

得算一教

俞子夷編著

正中書局印行

版權所有
翻印必究

中華民國三十三年五月初版
中華民國三十四年十一月滙一版

教 算 一 得

全一册 定價國幣二元五角。

(外埠酌加運費險費)

編 著 者 俞 子 夷

發 行 人 吳 秉 常

印 刷 所 正 中 書 局

發 行 所 正 中 書 局

(1259)

自序

我寫過幾本算術教法書，也編過幾種學生用的算術書。有人問我，那一種最好；我差不多給呆住了，不知怎樣回答才好。並非我不能自信，不肯負責。雖然有的書已經在審查時把我原意改了又改，若要說一句滑頭話，就是各書都有牠的好處，也不免都有牠的缺點。譬如大東印行的學算指導法，在我寫的當時，以為最不受拘束，最是言所欲言，最可以打中一般算術教法應用問題方面的缺點；並且書中所說，自以為是這方面最根本，最切要的解決途徑。但是嫻在那書初出版時恰在任教算術，因為學生不會自動解決應用問題，所以來問我有什麼方法補救。我請她看這本自己比較得意的新書，她讀完後問我說：“看到完，一絲一毫也找不着頭腦。”或者那書太偏重了理論，急於要找具體辦法的她，當然要大大的失望。我的意思却在找出問題的根本上；得了病源，處方是可以而且應當隨機應變的。

不久以後，嫻也參加了學生練習用書的編著。她公餘替親戚家孩子補習算術，首先用那書供自修，她首先說牠的好處。適合自動，適合個性，一步一步的進行，教者不必多說話，學者在

不知不覺中自然進步。其次是另一位學生的父親，特地和我當面談那書的妙用。我和嫻等幾位共同編著的人，大家都很有自滿，但是另一同事的女公子，都痛恨那套長篇累牘的練習書，連我的姓名也會使她聽到便要頭痛。當然，叫聰明人拋棄了捷徑，走過遠的路，更容易感到痛苦。同是一本書，用法不同，用者不同，結果與批評也就各各不同。拿一般做對象寫書，的確不能盡如人意。

這一本小冊子的產生，完全是一個學算術最困難的學生的實地指導。這是一個特別的例子，完全是事實，絲毫沒有什麼主張和理論等空泛的資料。但是一件一件的事實，卻件件可以證實了我所信的理論。不但算術教法中得到好多極名貴的例證，就是教育上的普通原理，也有好多極明顯的證據。大家說這孩子不容易教，但是我始終沒有用多少方法上的技巧。當然，我並不馬虎，每天在補習完後，總細細的思索一番，然後再準備下一天用的教材。僻居鄉下，交通不便，沒方法買一套大東出版的練習用書來應用，連我自己寫的幾本算術教法書手邊也不全備。經過非常的良好，他自己也很明白的自覺進步。一個暑假的補習，勉強能把他把不知怎樣脫落的約一年半光景的一個大缺漏，草草的填平了。我們並沒有跑馬。到開了學以後，依然還是做乘除法。但是他能和別人同樣的學習五年級下學期的教材書，並不發生重大的困難。因此，我又找出一個新的線索。

瀾擔任三四年級的算術，教材的程度，恰和我補習時用的差不多。我介紹給她，於是為特定學生用的教材，便普遍地一般的推行到班級中去了。要是班中有聰明過了分的學生，或者也會得痛恨到我的姓名呢。我想，被聰明人痛恨是不十分要緊的。聰明人可以自學，本不必多化教師的勞苦。只要不聰明的學生歡迎我，因為我以為他們需要教師最多的幫助。這樣，瀾也變成功一位和我一樣的笨教師了。最聰明的教師自有他的妙法——最妙的，是在考卷上批零分，在報告單上寫“留級。”讓我們一羣笨伯，笨教師和笨學生們來用這一批笨教材和笨方法吧！瀾是繼我後的第一位笨人，我應當把這笨書贈給她。這也可以算是我們共同避難鄉村時共同工作的一個紀念。

我的那位補習的高足，我在這裏特地謝謝他。他從我這裏學會一些計算的技能，我從他那裏又得到了好多經驗。

27年雙十節俞子夷在峽谷。

目 次

1. 一個普通的孩子	1
2. 學期考試的前夜	4
3. 吃了一驚又一驚	7
4. 九九表	11
5. 再來一種過渡的方法	16
6. 自信和努力	19
7. 加法	22
8. 珠算加法	25
9. 乘法	29
10. 動作經過的學習	33
11. 錯誤的訂正	36
12. 一加一等於二	39
13. 簡除法	43
14. 教學相長	46
15. 長除法	53

1. 一個普通的孩子

他是個普通的男孩子，這是我最初的印象。天天有見面的機會，有時可以看到他較長時期和同伴遊戲，從初見到開始教他算學，經過七個多月，我仍以爲他是個普通的男孩子。他年齡是十二歲；在小學裏，是五年級下學期，以前沒有留級過。不過，他的成績，據他家裏的人說是很不好的。家裏人對他的印象，好像特別壞。不談他便罷，一談他便有好多壞的評語，很現成的送到耳朵裏來。有時大家不小心，當了他的面，這樣的評論他。他不高興起來，會得表示一種憤怒的樣子，或者把門砰的一聲關上，自己跑了開來，或者走開去和別的孩子頑皮。這就給評論的人一個實在的證據，說“你們看！這就是他的脾氣。”的確，受到了當衆奚落的恥辱時，他這樣的發脾氣。我以爲這仍不能逃出普通孩子應有的反應以外。懦弱的女孩子，逢到這種情景的奚落，或者要跑到媽媽懷裏去大哭一場。要是不惱，也不會哭的，才是特殊的孩子。

他是幼子，母親心裏愛他，但是他的行爲有時表現得太粗暴了，往往使幼弱的同伴哭了起來，眼看這樣的頑皮，也沒有方

法辯護，說他的脾氣好。父親好像是不愛他的。他的一舉一動，在父親面前常常受到阻止，或者斥責。我的確看他的行為，但是仍以為這是普通男孩子應有的正常反應。他發育的很好，身高和平常十五六歲的孩子差不多。他的體力很不小，能做農夫們的一切工作，像管牛，種田，挑擔，割草等。他有力，他好動。動才可以使用他的力。強迫他文縷縷的做書生模樣，恐怕只有用麻醉性的鴉片，先使他身體衰弱到無力活動，才能得達到成功。他時受阻止和斥責，或者不會得分別那一種行為應做，那一種不應做。背了阻止斥責的人去發揮他的力，便成功了頑皮。這不能算是反常。就是他不會得分別行為的好壞，也不過是因為大家對他只是說“不要，”“不應，”從來沒有承認過他的行為是好的，對的。在這樣環境中教育，怎樣使他會得分別好壞？

他怕上學；但是並沒有到逃學的程度。春季初開學時，我常常到他的教室裏去，在他不見到的背後，看到他很注意的抄寫。有時，的確看到他在應上課時不進教室裏去，在外面玩。他好玩；他怕看書的確是事實。評論他的人說他沒恆心，我也這樣想。換句話說，就是他對於我們學校裏的功課，不容易感到興趣。有時偶然高興做功課，但是興味不能保持得長久，注意很容易中斷或分散。但是他做別的用力的農作時，卻沒有這等情形發生。他拔了好多草，天天拿出去晒。晚上很仔細地收回來放好，直到賣給父親做牛的飼料止。連續好幾天的注意和努力，自

發的，絲毫沒有人督促，維持得很久。不過他捉到了一頭八哥，卻只有開始幾天裏肯料理，以後便好像忘記了。這也是很普通的。有時很能注意，很努力，有時很容易分心，要看事物的對象而定。普通孩子都是這樣；我們自己也是這樣。

他的教師說他應做的功課不做，天熱時坐在教室裏打瞌睡；不應做的事他卻爭先恐後的做。這是很確切的事實，也就是給我的一個證明。他並不是一切都不肯做，完全不會得把注意持續，絕對不肯努力。他所努力的，注意的，恐怕是要足以使用他相當的力。叫他靜坐，叫他文縷縷的弄書本，或者因為不能發揮他的力，或者因為他還沒有找到內中的興味，所以他不耐煩。叫聰明的學生做迂遠的練習書要痛恨，叫普通的孩子讀學問的、殭屍、教科書，要不耐煩，道理是一樣的。實在肯做的普通孩子，就全民族的生存說，需要或者更大些。幼時背熟了學問的殭屍，成年以後拿來用作說空話寫文章出風頭的資料，這等人全國只要有了幾個已經儘夠的了。用普及教育的方法使個個孩子都成功這等人材(?)，將來不是田都要荒了，廠都要關了。我找到他的特點，我告訴他家中人，說他的特點是在“肯做。”大家有些懷疑；或者疑我太客氣，或者疑我近似幽默。就是說不會“讀書，”只配“做”種田人。我是說老實話只有會做的人，才能建設中國。肯做的普通孩子，將來就是努力實做建國工作的普通老百姓。這不是最名貴的特點！

2. 學期考試的前夜

暑假前學期考試的日子，校裏已經公布，在考試算學的前一夜，他也知道急來抱佛腳，自己拿了教科書溫習，懂得算學的幾位，臨時做他的教師，一本 64 頁厚的教科書，有筆算也有珠算，打開目錄一看，有 24 個大標題，除去復習總復習三個標題外，實足有 21 種不同的方法，概括了說：有小數四則，整數性質，分數四則，百分，折扣，簡利息等六大類，問他那一類最不明白，他回答不出，大概，各類都沒有多少真正明白的，一夜功夫，那裏來得及溫習如許材料？幫他溫習的人，依照平常的慣例，打開書本，叫他做小數四則，第一關就通不過；加法的答數不對，減法的答數也不對，乘法弄不清，除法簡直不知道怎樣做法，弄到深夜，教的人，學的人，在暗淡的燈光下都覺得沈沈欲睡，結果，只教了些小數加減乘三個方法中最主要的一點，就是答數裏小數點的地位，除法是來不及的了，分數，百分，折扣，簡利息，還有珠算的多位乘除，更不必說，次早考後問他，他說考題中小數加減乘三法的題目沒有幾個，另外都做不出。

這 21 單元的教材，教師是一一教到的，希望學生一一都明白，一一都做得很熟，學期考試的題目，當然個個單元要出到，小數加減乘三法，在書裏只算兩個單元，平均計算，他勉強會做的，只有全書二十一分之二；就是當作三個單元論，也不過占全

體的七分之一，所以他會做的題目個個做正，按照一般教師批分的方式，七分之一只有十四分罷了。在別的學生當然也不能個個單元都做得純熟，有的人這幾單元不熟，有的人另外的幾單元有些糊塗。教師所盼望的，只要每個學生，能在 21 單元中會做 13 單元，便可以得到 60 分及格，升級。究竟那幾單元不熟，那幾單元糊塗，那彷彿是學生的事。教師在教的鐘點裏教過以後，好像已經完成了一切責任。他為什麼會弄到差不多全體都不明白？這是誰的責任和過失！完全是教師的嗎？這未免太偏責教師了。完全是學生嗎？當然也不能獨怪學生。各人負一半呢？似乎公允了。但是我以為教師負的責任應當多些；籠統的說，教師負十之六七，學生負十之三四。我的理由是：教師是成人，學生是孩子，教師應懂得教法，應會得幫助學生，領導學生。要是我有評批教師的責任時，能教好最不好的學生者應當 100 分；教得學生只有 14 分的教師，至多給 40 分，應當受些懲罰。教師的責任不在叫賣完結退出教室時終了。學生的成績，實在就是教師的成績。最好用學生的進步，來作衡量教師的標準。這或者太理想化了，但是我現在很起勁的寫這書，追記我教這孩子的經過。說一句老實話，我的確很得意，自己以為至少限度，我這一回的成績，應當得到 60 分或 70 分。他一天一天的進步，我心上的愉快，有時比他自己要大得多。要是不使學生自覺，他自己的進步往往不容易自己認識。

一個學期至多不過二十星期，平均每一單元，只有一個星期的學習，在五天中學會一種計算方法，似乎是走馬看花，來不及熟習。或者教師希望學生個個單元學會，結果是個個單元弄得半生不熟，這是一個很值得考慮的問題。要是我們把教材，分別緩急輕重，決定每學期裏要學生熟習的計算方法，只限三四種或五六種，另外當作常識看，使大家知道一些概略做將來進一步學習的準備，那末練習可以集中在少數基本技能上，成績或者可以比現在好許多。俗語說的“貪多嚼不爛”正是現在教材的通病；算學教材尤其顯得明確，課程標準中規定的材料已經比舊時減輕了好多，但是要6年內學完如許材料，件件都能純熟是不容易的；尤其是普通的，或比普通能力稍遜的學生，有若干材料，好像可以留給初中裏用的，同是一句抽象的話，各人的見解可以有種種深淺的不同。例如第五學年下學期有“分數的初步練習”一句，在起草整理時的意思，不過是用實在事物，做些16的 $\frac{1}{4}=4$ ， $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}=1$ ， $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ 等，給學生一個極淺易的準備罷了。現在呢？教科書的編者和審查者把“初步”一詞用顯微鏡放大了五百倍，有下列的7個單元，占全學期的三分之二。

“整數的性質10頁，分數的意義和化法3頁，約分1頁，同母分數加減法4頁，通分1頁，異母分數加減法4頁，乘除法4頁。”論單元數占三分之一，頁數占百分之43多些。整數的性

質，約數有3頁，而且把因數2, 3, 5, 7, 11的求法用下例的詞句一一列舉出來。“因數7整數遞減末位數的21倍，去掉餘數的末位0，他的結果是0或7的倍數，那末這數裏面必有因數7。”

天呀！我的這位補習的高足，學到這裏，叫他怎樣弄得明白？我不知道這一段詞句，初中的學生有多少人能完全明白！這算是“分數初步”練習的準備？那末進一步的，該是什麼？在起草課程標準時，落筆寫“分數的初步練習”一句時，誰料到會得鬧出這樣的悲劇來呢？要是預料到這樣使十一二歲的小朋友受罪，我早在整理時用筆把這一句塗抹去了。罪過，罪過！我在此懺悔。但是翻完全書，小數加法的練習題，卻沒有超過六個連加的，這又似乎太省便了。難怪有一種不正確的評論說，“筆算不及珠算有用。”多位連加法練得不熟，的確不夠應付日用的計算，該多練的不練，這缺點更來得嚴重。

3. 吃了一驚又一驚

學期考試的結果，他當然不會得及格。這是大家意料得到的。教師這樣料他，父親這樣料他，周圍的人也這樣料他，我不在例外。他自己也很知道算學決不及格，不及格或者留級，原在意料中，決沒有什麼驚奇。報告單發出來時，大家要爭來看。我猜各人的心理無非是要決一決是否料中。料得中，料得中，好像是一種可傲人的勝利，這也不好說是什麼惡意。假定要算是惡

意，也不過是一種普遍的，原始的動物心理罷了，除非別有存心，要想借這等機會來離間他們父子間的感情，這或者是不會得有的。我起初也並不驚奇，我的估計，大約算學分數有 20 到 40 分，雖則照前節推算，他只有 14 分的希望，但是平時分數，臨時考試分數，一起平均起來，總要比 14 分多一倍左右。那知道報告單上寫的是 1.09 分？這一驚非同小可！我險些兒說“教師點錯小數點，”無論如何 10.9 分，總是應該有的吧！我太粗心了，還有一項百分比，算學占全體 16%，寫得很明白，這是很容易的，只須做一個除法， $1.09 \div 19$ 答數是 6.8，這便是他一學期來學算的總賬。百分之 6.8，怪事！平時教師在做什麼？第一次臨時考的分數有多少？要是第一次考的成績很壞，教師又做什麼？我所驚奇的不是 6.8 太少，卻是負教導責任的教師真好耐性，學生成績沒有進步，竟緘默到一個學期才披露出來，爲什麼不早想挽救的方法？或者我錯怪了，教師的確想盡方法，無奈他實在不肯用功。但是，從我這幾個月來和他相處的經驗，覺得不必多用什麼特殊的方法，究竟教師有沒有用過一些方法早謀補救，還是教師用的方法不合，此刻無從知道。總之，不想方法挽救，是教師的過失，用了方法不合，是教師的失敗。兩者必居其一，教師這學期教算的成績，雖不止 6.8 分，但至多也不能超過 40 分，這是我給教師的一個評定。

既往不咎，過失或失敗，都已成功了過去。以後的事，比已

往更重要，我決心幫他補習。揀了一個好日子，擬了一分題目開始做第一次的診斷測驗，前半部是整數的四則，如下例：

加			減		
5482	925	26	35791	70503	32641
1234	185	58	<u>24608</u>	<u>39984</u>	<u>28577</u>
8967	647	47			
<u>3678</u>	654	39			
	<u>378</u>	88			
		95			
		<u>62</u>			

乘			除	
335	625	79		
<u>428</u>	<u>27</u>	<u>360</u>	37 <u>143819</u>	125 <u>18260</u>

第一天先做這一半，因為校裏有事，托一個中學生代我監看，結果是又使我吃了一驚！加法錯了，原因是進位不對，減法也錯了，原因是退位不對，乘法是九九不熟，所以也錯，第一個除法教了才做出，第二個除法完全不會做。這一驚使我把後半部的測驗材料不敢拿出來給他做了。後半部如下例：原定第二天做，是小數的四則，比教科書上的題目要簡便得多。

$3.5 + 35 + 0.35 + 0.035$	$320 - 32.32 - 3.232$
$2.41 + 24.1 + 41.2 + 412 + 0.421$	$10 - 0.875 - 8.765$
$76.32 - 4.57$	36×2.7
$860.9 - 6.795$	4.82×150

$$826 \div 12.5$$

$$82.6 \div 12.5$$

$$8.26 \div 12.5$$

$$8.26 \div 1.25$$

$$82.6 \div .25$$

$$82.6 \div 0.125$$

$$0.826 \div 0.125$$

$$826 \div 0.125$$

我的預料也失敗了。我料的是小數四則不很熟，或者小數點的地位弄不清。除數是小數的除法，有時使學生弄得頭昏眼花。我料第一天做前半部，或者多個的連加法要發生問題，因為這是平常疏忽不多練的，雖是牠的用處最廣。減法的退位，我恐怕被減數 0 位多時容易發生困難，以外應當不生什麼問題。第二天的後半部，我特別注重在小數除法。我預擬從小數除法入手，這是拿學期考試前一夜溫習時見到的情形做根據的。照第一天診查的情形看來，整數乘除法還有問題，我只得向後倒退，取消後半部的測驗，試從乘除法開始。

想一面練習，一面測驗，把乘除法分作幾步，每天做一步。做得不錯，給他通過；做錯了，便繼續練習。不求速成。反正已經決定留級。開學時當然重新要從小數學起。我希望化一個暑假的時期，把乘除法練得純熟。這樣，恰能和開學時的小數銜接。第二天做的題目太容易了，是 $8 \times 9 + 7$ 等乘九九帶上一個一位數的加法，和 $8 \overline{)79}$ 等除不盡的除九九。兩種各 15 題，預定 30 鐘做完，每分鐘做一題。前一種心算直接寫答如 $8 \times 9 + 7 = 79$ ，後一種做演算的形式如左。

$$\begin{array}{r} 9 \\ 8 \overline{)79} \\ \underline{72} \\ 7 \end{array}$$

第二天親自看他做，又使我吃了一驚！乘九九，除九九都不熟悉，會得有 $5 \times 9 = 5$ 等等的口訣念出來的，不只是一二個，有好多，我想了再想，想不出他會得在五年級學到下學期的理由來。論理這樣的情形，在三年級末已經不很容易懂得；到四年級一定不能學業，二三年來的幾位教師，可惜都不在這裏，要是集合起來彼此討論討論，一定更可以增加我的見聞不少呢。我幻想我和朋友閒談及；朋友同意我的幻想，這或者是鄉村，內地普通的實情也難說；這裏不再多說，因為距離我們的本題一教算，太遠了。

4. 九九表

九九不熟，是一個根本中又根本的問題，應當第一步便從這一個難關下手。天天和他念九九的口訣吧，未免太枯燥了，或者反而使他不耐煩，還是叫他做淺易些的乘除法，花樣可以多些。同時在應用中練習九九，效果或者比單單口念口背來得好些。不過他九九不熟，做起乘除法來，勢必常常錯誤，因此使他不高興，要解決這困難，總逃不了要用一個過渡的方法，先試一試用表看，表的形式如下，這是第一天補習時，因為發現了九九

	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	4	6	8	10	12	14	16	18	2
3	6	9	12	15	18	21	24	27	3
4	8	12	16	20	24	28	32	36	4
5	10	15	20	25	30	35	40	45	5
6	12	18	24	30	36	42	48	54	6
7	14	21	28	35	42	49	56	63	7
8	16	24	32	40	48	56	64	72	8
9	18	27	36	45	54	63	72	81	9
	2	3	4	5	6	7	8	9	

不熟，臨時做起來的，起初他不會得看表。教了二三回，他勉強能夠自己查了。有時還要用一條白紙做直尺，免得和隣近的一行或一排看混。

用表的經過，有這樣的紀錄：

7月15日，開始補習，做乘法，除法，教九九表的查法。用表查。

7月16日，做乘法除法，用表查。

7月17日，同上一天。

7月18日,同上一天。做完後,另外用紙片寫 $\frac{9}{4}$ $\frac{4}{7}$ 等九九
抽練二三遍。叫他口答,只有 6×6 , 5×9 是錯的 另外都不錯。

7月19日,同上一天。做乘法時,有幾個題目,他自己不用
表查,便做了出來。除法是完全用表查的。

7月20日,做乘法除法,情形和上一天彷彿。

7月21日,做除法,有一部分,他自己也不查表,可以做出。

7月22日,做乘法,除法。除法有的不查表,但容易錯。

7月23日,同上一天。

7月24日,同上一天。乘法不查表,錯很少,又發現 4×8 容
易錯。

7月25日,26日,27日三天的情形和24日差不多。

7月28日,用 $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{9}$ 等形式測驗全部九九,錯的是 $\frac{7}{7}$ $\frac{8}{8}$

$\frac{7}{6}$ $\frac{9}{5}$ 四個,另外全對。

7月29日,做乘法除法。乘不用表,除一部分用表。

7月30日,除法未做。 $\frac{42}{6}$ 等乘法不用表, $\frac{527}{8}$ 等一部分
用表。

7月31日,做乘法除法。完全不用表。從此不再用表, 6×7 ,
 5×9 , 4×8 三個特別多練習,例如用 $\frac{555}{9}$ $\frac{747}{6}$ 等算式。

這16天的紀錄,給我一種教訓,就是做教師的不能怕麻

煩；教育不是一勞永逸的，是繼續不斷的。用表彷彿幼孩計算時的用手指，原是過渡中的一種工具。口念口背九九訣，對於做乘除法的幫助並不大。做乘法時，幫助還有些，做除法時，除 $6 \overline{)36}$ 、 $7 \overline{)56}$ 等以外，可以說九九口訣的背熟，效力很微薄。但是除法是除不絕的占多數。就是除得絕像 $7 \overline{)301}$ 等第一步 $7 \overline{)30}$ 已經不是 $4 \times 7 = 28$ 所能直接解決。用表查，多做 $7 \overline{)30}$ 等，除不絕的題目，的確可以養成他一種做除法的基本能力。這是這 16 天裏得到的，很可寶貴的教訓。

只有 7 月 28 日的一天，叫他不用表做；另外，在 7 月 31 日以前，始終沒有禁止他用表，但是他自己常常喜歡拋開表不用。用表，不是背，是抄。但是查看也有相當的麻煩。抄到相當次數以後，抄熟了能默寫，當然不再高興化許多麻煩去查看。這是從抄到能默寫，從此 $\frac{7}{8}$ 成功了一個整個的習慣。憑空想，我們不

56

免要耽心，恐怕用了表或用手指後，將使他依賴成性，始終脫不了這等過渡的工具。事實已經給我確切的證明。我們不必杞憂，孩子有貪圖省便的趨向，這等累贅的工具他自會得漸漸拋棄。孩子有個別差異，有的很靈敏，自始就不必用表用手。這等孩子當然不必再教他用。普通的孩子，開始或者須用這等工具做一個過渡，因為不如是，他的學習不容易成功。先使麻煩而成功，比了省便而失敗，要好些。後來經過練習使純熟，再到省便而成

功。這是教普通孩子應當用的過程。16天的日子並不多，能使他從一向省便而失敗，經過麻煩而成功，最後到省便而成功。其實，省便而失敗是浪費的；因為失敗不是我們教育的目標。所以凡是要使學生失敗的，我們一律應當摒棄不用。或者有極少數孩子始終脫不了這等麻煩的工具，那末也只好聽他永久或長期的使用。理由仍舊是麻煩而成功，比省便而失敗有用。不許用表；始終錯誤，有什麼用？但是這等孩子是極少數，只限有特別缺陷的。

有人說，用了表要使學生貪懶，這話似是而實非。用表實在比不用表麻煩，愈是貪懶省便的聰明人，或者愈想早早擺脫麻煩的表。要是表的內容超過了我們平常人的能力，那末用表反比不用省便。這樣我們大家使用表了，例如對數表，三角函數表，以及工程方面用的表，複利表等等。但是電報生能不用電碼本子譯電文，接線生能不查電話簿子回答某號是某用戶。他們日常用慣了，用熟了，彷彿我那位高足的用九九表一樣，用表反而麻煩，不用表又省便又成功，誰願再依賴這累贅的表？我想貪懶的或者是我們成人吧！有的想用一二次的口授，希望學生自己去把九九表念熟；有的竟想用一二次的訓話，使學生把惡習慣革除。以為教育是一勞永逸的，以為教育只有口說可以成功的，或者是最貪懶的教師。聰明人總是貪懶的，是不是？所以，只有我這種笨人才高興不怕麻煩的弄這等迂腐的方法，最聰明

的教師，只須把笨學生開除，不是又乾脆又省便嗎？

表的形式，應當改作 $\frac{7}{14}, \frac{2}{14}, \frac{7}{14}$ 等，免得多一轉折。學

級裏要用，可以把表揭示在教室裏，聽學生必要時看了抄。除考試時藏起外，可以到沒人看時才收起。這樣用法，只有實在需要的人才回頭看了抄，決不會使不必用表的人也依賴表。萬一發生有人依賴過分時，我們也可以用方法鼓勵。鼓勵可促進努力，努力可以使拋棄用表的日期縮短。

5. 再來一種過渡的方法

我想他曾經有過一個時期，對於上學做功課是自己以為得意的。現在是對於功課覺得厭煩了。原因當然有好多。一是自己的能力不能控制，所以做功課不能發生成功的興味。又一是怕聽見別人談起他的功課；一談起，百分之百，有當衆受到奚落的機會。他怕受辱，因此間接的怕功課。這一種心理上的不良態度若不改革掉，儘有好教法，恐怕效果也不會得十分良好。這是第二個難關，我仍能用過渡的方法。我的目標是使他愛好算學。沒方法在開始時使他從厭惡轉變到愛好，所以不能間接的使他喜歡天天來做算學。7月14日之測驗，並且我自己沒有監看，7月15日他做完了，給他一隻當時市上通行的桃子。沒說明理由，實在也沒有什麼的可以告訴他的理由可說。他平日做功課的結

果，總是得到斥責的居多；至多得到一個教師的靜默。那一天使他覺得和我一起做功課，沒有斥責，也不是冷淡的靜默，卻是一隻香甜可口的桃子。最初的印象，使他得到一些浮面的愉快。我的目的，竟粗淺到這樣。聰明的教師，或者要笑我幼稚吧！

過了兩天，到7月18日，他用表查了做20個 $8\overline{)75}$ 一類的除法，完全不錯，給他一包肉鬆。這一次的獎是有理由的，就是因為除法完全不錯。到7月24日是第十一天了，他能天天不間斷地來做算學。他的努力，的確比平常進步了好多。平常，若不斥責，不容易維持到三天以上，這是他家中人告訴我的。也有比較刻薄的人，在開始時說，我將來或許要上當後悔，因為他三天後一定要不高興來的。居然維持到第十一天，不是一個可以嘉獎的勞績嗎？金黃的顏色，長圓的形狀，更加透着一股引人的甜香，我在他做完算學時，特地叫他留在旁邊，我拿起毛筆來，在瓜上寫着九行文字“×××，做算學，十一天，有耐性，獎金瓜。”他忍不住了一面看我寫，一面笑得嘴也合不攏來。接到手裏，飛也似地跑去，逢人宣傳。鄰近的人個個都知道了。他不但愛這瓜，更愛這瓜上的字。我猜，這是他不容易得到的，就是從做功課得到文字紀錄的獎品。到7月29日又給他一集梨。此後物品的獎漸漸使他忘掉，所以不常給。到8月31日，算是假中補習的結束。給他一支可以把鉛旋進旋出的鉛筆。這是他最寶貴的東西，很當心的藏在家裏，從不拿出來使用。不過，四周的

同伴卻看得非常眼紅，引起了貪慾。一位小政客竟想方法私下拿了去了，小政客是很聰明的，或者聰明的教師當他是優秀分子，在放假前已經用過一次巧妙的手段，使畢業名次和他不相上下的一位同學，扣去若干分數而被壓下，聰明的確是聰明的，可惜太聰明了，將來難免不變成社會中的危險分子，不知聰明的教師，有什麼方法使聰明人不被聰明誤！用幾次訓話吧，我記得有不少優秀的聰明學生，結果是被聰明的教師開除的。

這位高足是誠實的，忠厚的，他只會頑皮，不會欺騙，這又是他的特長，是笨教師的我所最喜歡的，有時我見了聰明人怕，因為怕受他的騙，我們笨師笨弟，無獨有偶，幾個月的補習，的確成立了特殊的情感，他很愛我，廟會的節日，買了東西來要送給我；親戚家裏送了禮品來，他要叫母親分一部分送給我，我愈和他相處久，愈覺得他可愛，有時，在做算學時他做錯了，向他很嚴正的說一句“不對，”除此以外，沒有斥責過他，實在也無須我斥責，我的話，他是很聽從的，實在他的性情是很慈的，我記得我初到此地時，冬天下雪，他還從家裏拿了一枝藤杖給我，叫我出門時用咧，這一個關係，有一時竟鬧大了，幾乎成功笑話，天真的孩子真有趣，他不懂得等人在尋開心，竟認真要我做乾爹，我想名義是表面的，不必一定要乾爹乾兒間才可以有愛的關係；師生間也儘不妨相愛，難道師生間只許冷淡或者斥責，不許有愛的嗎？只要有真情，什麼名義都可以，他常說，只要戰

專停止，他一定跟我去上學。有時，他也會訴說他的真情，他很明確的知道周圍的人很少有人不說他壞的。他說有一位師範畢業的哥哥，待他最好，一向不斥責他，可惜死了，這的確是他的痛苦。四周沒有人說他好，所以他從我這裏拿到了獎品，要逢人告訴了。我用一些糖衣式的獎品，原不過想使他愛好算學。從此成立了一種相愛的關係，是我始料所不及的。

6. 自信和努力

獎品不過是糖衣。要他愛好算學本身，須得另找出路。糖衣不過用在開始時，臨時維持努力。要他發生真正的努力，應當先從恢復他的“自信”入手。常常斥責學生功課做得不好，教師以為是一種使他改善的督促。但是受斥責的學生却失去了自信；自己努力的結果，總只是換到一個“不對”的結果，自己一定不能信任自己有控制這種功課的能力；這是於學習心理最有害的。無論學習，或是工作，自信有能力可以控制者，一定肯化最大的努力。要得自信，一定要有過成功的經驗。常常做錯，常常受責，只有失敗，永無成功，怎能自信？教材方面用適合他能力的題目，再教他用過渡的工具幫助每天二十左右簡易的乘法，除法，希望他能得到做正一半以上。教法方面承認他做對，或者漸漸可以使他自己覺悟有能力控制，因此恢復他的自信。在初開始時，恐怕他注意分散，所以完全監視他做，同時也可以觀察

他做的方法，因而發現不少劣的缺陷，這事另外再說。監視時，並不多開口，即使他做得不對。沒有到他把一個題目做完時，在半途，不插嘴，免得把他工作打斷，半途打斷有時會使他紛亂。每一個題目，他把答寫完時，輕輕的說“對！”或“不對！”不對的，教他改，但是也不多說什麼理由。例如題目是 $7\overline{)61}$ 他的結果是

$$7\overline{)61} \text{ 時說“對！”若是他做成 } 7\overline{)61} \text{ 時，便說“不對！”} \begin{array}{r} 7.8 \text{ 是 } 56 \\ \underline{56} \\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7.8 \text{ 是 } 58 \\ \underline{58} \\ 3 \end{array}$$

