z^2)+a_{12}(x_xy_y+y_yz_z+z_zx_x)$$
$$+\frac{a_{44}}{2}(y_z^2+z_x^2+x_y^2)\cdots\cdots\cdots(2.1.25)$$

此仍與三常數有關.正方系中有岩鹽、氟石[4]、金鋼石.

2.1.7. 各向同性體　一物體爲彈性各向同性——卽該物體並無獨異之方向——之必要且充分條件爲:其彈性常數對坐標系之**任何**變遷均爲不變者,換言之,凡彈性各向同性之物體可藉任何轉動而與其本身疊合.欲求由此條件所生關於彈性常數之値之條件,當以形變參照於主膨脹及主膨脹軸之方向爲便——此謂,吾人應藉方程式(1.1.64)將六形變成分 $x_x,y_y,\cdots$ 化爲含三主膨脹 l,m,n 及主膨脹軸之九方向餘弦 $\alpha_1,\cdots\gamma_3$ 之項,然後將此諸値代入(2.1.25)之彈性勢公式.在各向

(1)Hexagonal system.　(2)Tourmaline.　(3)Regular system.　(4)Fluorspar.

同性體中，彈性勢必全由 l,m,n 諸量決定之，此諸量亦可取爲方向餘弦，彈性勢爲 l,m,n 之對稱齊次二次函數，至屬明顯.

試者如將 l,m,n 之一切對稱齊次二次函數遍觀之，則上述公設之意義自可明瞭. 在 l,m,n 之一切對稱齊次函數中其各自獨立者僅二，卽：

$$l^2+m^2+n^2 \text{ 與 } lm+mn+nl,$$

其他均可化爲含此二者之項. 例如：

$$(l+m+n)^2=(l^2+m^2+n^2)+2(lm+mn+nl)\cdots\cdots(2.1.26)$$

由此觀之，凡各向同性體之彈性勢其各相獨立之常數僅有二，吾人可書彈性勢如下式：

$$F=\frac{\lambda}{2}(l+m+n)^2+\mu(l^2+m^2+n^2)\cdots\cdots(2.1.27)$$

是處 λ 及 μ 均爲正.

欲將 F 以含形變常數 $x_x,x_y,\cdots$ 之項表示之，則因 l,m,n 爲三次方程式(1.1.62)之三根，故有：

$$l+m+n=x_x+y_y+z_z\cdots\cdots(2.1.28)$$

蓋此乃方程式中 l^2 之係數也，且有：

$$lm+mn+nl=(y_yz_z+z_zx_x+x_xy_y)$$

$$-\frac{1}{4}(y_z{}^2+z_x{}^2+x_y{}^2)\cdots\cdots(2.1.29)$$

蓋此乃 l 之係數也. 故由(2.1.26)可得：

$$l^2+m^2+n^2=x_x{}^2+y_y{}^2+z_z{}^2+\frac{1}{2}(y_z{}^2+z_x{}^2+x_y{}^2),$$

[此亦可直接自(1.1.64)證明之]，由(2.1.27)可得：

$$F=\frac{\lambda}{2}(x_x+y_y+z_z)^2$$

$$+\mu\left(x_x{}^2+y_y{}^2+z_z{}^2+\frac{y_z{}^2+z_x{}^2+x_y{}^2}{2}\right)\cdots\cdots(2.1.30)$$

吾人如於體積膨脹採用下列之簡書：

$$x_x + y_y + z_z = \sigma \cdots\cdots\cdots\cdots(2.1.31)$$

則可得凡彈性各向同性體之壓力成分由(2.1.10)以含形變成分之項表之如下：

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\lambda\sigma - 2\mu x_x, & Y_z &= -\mu y_z \\ Y_y &= -\lambda\sigma - 2\mu y_y, & Z_x &= -\mu z_x \\ Z_z &= -\lambda\sigma - 2\mu z_z, & X_y &= -\mu x_y \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(2.1.32)$$

此諸方程式為彈性各向同性體普通運動方程式之補充，吾人於第一章之開端(第2.1.1節)已明其必需矣．

第二章 剛體之平衡態

2.2.1. 現乃應用前所開發之理論於剛體靜力學之問題中．為簡便計，吾人將限於討論各向同性體．在剛體形變中之體力如重力，實無關重要，故略而不論．適合於物體內部之平衡條件(2.1.12)乃簡化為：

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=0,\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.1)$$

而適合於物體面上之平衡條件則仍與(1.2.8)同：

$$X_\nu=X_x\cos(\nu x)+X_y\cos(\nu y)+X_z\cos(\nu z)\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.2)$$

位移 u,v,w，由(1.1.60)可得形變成分 $x_x,x_y,\cdots$，自形變成分可藉(2.1.32)以得壓力成分 $X_x,X_y,\cdots$，如此壓力成分適合方程式(2.2.1)則位移 u,v,w 卽代表自然中一可能之平衡態，其可有之形變則與作用於物體面上之力相當，此由(2.2.2)所示之壓力成分 X_ν,Y_ν,Z_ν 代表之．

是處之最關重要者為第2.1.5節所證明之定理，卽謂形變得以外力唯一決定之．故當吾人尋得一平衡條件之解答時，可不問尋得之方法若何，此必與所討論問題中之外力相當無疑．蓋在自然中所遇之問題每為如下之形式：設有已知外力，試問其所產生之形變將若何？所須方程式之結構每繁複萬端，解此問題而欲先寫出微分方程式(2.2.1)之通解，然後再藉邊界條件(2.2.2)以計算其中之未定常數將為極不可能之事．吾人無寧自邊界條件(2.2.2)出發常較佳，然後藉嘗試法以求(2.2.1)之一特解，此特解必合乎邊界條件．如嘗試成功，則"此"解答卽為問題之答案．此方法將視為定則，於下文採用之．

2.2.2. 試先討論一任何形狀物體之壓縮，設在一切方向為均勻者，卽所謂**立方壓縮**(1)者也．則一已知之均勻壓力 p 其作用之方向，到處與體面垂直．故有：

(1)Cubical compression.

$$X_{\nu}=p\cos(\nu x),\quad Y_{\nu}=p\cos(\nu y),\quad Z_{\nu}=p\cos(\nu z)\cdots\cdots(2.2.3)$$

此乃已知外壓力之成分.邊界條件(2.2.2)顯然適合，祇須吾人假定於體面上到處有：

$$\left.\begin{aligned}X_x=Y_y=Z_z=p\\X_y=Y_z=Z_x=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2.2.4)$$

試更假定此六方程式不僅代表物體面上壓力成分之值，亦且代表其整個內部之壓力成分之值．則方程式(2.2.1)得適合.且由(2.1.32)可得：

$$p=-\lambda\sigma-2\mu x_x,\cdots y_z=0\cdots\cdots(2.2.5)$$

自此,將第一三式相加,則得：

$$3p=-3\lambda\sigma-2\mu(x_x+y_y+z_z),$$

且由(2.1.31)：

$$\sigma=-\frac{3p}{3\lambda+2\mu},\qquad x_x=y_y=z_z=\frac{\sigma}{3}\cdots\cdots(2.2.6)$$

故如使：

$$u=\frac{\sigma}{3}x,\qquad v=\frac{\sigma}{3}y,\qquad w=\frac{\sigma}{3}z\cdots\cdots(2.2.7)$$

則由(1.1.60)，方程式(2.2.5)得適合，吾人乃已解此方程式．依據第2.1.5節,於 u,v,w 諸式中加入其他常數所得之普化並不能對已得之形變有所變遷.

故一普遍均勻之壓力 p 產生一普遍均勻之體積收縮(2.2.6)，收縮之量與物體之形狀無關.常數 $\frac{3}{3\lambda+2\mu}$ 因謂之此物質之"立方壓縮率[1]",其倒數：

$$\frac{p}{-\sigma}=\lambda+\frac{2}{3}\mu\cdots\cdots(2.2.8)$$

謂之"立方彈性係數[2]"

2.2.3. 立方彈性之討論既畢,次當取直線彈性[3]之情形而論之

(1)Cubical compressiblity. (2)Modulus of cubical elasticity.

(3)Linear elasticity.

——是謂，吾人將研究緊張於一方向之物體之平衡．設此方向爲x軸．爲免計算繁複計，吾人將假定所論物體之形狀爲一圓柱體（綫、桿），與x軸平行，長度爲l，截面可任意．使前截面在yz平面中——即$x=0$，以約束力而固着是處．後截面有已知之外力F作用於其上，F在正x軸之方向，此外並無外力作用於圓柱體之彎曲面即其蛩面[1]上．吾人所求者爲因此所生之形變．

第一，欲滿足體面條件(2.2.2)，可仍取圓柱體之彎曲面而論之．是處有：$X_\nu=Y_\nu=Z_\nu=0$；且$\cos(\nu x)=0$，而$\cos(\nu y)$與$\cos(\nu z)$則可得爲任何之値．故如使：

$$X_y=Y_z=Z_x=0,\quad Y_y=Z_z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.9)$$

則體面條件適合．

爲嘗試計，且假定此諸値並適合於整個物體之內部，故在六壓力成分中，僅X_x不爲零．如更假定X_x爲常數，則方程式(2.2.1)可實際適合．此常數之値可由自由截面$x=l$之體面條件中求之，蓋在固定截面$x=0$之體面條件所得者，僅爲固着此截面之拘束力之値，與是處所討論之問題無關．

在自由截面上，有：

$$\cos(\nu x)=-1,\quad \cos(\nu y)=\cos(\nu z)=0,$$

故由(2.2.2)與(2.2.9)：

$$X_\nu=-X_x,\quad Y_\nu=0,\quad Z_\nu=0.$$

因X_x爲常數，故作用於自由截面上諸面素之一切平行壓力，其合力爲：

$$\int X_\nu\,d\sigma=-X_x\cdot q=F\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.10)$$

式中q指截面之値．故：

$$X_x=-\frac{F}{q}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.11)$$

(1) Mantle.

自壓力成分，可藉(2.1.32)以求形變成分，其方法如下．第一，吾人仍有：

$$y_z = z_x = x_y = 0.$$

再者，自：

$$\frac{F}{q} = \lambda\sigma + 2\mu x_x,$$

$$0 = \lambda\sigma + 2\mu y_y,$$

$$0 = \lambda\sigma + 2\mu z_z,$$

互加得：

$$\frac{F}{q} = 3\lambda\sigma + 2\mu\sigma.$$

故：

$$\sigma = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \cdot \frac{F}{q} \cdots\cdots\cdots\cdots (2.2.12)$$

因之：

$$x_x = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{F}{q}, \quad y_y = z_z = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{F}{q} \cdots (2.2.13)$$

具此諸值，下列位移：

$$u = x_x \cdot x, \quad v = y_y \cdot y, \quad w = z_z \cdot z \cdots\cdots\cdots\cdots (2.2.14)$$

乃代表本問題之完全解答．

上文所得之形變與體積膨脹相連繫，自爲意料中事；然試取(2.2.12)與(2.2.6)二式相較，則可知在直線張力之情形中，此膨脹之值 σ 僅爲在立方張力情形中所有者三分之一．以各軸之單獨膨脹言，則沿 x 軸之膨脹爲正，至屬明顯．與此膨脹相當者，由(2.2.14)有自由截面之位移——即圓柱體之延伸，其量爲：

$$u = x_x \cdot l = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{lF}{q} \cdots\cdots\cdots\cdots (2.2.15)$$

此示延伸與張力及長度成正比例，與圓柱之截面成反比例，延伸且與一物質常數成正比例，此物質常數之倒數亦謂之該物質之"直線彈性係數" E：

$$E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.16)$$

然由(2.2.13)可知與圓柱體長度之膨脹相連繫者尚有垂直於圓柱體軸每一方向之收縮.欲求此收縮之值，最便可書出橫收縮(1)與縱膨脹(2)之比:

$$\frac{-y_y}{x_x}=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}=\epsilon<\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.17)$$

量得二常數 E 及 ϵ 之值,卽可計算 λ 與 μ, 該物體之整個彈性行爲因以决定.

ϵ 之值於軟木爲甚小,於橡皮則甚大,幾達其極限值$\frac{1}{2}$.以金屬及玻璃而論,則爲初步近似計,可假定約等於$\frac{1}{3}$,然各物質間亦有甚大之差異.

由(2.2.16)與(2.1.32)可知直綫彈性係數 E 之量綱與壓力之量綱同,以金屬及玻璃言,其數量級如下:

$$E\sim10^{12}\text{達因/厘米}^2[\text{參閱}(\text{I}\cdot1.1.8a)]\cdots\cdots(2.2.17a)$$

故彈性係數 λ 與 μ 具同一之數量級.

2.2.4. 復次,討論一扭轉之情形.設有一長度爲 l 之圓柱體,其下截面,卽圓柱體之底面,假定固着於 xy 平面($z=0$)中,而其上之自由截面($z=l$)則以外力而在其本身平面中轉經某一角度 L. 圓柱體之罩面仍假定不受外力之影響.

爲示異計,吾人可取相反之方向討論之,將不自外力出發而自假定之形變出發以求產生此形變之力.設形變爲圓柱體每一平行於 xy 平面之截面在其本身平面之轉動,轉動時並無畸變(3)發生,轉動角與該平面至底面之距離 z 成比例.故如 ω 爲水平底面之轉動角，則高度爲 z 之截面,其轉動角爲:

$$\frac{\omega\cdot z}{l}$$

(1)Transverse contraction. (2)Longitudinal dilatation. (3)Distortion.

自此而引用圓柱坐標即可得位移成分 u, v, w 之值，且所得之值爲唯一者。圓柱坐標如下：

$$x=\rho\cos\phi,\quad y=\rho\sin\phi,\quad z=z \cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.17b)$$

由上所述當可知質點 x, y, z 在形變後其坐標如下：

$$x+u=\rho\cos\left(\phi+\frac{\omega z}{l}\right),$$

$$y+v=\rho\sin\left(\phi+\frac{\omega z}{l}\right),$$

$$z+w=z.$$

因 ω 爲無限小者，故

$$u=-\frac{\omega yz}{l},\quad v=\frac{\omega xz}{l},\quad w=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.18)$$

且由(1.1.60)：

$$\left.\begin{array}{lll} x_x=0, & y_y=0, & z_z=0 \\ y_z=\frac{\omega x}{l}, & z_x=-\frac{\omega y}{l}, & x_y=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.19)$$

藉(2.1.32)可由形變成分以得應力成分：

$$\left.\begin{array}{lll} X_x=0, & Y_y=0, & Z_z=0 \\ Y_z=\frac{\mu\omega x}{l}, & Z_x=-\frac{\mu\omega y}{l}, & X_y=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.20)$$

此諸式恆得適合爲物體內部而設之方程式(2.2.1)，故所假定之形變代表一平衡態，爲自然中可得實現者，當自(2.2.2)所計得之應力作用於圓柱體面上時，所遇者常爲此平衡態。

試先討論作用於圓柱體彎曲面上之應力，此應力依照吾人之假定爲零。蓋在此曲面上 $\cos(\nu z)=0$，而 $\cos(\nu x)$ 及 $\cos(\nu y)$ 之值則爲任意，故由(2.2.2)而應用(2.2.20)於圓柱體罩面上之一切點，則：

$$X_\nu=0,\ Y_\nu=0,\ Z_\nu=\frac{\mu\omega}{l}[y\cos(\nu x)-x\cos(\nu y)] \cdots\cdots(2.2.21)$$

自此可知欲使吾人所假定之形變與無外力作用於圓柱體罩面上之假定兩不相悖，其惟一之條件爲：

$$y\cos(\nu x)-x\cos(\nu y)=0,$$

常適用於圓柱體曲面上之一切點.

是乃一純粹形學條件；示 $x:y$ 之方向——即由 z 軸上任何一點所非垂直於 z 軸矢徑之方向——與 $\cos(\nu x):\cos(\nu y)$ 之方向合——此謂與在矢徑極端之法綫 ν 方向合，換言之，其截面爲圓而此柱體爲圓柱體.

然則欲使吾人之假定仍得成立者，不得不再加限制，於此後之推論中，吾人將限於討論圓柱體之特殊情形.如是則因：

$$\cos(\nu x)=0,\quad \cos(\nu y)=0,\quad \cos(\nu z)=-1,$$

故由(2.2.2)及(2.2.20)，可得作用於圓柱體上端面上一面素之外壓力，其值爲：

$$X_\nu=-\frac{\mu\omega y}{l},\quad Y_\nu=\frac{\mu\omega x}{l},\quad Z_\nu=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.22)$$

或由(2.2.17b)：

$$X_\nu=-\frac{\mu\omega\rho}{l}\sin\phi,\quad Y_\nu=\frac{\mu\omega\rho}{l}\cos\phi,\quad Z_\nu=0.$$

故作用於圓柱體上端自由端面每一面素之外壓力，其作用之方向在端面平面中與矢徑 ρ 之方向垂直，其向旨與扭轉角 ω 之向旨同，此爲易於明瞭者.一切作用於曲面諸面素上之壓力：

$$X_\nu d\sigma,\quad Y_\nu d\sigma,\quad Z_\nu d\sigma,$$

因 $d\sigma=\rho d\rho d\phi$，由(I·2.1.26)可併爲下列之合力：

$$F_x=\int X_\nu d\sigma=0,\quad F_y=\int Y_\nu d\sigma=0,\quad F_z=\int Z_\nu d\sigma=0,$$

及合偶：

$$N_x=-\int zY_\nu d\sigma=0,\quad N_y=\int zX_\nu d\sigma=0,$$

$$N_z=\int(xY_\nu-yX_\nu)d\sigma.$$

$$N_z=\frac{\mu\omega}{l}\iint\rho^3 d\rho d\phi=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\mu\omega}{l}\cdot r^4=N\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.23)$$

式中 r 指圓柱之半徑.

由此可倒推：如有圓柱體，其底面固定，其上端之面有一力偶作用於其平面內，轉矩為 N，則此圓柱體所起之扭轉與所假定者同，上端之面所轉之角為：

$$\omega=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{lN}{\mu r^4}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.23a)$$

故扭轉角與圓柱體之長度及力偶之轉矩成正比例，而與半徑之四次方及物質常數 μ 成反比例，此常數因謂之該物質之"扭轉係數[(1)]"

2.2.5. 然如柱體之截面不為圓而為橢圓，設作用於柱體上端之面者同為此力偶 N，且罩面上並無外力，則扭轉又將若何？

第一，吾人於上節開端所立關於截面在其本身平面中轉動而無畸變之簡單假定，於此較普遍之情形宜有所改動，其理至明，蓋此假定僅適用於圓柱體也．改動之道亦不難．方程式(2.2.18)所示之簡單形變於任何截面之柱體雖不復成立，然此仍代表一在自然中可實現之平衡態，蓋可自方程式(2.2.1)得適用於柱體內部一事實推得者也——此謂如有相當之外力加於柱面上，此形變必然實現．何種外壓力須加於柱體之曲面上，則可自方程式(2.2.21)立知之．祇須將由柱體截面形狀所定之內指法綫之方向餘弦之值代入(2.2.21)之最後一式卽得．由此觀之，在柱體罩面上之外壓力到處與 z 軸平行——此謂外壓力之作用方向視 Z_ν 之為正或負而向上或向下．

普遍言之，可書：

$$Z_\nu=\frac{\mu\omega}{l}\cdot r\sin\delta\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.24)$$

是處 δ 乃罩面上一點之外指法綫與在所論截面中之矢徑 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 所成之角，是時外指法綫對矢徑以正向繞 z 軸而旋轉．以圓截面而論，當然 $\delta=0$，然以橢圓截面言，其長軸與短軸各與 x 軸及 y 軸疊合，在第一及第三象限中，當 ω 為正時，δ 為正，故 Z_ν 亦為正，在第二及第

(1) Modulus of torsion.

四象限中 δ 及 Z_y 均爲負.故如一橢圓柱在所論之位置中被扭轉時,欲使諸截面僅在各本身平面中轉動,則必須加外剪力於柱體之周面上,在第一及第三象限中,剪力之方向上指,在第二及第四象限中,剪力之方向下指.由此可知如無此外力之作用,則周面上所論之諸點將在相反之方向有一位移,使原有平面發生起伏,第一及第三象限低落($w<0$),第二及第四象限高起($w>0$).蓋周面周邊諸點僅矢徑 r 長度爲最大或最小($\delta=0$)者——在橢圓之情形卽頂點——其高低不變($w=0$),其餘或起或落.

畸變無關乎坐標系之選擇,亦無關乎固定底面之位置,ω 之正負,與夫作用於自由端面上外加轉矩之方向.欲對畸變之向旨得一普遍之觀念,要在明各種螺綫[1]之區別.當一點依一螺綫以進行,與旋轉同時並進者,尚有一前進之運動,運動之方向與旋轉平面垂直.在此點依螺綫進行時,或當螺旋輕入一固定螺旋套時,如轉動軸之正向(卷I第2.1.8節)與前進之方向合,例如在一普通拔塞螺旋之情形,則此螺綫謂之右手螺旋,反之,爲左手螺旋.此區別與該點依螺綫進行之方向或螺旋旋轉之方向無涉也.蓋如轉動之向旨反,則前進之方向及轉動軸之正向俱反.

今可重返本題,取柱體上一綫而論之.此綫初與扭轉軸平行,形變後成一螺綫.一面,柱體截面周邊諸點初在平面上者,形變完成後成一波形綫.吾人可得一普遍定理:此波形綫圍繞矢徑最小值之部分卽螺綫之部分,此螺綫之種類與前述柱體綫所成者同;如後者爲右手螺旋,則前者亦爲右手螺旋.至波形綫鄰接 r 最大值之部分,則情形適相反.

在前述橢圓截面之例中,則依照當時所用之表記,柱體綫所成者,右手螺旋也.故周邊之波形綫在短軸之兩端亦以右手螺旋進行——自第一至第二象限及自第三至第四象限均上昇,與前所得之結果正合.

欲求此問題之量的解答,則必將解析情形討論之.由前所得關於半

(1)Screw lines.

軸爲 a 及 b 之橢圓柱體之結果，位移成分之方程式(2.2.18)可推廣如下：

$$u=-\frac{\omega yz}{l},\quad v=\frac{\omega xz}{l},\quad w=-Cxy \cdots\cdots\cdots\cdots (2.2.25)$$

是處 C 乃一正量之常數．蓋 w 之値具前變之性質，在第一及第三象限中爲負，而在第二及第四象限中爲正也．由此(2.2.1)適用於柱體內部及(2.2.2)適用於柱體曲面諸條件乃實際適合，前者恆可適合而後者可使：

$$C=\frac{\omega}{l}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (2.2.26)$$

扭轉問題之解答至此乃完成，並已及於橢圓柱體之情形．在圓柱體情形中所得關於外加轉矩 N 之(2.2.23)式是處可由(2.2.2)推廣爲：

$$N=\frac{\pi\mu\omega}{l}\cdot\frac{a^3b^3}{a^2+b^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (2.2.27)$$

第三章 剛體中之振動

2.3.1. 如運動而永遠與無限小形變相連繫者，則運動之方向必非一，其必變動於種種方向無疑，換言之，物體必在"振動"中，振動時位移及形變連續易其正負.本篇所論均與無限小形變有關，此為吾人普遍之假定，今討論彈性剛體之振動，為簡易計，吾人將假定所論者均屬各向同性體.規範振動之定律，前已闡發無餘，要言之，吾人已有運動方程式(1.2.17)，如置重力不論，可書如下：

$$\left.\begin{aligned}k\frac{\partial^2 u}{\partial t_2}&=-\frac{\partial X_x}{\partial x}-\frac{\partial X_y}{\partial y}-\frac{\partial X_z}{\partial z}\\k\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}&=-\frac{\partial Y_x}{\partial x}-\frac{\partial Y_y}{\partial y}-\frac{\partial Y_z}{\partial z}\\k\frac{\partial^2 w}{dt^2}&=-\frac{\partial Z_x}{\partial x}-\frac{\partial Z_y}{\partial y}-\frac{\partial Z_z}{\partial z}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.1)$$

此外尚有體面條件(1.2.8)及壓力張量及形變張量間之關係(2.1.32)，均係指各向同性體而言.

振動之最感興趣者，無疑為物體之大小在空間之三維並不具同一數量級，而僅在其二維或甚至一維有壓倒之開展者.在此情形，運動定律當然立可化繁為簡，蓋獨立空間坐標之數已減也.在另一方面，吾人如欲將實際所遇最重要之振動過程加以正視，則尚須將已立之方程式相當推廣為得計，於第2.1.2節中，位移成分 u,v,w 及形變成分之計算，係以物體一切外壓力均為零之狀態為基礎.故壓力成分為形變成分之齊次函數，而在未形變狀態中一切壓力成分均為零.然在自然中，吾人所感興趣之振動正為未有此限制之振動.例如，取小提琴琴絃之振動而論，則位移 u,v,w 之計算，當自該物體之穩定平衡態出發.此乃一無形變之態也.然在此狀態，壓力成分並不為零，吾人俱知琴絃有比較大之張力存在.此張力之影響於振動性質其重要實非可想見者，若以標識琴絃質料之彈性常數 λ,μ，與張力較，其對振動影響之微小，二者實不可相提並論也.例如，無外加張力，則腸膜製絃亦不振動.以此意義言，

可謂有一種人爲彈性或強迫彈性，與質料無關而僅與外力相關．欲將此種情形兼顧在內，則壓力成分與形變成分間之關係(2.1.32)乃必須加以推廣，壓力成分當視爲形變成分之一次函數，與前無異，然壓力成分將不復爲形變成分之齊次函數；吾人將使此函數之絕對項適合於物體之穩定平衡條件．

因此，如前例所提示者，吾人於物質常數外，於運動方程式中引用一新常數．視第一常數或第二常數各自影響之消長，吾人所得之振動現象因以全異——有爲由自然彈性所生者，有爲由強迫彈性所生者．此種區分以實際情形言亦至重要，吾人日常用語已兩不相淆．則在單維物體中，"桿"之振動係由自然彈性所致，而"絃"則由強迫彈性所致；在二維物體中"板"與"鐘"均以自然彈性振動，而膜與鼓膜則以強迫彈性而振動．在聲學中，以固體言，強迫彈性所致之振動較爲重要．故吾人主在討論強迫彈性之振動，最簡單者爲絃或綫之振動，其緊張程度使物質彈性之影響即所謂綫之剛強度[1]者，與張力之影響較，可略而不論．

2.3.2.　緊張之綫或絃　設綫或絃之形狀爲一柱體，截面無限小，在靜止時其位置與 x 軸合．則絃上每點可以一定之 x 值標識之，如位移成分 u, v, w 已知爲 x 及 t 之函數，則絃之運動完全明瞭．欲解此問題，第一須將(2.1.32)之關係加以推廣，吾人於上節已明其必要矣．絃之平衡態與第 2.2.3 節中所論一柱體在一方向緊張之平衡態相等；故第 2.2.3 節中之方程式(2.2.9)及(2.2.10)亦得應用於是處，祇須取 F 爲緊張力而 q 爲絃之截面．此諸方程式乃示吾人以絃在未形變狀態中壓力成分之值．故(2.1.32)所須之推廣應唯一爲：

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{F}{q} - \lambda\sigma - 2\mu x_x, & Y_z &= -\mu y_z \\ Y_y &= \qquad\; - \lambda\sigma - 2\mu y_y, & Z_x &= -\mu z_x \\ Z_z &= \qquad\; - \lambda\sigma - 2\mu z_z, & X_y &= -\mu x_y \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.2)$$

---

(1)Stiffness.

至於絃爲"緊"張之假定，實謂 X_x 式中之第一項由張力 F 所生者較其次諸項爲大也．然 F 亦不能假定爲隨意大者．蓋 σ 與 x_x 爲無限小者，故 X_x 及 $\frac{F}{q}$ 必均較 λ 及 μ 爲小．然則張力 F 之數量級實包含於某種限度之內．雖然，如以金屬言，(2.2.17a)示係數 λ 及 μ 之數量級爲 10^{12} 達因/厘米^2，此與每平方毫米爲 10,000 仟克之壓力相當，故張力之大小仍有不少可以游翔之餘地．

玆試成立柱形絃罩面上之邊界條件．絃除於兩端假定爲固定外，其餘部分爲可以自由振動者，並無外力作用於罩面上，故由(1.2.8)有：

$$X_x\cos(\nu x)+X_y\cos(\nu y)+X_z\cos(\nu z)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2.3.3)$$

罩面法綫 ν 所可取之方向甚多，然必須合乎一個條件，卽此必到處與絃在空間任何時所成之曲綫垂直．此空間曲綫由坐標爲 $x+u, v, w$ 之諸點組成之，坐標之向比爲：

$$d(x+u):dv:dw=\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right):\frac{\partial v}{\partial x}:\frac{\partial w}{\partial x},$$

故下列條件得成立：

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos(\nu x)+\frac{\partial v}{\partial x}\cos(\nu y)+\frac{\partial w}{\partial x}\cos(\nu z)=0.$$

因形變爲無限小者，故 $\cos(\nu x)$ 與其他二餘弦比爲無限小甚明，上式可書作：

$$\cos(\nu x)=-\frac{\partial v}{\partial x}\cos(\nu y)-\frac{\partial w}{\partial x}\cos(\nu z).$$

如將此值代入(2.3.3)之三方程式而記取 $\cos(\nu y):\cos(\nu z)$ 之比可爲任何值，則略去第二級之微項可得下列諸關係：

$$\left.\begin{aligned} X_y&=X_x\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{F}{q}\frac{\partial v}{\partial x}\\ X_z&=X_x\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{F}{q}\frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (2.3.4)$$

$$Y_y=0,\ Z_z=0,\ Z_y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2.3.5)$$

所餘者僅爲第六壓力成分 X_x，立式之準確度當包括第二級之微

項.此可由(2.3.2)求之,則併入(2.3.5)之關係可得:

$$y_y=z_z=-\frac{\lambda}{2\mu}\sigma,$$

再由(2.1.31)得:

$$\sigma=\frac{\mu}{\lambda+\mu}x_x,$$

最後用(2.3.2)之第一式及(2.2.16)得:

$$X_x=-\frac{F}{q}-E\frac{\partial u}{\partial x}\qquad\qquad(2.3.6)$$

故所需之絃之運動方程式自(2.3.1)及壓力成分之値(2.3.4),(2.3.5)及(2.3.6)應如下:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\qquad\qquad(2.3.7a)$$

$$k\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{F}{q}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0\qquad\qquad(2.3.7b)$$

$$k\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{F}{q}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\qquad\qquad(2.3.7c)$$

然則位移成分 u,v,w 各有其自身所依循之定律與其他二者無關,而定律之形式則三成分均同.然三方程式中各有之標識常數其值並非到處相同者,適合於 u 之值與適合於 v 及 w 之值獨異,其所以然者,當然因 u 之方向與絃之方向合,而 v 及 w 之方向則與絃垂直.故 u 振動謂之絃之**縱振動**(1),而 v 振動及 w 振動謂之絃之**橫振動**(2).讀者將知產生縱振動者僅爲絃所構成之物質之彈性,尤爲該物質之直綫彈性係數,縱振動與張力無關,而橫振動之情形則適得其反.

在下文討論振動定律時,吾人祇須取一單獨成分論之已足,其理至明.在聲學中橫振動遠較縱振動爲重要,故下述討論將根據方程式(2.3.7b),此代表在 xy 平面中之平面橫振動.命常數:

$$a^2=\frac{F}{kq}\qquad\qquad(2.3.8)$$

(1)Longitudinal vibration. (2)Transverse vibration.