叫他把 58 改成 56，再減，等他自已改正了，然後再說“對！”一個“對”字，算是他的一次成功。這方法從 7 月 15 日起，直用到 7 月 30 日，中間有幾天斷續的監視，就是看他做幾題，不說對或不對，等過二三分鐘後再看他做幾題，這可以叫半監看，從監看了每題說對不對起，經不說對不對的半監看。到完全不監看自己做，是一個過渡的路程。

監看說對不對，只能在開始時用，用的時候，便準備了一種後來替代的方法。從 7 月 19 日起每次開始做時，看一看表，一種做完時，也看一看表，告訴他是幾分鐘。天天如此，起先我紀錄在他的演算紙上，後來，他自己會得寫了。監看的幾天裏，只紀時間，從半監看的幾天起，加紀算錯的題數。例如，“乘 12 分，錯 2，”“除 16 分，錯 1”等等。他對於這等紀錄很有興味。他最盼望的記一句“全對。”有時他只做錯一二題，我往往對他說：

“只錯一二題，明天希望全對。”所以他做錯時，自己常責備自己。這一種簡短的嘆息聲，這一種面上的表情，除極少數受教師捧的，自以為考試必列前茅的所謂優秀分子外，平常是很少見的。平常學生對於功課，自己是不負責任的。他是普通的孩子；在聰明的教師眼光裏看來，或者還是個能力低的。大家說他不肯努力，現在他對於自己的一個錯誤，這樣關心，這樣負責。我推想，他的確有堅決的自信；自己很有把握的做出對的答來。的確，他的努力可以延長相當的時間；不監看，仍能一個一個做下去。有一天室外正在做酒麴，有一天是野外有人打獵，這是他最歡喜的動作，然而他努力算學，到完了後才去參加。逢這等時候，成績好像差些，可是當時情景，他卻很努力控制自己，這是從他的表情和動作上很容易看得出來的。強制自己不分心，所以分心在控制上了。最好能養成永久的興味，外界干擾可以漠然不關心，這在短時期裏還不能成功。

記錄的本身實在並沒有什麼價值。在筆記考查上批分數是很通行的辦法。教師辛苦的批着，未必能使學生努力。我們的記錄，是用來考核進步的。我常常對他說“今天12分鐘做這些除法，比前天快了，”“今天除法是一種新的只錯了3個，”“今天15分鐘比昨天慢了。看明天能不能做得全對，並且快些。”這是每在記錄後說的。我自己原需要前後比較，作為次日教材教法的準備，同時對他說明自前後比較的情形。在我並沒有多化絲

毫精力，在他卻得到一種有價值的訓練。他很關心自己的進步。他對於記錄態度和平常學生對於分數的態度完全不同。記錄高，他很滿足。他做完時不急急要跑。他要等記錄。還要等我對於記錄的比較。他或者已經有了對於算學的成功興味了。要是能有了這興味，他將來學算，可以多用些努力，多得到成功。要是繼續不斷的話，算學的永久興味也不難養成。從7月14日到寫稿時，已經有三個月了。下學期開了學。他仍舊每天來補習。星期日也不在例外。他來並不希望獎品，因為獎品早已和補習脫離關係，變成功我們情感的表示。他並不喜歡算學。但是他每天卻有做算學的習慣。這不是他的苦工，他可以在這上得到一個記錄——進步，或不進步。學校裏指定的算題他也帶來做。有時做的時間，竟比平常補習時間超過二倍。補習不過30分。校課最多的一次有90分。我也有些倦了，因為在暗淡的燈光下。他的努力延長了，能持續到90分鐘。

7. 加法

加法：原沒有預定補習，因為發現他九九不熟。所以全神貫注在乘法和除法。開始的幾天，這計畫沒有什麼問題。到第五天上，乘法題是 $\frac{28}{9}$ ， $\frac{83}{6}$ ， $\frac{82}{7}$ 等。他很容易錯誤。九九以查表，錯誤不在九九。最使他困難的是進位。例如上面的第一題 $8 \times 9, 72$ ，先寫出2，再暗記7； $2 \times 9, 18$ ，要暗記18，並且做一個

看不見的加法， $\begin{array}{r} 18 \\ + 7 \\ \hline \end{array}$ 要是寫明了式子加，18 和 7 都可以看得見，最容易。在做連加法時，例如，9, 9, 7 三數連加，第一次加 0 和 9 是看得見的。第二次加時，18 是看不見的，7 是看得見的，這已經較難了。在乘法時，18 和 7 都看不見，所以最難。通例，乘法進位的數目不許附記。他是有附記習慣的，不過記的地位很不規律。附記進位的 7，那末 7 是看得見的了；再和看不見的 18 加，可以比較容易些。我鼓勵他附記，並且教他記在一定的地位，原因是減少他的困難，免得他常常做錯。這樣進位的 7，可以看見，只須和不進位的 18 加起來便行。但是他的連加法經驗太差了，所以附記了進位的數目，依然不能使他減少錯誤。他做 18 加 7 時，要用筆尖在附記的 7 上作 $\vdots\vdots\vdots$ 形的點子，同時嘴裏念 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25；念一數，打一點。這樣可以證明他 18 加 7 等於 25 是不能直接算出。

用 $\begin{array}{r} 9 \\ + 8 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 7 \\ + 6 \\ \hline \end{array}$ 等紙片考查，我舉出紙片叫他口答。進位的加九

九，有好多不熟；等了好久，才能說出答來。大約他仍舊暗地裏在打點，例如 9 加 8 時，打 $\vdots\vdots\vdots$ 念 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17，雖則手裏沒有筆，眼睛裏仍舊可以想像到 $\vdots\vdots\vdots$ 的形狀的。想破除他這習慣，教他一個過渡的方法，就是 9 和 8 加時，從 8 移 1 到 9，使成 10 和 7。要是逢到 8 加 5 時，從 5 移 2 到 8，成 10 和 3；7 加 6 時，從 6 移 3 到 7 成 10 和 3。這方法他覺得很有趣。加

法的補習，不限定做題目，這等紙片的練習也是一種。

只會做 9 加 8 的，未必一定會做 19 加 8， $29+8 \dots$ ，但是乘法進位時和連加時要用的却是 18 加 7，28 加 7 等居多數。

因此我們也做 $\begin{array}{r} 18 \\ 9 \end{array}$ $\begin{array}{r} 28 \\ 9 \end{array}$ $\begin{array}{r} 38 \\ 9 \end{array}$ $\begin{array}{r} 17 \\ 9 \end{array}$ $\begin{array}{r} 47 \\ 9 \end{array}$ $\begin{array}{r} 67 \\ 9 \end{array}$ $\begin{array}{r} 38 \\ 8 \end{array}$ $\begin{array}{r} 68 \\ 8 \end{array}$ $\begin{array}{r} 36 \\ 5 \end{array}$ 等加法。做時叫

他用心算，直接說出答來，例如 18 加 9，不說 8 加 9 是 17，再加 10 是 27；要直接說 27，這習慣不容易成功。筆算加法已經學會，要是不把舊習慣打破，新習慣不能在短時期裏成功。所以凡是過渡的方法，不宜用得太久；要常常鼓勵學生作進一步的努力，拋棄過渡的工具不用。我們沒有多練這等加法，並不是這等加法無效，已經太遲了，應當用在加九九的學習以後，作九九的應用練習。

我們另設一新的環境，使他忘掉加法筆算的形式，完全做心算。這是一種遊戲，用紙片 30 張，分青，紅，黑三組，各寫 1 到 10 的數目。把片子洗和，各人輪拿一張，數目大的勝；紅勝青的，青的勝黑的。例如紅 10 勝紅 9，亦勝青 10，黑 10；青 10 勝青 9，黑 10，反而被紅 9 紅 1 勝。勝的拿二片在身旁。拿完後各人計片子的數目共有多少，這是連加法。用紙記錄，再洗紙片再做。目的要比賽，先滿 500，好動的他，非常高興。有時玩滿 50 分鐘還不願停止。做算題，平常總不過是 30 分鐘。過熱的氣候，往往容易疲倦。一做遊戲，精神飽滿，原來的呵欠也逃走了。

還有一種遊戲是比較多用些力的。在地上畫下式的圖，距 4, 5 尺處畫一界線。用小瓦片 10 塊，放在界線內。用脚尖踢磚瓦片到格內，-10 要罰去 10，就是減 10，另外都是連加的。每次數目，記在石板上，比賽誰先滿 100 或 500，這是給他空時和同伴去玩的。起初幾天，我也參加，大家還高興玩。後來聽得他發起玩這遊戲時，別人不敢睬他，從此他也不再發起了。

	-10	10	
4		9	2
3		5	7
8		1	6
	10		-10

加法方面用力不多，成就很少，彷彿有些僵了。最後找到一條另外的路徑，解決了他加法的困難，同時也解決了他乘法的困難，這路徑就是珠算。

8. 珠算加法

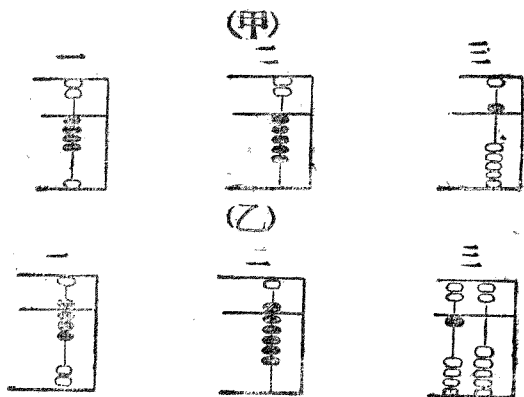
他用的教科書是筆算和珠算混合的，全書有六個單元是珠算；內中一個單元是乘數三位的乘法，五個單元是除數二位的除法。他的珠算能力，加法勉強可以做做，減法大部份不懂，乘法除法完全不會做。自從發現他加九九不熟起，我便開始教他用珠算加法計算紙片遊戲的數目。在算盤的兩端，分別加上各人每次得到的數目。例如我的片是青的 8，他的是紅 6，他勝；用心算做一個簡單的加法， $8+6=14$ ，在算盤上他的一端放 14，

以後他若再勝時，把所得的分數加上，例如他勝得 18，加起來，算盤上便是 32，我勝時加在另一端，也由他加。這樣，一方面使心算簡單，僅僅練習加九九，同時又用珠算練習連加法，他很高興，好像比以前幾天用心算做連加法計算，更高興些。大約是因為心算不熟，連加法常常使他發生困難。在算盤上一次一次的加，隨時可以看到勝負的進行，比了片子拿完時總算，更其明確。

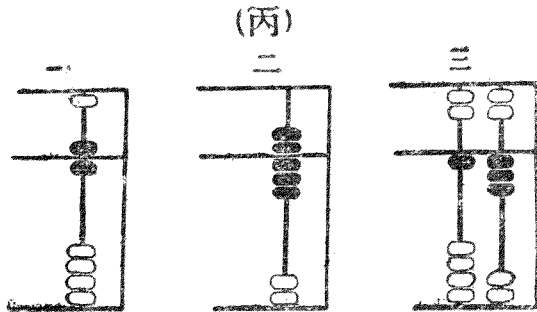
大約他從前學習珠算加法也是先念口訣的，我不鼓勵他背口訣，但是他偶然自己要背了才動手。要是錯了，不用口訣訂正，我自己手打給他看。珠算口訣，可分四類。第一類像「二上二」，「六上六」等，最容易。第二類要牽涉 5 的分合，像「四上五去一」，「三上五去二」等，要明白 $5=4+1$ ， $5=3+2$ ， $5=2+3$ ， $5=1+4$ 等四個關係，實在就是包括加 5，減 1，或 2，或 3，或 4 等，加減法的混合。第三類有「九去一進一」，「八去二進一」，「七去三進一」，「六去四進一」，「五去五進一」，「四去六進一」，「三去七進一」，「二去八進一」，「一去九進一」等，要明白 $10=1+9=2+8=3+7=4+6=5+5=6+4=7+3=8+2=9+1$ 等關係，也含有加減兩法的混合。第四類最複雜，「六上一去五進一」，「七上二去五進一」，「八上三去五進一」，「九上四去五進一」等，實在就是「六上十一去五」，「七上十二去五」，「八上十三去五」，「九上十四去五」，內中的關係是 $6=11-5$ ， $7=12-5$ ， $8=13-5$ ，

$9=14-5$ ，他對於這一類最弄不清楚，口訣也最不熟。先幾天，我不用口訣只告訴他內中關係，他明白是明白的，無奈自己打算盤時，依舊不熟，仍要弄錯。單單明白，決不能立即變成功行爲上的習慣。

有一天他忽然發現了一個迂遠而取巧的方法。這方法可以把口訣減省好多。例如 $4+1$ ，不用「一上五去四」，就照甲圖一、



二、三的順序進行，先「一上一」，下珠滿五，再換上珠一。又如： $(9+1)$ ， $(8+2)$ ， $(7+3)$ ， $(6+4)$ ， $(5+5)$ 等照乙圖一、二、三的順序進行，先「一上一」，或「二上二」，或「三上三」，或「四上四」，或「五上五」，滿十進一位，換一。又如 $6+7$ ， $6+8$ ， $7+6$ ， $7+7$ ， $5+9$ …… 等，照丙圖一、二、三的順序，利用第二粒上珠「六上



六」，或「七上七」，或「八上八」，或「九上九」，再把二粒上珠進一位，換一。這樣，第四類最不容易的，變成功最容易的第一類一樣。第三類只剩 $(2+9)$ ， $(3+9)$ ， $(4+9)$ 等，要用「九去一進一」； $(3+8)$ ， $(4+8)$ 等，要用「八去二進一」； $(4+7)$ ，要用「七去三進一」。口訣減少到只剩三句，並且要用到三句的情形也只剩這 6 個。這方法是迂遠的，因為要多打幾次珠。但是這方法是取巧的，可以少背熟好多嚙嚙的口訣。他好動，不怕手指麻煩，而且動得很快，他最怕背念。拿多動來代替背念，恰合他的個性。後來，因為常常打，打得有些熟了，他會得把各圖中二的一步省去，很快的從一到三。迂遠的方法，原是一種過渡。這種過渡方法，比口訣自然，打熟時有自然的趨勢會得略去。我一向主張珠算可以不用口訣。照他這樣情形看來，我的主張還合理。初學時，可以用這迂遠的過渡方法，免得許多麻煩。

從珠算遊戲起，後來也叫他做練習題，特別注重在連加法。

加速的把個數增加，位子擴張，他的進步並不慢。開學以後，教科書上又是小數四則，我便叫他用珠算做小數的連加法。位數參差不齊，有的整數位多，有的小數位多，有的整數小數位都不少，他也能算，一些也沒有什麼困難。小數點是用鐵絲做的一隻馬，彷彿口樣子，跨在算盤橫梁上，整數和小數兩檔分界的中間。廿五年暑假中我曾經寫過一本筆算珠算混合教學法（中華書局印行），那好像是一種理想的提議，自己也不知道有多少可以實行；實行時有多少困難。這次補習，給我一個極好的機會，把那書中的方法做一次試驗。從試驗中得到一種新的經驗，就是我那位高足發現的，利用上面的第二珠作過渡，可以省好多無謂的轉折。所以那書中第十九例加九九總表，分步可以減省好多。

9. 乘法

開始時，做 $8 \times 9 + 7 = 79$ 等乘九九帶一位數的加法。只做了兩天便停止。第二天起，用 $\frac{71}{6}$ $\frac{19}{8}$ 等形式，練習乘法九九。兩天以後，便加 $\frac{26}{4}$ 等。再兩天，加 $\frac{93}{6}$ 等。這樣便到了乘數一位，被乘數二位的乘法。從第十三天起，被乘數擴張三位。從第十六天起，被乘數末，有零一個或兩個，例如 $\frac{900}{5}$ 等。以上都是

叫他用表查的，到了能不查表的時候，被乘數不減縮到兩位，後來，再擴張到三位，並且加中間有零的，例如 $\frac{607}{9}$ 等。這時候，

恰恰是珠算加法做得相當純熟，所以便開始教他珠算的乘法。

他已經會做筆算乘法，他已經可以不用表幫助，他最感困難的，便是部分積的進位，用算盤不必暗記，不必做看不見的加法，進位的數目早放好在算盤上，第二個部分積只須直接加上去便行，這方法最可以解除他的困難，珠算乘法和連加法，都有這一種特點，利用算盤代我們暗記數目，使我們另外進行計算不必分心，孩子們做筆算時，往往顧此失彼；注意了計算的進行，便忘了暗記的數目，注意了暗記的數目，便把計算的進行混亂了，算盤的確是一種有利的工具，可以免得我們分心，當然經過長時期的訓練，我們做筆算連加法和乘法時也可以不分心，並且可以把暗記的數目直接併入，例如 9、8、7、4 的連加法，心裏的進行過程是 17、24、28；在第二加進行時，不必把 17 的 10 暗記暫擱，再做 $(7+7)$ 得 14，再併上暗記的 10，要達到這種情形，恐怕要多練 $(17+7)$ ， $(27+7)$ ……等，使成習慣，或者練的時候還要使學生少看見數目字，然後才能和連加時看不見的加法情景一致，有的人做 (3×78) 等乘法時，他的心裏的進行過程是三八 24，三七 23，他能把三七 1 和進位的 2 直接併成 23，不再分作二事；三七 21 和 $21+2=23$ ，現行教材，種類過多，小

學生決難有充分的時間練成功這等習慣。平常的百姓，解決日常生活問題，或者也不必這樣的熟練，我們補習，更談不到此。

初教珠算乘法時，叫他先做筆算；完結時用珠算來核對。第一天，我打給他看，嘴裏也念着四九³⁶等九九。因為他對於每天自己做的成績，非常關心，他有成功的興味，所以核對乘法結果時，他的注意完全集中在算盤珠的上下。那天²⁰個乘法，一個一個的核對，化了不少時間，他絲毫不覺得厭倦。他對於算盤珠上下的行動，似乎覺到特有興味。第二天仍舊先做筆算乘法²題。完結時，叫他自己核對，他很高興。第一天他只有得看，自己的手沒有機會能動。第二天，許他自己動手，我監看着他。當然只看了一天，決不會把乘法全部學會的。這樣經過了四天，他大概可以算了，所以從第五天起，乘法便不先筆算，直接用珠算。每算一題，把結果記錄下來。

乘九九相當純熟時，珠算乘法比筆算容易得多。只須一路把位子弄清，一步一步的把九九的數目加上；不必暗記，也不必做看不見的加法。他很高興用珠算做乘法，半途少困難，結果比較可靠。被乘數擴張到四位，也一樣的很順利的進行。後來和連加法聯合起來，先把好多個數目連加起來，再用一位數乘連加法所得的和。他遇到的困難，只有一點，就是在乘的進行中，逢二三得6，一七得7等，不滿10的部分積，他要當作60或70。算盤上的位子，的確不及紙上清楚。這困難，並不十分嚴重，不

過幾天的訂正，便沒有什麼問題了。結末有 0 的，我們用筆算來補珠算的缺點。例如 $\begin{array}{r} 8425 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$ 的乘法，在算盤上打的時候，不管什麼位子，到結果出來後是 337，我們再看式子，決定結末有兩個 0，成 33700。被乘數末有 0 時，也可以用同樣方法決定積裏的 0；例如 $\begin{array}{r} 7250 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$ 算盤上只有 58 二數，從式子上看，應當是 58000。有時叫他注意數目的實在大小，譬如四倍八千多的結果決不會只有三千多，應當有三萬多；七千多的八倍，總是五萬，不會得只乘五千。另外多出這等題目，增加練習的機會，也可以助長他一種判斷位子的能力。

乘數二位的乘法。珠算的方法太繁複了。我便試用筆算珠算混合教學法裏所說的方法，使珠算和筆算聯合互助。例如：

$$\begin{array}{r} 456 \\ \times 29 \\ \hline \end{array}$$

先用珠算求 9×456 的結果，得 4104，寫在式子下面如

$$\begin{array}{r} 456 \\ \times 29 \\ \hline 4104 \end{array}$$

再用珠算求 2×456 的結果，得 912，再寫在下面如

$$\begin{array}{r} 456 \\ \times 29 \\ \hline 912 \end{array}$$

再用筆算或珠算把他們加起來，如 4104 平常這種加法 他愛

$$\begin{array}{r} 4104 \\ + 912 \\ \hline 5016 \end{array}$$

用筆算，這是利用筆算的形式紀錄，利用珠算的工具計算，雙方的優點都可以利用到；各方的缺點，各被另一方的優點所補足。這方法最合理想，筆算珠算混合教學法自序中的希望，總算得到了一次實現。又要打算盤，又要用筆記錄，初學的人很容易雙手忙亂，這是很容易解決的；只須把算盤和紙的地位放得好，再教會右手拿了筆打珠，什麼問題都可以沒有。當然，能右手拿筆，左手打珠是最好的方法。不過普通孩子，一切用慣右手，要訓練左手打珠，恐怕練習的時期要增加不少。右手拿了筆打珠，是容易學會的。

10. 動作經過的學習

從前的心理學，把人分作四種氣質，有什麼多血質、神經質、膽汁質、黏液質等分別，這是不通的；現在心理學中，不再有這等假說存在。有人主張學習可以分作四種典型；一種是視覺典型；美術家往往屬於這一種。這等人學算時，常要想像可視的物體，即使叫他心算，他也會得想像一把算盤，或者一個寫出來的算式。一種是聽覺典型；音樂家往往屬於這一類。這種人學算時，常要依賴聽覺；板書的式子往往容易抄錯，口述的問題，却能一聽便把結果算出。一種是語言典型；學習算學時，要依賴九九的背誦。一種是動作典型；學習算學時，要自己用手做動作，像打點、輕拍、動指、點腳趾等。這分法，也有些勉強。普通的人，

不純屬一種典型，往往是二、三、四種的混合。有時同是一人學習筆算偏用視覺；學習珠算又偏用動作。這等偏向，並不是先天的；平日訓練偏於那一方面，學生便養成那一種傾向。一向來的教育，只是叫學生看書，聽講，所以從這種教育中培植出來的人材，往往偏於視或聽的兩種。先天的，還是訓練成功的？這問題太偏理論，這裏暫且不談。我們就事論事，究竟學生學習時的難易，成就的多少，是絕對的，還是相對的？這裏所謂“絕對的”的意思是：某學生筆算的學習困難，珠算的學習也同樣的困難；“相對的”的意思是：筆算不容易成功的人，珠算或者容易成功。我那補習的高足，珠算的成就和平常人一樣，筆算的成就的確要比同學們慢些。這是什麼理由？簡單的答案，可以說他愛動，他見了文字符號少興味。

照一般的論斷，他的學習能力比他的同學們低，我想他正合普通孩子的常態。他對於文字符號屈服的能力是比別人低，但是他不肯輕易接受沒內容的殭屍的抵抗能力，却比別人高。拿容易屈服，不問情由的接受死符號算是學習能力高，實在是從來教育的錯誤。在這種錯誤教育下，只有死念死記的人才能認作優秀。只接受結果的符號不高興留心經過的動作，這等人實在是病態，不是常態。常態的兒童，沒有不好動的；對於動作的經過，沒有不注意的。我們社會中的建設，勞動，生產也都是動作的經過。農夫學種田，要是不學種田的動作經過，還有什麼可

學？工人學做工，除了做工的動作經過，還有什麼可學？師範學生做教師，我學教算學，也只有動作經過中下苦工，才能學會。我們看看書若只死記熟別人家的結果，有什麼實在的幫助可以得到？棋譜也是一種書；着棋的高低，完全在經過。牠的結果，誰勝誰負，我們看了，有什麼用？只有高手着的經過，才能幫助我們，使我們自己的着法改進。所以不看慣棋譜的人，要拿了棋子擺譜。小學生看書，實在和我們看棋譜一樣。教師若不把經過擺出來給學生看，或者引導他們自己擺，他們怎能學會，怎能對於符號生興味？

我給他補習，完全注重在動作經過的學習，珠算如此，筆算也如此。他愛算盤，他討厭符號。我想方法使算盤珠的動作和筆寫的符號連結起來，前面說的加法，乘法，都是例子。初教珠算時我用示範法，慢慢地把動作的經過做給他看。他看得躍躍欲試時，叫他自己動手。監看着，訂正他經過中的錯誤。到他自己能獨立動作時，結果如有錯誤，我仍用動作的經過來訂正。這方法最省便，也最有效。不必多說空話，簡捷的向他說某題錯了；然後叫他當我面重做，有時，動作比較複雜，在示範後初步自試時，由我把動作經過的步驟，一步一步的口頭提出。經過幾天以後，他可以不必強記步驟，動作的次序，漸漸成功習慣。筆算的計算，其實也有動作的經過。所以上述方法同樣可用：（一）示範；（二）自試或口述步驟叫他自試；（三）完全自做。訂正也同珠

算，就是看着他重做。

我連帶想起教師改簿子的辛苦，改得忙，效果不可知，這恐怕是注重了結果，忽略了經過的緣故。教師批改的，學生除注意分數多少外，往往不看。這樣，辛苦的批改不是等於浪費？在教室內訂正，最好在巡視時即席訂正，效力一定要大得多，因為這時可以在動作經過上着力。不過複式教學，一部分學生自己作業時，教師往往要和另外一部分學生討論說話，所以沒工夫即席訂正。這是事實，若要補救這一缺點，最好教師把開口說空話的時間節省下來，移用到即席訂正方面去。在低年級或者行不通；在高年級，我的話不是空想。我們補習時，我很少說話，雖是我常常被人看做愛說話，會說話的人，一羣人坐着，自己沒工作可做，當然只好用些好聽的故事，給他們消遣。有工作在手的學生，何必我多說話？落得留到必要時說。

11. 錯誤的訂正

訂正錯誤，也是教法中很重要的工作，尤其像算學等，學生的學習，不是靜坐聽講；學習的成敗，完全在他自己做的算題上。不過前節已經說過，我們的訂正，應當着眼在動作的經過。單單注重結果，不但不能使學生的動作方法改進，有時反使他莫明其妙因不明如何改進而發生厭惡。這樣，訂正不但沒有使學生進步，反而使他因厭惡，不努力而退步。就是沒有斥責，只

要每次練習簿上充滿了紅色的×或常常批“丙”等，已經足夠發生這等不良影響。訂正的方法，前節約略說過，現在再來補說我所遇到的錯誤的原因。

小學生最容易犯的，是抄錯。我出題時不照普通教科書裏常用的形式，一律改用練習書練習測驗的形式。如下例，甲是平常出題的形式，亦叫橫式。學生做時要先改成乙的樣子。我用的是乙式，亦叫直式。

甲例	乙例																												
$35 + 42 + 126 + 84 + 7 + 56 =$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; width: 15%;">加</td> <td style="text-align: center; width: 15%;">乘</td> <td style="text-align: center; width: 15%;">除</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">35</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">42</td> <td style="text-align: center;">3456</td> <td style="text-align: center;">258</td> <td style="text-align: center;">6)8875</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">126</td> <td style="text-align: center;"><u> 7</u></td> <td style="text-align: center;"><u> 84</u></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">84</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">7</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><u>56</u></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	加	乘	除		35				42	3456	258	6)8875	126	<u> 7</u>	<u> 84</u>		84				7				<u>56</u>			
加	乘	除																											
35																													
42	3456	258	6)8875																										
126	<u> 7</u>	<u> 84</u>																											
84																													
7																													
<u>56</u>																													
$3456 \times 7 =$																													
$258 \times 84 =$																													
$8875 \div 6 =$																													

照乙式，學生省得抄，可以免得抄錯。到筆算珠算聯絡時，他一定要把算盤上打出來的結果，抄記在式子的相當地位，抄錯的機會便多了，抄錯的事實也常常出現了。在這以前，這種錯誤是不會發生的。他常把5抄作1；算盤上的5是一粒上珠，要把看到的一粒上珠改成5，的確多了一轉折。訂正的方法，除提醒外，沒有別的。我常常說：“這是5，不是1”另外不再多囉嗦。做乘法時，每次的積位，數有時要多到五、六位，這時也很容易抄錯。他自己很努力，常常把算盤上五、六位數目連續輕念幾遍；再

抄。我教他分作兩次抄，每次抄三位。例如積是 24875，可以分作 24 和 875 或 248 和 75 兩段。這方法比一時記五位省便而正確，但是所化的時間並不多。

乘數二位的乘法，每次的積位子多時，抄起來很不容易把位子上下對正。例如 3864×719 的乘法，三次的積是 27048，3864 34776，抄時應照下面的甲式。但是因為位數或五或四，要不是先數一數清楚，一不小心，便很容易抄成乙式。我教他不從

甲例	乙例
$\begin{array}{r} 3864 \\ 719 \\ \hline 34776 \\ 3864 \\ \hline 27048 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3864 \\ 719 \\ \hline 34776 \\ 3864 \\ \hline 21048 \end{array}$

左向右抄；凡逢乘法，一律從右向左抄。若要口念，也倒念過來。初時每次特別提醒：“倒過來寫，右面位子看好！”開學後，校裏做圓周，圓面積題目時，小數乘法，

位數有多到十個以上的。倒過來每次抄三位或四位，這方法雖迂遠，但是可以減免抄錯。抄錯重抄實在並不省事，或者反而費事。

他有一種特殊的寫錯，恐怕是由於性急。例如做 7 乘 9，結果是 63，照例應當寫了，但是他會得寫 6，我作文時常有這等錯誤。正在寫一句時，忽然想到一個新的意思，便把新想到的字插在前一句中。我的訂正法是叫他寫得慢。用算盤幫助計算時，加法乘法中這等錯誤便不再有了。

因塗改而生的錯誤，除法中最容易發現。約商是不容易的；

有時約得過大 有時約得過小，因此商和部分積，常常需要塗改。他塗改的本領很好，4改8，2改3，5改6，6改5，有時改得很好看。但是有時改得不好，等到做減法時，自己也看不清楚，把改過的1當作7，改過的3當作5，我教他不在原字上塗改，如有錯誤，畫去，在上面或下面重寫。這是我自己的習慣。作文底稿，不高興改字，情願畫去重寫。有時句法有不妥，也不高興多鉤，情願畫去重寫一句，在從前排字的工友，最歡喜排我的稿子。現在老了，寫字時手抖，恐怕錯誤也跟了年齡增加，要被排字工友厭惡也難說。這學期他的級任教師向我說，他抄寫的東西太塗糊。我在他做算學時特別注意，要他寫得小 小便清楚了。他的力大，落筆重，往往大刀闊斧的揮，所以變成功又粗又黑。他用心寫得小時，用力輕，不太粗，不過黑，恰到好處。他自己看到整潔的字，有時很得意的自己在欣賞。偶然寫得不整齊時，他常對我說：“畫去重寫過！”

12. 一加一等於二

在一種外國雜誌上，讀到一篇關於補救小學生算學成績低劣的短文，是一位師範學校裏的算學教師做的。他自己把學算的經過，敘述出來，作為那文的開端。他從前志願投考師範學校，沒有錄取。原因是算學不及格。後來他改入專攻算學的數理專修學校，畢業以後，受中學師範教師的檢定考試及格，所以在

師範學校裏當算學教師。照他的意思，學算學並不困難。只要守着 $1+1=2, 2+1=3$ ……的順序，不欲速，不取巧，一步一步的進行，自然會得成功。這是他自己經驗中得來的原則。的確學算的步驟很要注意。躐等是最大的弊病，往往欲速反而不達。我們補習，也試用這 $1+1=2$ 的原則。開始時先診查出一個出發點，從此一天一天的做，每天只有一種新的加入。補習的範圍雖不廣，但是也包含加乘除三種，而且還有筆算和珠算。例如乘法加了一種新的花樣時，別種的題目和前一天或前二天的彷彿。又如除法從不絕的九九進到 $7\overline{)637}$ 時，別種的題目不再加什麼新的。有時，練習沒有到相當純熟時，各種都不加入新的。

步驟分得較細想適合他的能力。有的學生，類推的本領較好，步驟可以分得粗些，進行可以快些。像他分得粗了，進行快了，好像中間有了一個缺隙，就此接不下去。類推能力的大小，確是各個人不能一律。但是單憑類推能力來判斷學生學算的優劣，却也容易發生錯誤。有的人類推的本領雖大，計算技術，未必能在短時期內純熟。所以這等學生，好像一說就懂，一學就會，其實他們的計算，常常發生錯誤。教師對於這等學生，往往以為是聰明而不用心，其實沒有充分練習，表面的一知半解，仍不是真正的實力。各種學習力的測定很不容易；主觀的判斷，不免發生錯誤。基本算法，貴純熟，不比常識。所以寧使分部較細，只要能保持興味和努力，不使因反復過多而厭倦。最困難的是一種

假聰明的孩子，實力需要細分步驟，一步一步的進行，他却虛榮的只想急速前進，有了這種態度，不但基本算法學不好，就是常識也不會真實明白。這種態度，不是天生的；一小部分是家庭的疏忽，一大部分是教育的結果。拿虛榮做了教學的目標，當然要產生假聰明的學生。他是很樸實的；不怕多做，只怕太快，所以 $1+1=2$ 的原則，應用起來，一些也不費力，對假聰明者，先要化一些功夫改正了態度，才可用這原則。

躐等當然不對，停滯不進，老是同樣的反復，也不過是浪費時間，一面不斷的慢慢的加入新的，一面把漸漸純熟的退去。假定某一種的乘法按照學生能力，可以分作六步，每一天或二天加入一步新的，到第四步加入時，可以把第一步退去；到第五步加入時，可以把第二步退去，這叫漸離法。題目數的支配也是如此，譬如每次做10題，那末新加入的最多，占六七題；前一步二三題，再前一步不過一二題。教科書中練習材料的分配，却和這方法相反，都是一刀兩段做了新的，把舊的完全擱開不管。他用的那本教科書裏小數減法14個習題，純是減法，一個加法也沒有。除了特定的復習以外，始終不附帶前一單元或前兩單元的練習材料。開始學了分數，便把小數拋到九霄雲外；連復習也只限分數，難怪學生隨學隨忘，成績不易進步，以為教一回學一回便可以成功，這是一種極重大的錯誤。

教科書或者因為紙張關係，不便附帶舊的材料。那末做教

師的應當用些聰明，補充教科書的缺隙。這是教師最重大的工作。呆照教科書講講，把應做的題目數告訴學生，不必用活的教師，只須灌好留聲機唱片，叫人開唱便行。再省便些，可以用無線電廣播代替。死用教科書的教師，實在可以說是一架活的留聲機罷了。機械雖呆板，但是很忠實。活的機械，有時反而會得弄錯，脫漏，貪懶，失時反而比機械不可靠。教師的準備功夫，就算學而論，大部分就是這等缺隙的補充。不過，天天要出補充題，極容易使聰明的教師厭煩。練習書，練習測驗是很好的工具，可以省教師出題的麻煩，又可以使能力不同的學生各有各適合的材料練習。這樣，教師的工作，完全重在調節支配方面，就是找出學生的需要，再在練習書練習測驗中找相當的材料。上課時拿材料介紹給學生後，只須巡行觀察，個別指導。只有極少學生需要這種指導；普通的孩子，只要有合宜的材料，自然會得努力做去。我們補習用的材料，彷彿是一個臨時編起來的練習書。他每天做 25 到 30 分鐘，我的準備，至多也不過 30 分鐘。即席訂正，效力較大，精力和時間都不會浪費。化大好光陰，在練習簿上畫紅色符號，我以爲是勞而無功的極大浪費。把這許多時間節省下來找缺隙，出充填缺隙的練習題，效力着實要大得多。做過一二次以後，大同小異，只須變化搭配，很省便很容易的。有一最根本的要點，却要特別注意，就是不能希望學生和我一樣。聰明只須“依此類推。”不類推； $1+1=2$ 。

13. 簡除法

有人主張簡除法的計算形式，要簡單，只須用心把商寫出如甲例，不必把乘積減法等一一寫出如乙例。

我想將來做長除法時，總逃不了要用乙例的形式，那末在簡除法開始時就用，除手續麻煩外，

沒有什麼別的害處。凡是除法，不論除數一位或二位，用一律的手續進行，或者可以省去一種混亂。因為除法的計算最複雜，所以我嚴守

$1+1=2$ 的原則，步驟分得很細。並且為正本清源計，決定從除不絕的九九開始。預定每一步，至少做一次，看看他是否熟習。已經熟習的，只做一次，翌日便加新的，一定要練習到純

熟，當然，是不可能的。有好多，下一步的練習可以幫助前一步。不過方法的過程若是還有錯誤，決不驟加新的。因為一種過程沒有弄清楚時，急急加了新的材料，往往使過程發生混亂，從此糾纏不清，會得愈弄愈糊塗起來，分步標準，拿絕對不賴推做根據。各步的詳細如下：

第一步如 A 例，是不絕的除九九，練習時也夾些除絕的九九如 $9 \overline{)72}$ 等。這一步是比九九進一步，就是學習試商。如 $9 \overline{)75}$ ，還容易從八九 $\overline{)72}$ 推得。若是 $8 \overline{)70}$ 要想到八八 $\overline{)64}$ ，比 $8 \overline{)69}$ 要

$$(甲) \quad \begin{array}{r} 437 \dots 1 \\ 7 \overline{)3060} \end{array}$$

$$(乙) \quad \begin{array}{r} 437 \\ 7 \overline{)3060} \\ \underline{28} \\ 26 \\ \underline{21} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 1 \end{array}$$

難得多。這一步做了四天，普通教科書中習題，除法大多數是除得絕的，他不習慣，經過四天，才漸漸明白。

(A)

$$\begin{array}{r} 7 \\ 9 \overline{)70} \\ \underline{63} \\ 7 \end{array}$$

(B)

$$\begin{array}{r} 81 \\ 8 \overline{)649} \\ \underline{64} \\ 9 \\ \underline{8} \\ 1 \end{array}$$

(C)

$$\begin{array}{r} 82 \\ 7 \overline{)578} \\ \underline{56} \\ 18 \\ \underline{14} \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 7 \overline{)570} \\ \underline{56} \\ 10 \\ \underline{7} \\ 3 \end{array}$$

第二步如 B 例，商二位，第一除恰除絕，所以不必退位；第二除有餘或無餘，這是學習除法計算過程的；重在手續的形式，這一步只做一天。

第三步如 C 例，同上例，不過第一除有餘，所以要退位；第二除有餘或無餘，這也是學習計算過程的。手續比第二步繁一些，這一步做了七天，因為要想使他從用表查九九進到不用表，所以連續七天，同樣的反復，還沒有發生厭倦的情形。

(D)

$$\begin{array}{r} 446 \\ 7 \overline{)3122} \\ \underline{28} \\ 32 \\ \underline{28} \\ 42 \\ \underline{42} \end{array}$$

(E)

$$\begin{array}{r} 359 \\ 8 \overline{)2879} \\ \underline{24} \\ 47 \\ \underline{40} \\ 79 \\ \underline{72} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 980 \\ 6 \overline{)5880} \\ \underline{54} \\ 48 \\ \underline{48} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 600 \\ 7 \overline{)4200} \\ \underline{42} \end{array}$$

第四步如 D 例，把數目擴充到四位，商有三個。

第五步就在第四步的下一天加入，如 E 例，商末有一個 0 或二個 0，他對於位子，還比較明白，所以這一步並不困難。

第六步在第五步三天後加入，如 F 例，這和第五步差不多，不過商末有 0 並且是有餘的，他好像略有困難。但是只說一二次！困難也就解除了。

(F)	(G)	(H)	(I)
280	703	216	901
$9 \overline{)2525}$	$9 \overline{)6330}$	$6 \overline{)1300}$	$8 \overline{)7210}$
18	63	12	72
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
72	30	10	10
72	27	6	8
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
5	3	40	2
		36	
		<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	
		4	

第七步如 G 例，在第六步三天後加入，商的中間有 0，比商末有 0 的較難。幸而他對於位子比較清楚，所以沒有多大困難。我看見有幾處學校裏的學生，對於商末或商間有 0 的除法，總是弄不清楚。有幾位教師因為愈講學生愈不明白；所以弄得灰心。我對他沒有多講，只說：“不夠除，再移下一數（指被除數），答寫 0。”他懂得，依照我的話做去。做對時，我說：“對！”只是教過程，沒有把理由詳細講給他聽。先明白了過程，將來有機會再講理由，或不過遲。早講理由，或者反而使學生把過程和理由

混在一起，弄不清楚。

第八步如 H 例，是偶然發現的，就在第七步的翌日，他對於 1 的九九特別不熟，細想一下，這的確有理由，九九表總是從二二得 4 開始，大家以為一二得 2，一九得 9，學生總應當知道，但是他偏偏不知道，這可以證明希望學生類推是危險的。

第九步是 1 和 0 相近的， (J)

如 I 例，

$$\begin{array}{r} 1029 \\ 4 \overline{)4118} \\ \underline{4} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1418 \\ 4 \overline{)5675} \\ \underline{4} \end{array}$$

第十步是商首位是 1 的，

如 J 例，

$$\begin{array}{r} 11 \\ \underline{8} \\ 33 \\ \underline{36} \\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ \underline{16} \\ 7 \\ \underline{4} \\ 35 \\ \underline{32} \\ 3 \end{array}$$

這二步和中途無論什麼地位有 1 的，我們化上好多次的練習，才把這困難通過。

此後，簡除的練習，只把數目的範圍擴大，到商四位

時，商中 0 的地位有下面這許多樣子： $\times \times \times 0$ ， $\times \times 00$ ， $\times 000$ ， $\times 0 \times \times$ ； $\times \times 0 \times$ ； $\times 00 \times$ ； $\times 00 \times$ ， $\times 0 \times 0$ ，但是他毫不困難的，認定了地位，很少會得把 0 弄錯，他對於 1，不如對於 0 的熟悉，到此，差不一已屆開學，我們才把短除法弄清楚，實在太慢了！我只願他學會，時間是不計較的。

14. 教學相長

教學相長，這話是很對的。從前用主觀的分析，曾把基本四則細分步驟，關於商末商間有 0 的，非常注意。但是沒有顧到 1 的困難。經過這一次的補習，才發現 1 的九九，也應當同樣的練習。從前在教法書裏，我曾很詳細的說明 1 的九九和 1×1 的啓發方法，並且也論到乘法練習時關於 1 也同樣的重要。但是論到除法時，却沒有注意到 1；現在才發覺這缺點，乘法中要注意 1，除法中當然也要注意 1，我們不能主觀的希望學生類推。要從乘法類推到除法，是不容易的，不應當類推，應當用 $1 + 1 = 2$ ，的原則。

根據這次補習的經驗，修正從前簡除法的分步，得到下面一種材料，供三年級下學期初學除法時和四年級開始時復習的用。這是爲編的。雖沒有經過大規模的測驗；但是試用起來，也適合用。快的學生一次通過，慢的學生做幾次也能通過。先舉分步的次序如下例：

除不絕的九九分 4 課。第一課如 $3 \overline{)25}$ ， $9 \overline{)88}$ 等，可以從三八 24，九九 81 等直接試商。第二課如 $4 \overline{)31}$ ， $7 \overline{)60}$ 等，試商時四八 32 不夠，七九 63 不夠，然後再推到四七 28，七八 56。第三課似第一課，但九九要倒想，如 $5 \overline{)24}$ ， $9 \overline{)38}$ 等，不容易從四五得 20，四九 36 直接從四試商，要倒過來，五四得 20，九四 36 試商。第四課似第二課，如 $6 \overline{)23}$ ， $8 \overline{)50}$ ，六四 24 不夠，八七 56 不夠，然後再推到六三 18，八六 48，有幾個學生這兩課要經過相當時

期的練習，這 4 課是前節第一步再細分的；三四年級學生，要分得這樣細，因為他們初學九九更不純熟，不細分學生的困難處無由查出，練習或者搔不着癢處，反而把時間浪費。這樣細分以後，很容易對症給藥。第五課就是前節的第二步，專學除法的計算過程，第六課前半續第五課，後半同前節第三步；第七，八，九三課都是這一步，第十課同前節第五步，商末有 0。以上被除數在千以內，商都限二位。

第十一到十三課，被除數仍在千以內，商擴充到三位，第十四課是商末有 0 的，第十五課是商中間有 0 的；彷彿前節的第六、第七步。

第十六到十八課，被除數擴充到四位，商三位或四位；彷彿前節第五步，並且包括第八步，第十九課是商末有 0 的，第二十課是商中間有 0 的；彷彿前節第六、第七步，並且包括第八、九、十步。

每課有同樣的甲、乙兩類，下面是材料的全部，每課中夾有以前一二課的材料若干。用時，時間不必限定。先注重正確，初步學習不必求快。

一甲

一乙

$$5 \overline{)29} \quad 3 \overline{)19} \quad 2 \overline{)15} \quad 4 \overline{)22} \quad 2 \overline{)5} \quad 4 \overline{)18} \quad 3 \overline{)19} \quad 2 \overline{)17}$$

$$4 \overline{)19} \quad 4 \overline{)38} \quad 3 \overline{)16} \quad 2 \overline{)13} \quad 5 \overline{)27} \quad 2 \overline{)9} \quad 4 \overline{)23} \quad 3 \overline{)22}$$

2)10	3)29	4)38	3)14	2)19	3)26	2)11	4)27
2)9	3)25	2)19	4)29	4)29	3)13	4)35	2)12
2)7	2)17	4)25	3)23	2)15	3)28	3)17	4)39

二甲

二乙

9)86	6)49	3)10	8)71	3)11	9)88	7)52	8)69
4)31	3)20	8)68	7)58	6)43	4)38	7)67	6)40
6)41	7)69	5)48	6)39	5)34	3)20	6)55	7)61
6)52	5)44	7)54	5)32	6)37	7)59	4)46	6)51
6)59	7)60	5)36	6)45	8)70	6)49	4)30	5)42

三甲

三乙

5)17	7)38	8)19	6)28	9)19	9)19	8)9	7)29	9)79	6)19
9)29	8)49	7)29	6)19	8)9	4)6	9)28	6)27	8)17	7)36
9)37	6)16	5)12	7)25	8)45	5)8	8)25	9)38	7)9	8)58
9)56	4)9	7)18	8)31	5)9	5)11	7)16	6)8	9)46	8)35
8)27	6)9	4)7	7)8	9)68	5)18	6)17	8)43	7)27	9)59

四甲

四乙

4)9	9)17	8)14	7)12	9)60	6)23	9)63	8)62	7)40	3)5
9)66	8)23	9)25	6)35	7)38	5)22	9)26	6)11	8)50	4)15

4)14 9)80 7)41 8)31 9)35 9)41 7)31 8)30 9)62 6)33

3)7 8)53 9)43 6)10 8)49 7)47 8)21 7)13 8)15 6)16

5)24 6)51 9)22 8)61 7)44 8)59 9)80 9)74 9)53 9)48

五甲

五乙

5)458 7)428 9)369 9)459 7)497 9)279 5)359 6)488

8)648 6)548 8)489 7)569 6)429 8)569 7)358 8)328

8)408 9)189 7)289 9)729 8)489 7)639 9)369 8)728

8)569 9)539 9)549 8)728 9)729 9)819 8)648 9)639

六甲

六乙

6)308 4)205 5)307 4)324 4)365 6)249 5)406 4)165

4)287 3)243 5)255 3)214 3)273 5)205 8)244 4)247

3)279 4)368 3)248 4)169 4)276 4)328 3)217 4)208

3)219 3)157 4)219 2)189 2)169 4)289 3)248 3)187

七甲

七乙

八甲

9)290 7)466 8)436 3)163 5)382 7)256

4)347 9)890

7)410 6)508

8)450 6)440 4)170 4)219 9)410 5)325

8)610 5)143

3)126 5)233 9)490 8)335 2)134 2)145 3)142 9)320
 2)153 6)160 3)220 6)375 4)215 7)514 2)172 7)505
 3)170 5)373

八乙

九甲

九乙

6)290 8)540 2)136 8)310 7)345 9)690 3)278 5)468
 4)275 5)237 9)908 4)395 5)198 7)600 9)610 6)358
 3)224 6)42 4)305 8)740 3)298 2)178 2)189 3)250
 7)190 8)670 2)171 5)414 6)573 4)390 6)505 7)660
 8)232 9)482
 4)319 2)196

十甲

十乙

十一甲

6)310 5)420 9)816 5)454 9)725 6)248 7)828 8)889 2)307
 7)508 4)322 9)564 4)283 8)491 7)634 3)590 3)375 6)709
 8)848 7)496 3)212 3)181 7)445 8)646 4)730 5)592 2)290
 9)730 6)365 2)181 2)160 6)545 9)641

十一乙

十二甲

十二乙

8)898 2)345 7)798 7)920 2)838 3)979 5)768 3)986 2)570

$$2 \overline{)277} \quad 3 \overline{)490} \quad 6 \overline{)719} \quad 2 \overline{)769} \quad 6 \overline{)909} \quad 3 \overline{)799} \quad 6 \overline{)805} \quad 2 \overline{)655} \quad 3 \overline{)848}$$

$$3 \overline{)388} \quad 4 \overline{)655} \quad 5 \overline{)610} \quad 4 \overline{)479} \quad 8 \overline{)929} \quad 5 \overline{)808} \quad 7 \overline{)835} \quad 8 \overline{)890} \quad 4 \overline{)497}$$

十三甲

十三乙

十四甲

$$2 \overline{)999} \quad 8 \overline{)970} \quad 5 \overline{)962} \quad 2 \overline{)777} \quad 7 \overline{)898} \quad 8 \overline{)987} \quad 2 \overline{)760} \quad 5 \overline{)803} \quad 8 \overline{)963}$$

$$6 \overline{)865} \quad 3 \overline{)888} \quad 2 \overline{)931} \quad 3 \overline{)869} \quad 6 \overline{)790} \quad 2 \overline{)909} \quad 4 \overline{)922} \quad 3 \overline{)872} \quad 6 \overline{)844}$$

$$3 \overline{)772} \quad 7 \overline{)980} \quad 4 \overline{)905} \quad 4 \overline{)973} \quad 5 \overline{)882} \quad 3 \overline{)790} \quad 7 \overline{)985} \quad 5 \overline{)752} \quad 4 \overline{)898}$$

十四乙

十五甲

十五乙

$$8 \overline{)965} \quad 5 \overline{)904} \quad 2 \overline{)981} \quad 8 \overline{)966} \quad 9 \overline{)988} \quad 8 \overline{)863} \quad 2 \overline{)617} \quad 3 \overline{)929} \quad 4 \overline{)830}$$

$$6 \overline{)965} \quad 3 \overline{)780} \quad 4 \overline{)963} \quad 7 \overline{)760} \quad 6 \overline{)647} \quad 5 \overline{)544} \quad 7 \overline{)766} \quad 6 \overline{)650} \quad 5 \overline{)549}$$

$$4 \overline{)860} \quad 5 \overline{)650} \quad 7 \overline{)846} \quad 2 \overline{)819} \quad 3 \overline{)625} \quad 4 \overline{)838} \quad 8 \overline{)870} \quad 9 \overline{)980} \quad 7 \overline{)935}$$

十六甲

十六乙

$$2 \overline{)1758} \quad 8 \overline{)7886} \quad 3 \overline{)1180} \quad 3 \overline{)1730} \quad 8 \overline{)7100} \quad 2 \overline{)1971}$$

$$4 \overline{)3070} \quad \overline{)98885} \quad 5 \overline{)1488} \quad 9 \overline{)6580} \quad 5 \overline{)1827} \quad 4 \overline{)3835}$$

$$\overline{)65770} \quad 9 \overline{)2009} \quad 7 \overline{)2700} \quad 7 \overline{)3000} \quad 6 \overline{)5090} \quad 9 \overline{)1044}$$

十七甲

十七乙

$$6 \overline{)2508} \quad 8 \overline{)4654} \quad 9 \overline{)5105} \quad 9 \overline{)3980} \quad 8 \overline{)3670} \quad 6 \overline{)3513}$$

$$7 \overline{)5906} \quad 5 \overline{)9483} \quad 6 \overline{)775} \quad 7 \overline{)6908} \quad 4 \overline{)9037} \quad 6 \overline{)8860}$$

$4\overline{)8770}$	$2\overline{)8791}$	$\overline{)5882}$	$3\overline{)4780}$	$2\overline{)7703}$	$5\overline{)8894}$
	十八甲			十八乙	
$5\overline{)7417}$	$8\overline{)9510}$	$2\overline{)5533}$	$2\overline{)3999}$	$5\overline{)7808}$	$7\overline{)9720}$
$4\overline{)3110}$	$4\overline{)9995}$	$7\overline{)8325}$	$4\overline{)3790}$	$8\overline{)9998}$	$5\overline{)5944}$
$6\overline{)8039}$	$5\overline{)6958}$	$3\overline{)9838}$	$6\overline{)7794}$	$4\overline{)7005}$	$3\overline{)8500}$
	十九甲			十九乙	
$4\overline{)3741}$	$6\overline{)5045}$	$9\overline{)5498}$	$5\overline{)3804}$	$7\overline{)5080}$	$8\overline{)5684}$
$2\overline{)9180}$	$3\overline{)6515}$	$7\overline{)9180}$	$4\overline{)5525}$	$3\overline{)7081}$	$6\overline{)7865}$
$3\overline{)8402}$	$3\overline{)7232}$	$3\overline{)9504}$	$2\overline{)7421}$	$3\overline{)6901}$	$8\overline{)9604}$
	二十甲			二十乙	
$9\overline{)6350}$	$8\overline{)6410}$	$3\overline{)9196}$	$8\overline{)4870}$	$7\overline{)6310}$	$3\overline{)5642}$
$2\overline{)7001}$	$4\overline{)8067}$	$2\overline{)6818}$	$2\overline{)8037}$	$3\overline{)6295}$	$4\overline{)9630}$
$5\overline{)8009}$	$3\overline{)9062}$	$3\overline{)9005}$	$6\overline{)9010}$	$9\overline{)9725}$	$2\overline{)8020}$

15. 長除法

長除法的計算方法，很難得到簡捷的。尤其是我們的補習，想了好多天仍舊沒有什麼新的發現。想從珠算入手；由珠算乘法渡到除法，再由珠算除法渡到筆算除法。此路不通！用老式的

歸除口訣吧，如許詞句，很不容易念熟。乘法九九的數目沒有多少，珠算加法的口訣也並不很多。但是他還不容易弄熟，何況一大批的歸除口訣前面已經說過乘九九是用表查了，漸漸純熟的，珠算加法口訣，是利用第二粒上珠後才減省的。總之，叫他背念口訣，是一件苦事。並且口訣能不能幫助計算動作，還是一個疑問？這不一定是通則，但是他的情形，的確如此。

照我筆算珠算混合教學法中所說，珠算除法的計算方式也和筆算一樣，可以免去一大批口訣的背念。那末應當從筆算到珠算，不應當從珠算到筆算。理由是筆算用文字，商的地位可以寫在被除數的上面，在算盤上，商只可以放在被除數的右面。簡除法的計算，形式他早已學會商寫在被除數上面的一種，現在長除法要改用另外一式，恐怕使他混亂，增加困難。所以先學筆算，將來再渡到珠算，比較的自然。算盤上定位子，的確不如筆算清楚。前面說過，乘法有0時，珠算只能計算有效數目；位子的決定，全靠筆算。這當然不是定例，在他，這樣辦法最有效。例如 22×8 , 3125×48 等，算盤上的結果只有 18; 155, 25 等，很不容易決定是 180, 1800, 1550, 250, 還是 2500, 一用筆算形式，他立即可以確定位子。他有這特長，我們應當想方法利用，從筆算到珠算，正可以利用這特長。

長除法最重要的，是試商。簡除法也要試商。但是除數只有一位，可以利用乘九九推測。例如 $1\overline{)378}$ ，第一次可以利用四九

36 推測商是 9；第二次可以利用四四 16 推測商是 4，就是像 $8 \overline{)290}$ 仍可以利用八四 32 推測第一商是 4，再利八六 48，八七 56 比較推測，決定商是 6。長除法的除數有兩位，試商時，要會得做純粹的心算乘法。例如 $2 \overline{)8090}$ ，第一次試商時先猜 2，然後做一個 $2 \times 26 = 52$ 的心算乘法；再猜 3，做一個 $3 \times 26 = 78$ 的心算乘法，最後比較決定商 3 比商 2 適合。他是不會做看不見東西的算學的，最好用可動的算盤珠，其次用可見的符號，最好不必多猜，一試即合。但這是要經過長時期的練習才能達到，這困難真困難！

因為乘九九用表查，得到效果；忽然又想到長除法也用表查。表九張，11 到 19，21 到 29，31 到 39，41 到 49，51 到 59，61 到 69，71 到 79，81 到 89，91 到 99，各用 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 乘。組成一表如下例：

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
31	62	93	124	155	186	217	248	279
32	64	96	128	160	192	224	256	288
33	66	99	132	165	198	231	264	297
34	68	102	136	170	204	238	272	306
35	70	105	140	175	210	245	280	315
36	72	108	144	180	216	252	288	324
37	74	111	148	185	222	259	296	333
38	76	114	152	190	228	266	304	342
39	78	117	156	195	234	273	312	351

替他做，或嫌太辛苦，那末和他合做，或者可以利用這機會練習心算乘法。後來，我決把這計畫拋棄了。做表未必壞，但是用表很不方便。要在九張裏揀一張，恐怕浪費時間。一張乘九九表的用熟，要化半個月，九張表的用熟，不是要4個半月嗎？恐怕這不是成功直線比例的，表愈多，應化的時間或更多。

最後，因為找不出新路道，所以仍舊用老方法，從筆算開始，把試商的難易，分作三大段落。入手時，除數的個位全是1，例如21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91等。另外的分步不太細，因為在學習簡除法時，已經一一學會。第一段落只分作三步：

第一步如 $31 \overline{)3480}$, $31 \overline{)8052}$ 等，被除數首二位，至少包含一個除數。試商時，叫他照簡除法一樣，就是 $31 \overline{)34}$ 只算看見 $3 \overline{)3}$ ； $31 \overline{)80}$ 只算看見 $3 \overline{)8}$ ；所以在這時的主要學習，集中在商的地位上。簡除法 $3 \overline{)8}$ 時，商2應寫在8上；現在 $31 \overline{)80}$ 商2應寫在0上。

第二步如 $71 \overline{)2485}$ 等，被除數首二位24，比除數71小，所以要從248開始；第一個商3，應寫在8上。試商時仍當作 $7 \overline{)24}$ 看，推得3。

第三步如 $31 \overline{)9084}$, $71 \overline{)2116}$ 等。試商方法不能完全和簡除法同樣。若是當作 $3 \overline{)9}$ 或 $7 \overline{)21}$ 看，商便各是3，但是乘起來 $3 \times 31 = 93$, $3 \times 71 = 213$ ；93比90大，213比211大。商8太大，應改作2，因為心算不熟，所以不預先對他多講這等理由，由他

用嘗試錯誤法 經過幾天以後 他自己漸漸明白，他的方法是凡逢 $8 \overline{)9}$, $7 \overline{)21}$ 或 $8 \overline{)48}$ 等恰夠時，商應當減少 1，這不是我教的，是他自己從嘗試錯誤中發現的。既經明白這樣試法，便把除數的個位從 1 擴張到 2, 3 等，如 $62, 43$ ，這不必另作一步，因為主要的困難點是相同的。例如 $62 \overline{)1858}$ ，當作 $6 \overline{)18}$ 看時，商是 3；但是 3×62 是 186，比被除數首三位 185 大 1，所以商應當是 2，不是 3，他嘗試錯誤中發現的方法，仍舊可用。不過有時商不必減 1，如 $62 \overline{)1885}$ 究竟商應否減 1，還要等乘後把積和被除數比較後才能決定。因此常常要發生塗改的情形。塗改不合法，容易引起錯誤。減免的方法，前面已經說過。到此，就長除法試商的一點論，才不過是入門第一步罷了。

16. 最後一關

長除法可以說是初等算學的最後一關，也可以說是計算過程的最重要的一關。就長除法的三大段落論，第二段，還不是最難的一關。例如 $29 \overline{)9184}$, $49 \overline{)5005}$ 等 我教他試商時，29 當 3，49 當 5，所以仍和上節所說一樣，當作 $3 \overline{)9}$ ，或 $5 \overline{)5}$ 看，商不難一試即得。這一段可分兩步；第一步包括 $29 \overline{)9184}$, $39 \overline{)2950}$, $49 \overline{)4898}$ 等，29 當作 3，試時看作 $3 \overline{)9}$ ，商是 3；39 當作 4，試時看作 $4 \overline{)29}$ ，商是 7；49 當作 5，試時看作 $5 \overline{)48}$ ，商是 9，這一步的主要點是在 29 作 3，39 作 4，49 作 5，其實是 29 作 30，39 作

44, 49 作 50, 因為說話便利起見, 所以我對他不說三十, 四十, 五十一, 說三, 四, 五等. 我覺得和他說話, 宜簡明; 不可嚕噓. 算學中的詞句, 往往冗長繁雜, 他最怕, 最不容易明白. 算學注重理論, 有時不得不把詞句弄得冗長繁雜. 小學生學算, 恐怕技術方面重, 理論方面輕. 表達技術的過程, 儘可以用簡明的詞句. 因為這時並不是討論或證明數理, 就是數理專家做除法時, 也決不是咬文嚼字. 想到這除數的 3 是三千或三萬, 計算方法愈簡愈好, 就是一個三, 完了.

第二步是 $29 \overline{)1175}$ 等, 照上面試商時, 商太小, 應加 1, 29 作 3, 當 $3 \overline{)11}$ 看, 商是 3; $3 \times 29 = 87$, $117 - 116 = 30$, 減餘的 30 比除數 29 大, 商應當加 1, 商 4; $4 \times 29 = 116$; $117 - 116 = 1$ 這比前節第二步更難. 前節只須乘出, 立即可以發現不夠減, 便把商減 1, 這裏要等減後, 才發現餘數比除數大, 商應當加 1, 初學除法的孩子, 對於這一點往往不明白. 所以會得發生好多滑稽的錯誤. 例如 $8 \overline{)738}$, 第一商應是 9, (甲) (乙)

$8 \overline{)738}$	$\begin{array}{r} 92 \\ 72 \\ \hline 18 \\ 16 \\ \hline 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 812 \\ 2 \overline{)738} \\ 64 \\ \hline 9 \\ 8 \\ \hline 18 \\ 16 \\ \hline 2 \end{array}$
---------------------	--	---

但是有人當作 8, 於是 $73 - 64 = 9$, 再用 8 除, 商 1; 這樣一個 9, 分析成功 8, 1 兩位, 原來應如甲式, 現在變成乙式; 商原應為 92, 現在變成 812, 小孩子做錯了, 還自己看不出. “減餘一定要比除數小,” 這是應當使學生明白的. 並

且還要養成一種習慣，減後立即拿除數和餘數比一比。除數的個位數，改用 8, 7 如 $7, 88$ 等，不必另作一步。

最後一關，也就是最難的一關，除數末位是 5, 6, 7 如 35, 47, 56 等。全段雖不必再分步驟，但是試商更不容易，並且沒有什麼可以利用的捷徑。因此，塗改的機會愈多，愈容易發生錯誤。有時一改再改，弄得自己看不出是什麼數目。這一關真不容易通過！“踏破鐵鞋無覓處，得到全不費功夫。”補救這缺點的方法，原來是最省便，最呆笨的，例如 $74 \overline{)66404}$ ，他筆寫的形式，

比平常多了幾個乘法，地位就在除數的下面；另外和平常一樣。如右例： 74 當作 7 ，看作 $7 \overline{)66}$ ，商是 9 ，暫且不寫在被除數上，先寫在除數 74 下，做乘法得 666 ，這比被除數 664 大，商是 8 寫在被除數上， $8 \times 74 = 592$ ，減餘 72 ，比 74 小； $74 \overline{)720}$ ，商 9 ，寫在被除數上， $9 \times 74 = 666$ ，減餘 54 ，比 74 小； $7 \overline{)54}$ ，商 7 ，寫在除數下面，做乘法，得 518 ，商寫在被除數上，抄 518 在 540 下，減，餘 22 ，比 74 小。這是避免塗改的一種寫法，於試商方面，也有相當的幫助。有時第一商不合，乘出的積，可以供第二商或第三商的利用。上例，第二商 9 ，只須抄 666 到 720 下，不必再做乘法。

$$\begin{array}{r}
 897 \\
 74 \overline{)66404} \\
 \underline{9 \ 592} \\
 666 \ 720 \\
 \underline{7 \ 666} \\
 518 \ 540 \\
 \underline{ \ 518} \\
 22
 \end{array}$$

除數首位是 1 的，如 11, 19, 15 等。雖不必獨立成一段落，但是也應當多練。因為簡除法中除數沒有用 1 的，所以初看見

到除數 12, 13, 11 等的除法, 反而會得不知從何下手. 學乘九九時忽略一九得 9, 一等的, 到這時, 尤其覺得困難. 如有必要當作一步也好. 我們補習時是混在各段落各步中的. 在第一段裏插 11, 12 等; 在第二段裏插入 19, 18 等; 在最後一關時插入 15, 17 等.