(2.3.7b)可書爲:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cdots\cdots(2.3.9)$$

積分後可得 v 爲二獨立變數 x 及 t 之一函數.如使 x 不變而使 t 變動,則得絃上某定點之運動.然如使 t 不變而使 x 變動則得在某特定時間絃所成曲綫之形狀.故 $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ 者,絃上一點之加速度也,$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ 者,絃所成曲綫之曲率也,而方程式(2.3.9)則謂絃上任何一點之加速度,因之作用於該點之力均與絃所成曲綫在該點之曲率成正比例,至屬明顯也.

2.3.3. 運動方程式之積分 欲求偏微分方程式(2.3.9)之通解,可引用二新獨立變數以代獨立變數 x 及 t 如下:

$$\xi=x+at,\quad \eta=x-at\cdots\cdots(2.3.10)$$

下列關係當適用於諸微分係數間之變換:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_x=\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)_\eta\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_x+\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)_\xi\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_x=\frac{\partial v}{\partial \xi}\cdot a-\frac{\partial v}{\partial \eta}\cdot a,$$

將此運算再用一次可得:

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)_x=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}-2a^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}+a^2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}.$$

同樣有:

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_t=\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}.$$

如在方程式(2.3.9)中將依獨立變數 x 及 t 之微分係數代以依獨立變數 ξ 及 η 之微分係數,則得:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}=0.$$

此方程式示 $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ 僅與 ξ 有關而 $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ 僅與 η 有關.

故:

$$v=f(\xi)+g(\eta).$$

是處 f 與 g 爲二含一單獨變數之任何函數.或由(2.3.10):

$$v=f(x+at)+g(x-at)\cdots\cdots(2.3.11)$$

此卽微分方程式(2.3.9)之通解也.不論 f 及 g 之如何選擇，如將上式直接代入微分方程式(2.3.9)當卽知其適合. 然愼毋忽視下述之點.

(2.3.11)所加於 v 值之限制而使之得滿足微分方程式(2.3.9)者乃緣所見於函數 f 之獨立變數 x 及 t 僅爲其配合式 $x+at$，而所見於函數 g 者僅爲其配合式 $x-at$，此二配合式亦謂之函數 f 及 g 之"辯量(1)".每一函數僅與其特殊之辯量有關. 故如取此函數之導數，則不論依 x 或依 t，吾人可先依其辯量以取導數，然後再依所論之變量以取辯量之導數.如是可自(2.3.11)得:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=f'+g',\quad \frac{\partial v}{\partial t}=f'\cdot a-g'\cdot a \cdots\cdots\cdots\cdots (2.3.11a)$$

是處 f' 及 g' 爲 f 及 g 依其辯量之微分係數.再取導數一次得:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=f''+g'',\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=f''\cdot a^2+g''\cdot a^2.$$

此諸值普遍適合微分方程式(2.3.9).

吾人自微分方程式永未能求得函數 f 或 g 之特殊形式，此僅可由振動絃之初條件及邊界條件得之. 在討論此諸條件之前先將(2.3.11)式所示之位移 v 所加於絃之運動之特殊物理性質普論之.

試先取一特殊情形，卽二函數之一爲零之情形，此函數設爲 g，故:

$$v=f(x+at)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.3.12)$$

則絃之運動其特徵有可述者，當 x 與 t 變遷時，如 $x+at$ 持續不變，則位移 v 不變，$x+at$ 持續不變卽:

$$dx+adt=0,\quad 或\frac{dx}{dt}=a.$$

上式所指者乃速度爲 v 而沿負 x 軸方向進行之一運動也.故吾人如沿絃循負 x 軸之方向進行，則由眼之觀察或由指標所示，將覺所循之點其位移常爲一完全特定之值 v. 此事實亦得述之如下:凡位移 v 均以

(1)Argument.

不變之速度 a 循負 x 軸之方向傳播之.故在任何時間絃所成之曲綫其形狀持續不變，吾人所有者僅為整個曲綫依上述方法之連續位移.若此之運動謂之波動(1)，其位移速度謂之波之傳播速度(2).傳播速度與絃上諸點之微粒速度應明其區別，二者初無若何之連繫也(參閱卷I第0.0.1節).波之形狀由函數 f 決定之，可完全任意，且亦並不定為具週期者.讀者欲對此運動得一簡單而引人入勝之觀，可將函數 f 之曲綫畫於一紙條上，取辯量 ξ 為橫坐標，f 之値為縱坐標，而以 $-a$ 之速度曳此紙條循絃以行.則無論何時紙條之畫綫即直接示絃之圖象.在 $t=0$ 時辯量 $\xi=x+at$ 與絃上一點之橫坐標 x 疊合.

同樣，特解:

$$v=g(x-at)\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.13)$$

亦係一波動，傳播速度同為 a，惟依正 x 軸之方向進行.故振動之普遍情形(2.3.11)乃由二波所組成，一般而論此二波可各異者，以同一傳播速度 a 依相反方向而運動.吾人如將此二波之曲綫各畫於一紙條上，而將紙條以 $\pm a$ 之速度循絃運動，則無論何時，某點二縱坐標之代數和示絃上相當點之卽時位移 v.

次將探究 f 與 g 二波之形狀如何因振動過程之初態條件及邊界條件以決定之情形.當先討論一無限長之絃，此固為一理想之情形也.

2.3.4. 兩端無盡之絃 以自 $x=-\infty$ 緊張至 $x=+\infty$ 之絃而論，則欲完全決定其運動，僅須討論其初態條件已足，並無庸更及其邊界條件.

設絃上諸點在 $t=0$ 時之位移及速度均已知，卽:

$$v_0=F(x)\quad 及\quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0=\Phi(x)\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.14)$$

是處之二函數 F 及 Φ，於 x 之一切正值及負值，函數之値均已知.代入(2.3.11)及(2.3.11a)得:

(1)Wave motion. (2)Velocity of propagation.

$$f(x)+g(x)=F(x),$$
$$f'(x)-g'(x)=\frac{1}{a}\Phi(x).$$

將最後一式積分之得:

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{a}\int_c^x\Phi(x)dx.$$

故:

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{2}F(x)+\frac{1}{2a}\int_c^x\Phi(x)dx \\ g(x)&=\frac{1}{2}F(x)-\frac{1}{2a}\int_c^x\Phi(x)dx \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(2.3.15)$$

二波之形狀及整個運動完全由此 f 及 g 之二式決定之. 所需者僅於 f 中以辯量 $x+at$ 代 x 而於 g 中以辯量 $x-at$ 代 x. 積分常數 c 之選擇係任意者,初視之似有未定處在, 然在(2.3.11)式中, f 與 g 之見於 v 之值者僅爲二者之和, 凡 c 之變遷對於 f 及 g 之影響二者適得其反.故吾人可命 $c=0$ 並無損於問題之普遍性.

再試討論若干特殊情形以爲示例.第一,先論一切初速度均爲零之情形, 如一撥動之絃是——此謂離絃於平衡位置而後縱之. 在此情形 $\Phi(x)=0$, 故由(2.3.15):

$$f(x)=g(x)=\frac{1}{2}F(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.16)$$

然則二波相等,其函數各等於初位移之半.自此可直接跡得此運動之全程.在圖 2.3.1 中,最上之綫代表絃在初態時曲綫之形象. 是時平衡之擾動僅限於絃之一小部;產生之法,可設想於絃之 B 點以細桿撥之, 同時於 B 點兩邊之其他二點 A 及 C 保持固定.如放縱時並不賦以初速度,則絃即依照上述狀況振動. 在初態下所示之兩相等波函數 f 及 g 之輪廓以速度 a 依照箭頭所指之向旨循絃運動,無論何時,其上下相當之縱坐標應以代數方法相加. 故在絃上原爲

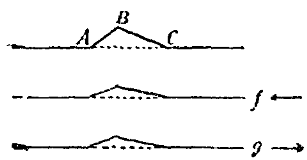

圖 2.3.1

一隆起者分解爲二全等之隆起，其大小僅及原有者之半，各以速度 $\pm a$ 依相反方向分馳，兩隆起間仍得有休止狀態成立，如圖 2.3.1a 及 2.3.1b 所示者．在此二圖中頂綫各示某時間後綫之形象，二底線各示此形象所因構成之方法．在此過程中迄無週期性存在也．故即最遠離平衡位置之 B 點亦將以不變速度直接回復至此位置而永恆靜止於是處．

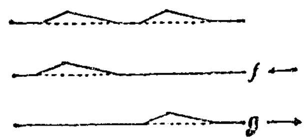

圖 2.3.1a

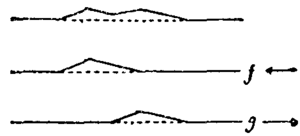

圖 2.3.1b

其相反之情形即一切初位置均等於零之情形可以類似之方法處理之．例如有一鋼琴用之長鋼絃，於一點以鎚迫擊之，既擊之後，被擊點之平衡位置尚不發有變．則由(2.3.14)：

$$F(x)=0,$$

而由(2.3.15)：

$$f(x)=-g(x)=\frac{1}{2a}\int_c^x \Phi(x)dx \cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.17)$$

故二波函數 f 與 g 相等而相反，依前述情形之思考法可示相等而相反之二波各自其衝擊點背馳，而絃上二波間部分則立復其靜止狀態．

然讀者切莫謂凡平衡之擾動各有二波自擾動點背馳也．欲明乎此可試答下列之問題：如僅有一波——設爲 f 波——自擾動點傳播者，則初態必滿足何種條件？此答案可取 $g=0$ 代入方程式(2.3.15)得之，則：

$$F(x)=\frac{1}{a}\int_c^x \Phi(x)dx,$$

或：

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{1}{a}\Phi(x);$$

或由(2.3.14)：

$$\frac{dv_0}{dx}=\frac{1}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.18)$$

此示在初態時絃上每點之速度須等於絃之曲線在該點對 x 軸所成之傾角之正切之 a 倍.

如絃上各點均合此速度與位移間之關係，則整個擾動以一單獨不變之波沿負 x 軸之方向運動；此亦可自一簡單之運動學觀點知之，蓋絃上每點之速度可由曲綫 f 之形狀及傳播速度 a 直接決定也.

2.3.5. 兩端有限之絃 玆討論一有限長度 l 之絃，設固着於 $x=0$,及 $x=l$ 之二點.則方程式(2.3.15)當然仍成立,然此際僅於 x 之值在 0 與 l 間者此諸方程式始有意義可言,蓋函數 $F(x)$ 與 $\Phi(x)$ 代表絃上各點位移及速度之初值者僅於 $0<x<l$ 之情形始定也. 然欲表示一切時間之運動，則由(2.3.11)尙須相當其他辯量之值之 f 及 g 之值；例如,如 t 之值爲正而甚大，則須辯量之值爲正而甚大之 f 之值,及辯量之值爲負而甚大之 g 之值. 故欲決定 f 及 g，則尙須加入方程式(2.3.15)以爲補充;其所以可能者，因有 $v=0$ 之條件得適合於邊界 $x=0$ 及 $x=l$ 也.或由(2.3.11):

$$0=f(at)+g(-at)$$

及:

$$0=f(l+at)+g(l-at),$$

於 t 之任何值必當成立.如在此二方程式中取 at 以 x 代之,則得:

$$f(x)+g(-x)=0 \qquad (2.3.19)$$

$$f(l+x)+g(l-x)=0 \qquad (2.3.20)$$

此適合於一切 x 值之二方程式卽上述在計算波函數 f 及 g 時之必要補充.蓋如在(2.3.20)中書 $l+x$ 以代 x，則有:

$$f(2l+x)+g(-x)=0,$$

與(2.3.19)較,可得:

同樣可得:

$$\left.\begin{aligned} f(2l+x)&=f(x)\\ g(2l+x)&=g(x)\end{aligned}\right\} \qquad (2.3.21)$$

此示波函數 f 及 g 對 x 言均為具週期者，週期為 $2l$. 故由(2.3.11)直接可知絃之運動對時間 t 言亦為具週期者，週期為 $\frac{2l}{a}$.

吾人首須證明者有一事：波函數 f 及 g 之值，以辯量之一切正值及負值言，均得由初態條件(2.3.15)及邊界條件(2.3.19)與(2.3.21)唯一決定之.

第一，在 $0<x<l$ 之情形，$f(x)$與 $g(x)$可由(2.3.15)決定之. 故方程式(2.3.19)若書成：

$$f(x)=-g(-x) \text{ 與 } g(x)=-f(-x) \cdots\cdots\cdots\cdots (2.3.22)$$

之形式，得於 $-l<x<0$ 之情形定 $f(x)$與 $g(x)$之值. 蓋在此 x 值之範圍內，上列二方程式之右邊為已知也. 此實謂 $f(x)$與 $g(x)$ 在全週期之範圍內——即自 $x=-l$ 至 $x=+l$——均已知，因之(2.3.21)完全決定.

此計算之方法可示以特殊之例. 為簡單計，將選取絃上初僅有一單獨之波——設為 x 波——存在之振動. 故(2.3.18)之關係可假定於初態時得成立. 絃之初態形象設為如圖 2.3.2 所示者. 同圖中並示於 $0<x<l$ 之情形波函數 $f(x)$及 $g(x)=0$ 之形象. 一面則於 $-l<x<0$ 之情形，有 $f(x)=0$ 而所示 $g(x)$ 之形象則可謂"$f(x)$對 $x=0$ 點而言之倒像"(1). 此諸形象以週期往返來復如圖 2.3.2 所示者.

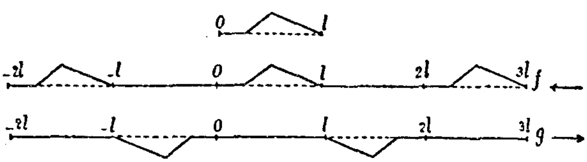

圖 2.3.2

波函數 f 及 g 之此種圖示實已明定運動之全程. 於圖 2.3.2a 及 2.3.2b 中則最上綫各示某時間後絃所得之形象，其底下之二綫則各示此形象如何由 f 及 g 構成之法.

(1)Reversed image.

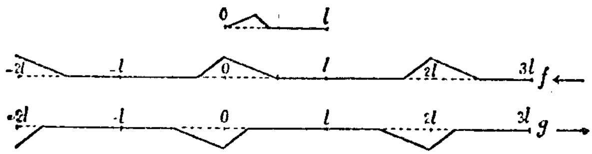

圖 2.3.2a

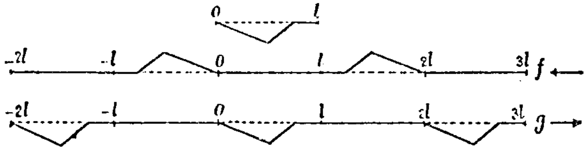

圖 2.3.2b

故當 f 波衝撞於絃之固着端 $x=0$ 時，f 波變換爲 g 波，以相反之方向進行——此謂 f 波“被反射”，其正負乃變. 反射後 g 波前進渡經絃之全程，直至絃之另一端 $x=l$ 再變爲 f 波. 週期 $\frac{2l}{a}$ 過後則復得原有之初態再以此過程而復始.

f 及 g 二波均不爲零之普遍情形可以同樣方法處理之.

2.3.6. 週期函數之解析示法 上文曾將波函數 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 x 之各範圍內以不同等式表示之，然如能在自 $x=-\infty$ 至 $x=+\infty$ 之全程內將波函數以一單獨之解析式示之，亦常有用.

欲達此目的，可先求波函數具週期 $x=2l$ 之最普遍解析表式，換言之，當先求函數方程式(2.3.21)之通解. 吾人可先由下列之特解出發：

$$f(x)=e^{\alpha x} \qquad (2.3.23)$$

此適合方程式(2.3.21)甚明，祇須常數 α 得滿足

$$e^{2l\alpha}=1$$

之條件. 因之：

$$2l\alpha=2n\pi i.$$

是處 n 爲任何正或負之整數. 如將由此所得之 α 値代入(2.3.23)中，而將 $f(x)$ 之虛實二部分分列，可得二特解：

$$\cos\frac{n\pi x}{l}, \text{ 及 } \sin\frac{n\pi x}{l},$$

此二特解可各乘以任意常數 A_n 及 B_n 而更推廣之.吾人如將相當於一切可能序數 n 之此種特解互加之，特解中每一 n，常數 A_n 及 B_n 之值各不同，則所得者仍爲函數方程式(2.3.21)之一解，且爲此函數方程式之通解，關於此點，此處恕不證明.此通解可書如下式：

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cdots\cdots(2.3.24)$$

式中凡含負 n 值之項均免去，蓋凡含負 n 值之項均可與含相當正 n 值之項併爲一項，此並無礙於普遍性，其理甚明也.故二連加號內之每一項實代表二項.至 $n=0$ 之項，則地位特殊，所遇者僅有一次，故常附以因數 $\frac{1}{2}$，且常數 A_0 因此因數而得較簡之意義，此點往後自明.

(2.3.24)之級數隨其發見者之名謂之"Fourier 級數".吾人如將 $x+2l$ 以代 x 則可知此級數之週期實爲 $2l$，蓋此時所有角度俱增以 2π 之整倍也.凡 x 具週期而週期爲 $2l$ 之每一函數均得以(2.3.24)代表之.於此有一問題焉：如函數之值之級數在週期內——設爲自 $x=0$ 至 $x=2l$ 爲已知，則係數 A 與 B 之計算將若何？

欲答此問題，可設想 $f(x)$ 在 $0<x<l$ 內已定以完全任意之值而先計算下列積分：

$$\int_0^{2l}f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx\cdots\cdots(2.3.25)$$

於 n 爲任何不爲零之正整數之積分.依據假定，此積分有完全特定之值.

吾人如將 $f(x)$ 代以級數(2.3.24)於(2.3.25)之積分中，則此積分實代表若干積分之和，現可進而計算之.其第一積分乘以 A_0 時，結果爲零，蓋因：

$$\frac{A_0}{2}\cdot\int_0^{2l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0\cdots\cdots(2.3.26)$$

下列積分，將以序數 $1,2,3\cdots n,\cdots$ 依次出現；一般而論，此序數與(2.3.25)中之 n 數有別，故將以 n' 指示之.如 n' 與 n 不同，則每一情形中，其相當之二積分部分爲

$$A_{n'}\int_0^{2l}\cos\frac{n'\pi x}{l}\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$+B_{n'}\int_0^{2l}\sin\frac{n'\pi x}{l}\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0\cdots\cdots\cdots(2.3.27)$$

然如二項中 $n'=n$，則其相當之積分爲：

$$A_n\int_0^{2l}\cos^2\frac{n\pi x}{l}dx+B_n\int_0^{2l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=A_n\cdot l\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.28)$$

故由 (2.3.25) 分解而得之諸積分之總和化爲一單獨式(2.3.28)，而得下列之關係：

$$\left.\begin{aligned}A_n&=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot dx\\ \text{同樣有：}&\\ B_n&=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot dx\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.29)$$

係數 A_n 與 B_n 乃完全決定．最後，欲求 A_0 自(2.3.24)可得：

$$\int_0^{2l}f(x)dx=\frac{A_0}{2}\cdot 2l=A_0\cdot l.$$

由此可知方程式(2.3.29)亦得應用於 $n=0$ 之情形．第一常數所以命之爲 $\frac{A_0}{2}$ 者，至此始明其故．B_0 之值無關重要，蓋 $\sin\frac{2\pi n}{l}$ 於 $n=0$ 之情形消失也．

自常數 A_n 與 B_n 所由計算之方法亦可知此諸常數之決定爲唯一者——此謂僅有一 Fourier 級數，其週期爲 $2l$，在週期內有特定之値也．蓋如另有一級數而係數爲 A'_n 及 B'_n，則此諸係數必亦適合方程式(2.3.29)，然此方程式之右邊其値爲預定者，故此諸係數與係數 A_n 及 B_n 恆等．

Fourier 展開式之應用甚廣，爲示例計，吾人將更取一特殊情形而運算之．試假定在 $0<x<l$ 之範圍內，$f(x)=x$ 而在 $l<x<2l$ 之範圍內，$f(x)=0$．此函數之全程如圖 2.3.3 中之曲綫所示者．在 $-l$ 至 0 及自 l 至 $2l$ 等等之段落內，此與橫坐標軸合，而在居間之段落內則爲

坐標所成角之平分綫一部分．故函數 $f(x)$ 於 $-l, l, 3l\cdots$ 諸 x 值為間斷者，當 x 遞增時 $f(x)$ 自 l 直降為零．由(2.3.29)所立之 Fourier 級數亦必具此同一性質．在(2.3.29)式中之二積分各可分解為二部分，第一部

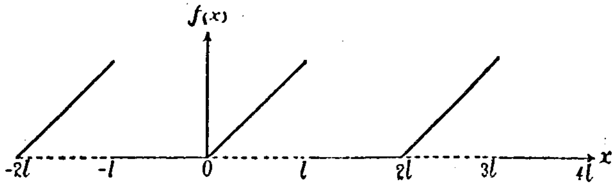

圖 2.3.3

分自 0 至 l，第二部分自 l 至 $2l$．在第一部分之積分中 $f(x)=x$，在第二部分之積分中 $f(x)=0$；因之：

$$A_n=\frac{1}{l}\int_0^l x\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx+0=\frac{(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2}\cdot l,$$

$$B_n=\frac{1}{l}\int_0^l x\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx+0=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\cdot l.$$

至 $n=0$ 則：

$$A_0=\frac{1}{l}\int_0^l x\,dx=\frac{l}{2}\cdot$$

以此諸係數之值，(2.3.24)之級數成為：

$$f(x)=\frac{l}{4}-\frac{2l}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{l}-\frac{2l}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{l}-\frac{2l}{25\pi^2}\cos\frac{5\pi x}{l}-\cdots$$

$$+\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{l}+\frac{l}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{l}-\cdots\quad(2.3.30)$$

此乃一單獨之解析式，可藉圖 2.3.3 所示之曲綫代表之．

試取若干特例以證此級數之正確．在 $x=0$ 之情形，則 $f(x)=0$，故：

$$0=\frac{l}{4}-\frac{2l}{\pi^2}-\frac{2l}{9\pi^2}-\frac{2l}{25\pi^2}-\cdots,$$

或：

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\cdots\cdots\quad(2.3.31)$$

如 $x=\frac{l}{2}$，則 $f(x)=x=\frac{l}{2}$，故由(2.3.30)：

$$\frac{l}{2}=\frac{l}{4}+\frac{l}{\pi}-\frac{l}{3\pi}+\frac{l}{5\pi}-\frac{l}{7\pi}+\cdots,$$

或：
$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.32)$$

如 $x=-\frac{l}{2}$，則 $f(x)=0$，故由(2.3.30)：

$$0=\frac{l}{4}-\frac{l}{\pi}+\frac{l}{3\pi}-\frac{l}{5\pi}+\frac{l}{7\pi}-\cdots,$$

所得與前一級數同.

級數(2.3.30)之性質在其間斷點如 $x=l$ 最饒興趣.當 x 之值自較小或較大之值推進時，此級數之值 $=x$ 或 $=0$，然以 $x=l$ 本身而言，則 $f(x)$ 既不等於 l 亦不等於 0，代入(2.3.30)可知：

$$f(l)=\frac{l}{4}+\frac{2l}{\pi^2}+\frac{2l}{9\pi^2}+\frac{2l}{25\pi^2}+\cdots$$

或由(2.3.31)：

$$f(l)=\frac{l}{2}$$

是乃二值之等差中數也.此定理更得推廣，是處不再論述.

2.3.7. 特如 $f(x)$ 爲一"偶"函數——即 $f(-x)=f(x)$——則自 0 至 $2l$ 之積分可立代以自 $-l$ 至 $+l$ 之積分，故由(2.3.29)可得：

$$A_n=\frac{1}{l}\int_l^0 f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot dx+\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot dx$$

以此二偏積分之第一者言，吾人如變換積分變數使 $x'=-x$，則：

$$-\frac{1}{l}\int_l^0 f(-x')\cdot\cos\frac{n\pi x'}{l}\cdot dx'=\frac{1}{l}\int_0^l f(x')\cdot\cos\frac{n\pi x'}{l}\cdot dx'$$

故二偏積分相等而：

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot dx\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.33)$$

同樣可得 $B_n=0$，蓋此際二偏積分相等而相反也.

然則一偶函數以週期爲 $2l$ 之 Fourier 級數表之其式較簡，當如下：

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{l}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.34)$$

式中諸係數 A 可由(2.3.33)於自0至 l 函數半週之歷程內唯一決定之．以實際言，此級數之每一項及常數 A_0 均爲 x 之偶函數．

反之，如 $f(x)$ 爲"奇[1]"函數——即 $f(-x)=-f(x)$，則同樣可得 $A_n=0$ 及：

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot dx\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.35)$$

故 Fourier 級數爲：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.36)$$

在此情形，諸係數亦可依次由半週內函數之歷程決定之．

2.3.8. 茲乃復返至長度爲 l 之絃之振動問題．吾人將應用上節所闡發之方法以緊縮其解答——此謂吾人將視位移 v 爲 x 及 t 之函數而以一單獨之式示之，此式當適合於 x 及 t 之一切值．由(2.3.11)有：

$$v=f(x+at)+g(x-at).$$

是處波函數 g 一般可藉邊界條件(2.3.19)化爲 f，祇須將其中之 x 代以 $at-x$：

$$f(at-x)+g(x-at)=0.$$

故：

$$v=f(x+at)-f(at-x).$$

然由(2.3.21)，$f(x)$乃具週期者，其週期爲 $2l$．故 $f(x+at)$ 及 $f(at-x)$亦必適合此條件．吾人如於(2.3.24)式中以 $at+x$ 代 x 而再以$at-x$ 代 x，則得：

$$v=\frac{A_0}{2}+\Sigma A_n\cos\frac{n\pi}{l}(at+x)+\Sigma B_n\sin\frac{n\pi}{l}(at+x)$$

$$-\frac{A_0}{2}-\Sigma A_n\cos\frac{n\pi}{l}(at-x)-\Sigma B_n\sin\frac{n\pi}{l}(at-x)\cdots\cdots(2.3.37)$$

(1)Odd.

疊加運算當各自 $n=1$ 取至 $n=\infty$.

此乃長度爲 l 之絃橫振動之普遍立式. 可書成各種較簡單之形式, 每式各有其特殊之利益.

如命:

$$A_n=C_n\cos\theta_n,\quad B_n=-C_n\sin\theta_n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.38)$$

更假定 C_n 爲正量而 θ_n 在 0 及 2π 內, 則可書:

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\left\{\frac{n\pi}{l}(at+x)+\theta_n\right\}$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\left\{\frac{n\pi}{l}(at-x)+\theta_n\right\}\cdots\cdots\cdots(2.3.39)$$

然則絃之最普遍振動當由無數單週期波所組成, 諸單週期波兩兩相等而相反, 往返來復, 謂之"分波[1]", 每一分波之週期對 x 言爲:

$$\frac{2l}{n}=\lambda_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.40)$$

對 t 言爲:

$$\frac{2l}{na}=\tau_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.41)$$

空間週期[2] λ_n 謂之該波之"波長", 時間週期[3] τ_n 謂之該波之"振動週期或振動時間". 可能之最大波長(相當於 $n=1$)爲 $2l$, 卽絃長之二倍, 與之相當者爲最長振動時間 $\frac{2l}{a}$. 此振動謂之絃之"基本振動[4]". 其他波長及振動時間爲基本振動諸量之 n 分.

振動時間之倒值:

$$\frac{1}{\tau_n}=\nu_n=\frac{na}{2l}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.42)$$

乃每單位時間振動之數, 故謂之該波之"頻率或振動數[5]". 依據上列之三方程式, 波長、振動時間及頻率其關係如下:

$$\frac{\lambda_n}{\tau_n}=\lambda_n\nu_n=a\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.43)$$

---

(1)Partial wave. (2)Space period. (3)Time period. (4)Fundamental vibration. (5)Frequency or vibration number.

如採用波長及振動時間，方程式(2.3.39)成：

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\left\{\left(\frac{t}{\tau_n}+\frac{x}{\lambda_n}\right)2\pi+\theta_n\right\}$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\left\{\left(\frac{t}{\tau_n}-\frac{x}{\lambda_n}\right)2\pi+\theta_n\right\}\cdots\cdots(2.3.44)$$

大括弧內之整個角度謂之該波之"相[1]"(卷I第1.1.9節)，而常數 θ_n 謂之"相常數".

v之表式尚可大爲簡化，僅須在(2.3.37)或(2.3.44)中將相當於每一序數 n 之諸項緊縮爲一單項.則自(2.3.37)可得：

$$v=-2\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\frac{n\pi at}{l}-B_n\cos\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\cdots\cdots(2.3.45)$$

振動方程式之此種形式最宜於由絃之初態以定係數 A_n 及 B_n 之值.蓋在 $t=0$ 時，自(2.3.14)及(2.3.45)有：

$$\left.\begin{aligned}&v_0=F(x)=2\sum_{n=1}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}\\&\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0=\Phi(x)=-\frac{2\pi a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}nA_n\sin\frac{n\pi x}{l}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2.3.46)$$

決定 A_n 與 B_n 之問題卽等於將已知之二函數 $F(x)$ 及 $\Phi(x)$ 以 Fourier 正弦級數展開之.然方程式(2.3.35)及(2.3.36)則示可能之展開方法僅一，蓋所欲展開之函數適在級數之半週期內自 $x=0$ 至 $x=l$ 爲已知也. 在(2.3.36)中，吾人祇須將 $f(x)$ 各代以 $F(x)$ 或 $\Phi(x)$，而將 B_n 各代以 $2B_n$ 或 $-\frac{2\pi a}{l}nA_n$.則自(2.3.35)可得：

$$\left.\begin{aligned}2B_n&=\frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot dx\\-\frac{2\pi a}{l}nA_n&=\frac{2}{l}\int_0^l\Phi(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot dx\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2.3.47)$$

此二方程式決定相當於一切 n 值之係數 A_n 及 B_n .

在另一方面，由(2.3.39)將每二相當分波併合之可得：

---

(1) Phase.

$$v=-2\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\left(\frac{n\pi at}{l}+o_n\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.48)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{2\pi a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}nC_n\cos\left(\frac{n\pi at}{l}+o_n\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\cdots(2.3.49)$$

依此形式，絃之振動方程式得視爲由多數分振動所組成，每一分振動以同序數而取反向運動之二分波之和代表之．此分波因謂之"駐波或定波(1)"以與"前進波(2)"別．如取一單獨之駐波而論，設序數爲n，則：

$$\left.\begin{aligned}v&=-2C_n\sin\left(\frac{n\pi at}{l}+o_n\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\\&=-2C_n\sin(2\pi\nu_n t+o_n)\sin\frac{2\pi x}{\lambda_n}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.50)$$

單獨論之，此代表絃之一可能振動；蓋讀者可知其滿足在 $x=0$ 及 $x=l$ 時 $v=0$ 之邊界條件也．其特徵在絃上一切點均同相．此因含時間之相角並不如前進波情形之與 x 有關也．因是故，絃上一切點其渡經平衡位置 $v=0$ 爲同時，達其伸長最大點亦爲同時．無論何時，絃之形狀爲一正弦曲綫，且任何一點之運動均爲一正弦振動，其振幅各點依次爲週期之變遷．在：

$$x=0,\frac{l}{n},\frac{2l}{n},\frac{3l}{n},\cdots\frac{n-1}{n}l,l\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.50a)$$

諸點，振幅爲零．此諸點因謂之"振動之節(3)"．諸節分絃之全長爲n等分，每分之長度爲$\frac{l}{n}$，由(2.3.40)，此等於其相當前進波波長 λ_n 之半．在基本振動($n=1$)之情形，絃之二端爲僅有之節點，在二次分振動($n=2$)之情形，則尚有一節點在絃之中點，其他可依此類推．振動在每二節點間實現，在每一節點之鄰接兩邊振動之方向適相反．振幅之最大值在每二節點間之中點，謂之振動之"腹(4)"．基本振動僅有一振腹，同樣，在其他

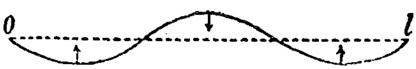

圖 2.3.4

(1)Stationary or standing wave. (2)Progressive wave. (3)Node of vibration. (4)Ventral segment or loop.

分振動之情形，振腹之數卽等於該振動之序數 n. 圖 2.3.4 示 $n=3$ 時絃之形象，箭頭指振動之方向.

2.3.9. 在(2.3.48)式中，吾人曾將絃之振動以多數單週期振動代表之. 此式非僅在數學形式之至饒興趣，且在物理學及生理學，亦有其興趣在，蓋在聲學中有其重要性也. 蓋當絃之振動由空氣傳達經耳以至耳鼓時，聽官卽對此總和之每一單項(2.3.50)發生反應，故相當於每一單週期波，卽發生一特殊之聽覺，卽"分音"也. 振動數 ν_n 定音之"調[1]"，振幅常數 C_n 定音之強度，而相常數 θ_n 則並無任何之聲學意義可言. 依據 Helmholtz 之基本研究，聲學上所謂之音品或音色[2]者，並無特殊之物理本性與之相當. 振絃之音品常得追溯至振動中各分音振幅 C_n 之比數，此比數主要自與絃之振動狀況有關. 分音之數愈多而愈強者，一般音愈尖而銳，而基音($n=1$)或任何分音單獨存在時其聲空平.

由此諸特殊聲學效果之存在，故分振動以及波之 Fourier 級數中之各項，在物理觀點各有其獨立意義. 無論以絃之振動言，或以由此振動所生之空氣波言，吾人均不得不賦之以獨立之存在，完全與聽官無關也. 然所不得不取記者，卽若此之槪念雖屬可許而至方便，然亦非屬必要. 蓋祇如吾人之注意點僅在絃之振動或空氣波，則質點位移 v 與獨立變數 x 及 t 之相依，因之在此物理過程中之一切特徵，均得完全以一單獨函數代表之，欲將此函數更分成諸單獨成分而無任意處將爲不可能之事. 故分音者並非在絃之振動或空氣波中有內涵之實在性者，在聽官中始能各別分離也.

然聽神經不僅對振數之絕對值起敏感，且對同時所收受之二音波振數之比有特殊之反應，當此數爲簡單而有理時——卽當比數爲二小整數之商時——聽神經可辯別二音波之聯合作用爲諧和者，或爲悅耳者，音之絕對音調，此處並無所涉. 故於聲學中，諸音間之距離卽所謂

(1)Pitch. (2)Timbre or quality.

"音程[1]"者,並非以振數之差量度之,而以振數之比量度之,換言之,以振數對數之差量度之.此比數愈簡者,則諧和程度愈完整.然由(2.3.42)可知振絃諸分音振數 ν_n 之比爲序數 1:2:3:4:…,較低序數之諸音與基音諧和,且互相諧和;故謂之"諧泛音[2]".

除同音[3](1:1)外,最簡之音程爲 2:1 之比,卽"八度[4]"也.是處二音之聯合作用,其諧和程度已使二音聽之如一,卽熟練之耳尚差能辯別或竟全不辯別之.八度後有 3:2 之比,或稱"五度[5],"然後有 4:3,或稱"四度[6]".合一四度與一五度得一八度,蓋:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=2.$$

普遍言之,凡音程而變另一音程爲一八度者,謂之該音程之"轉變[7]".故四度爲五度之轉變.更進則有 5:4 之比,或稱"大三度[8]",轉及其轉變 8:5,卽"小六度[9]";然後有 6:5 之比,或稱"小三度[10]",及其變 5:3,卽"大六度[11]".吾人如限於討論八度內——卽 <2——之音程,則通常所謂諧和音程[12]已盡如上舉.較大音程往往以 2 之整器除之,以使之小於 2.

欲標示各音,吾人習常分全程爲若干八度,而自一任意之正常音出發,此正常音之選定,須共許者.依據 Paris 調音規程[13],當自 $\nu_0=261$ 之音出發,卽附有撇號之 c',凡男女發音及最重要之樂器均易達之,自此推八度而上可至五撇之 c''''': $\nu=261\cdot 2^4$,自此以下可至小 c 大 C 下[14] C_1 而至次下[15] C_{II}: $\nu=261\cdot 2^{-4}$.凡頻率出此限度外之聲波卽不能產生音之感覺,至多祇能於耳發生一種機械作用,過高時起刺耳作用[16],過低時起蕩耳作用[17].自一撇 c' 至二撇 c'' 之音程謂之一撇八度,同樣,其他八度均以所含較低級 c 之名稱之:凡差一八度之一

(1)Interval. (2)Harmonic overtone. (3)Unison. (4)Octave. (5)Fifth. (6)Fourth. (7)Inversion. (8)Major third. (9)Minor sixth. (10)Minor third. (11)Major sixth. (12)Consonant interval. (13)Tuning convention. (14)Contra. (15)Subcontra. (16)Piercing effect. (17)Fluttering effect.

切音均同名，八度之位置可依照上述各種 c 之方法識得之.

故基音為 C（大提琴[1]之最低音）之絃其泛音如下：

$$n=1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\cdots$$

$$\text{分音}=C\ c\ g\ c'\ e'\ g'\quad c''\ d''\ e''$$

$n=7,11,13,14,\cdots$ 等泛音，在近代音樂中不用，故無專名. 然經驗昭示吾人，所謂自然七度[2] 7:4 有時較最近之音程減七度[3] 9:5 為佳，惜無機會將此二者為一適當之比較耳. 所謂五七和音[4]（此包括基音、大三度、完全五度及小七度）所以在音樂上佔重要之地位者無疑因此和音之諸音程近於 4:5:6:7 之比數也.

2.3.10. 諧和音程實奠定一切音樂之基礎. 忽視此自然定律，則所作樂曲之性質必有所損. 吾人如自正常音 ν_0 出發而經若干諧和音程，則合所得之諸音言之，組成一**自然音系**[5]. 凡屬特定音系諸音之頻率得以一單獨之簡單數學式代表之. 如僅限於八度音程，則振動數當為：

$$\nu=\nu_0\cdot 2^n \qquad (2.3.51)$$

是處 n 為任何正或負之整數. 此諸音與正常音之區別僅在於八度，故此音系未足為實際音樂之用. 然如更加入五度音，則可得諸音之頻率為：

$$\nu=\nu_0\cdot 2^n\cdot 3^p \qquad (2.3.52)$$

是處 p 亦代表一正或負之整數. 合一切凡頻率可由(2.3.52)式代表之諸音即成 Pythagoras 音系. 此實際包括一切可以發出之音，故亦包括一切音程. 蓋任何之數如不能以(2.3.52)準確表示之，亦得藉(2.3.52)得某程度之近似. 例如大三度5:4可藉四個五度音程之上移及二個八度音程之下移而近似得之，在某程度內，此近似法亦殊有用，如是所得者即音程 $\left(\frac{3}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{81}{64}$，所謂 Pythagoras 三度是也，比自然三度略大. 此二個三度之差謂之一"共振音撤[6]". 增加五度及八度之數，吾人自可得一較近之近似，然以絕對意義言，無論所取之數多至若何，吾

(1)Violoncello. (2)Natural seventh. (3)Diminished seventh. (4)Dominant seventh chord. (5)Natural system of tones. (6)Syntonic comma.

人永不能由五度或八度之級以得一自然三度，故 Pythagoras 音系實未能愜意．合乎理論需要者以下列音系為較善：

$$\nu=\nu_0\cdot 2^n\cdot 3^p\cdot 5^q \quad\cdots\cdots\cdots(2.3.53)$$

此則已加入三度之級，實際已久為音樂之基礎．

然卽此音系，與一切自然音系同，亦有其嚴重之缺點在，蓋嚴格言之，此音系所含者實有無窮數之音，而實際音樂所奏者則僅為有限數之音，此以具固定音之樂器為尤然，如風琴、鋼琴是．然如將音系任意於 n, p, q 諸數之特定限值割斷——此謂在音程之某定數後割斷——則在限值上之諸音又處於不利地位，蓋吾人已不能自此再進，而無限之轉調(1)本領則又為較近代音樂之一主要必須條件．時過境遷，此弱點實有修正之必要，乃決定一革新之方法，犧牲自然音系而將諧和音程微變之或"調整"(2)之，在所有人為音系(3)中，有所謂等程系(4)者，共十二級，最為有用，自 J. S. Bach 採用後其地位已根深蒂固．在此音系中，一切八度俱為絕對純淨者，蓋此為最重要之諧和音程也．然五度則為調整者，調整時利用十二個連接之五度——卽$\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$——約等於七個八度——卽$2^7$——之事實．其差為$\left(\frac{3}{2}\right)^{12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7\doteq\frac{74}{73}$，乃一" Pythagoras 音撇"．今如將十二個五度均勻化之，使十二個五度正等於七個八度，則一等程五度之音程 x，其條件方程式為：

$$x^{12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7=1 \quad\cdots\cdots\cdots(2.3.54)$$

或：

$$x=2^{\frac{7}{12}}=1.498.$$

純淨五度與等程五度之差乃僅為：

$$1.5:1.498\doteq\frac{886}{885},$$

(1)Modulation. (2)Tempering. (3)Artificial tone system. (4)Equally-tempered system.

即最熟練之耳亦不能直接辨別者也.

茲如將由十二級等程五度所得之十二音下移若干八度而列成一個八度——設爲自 c 至 c' 之小 c 八度——則此八度可依照下列計劃分爲十二等程:

$$2^0 \quad 2^{\frac{1}{12}} \quad 2^{\frac{2}{12}} \quad 2^{\frac{3}{12}} \quad 2^{\frac{4}{12}} \quad 2^{\frac{5}{12}} \quad 2^{\frac{6}{12}} \quad 2^{\frac{7}{12}} \quad 2^{\frac{8}{12}} \quad 2^{\frac{9}{12}} \quad 2^{\frac{10}{12}} \quad 2^{\frac{11}{12}} \quad 2^{\frac{12}{12}}$$

$$c \quad c\sharp=db \quad d \quad d\sharp=eb \quad e \quad f \quad f\sharp=gb \quad g \quad g\sharp=ab \quad a \quad a\sharp=bb \quad b$$

如此所定之諸音組成一等程系,每一八度俱照此方法來復.

每二相鄰二音間之音程乃一等程半音(1):

$$2^{\frac{1}{12}}=1.0595.$$

等程大三度含四個半音,較自然三度爲大,其音程差爲:

$$\sqrt[3]{2}\cdot\frac{4}{5}\doteq\frac{126}{125}.$$

然較 Pythagoras 三度爲小,蓋上列之差數較其振音撳$\frac{81}{80}$爲小也.

在諧和音程之理論中有反對在音程上過意與自然離叛者. 有時對等程調諧肆加攻擊而欲復返至自然調諧. 然吾人當記取在實際音樂中究以何種調諧方法始屬適當之問題未可取斷於科學之理論. 在藝術領域中所藉以決定者並非空洞之理論而僅爲實際之審美效果. 故凡音系而可得最有效之藝術表現者當被重視. 自然調諧法或當重有實際需要之一日,祇須有偉大之作曲家出,其所作之高曲已非任何其他調諧系所得表現者.

2.3.11 吾人之討論已離題甚遠, 現可由藝術之領域重返至普通聲學之討論. 首須提出者乃耳之奇特現象. 當聲波之入耳, 其辨別各分音正如一數學家之所爲,有一函數當前,僅知其爲具週期者, 其他可任意複雜, 彼乃依照方程式(2.3.29)而積分之以計算相當 Fourier 級數之各成分 A_n 及 B_n. 蓋聽神經所受之刺激與耳鼓之所受於聲波者全同

(1) Tempered semi-tone.

其狀況.故可以一單獨之時間函數 $f(t)$ 盡括之，此函數示任何時耳鼓自其平衡位置之位移.在耳內之聲(和音)分解而爲分音，相當於$f(t)$之以 Fourier 級數代表之.聽官之此種本領實屬跡近神奇，一樂隊領班憑其熟練之耳在聯合歌隊或管絃樂隊中所奏之音，不僅能辨別各樂器所發之音調，並能明析唱辭之每一字音，由此觀點，耳之能力實遠較目力爲超絕矣.以色而論則白也綠也藍也目所識者常爲均勻之色，迄不能直接定奪是否或如何此色在物理上由他色所組成.

由此，下列之基本問題卽當發生：耳如何得具此能力？一樂音之分解爲若干分音，其物理過程又若何！此問題 Helmholtz 已答之，彼首先假定收受頻率爲ν之某分音之主觀過程(1)常與一特定之客觀過程(2)相連繫，反之亦然，此客觀過程乃內耳中某基本物質組態之擺狀振動，其頻率同爲 ν.相當於耳所聞之一切不同分音，在內耳中卽有適相等數之此種基本擺各相排列如鍵簇之諸絃.如耳鼓因入射空氣波 $f(t)$ 之作用而振動，則分音ν之聞及與否，須視由頻率 ν 標識之基本擺因耳鼓顫動而起之振動爲可覺量或否而定.分音 ν 是否含於聲波$f(t)$內之問題，乃實相當於強度爲 $f(t)$ 之一力是否可使週期爲 $\tau=\frac{1}{\nu}$之擺起可覺量之振動之問題.然此問題之解答可於普通力學中準確得之，玆列如下.

由卷 I 第 1.1.10 節可知具特定振動週期 $\tau=\frac{1}{\nu}$之擺可以一依穩定平衡位置 $x=0$ 爲微小振動之質點代表之.如產生此振動者爲一單獨之碰撞，其他並無外來擾動，則振動可由下列之運動方程式代表之：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-4\pi^2m\nu^2x\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.55)$$

此方程式乃由(I·1.1.15)所得，吾人祇須將常數 c 依照下列關係以頻率 ν 代之：

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}=\tau=\frac{1}{\nu}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.56)$$

在此情形，擺所作者乃"自由"振動，週期 τ 因謂之擺之"原週期或

(1)Subjective process. (2)Objective process.

自然週期[1]".

然如此外尚有一外力 $f(t)$ 作用於擺上,則擺所作者,乃"強迫"振動[2],其運動方程式如下:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-4\pi^2 m\nu^2 x+f(t)\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.57)$$

茲先計算強迫振動之一特殊情形.設外力 $f(t)$ 為單週期者,即:

$$f(t)=C\cos(2\pi\nu't+\theta)\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.58)$$

更假定在初態 $t=0$ 時,擺靜止於其平衡位置——即 $x=0$ 及 $\frac{dx}{dt}=0$.

微分方程式:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+4\pi^2 m\nu^2 x=C\cos(2\pi\nu't+\theta)\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.59)$$

之通解,其形式為:

$$x=\alpha\cos(2\pi\nu t+\theta'_0)+\beta\cos(2\pi\nu't+\theta)\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.60)$$

蓋吾人如將此式之 x 值代入(2.3.59)中,則該方程式之左邊可盡化為含 β 之項而得:

$$\beta=\frac{C}{4\pi^2 m(\nu^2-\nu'^2)}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.61)$$

α 及 θ_0 則仍未定,故代表二積分常數.如配合此值於初態而並 β 之值代入(2.3.60)中,則即得所求之擺之振動:

$$x=\frac{C}{4\pi^2 m(\nu^2-\nu'^2)}\times\left\{-\cos\theta\cos 2\pi\nu t+\frac{\nu'}{\nu}\sin\theta\sin 2\pi\nu t\right.$$
$$\left.+\cos(2\pi\nu't+\theta)\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3.62)$$

故擺將自其平衡位置被擾動,其所作之運動一般為具二不同週期之振動,頻率為 ν 與 ν',與原振動(自然振動)及外激振動[3]相當.

惟有一例外,即外激振動之週期與自然振動之週期相合之情形——即當 $\nu'=\nu$ 時.在此情形,(2.3.62)成 $\frac{0}{0}$ 之形式,其真實之值可命 $\nu'=\nu+\Delta\nu$ 而將分子分母以 $\Delta\nu$ 累展開之然後求其極限 $\Delta\nu=0$ 以得

(1)Proper or natural period. (2)Forced vibration. (3)External exciting vibration.

之:

$$x=\frac{C}{8\pi^2 m\nu^2}\cdot\{2\pi\nu t\sin(2\pi\nu t+o)-\sin 2\pi\nu t\sin o\}\cdots\cdots(2.3.63)$$

讀者當易知(2.3.63)式實兼適合初態條件及微分方程式(2.3.59)於 $\nu'=\nu$ 之情形.

因正弦諸項前有 t 為因子,故擺之運動與(2.3.62)式所代表者全異,不僅所示定律不同,且數量級亦異也.其所代表者實非週期振動,可因時間而無限遞增.由此可知凡外來之週期力不論振幅 C 為若何之微小,祇須其週期與擺之自然週期合,則其在時間過程中所生之效果欲較任何具其他週期之外加大力為大.在所見之情形,吾人謂激動力與擺共振[1].在自然間有不少奇特現象均得以共振釋之,自不僅限於聲學之領域已也.一微弱之空氣波可使大音叉之叉股振動,一幼童可使重數百倍之教堂大鐘宏鳴,一堅實之橋樑可因行路人之整步而蕩動,凡此種種均共振所造之現象,吾人乃導入下述之假定,如聲學及熱力學中甚至在化學或生物學中,多數反應之強烈性,均得主要迴溯至共振現象者.

玆如更普遍假定激動擺者非單週期之振動而由若干單週期振動所組成——此謂可藉 Fourier 級數表之,同時卽代表最普遍情形——則擺之振動將否在時間過程中無限遞增當視 Fourier 級數含擺之自然週期項或否而定. 此項之係數之值對 Fourier 級數中其他諸項之關係則不涉本題.故由其對於外激振動所起之反應狀況,此擺可示 Fourier 級數中相當項是否存在,吾人可藉共振現象以分析此級數,故此擺亦謂之共振器.共振器僅對於其自然週期相當之振動為可察之反應,故其作用為具選擇性者.由共振作用 Fourier 級數之每一項乃得一物理意義,初僅於各項之總和始明其物理定義也.

今將激動力 $f(t)$ 及共振器中受激後所起振動之能二者間之關係更詳論之.試專論在某時間內之過程,假定激動力 $f(t)$ 為微弱者,其微弱之程度,使在此時間內擺之振動幾為自由者——此謂為週期之振動

(1)Resonance.

也.則在 dt 時間內振動能 E(動能與勢能之和)之變遷由 (I·2.3.11) 爲:

$$dE=F_x\cdot dx=f(t)\cdot dx$$

或:

$$dE=f(t)\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt.$$

故在 t 至 t' 時間內能之變遷爲:

$$E'-E=\int_t^{t'}f(t)\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3\cdot 64).$$

$\frac{dx}{dt}$ 或與 $\sin 2\pi\nu t$ 成比例或與 $\cos 2\pi\nu t$ 成比例,視所論時間內擺之位移 x 或由 $\cos 2\pi\nu t$ 或由 $\sin 2\pi\nu t$ 代表而定.積分(2.3.64)所取之形式與(2.3.29)全同, 可用以計算函數 $f(t)$ 之 Fourier 級數之係數, 二者之所異僅在積分變數,前者爲 x 而此者爲 t. 吾人可設想有一長串之此種共振擺當前,其適當之振動週期及相角,均受同一激動力 $f(t)$之作用,則每擺由其振動能示在 $f(t)$ 之 Fourier 展開中其相當係數之大小.依據 Helmholtz, 此過程在實質上與耳之所爲全等, 相應於特定頻率之每一聽絃因共振作用而負起耳鼓振動之責任, 然後傳達於感覺神經.

由此可知聽覺之分解聲波與此波之分解爲若干單週期波之變換相同,此於本節開端已詳釋之矣,且可知自然並用此同一方法於數學之過程中, 蓋最後一方程式(2.3.64)不啻爲(2.3.29)諸係數數學定義之機械示例也. 明乎此則耳之所以能辨析樂音之分音者在物理上乃完全解答.

另一基本重要問題乃關於諧和音程之和音之特殊效應者. 於此 Helmholtz 亦曾有理論發表.依據 Helmholtz 之學說, 諧和之概念,並非由神祕淵源而得之聽神經對簡單有理比數之某種不自覺快感, 所藉以決定者,亦爲一種完全特定之實態,可加以物理定義者, 在諧和之情形引起快感,在不諧和之情形引起不快感,關於此點當俟諸下章討論空氣中聲波時再行提出爲佳.

第四章 液體及氣體中之振動

2.4.1. 在具完全彈性之各向同性體中(第 2.1.1 節),液體與氣體自成一類,蓋在液體氣體中三主壓力(第 1.2.7 節)各相等,因之每一面素各有一法綫壓力 $X_x=Y_y=Z_z=p$ 作用於其上,此與面素所取之方位無關,當物體受壓縮時壓力爲正.因切綫壓力不存在,故方程式(2.1.32)中之彈性常數 μ 亦消失,壓力僅與體積相依,換言之,僅與密度 k 相依:

$$p=f(k)\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4.1)$$

函數 f 之形狀由物體之性質而定.在可碎爲散滴之液體中,p 依 k 之變遷爲尤烈,故不如將 k 視作 p 之函數爲佳.其極限之情形爲不可壓縮液體,在此情形 k 爲常數.f 之形狀當於下文討論有限形變時詳論之.

爲普遍計,下列之研究將兼括可碎爲散滴之液體及氣體而言,前於第 2.3.1 節中所設之方程式(2.1.32)自必加以推廣,可假定在未形變狀態,p 不爲零而爲 p_0,蓋在穩定平衡之氣體常有一有限壓力存在也.(2.1.32)之六方程式乃化爲一單獨之方程式:

$$p=p_0-\lambda\sigma\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4.2)$$

彈性係數 λ 與壓縮係數相依,此因:

$$\frac{-\sigma}{p-p_0}=\frac{1}{\lambda}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4.3)$$

如(2.4.1)之函數 f 已知,則該物體在任何狀態之彈性係數卽可計算而得.蓋體積爲 dV 之體素,其質量乃不變者,故凡一無限小之體積膨脹 σ 有下列之關係:

$$dV\cdot k=dV(1+\sigma)\cdot(k+dk)\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4.3a)$$

卽:

$$\sigma=-\frac{dk}{k}.$$

由(2.4.3)可得：

$$\lambda=k\frac{dp}{dk}\cdots\cdots(2.4.4)$$

液態與氣態得視爲固態之特例，故吾人將直接借用固體之運動方程式，重力則仍略去不論．自(2.3.1)及(2.4.2)可得：

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\lambda\frac{\partial\sigma}{\partial x},\quad k\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\lambda\frac{\partial\sigma}{\partial y},\quad k\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\lambda\frac{\partial\sigma}{\partial z}.$$

或以矢量表之，如書：

$$\frac{\lambda}{k}=\frac{dp}{dk}=a^2\cdots\cdots(2.4.5)$$

則得：

$$\ddot{q}=a^2\cdot\operatorname{grad}\sigma\cdots\cdots(2.4.6)$$

如應用矢量運算 curl (第 1.1.12 節)於此方程式，則由(1.1.65)：

$$\ddot{o}=0$$

將此方程式依 t 積分二次，則：

$$o=c_1t+c_2.$$

此示一質點轉動之成分 ξ,η,ζ 乃時間之一次函數．故如矢量 c_1 不爲零，則轉動將依時間無限遞增．是處吾人所欲討論者，乃依平衡位置之無限小振動，對於永時轉動並不發生若何興趣，故當限於討論常數 c_1 及 c_2 俱消失之情形，因之：

$$o=\operatorname{curl}q=0\cdots\cdots(2.4.7)$$

此微分方程式之通解爲：

$$q=-\operatorname{grad}\phi\cdots\cdots(2.4.8)$$

是處 ϕ 指位置與時間之任何標量函數．此函數對位移矢量 q 之關係與勢 U 對力矢量 F 之關係(I·1.3.40)同，故 ϕ 亦謂之"位移勢[1]"．故凡有位移勢之存在，實不啻謂在該位移中並無轉動．由(2.4.8)可知在位移勢 ϕ 一量中，凡可加之時間函數將毫無意義可言，此僅可任意規定之．

(1) Displacement potential.

如已知位移勢 φ 為 x, y, z, t 之一函數，則該運動之全貌已盡示無餘．蓋由(2.4.8)可得速度為：

$$\dot{q} = -\operatorname{grad}\varphi \quad \cdots\cdots (2.4.9)$$

故速度亦為具勢者，謂之“速度勢[1]”．更由(1.1.66)可得體積膨脹為：

$$\sigma = \operatorname{div} q = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\Delta\varphi \quad \cdots\cdots (2.4.10)$$

由(2.4.2)可得壓力之變動為：

$$p - p_0 = -\lambda\sigma = \lambda\cdot\Delta\varphi \quad \cdots\cdots (2.4.11)$$

故整個問題化為尋求位移勢 φ 之一問題．欲達此目的，可利用由運動方程式(2.4.6)而來之下列微分方程式：

$$\operatorname{grad}\ddot{\varphi} = a^2\cdot\operatorname{grad}\Delta\varphi.$$

此如依三坐標方向積分之可得：

$$\ddot{\varphi} = a^2\cdot\Delta\varphi \quad \cdots\cdots (2.4.12)$$

所有之積分常數均僅與時間有關，是後當略去不論，蓋無物理意義可言也．

讀者如試取方程式(2.4.12)之紀數，則當易知該方程式不僅適合位移勢 φ，亦且適合位移與速度之每一成分，並適合體積膨脹 σ 與壓力 p，實為緊張之絃振動方程式(2.3.9)之推廣，故亦謂之空間“波方程式”．是處之 a 當仍為傳播速度．然是際所論之波則基本與所遇於絃之横振動者迴異，蓋此處之彈性諸效應並非由轉動所生而由密度與壓力之變遷所生也．

吾人在討論靜力學諸問題時曾剴切言之，自物理觀點言，吾人所最感興趣者，每非標識微分方程式之通解，而為適合自然間某種重要過程之諸特解．今討論若干此等之例．

2.4.2.　微分方程式(2.4.12)最簡單之特解可見於函數 φ 僅依一單獨空間變數 x 之情形．則方程式(2.4.12)化為(2.3.9)之簡單形式，故代表二波，各依正負 x 軸以 a 之速度進行．因垂直於 x 軸一平面上

(1) Velocity potential.

之一切質點，其物理態均同，故此等波謂之**平面波**(1)，而每一x=常數之平面謂之"波平面"，垂直於波平面之x方向謂之"波面法綫(2)"．波之形狀由初態及邊界條件定之．因位移勢Φ除時間外僅與x相關，故在三位移成分中僅u不爲零．然則振動卽在傳播之方向發生，而波爲縱波，此與前一章所論絃之橫振動有別．

平面波可近似實現之，例如閉液體或氣體(設爲空氣)於一長柱形管中，則正交截面乃波平面，空氣之振動僅沿縱向發生，可取爲x軸，其所依據之定律與前於絃之振動所發見者同．欲再加詳述乃爲多餘之事矣．祇所用之邊界條件則需專論者．管之端可開可閉，後一情形在閉端$u=0$，蓋空氣既不能穿經管壁，亦不能離管壁以去也．故此邊界條件與一端固着之絃之端邊情形完全相當．然在前一情形，則依據作用與反作用原理(Newton 第三律)，於開端之截面，管內振動之空氣對於管外大氣之壓力p卽等於大氣所加於管內空氣之壓力——此謂，壓力不變，等於p_0；換言之，$\sigma=0$，密度不因時間以變．由此可唯一決定開管及閉管(覆蓋管(3))中空氣振動之定律．第一，如該管爲兩端均閉者，則與第2.3.8節中同，吾人有具(2.3.48)形式之駐立振動，可將v以u替代之．振動之發生或由外加激盪或由一小孔吹之．在管之每端位移u及速度$\dot{u}$各有一節，其他第n分振動(諧振動)諸節之位置由(2.3.50a)代表之．每相鄰二節之中途有一腹．至以體積膨脹言，則由(2.3.48)可得：

$$\sigma=\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty}n\,C_n\sin\left(\frac{n\pi at}{l}+\vartheta_n\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\cdots\cdots(2.4.13)$$

由此可知體積膨脹及壓力變動在管之兩端各有一腹，而體積膨脹之諸節：$\sigma=0$——卽空氣密度及壓力永恆不變之點——適在位移與速度之腹，卽諸節之中距點也．

茲如設想將此振動管於一膨脹節點$\sigma=0$隔離而通管之兩端以與大氣自由接觸，則在管之兩部分其振動歷程並無所擾，蓋前設之邊界條

(1)Plane wave. (2)Wave normal. (3)Roofed pipe.

件於管口仍成立也．此示吾人以兩端均開或僅開一端之管中之振動定律．在兩端均開之管中，體積膨脹於每端各有一節，位移於每端各具一腹．其分音之節序與兩端均閉之管或一端固着之絃所得者全同，所不同者節與腹此時已互易其位．故於基本振動之情形，在管之中央 σ 有一單獨之腹而 u 有一單獨之節．

然在兩端一開一閉之覆蓋管中，則統攝分音之定律主要有別．在此情形位移 u 在一端有節，在另一端有腹．故在如此之管中基本振動在其內部既無節亦無腹，實則，管之全長即等於基本振動中節至腹之距離——此謂即等於一較長管中二相鄰節間距離之半，當然此較長管須作同一之駐立振動者．故閉一端之管其基本振動與長二倍之管所有者相同，此長二倍之管或二端均開，或兩端均閉．至以閉管中之泛音言，則管之長度常爲遞次節與腹間距離之奇倍數，故分音之頻率爲奇整數 1:3:5:7:…之比．

2.4.3. 如聲波在自由大氣中所據之空間比較甚小，而參照點（卷I第 1.3.8 節）離聲源夠遠，則平面波可得一近似之實現．參照點去聲源之距離 x 即代表波法綫，取頻率爲 $\nu=\frac{1}{\tau}$ 而波長爲 λ 之單音而論，則正如(2.3.44)中之情形，方程式(2.4.12)可得下列之特解：

$$\phi=C\cos\left\{2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right)+\theta\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4.14)$$

是處 ν，τ 與 λ 間有(2.3.43)之關係．將若干此種特解互加之可得一比較普遍之解，相當於若干聲波自同一方向同時入耳之情形．所特感興趣者爲強度相同而頻率 ν 與 ν' 相差至微之二音之連合作用．則在一點之振動當如下，爲簡單計，此點將取爲坐標之原點 $x=0$；

$$\phi=C\cos(2\pi\nu t+\theta)+C\cos(2\pi\nu' t+\theta')$$

或：

$$\phi=2C\cos\left(2\pi\cdot\frac{\nu'-\nu}{2}t+\frac{\theta'-\theta}{2}\right)\cdot\cos\left(2\pi\cdot\frac{\nu'+\nu}{2}t+\frac{\theta'+\theta}{2}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4.15)$$

茲如假定 $\nu'-\nu$ 較 ν 為甚小，則在(2.4.15)中，其第一餘弦依時間之變遷至緩，在此餘弦之值有可覺變遷之前，單音之振動已發生多次．故(2.4.15)之振動聞之正如一單獨聲波之振動，其振幅可變為：

$$C_t=2C\cos\left(2\pi\cdot\frac{\nu'-\nu}{2}t+\frac{\theta'-\theta}{2}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4.16)$$

其頻率為 $\frac{\nu'+\nu}{2}$，二單音頻率之算術級數中項也．故吾人所聞者為一特定之音，其強度自零至最大值依週期式遲遲往復漲落．此強度漲落謂之該二合成單獨音之"拍[1]"，其最大值謂之拍之"脈搏[2]"．拍之頻率由 C_t 之二遞次零值所經之時間定之，故其數每單位時間為 $\nu'-\nu$．單音相距愈近，則拍愈緩而愈易辨別，單音相去漸遠，則諸拍聚積而互疊，乃漸至模糊．故欲藉耳以定簡單而幾等二音間之音程，拍實為一良法，不僅此也，由拍且可定近於諧和二樂音間之期程．蓋在幾於諧和二樂音(純音)之情形，拍亦得發生——所發生者實非基音間之拍而為樂音中各兩相當分音間之拍．例如，在一失調八度之情形，其較低純音之第一泛音與較高純音之基音成拍；在一失調五度之情形，則其較低純音之第二泛音與較高純音之第一泛音成拍．故在自然音系中樂器之合調必較等程音系中為易．

依據 Helmholtz 之意見，諧和與不諧和之對照其物理根據全在音拍．蓋常有之，在頻率之某範圍內，由斷續刺激所生者為激怒、疲乏與不快之感，凡一切感官均然．當吾人於閃耀之燈光中夜讀時或注視某種廣告燈時所生之後果，即其明例．同樣聽官對粥粥格格及戰慄之噪聲所起者，如各聲前後相繼之頻率達某值時，亦為不快之感．如頻率超過此值甚巨，則耳將不復能辨別各單獨刺激，不快感隨之消失；然如音拍甚緩，則對此音強度之昇沉，耳自能辨別之，當漸次近移之二音其音程合一，而音拍逐漸稀少，漸至在無窮之時間中音拍全失，耳之感覺始得舒暢如釋重負．

(1)Beat. (2)Pulse.