根據這一次經驗, 擬定四年級學習長除法的步驟. 應如下例.

一、是除數兩位, 個位是 0, 這是我們補習時沒有的; 爲四年級初學時用, 這一步是不可缺的. 試商和簡除法完全一樣. 題目應包括下列六式:

$$40 \overline{)8569}, \quad 30 \overline{)8425}, \quad 20 \overline{)8014}, \quad 70 \overline{)7220}, \quad 50 \overline{)2630}, \quad 60 \overline{)5454}.$$

二、是第一段落的第一步和第二步, 題目有下列六式. 前四式是第一步, 後二式是第二步.

$$\begin{array}{r}
 413 \\
 21 \overline{)8690} \\
 \underline{84} \\
 29 \\
 \underline{21} \\
 80 \\
 \underline{63} \\
 17
 \end{array}, \quad
 \begin{array}{r}
 320 \\
 31 \overline{)9935} \\
 \underline{93} \\
 63 \\
 \underline{62} \\
 15
 \end{array}, \quad
 \begin{array}{r}
 200 \\
 41 \overline{)8232} \\
 \underline{82} \\
 32 \\
 \underline{21} \\
 11
 \end{array}, \quad
 \begin{array}{r}
 209 \\
 31 \overline{)6488} \\
 \underline{62} \\
 288 \\
 \underline{279} \\
 9
 \end{array}, \quad
 \begin{array}{r}
 96 \\
 41 \overline{)3956} \\
 \underline{369} \\
 266 \\
 \underline{246} \\
 20
 \end{array}, \quad
 \begin{array}{r}
 40 \\
 71 \overline{)2864} \\
 \underline{284} \\
 24
 \end{array}$$

三、是第一段落的第三步, 題目有下列四式. 商三位, 末二個 0, 或中間 0 是不容易遇到的.

$\begin{array}{r} 98 \\ 51 \overline{)5000}, \\ 459 \\ \hline 410 \\ 408 \\ \hline 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 67 \\ 62 \overline{)4210}, \\ 372 \\ \hline 490 \\ 434 \\ \hline 56 \end{array}$	$\begin{array}{r} 282 \\ 33 \overline{)9310} \\ 66 \\ \hline 271 \\ 264 \\ \hline 70 \\ 66 \\ \hline 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 290 \\ 33 \overline{)9584}, \\ 66 \\ \hline 298 \\ 297 \\ \hline 14 \end{array}$
---	--	---	--

商位末位既擴充到 2, 3 等, 下列六式試商可用前一步的方法, 也附帶在這時學習.

$\begin{array}{r} 217 \\ 32 \overline{)6954}, \\ 64 \\ \hline 55 \\ 32 \\ \hline 234 \\ 224 \\ \hline 10 \end{array}$	$\begin{array}{r} 250 \\ 33 \overline{)8260}, \\ 66 \\ \hline 166 \\ 165 \\ \hline 10 \end{array}$	$\begin{array}{r} 200 \\ 43 \overline{)8634}, \\ 86 \\ \hline 34 \end{array}$	$\begin{array}{r} 208 \\ 43 \overline{)8952}, \\ 86 \\ \hline 352 \\ 344 \\ \hline 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 72 \\ 62 \overline{)4488}, \\ 434 \\ \hline 148 \\ 124 \\ \hline 24 \end{array}$	$\begin{array}{r} 70 \\ 82 \overline{)5800}, \\ 574 \\ \hline 60 \end{array}$
---	--	---	---	--	---

四、是第二段落的第一步, 有下列五式, 商二位, 末二個 0 是不容易遇到的.

$\begin{array}{r} 316 \\ 29 \overline{)9184}, \\ 87 \\ \hline 48 \\ 29 \\ \hline 194 \\ 174 \\ \hline 20 \end{array}$	$\begin{array}{r} 310 \\ 29 \overline{)9005}, \\ 87 \\ \hline 30 \\ 29 \\ \hline 15 \end{array}$	$\begin{array}{r} 206 \\ 29 \overline{)6000}, \\ 58 \\ \hline 200 \\ 174 \\ \hline 26 \end{array}$	$\begin{array}{r} 97 \\ 89 \overline{)8652}, \\ 801 \\ \hline 642 \\ 623 \\ \hline 19 \end{array}$	$\begin{array}{r} 60 \\ 79 \overline{)4804}, \\ 474 \\ \hline 64 \end{array}$
---	--	--	--	---

五、是第二段落的第二步，有下列六式

$$\begin{array}{r}
 316 \\
 28 \overline{)3852} \\
 \underline{84} \\
 45 \\
 \underline{28} \\
 172 \\
 \underline{168} \\
 4
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{r}
 310 \\
 38 \overline{)7995} \\
 \underline{76} \\
 39 \\
 \underline{38} \\
 15
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{r}
 200 \\
 29 \overline{)5820} \\
 \underline{58} \\
 20
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{r}
 204 \\
 27 \overline{)5510} \\
 \underline{54} \\
 110 \\
 \underline{108} \\
 2
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{r}
 82 \\
 38 \overline{)3199} \\
 \underline{312} \\
 79 \\
 \underline{76} \\
 3
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{r}
 40 \\
 2 \overline{)1175} \\
 \underline{116} \\
 15
 \end{array}$$

這時可以把商末是 7, 8, 而試商可照前一步方法的附學, 如下式等類, 商末或中間有 0 的, 不容易遇到。

$$\begin{array}{r}
 321 \\
 28 \overline{)9000} \\
 \underline{84} \\
 60 \\
 \underline{56} \\
 40 \\
 \underline{28} \\
 12
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{r}
 62 \\
 48 \overline{)3000} \\
 \underline{288} \\
 120 \\
 \underline{96} \\
 24
 \end{array}$$

六、是第三段，有下列六式，試商方法 到此完成；練習題目，可以包括各式各樣。

$$\begin{array}{r}
 283 \\
 25 \overline{)7086} \\
 \underline{50} \\
 208 \\
 \underline{200} \\
 86 \\
 \underline{75} \\
 11
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{r}
 310 \\
 25 \overline{)7766} \\
 \underline{75} \\
 26 \\
 \underline{25} \\
 16
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{r}
 204 \\
 44 \overline{)900} \\
 \underline{88} \\
 200 \\
 \underline{176} \\
 24
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{r}
 200 \\
 35 \overline{)7024} \\
 \underline{70} \\
 24 \\
 720 \\
 \underline{666} \\
 54
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{r}
 89 \\
 74 \overline{)6640} \\
 \underline{592} \\
 720 \\
 \underline{666} \\
 54
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{r}
 40 \\
 76 \overline{)3112} \\
 \underline{304} \\
 72
 \end{array}$$

七、是除數首位是 1 的，有下列各式。首二式試商時可以當作 1 或 2；第三四兩式試商要增 1 或減 1；第五式是商的末位是 5, 6, 7 的，另外幾式是商有 0 的。

$\begin{array}{r} 724 \\ 11 \overline{) 7968} \\ \underline{77} \\ 26 \\ \underline{22} \\ 48 \\ 44 \\ \hline 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 216 \\ 19 \overline{) 4114} \\ \underline{38} \\ 31 \\ \underline{19} \\ 124 \\ 114 \\ \hline 10 \end{array}$	$\begin{array}{r} 535 \\ 12 \overline{) 6437} \\ \underline{60} \\ 43 \\ \underline{36} \\ 71 \\ 60 \\ \hline 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 227 \\ 17 \overline{) 3860} \\ \underline{34} \\ 46 \\ \underline{34} \\ 120 \\ 119 \\ \hline 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 626 \\ 15 \overline{) 9400} \\ \underline{90} \\ 40 \\ \underline{30} \\ 100 \\ 90 \\ \hline 10 \end{array}$
--	---	---	--	--

$\begin{array}{r} 420 \\ 12 \overline{) 5050} \\ \underline{48} \\ 25 \\ \underline{24} \\ 10 \end{array}$	$\begin{array}{r} 408 \\ 13 \overline{) 5308} \\ \underline{52} \\ 108 \\ 104 \\ \hline 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 307 \\ 18 \overline{) 5527} \\ \underline{54} \\ 127 \\ 126 \\ \hline 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 307 \\ 16 \overline{) 4920} \\ \underline{48} \\ 120 \\ 112 \\ \hline 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 430 \\ 14 \overline{) 6030} \\ \underline{56} \\ 43 \\ 42 \\ \hline 10 \end{array}$
--	--	--	--	---

拿這等材料，編成四年級學習長除法時的題目，第一步和第七步各一課，另外各步各兩課，計共十二課。每課分甲乙兩類，被除數不滿萬。各課題目如下：

一甲

一乙

$4 \overline{) 8564}$	$30 \overline{) 8425}$	$50 \overline{) 2630}$	$30 \overline{) 9756}$	$40 \overline{) 9286}$	$60 \overline{) 3365}$
$2 \overline{) 9782}$	$40 \overline{) 8035}$	$60 \overline{) 5650}$	$50 \overline{) 7662}$	$20 \overline{) 8014}$	$40 \overline{) 3580}$

70)3553̄ 80)8183̄ 30)6103̄ 80)4864̄ 70)7220̄ 20)4175̄

二甲

二乙

21)8690̄ 41)3956̄ 41)8232̄ 31)6975̄ 71)3280̄ 31)9325̄

31)9935̄ 71)3800̄ 31)7850̄ 41)9867̄ 51)4750̄ 21)7270̄

三甲

三乙

31)9770̄ 61)5002̄ 71)2864̄ 21)6874̄ 51)3300̄ 81)6476̄

31)6488̄ 41)3500̄ 21)8760̄ 41)8500̄ 61)3355̄ 31)9730̄

四甲

四乙

51)5000̄ 23)6789̄ 73)7204̄ 61)6040̄ 43)8540̄ 83)8200̄

82)6464̄ 43)8200̄ 33)8260̄ 93)7232̄ 33)9584̄ 82)5800̄

五甲

五乙

81)8050̄ 33)9310̄ 63)6210̄ 71)7008̄ 42)8330̄ 53)1190̄

73)3516̄ 23)6680̄ 62)488̄ 62)4210̄ 33)9240̄ 43)8952̄

六甲

六乙

29)9184̄ 89)8652̄ 39)9450̄ 29)8350̄ 79)6745̄ 29)9600̄

29)9004̄ 59)4996̄ 79)4800̄ 39)8000̄ 69)6600̄ 89)5400̄

七甲

七乙

39)8625̄ 69)900̄ 29)9560̄ 29)608̄ 79)7440̄ 39)9130̄

29J6000 89J3475 79J3205 39J9000 59J4620 69J4204

八甲

八乙

28J8852 39J3198 37J7790 28J8900 58J4736 28J5950

48J3468 29J5820 28J9000 69J5595 28J8544 77J4800

九甲

九乙

28J8876 49J2499 38J7995 28J8886 68J4880 47J9898

58J3584 29J1175 37J3100 39J2798 27J5510 48J3000

十甲

十乙

25J7086 36J3112 65J5680 44J8050 35J7024 74J6640

44J9500 34J8040 54J4020 34J7000 26J5735 66J6400

十一甲

十一乙

24J9030 36J7230 95J3100 36J8473 85J4268 76J5585

35J7110 44J9252 84J6237 45J9280 25J7766 94J3200

十二甲

十二乙

11J7948 13J5308 19J4114 11J4966 12J5050 18J6000

18J5527 15J9400 12J6431 19J7755 14J3400 13J7958

17J3860 14J6030 ——— 17J5460 16J4920 ———

17. 注意的訓練

周圍的人都批評他粗心，做事疏忽大意。教師說他不用心。學算最怕不注意；一不小心，便要錯誤。因疏忽大意而發生的錯誤，他的確是要常犯的。爲注意而訓練注意，恐怕是不可能的；學算所成就的注意，未必能遷移到別處。空講斥責，都不是有效的辦法。我想第一步還是先使他對於所學有相當的認識。不認識無從注意。當然，要澈底認識，須經過注意，才能達到。不識字的人看到一本書，和不懂別國文字的人看外國文一樣。只見一大篇曲曲彎彎的花樣，那裏辨別得出是什麼。初看見外國人的面貌也不容易分別出是甲是乙；彷彿凡是外國人的面貌都是一律的。在這樣的情況下，一篇糊塗眼，完全不懂，誰能高興注意。所謂適合程度，實在就是注意的起點。凡是適合程度的，就是他懂得一些大概或一局部而能分辨得出的。教材加速進行，距離學生能力愈遠，對於教材愈不認識，所以愈難引起他的注意。補習的題目，要是能和他的能力適合，那末從認識的開始，決不會因不認識而不注意了。太熟悉了，也很容易使他疏忽；疏忽，就是不注意。所以，在認識的中間，要夾不認識的，才能使注意集中在不認識的一部分上，可不是嗎？在一羣熟悉的同學中，忽然來了一位不認識的新同學，很容易使全體的注意集中在一人身上；這一位同學，不久便會得被大家認識。算學教材的編排，

很容易適應這種情景。所以 $1+1=2$ 的原則，很自然的可以使學生注意。

第二步是，自信和注意，有密切的關係。對於自己沒有把握的事，往往不很關心；孩子如此，成人也如此。所以動作的經過，不能過分繁複。太繁複了，頭緒紛繁，無從下手。就此不高興再注意。例如 $35 \times \{4 + [80 \div 20 + 20 \div (15 - 5)]\}$ 這樣一個題目，實在是三年級學生也可以用心算求出結果的，只要把繁複的括

弧去掉，改成簡明的算式 $\frac{15}{-5} \quad 10 \div 20, 20 \div 80, \quad \frac{4}{+2}, \quad \frac{4}{+6}, \quad \frac{35}{\times 10}$ 。

我們補習用的材料注意要練習得純熟，所以動作的經過不躐等，也守着 $1+1=2$ 的原則，每次只加一種新的動作；並且非到某一種相當純熟後不再加新的。他每天補習，好像很有把握似的，自信有控制這些題目的能力。不過，自信過分，有時也不免要輕忽從事。我常叫他“慢慢的做！”這話很簡單，但是很有效力。所以他聽到這話時，數字也寫得清楚整齊了好多。接着我再說一聲“好！”他聽了很滿意，能維持下去。自己明白進步，很可以增加自信；間接，就能訓練注意。遊戲方法也用過，後來漸漸引他拿自己的進步當作一種比賽看。遊戲的注意，是苦藥外的糖衣，注意往往只在浮面。要注意到自己的成就和進步，才能進入永久注意的境地。

斥責最要不得。因為使學生怕的，學生要注意逃避，心無二

用，注意集中在會不會再受斥責或者怎樣逃避斥責的一方面，當然來不及再注意到功課的本身上面。以前曾經說過，因為外界的干擾他自己也知道控制自己的分心，但是因為把注意集中在避免分心上，恰恰成功了分心，於是功課的本身發生不自知的錯誤。別人的談話有時能使他分心，我聽其自然，這是沒有方法求速效的。阻止別人談話，未必是最妥當的方法，因為這等特殊的環境太理想化了。成了習慣，反而有害無利。我們日常生活中，總有多少人聲。一定要完全沒有人聲時，才能計算，這人不是變了怪人？就經過情形論，人聲使他分心的情形，好像一天減少一天。最大的原因，是他對於算學的注意一天一天的增進，對於算學的認識，對於算學的自信，因練習而一天一天的增進，當然，注意也跟了增進，斥責沒有用，勸說也徒勞。正在分心時，再加上一個警告，至多能使他注意轉移到我的聲音語言上來，仍不能使他注意到計算上去。有時看見他對於數字發生恍惚時，我輕輕地用筆向應算的數字上指一指，使他眼光不看到旁的地方去。我嘴裏不開口，恐怕他耳朵聽了我的話，眼睛反而混亂了。珠算也是如此，用手指盤上的珠，或幫他撥一撥，他自然把注意回到珠上來了。

疲倦的確是注意的仇敵。有一次才從作客回來，忽然在計算的中途瞌睡了，早早結束，不勉強他再做。有一次天熱，身上穿多了衣服，又要瞌睡了，我叫他脫去衣服，休息幾分鐘再做。

我們有時太不明白學生的苦衷。例如初夏黃霉季節，學生多數要瞌睡；根本原因不在他們用心不用心，在氣候的不合。這種氣候，愈用心靜坐的人，愈容易睡去。那些不聽講而私下玩弄東西的人，因為手動可以好些。不注意聽的人醒着，注意聽的人睡去。睡的受罵，不是冤枉？倦時打算盤不容易睡；倦時做筆算很容易睡。拿出紙片來做遊戲，手能大動，疲倦便不見了。我們在炎熱天時，做遊戲比較多些；秋涼後，差不多不做了。另一方面他的興味也能從遊戲漸漸過渡到算學本身上，所以遊戲的需要便減少了。

實在，一時的注意，價值並不大；最貴重的是恆久的注意。所以引起注意並不困難；維持注意，卻要化教師相當的努力。最主要的關鍵，實在是教師自己的耐性。我常說，不要責備學生沒恆心，且先問一問自己的耐性有多少。過分熱心的教師，忘記了自己學習時的經過，更忘記了自己現在的滔滔不絕大半是多年教熟了的，急急希望學生在自己三言兩語下學會。學生學不會時，不會得改換更好的方法，只會得斥責，罰。這是認真的好教師，但是學生不會得進步。有的教師，自己也好像孩子一樣，隨說隨忘。高興時雷厲風行，嚇得學生不敢出聲。只要稍過幾時，他自己也不耐煩起來，把這事束諸高閣。在考卷上發現了成績不及格的學生，嘴裏說了幾句便算了結，從不想什麼補救的方法。偶然或者也來一個補救方法，但是除非能藥到病除，不然便沒有

耐性等學生漸漸的生長發展。所以方法的結果，總是在莫明其妙中消滅。沒耐性的人，或者是不宜做教師的，有人說，豈但教師，恐怕什麼都不宜做，做農夫吧！等不到收穫，做工人吧！等不到完工，只有看幻術，立刻可以把米變成酒，我們一向來的教育，都是叫學生看幻術，因此，造成功了五分鐘的熱度，在這樣教育中養成的教師，怎能叫他們有耐性？教師沒有耐性，怎樣使學生維持注意；有永久的注意？某人說得似乎太過火了些，然而他的話確有幾分真理，他說，要是這等幻術教育普及到全國，而收得確實效果的，那末原來農夫工人們固有的耐性，不將完全消滅，民族前途，何堪設想！我說言重！言重！幸而大多數孩子還保持着固有天真，自己注意他們好玩的事情，自己教育，自己訓練，還能保持耐性。

注意並不是神妙不可測的，教師自己對於教學這一件工作，只要肯耐性注意，總可以收到相當的成效，以身作則，並不是在學生面前裝腔作勢扮假道學，自己的注意；的確能引導學生注意；自己的耐性，的確也能養成學生耐性，方法技術是輔助品，注意耐性是根本的要件，沒耐性的教師，愈多弄技巧，愈變成功幻術，但是我的意思並不是看輕技術，技術方面高明的教師，可以得到最大的效果，平常不注意而沒有耐性的人，技術方法也不過皮毛罷了，不化苦工，怎能深造？

18. 學習的轉移

從前形式陶冶論盛行的時候，大家以為學算可以使人思想正確精密，現在的學習心理，都沒有這等玄妙的理論，所以課程標準中規定的算學目標第三條，只說：“養成……的習慣。”習慣的轉移，不像形式陶冶論那般玄妙，完全是行為上確切的表現。口背乘九九，對於筆算或珠算的乘法計算，幫助並不很大；查表對於筆算乘法確有很大的幫助，這是這次得到的事實。筆算的動作在眼看筆寫，查表的動作是眼看。兩者的動作很相類似，所以轉移便利。口背和眼看筆寫，完全兩樣，所以轉移不便。學習並不是絕對不可轉移，一切技能習慣都如此。要是絕對不轉移的話，那末會做書上的題，決不會應用這算法來解決日常生活的問題。這樣，教育的可能性不將縮減到極微極細？若把轉移的意義弄錯，以為只須三言兩語，整批的把教材在短時期內和盤托出，學生便會得自己類推，那又錯誤之至。尤其是算學，舉一反三的類推方法，非到較高程度，殆不可能。

學習的副成就，不可和轉移混作一談。我不信算學可以使人思想細密，我更不信補習算學可以使孩子脾氣變好。但是事實卻的確有好多行為上的改進。這決不是算學的轉移，還是叫做學習的副成就較妥。他自從補習算學以來，好像很能自知要好，我的觀察如此。周圍人的評論也如此。頑皮減少了，說話肯

聽從了；母親的愛不必像從前般要用烟幕來隱蔽，父親也減少斥責，常常好顏對他了，環境裏有了這樣的變動，他心上一定不像從前般孤寂，他受到的作用改良了，所以他的反作用也跟了改良，這是人情之常，成人如此，孩子也如此；並沒有什麼希罕。人的生活是相互的，從前大家輕視他，他只能向可以受他控制的幼孩方面去發洩他的力，現在，他不必如此，所以頑皮的行動，自然而然的減少，起先，他只對於我是聽從的，對於母親還是倔強，後來他對於父母兄輩都比較的能聽從了，或者別人對他的斥責減少，所以恢復了常態，開學後換了一位新的級任教師，叫他做級長，他在校裏很平安，沒有什麼可以受罰的行爲，從前他父親特地做了竹杖，交給教師責打，責打的後果是頑皮；頑皮的後果是責打，互相循環，到最後恐怕責打和頑皮都要達到無窮大，現在看到的副成就，要是繼續下去，愈不斥責，他愈好；愈好愈不受斥責，也是相互循環，到最後，可以使斥責和頑皮都達到零，我並不希望訓練他的行爲，我只和他成立一種友好的關係，同時使他周圍的人認識他的長處和進步，大家漸漸明白了他的長處，他的進步，便改變了對他的態度，從這個轉變點，得到了這一種副成就，這是我始料所不及的，我經過這一次的經驗，益堅決的相信，責備不是教育，是反教育，理由是很簡單的：教師做的工作，實在不過是一種引導，我們要做引導，第一要使他信仰，肯和我接近，拿學習當做走路看領路人應當使他肯和我同

走。若是他心裏疑惑我是騙子，或者他怕我是略劫的強盜，他還肯和我同走嗎！我們教孩子，應當說“這裏來！”不應當說“那邊去！”責罰最容易引起反抗或逃避，這都和接近相反。他心裏不信我，怕我，反抗我，逃避我，怎肯再和我同走？責罰至多能算是捉犯人的鍊索，我們可以用來強拉學生，跟我們走，但是他一有機會便想脫逃。

他不但信我，和我接近，待我好，他常在別人前自誇；他最得意的是我教他。他起先或者以為我不肯教他，不屑教他。後來漸漸和我接近，知道我的確是他的朋友，替他解決了好多算學上的困難。他是孩子，所以很天真的信仰我，所以我無論說什麼話都是聽從。其實，我對他並不多干涉，孩子應當做的頑皮，我從不禁他。偶然，有一二次勸告，他總是帶了微笑接受。他得意，我也得意；我常和他家中人說，他最是我得意的高足。我只教一些算學，但是我卻改善了他不少別的行爲。這一次的經驗，我實在收到教訓合一的效果。開學後第一次小考，他的算學分數是40多分。他不敢告訴我。他自己對別人說，我天天和他補習，他只考得40多分，心上很對不起我。好孩子！他也能體諒到我的心。我教他的只是些加法、乘法、除法，他考的是小數分數。上學期只有6.8分，現在得到40多分不是極大的進步！這不是學習的轉移，恐怕是他對於學算態度的改變。原來怕的，現在不怕的了；原來要逃避的，現在肯接近了。要引導學生學習，應當使他

和教材接近。嚴厲的考試，只會得使學生對於教材恐懼，對教材恐懼，對教師反抗或逃避，這樣的心理，怎能學得成功？

在初開始補習的幾天裏，有一天他父親和我談到他的學業問題，我把他特長說出來，並且說他補習算學已有些進步，淚珠在眼眶中，他父親說了幾句客氣話，父母說沒有不愛子女的，急急希望速成，於是只看到子女的短處，不看到子女的長處，因愛生恨，弄得親子間的關係也疏遠了，要是教師不小心，把子女的短處缺點，不絕的向父母報告，不是暗暗裏在做一種離間的工作！報告家長，原來是好意，變成離間，罪大惡極！最可咒咀的是成績不好，叫家長督促，專業的教師，為什麼不負這責任？我若是家長，一定對教師說：“先生學了些什麼？先生拿什麼薪俸？”教師不會教，回給家長，不就是教師自己宣告失敗？自認失敗，應當退避賢路，還厚着臉混飯吃！父親的愛恢復了，這是副成就中的副成就，我很自傲這成就！

19. 括弧

開學以後，我補習的仍舊按照他的實在需要，一步一步的進行；大多數的努力，用在長除法，有時，校裏教師指定的宿題，他拿來問我，第一次要我補的，是書上的“練習測驗一”前半十二個式題，後半十二個應用題，式題如下：

$$1. 18.2 \times 7 + 17.4 \times 9 = \quad 2. (1.26 + 43.52) \times 1.8 =$$

3. $7.75 \times 25 - 51.24 \times 3.1 =$ 7. $0.602 \div 5 - 0.088 \div 1.1 =$
4. $(8.688 - 5.947) \times 26 =$ 8. $65.31 \div (4.5 - 3.8) =$
5. $(6.121 + 9.744) \div 5 =$ 9. $(12.83 + 1.08) \div 13 =$
6. $87.2 \div 4 + 64.8 \div 0.8 =$
10. $(3.5 - 2.1) \times (0.4 \div 0.064) =$
11. $\{[(0.05 + 4.56) \times 1.5 - 1.092] \div 0.25\} \times 1.056 =$
12. $15.64 + \{[9.95 - (3.5 + 2.1 \times 0.2)] \div 0.75\} =$

練習測驗？幸而我編造過練習測驗，還辨別得出復習題和練習測驗的區別。弄不清名稱害處還小；最荒謬的，是以前 21 頁，只是做的小數加法、減法、乘法、除法，連應用問題裏也沒有一個要用到二種方法的。在 22 頁上忽然出現這一批題目，教師偏偏又指定作宿題；這樣的教材，這樣的教法，我除苦笑外，還有什麼話說？我猜不出編者的意思是什麼？練習小數四則的計算，還是練習括弧的撤去？我不知道我們日常生活中應用小數時，要用幾套括弧？我不知道編書人到書店裏買三種書，二種文具時，自己計算付款的數目時，用什麼算式？我是不用括弧的；在日常生活中，我活了如許年紀，從來沒有用過括弧，要用括弧的，不是小學程度的算學，是用文字作成的公式；我用得很多，但是也沒有用到二套的，叫小學生做三套括弧，究竟是什麼用意？根據課程標準那一條目標？作業要項表那一條？我化了好多時間，查不出來，但是封面上卻印着“新課 標準適用”字樣。我尋不出

適用的是什麼？這種誤人子弟的教科書，該不該禁止發行？囹圄吞棗的指定宿題，偏偏指定這一批寶貝題目，教師的用意，我也莫測高深。幫他算好，交去，過了幾天，問他結果怎樣，他說，教師沒有看，把練習簿重又發了出來。沒結果的練習，我又不曉是什麼神妙的教法，我幫他學算，教師偏偏和我開玩笑，天呀！

他是小叔叔，和聰明的姪兒在同一班。姪兒比他低半年，是五年前學期；他是五年後學期。春秋二學期的五年生，是複式編制的。姪兒很聰明，算學不必補習。但是有一天，突然拿了書來問我。我細細一看，又是一大批的括弧式題，一樣的有 $\{\}$ $()$ $()$ 三套，所不同的，是整數。課程標準作業要項表裏，只有整數四則的應用，並沒有什麼撤括弧的練習。我記得起草時好像有一句“括弧的用法”和“四則的應用”在一起，後來修訂時，把“括弧的用法”一句刪去。刪去是防誤會。有人主張，在做四則應用題時，可以利用這機會，介紹一些括弧的意義和用法。例如做買物題目時，同價值的物品兩次買，分別乘後再加，和先把數量加後再乘，結果是相同的。從這等題目可以證明 $3 \times 18 + 5 \times 18 = (3 + 5) \times 18$ ，做應用題時不必用括弧，分作幾式計算，如 $3 \times 18 = 54$ ； $5 \times 18 = 90$ ； $54 + 90 = 144$ ，或 $3 + 5 = 8$ ； $8 \times 18 = 144$ ；應用題是主體，認識括弧的用法是附帶的學習。後來有些人誤會，應用題解答前，一定要有式題的練習，所以憑空添了一批 $(3 + 5) \times 18$ 等的括弧式題，這實在是錯的。認識括弧的用法，在應用題做好

後討論訂正時，不過是附帶的工作；絕對不必練習括弧式題，後來變本加厲，愈走愈遠，括弧一套不夠，二套三套，不斷的增加，式題純是撤括弧的練習，和應用題脫離關係。課程標準爲防止這錯誤，所以絕對不提到“括弧”一詞。但是算學教師和算學教科書的編者，自己對於括弧太熟悉，太有興味，始終不肯把括弧暫闕。代數，三角的式子，可以說是用括弧最繁的。但是高中程度的代數三角裏，最常遇到的也只是一套；兩套還有，三套是很難得的。這是指括弧實在用途說的。練習撤括弧用的題目，當然也特別加多，有時還要用到第四套括線。五年生學習三套括弧的撤法，實在是極大的浪費。編書者把“四則”和“括弧”兩詞成功了錯誤的關聯，彷彿四則非括弧不可。所以儘你在課程標準中把“括弧”一詞刪去，大家仍舊不能忘記，連教科書的審定者，也會疏忽，沒有注意。若要糾正這一個重大錯誤，或者要來一次禁用括弧的命令才行。命令禁用，或者還有大算學家要來做文章，上呈文，發宣言反對說，四則不能和括弧分離，有十大理，也難說。總之，各方面對於小學生學的算學，還缺少一種共同的觀點，所以同是一句詞句，例如“初步分數，”在明白學生能力的教師看來，不過是16的 $\frac{1}{4}$ ；4兩=1斤的 $\frac{1}{4}$ 等；在編書的大算學家卻以爲初步分數的準備一定要做，36，54，72的大公約和28，68，84；9的小公倍，算學如此，別科也如此，課程標準中的詞句，常常被教科書的編者弄歪曲了，這的確是個很嚴重的問題。

20. 課程標準

課程標準只用籠統的詞句，的確不容易把教材的進程規定得周密。有人主張再進一步，定出詳細的教材細目來。反對者的意見是：細目太呆板，束縛了活用的自由。會活用當然最好，不會活用，標準等於虛設。標準沒有束縛教師，但是教科書卻能使大多數教師不敢越雷池一步。編者能明標準的真意，活用了標準，編成功適合學習便利的教科書，那末，細目自不必多此一舉。教科書編者不能明白細目中詞句真意時，細目仍等於虛設。實在，有細目和無細目，出入很有限。最重要的還是標準裏的詞句，要大家有一個共同的見解。

四年級練習法數二位的除法，此後是簡易四則的練習，這是標準中規定的。照第 16 節所說，長除法可以分作七步；第一步是復習三年級已學過的做一銜接點，另外當作六步。照教學要點所說：“細細的划定了步驟”恐怕還嫌得太粗些。但是四年級用的教科書，卻只分作殘缺不全的四個單元。把各單元的練習題，抄在下面，拿來和第 16 節所列的練習材料比一比，我們便可看出分步的方法，兩者有什麼不同