正如二音合一之情形，依據上述，此同一結果亦得應用於二諧音中泛音之符合，吾人聞不諧和音程時所得不快之感與聞諧和音程時所得之快感，俱可以擾亂拍之發生與否釋之．由此觀點，基於諧和之和聲學[1]乃失其神祕，其相當聽覺之特殊性質當追溯至物理學及生理學之過程．

2.4.4. 欲得波方程式 (2.4.12) 之另一比較簡單解答，可假定位移勢 ϕ 不僅與時間相依，且與參照點 (x, y, z) 去坐標原點之距離 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 相依．則由(I·1.3.29)有：

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\cdot\frac{x^2}{r^2}+\frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}-\frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot\frac{x^2}{r^3}$$

$\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$ 及 $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ 之式與之相當．$\Delta\phi$ 乃變換為：

$$\Delta\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi)\cdots\cdots\cdots(2.4.17)$$

而波方程式(2.4.12)可書作：

$$\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2}\cdots\cdots\cdots(2.4.18)$$

然則其所具之形式與(2.3.9)同，故由(2.3.11)具同一之通解：

$$r\phi=f(r+at)+g(r-at)\cdots\cdots\cdots(2.4.19)$$

此為二球面波，第一波自外向內，第二波自內向外，速度為 a．然此情形與平面波不同，所傳播而不變者非位移勢本身而為位移勢與 r 之乘積．

試先討論向外傳播之一球面波以為示例——此謂吾人使 $f=0$，則可得：

$$\phi=\frac{1}{r}\cdot g(r-at)\cdots\cdots\cdots(2.4.20)$$

欲使波函數 g 為有限者，則當 $r=0$ 時，ϕ 必無限大；故原點乃此

(1) Harmony.

波之一特異點.因之討論該波時,振動流體(空氣)在原點之値必屏諸不論,實者原點卽聲源之所在也.例如吾人可想像一球體,其周圍有流體完全環繞之;此球體係由某種彈性固質所組成,其體積可依據某種定律藉內部之某種機構交替增減之——所謂"脈動球"也.此球體將振動傳達於鄰接之流體,而此邊界條件卽所以定波函數 g 之形狀,蓋一面吾人可由(2.4.8)及(2.4.20)自位移勢得位移 q 在邊界之値也.位移係於沿徑之方向發生,故此球面波為縱波;位移之量依去聲源之距離增加而遞減.

波方程式(2.4.12)之特解(2.4.20)更得推廣之.互加若干如此之特解當亦為一特解——此謂吾人可用下列之式以為位移勢:

$$\phi=\frac{1}{r_1}g_1(r_1-at)+\frac{1}{r_2}g_2(r_2-at)+\cdots\cdots(2.4.21)$$

是處 $r_1,r_2\cdots$ 為參照點去諸固定中心之距離,而 $g_1,g_2\cdots$ 乃一單獨辯量之某函數.流體之此種運動可由依照任意定律脈動之若干球體之聯合作用產生之,祇須諸球體相距甚遠,故由其他球體所生之波對於某球體面邊界條件之擾動可略而不論.在特別情形吾人如僅取二球體而使 $g_1=g_2=g$,則得:

$$\phi=\frac{1}{r_1}g(r_1-at)+\frac{1}{r_2}g(r_2-at)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4.22)$$

此情形可藉另一至饒興趣之方法實現之.吾人如在心中想像二中心 $r_1=0$ 及 $r_2=0$ 之對稱平面——卽平分二中心之垂直平面,則位於此對稱面上之每一參照點,其位移 $q=q_1+q_2$ 必在此平面內,蓋二相等之沿徑位移 q_1 及 q_2,其合位移必平分原位移所成之角也(圖2.4.1).茲如使此對稱平面為一剛性之壁,則運動當無所擾,蓋適合於此剛壁之邊界條件——卽在其法綫方向之分位移為零之條件——在任何情形已到處適合矣.故引入剛壁而將聲源 2 之半壁

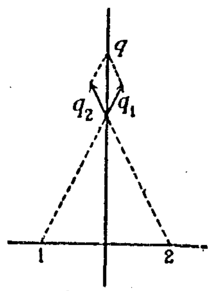

圖 2.4.1

空間完全除去,則所有運動將一無所變;換言之,置一剛性平壁於一聲源之對面,則剛壁所爲者實不啻一以剛壁爲鏡之該聲源之像.

次論一向內進行之球面波,如方程式(2.4.19)中函數 $f(r+ct)$所示者.實現之道,可設想有一巨大薄壁之中空球體,中實空氣,爲某種彈性物質所組成,藉外界機構以膨脹及收縮之,則有方程式(2.4.19)及初態條件與邊界條件,運動已詳示無餘. 所特感興趣之問題如下:當一已知之球面波向內進行而達於球心 $r=0$ 時,則情形又若何?欲答此問題,可試立一假設:最初於 $t=0$ 時,僅有一內向之波 $f(r)$ 存在,其形狀爲任意者.因球心爲流體之一部分, 故方程式(2.4.19)亦必適合於此點,且因自然間並無無限大之位移可遇,故於 $r=0$ 之情形位移勢亦必爲有限者,無論何時當有:

$$0=f(at)+g(-at),$$

或如書 $at-r$ 以代 at:

$$0=f(at-r)+g(r-at).$$

代入(2.4.19)式得:

$$r\phi=f(at+r)-f(at-r)\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4.23)$$

正如第 2.3.5 節中由方程式(2.3.22)所得者同, 吾人於是處所得者乃球面波在球心之一種反射,所謂反射者,乃指內向之波至球心後變換爲相等而相反之波外向進行. 吾人亦可謂球面波通過其自身於球之中心點.方程式(2.4.23)與上文僅有一波內向進行之規定,二者並無抵觸.蓋代表在 $t=0$ 時波形之函數 $f(r)$ 僅規定於 r 之正值,而在(2.4.23)中則辯量 $at-r$ 之負值亦兼攝在內. 欲於本情形中自(2.4.23)求運動歷程之一致, 則祇須假定於辯量之一切負值函數 f 均爲零. 蓋如此則於 $t=0$ 時實際可得:

$$r\phi=f(r).$$

同樣於一切 $t<\frac{r}{a}$之值, 外向進行之波均消失,換言之, 參照點 r 僅於反射波自球心出發以速度 a 進行時始得抵達也.

2.4.5. 球面波之理論並示吾人以普通波方程式(2.4.12)在四周均未有限制之流體之解答. 蓋如吾人將此方程式積分於流體之任何部分,設其體積素為 $d\tau$, 則加入變換(1.2.16)可得:

$$\int\ddot{\phi}\cdot d\tau=-a^2\int\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\cdot d\sigma\cdots\cdots\cdots(2.4.24)$$

茲選擇積分體積為半徑 r 之球體,取球心為原點而用極坐標 ρ,θ,ψ(I·1.3.11)為積分變數.則由(I·1.3.12)可得:

$$d\tau=\rho^2d\rho\cdot d\Omega\cdots\cdots\cdots(2.4.25)$$

是處吾人曾簡書:

$$\sin\theta\cdot d\theta\cdot d\psi=d\Omega\cdots\cdots\cdots(2.4.26)$$

$d\Omega$ 為微分 $d\theta$ 及 $d\psi$ 所定圓錐之"孔徑角(1)",由該圓錐自"單位球(2)"所切取面積之大小量度之,所謂單位球者即以原點為心而半徑 $\rho=1$ 之球面也.

且:

$$d\sigma=r^2\cdot d\Omega,\quad \nu=-\rho\cdots\cdots\cdots(2.4.27)$$

故:

$$\iint\ddot{\phi}\rho^2d\rho d\Omega=a^2r^2\int\left(\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right)_r d\Omega\cdots\cdots\cdots(2.4.28)$$

Ω 之積分,於方程式之兩邊其積分限為自 $\theta=0$ 至 $\theta=\pi$,及自 $\psi=0$ 至 $\psi=2\pi$,在左邊 ρ 之積分乃自 0 至 r. 右邊之指數 r 示取導數後應使 $\rho=r$.

吾人現將引用一在自原點之特定距離 ρ 內位移勢 ϕ 之平均值——此即半徑為 ρ 之球面上一切面素之 ϕ 值, 各乘以面素大小所得之和,再除以一切面素之和而得之商, 所謂一切面素之和者即全球面之面積也.

$$\frac{1}{4\pi\rho^2}\int\phi\rho^2d\Omega=\frac{1}{4\pi}\phi d\Omega=\overline{\phi}\cdots\cdots\cdots(2.4.29)$$

---

(1)Angle of aperture, 即體角 solid angle. (2)Unit sphere.

則上述方程式可書爲：

$$\int_0^r \frac{\partial^2 \overline{\phi}}{\partial t^2}\rho^2 d\rho = a^2 r^2\left(\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \rho}\right)$$

如依 r 以取導數，則：

$$r^2\frac{\partial^2 \overline{\phi}}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial r}\right) = a^2\left(2r\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 \overline{\phi}}{\partial r^2}\right)$$

式中吾人已在 $\overline{\phi}$ 中以 r 代 ρ. 然此方程式與波方程式：

$$\frac{\partial^2(r\overline{\phi})}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2(r\overline{\phi})}{\partial r^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.4.30)$$

恆等，由此乃得一定理：在流體內之任何振動過程中，凡對於以流體內任何一點爲原點而作之球面之位移勢之平均值，均得適用球面波諸定律. 在球面波之特別情形則 $\overline{\phi}=\phi$，(2.4.30)與(2.4.18)成恆等.

(2.4.30)式應用於不受壓縮之流體之極限情形，其所得之結果至饒興味. 在一不受壓縮之流體中，由(2.4.5)，其傳播速度 $a=\infty$. 則波方程式 (2.4.12) 可化爲 $\Delta\phi=0$——此爲 Laplace 方程式(I·1.3.48)而方程式(2.3.30)則成 $\frac{\partial^2(r\overline{\phi})}{\partial r^2}=0$，其通解爲：

$$r\overline{\phi} = A + Br$$

或：

$$\overline{\phi} = \frac{A}{r} + B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.4.31)$$

因 $\overline{\phi}$ 於 $r=0$ 爲有限者，故 $A=0$ 而：

$$\overline{\phi} = B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.4.32)$$

此爲滿足 Laplace 方程式之一函數 ϕ. 例如，凡重力質量之勢函數，其在質量外所具之性質，則在一族同心球面上之諸平均值均相等，故並等於在球心之值. 因之該函數不能有一絕對最大值或一絕對最小值於空間一點，且由卷 I 第 1.3.14 節可知在重力體系外永無絕對穩定或絕對不穩定之平衡位置可求.

2.4.6. (2.4.30)所示之定律乃可用之以定在任何時間於流體中

一點之位移勢.此點將取為坐標之原點,其初態已知,流體之質量設為相當大者.第一,(2.4.30)可得通解:

$$r\overline{\phi}=f(r+at)+g(r-at)$$

或,因$\overline{\phi}$於 $r=0$ 仍為有限者,故正如(2.4.23)中球面波之情形,有:

$$r\overline{\phi}=f(at+r)-f(at-r)\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4.33)$$

函數 f 之形狀由初態情形唯一決定之.欲標識此初態,吾人可假定位移勢 ϕ 及其對時間之微商——即 $\dot{\phi}$——均已知為位置之函數.蓋 ϕ 除一無關得失之可加常數外可依照(2.4.8)由位置 q 決定之,而$\dot{\phi}$可依照(2.4.9)由速度 $\dot{q}$ 決定之.故吾人書:

$$\phi_0=F(r,o,\psi)\text{及 }\dot{\psi}_0=\Phi(r,o,\psi)\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4.34)$$

F 與 Φ 俱假定已知.則:

$$\overline{\phi}_0=\overline{F}(r)\text{ 及 }\overline{\dot{\phi}}_0=\dot{\Phi}(r)\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4.35)$$

亦當視為 r 之已知函數.一面吾人如依 t 取(2.4.33)之導數,則:

$$r\overline{\dot{\phi}}=af'(at+r)-af'(at-r)\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4.36)$$

故於 $t=0$ 時,由(2.4.33),(2.4.36)及(2.4.35)可得:

$$r\overline{F}=f(r)-f(-r)\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4.37)$$

$$r\overline{\Phi}=af'(r)-af'(-r)\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4.38)$$

將最後一方程式積分之則:

$$\frac{1}{a}\int r\overline{\Phi}\,dr=f(r)-f(-r)$$

此與(2.4.37)合併乃得:

$$f(\pm r)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a}\int r\overline{\Phi}\,dr\pm r\overline{F}\right\}\cdots\cdots\cdots(2.4.39)$$

此決定函數 f 於其辯量之一切正值及負值,故由(2.4.33)$\overline{\phi}$可直接定為 r 及 t 之函數.積分中之附加常數乃可任意選定者,與$\overline{\phi}$之值無關.

自任意 r 及任意 t 之$\overline{\phi}$式,吾人亦可立得於 $r=0$ 時 $\phi_t(0)$之值.蓋由(2.4.33):

$$\phi_t(0)=\overline{\varphi}(0)=\lim_{r=0}\frac{f(at+r)-f(at-r)}{r}=2f'(at),$$

且因由(2.4.39):

$$\pm f'(\pm r)=\frac{1}{2}\left\{\frac{r}{a}\overline{\Phi}(r)\pm\frac{d(r\overline{F}(r))}{dr}\right\},$$

故於時間之一切正值,有:

$$\phi_t(0)=t\overline{\Phi}(at)+\frac{d(t\overline{F}(at))}{dt}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4.40)$$

此方程式示吾人以流體中在任何點任何時間之位移勢ϕ,以於$t=0$時(2.4.34)所示ϕ及$\dot{\phi}$在球面上之值表之,此球面以該點爲心,半徑爲at. 由此可知在任何點任何時間之物理態僅與在$t=0$時去該點之距離爲at之物理態相關. 例如,有振動而由平衡之擾動所致而此擾動初限於流體之有限區域,即所謂擾動焦域(1)者,則在擾動焦域外之一點,僅於以速度a波經自擾動焦域之最近點之距離所須之時間後始爲擾動波所擊;在另一方面,當以速度a波經自擾動焦域之最遠點之距離所須之時間過後,運動將完全消滅. 同樣得適用於擾動焦域內之點. 故初時之擾動以a之速度自焦域傳播至各方向,在焦域內則造成一連續開展之靜止域,此以自擾動焦域最遠點之距離爲最短之點始.

方程式(2.4.40)除適用於位移勢外,並立可適用於位移或速度之每一單獨成分,且適用於體積膨脹及壓力,實者凡滿足波方程式(2.4.12)之一切量均適用於方程式(2.4.40)也.

2.4.7. 最後可討論聲源或觀察者之運動所加於所聞音調之影響. 音調由每單位時間入耳之波數定之,而此數則與觀察者至聲源之距離是否變或不變有關,故此影響之存在至屬顯然. 然若謂在音調問題中僅須論聲源與觀察者之相對運動則又未免錯誤. 試取聲源靜止而觀察者以聲速a之速度自聲源背離之情形論之;則彼將一無所聞,蓋迄無聲波可達彼也,而另一方面若觀察者自身靜止而聲源以任何不論如何巨

(1) Focus of disturbance.

大之速度自觀察者背離，則聲波可入彼耳無疑．所以有此區別者，其理由並不在絕對速度之作用，因"絕對速度"實毫無意義可言，蓋在聲之傳播中，傳達之介質如空氣有其主要地位在，故當將相對於空氣之運動兼顧在內．凡關乎此際所論之種種定律皆可統攝於所謂 Doppler 原理中，原理二字，實未洽當，所論者顯非一特別之原理，僅運動學之基本定律耳．

茲假定有一聲源 Q，每單位時間發 ν_0 次振動，及一觀察者 B，二者俱運動於 x 軸上，前者之速度爲 q_0，後者之速度爲 q，俱相對於空氣而言，空氣設爲靜止者．聲源在 B 之正邊(B 之右)．故如 $q>q_0$，觀察者可追及聲源(圖 2.4.2)．吾人將問此觀察者所聞音之頻率 ν 當若何?

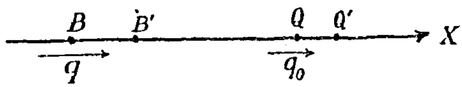

圖 2.4.2

試先論一特殊情形:聲源 Q 不動而觀察者 B 以速度 q 向之前進．則在單位時間中彼所行經之距離爲 $BB'=q$．如觀察者仍留 B 處則在此時間內將可收受 ν_0 波．然因彼係向波之方向進行，故除此 ν_0 波外彼將可收受在 BB' 距離內所有之波，即 $\frac{q}{\lambda_0}$ 波，由(2.3.43)，此等於 $\frac{q\nu_0}{a}$ 波．因之，所聞音之頻率爲:

$$\nu_0\left(1+\frac{q}{a}\right)=\frac{a+q}{\lambda_0}\quad\cdots\cdots(2.4.41)$$

現乃可更普遍假定聲源 Q 亦在運動中，以速度 q_0 向右進行．則在單位時間後聲源抵達一點 Q'，是處 $QQ'=q_0$．在聲源所發向 B 點進行之聲波中，在此時間內，其第一波已達距離 Q 點 a 處，同時最後一波則在 Q'，整個 $a+q_0$ 之距離有波勻佈其間．合而計之波數爲 ν_0，故波長爲 $\frac{a+q_0}{\nu_0}=\lambda$，如將此波長 λ 代入(2.4.41)中以易 λ_0，則可得所聞音之頻率爲:

$$\nu=\frac{a+q}{a+q_0}\cdot\nu_0\quad\cdots\cdots(2.4.42)$$

是乃所論情形下 Doppler 原理之普遍公式．故如觀察者共聲源以

同一速度運動，因之二者間距離持續不變，則 $\nu=\nu_0$，運動對音調毫無影響.然則觀察者至聲源之距離有變，結果當根本不同，須視是否觀察者靜止不動或聲源靜止不動而定．如當聲源靜止時觀察者以聲之速度自聲源背馳，則 $q=-a$ 而 $q_0=0$，故 $\nu=0$.然如觀察者靜止不動而聲源以聲之速度動離觀察者，則 $q_0=a$ 而 $q=0$，故 $\nu=\frac{\nu_0}{2}$，此與上文所述合.

僅當 q 及 q_0 較 a 爲甚小時，則爲初步近似計可書：

$$\nu=\left(1+\frac{q-q_0}{a}\right)\nu_0 \quad \cdots\cdots(2.4.43)$$

在此情形所作用者僅爲二速度之差，卽觀察者與聲源之相對運動也.

第三篇　有限形變

第一章　概論

3.1.1.　具無限小形變之運動討論既畢，乃可由此特殊情形推廣至具有限形變之運動．此當先與第 1.1.1 節所述關於一連續廣延之物體之任意有限運動相聯繫，此運動仍可藉方程式(1.1.1)及(1.1.1a)表示之，由此可計算質點(a,b,c)在t時間所據之位置(x,y,z).

反之，自(1.1.1)以解 a,b,c 可得：

$$\left.\begin{aligned} a&=f'(x,y,z,t)\\ b&=\phi'(x,y,z,t)\\ c&=\psi'(x,y,z,t)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.1)$$

關於在 t 時間位據(x,y,z)點之質點(a,b,c)爲何之問題乃得以解答．

方程式(1.1.1)與(3.1.1)所示之對偶，實代表全部流體動力學之兩種觀點，此流體動力學之所以具二重性也；一謂之"實質觀[1]"，一謂之"地方觀[2]"．在實質觀中，吾人係全神貫注於某一特定質點(a,b,c)或某一特定質系上而尋求其在空間之變遷；而在地方觀中，吾人之注意力係固定於空間中之某一特定點(x,y,z)或某一特定之空間部分而尋求歷經該點或移入該空間部分之諸質點．實質觀以選定 a,b,c,t 爲獨立變數標識之，地方觀以選定 x,y,z,t 爲獨立變數標識之．爲重視此區別計，吾人將於所用之符號中亦與以分別，下文凡對於獨立變量 a,b,c,t 而言之微分將以普通所用之 d 表示之；而凡對於獨立變量 x,y,z,t 言之微分則以 δ 表示之．例如，$\frac{dx}{dt}=u$ 乃質點(a,b,c)速度之 x 成分，而$\frac{\partial x}{\partial t}=0$．且$\frac{du}{dt}$乃加速度之 x 成分，而 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 則指於 t 及 $t+\delta t$ 時間位據(x,y,z)點之二質點之速度之差．故在一流體自容器之定立射流中(第3.2.2節)，吾人到處有$\frac{\partial u}{\partial t}=0$，然加速度$\frac{du}{dt}\neq 0$.

(1)Substantial.　(2)Local.

一般而論,此二量間有下列之關係:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot u+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot v+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot w \cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.2)$$

3.1.2 在吾人所將討論之運動中,自純粹運動學之見地觀之,則本卷於第一篇中所述之一切定律,是處仍當生效甚明.此中吾人將特採用關於任何無限小形變之諸定律,已列於第 1.1.11 節中.蓋如祇論自 t 至 $t+\tau$ 之無限小時距中之情形,則任何運動俱可化為一無限小變遷.然則第 1.1.11 節中之一切公式皆當適用於是處,所異者,質點在變遷前之坐標將不復命之為 a,b,c,而將命之為 x,y,z,且無限小位移之諸成分將不復為 u,v,w,而為 $u\tau,v\tau,w\tau$,是處 u,v,w 乃指速度之有限成分而言也.因之在(1.1.57)中之九無限小係數 λ,μ,ν 用以標識一質量微粒之轉動及形變者,將與時素 τ 成比例.

為欲得以有限量計算起見,玆將一切無限小量各除以 τ——此謂吾人將引用移動速度、轉動速度及形變速度之有限成分以代移動、轉動及形變之無限小成分.其標記仍與第 1.1.11 節中所用者同.故自玆以後:

$$u,v,w;\xi;\eta,\zeta,x_x,y_y,z_z,y_z,z_x,x_y,\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.3)$$

將指相當速度之有限成分.諸成分與坐標 x,y,z 所有之關係與前得(1.1.59),(1.1.60),(1.1.61)等等關係其形式相似.

如已知某質量微粒體積膨脹之速度:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\operatorname{div} q,$$

則其密度之變遷亦可知.蓋正如(2.4.3a)中之情形,初時體積為 dV 之質粒,其在無限小時距 dt 內之變遷為:

$$dV\cdot k=dV\left\{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dt\right\}\cdot\left(k+\frac{dk}{dt}dt\right),$$

故:

$$k\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{dk}{dt}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.4)$$

或因：

$$\frac{dk}{dt}=\frac{\partial k}{\partial x}u+\frac{\partial k}{\partial y}v+\frac{\partial k}{\partial z}w+\frac{\partial k}{\partial t}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.5)$$

故得：

$$\frac{\partial(ku)}{\partial x}+\frac{\partial(kv)}{\partial y}+\frac{\partial(kw)}{\partial z}+\frac{\partial k}{\partial t}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.6)$$

此恆等式常謂之"連續方程式". 吾人亦可不由物質之全部而僅由其局部爲論點以得之，當至饒興趣也．如專注意於受任何特定方式限制之任何有限空間，則在時間 t 其所含之總質量爲 $\int k\,d\tau$，而在 dt 時間內其變遷爲：

$$dt\int\frac{\partial k}{\partial t}\cdot d\tau.$$

然此變遷卽等於該物體於 dt 時間內經由包面移入此空間之諸質點之質量之代數和．在 dt 時間內經由面素 $d\sigma$ 而入此空間之質量如下：

$$d\sigma\cdot k\cdot\{u\cos(\nu x)+v\cos(\nu y)+w\cos(\nu z)\}\cdot dt\cdots\cdots\cdots(3.1.7)$$

ν 爲該面素之內向法綫．上式所示者乃一密度爲 k 之斜柱體之質量，底面爲 $d\sigma$，邊長爲 $q\cdot dt$．因之吾人有方程式：

$$\int\frac{\partial k}{\partial t}\cdot d\tau=\int d\sigma k\{u\cos(\nu x)+v\cos(\nu y)+w\cos(\nu z)\}.$$

或由(1.2.12)：

$$\int\left(\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial(ku)}{\partial x}+\frac{\partial(kv)}{\partial y}+\frac{\partial(kw)}{\partial z}\right)d\tau=0.$$

吾人如將此空間收縮爲一單獨之空間素 $d\tau$，則此方程式當仍成立，自此可得(3.1.6).

連續方程式亦可不指無限小時素 dt，而指一有限時間 t 而言．使體素在時間 t 之質量等於該體素在時間 0 之質量，則應用函數行列式之(1.1.51)式於體積變遷可得：

$$dV_0\cdot k_0=dV_0\cdot D\cdot k$$

下標 0 卽在 $t=0$ 時之意．因之：

$$D\cdot k=k_0,\ 或\quad \frac{d(Dk)}{dt}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1.8)$$

下文吾人將視情形需要而選用連續方程式之一式.

3.1.3. 次乃討論運動之動力學方程式之設立. 如欲於任何有限形變中仍用第 2.1.1 節所述"完全彈性"之假定，即壓力僅與即時形變相依,則在下文討論中自不得不限於氣體及液體；蓋在固體之情形,當形變連續遞增時,其彈性限遲早須超過也.故本卷第三篇實代表流體動力學(包括氣體動力學)之正常領域.

故與第 2.4.1 節中同,吾人仍命:

$$Y_z=Z_x=X_y=0\ 及\ X_x=Y_y=Z_z=p=f(k) \cdots\cdots (3.1.8a)$$

則由(1.2.17)可得**流體動力學之基本方程式**:

$$\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)k-\frac{\partial p}{\partial x}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1.9)$$

此諸方程式可以更簡單之形式出之,祇須吾人假定體力為具勢者,即:

$$X=-\frac{\partial V}{\partial x},\quad Y=-\frac{\partial V}{\partial y},\quad Z=-\frac{\partial V}{\partial z} \cdots\cdots (3.1.10)$$

此外更須引用壓力或密度之函數:

$$P=\int\frac{dp}{k} \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1.11)$$

此除一附加常數未定外為已定者.

則方程式(3.1.9)可書為:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial x}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1.12)$$

或以矢量形式出之:

$$q+\operatorname{grad}(V+P)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1.13)$$

然此諸方程式之內容實非如其形式之簡單. 其中坐標 x,y,z 一次(在加速度中)以因變數出現，而另一次(在勢及壓力陡度中)又以自變數出現,欲行之計算,則例須選取一一致之觀點——此謂或全用實質觀或全用地方觀也. 視吾人所採用之觀點為何而所得方程式之形式因之

而異，二者之結構均較(3.1.12)及(3.1.13)複雜多多.

如採取實質觀，則將(3.1.12)之三方程式各乘以 $\frac{dx}{da}$, $\frac{dy}{da}$, $\frac{dz}{da}$ 可得：

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{da}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{da}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{da}+\frac{dV}{da}+\frac{dP}{da}=0 \cdots\cdots (3.1.14)$$

同樣可得 b 及 c 之二方程式.

此即所謂 Lagrange 方程式也. 當以取實質觀形式之連續方程式(3.1.8)補充之.

在另一方面，如採用地方觀則由(3.1.12)而應用(3.1.2)可得：

$$\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial u}{\partial z}w+\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial x}=0 \cdots\cdots (3.1.15)$$

及 y 共 v 與 z 共 w 之二相當方程式.

此諸方程式具 Euler 之名. 取地方觀形式之連續方程式(3.1.6)屬之.

讀者當可知運動方程式經此整理後不僅形式冗長且失其一次式之性質，此固為一主要事件，流體動力學中所遇之數學問題所以有特殊困難者，緣此故也.

3.1.4. 我人先將應用流體動力學諸方程式以證能量不滅原理. 證明之程序與第 2.1.3 節無限小形變之情形所用者同，自能量方程式(2.1.2)出發，而將其中所有諸量即動能 L，勢能 U 及外功 A 以(2.1.3),(2.1.4),(2.1.5)諸式之值代入之. 所須注意者一質點在 dt 時間內之位移成分是處將不復以 du, dv, dw 而以 $u\cdot dt$, $v\cdot dt$, $w\cdot dt$ 代表之. 且在此情形，密度可有有限之變遷，故勢能以不參照於體積素而參照於質量素為便. 以此方式由(2.1.3)可得：

$$L=\frac{1}{2}\int(u^2+v^2+w^2)\,k\,d\tau \cdots\cdots (3.1.16)$$

而由(2.1.4)：

$$U=\int F\cdot k\,d\tau \cdots\cdots (3.1.17)$$

式中 F 指每單位質量之勢能，此僅與 k (或 p)相關.

由(2.1.5)可得:

$$A=dt\cdot\int(Xu+Yv+Zw)k\,d\tau$$
$$+dt\cdot\int(X_\nu u+Y_\nu v+Z_\nu w)d\sigma\cdots\cdots(3.1.18)$$

是處,由(1.2.8):

$$X_\nu=p\cos(\nu x),\quad Y_\nu=p\cos(\nu y),\quad Z_\nu=p\cos(\nu z)\cdots\cdots(3.1.19)$$

在求時間微分 dL 及 dU 時,當知 $kd\tau$ 一乘積,卽物體之一質量素,與時間無關,故由(3.1.16)可得:

$$dL=dt\cdot\int\left(u\frac{du}{dt}+v\frac{dv}{dt}+w\frac{dw}{dt}\right)kd\tau.$$

由(3.1.17)可得:

$$dU=dt\cdot\int\frac{dF}{dt}\cdot kd\tau.$$

更由(3.1.18)及(3.1.19)而用(1.2.12)之變換,可得:

$$A=dt\cdot\int(Xu+Yv+Zw)kd\tau$$
$$-dt\cdot\int\left(\frac{\partial(pu)}{\partial x}+\frac{\partial(pv)}{\partial y}+\frac{\partial(pw)}{\partial z}\right)d\tau\cdots\cdots(3.1.19a)$$

吾人如將此式代入(2.1.2)之能量方程式中,而應用(3.1.9)所示分加速度之值,則在該方程式之兩邊有若干項可互消,所餘者為下列之關係:

$$\int\frac{dF}{dt}k\,d\tau=-\int p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)d\tau.$$

此方程式亦適用於一單獨之體積素 $d\tau$,故加入(3.1.4)之關係可有:

$$dF=\frac{p}{k^2}dk\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.20)$$

由此觀之,能量原理當於且僅於吾人取下式為每單位質量之勢能時可適合:

$$F=\int\frac{p}{k^2}dk=-\int p\cdot d\left(\frac{1}{k}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.21)$$

是處 $\frac{1}{k}$ 指每單位質量之體積(比容(1)).如分部積分而用(3.1.11)之

(1)Specific volume.

函數P,此式亦可書為:

$$F=-\frac{p}{k}+\int\frac{dp}{k}=-\frac{p}{k}+P \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1.22)$$

如已知勢能為密度或比容之函數,則吾人可由此直接計算壓力 p 與密度之相依關係.蓋自(3.1.21)可知如吾人僅於本情形命 v 為比容,則:

$$\frac{\partial F}{\partial v}=-p \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1.23)$$

此關係與(2.1.10)所示彈性勢與彈性壓力成分間之關係酷似,然(2.1.10)且兼括切壓力在內,故更較普遍,(2.1.10)僅指無限小形變而言,故亦較特殊.

在一不可壓縮之流體中,則情形特殊,$k=$常數,故由(3.1.11):

$$P=\frac{p}{k} \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1.24)$$

而由(3.1.22):

$$F=0.$$

此示不可壓縮之流體並無勢能.此結果與一結論合:即流體之不可壓縮性正如綫之不可延伸性(卷 I 第 2.2.16 節)可視為加諸該物體質點坐標上之一條件(體積膨脹為零),初不問壓力之大小為何,而由此以起之約束永不作若何之功(I·2.2.2).

為入後應用計,吾人將示由(3.1.18),(3.1.19)及(3.1.19a)可得在一任意變遷中均勻作用於體面各點之外壓力,其所作之功如下:

$$A=dt\,p\int\left\{u\cos(\nu x)+v\cos(\nu y)+w\cos(\nu z)\right\}d\sigma$$

$$=-dt\,p\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)d\tau,$$

或,因$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{dz}\right)dt$ 乃在 dt 時間內體積素 $d\tau$ 之膨脹:

$$A=-p\,dV \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1.25)$$

是處 dV 乃流體全質量之體積變遷.

3.1.5.　為討論流體動力學諸定律之應用計,茲更將平衡之條件

中論之.則取(3.1.12)積分之可得:

$$V+\int\frac{dp}{k}=\text{常數}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.26)$$

然則體力之階面[(1)]，$V=$常數(I·1.3.13)，同時卽壓力爲常數及密度爲常數之面．如有二不同流體相鄰，則一般而論，密度於分隔面有突變，而壓力 p 則依據作用與反作用定律何論在何種情形均係連續者.故如有一均勻之外壓力作用於流體面上，則在該流體之邊界，壓力爲常數，因之此面爲一體力之等勢面.此特適用於外壓力爲零或等於大氣壓力之特殊情形，該流體吾人謂之具“自由”面者——所以有“特”面之稱者，卽由此定律而來也.

如(3.1.26)中積分常數之値因面上條件而定，則整個內部壓力之値卽可知，完全與液體其他各處之邊界情形無關，因之亦不關乎容器之大小及形狀.例如，設作用於液體上之體力僅爲其自身之重量作用於負 z 軸之方向，則由(1.2.1):

$$X=0,\ \ Y=0,\ \ Zkd\tau=-gkd\tau,$$

而由(3.1.10):

$$V=gz+\text{常數}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.27)$$

因之(3.1.26)可變換爲:

$$\int\frac{dp}{k}+gz=\text{常數}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.28)$$

在不可壓縮之流體中:

$$p=\text{常數}-kgz\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.29)$$

然則高度相同之各點其壓力均同，當高度遞減時壓力以高度差爲比例而遞增.連通管也，提升液體之機械如唧筒也，液體氣壓計及液體壓力計也，凡此種種之定律，方程式(3.1.29)實兼蓄無餘.

例如在水銀氣壓計之情形，如 $z=0$ 爲自由面之平面，受大氣壓力 p_0 之作用，而液體近眞空之端其高度爲 $z=h$，則:

(1)Level susface.

$$在\ z=0,\quad p=p_0;$$
$$在\ z=h,\quad p=0.$$

故由(3.1.29):

$$p_0=kgh \cdots\cdots(3.1.30)$$

"一大氣壓[1]之壓力"規定爲當 $k=13.596$ 克/厘米^3, $g=980.6$ 厘米^3/秒^2, $h=76$厘米時 p_0 之值,故:

$$p_0=1,013,250\ 克/厘米\cdot秒^2 \cdots\cdots(3.1.31)$$

壓力之表示吾人常捨大氣壓而用其相當之 h 值(汞之若干毫米),此可自(3.1.30)將絕對壓力 p 除以 kg 而得之.

3.1.6. 試應用平衡條件(3.1.28)於可壓縮之流體一例如一任意高度之空氣柱.吾人所欲知者乃(2.4.1)中之函數 $f(k)$.如能假定空氣之溫度爲均勻者——設如 0°C——則可書:

$$p=ck \cdots\cdots(3.1.32)$$

c 之值可決定之如下:一大氣壓之壓力 p_0, $k=k_0=0.001293$ [克/厘米^3],故:

$$c=\frac{p_0}{k_0} \cdots\cdots(3.1.33)$$

因之,積分(3.1.28)可得:

$$z=\frac{p_0}{gk_0}\cdot\log\frac{p_0}{p} \cdots\cdots(3.1.34)$$

$p=p_0$ 時, $z=0$.

此乃在等溫平衡狀態下測定高度之氣壓公式,藉此可求得相當於某空氣壓力 p 之高度 z. 應用已知之數字而以 10 爲對數之基數,則:

$$z=18,400\log_{10}\frac{p_0}{p}\ 米 \cdots\cdots(3.1.35)$$

至 $p_0:p$ 之比數,則分子及分母各以若干毫米之水銀表示爲便.

在自由大氣中,均勻溫度之假定僅在極少數情形中能適合,蓋各空氣層溫度因熱傳導而生之均等比較甚緩;而時時有氣流擾動之.一般言

(1)Atmosphere.

之，公式(3.1.32)及由此所得之結論並不成立，蓋壓力將不僅與密度有關，且與溫度有關也．然若謂欲應用是處所闡述之理必須有溫度均勻之假定爲前提，則又失之妄謬，特別於完全彈性假設之應用時爲尤然(第2.1.1節)．蓋此假說並不定須溫度之持恆不變也，所需者僅爲壓力 P 之祇與密度 k 相依．在此過程中，溫度可有任何之變遷，然其自身必仍完全決定於密度，滿足此條件之一重要情形可於一切熱傳導之可能盡行屏去時得之——此謂當一切體積之變遷並不於"等溫[1]"情形下發生，而於"絕熱[2]"情形下發生，故熱不能自該物體之一質點傳導至鄰接之質點，等溫過程相當於物體導熱性爲無限大之極限情形，而絕熱過程則相當於導熱性爲無限小之極限情形．在後一情形，壓力亦祇與密度相依；故完全彈性之方程式(2.4.1)亦適用之，然函數 $f(k)$ 則不復爲(3.1.32)之等溫式而當爲絕熱式：

$$p=c'k^{\gamma}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.36)$$

是處常數 γ 之值於空氣爲 1.405，c' 仍自下列之方程式得之：

$$c'=\frac{p_0}{k_0{}^{\gamma}}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.37)$$

故在絕熱過程中，壓縮時壓力之增加欲較等溫過程中爲大，膨脹時壓力之減少欲較等溫過程中爲大，此蓋緣當絕熱壓縮時空氣增暖而當絕熱膨脹時空氣冷却也．

復次，吾人如在(3.1.28)中加入公式(3.1.36)，而應用類似上述之方法，則可得當絕熱平衡時氣壓之高度公式如下：

$$z=\frac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{p_0}{gk_0}\cdot\left\{1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.38)$$

或，如用前舉之數值：

$$z=27700\left\{1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{0.288}\right\}\text{米}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.39)$$

壓力依高度之遞減，實相當於假定每空氣層中之溫度適等於自0°C

(1) Isothermal. (2) Adiabatic.

及大氣壓絕熱膨脹至該空氣時之密度而所生之溫度.

絕熱過程在振動過程中欲較在平衡狀態中爲重要,蓋在前一情形,溫度因交替壓縮及膨脹而生之增減,遞換至速,而氣體之導熱性則甚小,以實際論,此溫度之增減可完全略而不論也.故在自(2.4.5)計算聲速時,吾人可利用公式(3.1.36),此與(3.1.37)合可得在密度 k_0 及壓力 p_0 之氣體中聲之速度爲:

$$a^2=\frac{\gamma p_0}{k_0}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.40)$$

如氣體爲在 0°C 及大氣壓之空氣,則代入已知之數值可得:

$$a=332\text{米/秒},$$

此與實驗之結果合.

等溫壓縮係數則由(2.4.5)而示之:

$$a^2=\frac{p_0}{k_0}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.41)$$

以同溫度及同壓力之空氣而論,則:

$$a=280\text{米/秒},$$

自屬過小.

在可散爲點滴之液體中,絕熱壓縮係數及等溫壓縮係數之差別至微.

3.1.7. 吾人茲將討論流體動力學基本方程式應用之另一簡單之例——此即一不可壓縮之流體以均勻角速度 ω 依一軸轉動之情形.是處一切質點之運動自始即已決定.蓋如選取 z 軸爲轉動軸,則該流體中一點 a,b,c 之位置可將下列諸值代入方程式(1.1.11)得之:

$$\left.\begin{array}{lll}\alpha_1=\cos(\omega t), & \alpha_2=-\sin(\omega t), & \alpha_3=0\\ \beta_1=\sin(\omega t), & \beta_2=\cos(\omega t), & \beta_3=0\\ \gamma_1=0, & \gamma_2=0, & \gamma_3=1\end{array}\right\}\cdots\cdots(3.1.42)$$

故:

$$\left.\begin{aligned}x&=a\cos(\omega t)-b\sin(\omega t)\\y&=a\sin(\omega t)+b\cos(\omega t)\\z&=c\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.43)$$

如將此諸方程式"依據實質觀"依時間 t 取導數二次則得：

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x,\quad\frac{d^2y}{dt^2}=-\omega^2y,\quad\frac{d^2z}{dt^2}=0,$$

代入運動方程式(3.1.12)則：

$$-\omega^2x+\frac{\partial(V+P)}{\partial x}=0,\quad-\omega^2y+\frac{\partial(V+P)}{\partial y}=0,\quad\frac{\partial(V+P)}{\partial z}=0.$$

自此以取積分而應用(3.1.24)可得：

$$p=\frac{1}{2}k\omega^2\rho^2-kV+\text{常數}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.44)$$

是處之 ρ 指參照點(x,y,z)至轉動軸之距離．吾人現將應用此方程式於二甚有興趣之情形．

3.1.8.　設有一不可壓縮之重流體在一中空之圓柱體中以不變角速度 ω 轉動，此圓柱體具一水平底面，上端洞開．例如，吾人可設想此流體係注於一玻璃杯中，以匙急攪之而迅速提出．爲免除容器壁上摩擦力之阻尼效應計，可假定容器隨流體以轉動．則當勻速運動時自無摩擦可生，蓋並無形變可發生於此運動也．

由(3.1.27)及(3.1.44)可有：

$$p=\frac{1}{2}k\omega^2\rho^2-kgz+\text{常數}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.45)$$

自第 3.1.5 節可知該流體自由面之形狀可藉($p=$常數)定之，即：

$$\frac{1}{2}\omega^2\rho^2-gz=\text{常數}.$$

此乃依 z 軸轉成之一拋物面之方程式．如命 $\rho=0$ 時 $z=z_0$，則得：

$$z=z_0+\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}\rho^2\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.46)$$

然則該液體之面於中央爲最低，由中央以至壁邊，其高度以轉動速度之平方爲比例而遞增．z_0 之值，因之以及中心低降之絕對值，與外壓力之大小無關，所藉以決定者，乃液體之體積，轉動時與靜止時相同也．

故如液體在靜止時充滿容器於 $z=h$ 之高度，則體積有下列之關係：

$$\int_0^R\int_0^{2\pi} z\cdot\rho d\rho d\phi = R^2\pi\cdot h,$$

是處 R 指圓柱體之半徑.

藉(3.1.46)之助，由此可得：

$$z_0 = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \cdots\cdots (3.1.47)$$

右邊之第二項示液體高度在中心低降之值.

在邊沿之上升，於 $\rho=R$ 時其值爲 $z-h$ 如(3.1.46)所示者，故：

$$z-h = \frac{\omega^2 R}{4g} \cdots\cdots (3.1.48)$$

其大小與中心之低降相同.

自(3.1.45)可知在水平截面($z=$常數)之壓力，其值並不一律，於中心爲最小，於邊沿爲最大，此亦甚易自實驗證明之. 如於容器底上(假定爲靜止者)散以細沙，沙之重足以保其自身不隨流體轉動，則當液體開始轉動時，沙粒受勢梯度之影響而動至容器底面之中心.

3.1.9. 設有一不可壓縮之液體，其各單獨質點依據 Newton 定律，對某固定中心有萬有引力存在，整個液體以不變角速度 ω 依通過此中心之一軸而轉動. 試尋求其自由面之形狀. 此問題吾人特感興趣，蓋與地球在兩極之所以縮扁之問題相關也. 故吾人亦將列舉地球上所得情形以爲示例.

命 r 爲參照點至中心 O 之距離，則由(I·1.3.30)引力勢爲：

$$V = -\frac{c}{r},$$

且由(1.2.1)及(3.1.10)每單位質量之吸引力(由萬有引力而得之加速度)爲：

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{c}{r^2}.$$

欲定常數 c，吾人可假定在距離 r_0 之重力加速度爲 g_0，則：

$$g_0 = \frac{c}{r_0^2},$$

普遍言之：

$$V=-\frac{g_0 r_0^2}{r}\cdots\cdots(3.1.49)$$

由(3.1.44)自由面之形狀可得下列方程式：

$$\frac{1}{2}\omega^2\rho^2+\frac{g_0 r_0^2}{r}=常數,$$

如於該面上命 $\rho=0$, $r=r_0$(矢徑),則：

$$\frac{1}{2}\omega^2\rho^2=g_0 r_0^2\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)\cdots\cdots(3.1.50)$$

如採用 ϕ 角(地理緯度)以代 ρ 而二者有下列之關係：

$$\rho=r\cos\phi,$$

則(3.1.50)成：

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}-\frac{\omega^2}{2g_0 r_0^2}\cdot r^2\cos^2\phi\cdots\cdots(3.1.51)$$

在 $\omega=0$ (靜止液體)之特殊情形，r 爲常數，故自由面乃一球面．因之如 ω 之值不大，面之形狀與球面之差別至微，是乃一扁球，在兩極爲縮扁者．爲初步近似計，扁球之方程式可列如下：

$$r=r_0\left(1+\frac{\omega^2 r_0}{2g_0}\cos^2\phi\right)\cdots\cdots(3.1.52)$$

縮扁之量爲：

$$\frac{r_{max}-r_0}{r_0}=\frac{\omega^2 r_0}{2g_0}\cdots\cdots(3.1.53)$$

以地球而言：

$$\omega=\frac{2\pi}{24\cdot60\cdot60}[秒^{-1}),\ r_0=6.356\cdot10^8[厘米],\ g_0=983[厘米/秒^2],$$

縮扁爲 $\frac{1}{585}$；實際量得之値爲 $\frac{1}{298}$，所差者實非甚微也．

所以有此差別者乃緣地球所構成之物質，並不吸向地球中心，諸質量間互有萬有引力存在也，自由面之形狀乃離球形愈遠甚明．當然，加入相互間之萬有引力後，問題將更爲繁複，蓋引力勢 V 之式將不復爲自始卽已知，其本身且與欲決定之面之形狀有關．進一步論之，則若此所定之問題並無唯一之解答——有各種不同之曲面形狀均屬可能者，

如一具某縮扁度之轉成橢圓球是.

如限於討論角速度之値爲甚小之情形，卽自球形之偏差甚小之情形，則以某種近似言，吾人由（I·1.3.31）可命液體質點上之引力直接與自地心之距離 r 成比例，換言之，吾人可命勢與 r^2 成比例. 立此假定後，如完全依照上述方法計算之，則所得縮扁之量仍爲(3.1.53)式，所以然者，蓋在自球形之偏差甚小時，示 V 及 r 關係之定律，其形式對於縮扁並未有若何顯著之影響也.

3.1.10. 今重返於理論之一般處理，將先示流體動力方程式之一重要積分，初爲 Helmholtz 所發現者. 其在流體動力學之重要正與面積原理(扇形面積定律)之於普通力學中相似.

吾人如自相當於 a,b,c 三字母之三 Lagrange 方程式(3.1.14)出發，則 V 及 P 二函數顯然可以消去，其法如下：依 b 以取 a 方程式之導數，再依 a 以取 b 方程式之導數，然後將所得之方程式互減. 實行此運算於每對字母，則仍得三方程式，與字母 a,b,c 相當. 可試舉 a 方程式爲例，此爲：

$$\frac{d}{db}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dc}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dc}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dc}\right)-\frac{d}{dc}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{db}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{db}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{db}\right)=0,$$

取導數後得：

$$\sum_{x,y,z}\frac{dx}{dc}\frac{d}{db}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)-\frac{dx}{db}\frac{d}{dc}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0.$$

是處之叠加號示除已書出之 x 項外尙須加入一 y 項及一 z 項，此式得書作一依時間之導數如下：

$$\sum_{x,y,z}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dc}\frac{du}{db}-\frac{dx}{db}\frac{du}{dc}\right)=0,$$

此可依 t 以取導數而知之，蓋在所得之四項中有二項對消也.

因之積分後得：

$$\sum_{x,y,z}\frac{dx}{dc}\frac{du}{db}-\frac{dx}{db}\frac{du}{dc}=A\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.54a)$$

是處之 A 量僅與 a,b,c 相關而與 t 無關．用完全同樣方法可得 b 式 (3.1.54b)$=B$,及 c 式(3.1.54c)$=C$,B 及 C 之性質與 A 同．

欲將關於 a,b,c 之三方程式變換為關於 x,y,z 之三方程式，可將(3.1.54)之三方程式依次各乘以 $\frac{dx}{da}$, $\frac{dx}{db}$, $\frac{dx}{dc}$ 而相加．則在所得之諸項中，有幾項對消，有幾項可以(1.1.8)中所採用之符號代表之，適當整理後可得：

$$\sum_{a,b,c}\frac{dw}{da}\left[\frac{dy}{da}\right]-\frac{dv}{da}\left[\frac{dz}{da}\right]=A\frac{dx}{da}+B\frac{dx}{db}+C\frac{dx}{dc}\cdots(3.1.55x)$$

同樣可得(3.1.55y)及(3.1.55z)二方程式．

今由(1.1.53)：

$$\sum_{a,b,c}\frac{dw}{da}\left[\frac{dy}{da}\right]=D\frac{\partial w}{\partial y},$$

D 即函數行列式(1.1.51)．故(3.1.55x)成：

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{D}\left(A\frac{dx}{da}+B\frac{dx}{db}+C\frac{dx}{dc}\right).$$

如加入(1.1.59),(3.1.3)並(3.1.8)之關係，則得：

$$\xi=\frac{k}{2k_0}\left(A\frac{dx}{da}+B\frac{dx}{db}+C\frac{dx}{dc}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.56x)$$

η 及 ζ 之二方程式(3.1.56y)及(3.1.56z)均相仿．

積分常數 A,B,C 與 t 無關，欲定此常數之值，可於三方程式(3.1.56)中命 $t=0$，則因有 $\left(\frac{dx}{da}\right)_0=1$, $\left(\frac{dx}{db}\right)_0=0$, $\left(\frac{dx}{dc}\right)_0=0$ 等等，故得：

$$\xi_0=\frac{1}{2}A,\quad \eta_0=\frac{1}{2}B,\quad \zeta_0=\frac{1}{2}C.$$

因之，一般可得：

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{k}{k_0}\left(\xi_0\frac{dx}{da}+\eta_0\frac{dx}{db}+\zeta_0\frac{dx}{dc}\right)\\\eta&=\frac{k}{k_0}\left(\xi_0\frac{dy}{da}+\eta_0\frac{dy}{db}+\zeta_0\frac{dy}{dc}\right)\\\zeta&=\frac{k}{k_0}\left(\xi_0\frac{dz}{da}+\eta_0\frac{dz}{db}+\zeta_0\frac{dz}{dc}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.57)$$

由此諸方程式所可推得之結論甚多，要言之，均緣 k_0,ξ_0,η_0,ζ_0 諸量之僅與 a,b,c 有關而不與 t 有關一事實所由生.

試先討論一液體質點 a,b,c，其在 $t=0$ 時之轉動速度爲零，則該點之 ξ_0,η_0,ζ_0 諸成分均歸烏有，自(3.1.57)得：

$$\xi=0,\ \eta=0,\ \zeta=0.$$

此示在某一任何時間一液體質點之運動爲無旋者，則該質點之此種性質將永持不變.

吾人如更討論 $t=0$ 時之情形，則 a,b,c 三量自與 x,y,z 三量疊合，凡液體之質點 a,b,c，其轉動分速度全部或一部不爲零者，則矢量 (ξ_0,η_0,ζ_0) 在空間之分佈狀況，可構成下列曲綫族以知之：

$$da:db:dc=\xi_0:\eta_0:\zeta_0\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.58)$$

凡此諸曲綫均具一性質：在任何點之切綫，其方向與在該點之轉動軸方向合. 故若此之綫謂之流體之渦旋綫[1]. 吾人玆將專論在 $t=0$ 時屬於一渦旋綫之諸質點 a,b,c，且以(3.1.58)之關係相連繫，請追蹤此諸質點於往後之時間 t，而問其轉動之速度當若何. 則速度之大小及方向已示於(3.1.57). 以方向言，如自(3.1.58)代入 ξ_0,η_0,ζ_0 之値，可得：

$$\xi:\eta:\zeta=dx:dy:dz\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.59)$$

此示所論諸質點在空間所成之曲綫仍具渦旋綫之性質；換言之，**諸渦旋綫常由同一之諸質點所組成.**

故每一渦旋綫成一單獨之實質組態，在時間過程中，其位置及形狀

(1) Vortex line.

可變,然其物質成分及(3.1.59)所示之基本性質則永爲不變者.凡渦旋綫或回復至本身而相接,或通入無窮遠之域,或通至液體之面.

方程式(3.1.57)並示轉動速度或渦旋速度之大小 ω.

蓋如取渦旋綫上一綫素 $ds_0=\sqrt{da^2+db^2+dc^2}$ 而論,則由(3.1.58):

$$\frac{\xi_0}{\omega_0}=\frac{da}{ds_0},\ \frac{\eta_0}{\omega_0}=\frac{db}{ds_0},\ \frac{\zeta_0}{\omega_0}=\frac{dc}{ds_0},$$

代入(3.1.57)得:

$$\xi=\frac{k}{k_0}\omega_0\frac{dx}{ds_0},\quad \eta=\frac{k}{k_0}\omega_0\frac{dy}{ds_0},\quad \zeta=\frac{k}{k_0}\omega_0\frac{dz}{ds_0}.$$

故在 t 時之轉動速度爲:

$$\omega=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}=\frac{k}{k_0}\omega_0\frac{ds}{ds_0}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.60)$$

此示渦旋綫上任何一點之轉動速度與流體之密度及綫上一弧素之長度成比例,組成此弧素之質點須保持不易者.可舉例以明之,如在時間過程中此弧素因所由組成之諸質點開張而伸長,而 k 保持不變,則渦旋速度增大.

此定律如以稍異之方法示之,當可得一更顯著之觀感.試在流體中取一任意之面積,經過此面積邊沿之每一點畫一渦旋綫,則在流體中劃出一空間,謂之"渦旋管(1)".此管之包面係完全由渦旋綫所成,上述之面積即代表該管之一截面.吾人可設想整個液體之體積係完全由多數無限細微之渦旋管所組成,此諸渦旋管或依其自身而循環,或通入無窮遠之域,或止於液體之面.渦旋管與渦旋綫同,當然其所藉以組成之質點保持不變.

今試取如是之無限細微渦旋管之一無限短段而論之,在此渦旋管之一渦旋綫中取二點,相距爲 ds;通過此二點畫二截面,面積爲 f,方向任意,祇須二截面平行.請專論此段渦旋管上諸質點在不同時間之情形.因渦旋管段之質量爲不變者,故有:

(1)Vortex-tube.

$$k\cdot f\cdot ds\cdot\cos\theta=k_0 f_0 ds_0\cos\theta_0,$$

是處吾人用 θ 以示截面法綫與 ds 所成之銳角——卽截面法綫與渦旋軸所成之角也.則(3.1.60)成:

$$\omega\cdot f\cdot\cos\theta=\omega_0 f_0\cos\theta_0=\omega\cdot f_n\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.61)$$

是處 f_n 乃正交於渦旋軸之截面面積. **故渦旋速度與渦旋管正交截面之乘積不以時間而變.**

不僅此也,此乘積於某特定渦旋管之各點其值皆同. 蓋如將由(1.1.59)而得之恆等式:

$$\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.62)$$

積分於液體之任何體積, 而應用(1.2.12)以變換在該過程中所生三空間積分之每一積分,則於取諸此空間面上之積分,可得:

$$\int\{\xi\cos(\nu x)+\eta\cos(\nu y)+\zeta\cos(\nu z)\}d\sigma$$

$$=\int\omega\cos(\nu,\omega)\cdot d\sigma=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.63)$$

今如此液體之體積爲渦旋管任何長度之一段, 則在此壓面積分中凡關於此管包面之項均爲零,蓋在包面上之每一點,其法綫 ν 與在此面上渦旋軸之方向正交.所餘者乃僅爲與二截面相涉之項.如渦旋管係無限細微而爲具有限長度者,更設初時之截面爲 f,最後之截面爲 f',而方向任意,則方程式(3.1.63)化爲二項:

$$\omega\cos(\nu,\omega)\cdot f+\omega'\cos(\nu',\omega')\cdot f'=0,$$

或,如仍用 θ 以指截面法綫與渦旋軸所成之角,且記取渦旋軸 ω,ω' 指同一方向,而內指法綫 ν,ν' 方向相反,則:

$$\omega f\cos\theta-\omega' f'\cos\theta'=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1.64)$$

此與(3.1.61)合併,可得一定理如下: **在一無限細微之渦旋管,渦旋速度與正交截面之乘積,於該管之一切點及在一切時間, 其值均同.** 此乘積常謂之渦旋管之"矩".

上文所述渦旋運動諸定律當然根據於一個假定, 卽吾人所論者爲

完全彈性之流體(第 3.1.3 節)及一力勢(3.1.10).在大自然中所遇者,此假定每有可觀察之偏離,結果乃與此諸定律不合,渦旋可生長亦可消滅.所以致此偏離之故可特別言明者為摩擦(粘滯性)及熱傳導.摩擦在流體之內部生壓力,此壓力並不與卽時形變相依而僅與卽時形變率相依(第 3.4.1 節);熱傳導之影響使壓力不復僅與密度有關,因之方程式(2.4.1)將不復成立.僅在無限大熱傳導(等溫過程)及無限小熱傳導(絕熱過程)之極限情形,吾人始得視液體為具完全彈性者,此已於第3.1.6節見之,在此情形當體力為保守力時乃可假定渦旋定律得成立.

第二章　無旋運動

3.2.1. 藉流體動力學普遍方程式之積分，讀者當已審渦旋運動之基本重要．於下文討論中，吾人將分流體運動為無旋運動(渦旋不存在)及渦旋運動之二大類．茲先言前者．此運動藉下列條件標識之：

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{q}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3.2.1)$$

或：

$$\boldsymbol{q}=-\operatorname{grad}\phi \cdots\cdots\cdots\cdots (3.2.2)$$

此示有一函數 ϕ 即"速度勢"之存在，其對 x,y,z 之偏導數示速度之各成分[參閱(2.4.7)及(2.4.8)]．由前所述可知若方程式適合於某一任何時間，則於一切時間均當適合．

速度勢 ϕ 之符號通常所用者與是處所用者適相反，在(3.2.2)中之負號常用正號．然欲維持與力勢及彈性勢以及電勢及熱力勢之類比，則在速度勢之情形亦須假定矢量 $\boldsymbol{q}$ 之方向與其相當陡度之方向相反．故速度與力勢情形中之力同係指向勢遞減之方向．由(3.2.2)可知在速度之式中有一附加之時間函數，為完全未定者，故毫無物理意義可言．

欲圖對液體在任何時間 t 之速度態得一詳盡之觀，可畫等速度勢之曲面，$\phi=$常數，及與之垂直之曲綫：

$$dx:dy:dz=\frac{\partial\phi}{\partial x}:\frac{\partial\phi}{\partial y}:\frac{\partial\phi}{\partial z} \cdots\cdots\cdots (3.2.3)$$

此即"流綫(1)也"，示每點之速度方向．與階面及力綫完全類似(卷 I 第1.3.13節)．流綫恆自高速度勢以至低速度勢，故如速度勢為均勻且連續者，流綫迄不能回復至其本身而相接．以後遇有流體之無旋運動而其流綫之通路者，則即可推論該無旋運動必具一多值之速度勢或一間斷之速度勢．

自流綫之觀念吾人可立得"流管(2)"之觀念，流管之特徵，乃其包

(1)Stream line.　(2)Stream tube,

面係由流綫所組成.流管對流綫之關係正與渦旋管對渦旋綫之關係同.等速度勢面當然對流管為正交者.

若流體運動非屬定立(1)者,則流綫及流管系統將因時而異——此謂諸流綫將依時間而變也.所當注意者,某特定流綫之運動一語,實毫無意義可言.蓋流體中諸質點在某一時間組成一流綫者,在另一時間即不盡然.故普遍言之,欲將某一時間之一流綫與另一時間之一流綫相聯繫,實為不可能之事.依此而論,流綫與渦旋綫間有基本之差別在,渦旋綫恆由流體中同一諸點所組成,乃具獨特之性質者.

無旋運動之條件最易以空間坐標 x,y,z 為自變數而表示之,故運動方程式之 Euler 式(3.1.15)當最宜以表示無旋運動.應用(3.2.2)此可書如下式:

$$\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial v}{\partial x}v+\frac{\partial w}{\partial x}w-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial x}=0,$$

其餘可依此類推.依 x,y,z 而積分之,可得:

$$\frac{u^2+v^2+w^2}{2}+V+P-\frac{\partial\phi}{\partial t}=f(t).$$

上文已述及在速度勢之值中,其附加常數係任意者,乃有:

$$\frac{u^2+v^2+w^2}{2}+V+P-\frac{\partial\phi}{\partial t}=0\qquad(3.2.4)$$

除此方程式外,吾人並有連續方程式(3.1.6)及壓力與密度間之關係,此則與流體之性質有關.然則吾人共有三方程式,由此三方程式可藉相當於所論情形之初態條件及邊界條件之助以定 ϕ,p,k 三量,初態條件與邊界條件可以自變數 x,y,z,t 之函數表示之.