一、	二、	三、	四、
$24 \text{ 石} \div 12 =$	$186 \div 31 =$	$9969 \div 27 =$	$1440 \div 24 =$
$33 \text{ 石} \div 11 =$	$128 \div 32 =$	$9720 \div 45 =$	$7680 \div 32 =$

28 石 $\div 14 =$	129 $\div 43 =$	9765 $\div 45 =$	4200 $\div 12 =$
26 石 $\div 13 =$	276 $\div 92 =$	8450 $\div 26 =$	3770 $\div 29 =$
65 石 $\div 13 =$	884 $\div 13 =$	7749 $\div 27 =$	4770 $\div 45 =$
91 石 $\div 13 =$	896 $\div 14 =$	7975 $\div 29 =$	4646 $\div 46 =$
78 石 $\div 26 =$			
60 石 $\div 15 =$			

只有這四個單元，一步三跳，進行得多少快？只要除得絕的，始終沒有一題是除不絕的。每單元 120 分，共計 480 分，便草草的學完。難怪小學生的算學成績，大家說太低劣。

後面的簡易四則練習，實在很可以用作長除法練習的補充；應當減法練習最少；連加法較多；乘法尤其是才學過的法數二位的乘法更多；長除法最多。每課混合二三法或四法，像我們補習時一樣。編書人一看見四則，曲解作 $39 + 42 - 43 =$ ； $60 \times 5 \div 20 =$ ； $8 + 12 \div 3 \times 4 =$ ； $12 - 9 \div 3 \times 2 =$ ； $44 \times 6 + 750 \div 25 - 36 \times 4 =$ ； $(8 + 7) \times 12 =$ 等；一連六個單元，鬧了一大批的先乘後加，先除後減 先乘除後加減。我若編教科書，一定用這樣的材

料叫學生練習如：

48	或個數更多的連加法：	346	86	等乘
76		21	97	
95		<hr/>		
120				
8				

法； $84 \overline{) 1260}$ $63 \overline{) 7491}$ 等除法。“四則四則，”誤盡蒼生！要是這

一詞常常會被人曲解，我想根本辦法，還是把他刪去。刪去以後拿“加法、減法、乘法、除法”代入，並且還要特別說明，“四法分別，不必混作一式，但是每單元中可以並列二法或三四法。”要是再怕編書人看不懂，不妨特別舉出幾個例子來。

課程標準沒有被編書人歪曲的地方，實在很少。那位高足，曾經拿了教科書上關於圓的題目來請教我。關於圓周的一個單元同他呆算 12 個練習題，我也覺得乏味。接下去是圓面積，又是 12 個練習題。一題中包含幾個，小數的位數多到八九位。化上 60 多分鐘，只算了一半，我叫他停止。第二天化的時間更多。做完，送給教師，批不批，看不看，我不得而知。我細想，這二點多鐘的功夫，於他有什麼用？題目的文字太嚙嚙，下面只摘要點：

- (1) 半徑 4.75 丈，求面積。
- (2) 直徑 47.56 丈，求面積。
- (3) 直徑 12 寸，求面積。
- (4) 半徑 75.65 丈，求周，求面積。
- (5) 半徑 0.52 寸，求面積。
- (6) 直徑 2.8 尺，求面積。
- (7) 直徑 1.25 尺，1.89 尺，2.45 尺，各求面積。
- (8) 直徑 5.5 尺，求面積。
- (9) 直徑 3.5 里，求面積。
- (10) 半徑 2.12 寸，求面積。

(11) 直徑 0.68 寸, 求面積。

(12) 半徑 8 尺, 求面積。

讀者要是高興, 試把這 12 個做一遍, 看要化多少時間, 和五年級學生比一比, 怎樣? 這樣指定宿題, 教師太聰明了, 不知他自己做起來要化多少時間。小數乘除法學了不少, 捨入法不教, 除法題目一定是除得絕的, 我想來想去, 研究不出所以然來。要是學了一些捨入法, 小數位數過多時, 還可以想方法, 簡單化。其實, π 在孩子們用, 3.14 或 3.142 也夠了。還有這樣的三個公式: (1) 半徑² $\times \pi =$ 圓面積。

(2) (直徑 $\div 2$)² $\times \pi =$ 圓面積。

(3) (圓周 \times 半徑) $\div 2 =$ 圓面積。

歎觀止矣! 叫五年級生弄這套把戲, 恐怕比讀文言文還要苦。

標準裏圓的一項在小數前, 和面積等一起。原意這等教材是偏重在目標的第一條, 數量的常識經驗, 並不像整數四則小數四則等要照目標第三條, 養成計算的習慣。作業要項表裏有“練習”字樣的, 應當成功習慣; 沒有練習字樣的, 都只當常識教。這樣應當分緩急輕重的。書中教材, 一律平等。應當成功習慣的, 練習太少, 不成功習慣; 不必練習的, 也列好多題目使學生浪費光陰。兩方都練習, 結果, 兩方都練習不能純熟。從這等教材, 可以引起不名數小數乘除法的需要, 所以排在小數練習的前面。有的教科書, 把圓搬在小數後, 好像要應用了小數乘除

法，把圓周和面積的計算，做到爛熟，這樣又把標準歪曲了。諸如此類，若拿課程標準細細和教科書核對，錯誤百出，要是我做審查人，一定要請編書人先讀一讀教法要點，然後再下手編輯。隨便舉一二例：新方法應用歸納法，一步一步的進行，為什麼圓周率不從圓形物體實地度量着手？教室裏圓形東西很多，日常用具也很多，拿這許多東西，叫學生量直徑，再量圓周，作成一表，比較研究，歸納到直徑和圓周的關係大約總是三倍多些，由此再介紹比較精確的數目 3.14 ，這是不名數，由此便引到法不名數的小數的乘法或除法，總之，算學高明的編書人，自己對於數理懂得太多，所以希望學生個個都成功算學專家，長除法只有四個單元，草草了結，接着和學生研究什麼名數除名數，不名數除名數，還要教倍除和等分除的名稱。做一個平常的老百姓，不懂得名數不名數是不要緊的；不會做長除法是很不便利的。化 120 分鐘在倍除，等分除上，遠不如化在練長除法值得。咬文嚼字，算學教材裏也弄了好多專家用的古典，不能把算學大衆化，算學永不能收到效果。要大衆化，第一便是剔除古典。

從補習算學偶然發現的，不過這幾件。件數並不多，但是都很重要；而且占着相當大的數量。我希望行政當局把編細目的工作暫擱，把教科書審定的方法下一番深切的研究。最重要的，請研究課程標準者把籠統的條文詞句，做一番詳細的說明，必要時詳列許多例子。這樣，標準的原意，不被弄歪曲，但是編書人

可以得活用的自由。細目，只有束縛。但是詞句概括，依舊可以被編書人誤解。教材教法書，近來出得很多。我覺得標準的說明，應當是教材研究的入門第一步。這是從前的疏漏，師範生學教材教法，應當少讀些學理學說，多拿教科書下些研究功夫。

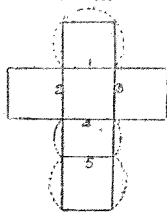
21. 低級的遊戲法

除這次補習算學所得到的好多經驗外，這一年來也幫助別位教師解決了不少教算的困難。自是初當教師，擔任的是一二年的複式。她問我算學怎樣教才好。我先參觀她上課，參觀可以明白實在情況。情況明白以後，我替她想了一個遊戲的方法，代她做好了一副紙片，先和她把遊戲試一遍。她很滿意；拿去教給小孩子。我再去參觀時，小孩子有算學做，不是呆坐或胡鬧了。一個方法試來成功再加一個方法。複式的困難，漸漸減少，並且按照小孩子能力，一年生再分成甲乙兩組，連同二年生，成功三組的複式。二年生也愛做遊戲，只須稍稍改變。乘法的遊戲也不難編成。這樣，有好幾個月，我們研究的，不限是算學；凡是她教的，讀書，寫字，作文，並且連考試出題目，批分數，也一一討論到。她很虛心；她很切實。我告訴她一件，她總去做。她很聰明，所以做起來常常能成功。她是一位很有希望的教師。她自己說，這樣做教師愈做愈有興味；初開始時，一個人瞎摸，實在乏味。下面的幾種遊戲方法，是她用過的。

第一圖



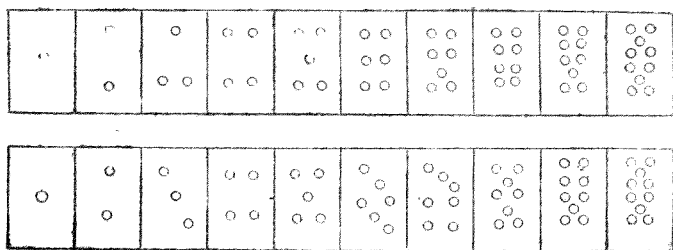
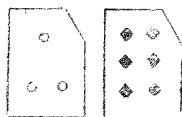
第二圖



第三圖



第四圖



第五圖

一 紅勝黑。大勝小。

這個遊戲，是一年級下期用的。用較厚的圖畫紙照第一圖的樣子做片子 26 張，或用厚紙做，外面糊白紙。片子長三寸，闊二寸。用黑色寫 1 到 9 各數目，每數目兩片，共 18 片。還有 18 片，用紅色寫，也是 1 到 9 各數目，每數目兩片。

教師把片子洗和，小朋友願做的，都舉手。指名甲和乙。甲，乙走到教桌旁，面向着大家。桌上洗好的片子，覆疊着；甲拿一張，給大家看，是黑的 5；乙拿的，給大家看，是黑的 7，乙比甲多，乙勝。乙在黑板上寫一個算式， $\frac{5}{7}$ 兩張片子放在桌上另一地

方，大家抄算式在簿子上。甲敗，回到座位上，也抄算式在簿子上。乙在黑板上算，答 12；大家在簿子上算，答也是 12，乙算的不錯。

小朋友又舉手。乙指名丙。丙走到教桌旁，面向大家。丙先在覆疊的片子裏拿一張，給大家看，是紅的 3。乙拿一張是黑的 9。紅的勝。乙回到座位上去。丙在黑板上寫一個算式 $\frac{3}{9}$ 。大家抄了算。丙算在黑板上。丙的答是 12。大家的答也是 12，丙不錯，由他指名丁。

要是在黑板上做的人，做錯了，回到座位去。由教師再指名兩人來拿片子。到覆疊的片子拿完時，再由教師洗和。

同顏色的，大的勝。不同顏色的，紅的勝。紅 3 勝黑 3；紅 7 勝黑 6；紅 1 勝黑 9。同顏色又是同數目的，兩人都回到座位，由教師在黑板上寫算式。大家抄了做。做完後，教師在黑板上寫答。大家對答數。

減乘也可以照樣做。二年級可以照樣做乘法。

這方法，比賽誰在教桌旁最久。

三個人比賽。做連加法。例如甲、乙、丙走到教桌旁，各拿一張片子，給大家看。甲的是紅 3，乙的是黑 8，丙的是紅 4；丙勝。

甲乙各歸座位。丙在黑板上寫題目 $\frac{3}{8}$ 大家抄題目，做。對答 $\frac{4}{4}$ 。

數，大家的答是 15，丙的也是 15，丙勝。由丙指名二人，繼續做下去，比賽誰在教桌旁最久。

全體學生分作甲乙兩組，各組人數相等。按照坐位次序，每次各組一人到教桌旁拿一張片子，例如甲組第一人拿黑 5，乙組第一人拿黑 3 給大家看，甲組勝，甲 1 心算，大家寫算式 $\begin{array}{r} 5 \\ - 3 \\ \hline \end{array}$ ，做減法。黑板上畫分兩半，標明一半屬甲，一半屬乙。甲 1 把心算的答數寫在黑板上自己的地位中，如 2，大家對答，不錯。甲 1 歸自己坐位。各組第二人去拿片子，甲 2 拿的是紅 2，乙 2 拿的是紅 4 給大家看，乙組勝，乙 2 心算，大家寫算式 $\begin{array}{r} 4 \\ - 2 \\ \hline \end{array}$ ，乙 2 在黑板上自己地位中寫 2，大家對答，不錯。

倘使乙組心算的人錯了，答數寫在甲組的地位中；甲組的心算的人錯了，答數寫在乙組的地位中。答數寫成直行如 $\begin{array}{r} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \end{array}$ 等。各組拿得片子，同色同數目的時候，不分勝負，各在黑板上自己的地位寫 0。

輪過六七八後，把黑板上各組數目，分別做連加法，結算一次。這要看學生連加法的能力，決定。先三四數目連加，後擴充到五六個數目，七八個數目。比賽那一組勝利。

減法用片子，宜加十張；一張是 0，另外 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 各一張。

二 猜猜看

這是一年級下學期減法用的共同遊戲。仍用上面的片子。教師洗和好片子，覆疊在教桌上。拿起一片，反面向學生，直立在黑板邊上。各學生大家猜，從 0 到 18 都可以猜。各人把自己猜的數目，寫在簿子上。教師巡視看見各人都寫好了，把片子翻轉來，給大家看。大家再抄片子上的數目，做減法。例如甲猜 7，

片子是 4，他的減法是 $\frac{7}{3} - \frac{4}{3}$ ；乙猜 2，他的減法是 $\frac{4}{2} - \frac{2}{2}$ ；教師巡視，

看各人減法做得對不對。比賽誰猜得最近，誰做減法最對。猜對的，減法的答是 0。

有時可以叫學生代教師拿片子。教師巡視。有時可以叫猜得最近，減法做得最對的人代教師拿片子。

做過五六次後，各人把減法的答數連加起來，看一共猜錯

了多少。例如丙生的，是： $\frac{7}{2} - \frac{12}{3} - \frac{16}{8} - \frac{4}{0} - \frac{11}{9} - \frac{6}{1}$ 六次答數

2

3

8

連加，如：0 這也要看學生程度的。起先猜三四次，連加一

9

1

23

次；後來延到六七次，八九次後再連加一次。

用厚紙，照第二圖的樣子，剪好，實線長一寸，虛線的邊約二三分，去角。1, 2, 3, 4, 5 各實線處用刀畫開，不切斷，摺起來成第三圖的立方體，邊摺在裏面，外面用白紙糊好，用紅色或墨，在各面上寫數目，從 1 到 6，1 的背面是 6；2 的背面是 5；3 的背面是 4。

第一步，用一個立方體。教師任意揀定一面向學生，先用一張厚紙或一本書遮着，不使學生看見，叫大家猜，從 1 到 6 各數都可以猜，猜好後把自己猜的數目寫在簿子上，大家寫好時，教師揭開來，看立方體面上的數目，再抄，做減法，比賽誰猜得最近，誰做的減法最對，猜對的，減法的答是 0。

第二步用二個立方體，例如對學生的面，一個是 3，一個是 5； $\frac{3}{5}$ 是 8，猜 10 的， $\frac{10}{8}$ 差 2；猜 4 的， $\frac{8}{4}$ 差 4；猜 8 的， $\frac{8}{8}$ 差 0。用二個立方體時，可以猜 2 到 12 各數目。

第三步用三個立方體，例如對學生的面，是 2, 4, 6； $\frac{2}{4}$ 共 $\frac{6}{6}$ 12，猜 12 的，答是 0；猜 15 的，答是 3；猜 8 的答是 4。用三個時，可以猜 3 到 18 各數目。

三 釣魚

這是一年級上期初學認識數和數目字用的遊戲，照第四

圖的樣子，做片子 18 張，尺寸樣子，同第一圖，畫的圖形可以隨意變化，不拘定，假定 9 張畫黑的圓形，從一間到九圓，每數目一張，再有 9 張畫紅的菱形，從一個菱形到九個菱形，每數目一張，各數目排列的方式，可以隨便，但是不可以太雜亂，第五圖是兩種排列形式的例子，再照第一圖做片子 18 張，寫 1 到 9 各數目；九張紅色寫，1 到 9 各一張；另外九張墨色，也是 1 到 9 各一張。

片子洗和，覆疊，放在桌子中央，各人圍桌坐，按照坐位次序，每人拿一張片子，第一人拿三個圓，看一看，數一數，給大家看，片子拿在手中，圖向大家，他唱“3，”大家看，唱得不錯，他拿着，第二人拿七個菱形，同樣，自己數，片向大家，唱“7，”要是唱錯了，大家校正，片子另放一邊，他手裏空着，第三人拿一片是 5，自己先看，片向大家，唱“5，”唱對的，拿在手裏，唱錯的，大家唱，片子另放一邊，他手裏空着，比賽誰手裏有片子，覆疊的片子拿完時，教師再把另放一邊的片子洗和再拿，全體拿完時，誰最多的勝。

上面的遊戲，可以分作兩步；第一步只用 18 張圖形的片子，第二步再加 18 張數字片。

再進一步，各人拿了片子以後，要被別人鉤去，例如甲拿三圓，乙拿七菱，丙拿 5，各自拿着，丁拿的是“7，”他若唱得不錯，乙應當把自己片子送給丁，戊如拿到五圓，唱得不錯，丙應當把

自己片子送給戊。一個圖形配一個數目字，不拘顏色。後拿的人，唱得不錯時，先拿的人把自己片子送去。比賽誰夠得多。

再進一步，可以規定，紅鉤紅，黑鉤黑，這是一種變化。還可以規定，紅圖鉤黑圖，紅數字鉤黑數字，這又是一種變化。也可以規定，紅圖交黑圖，數字鉤圖，紅數字鉤黑數字。這樣變化更多。但是太多變化時，容易發生混亂。

22. 原則

原則是具有普遍性的。 $1+1=2$ ，可以說是學算的一個原則，因為不論年級高低，中學小學，都是適用的。復是初中二年的算學教師，教了一二個月的代數，學生不懂，考試成績好多人不及格。他懊惱·他灰心，他不想再教算學。他和我相識不久，不知道我對於教算的興味，所以沒有和我談這問題。瀾知道了，間接來問我；我得一機會和他說了這 $1+1=2$ 的故事，同時也把前年指導浙江大學學生實習時碰到的困難告訴他。實習時的教材恰和他的差不多，就是應用乘方公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ； $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ，直接求積，不必計算。例題的說明，沒有困難；學生好像都很明白。那知叫他們做習題時，只有開始的二三題還能做出，下面系數的變化繁雜，像 $(6x+7y)^2$ ， $(ax-by)^2$ ， $(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y)^2$ ……等等，差不多全班學生都弄得莫名其妙。在教師和教科書編者看來，這等題目，只須以公式類推，一定沒有什

麼困難。但是初學代數的學生，却不懂這等類推；他們看 $(a+b)$ ， $(6x+7y)$ 是不同的； $(6x+7y)$ 和 $(ax+by)$ 也是不同的；就是 $(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y)$ ，也和 $(6x+7y)$ 不同；要是逢到 (ax^2+by^2) ，或者 (x^m+y^n) ，那末更覺繁雜得很，不知道把指數怎樣處理。救濟辦法只有細分步驟，從沒有系數的 $(a+b)$ ，到有系數的 $(3a+1b)$ ，再引到分數系數的 $(\frac{1}{3}a + \frac{1}{5}b)$ ，再總括成文字系數的 $(ma+nb)$ ，這是一大段落。第二段再用有指數的，也可以分作幾步，像 (x^2+y) ， $(x+y^2)$ ， (x^2+y^2) ， $(6x^2+7y^3)$ ， $(\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{7}y^4)$ ， (ax^4+by^2) ， $(a^2x^2+b^3y^2)$ ，……等等。聰明的復，聽了我的話，恍然大悟，自己編了一套補充練習題。試用的結果，給 $1+1=2$ 的原則一個有力的證明。學生明白了，教師高興了。他很感激瀾的熱心幫助，瀾也覺得他熱心研究，這原則產生一種特殊的副成就；把1個他和1個她，結合起來，成功一雙。成就是在後來，但是這原則，的確是一個有力的動引。瀾自己也承認的。

他用的練習材料如下列；和書上習題比一比，一看便知道步驟分得細。

$$\begin{aligned}
 \text{一、 } a(x+y+z) &= ax+ay+az \text{ 或 } ax-ay-az = a(x-y-z). \\
 a(x+y-z) &= \quad ab(x-y+z) = \quad 2ab(x+y+z) = \\
 3ab(3x+2y-5z) &= \quad 5abc(ax-5y+cz) \dots
 \end{aligned}$$

$$6a^5b(a^2x - y + bz) = 5a^2b(a^2x - 2b^2y + acz) =$$

二、 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 或 $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{或} \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$(x+y)^2; (x-y)^2; (4+1)^2; (4-1)^2; (3x+y)^2;$$

$$(3x+a)^2; (3x-a)^2; (x+2y)^2; (3x+2y)^2;$$

$$(9x-8y)^2; (ax+by)^2; (axy+by)^2; (a^2xy-ay)^2;$$

$$(9cy+3y)^2; \left(\frac{1}{5}x+y\right)^2; \left(x-\frac{1}{4}y\right)^2; \left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y\right)^2;$$

$$(x^2+y)^2; (x-y^3)^2; (x^2+y^2)^2; (x^2-3y^3)^2;$$

$$(2x^5+y^4)^2; \left(\frac{1}{3}x^3-x^2y^2\right)^2; (x^3y^3+5y^4)^2 \dots \dots \dots$$

三、 $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ 或 $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

$$(x+y)(c+y) = (2x+y)(2x-y) =$$

$$(x+3y)(x-3y) = (2x+3y)(2-3y) =$$

$$(ax+y)(ax-y) = (ax+by)(ax-by) =$$

$$(abx+cy)(abx-cy) = (abc+xy)(abc-xy^2) =$$

$$(ab^2x+ab^2y)(ab^2x-x^2by) = (ab^2c+x^2yz^3)(ab^2c-x^2yz^3) =$$

$$(x^3+y^4)(x^3-y^4) = \dots \dots \dots$$

步驟的粗細，要看學生能力而定。有的學生，不必分得如此細。有的學生，需要分得更細。大概教科書上的習題，只合較快

的學生用，稍差些的學生，就應當由教師出補充習題，把書上兩題間的空隙填好。例如書上習題，從 $(x+y)$ 一躍而到 $(9x+8y)^2$ 時，學生往往不了解 2×72 的關鍵。教師的補充題，應當從 $(3x+y)^2$ ， $(5x+y)^2$ ……等，而 $(x+3y)^2$ ， $(x+4y)^2$ ……等，然後再引到 $(9x+8y)^2$ 等。

愈是學生進步慢的，分步愈應當細，所以學習的快慢，自然而然發生差別。能分組，當然最合理想。不分組，也有一種解決方法；就是書上習題，大家同時開始。能力差的，中間插補充題，只做前半部較容易的。初中裏的代數，不比小學裏的基本四則，原不必個個人學得爛熟。小學生學基本四則，總要達到能成功習慣。進程不能一律，宜採用個別練習方法；愈是能力差的人，分步愈細，所化的時間愈多。好在小學算學教材中有好多不必練熟的數量常識。能力差的學生這方面的教材只須略知大概，完全不必計算；能力好的學生，基本四則如已相當熟練，可以計算一二。這樣調節，雖有個別差異，全體的進程還能在每一大段落時得到共同的出發點和終點。能力最差的學生可以畫出一部分時間，用練習書等材料補習。這樣，一方面跟大家進行新的，一面補舊的缺隙，也不會得阻礙大多數人的進程。複式學級已經有二個學年以上的學生合在一起，往往不能再分組教學；可用這調節法。單式學級，不必呆守同程度同步調；分二三組，也沒有什麼不便。初中多單式編制，實在分了組最方便。各人的

$1+1=2$ 快慢不同；叫慢的人追快的人是苦事；叫快的人等慢的人也太浪費。

初中代數的教材，並不多；但是也不好算少。如許教材中，究竟那幾種應當個個學生練習純熟到成功習慣，那幾種只須當作常識？這問題很值得研究。無論那一科的教材，總應當有緩急輕重的分別；決不是一律平等。一律平等往往成功一棒不成功。個別差異是沒方法避免的，沒方法弄畫一的；所以緩急輕重，還要看學生能力而分別。我們可以這樣的假定：甲是最重要最急切的，像小學的基本原則，應當個個學生純熟；能力最差的，即使化加倍的時間也還值得。乙是能力較好的學生可以弄熟，差些的人，只知道一個大概夠了。丙是能力最好的人專用的，彷彿又成功了補充教材。大家還沒學完，能力最好的人早已完成，那末提出這等教材給他們學。課程標準裏缺少這一種指示，大家以為是一律平等。結果一律等於無效。這不是極大的浪費？ $1+1=2$ 是原則；各人各有一個 $1+1=2$ 的進程，又是一個很重要的原則。

23. 小數除法

教科書裏小數除法有三個單元。第一單元有兩種例題：一是 $12 \div 25 = 0.48$ ，一是 $0.48 \div 32 = 0.015$ 。這一段的說明是：“整數除整數不夠時，可在被除數上加 0，所得的商數，即為小

數，商數的小數點，應和被除數的小數點對齊。”第二單元實在可分作兩個單元，如 $679.4 \div 15.8 = 6794 \div 158 = 43$ 的例題，說明是：“除數被除數的小數位相同，各去小數點，變做整數除法。又如 $325 \div 0.26 = 32500 \div 26 = 1250$ 的例題，說明是：“除數是小數，被除數是整數；把除數變整數，被除數照除數小數位用 0 補足。”第三單元也包含兩個單元，如 $135.45 \div 31.5 = 1354.5 \div 315 = 4.3$ 的例題，說明是：“除數的小數位少於被除數，把除數變整數，被除數的小數，照除數小數位移右。”又如 $436.8 \div 0.84 = 43680 \div 84 = 520$ 的例題，說明是：“除數的小數位多於被除數，把除數變整數，被除數照除數的小數位用 0 湊足，再去小數點。”五種不同的情形，要用五個不同的方法處理，這真所謂“五花八門”，難怪學生學了不會做。這五條說明，我們研究教材的人看起來或者還有興味，恐怕計算小數很熟的人看了，反而要覺得混亂。他們做慣小數除法的人，只有一個方法，決不分作五個。分步是我們教師編配教材進程時的事，學生只是用一個算法，一步一步的進行，決不能每步用一種不同的方法。分步是前後一貫的，不過題目有簡易和繁複的不同，用的算法只是一個。分作五種是錯的。

後來換了一本教科書，小數除法不分五種，只用一個方法；這書好得多了。牠的方法是：(1) 除數如果是小數，照除數的小數位數做被除數的小數點移後的位數；如果被除數的小數位數

少，或是整數時，只要用 0 照除數的小數的位數補足。(2)商數上的小數點，必須和被除數的對齊。(3)被除數位數除完而仍未除盡時，那可加 0 在被除數末尾，繼續除下去。”用一個方法是不錯的；可惜這一段文字，就是會做小數除法的人讀起來也很費力，那末初學的人怎樣可以明白？當然，有例題，還有教師的講解。我們應當用幾個例題，才可以把各種不同的情況一一給學生看到？每一個不同的情況只用一個例題說明，是不是真的能使學生明白？凡是動作的經過，文字的表達，往往不及實做來得清楚。做起來，或者很容易模彷彿；寫成文字，有時竟使人看不清楚。我們爲什麼不反過來，把小數除法各種不同的情況分成細密的步驟，一步一步的練習；到最後才把上述的方法用文字做一總結？要是這樣辦，學生已經從練習得到實在經驗，文字代表的意義已經明白；不必講解，例題彷彿是一種復習和比較。這是從具體的實做引到用抽象文字寫的方法；是歸納。從文字開始的是演繹。算學原是演繹的科學。但是小孩子初學算學，宜先從具體的歸納到抽象的原則方法。入手就用演繹，思想沒有基礎；儘管教師講解，仍是空中樓閣。

用一個方法是對的；但是練習不細分步驟，却是錯的。統一的方法，絕對不應當和習題的分步混同。前一書好像要分步，但是每步用一個不同的方法，弄得複雜而混亂。後一書方法統一，但是習題不分步；彷彿學生會得自己去類推。類推是最不可靠

的。我的意思是：習題要分步；而且不可分得太粗。最後可以使學生得到一個統一的方法。分步大約有三個大段落，各段再分成三步，如下：

第一段除數是整數，計分三步：

第一步被除數是整數，除數一位或二位，例如：

$$\begin{array}{r} 1241.85 \dots \\ 7 \overline{)8693} \end{array} ; \begin{array}{r} 241.85 \\ 7 \overline{)1693} \end{array} ; \begin{array}{r} 124.14 \\ 8 \overline{)869} \end{array} ; \begin{array}{r} 41.85 \\ 7 \overline{)293} \end{array} ; \begin{array}{r} 1.85 \\ 7 \overline{)13} \end{array} ;$$

$$\begin{array}{r} 1.14 \\ 7 \overline{)8} \end{array} ; \begin{array}{r} .85 \\ 7 \overline{)6} \end{array} ; \begin{array}{r} 112.89 \dots \\ 77 \overline{)8693} \end{array} ; \begin{array}{r} 26.62 \\ 77 \overline{)2050} \end{array} ; \begin{array}{r} 12.89 \\ 77 \overline{)993} \end{array} ;$$

$$\begin{array}{r} 2.89 \\ 77 \overline{)222} \end{array} ; \begin{array}{r} .1 \\ 77 \overline{)86} \end{array} ; \begin{array}{r} .64 \\ 77 \overline{)50} \end{array} ; \begin{array}{r} .11 \\ 77 \overline{)9} \end{array} ; \begin{array}{r} .07 \\ 77 \overline{)6} \end{array} .$$

例中被除數至多四位，除數至多二個有效數字，小數只算到二位，以下未捨入。這等範圍擴充開去，花色當然更多。以下的例都如此。

第二步，被除數是帶小數，例如：

$$\begin{array}{r} 1241.87 \\ 7 \overline{)8693.1} \end{array} ; \begin{array}{r} 241.88 \\ 7 \overline{)1693.11} \end{array} ; \begin{array}{r} .88 \\ 7 \overline{)6.1} \end{array} ;$$

$$\begin{array}{r} .89 \\ 7 \overline{)6.14} \end{array} ; \begin{array}{r} 26.65 \\ 77 \overline{)2050.4} \end{array} ; \begin{array}{r} .08 \\ 77 \overline{)6.18} \end{array} .$$

第三步被除數是純小數 例如：

$$\begin{array}{r} .11 \\ 7 \overline{)8} \end{array} ; \begin{array}{r} .12 \\ 7 \overline{)85} \end{array} ; \begin{array}{r} .08 \\ 7 \overline{)6} \end{array} ; \begin{array}{r} .09 \\ 7 \overline{)64} \end{array} ;$$

$$\begin{array}{l} .01 \\ 7 \overline{) 08} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} .008 \\ 7 \overline{) .06} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} .01 \\ 77 \overline{) .8} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} .01 \\ 77 \overline{) .85} ; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} .007 \\ 77 \overline{) .6} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} .007 \\ 77 \overline{) .61} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} .001 \\ 77 \overline{) .08} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} .0007 \\ 77 \overline{) .06} . \end{array}$$

第二段,除數是帶小數,計分三步:

第一步,被除數是整數,例如:

$$\begin{array}{l} 1128.96 \\ 7.7 \overline{) 8593} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} 11.17 \\ 7.7 \overline{) 86} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} 1.17 \\ 7.7 \overline{) 9} ; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} .77 \\ 7.7 \overline{) 6} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} .10 \\ 7.7 \overline{) 77} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ 7.5 \overline{) 15} . \end{array}$$

第二步,被除數是帶小數,例如:

$$\begin{array}{l} 26.654 \\ 7.7 \overline{) 2050.4} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} .802 \\ 7.7 \overline{) 6.18} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ 7.7 \overline{) 15.4} . \end{array}$$

第三步,被除數是純小數,例如:

$$\begin{array}{l} .10 \dots \\ 7.7 \overline{) .8} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} .11 \\ 7.7 \overline{) .85} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} .07 \\ 7.7 \overline{) .6} ; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} .07 \\ 7.7 \overline{) .61} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} .01 \\ 7.7 \overline{) .08} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} .007 \\ 7.7 \overline{) .06} . \end{array}$$

第三段除數是純小數,計分三步:

第一步,被除數是整數,例如:

$$\begin{array}{l} 10 \\ 7 \overline{) 7 \times} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} 200 \\ .07 \overline{) 14 \times \times} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} 50 \\ .7 \overline{) 35 \times} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} 122.85 \\ 7 \overline{) 86 \times} ; \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1228.57 \\ .07 \overline{)86 \times \times} \end{array} ; \begin{array}{r} 8.75 \\ .7 \overline{)13 \times} \end{array} ; \begin{array}{r} 185.71 \\ .7 \overline{)13 \times \times} \end{array} ; \begin{array}{r} 1289.61 \\ .77 \overline{)993 \times \times} \end{array} ;$$

$$\begin{array}{r} 12896.10 \\ .077 \overline{)993 \times \times \times} \end{array} ; \begin{array}{r} 7.79 \\ .77 \overline{)6 \times \times} \end{array} ; \begin{array}{r} 77.92 \\ .077 \overline{)6 \times \times \times} \end{array} .$$

第二步，被除數是帶小數，例如：

$$\begin{array}{r} 2 \\ .7 \overline{)1.5} \end{array} ; \begin{array}{r} 20 \\ .07 \overline{)1.5 \times} \end{array} ; \begin{array}{r} 241.8.87 \\ .7 \overline{)1693.11} \end{array} ; \begin{array}{r} 241.88.71 \\ .07 \overline{)1693.11} \end{array} ;$$

$$\begin{array}{r} 8.91 \\ .7 \overline{)6.14} \end{array} ; \begin{array}{r} 87.14 \\ 0.7 \overline{)6.1 \times} \end{array} ; \begin{array}{r} 26.62.85 \\ .77 \overline{)2050.4 \times} \end{array} ; \begin{array}{r} 80.25 \\ .077 \overline{)6.18} \end{array} .$$

通例被除數小數位比除數少時，被除數末尾附 0，例中不用 0；用 × 代，並不是叫學生做時也如此；這是救濟印刷時的不使用的。

第三步，被除數是純小數，例如：

$$\begin{array}{r} 1 \\ 7 \overline{) .7} \end{array} ; \begin{array}{r} 2 \\ .07 \overline{) .14} \end{array} ; \begin{array}{r} 20 \\ .007 \overline{) .14 \times} \end{array} ; \begin{array}{r} 1.21 \\ 7 \overline{) .85} \end{array} ;$$

$$\begin{array}{r} 11.42 \\ .07 \overline{) .8 \times} \end{array} ; \begin{array}{r} .85 \\ .7 \overline{) .6} \end{array} ; \begin{array}{r} 8.57 \\ .07 \overline{) .6 \times} \end{array} ; \begin{array}{r} .11 \\ .7 \overline{) .08} \end{array} ;$$

$$\begin{array}{r} 1.14 \\ .07 \overline{) .08} \end{array} ; \begin{array}{r} .08 \\ .7 \overline{) .06} \end{array} ; \begin{array}{r} .85 \\ .07 \overline{) .06} \end{array} ; \begin{array}{r} 1.10 \dots\dots \\ .77 \overline{) .85} \end{array} ;$$

$$\begin{array}{r} 10.89 \\ .077 \overline{) .8 \times \times} \end{array} ; \begin{array}{r} .10 \dots\dots \\ .77 \overline{) .08} \end{array} ; \begin{array}{r} .77 \\ .077 \overline{) .06 \times} \end{array} .$$

這樣分步補習，銜接除數二位 除法，進行還順利，進步快

的學生，或者可以把各段第二第三兩步合併在一起，進步更慢的學生第三段的各步末尾附×的和不附×的，或者還要分作兩步。

從前在算學教學法中，主張小數除法宜教會學生估量商的大小，不宜用呆板的方法把除數中的小數變成整數。這次補習，沒有把那主張試驗。原因有二：一是校裏已往教過“把除數的小數變作整數。”若補習時另外換一個估計商的大小的方法，勢必使他混亂。二是偏於實做的他，還是教他一個做的過程來得容易學會。估量商的大小，是一種看不見的“約計。”他最感困難的，是看不見的計算；叫他估量，他失了依據，或者愈弄愈糊塗也難說。會得做看不見的計算者，實在用估量商的大小的方法來得簡捷。不過，練習仍要分步，分步的粗細仍要看各人進步的快慢而定。估量的方法，大體如下；仍用上述各段各步的例子。

第一段，第一步，7 除 8693 時，第一商是一千，應在千位；77 除 8693 時，第一商是一百，應在百位；7 除 6 時，第一商不是整數 1，是第一位小數；77 除 6 時，第一商不是小數 1，是第二位小數。第二步商的估量，完全和第一步同；不管被除數後面有沒有小數帶着，只要估量第一商的位子。以下便依次除下去。第三步的估量法仍同，只不過第一商常在小數位上；或是第一位小數，或是第二位小數……。

第二段，各步的估量法，仍舊一樣。例如：77 除 86，首商應

在十位; 7.7 除 9, 首商應在個位; 7.7 除 6, 首商應是第一位小數; 7.7 除 .6, 首商應是第二位小數……, 這樣估量, 不必管被除有幾位小數, 7.7 除 0.6, 7.7 除 0.61, 7.7 除 0.6165 等, 首商總是第二位小數. 除數是整數或是帶小數(帶小數帶的小數幾位, 都可不管; 只須看明白, 除數第一位和被除數第一位是什麼位子, 便可決定首商的位子. 例如: 7.777 除 8693, 首商是 4 位; 7.77 或 7.7 或 7 除 8693, 首商都是千位; 又如: 7.777 除 6 首商是第一位小數; 7.7 或 7 除 6 首商都是第一位小數…….

第三段好像比較困難, 實際也還容易. 例如: .7 除 13, 首商是十位; 0.7165 除 13.884, 首商仍是十位. 又如: 0.07 除 6.1, 首商是十位; 0.73125 除 6.108 或 6 或 6.125, 首商仍是十位. 不必在被除數後附 0 不必塗去小數點, 不必數小數位的多少, 所以是最簡便的方法. 不過最主要最基本的, 要明白位子的大小關係. 有一種準備練習, 不要學生呆算, 只要他們估量首商的位子, 宜多多舉行, 例如把下面的題目, 叫學生判定首商的位子:

$777 \overline{)8693}$	$777.7 \overline{)8693.2}$	$.07 \overline{) .08}$	$.0712 \overline{) .08}$
$77 \overline{)8693.1}$	$77.77 \overline{)8693}$	$.07 \overline{) .841}$	$.0716 \overline{) .81126}$
$7 \overline{)8693.5}$	$7.707 \overline{)8693}$	$.07 \overline{) 8}$	$.0714 \overline{)8.48}$
$.7 \overline{)8693}$	$.74 \overline{)8693.46}$	$.07 \overline{)80}$	$.071 \overline{)80.64}$
$.07 \overline{)8693.87}$	$.0716 \overline{)8693}$	$.07 \overline{)800}$	$.0712 \overline{)800.1}$

24. 捨入法

學到小數乘除法，應當附教捨入法。我們日常生活裏，除法的問題並不很多；但是除法的大多數是除不絕的。以前說過，除法的習題，應當多些除不絕的。除到個位為止的，我們叫做整數；再繼續除下去，商裏便有小數。這是產生小數最好的實例。由此也可以引導到百分法。就是分數，也可以用這等實例來作比較。例如 $5 \overline{)781}$ ，整數除法時，商是 156 餘 1；寫作 $156\frac{1}{5}$ ； $\frac{1}{5}$ 就是分數。小數除法時，商是 156.2；.2 就是 $\frac{1}{5}$ ；分數和小數的關係，不必多嚕囉，只要這等例子看見得多，自然很容易明白。要是商裏的小數一位，二位，三位，的繼續下去，還是除不絕，那末我們便要決定一個辦法；究竟除到那一位停止？例如 7 除 86 商是 12.2857142……我們決定位數，要看用途。譬如上例是貨幣的元數，我們只要三位小數，已經到厘位；銀行裏有只到分位的，若是外匯率，那末小數便要用到六七位，因為外匯的數量往往要好多萬，小數位過少時出入過大。小學生學算，小數位大多有三位已夠。為上例，若是米糧的石數，三位已到合；若是重兩的兩數，三位已到厘；若是長短的丈數，三位已到分。假定只要三位，那末第四位以下便可略去不管。在略去時，便需要捨入法。這是很容易介紹給學生的。假定用貨幣做例子四厘，合十二文，

沒有小錢時，一個銅元也就算了，六厘合十八文，通例要兩個銅元，四捨五入，或是五捨六入，兩法中隨便採用一法，嚴密些說，五捨六入較合理；日常的慣例，有好多地方用四捨五入，日常應用出入很微細，宜依照當地習慣，不必多翻新花樣。

小數乘法的積，往往小數位很多，我們也可以限定只要三位或二位，以下用捨入法截去。例如圓周，圓面積的計算，那本教科書上的習題，有的小數要八位，學生當然覺得累贅。我們介紹捨入法，他們一定非常歡迎。半徑4寸的圓，面積是 $4 \times 4 \times 3.1416 = 50.2656$ 方寸；有了兩位小數（四捨五入法是50.27方寸；五捨六入法是50.26方寸）已經是方分；方厘儘可略去不管。乘法若不止一次，捨入法宜在最後。半途捨入，以後若再用一個較大的數目乘，出入便很大了。小數三位，若用滿千的數目乘，便是整數個位；若用滿萬的數目乘，便是整數十位。除法的捨入也宜在最後的一次計算。若捨入後取三位小數，再用三位小數除，那末又影響到整數個位了。這是通例。要是半途中小數位實在過多，以後的計算沒有大的數目乘，或位數多的小數除，我們也可以先捨入了再做。例如直徑2.45尺，求圓面積，2除2.45尺是1.225尺， 1.225×1.225 是1.500625方尺。這時小數已有六位，我們儘可捨入，得1.5方尺；然後再用3.1416乘得4.7124方尺，捨入後成4.71方尺。因為1.500625，捨去的.000625，用3.1416乘，仍只有.0019635，還在第三位小數。

決不會影響到第二位。我們最後取二位小數。當然不生什麼出入。這等題目不應給小孩子算；所以這一段說話，不是用來教小孩子的。做教師的自己明白了這等關係，萬一書本上有不近情理的題目，可以隨機處理，使牠簡單化。

捨入法並不限定小數；我們在大數中也常用。例如地理中的人口，面積，產額等等，我們平常所說的幾萬幾十萬，或百萬，都是用捨入法得來的。857800，可以說 86 萬；12680000，可以說 1300 萬……都是實例。這等常識的介紹，在教大數時，非常重要；比了計算這等大數的習題更重要。就是要計算，也可以省去好多 0，改用“萬”或“百萬”做單位。像 85.78 萬，12.68 百萬等。把大數的認識（作業要項表裏五六年第一條萬到萬萬各數）在小數後復習並且用小數的方式來記大數，可以使學生對於數目大小的觀念，格外明白。

捨入法的練習，不必一定要計算乘法或除法；可以用下列等小數或大數，規定位子，叫學生化簡。

128.5615	186400	389647852
7.74638	758694	608400720
21.691256	1256700	90009000
.08647	3849000	800012567
2000.010625	23000000	240008900

實在我們用的數目，總是集中在某一段落的，所以像 2000

010625 等，整數在千以上，小數還要到第六位；以及 389647852 等滿二萬萬的數目，還要細密到個位的 2；實在是日常不會遇得到的，就日常應用的狀況說，整數滿千，小數 .01 可以不必計較；小數開始在第二位 .08 的，恐怕 .0864 和 .0865 的出入却要計較。要是我們用到 .00008312 的一段，却不可以捨入作為 .0001 而只能捨入作 .000083，大數用到 3 萬萬時，至多 3.896 萬萬已很精密；所以 340008900 中的 8900 和 800012567 中的 12567 可以說是多寫的。這一段話，仍不是用來教學生的，我們出習題時，應當知道所用的數目，只要集中在一段。小數位過多，當然不好；但是若常用 1864859.005 等數目，一樣的不切實際。大數到 18 萬，誰再計較 .005？這數目不如改作 18.65 萬較為合理。大概的說，整數二三位，小數二三位是常相附隨的；整數四五位時，小數便不多用了。同樣，小數用到四五位時，不會再附帶整數；不過小學生是不常遇到 .0005；.0016；等小數的需要的，斤兩關係，需要四位小數。

25. 看不見的計算

看不見的計算，平常叫做心算，他最困難。連加法，乘法的進位，用珠算來幫助；心算的困難，實際沒有解除，不過改用看得見的算盤珠代替了人的記憶。長除法的試商，同樣也遇到心算不熟的困難。補救的方法，不用算盤珠；在左方詳細把乘法寫

出。這不是幫助他心算能力的增進。只不過拿看不見的改成看得見的罷了。因為補習除法的時期較長久，從長除法到小數除法，所差不過是小數位，另外完全一致。時期長久，可以使得方法漸漸純熟，人心總是喜歡省便，怕麻煩的。初步乘法除法查看九九表，到後來，自然不高興多查。同樣，在練習小數除法時，他自己漸漸把左方寫出的乘法算式略去一部分，改用心算。這裏也有自然的步驟。第一步，凡商是 1 的，像 72 除 747.7 等。第一商直接和除數乘，寫在被除數下面，如甲例；不另在左方詳記乘

(甲)	(乙)	(丙)	(丁)
$\begin{array}{r} 1 \\ 72 \overline{)747.7} \\ \underline{72} \\ 27 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \\ 72 \overline{)747.7} \\ \underline{1\ 72} \\ 72\ 27 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \\ 15 \overline{)126.3} \\ \underline{9\ 120} \\ 135\ 63 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \\ 15 \overline{)126.3} \\ \underline{9\ 120} \\ 135\ 63 \\ \underline{8} \\ 120 \end{array}$

法如乙例。第二步 試商時所估量的不是恰好，應當加 1 或減 1 時，第二次直接和除數乘 寫在被除數下面，如丙例，不另在左方詳記第二次的乘法如丁例，不限首商，在中途也是這樣。如戊例，第二商試 8，太大；改 7，直接乘 34 得 238 寫在 260 下面，不再在左方另記乘法。第三步，凡是一望可以知道商是 9 的，也不另記乘法在左方。如己例試第一商時因為除數 14 比被除數首兩位 13 略大，所以商是 9；又如庚例試第三商時，除數 48 比被

(戊)	(己)	(庚)	(辛)
2.7	.9	.59	71.86
$34 \overline{)94}$	$14 \overline{)13.48}$	$48 \overline{)76.34}$	$38 \overline{)2712}$
$\underline{2\ 68}$	$\underline{12\ 6}$	$\underline{5\ 48}$	$\underline{7\ 266}$
68 260	88	240 283	266 52
$\underline{8\ 238}$		$\underline{240}$	$\underline{4\ 38}$
272 22		434	152 140
		$\underline{432}$	$\underline{114}$
		2	260
			$\underline{228}$
			32

除數末一部分首兩位 43 大不多，所以商是 9。第四步如辛例，試第一商時，仍詳記乘法在左方；第二商是 1，不再在左方記乘法；第三商試 4，太大，應減 1，不再詳記 3 的乘法；試第四商時被除數 260，比第一商的乘積 266 略小，所以決定商比第一商少 1，是 6，直接乘 38，得 228，寫在 260 下面，不再在左方詳記 6 的乘法。這樣，一步一步的省略，自然把左方詳記乘法的累贅方法省去，只要心算的能力夠得到，有時看他拿筆尖在紙上空畫，並不寫出數目字來。這是從筆算到心算的過渡，聽他，鼓勵他不多寫。

課程標準中教法要點裏有一條說：“心算是算術的基礎……”那末應當從心算到筆算；現在我發現的，却是從筆算到心算，不是把筆算做了心算的基礎了嗎？本末顛倒，補習出笑話來

了。不！不！不！心算是筆算的基礎，筆算也是心算的基礎。從心算到筆算，再從筆算到心算，再從心算到筆算，再從筆算到心算……心算幫助筆算，筆算幫助心算，心算再幫助筆算，筆算又幫助心算……循環的，擴張的，成功螺旋式的進展。拿加法做例子：從真正經驗學習基本九九是心算，心算略有成就，便開始介紹筆算的形式，進一步做連加法，連加法的範圍一步一步的擴大，心算的能力因筆算而增加，心算能力大時，連加法的範圍愈可以擴大。要是練習得純熟，像壬例的連加法，可以兩位同時加，如 85, 145, 224, 259, 302, 396，記在橫線

(壬)
4385
1260
3379
835
643
1094
<hr/>
396
112
<hr/>
11596

下；再 43, 55, 88, 96, 102, 112，記在橫線下；再併加得 11596。有時得到 112 後立即加上 396，得 11596。這樣加法，比一行一行加要快得多，但是需要心算的能力較大，小學生不必練到如此程度，要練成功這等能力，除却多做兩位數多個的連加法以外，還有什麼方法？做筆算連加法時，暗地裏在訓練心算連加法的能力，減法，乘法，除法，其他方法都如此。但是我們應當注意，純熟是自然從練習中產生的結果，不能躐等，不能求速成的。太性急了，往往反而無效。

珠算的情形比較特殊，需要心算做基礎的，沒有筆算那般多；能訓練心算本領的，也沒有筆算那般多。譬如加法，一用算盤，便不必再做看不見的計算，這純粹是一種工具，小販因為不

便攜帶算盤。所以他們的計算能力，向不用工具的心算方面發展；他們的成就，完全從實際需要中練習得來。店員，早早用工具，所以技術的發展。在打算盤的速率方面；要他們心算 100 以內的加法，往往不及不識字的女傭或主婦。在沒有算盤時竟有人會待拿出銅元來，擺成算盤珠的地位做一個 $(18+7)$ 的加法；小學生的心算，不必像小販，但是 17 加 8 却不該一定要用算盤。

讀者要是讀過我從前寫的算學教法書；或者要發生不少疑問如：筆算式子，不應該記進位的數目或點子，爲什麼補習時容許他記點子？並且爲什麼長除法，試商時又教他特地另在左方把乘法的算式寫出？這都可以說是浪費，爲什麼不用最簡捷，最經濟的方法？既然要拿心算的純熟做筆算的基礎，爲什麼又主張聽憑學生用手指；初學乘法除法時，爲什麼教學生用表查對？……等等。的確，我自己也覺得有些矛盾。我自己經過一番思索，一番整理，結論是並不矛盾。要是小孩子上學以後；算學的教材沒有躐等，算學的教法時常跟隨着他們能力的發達而進展，當然，用筆算做加法時，九九的心算已有相當程度，即使要強迫他們用手指，他們也要拒絕。同樣，乘法的入門，從同數連加法到九九的心算，已往相當熟習，然後再學筆算的形式，自然用不着再查表。乘法已經到相當程度，看不見的進位乘法已到可以用心算處理的地步，何必再要化時間在左方記出！走馬看

花的學習，前後接不上氣，我們除了用過渡的方法補救，還有什麼辦法？這等補救的方法，不是日常的滋養品，只好算是醫治消化不良的藥。教材不合學生消化力，學生已犯了嚴重的腸胃病，補習是一所療養院，一面用藥治療，一面使消化力漸漸恢復，藥是過渡，我用的也都是過渡。在學級教學制度下，個別差異是不可避免的事實。即使教材配得適當，教法用得合度，仍難免有少數學生一時害消化不良的病症，所以乘除法查表的一味藥，瀾拿去用了，很顯明的，有幾個學生只服一二劑便可出院；稍重些的留院的日子較多，我的那位高足，因為種種原因，病症犯得特別多而重，所以我用了好幾味藥，經過長久的日子，才使他算學的健康漸漸恢復過來。這等過渡的方法不能不用，不能永遠用。用來應變，是很有效的。把消化藥代替了滋養品，不是要使消化力更其衰弱？名醫說，藥總是毒的。這的確是至理名言！我說過渡的方法都是毒藥，若要用，須先預計好用的時期，天天注意把藥量減輕。不然極容易和從前用鴉片治肝胃氣痛一樣，一經上癮，弄得不可救藥。

26. 分數初步

補習只好算是醫藥；平日的教學才是正規的營養。上面所說，大多是過渡的醫藥。醫藥畢竟勞多而功少，五年級生學習初步分數，要是正規的營養弄得不當，醫藥問題，到初中裏還不能

免。我們日常生活裏不用慣分數，初學的人更難消化。他開學後改用一本春季用的教科書，全書 24 個單元，分數仍占十三個單元，超過一半。論頁數一百頁中占五十一頁。內容比秋季用的一本較淺；一大批的整數性質是沒有的。十三個單元的大概情形如下：

1. 分數的讀法和寫法，3 頁。從一隻果平分四塊入手。
2. 分數的種類，3 頁。有真分數，帶分數，假分數的定義和讀法寫法。
3. 分數的化法，3 頁。假分化帶分。帶分化假分。
4. 分數的約法，3 頁。
5. 同母分數加法，3 頁。
6. 同母分數減法，3 頁。
7. 同母帶分數減法，3 頁；約分，化分，加減的速算，2 頁；所謂練習測驗，實在是復習題，2 頁。
8. 分數的通法，3 頁。
9. 異母分數加法，3 頁。
10. 異母分數減法，3 頁。
11. 異母帶分數加減法，3 頁；通分，異母加減法的速算，2 頁，復習，2 頁。
12. 初步乘法如 $72 \times \frac{7}{12}$ 等，3 頁。

13. 初步除法如 $4 \div \frac{2}{5}$ 等, 3 頁; 是除法的速算 2 頁; 復習題(練習測驗), 2 頁。

初學分數, 彷彿是初斷乳的嬰孩, 最容易消化不良。這一批營養品, 雖不是分數的全席, 但也可以和十大碗相比。叫初斷乳者吃十大碗, 恐怕不能免消化不良吧。初斷乳者只能吃些介乎乳和飯之間的粥, 粉粥, 豆漿, 菜湯, 菜泥, 烤饅頭等等; 就是我們的家常便飯——白米飯, 青菜, 豆腐也不能完全消化。初步分數的粥, 菜湯, 豆漿, 烤饅頭是什麼?

不要用太陌生的材料, 突然問來一個“四人平分一隻果”的問題。一向來做除法問題, 至少總可以得到 1; 並且教科書中的除法題目, 有一個惡習慣, 總是恰恰除絕。有一則實在的笑話, 教師問學生, “媽媽, 弟弟, 和你三個人分十隻橘子, 每人幾隻!” 學生的答案, 有的主張媽媽分得四隻, 有的主張弟弟分得四隻, 但我猜他們心裏。個個人想自己分得四隻, 平分每人 $3 \frac{1}{3}$ 隻, 這一種意思, 和日常生活太不接近了; 用來做出發點, 很有些危險。做慣除不絕的除法的學生, 早知道餘數的寫法, 或如 $3 \cdots 1$; 或如 $3 \frac{1}{3}$; 從這一點出發, 或者還不太陌生。

第二個出發點, 就是非十進的複名數。里和丈的關係, 比率較大, 而且日常用得較少。不如斤和兩的關係適合。一斤是 16 兩; 8 兩是半斤, “半”怎樣寫法? 答案是半斤寫作“ $\frac{1}{2}$ 斤。”四兩

呢？半斤的一半，一斤的……，這裏便介紹“四分之一”的一句話。看秤上星的位置，半斤在一斤的中段。二段相等，所以是“二分之一；”四兩又在半斤的中段。所以是“四分之一。”四分之一的寫法是 $\frac{1}{4}$ 。同樣再由二兩，一兩，介紹 $\frac{1}{8}$ ， $\frac{1}{16}$ 的讀法寫法。由斤兩推到里丈，像50丈是 $\frac{1}{2}$ 里，30丈是 $\frac{1}{5}$ 里，15丈是 $\frac{1}{10}$ 里等；以及2角是1元的 $\frac{1}{5}$ ，1角是一元的 $\frac{1}{10}$ ，5角是一元的 $\frac{1}{2}$ 等。十進複名數也可以聯絡了練習。這一段的材料，不可太多，分子暫時以1為限。要是學生學習沒有多大困難，可以再把範圍放寬一些，做些簡單的題目，像“一本書72頁，讀過 $\frac{1}{6}$ ，讀過的是幾頁？”或者“一張紙上已寫好4個大字，全紙已寫 $\frac{1}{4}$ ，全張紙可以寫幾字？”等等。不是乘除法；這是用具體事物學習 $\frac{1}{4}$ ， $\frac{1}{6}$ 等的意義。若當作乘除法，教學生用 $72 \times \frac{1}{6}$ 或 $4 \div \frac{1}{4} = 4 \times \frac{4}{1}$ 等算式，那末糟了。用心算，只寫答12、16等。題目的形式或者可以像72的 $\frac{1}{6}$ 或____的 $\frac{1}{4} = 4$ 等；但是最好口述事實。複式學級不得已時才用上例的樣子。

第二段，才介紹分子 1 以上的讀法寫法。從斤兩關係，把

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}, \frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}$$

等 15 個詳細介紹，多方練習。最好能使純熟，並不是什麼算加減乘除；是熟習 10 兩是 $\frac{5}{8}$ 斤，12 兩是 $\frac{2}{4}$ 斤等。我們日常生活利用分數的地方只有在斤兩的計算。100 丈是 $\frac{2}{3}$ 里，90 丈是 $\frac{3}{5}$ 里等。或再聯絡十進複名數，多方練習，但不必純熟。上例題目，也可以擴充到 12 的 $\frac{2}{3} =$ ，或____的 $\frac{3}{4} = 9$ 等。仍宜口述事實，非不得已時不用等式。用心算，數量小，絕對不得用 $72 \times \frac{2}{3}$ 或 $9 \div \frac{3}{4} = 9 \times \frac{4}{3}$ 等算式。前一段的目的是“認識幾分之一，”這一段的目的是認識“幾分之幾。”

初步分數，這二段已經很夠的了。同母加法減法，或者可以列入第三段。帶分數也並沒多大困難。要是學生學得非常高興，消化力很強，那末可以試用烤番薯等較硬性的材料。例如每斤一角二分的魚，買一斤四兩是多少？……等。算法應取最簡捷的一條路，切勿自尋煩惱用 $12 \text{ 分} \times 1\frac{1}{4} = 12 \text{ 分} \times \frac{5}{4} =$ 等形式。這樣，又要牽涉許多算學裏的八股，化假分數，約分等等。這時的經驗，可以給六年級學習化分，約分時做例證；絕對不可用

化分約分等擾亂初步的直接經驗。一斤是1角2分；四兩是3分；所以共計是1角5分。這類題只要心算。口 題目；心算筆答，最簡捷。不得已時，至多用 $1\frac{1}{4} \times .12 =$ 等式出題目。學生

仍是心算 在 = 後寫答，成 $1\frac{1}{4} \times .12 = .15$ 等。這是第一步。再進一步，可以做“每斤一角七分六厘的魚，二斤十兩共多少？”等

題目。式子可以寫成 $2\frac{5}{8} \times .176$ ，但是算法仍 必用 $2\frac{5}{8} \times .176 = \frac{21}{8} \times .176$ 的形式。“一掌經”很適合這時期。可以完全用心

算。一斤價 .176； $\frac{1}{2}$ 斤價 .088； $\frac{1}{4}$ 斤價 .044； $\frac{1}{8}$ 斤價 .022； $\frac{5}{8}$

(甲)

$$\begin{array}{r}
 2\frac{5}{8} \times .176 \quad .462 \\
 1 \quad .176 \\
 1 \quad .088 \quad .176 \\
 2 \quad \quad .352 \\
 \quad \quad \quad \underline{2} \\
 1 \quad .044 \quad .352 \\
 4 \quad \quad .110 \\
 \quad \quad \quad \underline{1} \\
 1 \quad .022 \quad .462 \\
 8 \quad \quad \quad \underline{2} \\
 5 \quad .110 \\
 8 \quad \quad \quad \underline{2} \\
 \quad \quad \quad .352 \\
 \quad \quad \quad .110 \\
 \quad \quad \quad \underline{2} \\
 \quad \quad \quad .462
 \end{array}$$

(乙)

$$\begin{array}{r}
 2\frac{5}{8} \times .176 = .462 \\
 .176 \text{ 的 } \frac{1}{8} = .022 \\
 .176 \text{ 的 } \frac{5}{8} = .110 \\
 \quad \quad \quad .176 \\
 \quad \quad \quad \underline{2} \\
 \quad \quad \quad .352 \\
 \quad \quad \quad .110 \\
 \quad \quad \quad \underline{2} \\
 \quad \quad \quad .462
 \end{array}$$

斤價 .110; 二斤價 .352 共計 .462 心算後, 在 = 後寫答, 式子成功 $2\frac{5}{8} \times .176 = .462$. 如學生心算時數目過多, 容易忘記, 可以寫成甲例的樣子. 這是最初時用的方法, 漸漸純熟時 可以照乙例的樣子, 用心算做 .176 的 $\frac{1}{8}$, .176 的 $\frac{5}{8}$; 這是第二段裏已經學過的, 現在不過再併上一個 $2 \times .176, = .352$ 罷了. 日常物價, 店家因為斤兩不是十進, 所以常常是 8, 或 16 的倍數, 如 176, 256, 88, 96, 304, 296 … 等等. 不用算盤, 不用筆算 一掌經完全心算, 也可以很快的求得結果. 例如: 每斤三角另四厘的物三斤十一兩, 求共計價值時, 他們的心算過程是 3 斤 .912; 半斤 .152; 四兩 .076; 二兩 .038; 一兩 .019; 11 乘 .019, 得 .209, 再加上 .912 共 1.121. 小孩子心算不十分熟, 可用上例的算式幫助.