3.2.2. 不壓縮流體之定立運動 如運動為定立者則 $\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t},\frac{\partial w}{\partial t}$ 諸量均 $=0$,將諸方程式依 x,y,z 以積分之,則得:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\text{常數}.$$

更如流體為不可壓縮而重者,則 P 取(3.1.24)之值而 V 取(3.1.

(1) Stationary.

27)之値，故方程式(3.2.4)成：

$$p=-\frac{k}{2}(u^2+v^2+w^2)-kgz+\text{常數}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.5)$$

而連續方程式(3.1.6)化爲：

$$\Delta\phi=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.6)$$

此卽著聞之 Laplace 方程式（I·1.3.48）也．此微分方程式與時間無關，每一解答卽代表在不可壓縮流體中之一無旋定立運動，在自然間爲可能者，壓力 p 由(3.2.5)定之．讀者當知此壓力可分二部，其第一部常稱曰流體動壓力，其第二部與(3.1.29)恆等，謂之流體靜壓力．流體動壓力祇與速度之大小有關，其變易之方向與速度適相反．然無論壓力自身抑壓力陡度俱與流體運動之方向無涉；在次一節中吾人當可遇若干顯著之例．

如在流體內部專取一特定之特限空間而將連續方程式(3.2.6)積分於此空間，則由(1.2.16)可得：

$$\int\frac{\partial\phi}{\partial\nu}d\sigma=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.7)$$

須知：

$$-k\frac{\partial\phi}{\partial\nu}d\sigma dt=kq_\nu d\sigma dt\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.8)$$

乃代表流體在 dt 時間內經面素 $d\sigma$ 流入該空間之量．方程式(3.2.7)乃得一顯著之意義：此謂在所論之空間中，流體經由一切面素流入之總量爲零，換言之，流入之總量與流出之總量適相等．

如此空間爲截面大小任意一流管中任意長短之一段，則歷面積分(3.2.7)關於該管包面之部分可除去，此方程式化爲一定理：在流管中流體流經每一截面之量均同．故此量乃所論流管之特徵，以每單位時間言，此謂之該管之"流強(1)"：

$$J=-\kappa\int\frac{\partial\phi}{\partial\nu}d\sigma$$

(1)Stream intensity or stream strength.

是處之積分當取諸流管之任何任意形狀之截面，ν 之方向須選取與流之向背同.

如命此截面與$\phi=$常數之面疊合,則 ν 之方向卽速度 q 之方向,故得:

$$J=k\int q\,d\sigma \cdots\cdots(3.2.10)$$

3.2.3. 在任何流管中,其包面若以一固定之牆壁代之,則流體之運動並無所擾，蓋適合於此固定牆壁之邊界條件——卽速度之法綫成分爲零之條件——於流管之包面恆適合也，此事實賦流管以實際之重要.如截面不過大而流之速度在截面各點其大小及方向並不過於參差，例如在水管中所遇之情形,則以某種近似度而言,吾人可假定諸等速度勢面爲平面,故(3.2.10)中之 q 可置諸積分號之前.因之:

$$J=k\cdot q\cdot f \cdots\cdots(3.2.11)$$

是處 f 指流管之正交截面.因 J 與 k 沿管之全長其值不變，故速度之大小與管之截面 f 成反比例,或:

$$q=\frac{f_0q_0}{f} \cdots\cdots(3.2.12)$$

是處之指數零乃指某特定之截面而言,如起始之截面是. 自此則由(3.2.5)並可得流管在任何截面 f 之壓力爲:

$$p-p_0=-\frac{k}{2}q_0{}^2\left(\frac{f_0{}^2}{f^2}-1\right)+kg(z_0-z) \cdots\cdots(3.2.13)$$

讀者當知在流管之最狹部分壓力之值最小,以原理言,藉流管之適當收狹,卽適當減小 f，吾人可於某特定之 q_0 及 f_0 任意使壓力減小.吾人如於管之此種狹小部分在管壁鑽一細孔使與外界之大氣相接，而大氣壓力設爲正常壓力 p_0，則壓力差 p_0-p 驅空氣入管中,空氣隨流體以去.水壓抽氣機及其他設計卽係利用此事實者.噴霧器之作用卽基於壓力因速度之增大而減小也.

在(3.2.13)中,由重力所生之項亦可用以減小壓力 p,如在Bunsen抽氣機之情形是(參比濾器抽機(1)),在此抽氣機中，水在一豎直之圓

(1)Filter-pump.

柱形管($f=f_0$)中下流，故二點壓力之差祇與其高度差 z_0-z 成比例.

反之，如已知管之兩端之壓力差 p_0-p，方程式(3.2.12)及(3.2.13)亦可用以求流體流經該管之定立速度 q_0 及 q. 例如，設有一上闊下狹之管，流體上層之壓力維持在 p_0，其出口之壓力維持在 p，試計算出管時射流[1]之定立速度. 取 f 與 f_0 較則 f 甚小，如略去 f 而二階層之高度差爲 h，則由(3.2.13)及(3.2.12)可得射流之速度爲：

$$q^2=2gh+\frac{2}{k}(p_0-p)\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.14)$$

如壓力上下相等，則 $q=\sqrt{2gh}$——此示射流之速度卽等於自由落體降經 h 高度之速度(Torricelli 定理). 射流之延緩或增速須視壓力差之符號而定. 然欲使 q 持續爲實數者，則壓力差不能再小於 $-hkg$. 在極限情形，射流之定立速度等於零，吾人所得者乃熟知之氣壓公式(3.1.30)，示壓力之差.

以實際情形言，流體流出之量常較自射流速度(3.2.14)及出口大小藉(3.2.11)所計得者爲小甚多(約爲三分之一). 所以有此差別者，其主要原因乃緣出口之面，$\phi=$常數，並非平面，自外視之，乃凹進者，蓋當流綫自液體內部湧出時，羣擠於狹隘之出口，正如圓錐之母線聚向頂點之情形. 故是處之 $\phi=$常數諸面可比於圍繞頂點之同心球面. 結果則出口處各點流出之速度其方向並非如應用(3.2.11)時所假定之均勻者，流綫會聚於出口處，故流管在出口前液體已成自由流注之點當更形收縮(第3.2.7節). 實際上吾人如在方程式(3.2.11)中 f 之值不用出口之大小而用收縮後流體流注所有之較小截面，則流綫較平行，故所得之結果較合實際.

欲圖流出之量大爲增加，可選取一適當之附加圓柱形管或更佳選取一適當之附加圓錐形管裝置於出口之外部. 此實相當於當流體流出時使流綫平行或發散，理至明也，流注之收縮乃以避免. 關於圓錐形管

(1) Efflux.

中流動之情形將於次節詳論之.

如管壁非屬到處均有均勻曲率而於一點成一角者，則當流綫沿經管壁而至此角之頂點時，在該點有一特異點，蓋流綫於是處之方向為二重者也.則在此角之流之速度，其成分或為零或為無窮大．此二種情形何者得實際發生可藉下列之探討以知之．若管壁自液體內觀之成一凹角（$<\pi$）如圖(3.2.1)中之A點所示者，則垂直於管壁而在圖中由綫條所示之諸面，ϕ＝常數，當靠近A點時自通經A點之特異勢而發散.故在A點，ϕ之陡度以及速度之值為零；因之，由(3.2.5)，壓力p之值為最大．然如管壁成凸出之角——此謂一伸入流體內之角如圖(3.2.1)之B點所示者——則等速度勢之面向特異點會聚，故ϕ之陡度及速度之值成∞，因之壓力等於$-\infty$，該流體如不有無限大之內聚力者則不為之引離亦幾希.

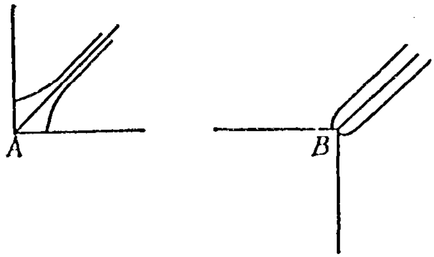

圖 3.2.1

3.2.4 茲復返至勢方程式(3.2.6)之若干簡單特解及相當於此諸特解之流體運動問題.最簡單之解答，ϕ之與x,y,z為一次關係.相當於此解答之運動乃流體之勻速移動，吾人殊不發生任何興趣.

一更普遍之解答為由(I·1.3.44)及(I·1.3.48)：

$$\phi=\Sigma\frac{\mu_1}{r_1}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.15)$$

是處r_1指參照點自一固定中心1之距離，μ_1乃一常數卽藉以標識此中心者，疊加號當運算於任意多之諸不同中心.當參照點無限趨近於已經固定之一中心時，吾人須設想諸固定中心本身以某種方式屏諸流體體積之外，此可藉任意小之面包圍於各中心而實現之.

次乃討論單一中心之特殊情形：

$$\phi=\frac{\mu}{r}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.16)$$

等速度勢面爲同心球面，故流綫爲正交直綫流注之母綫[1].如 μ 爲正，則流體自中心流向各方，而以中心爲其"源頭[2]".如 μ 爲負，則流體自各方注入中心，而以中心爲其"尾閭[3]".速度之值，如取自中心向外之方向，爲：

$$-\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{\mu}{r^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.17)$$

然則速度與距離之平方成反比例，在中心處等於 $\pm\infty$.因之，由(3.2.5)可知在中心之壓力 p 恆等於 $-\infty$，初不問其爲源頭或尾閭也.是處吾人可於流體之流動及定立之電流或熱流間明一顯著之區別.此電流或熱流設自一點狀電極或熱之一點源出發，亦可由 Laplace 微分方程式代表者.在後述之二種情形，流之方向與勢陡度及溫度陡度相依，其正負即隨之而變；而在液體流動之情形，則壓力恆向外遞增，初不問液體爲內流或外流也.所以有此差別者，其原因可自流體之慣性中求之.蓋是處之壓力陡度常致生一內向之力，此在以中心爲源頭之情形使流體外流之速度逐漸遞減，至以中心爲尾閭之情形，則使流體內流之速度逐漸遞增.

有任何圓錐面而頂點在中心者，吾人可設想以固定之壁替代之；如是可求得若干定律，前節所述關於出口外加一圓錐形管之射流定律即其一也.常數 μ 與源頭之產率或供給率有密切關係.如置一任何形狀之虛構面於液體中而完全將源頭包裹，則流體每單位時間經此面流出之總量即等於在同時間內源頭所供給之總量，因定立狀態故也.此完全與面之形狀無關.該量吾人謂之"源強" J.如命此虛構面爲以源頭爲心之球面，則源強之値不難求得，由(3.2.8)及(3.2.17)得：

$$J=-k\int\frac{\partial\phi}{\partial r}d\sigma=k\frac{\mu}{r^2}\int d\sigma=4\pi k\mu\cdots\cdots\cdots(3.2.18)$$

(1)Generator. (2)Source. (3)Sink.

同時此方程式卽代表(3.2.7)關係之推廣，(3.2.7)之關係祇適合於由面所包之空間無特異點存在之情形也.

今如進而討論有無數源頭及尾閭之普遍情形(3.2.15)，則所得之條件亦完全類似.流綫自源頭出發，或止於尾閭，或遠去無窮.一單獨特異點之產率，其決定因數爲其常數 μ，蓋由(3.2.18)此示源頭或尾閭之強度 J 也.在該點之近鄰，其他一切源頭之影響可略而不論，故近於源頭之等速度勢面爲以源頭爲心之諸同心球面.

如設想流體中某一體積，以某封閉曲面爲界，則因在定立狀態故，在單位時間內經由此曲面流出流體之總量卽等於在同時間內諸源頭及尾閭所給量之代數和，或由(3.2.8)及(3.2.18)：

$$k\int\frac{\partial\phi}{\partial\nu}d\sigma=\Sigma J_i=4\pi k\Sigma\mu_i.$$

此卽：

$$\int\frac{\partial\phi}{\partial\nu}d\sigma=4\pi\Sigma\mu_i\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.19)$$

是處吾人用指數 i 以指爲曲面 σ 所包之內特異點，ν 指內法綫，與通常之習慣同.此關係將(3.2.7)及(3.2.18)比較特殊之二方程式融爲一較普遍之定律，常稱之 Gauss 方程式，乃其發見者之名也.

吾人將討論若干特殊應用.以二具同一強度之源頭而論，則速度勢成：

$$\phi=\mu\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.20)$$

因平分連接二源頭之綫之平面乃一完全由流綫所成之對稱平面，故吾人可設想此諸流綫以一固定障礙壁替代之，由第 2.4.4 節所闡發之結果，可求得自源頭至固定壁之液流.

如二源頭之強度相反而相等，則速度勢成：

$$\phi=\mu\left(-\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.21)$$

液體自源頭 2 流至尾閭 1——此謂流綫發端於 2 而終止於 1.如二

中心互相趨近而1之坐標爲 ξ,η,ζ，而2之坐標爲 $\xi+\Delta\xi$，$\eta+\Delta\eta$，$\zeta+\Delta\zeta$，則(3.2.21)式成：

$$\phi=\mu\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\Delta\xi+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\Delta\eta+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\Delta\zeta\right).$$

在逼至極限 $\Delta=0$ 時，吾人可命 μ 增大以使 $\mu\cdot\Delta\xi,\mu\cdot\Delta\eta,\mu\cdot\Delta\zeta$ 諸乘積持續爲有限者.如命此諸乘積爲 $\mu_\xi,\mu_\eta,\mu_\zeta$，則可得速度勢之有限式如下：

$$\phi=\mu_\xi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}+\mu_\eta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}+\mu_\zeta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.22)$$

若此之組態由二無限近之源頭所組成，其強度相等，均屬無限大而正負相反者，謂之一"源偶(1)"，成分爲 $\mu_\xi,\mu_\eta,\mu_\zeta$ 之不變矢量，謂之該源偶之"矩"，其方向(自尾閭至源頭之方向)謂之該源偶之"軸".流綫自源頭出發，依照軸之方向，以較小或較大之弧度回返於尾閭. 如源頭與尾閭互易其位，則祇有流之向旨變遷，流綫之位置不變. 在參照點至特異點之距離 r 中，其所含此二點之坐標值爲 $x-\xi,y-\eta,z-\zeta$ 之形式，故(3.2.22)可換書如下：

$$\phi=-\mu_\xi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}-\mu_\eta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-\mu_\zeta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cdots\cdots\cdots(3.2.23)$$

由此可立知函數 ϕ 實際得適合 Laplace 方程式(3.2.6).

3.2.5. 爲更示所述理論之應用計，吾人將討論**一剛球在不可壓縮流體中之勻速運動**，此情形亦將化爲是處所簡化之形式以處理之.蓋由相對性原理(卷I第1.5.5節)，支配此運動之定律與**一定立之球在流體之勻速流動中**所適用之定律全同.故設球體以勻速 a 依 z 軸之方向進行，吾人將代以一定立之球體，球心在坐標原點，流體經其四周而流動，遠離球體之諸點，即去原點之距離無限大之諸點，將不復對之發生若何影響，流體以不變之速度 $-a$ 沿 z 軸之方向進行.

(1)Doublet.

吾人如能爲速度勢 ϕ 立一可適合 Laplace 方程式之式且適合邊界條件,則此問題卽迎刃而解.液體之極限爲 $r=R$ (球之半徑)及 $r=\infty$.以 $\gamma=\infty$ 言,則依據上述,有:

$$\phi=az \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.24)$$

以 $r=R$ 而論,則指向球面之速度法綫成分爲零,故

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_R=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.25)$$

欲滿足此一切條件,吾人書:

$$\phi=az+\phi' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.36)$$

則函數 ϕ' 必滿足 Laplace 方程式以及下列之邊界條件:

$$於\ r=\infty:\quad \phi'=0.$$

$$於\ r=R:\quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_R=-a\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_R=-\frac{az}{R} \cdots\cdots(3.2.27)$$

吾人如命 ϕ' 等於適用於一源偶之勢函數——卽

$$\phi'=\mu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}=-\mu\frac{z}{r^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.28)$$

則上述問題之答案卽得,此不難證明者也.

蓋,第一,ϕ' 滿足 Laplace 方程式;第二,於 $r=\infty$ 時 ϕ' 消失,第三,吾人可自(3.2.27)得 μ 之不變値如下:

$$\mu=-\frac{1}{2}R^3a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.29)$$

如在方程式(3.2.27)及(3.2.28)中 $\frac{\partial z}{\partial r}$ 及 $\frac{\partial r}{\partial z}$ 二導數其値相等而俱爲 $\frac{z}{r}$ 者,此非可以矛盾視之.有此誤謬之觀念者,必對此種符號之意義欠充分了解故.如書成下列之完備形式其義自明:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_{\theta,\phi}=\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)_{x,y} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.30)$$

在此方程式之左邊,z 宜視爲坐標 r,θ,ϕ 之函數,而在右邊則當視作直線坐標 x,y,z 之函數.

加入(3.2.28)及(3.2.29)之關係吾人即可自(3.2.26)求得所請速度勢之式，即爲全問題之答案：

$$\phi=az\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.31)$$

因ϕ僅與 z 及 r 有關，故液流對 z 軸爲對稱者，而流綫係在通過 z 軸之諸平面內，此自爲自然之事也.

由(3.2.31)可知速度成分爲：

$$\left.\begin{aligned}u&=-\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{3}{2}R^3a\cdot\frac{xz}{r^5}\\v&=-\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{3}{2}R^3a\cdot\frac{yz}{r^5}\\w&=-\frac{\partial\phi}{\partial z}=-a\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\left(1-\frac{3z^2}{r^2}\right)\right\}\end{aligned}\right\}\cdots(3.2.32)$$

欲求位於通過 z 軸之任何平面內之流綫，可引用一自 z 軸之距離ρ以代 x 及 y：

$$\rho^2=x^2+y^2\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.33)$$

故：

$$r^2=\rho^2+z^2\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.34)$$

則流綫之微分方程式爲：

$$d\rho:dz=\frac{\partial\phi}{\partial r}:\frac{\partial\phi}{\partial z},$$

而由(3.2.32)：

$$d\rho:dz=\frac{3}{2}R^3a\cdot\frac{\rho z}{r^5}:-a\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\left(1-\frac{3z^2}{r^2}\right)\right\}.$$

吾人如於是處將 z 藉下列關係以 r 及 ρ 代之：

$$z^2=r^2-\rho^2\quad 及\quad zdz=rdr-\rho d\rho,$$

則簡化後得：

$$\frac{3R^3dr}{r^4\left\{1-\left(\frac{R}{r}\right)^3\right\}}+\frac{2d\rho}{\rho}=0,$$

故積分之得：

$$\log\left\{1-\left(\frac{R}{r}\right)^3\right\}+2\log\rho=\text{常數},$$

或:

$$\rho^2\cdot\left\{1-\left(\frac{R}{r}\right)^3\right\}=\text{常數}(>0)\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.35)$$

是乃流綫系之方程式.此系與球體之半徑 R 相關,然與速度 a 無關.如使式中常數取自 0 至 ∞ 之一切值,則卽得一切流綫.當常數 $=\infty$ 時,$\rho=\infty$,故亦有 $r=\infty$,速度係均勻者,等於 $-a$.然當常數 $=0$ 時,則 $\rho=0$ 或 $r=R$,二者必居其一——此示流綫分爲二部分,其一與 z 軸疊合(在球體外),其一位球面上.在臨界點 $\rho=0$, $z=\pm R$,卽球體之"極點[1]",則流綫有一直角之扭轉.是處速度等於零,流綫分成無窮數之歧枝,緊包於球體上.

吾人將問位於正 z 軸一液體質點達至球體極點 $z=+R$ 所需之時間,當至饒興趣.於該點之運動 $x=0, y=0, r=z$,故由(3.2.32)可得所求之時間爲:

$$t=\int_Z^R\frac{dz}{w}=\frac{1}{a}\int_R^Z\frac{z^3dz}{z^3-R^3}=\infty\cdots\cdots\cdots(3.2.36)$$

此示一液體質點行經球體之時間,凡其行跡愈近球面者愈大,終至大至無窮.

液體流近球面之速度可自(3.2.32)中命 $r=R$ 得之,其值爲:

$$\frac{3}{2}\frac{\rho}{R}\cdot a\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.37)$$

在球之赤道平面中其值最大,爲 $\frac{3}{2}a$.赤道平面分球體爲兩半球,故對此平面而言,速度爲完全對稱者.

最後吾人將求流體所加於此球體之壓力.自此並可計算作用於靜止球體上液流之合力,此當然亦爲在靜止流體中一行動球體所受之阻力.

如略去重力不論而速度代以(3.2.37)之值,則自(3.2.5)可得球體

(1)Pole.

上之壓力 p 為：

$$p=\text{常數}-\frac{9}{8}\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 a^2 k,$$

或，如命未經擾動液流中即相當於速度a之液流中之壓力為 p_0：

$$p=p_0+\frac{a^2}{2}k\left\{1-\left(\frac{3}{2}\frac{\rho}{R}\right)^2\right\}\cdots\cdots\cdots(3.2.38)$$

此與流之方向無關，於球體之極點，其值最大，在赤道平面上其值最小，於赤道平面之兩邊壓力係對稱者．茲如將作用於一切面素上之諸壓力 $p\cdot d\sigma$ 併為一單獨之合力，則由諸力於 z 之正負值為對稱一事實以觀，即可曉然於合力之為零殊無庸計算以得之也．換言之，液流對於靜止於其中之剛球毫無影響，或謂：一勻速運動之球體在靜止之流體中並不受若何阻力．

此結論顯然與經驗鑿枘，故久為流體動力學中一著稱之佯謬．其所以然者，蓋在是處所用之諸方程式中曾掛漏一項，在本問題中且為一主要部分．即二物質接觸面上之摩擦是也．實際上因摩擦之存在，在球面上不僅速度之法線成分為零，其切綫成分亦且為零——即流體完全附着於球面上．此情形當俟後詳論之(第 3.4.3 節)．

3.2.6. 今可進而討論速度勢 Laplace 方程式特解之另一類——即函數 ϕ 僅與 x 及 y 二坐標相關而與 z 無涉之情形，故：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0\cdots\cdots\cdots(3.2.39)$$

本問題乃化為一二維之問題，在多方面較簡多多．等勢面 $\phi=$常數，係平行於 z 軸之圓柱面，得以 xy 平面內之綫代表之，即等勢綫也．流綫系由在同一平面內與等勢綫正交之諸綫代表之．

微分方程式 (3.2.39) 最普遍之積分方法須採用複量．蓋複量 $x+iy=z$ 之每一解析函數可產生方程式(3.2.39)之一解，因之即代表不可壓縮流體之一無旋定立運動，自不難證明者也．試命此一函數為 w，則：

$$w=f(x+iy)=f(z) \quad\cdots\cdots(3.2.40)$$

是處之函數式 f 得兼含任何實數或複數之常數.

故如分解 w 爲實虛二部分:

$$w=\phi+i\psi \quad\cdots\cdots(3.2.41)$$

則 ϕ 及 ψ 爲實變數 x 及 y 之某種實函數.茲由(3.2.41)可得:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial\phi}{\partial y}+i\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad\cdots\cdots(3.2.42)$$

在另一方面則自(3.2.40)可得:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial z} \quad\cdots\cdots(3.2.42a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}i,$$

故:

$$\frac{\partial w}{\partial y}=i\cdot\frac{\partial w}{\partial x},$$

而由(3.2.42)將虛實二部分離可得:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\phi}{\partial x},\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad\cdots\cdots(3.2.43)$$

消去 ψ 得方程式(3.2.39);消去 ϕ 得方程式:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \quad\cdots\cdots(3.2.44)$$

且下列關係亦得成立:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \quad\cdots\cdots(3.2.45)$$

故 ϕ 得解釋爲速度勢. $\phi=$常數之曲綫乃等勢綫,而與之相當之流綫可以 $\psi=$常數代表之,蓋由(3.2.45),此二曲綫族互相垂直也.然函數 ϕ 及 ψ 亦得互易其位,故後者可解釋爲速度勢而前者可解釋爲流函數.

爲示複函數 w 與 z 相依關係之性質計,最佳可將 w 及 z 視爲 w 平面及 z 平面二平面上之二點,各以其坐標 ϕ 及 ψ 或 x 及 y 標識之,則函數 $f(z)=w$ 代表該二點之一特定相當關係——此謂將 z 平面在

w 平面上表示之，或將 w 平面在 z 平面上表示之也．此表示法亦得視作均勻分佈於一平面上一物質之形變；爲此故，吾人將取 ϕ 及 ψ 以指未形變前該物質中一點之坐標，而取 x 及 y 以指該點在形變後之坐標，反之亦可．則對此形變所得之結論，當與第一篇第一章中關於在空間無限延伸之一物質之更普通情形所得者全同．茲擇其最重要者討論之．

第一，無限小面積之變換係屬一次者，故可藉移動、轉動及膨脹以相互變換之(第 1.1.10 節)；其理甚明．蓋由(3.2.40)有：

$$dz=\frac{dz}{dw}\cdot dw \qquad (3.2.46)$$

今命：

$$\frac{dz}{dw}=\zeta=r(\cos\theta+i\sin\theta) \qquad (3.2.47)$$

是處：

$$r>0 \quad 及 \quad \pi>\theta>-\pi.$$

則由(3.2.46)，如將虛實二部分離，可得：

$$dx=r\cos\theta\cdot d\phi-r\sin\theta\cdot d\psi,$$

$$dy=r\sin\theta\cdot d\phi+r\cos\theta\cdot d\psi.$$

茲如使二相當點 w 及 z 固定，因之 r 及 θ 之值亦固定，而微分 $d\phi$, $d\psi, dx, dy$ 僅視爲可變坐標，則上列二方程式實示代表無限近於 w 及 z 諸區域之定律，此定律固爲一次關係也．將此二方程式書作：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{r}&=\cos\theta\cdot d\phi-\sin\theta\cdot d\psi=dx'\\ \frac{dy}{r}&=\sin\theta\cdot d\phi+\cos\theta\cdot d\psi=dy'\end{aligned}\right\} \qquad (3.2.48)$$

則其形學義意不難立曉．此示欲將無限近之一點自 $(d\phi, d\psi)$ 位置變換至 (dx, dy) 位置者，先須作一簡單之轉動，轉動角爲 θ，使該點取 (dx', dy') 位置，然後以 $r:1$ 之比在各方向爲一均勻之膨脹(第 1.1.6 節末)，使一切比例俱以此比數而放大，而一切方向，因之以及一切角度則持恆

不變.故所變換之區域與原有區域相似，對原有區域爲一轉動而已.故吾人亦謂此種藉複函數之表示或變換在其最小之部分亦係"循形(1)"者.

故凡 w 平面在 z 平面內之一循形變換即相當於 z 平面內流體之一定立運動,每一流管，在 w 平面內成一條片，與 ϕ 軸平行，蓋流管之邊界乃 $\psi=$ 常數之二線也. 故欲求在任何二已知固定邊綫內液體之定立流動，此問題化爲一由邊界爲 w 平面內二平行綫所圍之條片在 z 平面內之循形變換，變換之區域即位於此二邊界綫之間.

此變換之特徵即 r 與 θ 二量，流體運動之性質藉之曉示無餘，蓋由(3.2.42a)及(3.2.43)二關係，可有:

$$\zeta=1:\frac{dw}{dz}=1:\frac{\partial w}{\partial x}=1:\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}-i\frac{\partial\phi}{\partial y}\right),$$

故自(3.2.47)將實虛二部分離後可得:

$$\frac{1}{r^2}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.49)$$

$$\cos\theta=r\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x},\quad \sin\theta=r\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.50)$$

然則 r 乃速度之倒數，而(在 π 與 $-\pi$ 之間)乃速度勢之陡度(其方向與流綫適相反)與正 x 軸所成之角.

試示一簡單之例:有二固定之直綫相遇於尾閭 O，二綫所成之角爲 α.吾人將問流體在此二直綫中間之流動當若何?(自一無限小出口 O之射流).此則須將 w 平面內平行於 ϕ 軸而闊度爲 β 之條片循形變換至 z 平面內角度爲 α 之扇形面(圖3.2.2).此變換可藉下列之函數代表之:

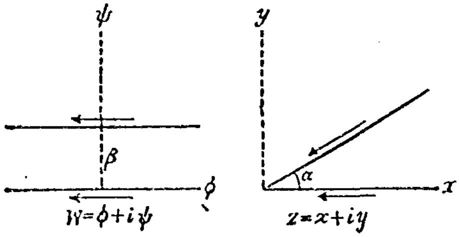

圖 3.2.2

(1)Conformal.

$$z=e^{\frac{\alpha}{\beta}\cdot w} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.51)$$

或:

$$\left.\begin{aligned} x&=e^{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\varphi}\cos\left(\frac{\alpha}{\beta}\psi\right)\\ y&=e^{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\varphi}\sin\left(\frac{\alpha}{\beta}\psi\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.52)$$

以實際言,吾人如命 ϕ 自 $+\infty$ 遞減至 $-\infty$, 相當於流綫之方向(在3.2.2圖中由箭頭示之), 則在 $\psi=0$ 之情形, z 點沿一固定直綫即 x 軸自 $x=\infty$ 以進至 $x=0$,在 $\psi=\beta$ 之情形, z 點沿另一直綫自無窮遠之距離以至 O,在二值中間之 ψ 值,則沿二固定直綫中間之一直綫自無窮遠以至 O. 故在 z 面內之流綫乃在 α 角度內而相交於 O 點之諸直綫. 如將 ϕ 及 ψ 以 x 及 y 示之,則自(3.2.52)可得:

$$\left.\begin{aligned} \phi&=\frac{\beta}{\alpha}\log\sqrt{x^2+y^2}=\frac{\beta}{\alpha}\log\rho_0\\ \psi&=\frac{\beta}{\alpha}\tan^{-1}\frac{y}{x}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.53)$$

故是處之對數勢乃微分方程式(3.2.39)之一特解(參閱卷 I 第 1.3.19節). 常數 β 顯然與流之強度相當.

至以 r 及 θ 二量而論,則自(3.2.49)及(3.2.50)有:

$$r=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.54)$$

此與 r 爲速度之倒數及 θ 指反於流綫之方向之事實合.

3.2.7. 更有一普遍之問題,初未得其解,藉術形變換法乃得加以駕御,此問題爲何,即相當於"自由射綫[(1)]"之流體運動也. 所謂自由射綫者即非在定壁間而在自由空氣間流體之射流也. 此問題較爲困難,蓋流體所在區域之外限初非已知, 須先由標識自由射綫之表面條件以計得之. 蓋適合於自由射綫表面之邊界條件,不僅限於此表面必係爲流綫所組成之條件,且由作用與反作用原理,在自由射綫之表面, 流體之壓

(1)Free rays.

力 p 必常等於自由空氣之壓力 p_0——此謂其壓力不變也.

吾人如略去重力之影響不論,則由(3.2.5)可知在自由射綫表面流之速度其值不變.反之,凡速度不變之每一流綫即代表一自由射綫之邊界.有流綫焉,其一部分速度爲變遷者而另一部速度不變,則第一部代表沿一定壁之流而第二部代表此流以自由射綫而繼續,例如,流體自任何形狀之管中流出而入於空氣中之情形是.

故欲將一自由射綫在所論二維液流之特殊情形內表示之,則必須求得某種流綫,非僅其 ψ 不變且速變 $\frac{1}{r}$ 亦不變.此問題可以解答者也,蓋上文已示 $\psi=$常數諸綫乃指 w 平面內平行於 ϕ 軸之直綫,而 $r=$常數諸綫,則由(3.2.47)乃指 ζ 平面內以坐標原點爲心之諸同心圓弧.故吾人如能將 w 平面內由二平行直綫所成之一條片循形變換至 ζ 平面內之一有限區域,其部分之邊界爲 $r=$ 常數之圓弧,則自 w 及 $\zeta=\frac{dz}{dw}$ 間之函數關係可得 z 及 w 間特定之函數關係——此即條片自 w 平面至 z 平面之變換,在此變換中 z 平面內變換區域之某邊界綫兼有 $\psi=$常數及 $r=$ 常數之特徵.此諸綫即代表液體流動中自由射綫之表面者也.初以是處所述之方法以求組成自由射綫問題之確切答案者乃 Helmholtz.*

3.2.8. 茲復回至無旋運動一般情形之討論而冀於第 3.2.1 節中所述而未詳之問題有所新得,此即流綫之是否可有循環通路之問題也.在第3.2.1節中吾人已知如速度勢爲空間坐標之單值連續函數,則流綫之通路爲不可能.然以實際情形言,則無旋液流而具自通之流綫者固不難例舉也.如自(3.2.53)所代表之簡單液流出發,則前已重復言之 ϕ 及 ψ 二函數可互易其位,故可得流體運動爲:

$$\left.\begin{aligned}\phi&=-\frac{\beta}{\alpha}\tan^{-1}\frac{y}{x}\\ \psi&=-\frac{\beta}{\alpha}\log\sqrt{x^2+y^2}=-\frac{\beta}{\alpha}\log\rho_0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.55)$$

*H.v. Helmholtz, "Wissenschaftliche Abhandlungen," Leipzig (J. and A. Barth), Vol. 1. p. 146, 1882.

是處吾人所有者爲流體之一無旋定立流動，除含特異點 O 之任意小區域外，全 xy 平面盡爲此流動所洋溢；流綫 $\psi=$ 常數乃以特異點爲心之同心圓，等勢綫乃自 O 點出發之直綫．吾人如視任何二同心圓爲固定之壁則得一在圓形面中之液流．其速度成分爲：

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{y}{\rho_0{}^2}\\ v&=-\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{x}{\rho_0{}^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.56)$$

而速度之値爲：

$$q=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{1}{\rho_0}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.57)$$

然則轉動速度雖到處恆爲零，而流體則依一圓周運動而不變，吾人將又作何解？所須切記者，液體之轉動並不如剛體之轉動，當運動時有形變發生，蓋離轉動軸愈遠，其圓流之角速度愈小．明乎此，上述定律之表觀佯謬自迎刃而解．故圓流之角速度應與轉動之角速度細爲辨别，蓋前者與液體質點運行軌跡之曲率半徑相關，而後者與質點本身之轉動相關，與前者兩相無涉．然吾人亦未得謂因轉動速度之爲零故液體質點之運動必持續與其自身平行，一質點之轉動速度並非謂決定該點方位之角之時間導數也．若然則吾人當可自轉動速度之爲零而必有角度不變之推論．然以實際言，則凡任何時代表該質點膨脹主軸之諸直綫其方向不變，而該點中之其他一切直綫則固可轉動裕如也(第1.1.6節)．且因膨脹主軸係隨時變遷者，故當一有限時間過後，該質點實能爲一有限之轉動，而轉動速度則在任何瞬間固均爲零也．於此，讀者可參閱卷I第2.3.22節．

(3.2.55)式所代表之簡單之例當然亦得以其他在平面中及在空間中具流綫通路之無旋流體運動補充之，如通流於任何管內之流體是．

凡此種種情形吾人皆不得不加一結論曰：速度勢迄不能爲均勻而且連續者．(3.2.55)式中之 ϕ 卽一明例．吾人或假定 $\tan^{-1}$ 爲均勻者，

則卽非爲連續者，在某一點必有一特變，此點可任意選定；吾人或假定 $\tan^{-1}$ 爲連續者，則其必爲無限多値者．欲將此一函數行之計算，在多數情形以選取第一假定爲便，間斷點既定後所計得之結果卽一定．速度勢之多値式間斷性質對速度之大小及方向自毫無影響．

3.2.9. 然則流體無旋運動之性質主要與速度勢之是否爲均勻及連續相關．乃有一問題焉：是否可成立一普遍之準則，起始卽可藉以決定在流體之已知運動中速度勢是否必須爲均勻及連續者．欲解答此問題，則先須將方程式(3.2.1)之數學意義爲一更詳盡之檢討，此方程式示渦旋運動之不存在者也．設 q 乃一矢量，其成分 u, v, w 已知在某空間 R 內爲空間坐標 x, y, z 之均勻連續函數，可滿足(3.2.1)之三方程式．則下列定理當成立．如自 R 空間中任何一點 1 沿完全位於 R 內之任何曲綫 s 以至在同空間中之另一點 2 取積分：

$$J=\int_1^2 q_s \cdot ds \quad\cdots\cdots(3.2.58)$$

則凡積分路綫之任何無限小變遷，此積分之値不變．是定理可證明如下：

自：

$$q_s = u\frac{dx}{ds}+v\frac{dy}{ds}+w\frac{dz}{ds},$$

可得：

$$J=\int_1^2 (u\,dx+v\,dy+w\,dz) \quad\cdots\cdots(3.2.59)$$

故相當於曲綫 s 之一無限小變分，有：

$$\delta J=\int_1^2 (u\cdot\delta dx+\delta u\cdot dx+\cdots) \quad\cdots\cdots(3.2.60)$$

因 $\delta dx = d\delta x$，故分部積分而記取積分限持續不變之關係可得：

$$\begin{aligned}\int_1^2 u\cdot\delta dx &= -\int_1^2 du\cdot\delta x\\ &= -\int_1^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\right)\cdot\delta x.\end{aligned}$$

且：

$$\delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\delta z.$$

因之，如將此種種變換代入(3.2.60)，可得：

$$\delta J=\int_1^2\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cdot(\delta y dz-\delta z dy)+\cdots\cdots\cdots(3.2.61)$$

再由(3.2.1)得：

$$\delta J=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.62)$$

此即所欲證明者也.

J 之值對積分路綫之無限小變易之不變；非即謂於一切之可能積分路綫 J 之值均同也. 僅於吾人自一單獨之積分路綫出發經逐次無限小變易——即均勻變易——能得其他一切積分路綫時，此結論始成立. 可能與否須視矢量 q 所在之空間 R 之組織而定. 例如，若 R 之形狀爲一平行六面體或一橢圓球，則在 R 內某兩點間之一切曲綫皆可藉連續變分而互易之. 若此之空間謂之單連空間[1]. 故在單連空間中，積分 J 完全與積分路綫無關，全由二積分限決定之；因之 J 所代表之速度勢除其附加常數由下限所定外，其值唯一.

然若 R 爲一環形之空間有如一通流之管者，則欲藉連續變換將管中連結二點之順流曲線變換至連結該二點之逆流曲綫自爲不可能之事. 凡在某一空間中連結二點之線不能連續互易者，此空間謂之一多連空間[2]. 在多連空間中，連結某二點之諸綫可分成若干綫羣，每一綫羣，積分 J 之值各異.

上述單連空間與多連空間之區別亦得以他法示之，此方法有某種方便處. 二點間連二不同之綫，此二綫顯然可成一通路，如取第一綫爲去路則第二綫可作爲回路. 二綫之是否可以藉連續變分以互易即所以決定此通路之是否可藉連續收縮過程而縮成一單獨之點. 因之吾人可得一定理如下：一空間之爲單連或多連須視在此空間內之一切封閉綫

(1)Simply connected space.　(2)Multiply connected space.

之是否可連續縮為一單獨點而定．前者之情形如平行六面體及橢圓球是，環形管卽不然，蓋依一定向旨而通循此環之一封閉綫當連續收縮時將與管壁相遇，自不能更行收縮也．

欲將此觀點應用於吾人所討論之情形，則(3.2.58)中積分 J 於不同之二積分路綫是否同值之問題實等於在由二積分路綫所成之通路中此積分之値是否為零之問題．蓋通積分——積分於通路之積分——乃二單獨積分之代數和，二者所取之方向適相反．依據(3.2.62)所示之定理，積分路綫有任何連續收縮，通積分之値依然不變，而 1 與 2 二點在此過程中亦可位移．故如能繼續收縮至一單獨之點，此在單連之空間恆屬可能者，則積分路綫之長度，因之以及積分之値，至終極將成無限小；故卽如積分路綫任意延伸，此積分當仍為零，而某二點間一切 J 之値均相等，換言之，速度勢係單値者．

然在多連空間之情形卽不然．在積分通路之收縮過程中將遇障礙，故積分於若此一封閉曲綫之積分其値可不為零，然凡以連續變分由此曲線所得之一切其他封閉曲綫其値俱與之等．此示速度勢乃多値者，換言之，速度勢係具若干數之値者．

3.2.10. 欲免除由一量具多値而生之不便，吾人亦可藉某種任意設立限制之，以便將多連空間變換為單連空間，蓋吾人可在該空間若干點各插以障壁，插入障壁之條件須連空間二點之綫不通過障壁者，則二點間之連綫其可藉連續變換而互易者其可能之種類必變少，加入適當數之障壁，吾人可使此種可以互易之連綫僅餘一種，該空間乃成一單連空間．若一個障壁已具足，如在一環形管之情形，則該空間謂之一雙連空間；如必需 n 個障壁，則該空間謂之 $(n+1)$ 連空間．

多於雙連之空間，其例可在具多輻之輪中求之，一四輻之輪，需四障壁，障壁應通過輪邊二輻間之一點．此空間謂之五連空間．

由足夠數障壁之如是設立，多連空間乃成為單連空間，在該空間之一切封閉曲綫乃均可藉連續過程縮為一單獨之點而速度勢乃成單値

者.然得之於單值性者卽失之於連續性，蓋吾人如於無限相近而位於障壁兩邊之二點1及2尋求其速度勢之差值，則吾人必取(3.2.58)之積分，所取之積分路綫非無限短之連綫而爲僅屬可能之有限連綫，所得積分之值爲有限者，故所求之差值亦爲有限者——此示速度勢在障壁處有一特變．然因在此計算中所用之積分路綫代表一封閉曲綫，且依據(3.2.62)此積分之值對此曲線之任何連續變遷均不變，乃得一定理如下：**速度勢在間斷面之特變於該面上一切點均同，等於通過間斷面一封閉綫之積分(3.2.58)之值.**

凡此種種定理取第3.2.8節所論流體在平面環流之一例喻之最爲曉暢.是處流綫爲封閉者，速度勢乃多值者，該空間爲一雙連空間.在此情形，一封閉之流綫不能縮爲一單獨點，此蓋含特異點而不屬於流體體積內之一小區域實爲無限收縮之一阻礙．然若設想有一障壁置流體中自特異點以至無窮遠，或有二同心剛壁存在，此障壁連通二剛壁，則流體所在之空間成單連空間，速度勢爲單值而間斷者在間斷面之特變，面上各點均同，其值可自(3.2.58)積分於一封閉之流綫，得之甚易；故由(3.2.57)：

$$\int q\cdot ds=\frac{\beta}{\alpha}\cdot 2\pi,$$

此與速度勢 ϕ 之(3.2.55)式中$\tan^{-1}$之 2π 變遷合.

3.2.11.　在單連空間中，流綫不能回復至與自身相接，亦不能止於剛壁上.吾人乃得一推論曰：**在一各方均有剛壁爲界之單連空間中，不可壓縮流體之無旋運動完全爲不可能.** 此可藉(1.2.15)之恆等式實際證明之.蓋因有剛壁之存在，故此恆等式中之循面積分等於零，且因流體之不可壓縮性，故該式右邊之徹體積分亦等於零.然則 ϕ 恆爲不變者，此卽謂流體之恆爲靜止者也.然欲(1.2.15)之成立，其必要之條件爲速度勢之單值連續.否則積分：

$$\int_1^2\frac{\partial\phi}{\partial x}dx$$

之值將不爲用於(1.2.10)中之 $\phi_2-\phi_1$.

3.2.12. 最後吾人將討論不可壓縮流體之不定無旋運動一簡單之例,一如第 3.2.3 節所討論之情形,設有一上寬下狹之管,重流體自此射流,仍假定流管上層所受之壓力爲 p_0,其値不變,出口處之壓力保持爲 p. 然此際所欲討論者非定立之射流,吾人將問如 $t=0$ 時流體到處均屬靜止者,則此後之運動又若何?

至以運動微分方程式言,則 Laplace 方程式(3.2.6)及由此而生之諸方程式(3.2.7)至(3.2.12)亦得適用於不定運動,蓋此乃連續方程式(3.1.6)與不可壓縮一條件併合之結果也.然在另一方面,則(3.2.5)推廣爲:

$$p=-\frac{k}{2}(u^2+v^2+w^2)-kgz+k\frac{\partial\phi}{\partial t}\cdots\cdots\cdots(3.2.63)$$

以與(3.2.4)合.

除此外尙須加入管壁及二出口之邊界條件以及 $t=0$ 時之初態條件.

欲適合此一切條件可命:

$$\phi=T\cdot\phi'\cdots\cdots\cdots(3.2.64)$$

式中 T 乃一僅爲時間 t 之函數,然 ϕ' 則視作上文所論定立射流情形中速度勢之已知式,蓋如此 Laplace 方程式以及在剛壁之邊界條件均得適合.

在流綫之微分方程式(3.2.3)中,因數 T 完全消去;故無論何時流綫與定立射流中之情形同.所因時而變者僅流之速度.取(3.2.64)之導數直接可得:

$$q=T\cdot q'\cdots\cdots\cdots(3.2.65)$$

此示任何之點其速度與在該點之定立速度及時間因數 T 成比例.

茲如將流體上層諸量仍以下標0示之而關乎出口處諸量不用下標,且 f 與 f_0 較爲甚小而略去 f,則自(3.2.12),(3.2.63),(3.2.64)及

(3.2.65)可得：

$$\frac{dT}{dt}=\frac{q'^2}{2(\phi'_0-\phi')}\cdot(1-T^2)\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.66)$$

將此微分方程式積分之而將正常數簡書 α：

$$\frac{q'^2}{\phi'_0-\phi'}=\alpha,$$

且記取在 $t=0, T=0$，則得：

$$T=\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2.67)$$

此與(3.2.65)併示流體在任何時間 t 之射流速度．其值自 0 遞增以至(3.2.14)所示之定值．嚴格而言，欲達此定值係在無窮時間之後，以近似言，則速度愈大達之愈速．

第三章 渦旋運動

3.3.1. 試論一不可壓縮之流體充塞於一單連空間，此單連空間之各方有剛壁爲界，此外可任意爲如何大者．則自第3.2.11節可知若無渦旋存在，速度無論何時到處爲零，然如假定在某一時間某若干地點有渦旋存在——此謂在某一時間某若干地點轉動速度之値不爲零——則吾人可證明在此情形整個流體之速度，無論在渦旋內或外，於該時間並及其他一切時間可唯一決定者．

吾人將先證之於 t 之瞬間，以示在(1.1.59)中之轉動速度成分 ξ，η，ζ 並不可壓縮條件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (3.3.1)$$

到處可決定速度成份 u,v,w 同時之値．蓋不然速度成分必有其他之値，設爲 u',v',w'，亦得滿足此同一條件，則 $u'-u=u_0$，$v'-v=v_0$，$w'-w=w_0$ 視作速度成分將代表以剛壁爲界之同一單連空間內流體之一運動，此運動不僅滿足不可壓縮之條件，且爲無旋者，蓋 ξ_0，η_0，ζ_0 到處爲零也．若此之運動乃不可能者，因之 u_0,v_0 及 w_0 必全爲零．

因速度成分 u,v,w 之決定並不限於任何區域，故亦必可決定於渦旋管內，不僅此也，在渦旋管內，速度成分對 x,y,z 之空間導數及形變之速度成分亦得因以決定．故一渦旋管在 dt 時素歷程中所生之變遷，包括其轉動及形變乃完全決定；且因由(3.1.64)渦旋速度 ω 與渦旋管速度之乘積永持不變，故在 dt 時間內渦旋速度 ω 之變遷亦可決定，因之吾人得知其大小及方向，且及在 $t+dt$ 時間之轉動速度成分 ξ,η,ζ．然後應用同樣之理路於時間 $t+dt$ 一如在時間 t 之情形．如是轉輾開展可自每一瞬間推論至無限近之後一瞬間，整個流體之運動乃證明一切時間俱決定．

3.3.2. 上節所得結論既明，乃可進而實際計算相當於由 ξ,η,ζ 諸值所定之渦旋速度成分 u, v, w，吾人將假定所討論之流體在各方為無限伸展者．此問題相當於尋求三個連續函數 u,v,w，此三函數第一須滿足不可壓縮性之條件(3.3.1)，第二須適合 ξ,η,ζ 三已知值之三方程式(1.1.59)．

欲先滿足(3.3.1)之條件，昔：

$$u=\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z},\ v=\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x},\ w=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\cdots\cdots\cdots(3.3.2)$$

是處之 U,V,W 各代表某連續函數，其初級導數亦係連續者；此諸式恆適合(3.3.1)至明．U,V,W 三函數可再加以某種限制而不失其普遍性，蓋吾人如用 $U+\frac{\partial\psi}{\partial x}$ 以代 U，用 $V+\frac{\partial\psi}{\partial y}$ 以代 V，用 $W+\frac{\partial\psi}{\partial z}$ 以代 W，而 ψ 為一任意函數，則方程式(3.3.2)所示 u,v,w 之值曾無稍變，甚顯而易見也．是則函數 ψ 可任意選定而無礙於 u,v,w 之計算，吾人將取 ψ 以使：

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.3.3)$$

祇須所選 $\Delta\psi$ 之值適當，此常屬可能者．

既如此假定後，將(3.3.2)式代入方程式(1.1.59)中得：

$$2\xi=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)-\Delta U\cdots\cdots\cdots\cdots(3.3.4)$$

或由(3.3.3)：

$$\Delta U=-2\xi,\ \Delta V=-2\eta,\ \Delta W=-2\zeta\cdots\cdots\cdots\cdots(3.3.5)$$

此乃三個 Poisson 微分方程式(I·1.3.51)，由卷 I 第1.3.18節，其積分為：

$$U=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\xi' d\tau'}{r},V=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\eta' d\tau'}{r},W=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\zeta' d\tau'}{r}\cdots\cdots(3.3.6)$$

是處 r 指參照點 x,y,z 去流體中其他一點 x',y',z' 之距離，該流體中有渦旋速度 ξ',η',ζ' 存在者．積分當運算於流體內一切面素 $d\tau'$，然渦旋速度為零之一切面素當然可屏諸不論，以一完全無渦旋存在之

流體而言，則所得者仍爲第 3.2.11 節之結果.

如是所定之函數 U,V,W 實具(3.3.3)之性質，此可代入(3.3.6)式，依 x,y,z 以取其導數，再將所得之積分依據(1.2.13)分部積分而直接知之，同時並應用恆等式：

$$\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{\partial r}{\partial x'},\ \frac{\partial r}{\partial y}=-\frac{\partial r}{\partial y'},\ \frac{\partial r}{\partial z}=-\frac{\partial r}{\partial z'}\cdots\cdots\cdots(3.3.7)$$

以及(3.1.62)之關係.

如將已得之 U,V,W 諸式代入(3.3.2)，則可得流體內渦旋內外任意一點 x,y,z 之速度成分爲：

$$u=\frac{1}{2\pi}\int\left(\zeta'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-\eta'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\tau',\text{等等}\cdots\cdots(3.3.8)$$

或：

$$u=\frac{1}{2\pi}\int\left(\eta'\frac{z-z'}{r^3}-\zeta'\frac{y-y'}{r^3}\right)d\tau',\text{等等}\cdots\cdots(3.3.9)$$

或以矢量(卷 I 第 2.1.12 節)表之，爲：

$$q=\frac{1}{2\pi}\int\left[o',\frac{r}{r}\right]\frac{d\tau'}{r^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.3.10)$$

是處 q 乃在參照點之速度矢量，r 乃參照點自任何流體體素 $d\tau'$ 之距離，渦旋速度 o' 即於該體素上所生者，$\frac{r}{r}$ 乃單位長度之矢量，其方向自體素 $d\tau'$ 指向參照點.

欲明方程式(3.3.10)之意義，可記取依據此方程式，每一 $d\tau'$ 體積之渦旋素對流體在參照點之速度 q 各有所賦，所賦之量其大小及方向可表之如下：

$$\frac{1}{2\pi}\left[o',\frac{r}{r}\right]\frac{d\tau'}{r^2}=\delta q\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.3.11)$$

此示所賦之量與渦旋速度成正比例，與距離之平方成反比例，與渦旋軸及連綫 r 所成角之正弦成正比例，其方向與通過渦旋軸及連綫 r 二方向所成之平面垂直. $o', r', \delta q$ 三方向依所列之次序成一右手坐標系，換言之，δq 之運動係在離參照點最近之渦旋素諸質點當依渦旋軸轉動

時所具之方向發生，渦旋軸設爲靜止者．

因速度成分 u, v, w 已知爲 x, y, z 之函數，故流綫之微分方程式亦係 x, y, z 之函數，其式如下：

$$u:v:w=dx:dy:dz \qquad (3.3.12)$$

此與前見之方程式(3.2.3)有主要區別，一般而論，是處並無速度勢存在．

3.3.3. 試取一薄環形之渦旋管爲例．轉動速度之大小可假定其與環之截面之乘積，或渦旋管之矩爲具有限値者．則流體在環之左近之流動當然到處並無渦旋．凡在環平面中之流體質點均以垂直之方向向是處流動；凡位於環內之質點俱依內部質點轉動之向旨而流動，而環外一切質點則依渦旋環外部質點轉動之方向而流動．無渦旋之流綫以相當方向通過環之內部，然後折向外流而以對稱式佈散於無限空間之四方，正與“源偶”之情形同(第3.2.4節)，此散佈之流綫旣在環之平面內以相反方向通過環之外部，而自另一邊歸返後，卽互相趨近以入於環之內部 然則諸流綫均依其轉動方向環繞此渦旋管．在此過程中，流之速度不問渦旋內外到處爲連續者，在渦旋運動至無旋運動之變換中，流之速度亦係連續者．故在環之內部，凡流管較狹處之流速欲較流管開闊處爲大．相當於封閉之流綫，必有一多値或間斷之速度勢及無限變連之一流體空間．以實際情形言，若此之綫非可藉連續收縮而在無旋空間內化爲一點者．

渦旋環本身非在靜止狀態中者也，自必有特定之速度；自(3.3.11)所示之定律略加硏討卽可知此速度之方向係與環之平面垂直，其向旨與通過環心諸流綫之向旨同．

玆設在流體中有二如是之渦旋環存在，大小相等而互相平行．設連環心之綫與環之平面垂直，故在整個過程中此爲一對稱軸．則吾人當不難曉然於其所可發生之情形．第一，二渦旋環均以其自身移動速度沿對稱軸依通過渦旋環諸流綫之向旨而運動．然除此外，倘有某種相互作用

將發生於其間.蓋方程式(3.3.10)之成立,初與流體在參照點之運動爲無旋或否無關,故二環之一將爲他環所生之流綫曳以俱去,結果在前之第一環將開闊,其速度將漸次遞減,而在後之第二環將收狹,前進之速度逐漸遞增,最後追及第一環而越之以過.此後之過程適得其反,第二環仍開闊,速度遞減,而第一環收狹,最後二環大小仍相等,其距離又與開始時無異.整個歷程往返來復,二環互易其位以至無窮.

3.3.4. 吾人將取二維之情形更一論之,與第3.2.6節同.試假定流體之運動係與 xy 平面平行而祇與坐標 x 及 y 相關,則不可壓縮之條件(3.3.1)化爲:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

在(1.1.59)之三轉動成分中,ξ 及 η 均消失,所餘者僅爲:

$$\zeta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(3.3.13)$$

故由(3.3.5):

$$U=0,\quad V=0,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=-2\zeta\cdots\cdots\cdots\cdots(3.3.14)$$

再自(3.3.2)得:

$$u=\frac{\partial W}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial W}{\partial x}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.3.15)$$

然則渦旋綫及渦旋管恆與z軸平行,因渦旋綫及渦旋管之運動與xy平面平行,故每一渦旋管之長度並不因時間而變.然因渦旋管之質量不因時間而變,且由流體之不可壓縮性其體積亦不因時間而變,故每一渦旋管之截面其値並不因時間而變,因之由(3.2.61),其轉動速度 ζ 對時間言亦不變.

由(3.3.12)及(3.3.15),流綫系之方程式:

$$W=\text{常數}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.3.16)$$

可適用於渦旋內外.流綫係與 xy 平面平行,故流體是否沿 z 軸向兩方

延伸無窮，或吾人想像此流體係包圍於與 xy 平面平行之任意二剛壁間，與上列方程式所代表之任何運動無關也.

自(I·1.3.58)及(I·1.3.59)，二維之Poisson 方程式(3.3.14)可藉對數勢以積分之:

$$W_{xy}=-\frac{1}{\pi}\int\zeta'\cdot\log\rho\cdot d\sigma' \cdots\cdots\cdots\cdots (3.3.17)$$

是處之 $d\sigma'$ 係指一無限薄渦旋管之截面，ζ' 乃渦旋速度，ρ 為參照點之距離，積分當運算於一切渦旋管. 由此則藉(3.3.15)可得渦旋內外任何一點 x,y 速度成分之值:

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{1}{\pi}\int\zeta'\cdot\frac{y-y'}{\rho^2}d\sigma' \\ v&=\ \ \frac{1}{\pi}\int\zeta'\cdot\frac{x-x'}{\rho^2}d\sigma' \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots (3.3.17a)$$

此謂每一渦旋素 $d\sigma'$ 在參照點產生一速度，此速度與距離成反比例，其方向與轉動之方向同.

試取一單獨之無限薄渦旋管，設在坐標之原點. 則吾人可假定轉動速度至大以使 $\zeta'\cdot d\sigma'=\mu$ 之矩有一有限值. (3.3.17)中之積分乃縮為一單素而得:

$$W=-\frac{\mu}{\pi}\cdot\log\rho \cdots\cdots\cdots\cdots (3.3.18)$$

然則由(3.3.16)可知流綫乃諸同心之圓，而由(3.3.15)在渦旋外任何一點之速度成分為:

$$u=-\frac{\mu}{\pi}\frac{y}{\rho^2},\quad v=\frac{\mu}{\pi}\frac{x}{\rho^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (3.3.19)$$

除一不變之因數外，此方程式與前得之方程式(3.2.56)相同. 其惟一之區別，乃在前述情形，依同心圓無旋圓流之流體有圓柱形之剛壁為界，此剛壁係無關重要者，而此際則中心靜止之渦旋管之矩及外部流體之流動有因果關係.

如有此種渦旋管二個位於(x_1,y_1)及(x_2,y_2)二點，則由(3.3.17)

有:

$$W=-\frac{\mu_1}{\pi}\log\rho_1-\frac{\mu_2}{\pi}\log\rho_2 \cdots\cdots(3.3.20)$$

其速度(3.3.15)爲:

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{\mu_1}{\pi}\frac{y-y_1}{\rho_1{}^2}-\frac{\mu_2}{\pi}\frac{y-y_2}{\rho_2{}^2}\\ v&=\frac{\mu_1}{\pi}\frac{x-x_1}{\rho_1{}^2}+\frac{\mu_2}{\pi}\frac{x-x^2}{\rho_2{}^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3.3.21)$$

藉此諸方程式吾人可將整個無旋流體之速度態化至二渦旋管之即時位置.流綫爲:$W=$常數,而速度勢爲:

$$\phi=-\frac{\mu_1}{\pi}\tan^{-1}\frac{y-y_1}{x-x_1}-\frac{\mu_2}{\pi}\tan^{-1}\frac{y-y_2}{x-x_2}\cdots\cdots(3.3.21a)$$

相當於此式之多值性質,此無旋空間爲三連者.

至於渦旋管本身之運動——即坐標 x_1, y_1, x_2, y_2 對時間之變遷——亦可自(3.3.21)求得之.然須記取者有一事,渦旋管迄不能賦自身以前進之速度,吾人如實際計算內部所得之情形此乃事屬當然者也.在(3.3.21)中相當於渦旋管對自身作用之項可除去,吾人乃得:

$$u_1=\frac{dx_1}{dt}=-\frac{\mu_2}{\pi}\frac{y_1-y_2}{\rho_{12}{}^2},\quad v_1=\frac{dy_1}{dt}=\frac{\mu_2}{\pi}\frac{x_1-x_2}{\rho_{12}{}^2}\cdots(3.3.22)$$

$$u_2=\frac{dx_2}{dt}=-\frac{\mu_1}{\pi}\frac{y_2-y_1}{\rho_{12}{}^2},\quad v_2=\frac{dy_2}{dt}=\frac{\mu_1}{\pi}\frac{x_2-x_1}{\rho_{12}{}^2}\cdots(3.3.23)$$

自此諸方程式可得二渦旋管之運動狀況如下:因:

$$\mu_1u_1+\mu_2u_2=0 \quad 與 \quad \mu_1v_1+\mu_2v_2=0,$$

故坐標爲:

$$\frac{\mu_1x_1+\mu_2x_2}{\mu_1+\mu_2}=x_0,\quad \frac{\mu_1y_1+\mu_2y_2}{\mu_1+\mu_2}=y_0\cdots\cdots(3.3.24)$$

之點所謂二渦旋管之"重心"者恆持靜止.

且:

$$u_1(x_1-x_2)+v_1(y_1-y_2)=0,$$
$$u_2(x_1-x_2)+v_2(y_1-y_2)=0.$$

此示二渦旋管中每一渦旋管之運動係在垂直於二渦旋管連綫之方向發生.故二渦旋管間之距離及渦旋管去重心之距離均持續不變.二渦旋管以同一角速度依重心而轉動,如二者之轉動方向相同,則重心處二渦旋管間,如方向相反,則重心處二渦旋管外在矩較大之一邊.轉動之角速度爲:

$$\frac{\mu_1+\mu_2}{\pi\rho_{12}^2}$$

其向旨與二矩中之較大者同.

如二矩相等而相反,則重心遠離以至無窮,上述之轉動角速度變爲零,二渦旋管依據(3.3.22)及(3.3.23)以速度$\frac{\mu}{\pi\rho_{12}}$依通過二渦旋管之流綫之方向爲共同之移動,正如一單獨渦旋環之情形(第3.3.3節).實者是二"逆平行"渦旋管可視作合成一單獨渦旋環之成分,此渦旋環之形狀爲一無限長之矩形.在此特殊情形,流綫之位置可由(3.3.16)及(3.3.20)自下列方程式得之:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\text{常數}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.3.25)$$

然則流綫亦係對稱於二渦旋管連綫之諸圓,將二渦旋管間之距離爲諧和之分者.