若是物價不是 8 或 16 的倍數, 那末這等題目, 可以利用斤兩法的小數計算. 15 個小數關係, 可以和分數並列成一表如丙列. 這樣, 把複名數小數分數聯絡在一表中, 用慣以後; 將來可以做學習小數和分數關係的基礎. 小數多到四位, 比較麻煩, 初學時只須介紹一個大概, 不必練習純熟. 做題目時, 叫學生用表查. 六年級學生學習分數小數關係時, 可以多做些題目 但是仍可以用表查. 六年級學分數時, 可以介紹“每元四斤七兩的魚, 每兩價多少?”“每元 8 斤 4 兩 的果, 每兩價多少?”等題目. 計

(丙)

$$\text{半斤} = \frac{1}{2} \text{斤} = .5 \text{斤} \quad \text{三兩} = \frac{3}{16} \text{斤} = .1875 \text{斤}$$

$$\text{四兩} = \frac{1}{4} \text{斤} = .25 \text{斤} \quad \text{五兩} = \frac{5}{16} \text{斤} = .3125 \text{斤}$$

$$\text{二兩} = \frac{1}{8} \text{斤} = .125 \text{斤} \quad \text{七兩} = \frac{7}{16} \text{斤} = .4375 \text{斤}$$

$$\text{一兩} = \frac{1}{16} \text{斤} = .0625 \text{斤} \quad \text{九兩} = \frac{9}{16} \text{斤} = .5625 \text{斤}$$

$$\text{十二兩} = \frac{3}{4} \text{斤} = .75 \text{斤} \quad \text{十一兩} = \frac{11}{16} \text{斤} = .6875 \text{斤}$$

$$\text{六兩} = \frac{3}{8} \text{斤} = .375 \text{斤} \quad \text{十三兩} = \frac{13}{16} \text{斤} = .8125 \text{斤}$$

$$\text{十兩} = \frac{5}{8} \text{斤} = .625 \text{斤} \quad \text{十五兩} = \frac{15}{16} \text{斤} = .9375 \text{斤}$$

$$\text{十四兩} = \frac{7}{8} \text{斤} = .875 \text{斤}$$

(丁)

$$1 \div 4 \frac{7}{16} = 1 \div \frac{71}{16} = \frac{16}{71} = .225 \quad 1 \div 8 \frac{1}{4} = 1 \div \frac{33}{4} = \frac{4}{33} = .122$$

算用分數如丁例比用小數省便。小數除法，8.25 除 1 還好；要用 4.4375 除 1，遠不如 $4\frac{7}{16}$ 除 1 來得容易。我國日常生活中只有這等地方用得着分數。這是珠算所不能的。珠算，只能用很長的小數。

或者有人疑惑前面所說初步分數程度太淺。我說並不淺；

開始時的步驟應當如此細。從前編譯社會化算術教科書時，一面在實地試用，教師的報告是“用這樣步驟教分數，學生的基礎堅實，後來學習分數時進行很順利。”後來有許多人用過那部教科書，同樣批評的教師也不少。偶然有幾位，卻說那書分數教材太沒系統。我們的系統，或者沒有被他們看出來。他們一看到12的 $\frac{1}{3}$ ，立刻便想到他們系統中的分數乘整數，於是要說：“沒有學加減法怎能先學乘法？”他們不了解這就是他們系統中的所謂的分數的意義。我國社會用分數處很少，前述三段，在五年級，已經儘夠的了。就是六年級，也不必學多少，所以課程標準裏規定的，是淺易的分數。

27. 不名小數

我們的補習，集中在計算技能的純熟，所以書裏的說明，差不多擱開不問。這方面的材料，校裏教師上課時，已經講過，不必再補。我假定他已經明白，但是他並沒有明白。他只知道做題目。這是普通孩子的普通情形。書最重要的說明，教師最費力的講解，但是學生看來，不是題目，不必計算，可以不睬。編者教者的意思是，講明後學生自己會得做。學生呢，只是在做題目時學習算法，不高興先管什麼說明。他會得做小數的四則，但是不懂得小數的意義。不名小數的意義，本來不容易了解。了解，或者應當在練習以後，做是當然，意義是所以然。從當然到所以然，

或者是一種自然的進程。不做，無由認識；憑空講意義，的確不容易明白。有的學生，做會當然的方法，從此不再深究所以然的意義。就實用方面論，小學程度到此為止，也沒有什麼嚴重的問題。日常用的小數，總是一種名數；計算時暫把名稱略去，用不名數算，是通常用的方法。純粹的不名小數，只有利率等。用成分利率說明不名小數，或者反而容易了解。

他學過兩本不同的教科書。第一本裏小數開始時的說明，是：“我們在第一冊講過，買貨是用元做單位，不滿一元的幾角幾分，是一元的小數……，如記 0.9 元，讀做十分之九元；……這 0.9 元……都是名數，假使數目的後面不記名數稱，如記 0.9……叫做不名數，讀做十分之九。”這說明很省便。銜接前一冊，把名稱省記便成不名數。但是仔細一想却有一個危險，就是拿省去名稱和純粹的不名數混作一談。成分利率，就是省去什麼名稱成功的？這樣一問，不是難以回答了！凡教學生的意義說明，雖應當用適合程度的詞句，但也不能和將來正式的意義發生矛盾。實在最省便的方法，還是用例子來說明：“像 0.9 元是有名的小數；像 0.9……是不名小數。”區別顯然，一看便明白。第二本裏用一個問題：“有豆一堆，平均分裝 10 袋，每袋裝豆多少？分裝 100 袋，每袋裝豆多少？”聰明的學生，在沒有學過分數時，恐怕要反問教師，不知道豆有幾石幾斗？怎能做除法？更嚴格些說，一堆的 $\frac{1}{10}$ 還是 $\frac{1}{10}$ 堆，是名數。只有一堆的 $\frac{1}{10}$ 一句裏

的十分之一才是不名數。這區別，我們自己有時也會弄錯，怎能教小孩子？不名小數是從比產生的，10斤比1斤是10倍；1斤比1斤是1倍；1斤比10斤是十分之一；1斤比100斤是百分之一。小數十分，百分，恰和整數十倍百倍成相對的系列，所以記法用點子把“倍”和“分”畫開，如下例：

千	百	十	一	十	百	千
倍			分			

但這不可以教五年生，因為太抽象，五年級開始，照上面所說用例子代定義。到六年級結束時，學過分數，成分，利率以後，才綜合起來，用比的方法，歸納到抽象的意義，這是從具體到抽象的歸納法；初學者非這樣不可。

現行教科書中小數讀法太咬文嚼字，才開始用小數記十進複名數，便要叫學生讀十分之九尺，百分之十六元，實在是不合理的。\$2.56 在商店銀行裏也讀作二元五角六分，誰也不讀作二又百分之五十六元。0.9 尺儘可讀作九寸，就是不名小數，初時也可以讀“點三五”或“小數二五”等，學生平常也如此讀法。“零點七五”是我們大家用慣的，為什麼不許小孩子用？沒有到用比的方法，歸納到上述的“倍”和“分”的相對系列時，不必教學生用“十分”“百分”等讀法。這不是日常的讀法，是一種位子的關係名稱。

教科書的通例，說明意義以後，便要分別種類，純小數，帶

小數等等，這又太早了。我的五年級用小數的營養品單子是，先從 0.9 尺，0.5 元，到 0.9，0.5，用實例教“不名小數。”次學不名小數加法減法。這時的讀法用常用的“小數二五”“零點七二五”等。次介紹帶小數純小數的分別；就在做加法減法時。只須分別“0.85”等是純小數，“2.85”等是帶小數。次學乘法，除法。這樣，結束了五年級的小數。接下去是分數初步，成分利息的初步。到六年級，綜合比較小數分數，成分，然後開始用比的方法，歸納“倍”和“分”的意義，成功：

- | | | | | | | | | |
|----------|----|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. 十進系列: | …… | 1 | 1 | 1 | 1 | | | |
| | | 千 | 百 | 十 | 一 | 十 | 百 | 千 |
| | | 倍 | 倍 | 倍 | 倍 | 分 | 分 | 分 |
-
- | | | | | | | |
|-----------|---|---|---|---|---|---|
| 2. 不十進系列: | 8 | 4 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| | 八 | 四 | 二 | 一 | 二 | 四 |
| | 倍 | 倍 | 倍 | 倍 | 分 | 分 |

這樣，可以把不名小數和分數的真義使學生明白；但是仍不用囁嚅的詞句。要是學生進步較慢，在小學裏，儘可把六年級的一段教材省去，但是小數四則的計算，應當練習到相當純熟。不明白十分百分的意義，還沒有大害，不會算 $1.25 \overline{) 1.04}$ 等除法或八九個小數的連加法……却要使學生將來生活上發生艱難。遇到斤兩問題會得用 .1875 乘或除，足以處世；不會念萬分之一千八百七十五或不明白 .1875 是一種比率，是不要緊的。

我國不名小數的命名和外國不同；現在通行的百分之一，

十分之一，連同百分法，都是從十進分數制抄來的。他們小數的發明，在分數後，所以小數當作是一種分母十進的分數，英文名叫“Decimal fraction.”我國不用分數，用慣小數，沒有小數點，但1以下有位子的名稱，成分厘毫，和整數的個十百千萬相對，只要有一個小數點放在個和成間，1.1儘可讀作一又一成；.25可以讀作二成五分，如此讀法和我們的語言習慣相符合。1875從左向右，讀“一成八分七厘半；”不必先數位子，到萬，然後再回過頭來讀“萬分之一千八百七十五。”不名小數的位子名用了成分厘時，百分不必另起爐灶，簡捷爽快改作成分；不過介紹一個新的寫法就是了，.65是六成五分可以寫做65%，讀如“六成五分。”這樣，不名小數和成分是同一事的兩名；就是利率的二分，也和2%；.02是同一事，利率專用在金錢方面；成分可以用在一切，都是限用兩位小數的算法，這樣，成分和利率可以看作不名小數的應用；不名小數的真意義，移到初步成分利息以後，不但總結分數和小數，並且可以把成分，折扣，利率也一起歸納起來，如：

1. 十進系列	千 倍 1	百 倍 1	十 倍 1	一 倍 1	十 分 成	百 分 分	千 分 厘
.....	千	百	十	一			
2. 不十進系列	9	3	1		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{9}$
.....	九 倍	三 倍	一 倍		三 分		九 分

3. 成分

0.		
	成	分
	十	一
	%	%

4. 折扣

成分的一種，用途的範圍比成分狹小，專用在物價。

5. 利率

範圍更狹，專用在金錢的借貸存儲。

折扣是很常用的，用作成分初步的出發點很相宜，意義比成分具體些，從物價的折扣，引入一般的成分，很合初學者的心理；只須把折扣的意義推廣便行。例如物價一元，實付七角是七折；十個學生只到七個，也是七折。不過不到的三個，我們不叫三折。換一個普遍的名稱；到的是七成，不到的是三成，這樣便可引到成分。一元比七角，十人比七人，十人比三人，就是從比產生成分的意義，用事例，不教定義，但是意義却包括在內。

28. 等式

長除法的練習，我們先集中在除數二位的，學習試商的方法。其次是小數的除法，除數仍限二位，或二位有效數字的三位小數如 .025 等，漸漸純熟時，除數的範圍再推廣到三位。這時候，除數有三種不同的樣子：一是 108, 208 等，試商時可以作 10, 20 看的；二是 483, 292 等，可以當作 50, 30 看的；三是 268, 152 等，可以當作 26, 15 看的。我們看來，108 不過是 10 的擴

張；483 不過是 48 的擴張；268 不過是 26 的擴張。但是才從除數二位到三位，很容易受到個位上數目的擾亂，所以第一天遇到除數三位的習題，也呆着不知從何下手，只告訴他看頭上，不要管末尾，他便恍然大悟，自己能動手做了。步驟並不分得很細。初幾天的除數偏於 106, 201, 310, 等，其次是 180, 293, 等，再其次便是 266, 359 等。每步只一兩天，以後便混和了，把除數改作小數，帶小數等。所以三位除數的除法，我們是整數小數同時並進的。照課程標準，法三位的除法是在第四年學的。要是四年級裏有一小部分學生進步很慢，我想儘可以集中全力練習法二位的除法，把法三位的一部分略去，移在小數除法中。就是：四年級只學法二位的整數除法，五年級學小數除法，起先也限定用二位法數，等到小數位子弄得清楚時，再把法數擴張到三位，整數小數混在一起，同時並進。

除數三位的小數除法，花樣比兩位的更多，但是分步不必過細，只須把各色情形的題目都使學生遇到。換句話說，就是練習的進程不必再詳細分步，但是習題的種類却要多方顧到。被除數有整數，帶小數，純小數三類；除數也有整數，帶小數，純小數三類。兩者錯綜配合，有：

整數除整數，商帶小數，純小數。

整數除帶小數，商帶小數，純小數。

整數除純小數，商純小數。

帶小數除整數，商帶小數，純小數，整數。

帶小數除帶小數，商小數，純小數，整數。

帶小數除純小數，商純小數。

純小數除整數，商帶小數，整數。

純小數除帶小數，商帶小數，整數。

純小數除純小數，商帶小數，整數，純小數。

九式；若再照商的花色分，共有 19 式。習題中應各式兼顧，不可偏廢。尤其是 $125 \overline{) 1}$ ， $12.5 \overline{) 1}$ ， $1.25 \overline{) 1}$ ， $.125 \overline{) 1}$ 等被除數是 1 的，教科書裏不常見，日常生活中却容易遇到。例如每元二斤四兩的糖，要知道每兩的價，便要會做 $2.25 \overline{) 1}$ 才能求得。其他，用 10, 100, 1000, 120, 140 等做被除數的題目也宜多做。因為這等都是日常生活中常見的。

教科書裏的方法，小數除數變作整數除數時用等式，例如 $2.25 \overline{) 1}$ ，先用等式 $1 \div 2.25 = 100 \div 225$ ，然後再寫成 $225 \overline{) 100}$ 演算。但是教師却教他在被除數 1 後附 0，加點，如 $2.25 \overline{) 1.00 0}$ ，再去點如 $2 \overline{) 25 \overline{) 100.0}}$ ；像 $2.5 \overline{) 36.75}$ 等，便寫成 $2 \overline{) 5 \overline{) 36 \overline{) 7.5}}$ ；去點是一種塗改，很容易招致錯誤。不必去，留在上面，也沒有什麼不可。只須商的小數地位看準，在商裏預記一小數點已夠。例如 $2.25 \overline{) 1}$ 可寫成 $2.25 \overline{) 1.00}$ ； $2.5 \overline{) 36.75}$ 可寫成 $2.5 \overline{) 36.75}$ ，這不過是一種小節。他既經學會了前一種，我並沒有叫他改。要是教初學，我想後一種比較清楚而且省便。

用等式，實在太周折而且不切合實在的生活。例如我們要比較火車和輪船那一種行得快時，所得的材料是728里的距離火車8時到達；180里的距離輪船9時到達，我們分別求火車和輪船每時的速率，做兩個除法如甲乙，再做減法如丙。就是要叫小學生咬文嚼字的寫等式，也只須照丁的樣子寫成三個；不必如戊，合併成一個複雜的式子。平常計算，不用公式，都只要

(甲)	(乙)	(丙)
$\begin{array}{r} 91 \\ 8 \overline{)728} \end{array}$	$\begin{array}{r} 20 \\ 9 \overline{)180} \end{array}$	$\begin{array}{r} 91 \\ 20 \\ \hline 71 \end{array}$

(丁)

$728 \div 8 = 91$

$180 \div 9 = 20$

$91 - 20 = 71$

(戊)

$728 \div 8 - 180 \div 9 = 91 - 20 = 71$

按照平常慣用的形式，不必囿囿。公式的學習，應當在六年級。應當從題目歸納成公式，不應當從公式演繹出來做習題。例如學過好多成分題目以後，根據學生經驗，凡是成分率總是兩數比出來的；比時用除法，所以“成分率 = 乙數 \div 甲數。”乙叫子數，甲叫母數，公式便成：成分率 = 子數 \div 母數。已經學過公式，計算問題時，當然用數目代入公式，所以等式便成功實在的需要。例如母數250，成分率6%，求子數時，可以先寫 $.06 = \text{子數} \div 250$ ；再改成 $.06 \times 250 = \dots$ ，不必教代數裏的移項，只須用學生已有的經驗證明。例如 $4 = 20 \div 5$ ，所以 $4 \times 5 = 20$ ，

成分公式只要一個，不必三個。有了一個，可以代入，照上述方法進行，並沒有什麼多大困難。三個公式各自獨立，反而使學生難記。求母數的，例如成分率 0.06 ，子數 120 ，代入公式如 $.06 = 120 \div$ 母數，再改成 $120 \div .06$ ；證明方法仍如上例，用單簡的數目像“ $6 = 12 \div 2$ ，所以 $12 \div 6 = 2$ 。”只要略為練習，代入公式的手續，並不困難。最重要的，是練習宜把求成分率，求子數，求母數三方交混。不然，不會得判別，那裏會得運用？這是教六年級的，五年級初學，不必用公式。

<p>(A)</p> $\begin{array}{r} 253 \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 4 \\ 8 \end{array} \\ 44 \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{l} 6 \\ \end{array} \\ 867 \begin{array}{l} 1 \\ 4 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ \end{array} \\ 92 \begin{array}{l} 3 \\ 8 \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ \end{array} \\ \hline 1256 \quad \frac{15}{8} \\ 1 \begin{array}{l} 7 \\ 8 \end{array} \\ \hline 1257 \frac{7}{8} \end{array}$	<p>(B)</p> $\begin{array}{r} 125 \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 4 \end{array} \\ 66 \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ \end{array} \\ \hline 58 \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{l} \end{array} \\ \hline \end{array}$ <p>(C)</p> $\begin{array}{r} 36 \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} \end{array} \\ 7 \\ \hline 252 \quad \frac{7}{2} \\ 3 \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} \end{array} \\ \hline 255 \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} \end{array} \end{array}$	<p>(D)</p> $\begin{array}{r} 365 \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \\ 29 \\ \hline 3285 \quad \frac{87}{4} \\ 780 \\ 21 \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \\ \hline 10606 \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \\ \hline \end{array}$ <p>(F)</p> $\begin{array}{r} 30 \begin{array}{l} 7 \\ 16 \end{array} \\ 12 \sqrt{365 \frac{1}{2}} \\ 36 \\ \hline 5 \frac{1}{4} \quad 21 \quad 7 \\ 4 \times 12 = 16 \end{array}$
--	---	--

有好多人以為分數的計算宜用等式；教科書裏也如此。我們日常生活中很少用到分數，找不出實例來。但是在常用分數的國裏，初學用的教科書也不用等式；照日常慣用的方式：加法如 A，通分如不能心算，記在右方。減法如 B，通分仍記右方。 $\frac{2}{4}$ 比 $\frac{3}{4}$ 小，退整數 1； $\frac{6}{4}$ 減 $\frac{3}{4}$ 餘 $\frac{3}{4}$ 。簡單的乘法如 C, D, 拿

(E)

$$\begin{array}{r} 365 \frac{3}{4} \\ 29 \frac{3}{8} \\ \hline 3285 \frac{87}{4} \\ 730 \frac{1095}{8} \\ 21 \frac{3}{4} \frac{9}{32} \\ 136 \frac{7}{8} \frac{24}{32} \\ 9 \frac{28}{32} \\ \hline 10742 \frac{61}{32} \\ 1 \frac{29}{32} \\ \hline 10743 \frac{29}{32} \end{array}$$

(G)

$$\begin{array}{r} 12 \frac{3}{4} \quad 365 \frac{3}{8} \\ 51 \frac{4}{4} \\ \hline 1460 \frac{3}{2} \\ 1 \frac{1}{2} \\ \hline 1461 \frac{1}{2} \\ 28 \\ \hline 51 \quad 1461 \frac{1}{2} \\ 102 \\ \hline 441 \\ 408 \\ \hline 32 \frac{1}{2} \quad 65 \frac{65}{2} \times 51 = \frac{65}{102} \end{array}$$

乘數分別乘被乘數的整數和分數，然後一併加起來。帶分數乘法如 E；前半段同 D，後半段乘數的分數分別乘被乘數的整數和分數，最後一併加起來，有時要通分。簡除法如 F，遇到整數不夠被除時再化假分數成 $\frac{21}{4}$ ，用 12 乘分母。長除。如 G，先拿除數化假分數成 $\frac{51}{4}$ ，4 乘被除數得 $1416\frac{1}{2}$ ，方法同 C；再用 51 除 $1461\frac{1}{2}$ ；方法同 F，這樣做法，凡是可以整數計算的部分都用整數算；不牽涉分母。若照平常教科書中方法，——把 $365\frac{3}{4}$ ， $29\frac{3}{8}$ ，等化作假分數後再算，實在太麻煩了。中途能約小，還好；若不能約，真是累贅已極。日常用的數目；誰能保證一定能約？我們小學裏不必教這等教材，因為日常少用。但是我們做分數也不必一定要用等式計算。不用分數便罷；用分數往往是帶分數居多，所以等式反麻煩。小孩子很不容易辨別，等式和計算形式的不同；常用等式，他們便用等式計算，於是發生好多笑話。例如四則混合的等式像“ $64 \div 8 + 9 - 2 = \dots$ ”，他們用心算進行，就寫成“ $64 \div 8 + 9 - 2 = 8 + 9 = 17 - 2 = 15$ 。”又如“ $32 + 8 - 4 \times 6 + 70 = \dots$ ”，他們便寫成“ $32 + 8 - 4 \times 6 + 70 = 40 - 24 = 16 + 70 = 86$ 。”嚴密的說，等式的前後一定是要相等的。前一例第一段 $64 \div 8 + 9 - 2$ 是 15，第二段 $8 + 9$ 是 17，第三段 17

-2 是 15，所以成功 $15 = 17 = 15 = 15$ ；後一例第一段是 86，第二段 $40 - 2$ 是 16，第三段 $16 + 70$ 是 86，所以成功 $86 = 16 = 86 = 86$ 。教師達到這種可笑的錯誤，很不容易訂正。濫用等式，太早用等式，都容易發生這等困難。第一，少用四則混合等式；第二，不到學生覺得等式的實際需要時，不用等式，可以避免這種錯誤。尤其是練習題，應當注意在計算技術的純熟；用等式，一來增加一種不必要的擾亂，二來把時間浪費在抄寫，減少練習的機會。三來多一番抄寫，便加多抄錯的機會。

實在等式是表明關係用的，不是幫助我們計算的方法。我們計算的方法，或用心算，或用珠算，或用筆算，和等式毫無關係。例如 $64 \div 8 + 9 - 2 = 15$ 是一個等式，表明前四數和後一數值相等。至於怎樣求得 15，有好多方法。能心算的，可以想：八八，六十四；九八，十七；十七減二，十五；但是也可以想，八八六十四，九減二，七；八七，十五。要用珠算的，用算盤來記數目。要用筆算的，便寫成演算的形式如子例。當然，這等簡易的題目，我們希望學生能用心算。但是鼓勵用心算是一個問題；等式不能幫助計算，又是一個問題，不可混同。就是像 $2\frac{3}{4} + 7\frac{1}{2} = 2\frac{3}{4} + 7\frac{2}{4} = 9\frac{5}{4} = 10\frac{1}{4}$ 等分數等式，仍不過是表明相等關係罷了。數目簡單，用心算；若像 $2597\frac{13}{14} + 796\frac{1}{25} =$ ，那末通分不能用心

(子)	(丑)	(丑)	(丑)
8	25	25	325
$8 \overline{)64}$	$\underline{14}$	$\underline{13}$	$\underline{14}$
8	$\underline{100}$	75	339
$\underline{9}$	$\underline{25}$	$\underline{25}$	2597
17	350	325	$\underline{796}$
$\underline{2}$			3393
15			

算，要借重算盤或筆算的形式如丑例。這樣算好以後，再寫成等式，如 $2597 \frac{13}{14} + 796 \frac{1}{25} = 3393 \frac{339}{350}$ 。這等分數，當然不應當拿來叫

小學生做。這裏用作例子，目的是在說明等式只表關係，不能幫助計算。明白了這一個區別，我們自然明白等式不可濫用，不可早用。

29. 計算的方式

數量的關係是一定的；用等式表示的，就是這種一定的關係。例如 $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ 是一個一定的關係。 $\frac{1}{4} = .25$ ； $\frac{1}{2} = .5$ ；所以 $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = .75$ ， $.25 + .5 = \frac{3}{4}$ ， $.25 + .5 = .75$ 。就是 $25\% + 50\% = 75\%$ 仍舊是 $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ 。計算的方式是可變的；我們在許多方式中，揀最省便的，最熟習的用。要算 $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ 的和，不一定

要通分成 $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ 儘可以用 .25 代 $\frac{1}{4}$, .5 代 $\frac{1}{2}$, 加得 .75 後, 再改寫成功 $\frac{3}{4}$. 我們的歸題, 不在應否通分或應否用小數, 却在那一種方式簡捷. 我們慣用的計算方式, 這不過是比較簡捷, 多人用慣罷了; 並不是絕對只能用這一種, 或者絕對只有這一種. 同是一個退位的減法 $100 - 64$, 計算的方式可以有三種, 但是等式表示的關係却只有一個 $100 - 64 = 36$. 有的人, 用“借”: 個位 0 不夠減 4, 向十位借 1 作 10; 10 減 4 是 6. 同樣, 十位 0 不夠減 6, 向百位借 1 作 10; 10 減 6 是 4, 再扣以前借的 1, 得 3. 有的人, 百位借 1 作十位的 10, 先扣以前個位借的 1 成 9, 再減 6 得 3. 所以同是借, 也或有二種不同的方式. 有的人用“補”: 個位 4 補 6 成 10, 進 1; 十位 6 連同個位進的 1, 共 7; 7 補 3 是 10, 進 1, 恰合成百位的 1. 有的人用“同加”: 被減數個位加 10, 10 減 4 是 6; 減數同加 10, 十位 6 成 7; 被減數十位加 10, 10 減 7 是 3 減數同加 10, 百位成 1; 百位 1 減 1 是 0. 三個方式各有便利處, 也各有不便利處, 很難決定那一個最簡捷. 同是 $75 - 48$, 不論用“借”或用“同加”, 也還有兩個不同的方式: 一是併成 15, 減 8 餘 7; 一是 10 先減 8, 餘 2, 再和被減數的 5 併成 7. 我的那位補習的高足, 用慣“借”, 借的 10 先減, 然後和被減數併. 加法的心算方式, 有的從上而下, 有的從下而上; 平常是一位一位分別加, 有的人却如第 25 節所說, 每兩位同時加. 進位的數目,

有的放在最後，等十位加完後再把個位進十位的數目併入；有的先把個位進十位的數目和十位第一數加。

心算的方式，有這許多花樣；珠算也不在例外。平常的珠算加法，大概用慣一套口訣，出入很少，但是他卻自己發見了一個迂遠而省便的方式，利用上面第二珠補救他口訣不熟的缺點如第 8 節所述。乘法的方式，珠算原有“留頭”“不留頭”的分別。我想要和筆算聯絡一致，儘可以把積另外記開，如筆算珠算混合教學法第七、第八兩節所述。

筆算的方式，也不是絕對只有一種。我們用慣的加法，都是從右而左，原是爲着進位的便利。要是照第 25 節所說每兩位同時加，那末從右而左，和從左而右，沒有什麼兩樣。第 25 節壬例是從右而左的；若改作從左而右，便如甲例。減法從左而右不過退位不便，結果是一樣的。如乙例，退位要連減，手續很煩；但是珠算減法的進行卻是這樣的。撥珠比寫字省便，所以珠算加法

(甲)	(乙)	(丙)	(丁)	(戊)
4385	1012	7 9 2	792	736
1260	467		42	825
3379	612	2 3	4	5888
835	67	3 8 6 8 4	18	1472
643	552	3 1 1	14	3680
1094	7	4 8 4 2	8	607200
112	545	2 6 4	36	
396			28	
11596			33264	

(己)	(庚)	(辛)	(壬)	(癸)
736	736	736	.29732	.029732
825	825	528	356.4	35.64
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
4950	5775	5888	11892	118928
2475	2475	1472	1783	178392
5775	4950	3680	148	148660
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
607200	607200	607200	8	89196
			<hr/>	<hr/>
			1.3831	1.38342996

也是從右而左。乘法，除適用的方式外，有一種名叫“划繩經”的，利用格子定位，寫字的手續較煩，但是可以省去暗記進位。給我那位高足用，一定很好。例如 792×42 ，照丙例的樣子，每個九九的積分別記在三角形的格子裏；最後把斜格裏各數加起來便得 33264。若要用這方式，寫成平常乘法形式，便如丁例。乘法也不一定要從右而左，如戊例，從乘數左端起，如己例從被乘數右端起；如庚例，從被乘數左端起，連同平常用慣的一種，共計有四種方式，結果都是一樣。四種方式，實在並沒有什麼繁簡，手續上完全是差不多的。還有咧！我們有時可以把乘數倒過來寫，乘出來的結果，還是一樣，例如 736×825 ，在辛例中乘數 825，寫成 528，算出來的積還是一樣。這方式並不古怪；省略算法是常用的，並且是最省便的，例如 $.029732 \times 46.53$ ，乘積小數到兩位，計算方式如(壬)例。若後方小數不省略，便如癸例，不是和辛例一樣的嗎？算整數，辛例和戊己庚各例或平常用慣的方式比，繁簡都是一樣，所以我們用平常的方式也行。小數位子

多時。任例最省便，可以在中途截取相當的小數，所以採用這種方式。小學生算的小數，位數不應很多，所以這等方式可以不教。但是教科書中求 1.75 尺直徑的圓面積， π 用 3.1416； $.875 \times 3.1416$ 若答數只要小數二位或三位，用任例的方式算，要省便得多。這等習題，實在小學生是不必做的。

除法的方式也不止一種；平常用慣的，商數有的寫在被除數上面，有的寫在右面。現在通行的是寫在上面的一種；便於決定商的位子，比寫在右面的一種好。此外都大同小異，如子例，部分積省去不寫；心算乘法減法同時並進，只記減餘。心算快的人用這方式，可以節省不少時間。不過小學生心算不熟，欲速不達，反而要弄得混亂。省略除法的寫式也和平常差不多；如丑例，不過念到後來除數，截取的小數位愈少。曾經在算術科教學法中發表過一種筆算乘除法的統一方式；除法的除數，寫在商數

(子)	(丑)	(寅)	(卯)
427	24 77	72	42
263 $\overline{112458}$	3.2064102 $\overline{79.448106245}$	64	154
725	64 128	4608	6503
1998	15 320	432	42
157	12 825	288	230
	2 495	288	210
	2 244		203
	25 1		168
	22 4		35
	27		

的上面，如寅卯等例。比較除數被除的第一位，把除數寫在第一次恰恰夠除的地位，這樣，商的第一位一定在除數末一位下。以後依次下去，商的位子，和被除數完全一致。這方式，小數也可以用，如寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥各例。小數除去，決定商中小數點的地位，也很方便；只須在被除數中一看便可以

(辰)	(巳)	(午)	(未)	(申)
$\begin{array}{r} 38 \\ \hline .0634 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3.8 \\ \hline .634 \end{array}$	$\begin{array}{r} .38 \\ \hline 6.34 \end{array}$	$\begin{array}{r} 38 \\ \hline 63.4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 38 \\ \hline .634 \end{array}$
$\begin{array}{r} 2.41 \\ 228 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 241 \\ 228 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2.41 \\ 228 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 24.1 \\ 228 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 24.1 \\ 228 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 130 \\ 114 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 130 \\ 114 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 130 \\ 114 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 130 \\ 114 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 130 \\ 114 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 160 \\ 152 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 160 \\ 152 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 160 \\ 152 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 160 \\ 152 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 160 \\ 152 \\ \hline \end{array}$
8	8	8	8	8
(酉)	(戌)	(亥)	(A)	(B)
$\begin{array}{r} 380 \\ \hline .0634 \end{array}$	$\begin{array}{r} 380 \\ \hline 63.4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 380 \\ \hline 36.6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 72 \\ \hline 64 \end{array}$	$\begin{array}{r} 38 \\ \hline .634 \end{array}$
$\begin{array}{r} 24.1 \\ 228 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 241 \\ 228 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1.1 \\ 9 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 432 \\ 288 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 228 \\ 144 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 130 \\ 114 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 130 \\ 114 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 20 \\ 18 \\ \hline \end{array}$	4608	$\begin{array}{r} 152 \\ \hline 24.92 \end{array}$
$\begin{array}{r} 160 \\ 152 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 160 \\ 152 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 20 \\ 18 \\ \hline \end{array}$		
8	8	2		

決定。除法用了這方式時，乘法可以改成 A, B 例的樣子，第一個有效數字，永遠在被乘數的末一位下面，完全和除法中首商在除數末一位下面一致。做慣了這等方式乘除法的關係，不必多講，自會明白。寫的字並不比平常用的方式增多，搬一搬地位，看起來要清楚得多。乘除法一律從右起，還可以免得初學者的混亂。

30. 題目

出題目是很不容易的，特別是算學題目。練習用的要分步驟，步驟的精粗和學生的能力有密切的關係。過分細了，進步快的學生覺得厭煩；過分粗了，能力差的學生要半途受到阻礙。教師臨時出題目，往往沒有功夫分析考慮。最好是編教科書的人，代教師的勞，化些功夫，把書裏的題目，按照步驟排好。要是不必分步的，也宜各種各樣的花色——顧到，使得學生在練習時——遇到。這等工作，並不十分困難；但是要有若干耐性。我在編練習測驗，練習書，以及前面所舉的幾種練習材料時，深感到這等工作的繁而不重。每一題目，自己一定要詳細算過；不算，便看不出其中的真實情況來。做慣了，也並不十分單調乏味；有時還可以發現很有趣的關係，大可以解解寂寞。例如在編長除練習材料時，試商的好多花色中，有一種是近乎 0 的，像 $32 \overline{) 300}$ ， $43 \overline{) 400}$ ， $51 \overline{) 500}$ ， $64 \overline{) 600}$ ，等。假定被除數是 300, 400, 500,

600 或 7000, 8000, 9000 等數。那末除數二位相同, 或個位小於十位時, 商是 9。上例可以推到 $33\overline{)300}$, $44\overline{)400}$, $55\overline{)500}$, $66\overline{)600}$ 。除數個位若比十位大, 商便不滿 9, 只有 8, 像 $34\overline{)300}$, $45\overline{)400}$, $78\overline{)700}$, $89\overline{)800}$, 在數理上, 是當然的, 並沒有什麼希罕, 平常我們做題目, 或者也遇到, 不過沒有注意罷了。我不想把這關係教初學長除法的小學生, 因為恐怕反而擾亂他們試商用的統一方法, 我只拿來自己消遣, 至今回想, 還有餘味。附帶寫在這裏, 給同道一笑! 補習題目, 是在每天他做過後出的。一面拿某一種方法應當分的步驟做根據, 一方面參照他已經達到的地位, 決定次日的習題應當是復習舊的, 還是插入新的。有時, 要倒過來出, 例如預先定好了商和除數, 再乘起來或者再加餘數, 才能得到被除數; 然後把除數和被除數寫成一個題目。這方法好像迂遠, 實在反而省時省力。不但顧到除法的分步, 同時還把九九關係多方使用; 尤其是他常常容易錯誤的幾個, 像 4×8 , 5×9 , 4×9 等, 特別用得更多些。所以我備一九九表, 題目中用一次, 在表中作一點。這樣, 各個九九可以普遍用到, 都有練習的機會輪到, 說起來, 好像非常嚙嚙; 做起來實在很簡單。每次化的時間並不很多; 大約他做三十分的題目, 我平均不過化十五分鐘便可以出好, 至多不會超過二十分鐘。我想教師出題目, 略為化些功夫是值得的。題目出得好, 學生錯誤少, 可以減省批改練習簿的時間, 保存起來, 還可以供下一班的用呢。