3.3.5. 最後可討論一有限截面之圓渦旋管,半徑爲R,轉動速度ζ處處勻一且不因時間而變,則渦旋素$d\sigma'$之積分當取諸全圓面.流體中任何一點之速度成分,其式可自(3.3.17a)取積分得之,或由(3.3.17)計算以均勻面密度$\frac{\zeta}{\pi}$分佈於全圓一質量之對數勢W,此法自更爲便利.如命參照點去圓心之距離爲$\rho_0=\sqrt{x^2+y^2}$,則以內部一點($\rho_1<R$)言,由(I·1.3.64)可有:

$$W=\frac{\zeta}{2}(R^2-\rho_0^2)-\zeta R^2\log R\cdots\cdots\cdots\cdots(3.3.26)$$

而以外部一點($\rho_0>R$)言,則由(I·1.3.65)有:

$$W=-\zeta R^2\log\rho_0\cdots\cdots\cdots\cdots(3.3.27)$$

是則由(3.3.16)可知無論渦旋管內外，流綫均屬同心之圓 ρ_0＝常數．然在渦旋管外之無旋空間中，速度可自(3.3.15)及(3.3.27)以下式代表之：

$$u=-\zeta R^2\frac{y}{\rho_0{}^2},\quad v=\zeta R^2\frac{x}{\rho_0{}^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.3.28)$$

此仍與(3.3.19)完全相合；而於渦旋管內部則依據(3.3.26)速度為：

$$u=-\zeta y,\quad v=\zeta x\cdots\cdots\cdots\cdots(3.3.29)$$

故是處之流體以流動速度 ζ 而轉動，並無形變，如剛體然．可參閱(1.1.39)式．所值得注意者有一事：渦旋管之面為渦旋流體與無旋流體交界處，其速度為完全連續者，蓋(3.3.28)及(3.3.29)二式於 $\rho_0=R$ 時可互易也．此際速度之值最大，為 ζR，自此向兩邊遞減以至於零．

在無旋流體所據之外部空間，壓力 p 由(3.2.5)適合下列定律：

$$p=-\frac{k}{2}\zeta^2\frac{R^4}{\rho_0{}^2}+\text{常數}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.3.30)$$

而在渦旋內部則由(3.1.44)壓力適合另一定律：

$$p=\frac{k}{2}\zeta^2\rho^2+\text{常數}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.3.31)$$

依據作用與反作用原理，在邊界面上之壓力係連續者，故如某特定距離處——如無窮遠處——之壓力已知，則其值即處處決定．如命參照點自無窮遠漸次趨近渦旋，則壓力遞減，至中心處其值最小．

第四章 摩擦

上文關於流體動力學基本方程式之應用曾示如第3.1.3節所得之形式，此基本方程式實代表不少之流動運動種類，與實際符合．然在自然間亦有其他流體動力現象非可盡以此微分方程式統攝而無礙者．最顯著者如第3.2.5節所述之佯謬定理，依據此定理，一球體在靜止流體中運動並不受若何阻力．如欲將實際所遇之情形全盤統計，自不得不將該理論加以適當推廣．然則推廣之道又若何？

本卷第一篇中之運動方程式(1.2.17)及(1.2.18)係自普通力學原理所闡發，自無變動之餘地，故此諸方程式可保留之．在另一方面，欲圖對理論有所改進，則可記取當求得流體動力微分方程式(3.1.9)時，吾人僅採用"完全彈性"之假設——此謂吾人曾假設壓力僅與形變狀態相關(第2.1.1節)．如是乃得流體中六個壓力成分之簡單值(3.1.8a)．吾人茲將此假設推廣之，使物體素中之壓力不僅因形變狀態而異，且因該體素之速度情形而不同——此卽謂壓力可因速度成分 u,v,w 及其導數 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\cdots$ 而異也．吾人因書：

$$\left.\begin{array}{lll} X_x=p+X'_x, & Y_y=p+Y'_y, & Z_z=p+Z'_z \\ Y_z=Y'_z, & Z_x=Z'_x, & X_y=X'_y \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.4.1)$$

$$p=f(k)\cdots\cdots\cdots\cdots(3.4.2)$$

而假定所加之壓力成分 X'_x，Y'_y，……與相關之速度項有某種聯繫以推廣方程式(3.1.8a)．然對於物體體素內壓力有直接影響者，既非該體素之均勻移動速度，亦非均勻轉動速度，而僅為其形變有關之速度狀態甚明也．故在十二個速度成分(3.1.3)中，僅六個形變速度之成分 $x_x,x_y,\cdots$ 可入 $X'_x,X'_y\cdots$ 之式內．更有進者，吾人將假定此形變速度成分之見於 X'_x,X'_y……者僅可為平直關係，此於足夠微小之形變速度當然成立：吾人且假定此形變速度成分為齊次者，蓋由渺小形變速度所生之壓力為零也．茲命此新張量所生之壓力為流體之"摩擦

力[1]”，且特謂之“內摩擦力”或“黏滯力[2]”，以與“外摩擦力”別．外摩擦力者當流體滑動於與另一物質之接觸面上所生之摩擦力也，在設立邊界條件時應將外摩擦力統籌在內．

旣知黏滯力張量爲形變速度張量之齊線性函數，則卽可自普通方程式(1.2.17)及(1.2.18)再加(3.4.1)及(3.4.2)之關係而得下列之運動方程式：

$$\left.\begin{aligned}\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)k&=\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial X'_x}{\partial x}+\frac{\partial X'_y}{\partial y}+\frac{\partial X'_z}{\partial z}\\\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)k&=\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial Y'_x}{\partial x}+\frac{\partial Y'_y}{\partial y}+\frac{\partial Y'_z}{\partial z}\\\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)k&=\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial Z'_x}{\partial x}+\frac{\partial Z'_y}{\partial y}+\frac{\partial Z'_z}{\partial z}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3.4.3)$$

$$Y'_z=Z'_y,\quad Z'_x=X'_z,\quad X'_y=Y'_x\cdots\cdots(3.4.4)$$

欲決定 X'_x, X'_y,…與 x_x, x_y,…相依之關係，則除第 2.1.3 節所用以求固體中彈性壓力成分所用之方法外——卽能量不滅原理之應用——殊無更簡捷而更可靠之方法：然是處之能量不滅原理，非當以力學定律視之也，當視爲一種普遍物理原理．蓋摩擦力者非保守力也(卷 I 第 1.4.3 節)；諸凡在有摩擦力存在之過程中，必有某量機械能變換爲熱能．當無限小時距 dt 間在一無限小體素內由摩擦力所生之熱係與 dt 及 $d\tau$ 之量成比例：吾人乃立命之等於：

$$W\cdot dt\cdot d\tau\cdots\cdots(3.4.5)$$

W 當視作一有限量，且恆爲正．茲如依據第 2.1.3 節所述之方法進行，惟能量方程式(2.1.2)則代以：

$$d(L+U)+\int W\cdot dt\cdot d\tau=A\cdots\cdots(3.4.6)$$

彈性固體之運動方程式(1.2.17)及(1.2.18)，則代以黏滯流體之運動方程式(3.4.3)及(3.4.4)，最後吾人得下列關係以代(2.1.8)：

$$\int W\cdot d\tau\cdot dt+\int(X'_x x_x+X'_y x_y+\cdots)d\tau\cdot dt=0\cdots\cdots(3.4.7)$$

(1) Friction. (2) Viscosity.

自形式觀點言，讀者須知在第2.1.3節中，$u, v, w, x_x, x_y, \cdots$諸符號係指位置而言，而是處則指速度以與(3.1.3)符合，故在此處之命名法中如欲使此諸一切符號其所代表者與前 $du, dv, dw, dx_x, dx_y, \cdots$ 無二，則必各乘以因數 dt.

方程式(3.4.7)適合於任何體積中，初不論此體積之渺小為若何，故空間中任何一點可得：

$$X'_x x_x + Y'_y y_y + Z'_z z_z + Y'_z y_z + Z'_x z_x + X'_y x_y = -W \cdots\cdots(3.4.8)$$

吾人已知壓力成分為變數 $x_x, x_y, \cdots$ 之齊綫性函數，故W為此諸量之齊二次函數.然觀夫 W 之物理涵義與夫流體之各向同性性質，W 一量之常數不能與坐標系之選擇有關，由(2.1.30)可知 W 之最普遍形式為：

$$W = \rho(x_x + y_y + z_z)^2 + 2\kappa\left(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{y_z^2 + z_x^2 + x_y^2}{2}\right) \cdots(3.4.9)$$

是處之 ρ 與 κ 為二正量常數，乃該流體黏滯性之標識.

有此結果乃可得諸摩擦力成分之惟一表式.蓋形變速度之諸成分係各自獨立者，故自上列二方程式，可得摩擦壓力成分之值如下：

$$\left.\begin{aligned} X'_x &= -\rho(x_x + y_y + z_z) - 2\kappa x_x, \cdots \\ Y'_z &= -\kappa y_z, \cdots \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(3.4.10)$$

代入(3.4.1)及(3.4.3)可得總壓力之值及運動方程式.

凡此諸公式實已示 Stokes 之流體黏滯性理論在內.

以不可壓縮流體言，則方程式可簡化多多，此後將專以此立論，蓋體積膨脹之速度 $x_x + y_y + z_z = 0$，故由(3.4.1)及(3.4.10)：

$$\left.\begin{aligned} X_x &= p - 2\kappa x_x, & Y_y &= p - 2\kappa y_y, & Z_z &= p - 2\kappa z_z \\ Y_z &= -\kappa y_z, & Z_x &= -\kappa z_x, & X_y &= -\kappa x_y \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(3.4.11)$$

然則不可壓縮流體之黏滯性僅與一單獨之常數 κ 有關.

如欲將有黏滯性流體之運動定律完全寫出則邊界條件尚須設立.

如流體沿一固定之剛壁流動，則作用於面上之法線壓力並不須若何特殊條件之規定，蓋剛壁之阻力對於任何壓力均容受之.然若有黏滯存在，則必有某種條件應適合作用於流體面之切線壓力，在此條件中並應有流體沿剛壁滑動之速度在內. 設ν仍指流體面之內法線，而X_ν，Y_ν，Z_ν爲自外所加之壓力成分，則此壓力之切線成分於具完全彈性之流體自爲零，而於黏滯流體中，其方向與流之方向正相反，其大小可命之與速度q成比例爲便——即：

$$X_\nu\cos(\tau x)+Y_\nu\cos(\tau y)+Z_\nu\cos(\tau z)=-\lambda\cdot q \cdots\cdots(3.4.12)$$

是處τ指流之方向，λ爲某正量常數，與流體及剛壁所由組成之物質有關；λ謂之"外摩擦係數".

此演化方法兼含$\lambda=0$及$\lambda=\infty$二極端情形在內. 前者切線壓力隨外摩擦力以俱消；後者因切綫壓力無論如何持續爲有限者，故滑動速度$q=0$——此謂流體"附着"於固定壁也. 在是處所開發理論之結構中，內摩擦係數(黏滯係數)及外摩擦係數之數值僅能藉量度決定之.

3.4.2. 爲上述諸方程式之簡單示例計，茲先討論一不可壓縮之流體經一圓截面狹長柱形管中之流動.設管之兩端壓力已知，流體之重量略去不論.

取管軸爲z軸，開端之截面爲xy平面；在該截面設壓力爲p_0.如l爲管長而$z=l$爲末端截面，且如$p_l<p_0$，則流體依正z軸之方向流動，流綫與z軸平行，故：

$$u=0,\ v=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.4.13)$$

自定立狀態之條件及不可壓縮之條件(3.3.1)可得：

$$\frac{\partial w}{\partial t}=0, \text{ 及 } \frac{\partial w}{\partial z}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.4.14)$$

故自(3.4.11)可得下列壓力成分之值：

$$\left.\begin{array}{l} X_x=p, \qquad Y_y=p, \qquad Z_z=p \\ Y_z=-\kappa\dfrac{\partial w}{\partial y}, \quad Z_x=-\kappa\dfrac{\partial w}{\partial x}, \quad X_y=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots(3.4.15)$$

一切加速度成分均爲零,故運動方程式(1.2.17)成:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial p}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial p}{\partial y}=0\\&\kappa\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial z}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3.4.16)$$

p 僅與 z 相關,而由(3.4.14) w 僅與 x 及 y 相關,故僅於:

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\kappa\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=-c\cdots\cdots(3.4.17)$$

時,最後所示之關係方得成立,是處 c 乃壓力陡度,爲一正量常數,讀者如記取 $z=0$ 及 $z=l$ 處壓力已知之事實,c 之値自不難立得,即:

$$c=\frac{p_0-p_l}{l}=\frac{\Delta p}{l}\cdots\cdots(3.4.18)$$

欲自 (3.4.17) 求 w 爲 x 及 y 之函數,可採用極坐標 ρ 及 ϕ(I·1.4.13),由對稱之見地,可知 w 僅與 ρ 相關.吾人乃得:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{d^2 w}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dw}{d\rho}=-\frac{c}{\kappa}\cdots\cdots(3.4.19)$$

玆將此微分方程式爲一普遍之探討.命:

$$\rho\frac{dw}{d\rho}=w'\cdots\cdots(3.4.20)$$

則:

$$\frac{dw'}{d\rho}=\rho\frac{d^2 w}{d\rho^2}+\frac{dw}{d\rho},$$

故由(3.4.19):

$$\frac{1}{\rho}\frac{dw'}{d\rho}=-\frac{c}{\kappa}.$$

積分之得:

$$w'=-\frac{c}{\kappa}\frac{\rho^2}{2}+A,$$

加入(3.4.20)而再行積分得:

$$w=-\frac{c}{\kappa}\frac{\rho^2}{4}+A\log\rho+B\cdots\cdots(3.4.21)$$

二積分常數可藉邊界條件決定之.在 $\rho=0$ 之處，w 爲有限量，故：

$$A=0 \qquad (3.4.22)$$

命流體面上 $\rho=R$（管之半徑）.則在(3.4.12)中有：

$$\cos(\tau x)=0,\ \cos(\tau y)=0,\ \cos(\tau z)=1,$$

且因 ν 與 $-\rho$ 趂合，由(1.2.8)及(3.4.15)：

$$Z_\nu=\kappa\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{x}{\rho}+\kappa\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{y}{\rho}.$$

因之，由(3.4.12)於 $\rho=R$ 處有：

$$\frac{\kappa}{R}\left(x\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right)=-\lambda\cdot w \qquad (3.4.23)$$

是處由(3.4.21)及(3.4.22)吾人須立：

$$w_R=-\frac{c}{\kappa}\frac{R^2}{4}+B,$$

及：

$$\left(x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}\right)_R=\left(\rho\frac{dw}{d\rho}\right)_R=-\frac{c}{\kappa}\cdot\frac{R^2}{2}.$$

故邊界條件(3.4.23)成：

$$B=\frac{c}{\kappa}\cdot\frac{R^2}{4}+\frac{c}{\lambda}\cdot\frac{R}{2}.$$

自(3.4.21)俟常數 C 及 B 代入後可得流之速度之値如下，以爲本問題之答案：

$$w=\frac{\Delta p}{4\kappa l}\cdot\left(R^2-\rho^2+\frac{2\kappa}{\lambda}R\right) \qquad (3.4.24)$$

然則自管之中央以至管壁速度依次遞減，此則自然之理也，然欲速度處處具有限値，則不僅 κ 須不爲零，λ 亦當不爲零，其理易明.

爲實驗吾人所已關發之公式(3.4.24)計，最佳可量度在某特定時間 t 內流出流體之體積 V. 此可積分於該管之一截面得之，則：

$$V=\int_0^R\int_0^{2\pi} w\cdot t\cdot\rho d\rho d\phi,$$

故：

$$V=\frac{\pi}{8}\cdot\frac{\Delta p}{l}\cdot\frac{R^4}{\kappa}\left(1+\frac{4\kappa}{\lambda R}\right)\cdot t\cdots\cdots\cdots\cdots(3.4.25)$$

依據此式，射流定律主要與粘滯常數 κ 對外摩擦常數 λ 之比數相關.如此比數與管之半徑 R 較爲甚小，則流體流出之量與半徑之四次方成比例，而僅與粘滯性(內摩擦)相關.然如與 R 較爲甚大，則流出之量與半徑之立方成比例，僅與外摩擦相關．在不大不小之中間情形，則定律較複雜，蓋二摩擦係數之影響彼此重疊也.

Poiseuille 之實驗示：吾人實際所遇者常爲其第一情形，此實驗曾經後人證實，故在最後所示之方程式中，吾人可命 $\lambda=\infty$，或：

$$V=\frac{\pi}{8}\cdot\frac{\Delta p}{l}\cdot\frac{R^4}{\kappa}t\cdots\cdots\cdots\cdots(3.4.26)$$

依此以推，則自(3.4.24)更可知在管壁上 $\rho=R$，$w=0$，換言之，流體"附着"於管壁之物質上也.

雖然，經驗昭示吾人：Poiseuille 定律(3.4.26)僅適用於足夠狹小之管中.蓋如管之半徑 R 超出某臨界值，則是處所得對本問題之整個答案即全無物理意義可言.第一個假設(3.4.13)即不與實際符合，蓋流綫實際將不復與管軸平行，而將受所生渦旋之影響——此現象謂之"擾動[1]".依據比較近代之硏究，擾動之發生，並不與流體動力方程式有所抵觸，解釋之道乃在流體流動之方程式其解非一，是處所闡述者乃其最簡者耳，此代表一種穩定運動，在大自然間，僅於足夠狹小之管中可得實現.然擾動之正確理論在數學處理上有相當困難.

3.4.3. 藉所述之摩擦理論，吾人乃可將前所未可解答之問題(第3.2.5節)納御裕如：此即計算一球體在靜止流體中運動所受之阻力.設有一半徑爲 R 之球體以不變之速度 a 沿定向(z 軸)運動於一不可壓縮之靜止流體中，今問流體所加於該球體之總壓力爲何?吾人且假定該流體爲重流體，其密度爲 k.仍可應用相對性原理，在靜止流體中運動之球體，實相當於一靜止之球體，球心位於坐標之原點，置於一勻速之

(1)Turbulence.

流中——此謂置於流體之一定立流動中，該流體在去球體之距離爲無窮遠 $r=\infty$ 時其流動速度爲：

$$u=0,\ v=0,\ w=-a \cdots\cdots\cdots\cdots(3.4.27)$$

此乃邊界條件之一．其他之邊界條件已見於前一節中——即在球面 $r=R$ 處，流體附着於球體上，故：

$$u=0,\ v=0,\ w=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3.4.28)$$

自運動方程式(1.2.17)及壓力成分之值(3.4.11)並不可壓縮條件(3.3.1)，則決定 u,v,w 及 p 爲 x,y,z 之函數之微分方程式已俱．一般言之，運動方程式非一次者，蓋以加速度論，有：

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot u+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot v+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot w,\cdots\cdots(3.4.29)$$

欲使此問題簡化，吾人不得不再立一假定：設速度 u,v,w 俱屬微小，足使(3.4.29)右邊諸二次項可略去不論．則方程式(1.2.17)成：

$$\left(X-\frac{\partial u}{\partial t}\right)k-\frac{\partial X_x}{\partial x}-\frac{\partial X_y}{\partial y}-\frac{\partial X_z}{\partial z}=0,\cdots$$

如將諸壓力成分代以(3.4.11)式而再加入不可壓縮條件(3.3.1)則：

$$\left(X-\frac{\partial u}{\partial t}\right)k-\frac{\partial p}{\partial x}+\kappa\cdot\Delta u=0,\cdots\cdots\cdots(3.4.30)$$

且，因流動爲定立者，而 $X=0,\ Y=0,\ Z=-g$，故：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x}&=\kappa\cdot\Delta u\\ \frac{\partial p}{\partial y}&=\kappa\cdot\Delta v\\ \frac{\partial p}{\partial z}&=-kg+\kappa\cdot\Delta w\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.4.31)$$

自此三方程式可消去 p 而得：

$$\Delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0,\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0,\Delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0\cdots\cdots(3.4.32)$$

全問題乃分成二部：第一，吾人須自(3.3.1)及(3.4.32)利用邊界條件(3.4.27)及(3.4.28)以定速度成分 u,v,w；第二，吾人須自(3.4.31)以及作用於球體上之總作用以定壓力 p，所謂總作用者即諸壓力成

分之合力也.

以速度言,則由邊界條件可知是處不能有勢之存在甚明.故吾人依隨第 3.2.5 節諸方程式,稍稍加以推廣而立下列之假定:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial\phi}{\partial x}+u' \\ v &= -\frac{\partial\phi}{\partial y}+v' \\ w &= -\frac{\partial\phi}{\partial z}+w' \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(3.4.33)$$

$$\phi=a\cdot z+b\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}+c\cdot\frac{\partial r}{\partial z}\cdots\cdots(3.4.34)$$

是處 u',v',w' 代表三個性質比較簡單之函數, a,b,c 爲常數. 如 u', v', w' 之值在無窮遠處爲零,則邊界條件(3.4.27)滿足. 欲滿足不可壓縮條件(3.3.1),則必:

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=\Delta\phi\cdots\cdots(3.4.35)$$

然由(3.4.34):

$$\Delta\phi=c\cdot\Delta\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)=c\cdot\frac{\partial(\Delta r)}{\partial z},$$

且:

$$\Delta r=\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}\cdots\cdots(3.4.36)$$

故(3.4.35)成:

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=2c\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}.$$

欲適合此方程式可命:

$$u'=0,\quad v'=0,\quad w'=\frac{2c}{r},$$

故自(3.4.33)可得:

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{\partial\phi}{\partial x}\\ v&=-\frac{\partial\phi}{\partial y}\\ w&=-\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{2c}{r}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.4.37)$$

此諸式並適合其他一切條件．第一，方程式(3.4.32)極得適合甚明，所餘者有邊界條件(3.4.28)，命 $r=R$ 可得：

$$0=b\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial z}+c\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial z}=\frac{3bxz}{R^5}-\frac{cxz}{R^3},$$

$$0=b\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\partial z}+c\frac{\partial^2 r}{\partial y\partial z}=\frac{3byz}{R^5}-\frac{cyz}{R^3},$$

$$0=-a-b\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}-c\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}+\frac{2c}{R}$$

$$=-a-b\left(\frac{3z^2}{R^5}-\frac{1}{R^3}\right)+c\left(\frac{z^2}{R^3}+\frac{1}{R}\right)$$

因之：

$$b=\frac{aR^3}{4},\quad c=\frac{3}{4}Ra\cdots\cdots\cdots\cdots(3.4.38)$$

至此 u,v,w 已完全決定．

本問題之第二部爲壓力之計算，如應用已得之 u,v,w 諸值則方程式(3.4.31)積分後示：

$$p=-kgz-\kappa\cdot\Delta\phi+p_0,$$

是處 p_0 指液流之壓力，在 $z=0$ 平面中並不受球體之影響；將(3.4.34) ϕ 之式代入則得：

$$p=-kgz+2\kappa c\cdot\frac{z}{r^3}+p_0\cdots\cdots\cdots\cdots(3.4.39)$$

流動之流體所加於靜止球體之總壓力乃作用於內法綫爲 $\nu=-r$ 球體之諸面素上一切壓力之合力．此諸壓力可均化至其 z 成分甚明，故由(1.2.8)可得：

$$\int Z_\nu d\sigma=\int[Z_x\cos(\nu x)+Z_y\cos(\nu y)+Z_z\cos(\nu z)]d\sigma \cdots\cdots(3.4.40)$$

吾人茲欲將自(3.4.11)所得諸壓力成分之值代入此式中，然後積分之於全球面，最佳可用極坐標：$d\sigma=R^2\sin\theta d\theta d\phi$. 然直接計算，未免失之繁冗，自以用下列之方法爲簡.

在此情形，由(1.2.17)於流體之整個內部有：

$$kg+\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}=0.$$

蓋是處加速度$\frac{d^2z}{dt^2}$爲零，此已在方程式(3.4.29)知之矣.

茲如將此方程式積分於固定球體之面及任何半徑爲 $r>R$ 之同心球面間之空間，而利用(1.2.12)之關係，則可知(3.4.40)之積分運算於半徑爲 R 之球面實等於同一積分運算於另一球面，其半徑較 r 多一下列之項：

$$-kg(V_r-V_R) \cdots\cdots(3.4.41)$$

是處 V_r 及 V_R 乃二球體之體積. r 之選擇爲完全任意者；故吾人可假定其爲無窮大，如是諸式乃大爲簡化.

如 $r=\infty$，則由(3.4.37)及(3.4.34)有：

$$z_x=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{6cxz^2}{r^5},$$

$$z_y=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{6cyz^2}{r^5},$$

$$z_z=\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{cz}{r^3}\left(1-\frac{3z^2}{r^2}\right).$$

因之，由(3.4.11)而將(3.4.39)之關係加入在內，可得：

$$Z_x=\frac{6\kappa cxz^2}{r^5},\quad Z_y=\frac{6\kappa cyz^2}{r^5},$$

$$Z_z=p_0-kgz+\frac{6\kappa cz^3}{r^5}.$$

如將此諸值代入(3.4.40)式而積分於球面 r 之一切面素 $d\sigma=r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$，而球面之內法綫爲 $\nu=-r$，則得：

$$-8\pi\kappa c+kg\cdot V_r,$$

如再加以(3.4.41),則可得所求之球面上壓力之值爲:

$$kgV_R-8\pi\kappa c$$

或由(3.4.38):

$$kgV_R-6\pi\kappa Ra \cdots\cdots (3.4.42)$$

第一項相當於由球體排出之流體重量 G 所生之上擲(卷 I 第2.2.23節);第二項相當於摩擦阻力;其方向當然與流體流動之方向同.

如該球體具運動自由而重量爲 G_0,則欲使之續維靜止,其所需之力,其值爲:

$$F=G_0-G+6\pi\kappa Ra \cdots\cdots (3.4.43)$$

方向向上者取爲正.

同時此即爲使該球體以常速 $+a$ 在靜止流體中運動所須加於該球體上向上之力.反之,此 Stokes 公式示吾人以當一不變力 F 作用於一球體上該球體之不變速度 a 之值.例如,若球體以自身重量自由下落,則其速度爲:

$$a=-\frac{G_0-G}{6\pi\kappa R} \cdots\cdots (3.4.44)$$

——完——

附　錄

歲寒譯書記

袁　良

曷言乎歲寒譯書？謂當敵偽盛時，羈居孤島之少數科學家、企業家，能各秉歲寒之節，集於一堂，以從事於科學教材之編譯工作也．任其事者為楊寄凡等十君子，皆海內久負盛名學者；而擔任費用，使十君子得以安心工作者，則吳興章君榮初也．其最初發起以促成之者，余亦有片言之助焉．蓋余與章君訂交之始，實以此事為之津梁，雖事過境遷，而經過事實，亦頗有可紀者．

先是日寇入侵，自北而南，民國二十六年秋七七事變之後，繼以八一三之役，國軍西撤，海上遂成孤島．其不及與國軍同退以待戰局敉平之名流時彥，類皆不肯隨風而靡，甘為虎倀，坐是困阨窮愁，或至饔飧不給．余亦侷促斗室，捉襟見肘，困頓之情，正復不殊於諸君，歲月遷延，忽焉數載，三十三年仲冬，舊友唐君乃康忽來過存，雅意殷勤，並出銀行支票簿，囑余隨時支用，謂此款乃章君榮初以余前此出長滬市公安局薄負時譽，且知余服官數十年，仍一貧如洗，故託為轉致者．余雖心感其意，然以與章君初無一日之雅，堅不肯受．越日唐君又以電來，云章君欲謀一面，余欣然邀之，則見其神采奕奕，貌魁梧而語慷慨，意其人必豪俠好義者流，相與傾談至快．章君因復申前請，出五十萬元支票相餽，余力辭不獲，乃勉受之．至是余叩章君平生於君之友好，因得知其福利社會，賙恤鄉里事甚悉．余感佩之餘，遂於翌年春，偕唐君往訪章君，章君所以款之者甚厚，余即席獻芻見於章君，謂推君施濟之心，以扶翼諸名學者從事於學術工作，則其利必更溥，方今中國科學落後，非真國人之聰明才

智遜於他邦，患無大力者支持提倡，使能朝夕鑽研耳．覩世界各國對於科學家之鼓舞獎勵，政府與私人莫不唯力是視，故能日新月異，進於無疆；中國誠亦有倣而行之者，持以恆心，積以歲月，則中國之科學界，亦何遽讓歐美之獨步乎！章君深韙余言，並願力任其事．余遂邀黃君伯樵、楊君寄凡，與章君數度洽商進行綱要．楊君固精研電工科學之權威，以爲現在高中以上學校，所採科學教材多爲西文原本，學生以難於直接聽受，則多耗心力於西文之講習，故往往事倍而功半；不如分門別類，擇世界最新之科學名著，譯以明白顯易之國文，使讀者免攻究文字之勞，而得竭其全部心力於科學內容，則今後科學之研究，庶幾有進步之可期．余力贊其議，章君亦以爲然，遂由黃楊二君商請朱言鈞等諸君子分別擔任迻譯各門科學教材，凡十三閱月，至三十五年二月始克蕆事．此十餘月中，諸君子之生事一切，概由章君負責，每人月致米四石，其他服用稱是，計所費實極鉅大，然竟得於風雨危舟之中，困苦奮鬥，以成此艱鉅之工作，諸君子之處境良苦，諸君子之精神，實足爲學林矜式；而章君亦得覩其一部份宏願達成，此則余與章君所同告欣慰者，深望是項鉅製，次第殺青，公諸當世，俾教育當局採爲教材，則中國科學前途，或能由此梯進，煥異采於來日，以與世界各國爭一日之短長，未可知也．惟是始基雖建，光而大之，固宜有一永久機構，以賡續是項寶貴工作，仍不能不深切寄望於章君耳．茲將翻譯之教材暨主譯諸君子姓名，表列於後，並略述當日譯書梗概，以見我國非無堅苦卓絕之學者，要必有達理好義如章君輩爲之推輓，則相得斯益彰云．河山還我，建設伊始，學術研討，尤爲急務，良雖老固將拭目俟之．

科	目	藍本書名	編譯者	編譯人略歷
數	微積分	R. Courant: Differential-und Integral-rechnung	朱言鈞	德國哥廷根大學哲學博士
學	微分方程	L. Bieberbach: Theorie der Differentialgleichungen	沈　璿	日本東京帝國大學哲學博士
	力學	Grimsehl-Tomaschek: Lehrbuch der Physik, Mechanik	裘維裕	英國麻省理工大學電工碩士
物	熱學及聲學	Grimsehl-Tomaschek: Lehrbuch der Physik, Warmelehre-Akustik	許國保	德國柏林大學研究院研究員
	電學及磁學	Grimsehl-Tomaschek: Lehrbuch der Physik, Elektromagnetisches Feld	史鍾奇	德國特萊司登大學工學博士
	光學	Grimsehl-Tomaschek: Lehrbuch der Physik, Optik	蔡致理	法國巴黎大學國家科學博士
理	原子物理學	Grimsehl-Tomaschek: Lehrbuch der Physik, Atomphysik	王福山	德國來勃衣錫大學哲學博士
	理論力學	M. Planck: Vorlesungen über Theoretische Physik	陸學善	英國曼祈斯德大學哲學博士
		I. Allgemeine Mechanik		
學		II. Mechanik deformierbarer Körper		
	電學	Abraham Becker: Theorie der Elektrizitaet	楊肇燫	英國麻省理工大學電工博士
化	學	Hildebrand: Principle of Chemistry	曹惠群	英國伯明翰大學理學士
		Latimer Hildebrand: Reference Book of Chemistry		

民國三十八年七月發行
民國三十八年七月初版

大學用書 理論物理學導論 柔體力學（全一冊）

◎定價七元
（郵運匯費另加）

原著者　Max Planck
譯述者　陸學善
發行人　中華書局股份有限公司代表　李虞杰
印刷者　上海澳門路八九號　中華書局永寧印刷廠
發行處　各埠中華書局

（一四三六六）（海）

(14366)