現行教科書裏的練習題目，不但分步方面有問題，就是練習的機會方面，也有不少值得研究改進的地方。少數除法，照前所述，單就除數被除數的情況論應有九個花色；再連商的情況論，應當共有十九個花色。我拿他校裏用的一本教科書，把小數除法一切題目，連同例題、應用題、復習題一起分類，結果如下：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
除數	整	整	整	整	整	帶	帶	帶	帶	帶	帶	帶	小	小	小	小	小	小	小
被除數	整	整	帶	帶	小	整	整	整	帶	帶	帶	小	整	整	帶	帶	小	小	小
商	帶	小	帶	小	小	整	帶	小	整	帶	小	小	整	帶	整	帶	整	帶	小
題目數	0	0	8	4	3	2	0	0	0	3	1	3	0	0	1	1	1	4	1

這 19 個花色中，有 7 個花色，學生一次也沒有碰到。練習到的，機會也很不一致；最少的只有一次，最多的有十一次。只有兩個花色特別練得多，另外都不滿五次。對付普通的小學生，用這本教科書的教師，一定要多方補充。沒有機會練到的，要補充；練習機會不滿五次的，也要補充。但是教科書裏的題目，並沒有這樣分析好的表。若要個個教師事前分析，再出補充題目，不是很勞苦的？要是我當教師，情願另起爐灶，自己出一套題目，誰高興化許多時間，把一堆雜亂無序的題目來分析，補充；至多，拿書上題目改作復習時用。教科書中題目失卻了效用，教科書的價值，差不多減到零。自己會得出一套合宜的題目，教科書還有什麼作用？只要編書人肯多化些功夫，把題目的各方面一一顧

到，分好步驟，那末凡是用這書的教師都可以省卻自己出題目的麻煩。這樣編教科書，不是功德無量？

根據補習的經驗，又編了一套小數除法的練習材料。共分十二單元。按照上面分析用的表，1和2合成第一單元；3和4合成第二單元；5作第三單元；6和7合成第四單元；8作第五單元；9和10合成第六單元；11作第七單元；12作第八單元；13和14合成第九單元；15和16合成第十單元；17和18合成第十一單元；19作第十二單元。每單元各十二題。只編一類，不分甲乙。第一到第三單元，可以在四年級學習整數除小數時用；第四單元起供五年級用。題目如下：

一		二	
$76 \overline{)969}$	$45 \overline{)410}$	$67 \overline{)825.4}$	$726 \overline{)6544.05}$
$48 \overline{)25}$	$230 \overline{)660}$	$40 \overline{)3.37}$	$506 \overline{)3425.60}$
$85 \overline{)7630}$	$914 \overline{)1864}$	$91 \overline{)191.25}$	$28 \overline{)25.5}$
$77 \overline{)50}$	$390 \overline{)80}$	$345 \overline{)29.08}$	$818 \overline{)20.75}$
$59 \overline{)4}$	$605 \overline{)30}$	$82 \overline{)5.09}$	$480 \overline{)252.8}$
$131 \overline{)1400}$	$119 \overline{)9}$	$960 \overline{)70.45}$	$35 \overline{)32.24}$
三		四	
$55 \overline{).68}$	$28 \overline{).9}$	$2.7 \overline{)40}$	$90.8 \overline{)100}$

37)25	730)50.78	1.6)32	4.9)24
640)7.716	46)15	1.23)60	302)385.4
820)3.33	218)3.09	3.8)7	7.06)500
596)2.4	19)1	50)1	45.6)80
910)1	347)9	7.89)64	50.4)4536
五		六	
6.1)5	1.05)21	4.5)940.5	90.1)200.7
81.9)64	7.2)8	78.9)2524.8	5.67)488.8
32.1)25	6.7)1	7.08)35.4	3.4)7461.85
8.3)6	6.05)3	2.3)3.45	67.8)190.75
4.25)4	9.4)9	34.5)40.25	1.23)87.6
98.7)90	20.3)35	5.06)256.5	1.2)7.2
七		八	
5.3)991.1	8.6)6.04	1.3)0.04	4.6).125
2.46)1.2	57.9)508	7.9).25	7.53).31
4.68)2.815	10.3)7.25	20.4)16.625	5.7).8
7.5)88.8	4.02)1.28	30.1).3	86.4).425
35.7)35.4	9.7)4.8	3.5).05	6.8).84

$6.4\overline{)3.2}$	$3.1\overline{)2.4}$	$64.2\overline{)9.65}$	$9.75\overline{)6}$
	九		十
$.7\overline{)1}$	$.048\overline{)6}$	$.375\overline{)6.25}$	$.03\overline{)1.1}$
$.06\overline{)7}$	$.9\overline{)56}$	$.2\overline{)5.11}$	$.77\overline{)90.4}$
$.37\overline{)21}$	$.225\overline{)10}$	$.88\overline{)16.7}$	$.99\overline{)10.5}$
$625\overline{)30}$	$.875\overline{)34}$	$.75\overline{)42.165}$	$.025\overline{)842.5}$
$.15\overline{)960}$	$.026\overline{)605}$	$.66\overline{)250.3}$	$.01\overline{)625.8}$
$.59\overline{)1899}$	$.08\overline{)2000}$	$.4\overline{)2495.76}$	$.125\overline{)1109.75}$
	十一		十二
$.08\overline{)3}$	$.007\overline{)609}$	$.9\overline{)18}$	$.05\overline{)0.005}$
$.02\overline{)4.25}$	$.001\overline{)35}$	$.4\overline{)04}$	$.3\overline{)1}$
$.17\overline{)1.7}$	$.28\overline{)3}$	$.04\overline{)0.001}$	$.51\overline{)324}$
$.39\overline{)4.375}$	$.73\overline{)8.125}$	$.62\overline{)0.4}$	$.95\overline{)0.007}$
$.84\overline{)84}$	$.125\overline{)75}$	$.625\overline{)21}$	$.375\overline{)25}$
$.25\overline{)1.125}$	$.006\overline{)1}$	$.875\overline{)12}$	$.18\overline{)0.6}$

所謂應用問題，更應當詳密的研究。我們的補習不管方面，所以我只能就他用的那本教科書上偶然看到的幾便附帶說。在小數讀法寫法的單元裏，有一個例題中說：

個工人，每天平均吃百分之十五石米。”這彷彿是句外國話；走遍中國，米的計量或用石斗升，或用斤，但是從沒有用過“百分之一石。”前面已經說過，寫作 $.15$ 石，實在是 1 斗 5 升；呆教學生讀“百分之十五石，”可以說是爲了小數，硬叫斗升改名。小數讀法寫法的練習題，只有二個，如下：

1. 把下面各種固體比重數，讀出來：冰 0.97 ；金 19.3 ；銀 10.5 ；軟木塞 0.24 。

2. 把下面各種液體比重數，記出來：酒精百分之七十九；水銀十三又千分之五百九十六；硫酸一又百分之八十四。

爲什麼讀小數一定要用比重？五年級學生對於比重的觀念有多少明瞭？是要學生高興研究比重，忽然提出關於比重方面的問題來時，還是學讀寫小數好或者學比重好？

1.28 斤， 0.64 斤，等名數和實在事實是不符合的。爲什麼不用 1.25 斤， 0.625 斤等數？同是用小數記斤， 0.25 是四兩， 0.625 是十兩，比 0.28 ， 0.64 斤符合實際，並且還可以做以後學習斤兩法的基礎。 1.28 斤並沒有不可以改作 1.25 斤的理由。這好像是小節；但是我很武斷的批評一句，“缺乏日常生活的常識。”像 85.059 疋— 76.0278 疋等題目，也有些欠妥。或者我的常識太缺乏了，所以我想不出 0.059 疋， 0.0278 疋究竟是多少？布的買賣有時也論疋，一疋半疋是有的，千分疋萬分疋是不容易遇到的。

小數乘法的例題是：“國瑞有銀一元，梅芬只有國瑞所有銀的 0.5；那末梅芬有銀多少？”若把 0.5 改作五年級生聽得懂的語言，“一半，”那末學生的心裏一定是用 2 除一元，得五角；決不會做“ $1 \text{ 元} \times 0.5 = 0.5 \text{ 元}$ ”的乘法。用這題目開始教小數乘法，我以為編者不過故意和教師學生開開玩笑罷了。

小數除法的例題卻是：“緞每尺價 0.82 元，12.7592 元，可買多少？”這樣，除數是名數，說明起來方便得多。不是初學乘法；學生已經學過乘法好久，何必再要用事實題？初學乘法時從事實題開始，目的是要使學生覺得乘法的實際需要。已經會得做乘法的學生，只須引導他們從整數的乘數到帶小數的乘法，再到小數的乘數。數目簡些，便於心算；被乘數用名數，便於說話。例如 2 乘 3 元是 6 元；2 乘 3 元 2 角是 6 元 4 角；2.5 乘 3 元應當是 7.5 元還是 .75 元？為什麼？那末，2 乘 3 元應當是 6 元，還是 6 角？這樣問可以引到方法上去。只要從學生已知的引到未知，都是合理的途徑。若開始使用“……所有銀的 0.5”一句陌生話，把學生難到，那末一切都是未知，除呆記方法外，對於例題絲毫沒有理解。這樣，例題的作用在那裏？

31. 名數

補習偏重在計算技能，所以很少涉及名數。我出的題目全是不名數。有幾次做書裏的題目，碰到名數；並沒有深究，但是

也不覺得有多人困難。教科書裏，對於名數不名數的區別，非常注重。加法減法，要同名才可以做。這是很容易明白的。但是我們若說：“不同名數的絕對不能加減。”卻不免有些過火了。不是“不能加減”；嚴密些說，是：“不同名的數不能加減。”3尺和4寸，不同名，3尺加4寸是可以的，和是3尺4寸。也可以做減法，差是2尺6寸。複名數中，這樣的例子，很多很多。我們不應當說3尺和4寸不可加或不可減；我們應當說尺位的3不能和寸位的4加成7，或減成1，這區別太抽象了，小學生很不容易辨別。我們的說明，既要合理，又要合小孩子了解的程度，的確不容易措詞。最簡捷並且最妥善的方法，就是只說：“同名的數上下對齊，然後加減。”這和“位子上下對齊，然後加減”一句話是一致的。

“乘法的乘數是不名數”這是很平常的，大家都知道的；教科書裏也這樣教學生。學到平方，立方時只可不用3尺 \times 4尺 $=$ 12方尺，2尺 \times 3尺 \times 4尺 $=$ 24立方尺；特地改成3方尺 \times 4 $=$ 12方尺；2立方尺 \times 3 \times 4 $=$ 24立方尺。原因是要維護乘數是不名數的原則。工程師的圖樣上明明有8' \times 10'；即8尺 \times 10尺或6'' \times 8''即6寸 \times 8寸；爲什麼我們的等式不許有3尺 \times 4尺或2尺 \times 3尺 \times 4尺？物理學中更有3斤 \times 4尺 $=$ 12尺斤；這樣，竟把不同數的兩個名數乘起來，積上的名就用兩種名的混合。若一定要死守乘數是不名數的原則，反而增加不少的麻

類。學校中的物理學，還可以把 3 斤 \times 4 尺 = 12 尺斤改成 3 尺斤 \times 4 = 12 尺斤，不過說明時多些嚙嚙周折，叫初學者多吃些苦。圖樣上的 8' \times 10' 等，我們沒有方法強制工程師依照我們的原則改變。我想這原則還是省了最妥當。

沒有這原則，解決應用問題時，要決定名數的名稱，並不增加什麼困難。最簡捷的方法，就是把計算的數目，和判定名稱分開來，不要混在一起。這方法最合小孩子的心理，實在也是我們日常生活的情形。例如我們上街買物，計算銀錢收付，不論加法減法乘法除法，在計算時或用心算，或用珠算，或用筆算。總是把單位名暫時擱開。到數目算出結果來時，再判定名稱。我們做八九七二的乘法時，誰也不睬八或九是元或是角。只有單位較多的複名數而且不是十進的，計算中途才要考慮到名稱。所以小學生做應用問題，不必用等式；計算時非不得已不必記名。必要時，在演算的式子裏，不必咬文嚼字，呆記乘數一定是不名數的原則，儘可在重要地位把名記出，如下面的幾個例子。

.256 元	2 5.6	25 斤	1.8	25 斤
<u>8</u>	<u>.08 元</u>	16	<u>4.4</u>	16 <u>412 兩</u>
2.048 元	2.048	150	<u>7 2</u>	<u>32</u>
		<u>25</u>	<u>7 2</u>	<u>92</u>
		400 兩	7.92 方尺	<u>80</u>
		<u>12</u>		<u>12 兩</u>
		412 兩		

乘法如此，除法也如此。什麼“名數除名數是不名數”、“不名數除名數是名數”等呆板而不普遍的定則，也可省去。

學到公式時，各公式自有牠的名稱，也不是這等原則所能概括。例如功的公式，是 P 公斤 $\times D$ 公尺 = W 公尺斤。計算電時 E 伏脫 = I 安培 $\times R$ 歐姆； W 瓦特 = E 伏脫 $\times I$ 安培；這等公式中兩個不同的單位，結果另外又是一個單位。各公式各自代表一種特定的關係，各有特用的單位；往往都是名數。我們處理日常的計算，單位用得很少，並且不用公式，臨時在演算式記名備忘以外，實在沒有討論研究名數的必要。若要很嚴密的講理論，例如買每斤一角八分的魚三斤，寫成等式時， $.18 \text{ 元} \times 3 = .54 \text{ 元}$ 還不完全合理；應當寫成 $.18 \text{ 元} \times (3 \text{ 斤} \div 1 \text{ 斤}) = .18 \text{ 元} \times 3 = .54 \text{ 元}$ ，題目中沒有不名數 3；這 3 是從 3 斤比 1 斤比出來的。這樣寫等式，太迂腐了。因為太迂腐，所以科學公式中計算 200 伏脫，半安培的電力時，直接用公式寫成， $5 \text{ 安} \times 200 \text{ 伏} = 100 \text{ 瓦特}$ ；不再繞大圈子寫 $(5 \text{ 安} \div 1 \text{ 安}) \times (200 \text{ 伏} \div 1 \text{ 伏}) \times 1 \text{ 瓦特} = 100 \text{ 瓦特}$ 。

科學的單位，往往不只一名，例如速率是里/時；壓力是斤/方寸；若求合理，每斤一角八分的定價，應當寫成 $.18 \text{ 元/斤}$ ；那末三斤魚的等式便成 $.18 \text{ 元/斤} \times 3 \text{ 斤} = .54 \text{ 元}$ ，彷彿 $120 \text{ 里/時} \times 3 \text{ 時} = 360 \text{ 里}$ 一樣。反過來 $120 \text{ 公尺斤} \div 2 \text{ 尺} = 60 \text{ 斤}$ ； $360 \text{ 里} \div 3 \text{ 時} = 120 \text{ 里/時}$ ， $.54 \text{ 元} \div 3 \text{ 斤} = .18 \text{ 元/斤}$ 。這樣，單位

名在等式中儘可以乘除，何必呆說乘數一定是不名數，名數除名數一定是不名數？在小學時不把這等呆說定了，將來名數的觀念，可以一步一步的擴充。早說呆了，日後反而要另起爐灶，把小學裏學的糾正。幸而孩子們隨學隨忘，前後不貫，不然，他們發現物理教師的公式和算學教師的原則發生矛盾時，還要引起一番無謂的煩惱或論辯。我們只要一個原則：運算都用不名數，得到結果後，從事實判定，把單位名添上，便成名數。這原則的詞句不必教給小學生，但是一切計算，非不得已不記名，便是教他們把這原則在實行。有的初中教科書裏，不肯採用這原則，反而自尋煩惱，區別等分除，包含除兩類。在編書出題目的人，逢到應用題，應當兼顧各方面的應用；有等分的，有包含的，也有比的，但是不必把這等方面作為原則；至多使學生明白有這許多方面的實際就是了。中學生程度較高，教他們從多種多樣的事例歸納分類，原是應當的。若先列等分包含等原則再演繹出去，或者反而會得引起混亂。萬一物理學中要算 $2000 \text{ 瓦特} \div 200 \text{ 伏脫} = 10 \text{ 安培}$ 等淺近題目，要是學生固執着，一定要把這題決定是包含除或等分除，不是有些為難？何必牽強附會。老實說，這是除法應用的又一個方面罷了。譬如減法的應用，有的是比較，有的是剩餘，有的是找補；平常的應用大槪如此。到了代數中負量的減去，意義更更廣了。我們不應當把比較，剩餘找補作為減法的三原則，說“減法總不出這三者之一。”當作應用

的方面，可以一步一步的推廣，是活的，生長發展的；當作演繹的原則是呆的，是固定的。初學用的算學都應當留將來展開的餘地；多立原則，可以說是作繭自縛。定義，說明，都應當這樣。

要是把名數的名，細細研究起來，實在並不像我們平常所假定的那般具體，那般簡單。不精確的單位名像書的“冊”數，筆的“枝”數，布的“疋”數，是比較具體的，但是只能供粗略計算的用。同是一疋布，長短不能一律；同是一冊書，厚薄大小，頁數，字數，也不能一律。度量衡時等，比較精確，但是牠們的來歷，卻是從抽象的“比”產生的，譬如市尺是公尺的三分之一；公尺的起源是通過巴黎子午線從北極到赤道的千萬分之一。後來發覺這比值不很精確，所以現在是拿國際度量衡局保存的原器做公尺的標準。單位從某標準的比值產生，比值的本身，就是一個抽象的數目。所以我們若問“一公斤是什麼？”答案是“1000立方公分即一公升水的重。”但是我們若再究問“水的重究拿什麼做單位？”那末答案便只有他自己的比直“公斤。”這不是像文字的註解“泄泄猶沓沓也”“沓沓即泄泄之意”一樣，成功了循環？貨幣的單位是“元”若問元的標準，我們都知道根據，金或銀的重量和價值。要是再究問金或銀的價值，我們的答案只有用牠自己的值“元。”一切精確的單位都是這樣。數目上附了單位名，好像是比較的具體，然而單位的本身卻是一個抽象的比。實在，名數的範圍狹，數目被指定在某一個單位；不名數的

範圍廣，不限定那一個單位，這不是具體和抽象的區別，不過是範圍廣狹不同罷了。再進一步想，不名數並不是絕對沒有名稱，“個”“十”“百”“千”“萬，’等等也是名呢，拿個做單位，二百五十便寫成 250；若拿十做單位，儘可寫成 25 十；拿百做單位，便寫成 2.5 百，這等名比度量衡的名範圍廣。利率的“分”“厘，”成分的“%”都是名，通例，最廣汎的名不記，用個做單位，這便是不名數。不名數是範圍最廣省記名的數目。要是不怕累贅，256，儘可以照十進複名數例，寫成 2 百 5 十 6 個，因為範圍廣，用途大，所以我們圖省便，把名數省去不記。這是便利問題，不是數理。所以我們不必把名數不名數當作原則。數理是絕對的原則，不因便利不便利改變的。

32. 通分

前面說過，初步分數，現行教科書中材料，都嫌過多，過深。他學習分數，最不容易的，是通分。異母分數的加減法，最重要的是通分。書中通分的方法有下列的兩條：

1. 在沒有學習最小公倍數之前，可照下例兩法求同分母：
 - (1) 幾個分數的分母中，不是倍數時，就用幾個分母相乘的積，做新分母。
 - (2) 幾個分數的分母中，成功倍數時，就用最大的一數做新分母。

2. 新分母比原分母大幾倍，那末新分子比原分子也放大幾倍。

照 1 之(2)，只能求 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{8}$ 的同分母，不能找 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{6}$ 的同分母。這等或者可以作為第三種。猜度編者所以不列第三種的理由，或者是因為不合初學程度，留待將來再學。通分，異母分數的加法減法，共計 16 頁中，包含好多題目。大多數可以用第一條裏兩個方法之一求得同分母。但是通分習題中，有 $\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{8}{15}$;

$\frac{5}{24}, \frac{7}{18}, \frac{5}{24}, \frac{1}{9}$ ，異母減法中有 $\frac{7}{10}, \frac{24}{25}, \frac{7}{10}, \frac{22}{25}$ ；異母帶分加減法中

有 $\frac{9}{14}, \frac{4}{21}, \frac{6}{7}, \frac{1}{21}, \frac{2}{3}, \frac{7}{16}, \frac{1}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{25}, \frac{1}{21}, \frac{2}{3}, \frac{7}{16}$ ，速算通分中有

$\frac{3}{10}, \frac{3}{4}$ ，這等題目的通分，第一條的兩個方法，都不能得到合式

的同分母。或者我的猜度是錯了；編者也把這等題目當作“成功倍數”的。

兩個方法，各用一個例子說明；下面的練習，便不再分什麼難易先後。這是分數中最討厭的部分；教材這樣編配，學生很難得到實益。我便做了一番笨功夫，定了一些步驟，編了一套習題，給他補習時用。注重點，只在找同分母。用作加法或用作減法題的材料都可以。

第一階段只限兩個分數，分作三步：

第一步如 $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ 等，兩個分數中，有一個的分母，可以包含另外一個，就是上面第一條之(2)。通分時只須用較大的分母做同分母，把另外的一個分母和分子，用適當的數目同乘。例如 $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ ，只須把 $\frac{1}{2}$ 化作 $\frac{3}{6}$ ， $\frac{5}{6}$ 不必動。這一步的習題，作為第一第二兩課，每課 24 題，如下：

一

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{12}$$

$$\frac{6}{15}, \frac{1}{2}, \frac{9}{20}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}$$

$$\frac{7}{15}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{11}{24}, \frac{13}{30}, \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{4}, \frac{1}{12}, \frac{9}{20}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{15}{28}$$

$$\frac{5}{6}, \frac{5}{12}, \frac{5}{24}, \frac{1}{6}, \frac{4}{7}, \frac{5}{14}$$

$$\frac{9}{28}, \frac{3}{7}, \frac{7}{8}, \frac{13}{24}, \frac{5}{18}, \frac{5}{9}$$

$$\frac{1}{10}, \frac{3}{20}, \frac{23}{24}, \frac{11}{12}, \frac{3}{14}, \frac{1}{28}$$

$$\frac{4}{5}, \frac{2}{10}, \frac{17}{20}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{7}{30}$$

二

$$\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}$$

$$\frac{14}{15}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{5}{18}, \frac{1}{21}, \frac{1}{7}$$

$$\frac{11}{16}, \frac{1}{8}, \frac{25}{27}, \frac{5}{9}, \frac{7}{10}, \frac{17}{30}$$

$$\frac{23}{30}, \frac{13}{15}, \frac{9}{16}, \frac{3}{32}, \frac{7}{32}, \frac{7}{8}$$

$$\frac{5}{6}, \frac{29}{30}, \frac{4}{25}, \frac{4}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$$

$$\frac{13}{27}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{17}{18}, \frac{5}{14}, \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{23}{24}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{13}{18}$$

$$\frac{5}{32}, \frac{1}{4}, \frac{11}{14}, \frac{5}{28}, \frac{5}{24}, \frac{7}{12}$$

第二步如 $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ 等，兩分數彼此不能包含，就是上面第一條的(1)，通分時要用兩個分母的乘積 12 作同分母， $\frac{2}{3}$ 的分母分子同乘 4， $\frac{3}{4}$ 的分母分子同乘 3，這一步作第三，第四課；每課 20 題如下：

三

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{1}{3},$$

$$\frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{5},$$

$$\frac{7}{8}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{9}, \frac{4}{7}, \frac{5}{6},$$

$$\frac{2}{5}, \frac{5}{8}, \frac{5}{6}, \frac{3}{5}, \frac{8}{4}, \frac{2}{7}, \frac{7}{10}, \frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3},$$

四

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{3}, \frac{9}{10}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{7}, \frac{2}{9}, \frac{3}{4},$$

$$\frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{5}{7}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \frac{4}{5},$$

$$\frac{1}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{7}, \frac{7}{8}, \frac{7}{9}, \frac{3}{7}, \frac{5}{8}, \frac{8}{9},$$

第三步如 $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}$ 等，兩個分數彼此不能包含，但同分母比兩個分母的乘積小， $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}$ 的同分母不必用 24，只須用 12 已夠，這一步作第五第六課，每課 20 題，如下：

五

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{6}$$

$$\frac{2}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{15}, \frac{3}{10}, \frac{3}{8}$$

$$\frac{5}{12}, \frac{5}{8}, \frac{7}{10}, \frac{7}{12}, \frac{4}{15}, \frac{9}{10}, \frac{11}{12}, \frac{7}{15}$$

$$\frac{1}{16}, \frac{1}{12}, \frac{11}{15}, \frac{1}{18}, \frac{5}{18}, \frac{5}{12}, \frac{1}{14}, \frac{20}{21}$$

$$\frac{23}{24}, \frac{3}{16}, \frac{7}{18}, \frac{25}{27}, \frac{1}{30}, \frac{19}{20}, \frac{23}{27}, \frac{11}{18}$$

六

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{9}{10}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{5}{6}$$

$$\frac{7}{9}, \frac{11}{12}, \frac{7}{15}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{14}{15}, \frac{3}{10}, \frac{5}{8}$$

$$\frac{7}{12}, \frac{3}{8}, \frac{9}{10}, \frac{5}{12}, \frac{11}{15}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{8}{15}$$

$$\frac{15}{16}, \frac{5}{12}, \frac{7}{15}, \frac{17}{18}, \frac{13}{18}, \frac{7}{12}, \frac{13}{14}, \frac{1}{21}$$

$$\frac{1}{24}, \frac{13}{16}, \frac{11}{18}, \frac{4}{27}, \frac{23}{30}, \frac{3}{20}, \frac{5}{24}, \frac{9}{16}$$

第二階段，用三個分數，分作四步：

第一步如 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ 或 $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}$ 等，有 一個的分母最大，

牠可以包含另外的兩個；只須把另外兩個的分子分母，分別各

用一個適當的數目乘便行。例如上面第一例 $\frac{1}{2}$ 改成 $\frac{3}{6}$ ； $\frac{2}{3}$ 改

成 $\frac{4}{6}$ ； $\frac{1}{6}$ 不必改動。這和第一階段的第一步相似，不過是三個

分數。要是三個中有兩個是同分母的，像 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$ 等，那末通

分方法更省便，可以當作第一階段的第一步做。

第二步如 $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ 等，三個分數的分母彼此都不能包含，

和第一階段的第二步相似，用三個的分母的連乘積做同分母，上例是 60， $\frac{3}{4}$ 的分母分子同乘 15， $\frac{2}{3}$ 的分母分子同乘 20， $\frac{4}{5}$ 的分母分子同乘 12。

第三步如 $\frac{3}{4}$ ， $\frac{3}{5}$ ， $\frac{3}{8}$ 等，有一個的分母，可以包含另外的一個，8 可以包含 4，所以找同分母時，只須看 8 和 5，結果不能包含，用 40。 $\frac{3}{4}$ 的分母分子同乘 10， $\frac{3}{5}$ 的分母分子同乘 8， $\frac{3}{8}$ 的分母分子同乘 5，這一步彷彿是第一階段中第一步和第二步的混合，分母 4 和 8 似第一步，8 和 5 又似第二步。

第四步如 $\frac{1}{4}$ ， $\frac{5}{8}$ ， $\frac{7}{12}$ 等，彷彿是第一階段，第一步和第三步的混合，4 和 8 似第一步，8 可以包含 4；8 和 12 似第三步，不能互相包含，但是同分母不必用 8×12 的積 96，用 24 已夠，或者可以想，4 和 12 似第一步，12 包含 4；12 和 8 似第三步。

以上各步的題目如下：第一步作第七、第八課，第二步作第九課，第三步作第十、十一、十二課；第四步作第十三、十四、十五、十六課，每課各 15 題。

七

八

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{11}{12}$$

$$\frac{9}{14}, \frac{5}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \frac{1}{2},$$

$$\frac{5}{18}, \frac{5}{9}, \frac{1}{2}, \frac{7}{20}, \frac{7}{10}, \frac{1}{2},$$

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{4}{15}, \frac{4}{9}, \frac{5}{18}, \frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{24}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{17}{20},$$

$$\frac{5}{28}, \frac{1}{2}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{7}, \frac{13}{28},$$

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{9}{16}, \frac{9}{32}, \frac{1}{2},$$

$$\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{5}{18}, \frac{5}{36}, \frac{1}{2},$$

$$\frac{7}{27}, \frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{36},$$

$$\frac{7}{18}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{5}{24},$$

$$\frac{3}{8}, \frac{11}{24}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{9}{10}, \frac{13}{20},$$

$$\frac{7}{8}, \frac{17}{24}, \frac{1}{6}, \frac{4}{5}, \frac{11}{15}, \frac{23}{30},$$

$$\frac{7}{12}, \frac{3}{4}, \frac{23}{24},$$

$$\frac{7}{12}, \frac{2}{3}, \frac{13}{18},$$

九

十

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{7},$$

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2},$$

$$\frac{2}{7}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{12},$$

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{4}{7},$$

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5},$$

$$\frac{5}{12}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4},$$

$$\frac{2}{9}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5},$$

$$\frac{17}{18}, \frac{4}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{4}, \frac{3}{16},$$

$$\frac{5}{36}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{7}, \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{6}, \frac{7}{12}, \frac{2}{5}, \frac{3}{14}, \frac{5}{7}, \frac{3}{5}$$

$$\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{6}{7}, \frac{2}{8}, \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{9}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{16}$$

$$\frac{4}{9}, \frac{5}{6}, \frac{7}{18}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{15}$$

$$\frac{10}{21}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{8}{9}$$

$$\frac{5}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}$$

十一

十二

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{15}$$

$$\frac{3}{10}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{1}{3}, \frac{3}{7}$$

$$\frac{4}{9}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{2}{3}, \frac{1}{7}$$

$$\frac{6}{7}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10}, \frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{12}, \frac{4}{5}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{13}{15}$$

$$\frac{7}{20}, \frac{4}{15}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{12}$$

$$\frac{5}{6}, \frac{13}{18}, \frac{2}{5}, \frac{5}{18}, \frac{7}{9}, \frac{1}{5}$$

$$\frac{5}{8}, \frac{9}{16}, \frac{4}{5}, \frac{7}{10}, \frac{2}{9}, \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{11}{15}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{7}, \frac{1}{10}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{8}{15}$$

$$\frac{8}{21}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{7}{16}$$

$$\frac{5}{21}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \frac{1}{9}$$

$$\frac{5}{6}, \frac{19}{36}, \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}$$

十三

十四

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \frac{8}{15}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{11}{29}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{7}$$

$$\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{7}{15}, \frac{2}{3}, \frac{3}{10}$$

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{3}, \frac{7}{10}$$

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{1}{9}, \frac{3}{4}$$

$$\frac{4}{5}, \frac{13}{15}, \frac{3}{4}, \frac{11}{20}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}, \frac{7}{10}, \frac{11}{12}, \frac{9}{10}, \frac{2}{5}, \frac{5}{8}$$

$$\frac{3}{4}, \frac{2}{9}, \frac{5}{18}, \frac{5}{14}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$$

$$\frac{7}{8}, \frac{3}{16}, \frac{5}{6}, \frac{26}{35}, \frac{5}{7}, \frac{2}{5}$$

$$\frac{3}{8}, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, \frac{27}{32}, \frac{7}{8}, \frac{3}{4}$$

$$\frac{10}{21}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{19}{20}, \frac{5}{6}, \frac{9}{10}$$

$$\frac{7}{18}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{20}, \frac{3}{5}, \frac{3}{10}$$

$$\frac{3}{5}, \frac{3}{10}, \frac{5}{12}$$

$$\frac{1}{5}, \frac{9}{10}, \frac{11}{15}$$

十五

十六

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{7}{8}, \frac{8}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{2}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}$$

$$\frac{7}{10}, \frac{13}{15}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{10}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{9}, \frac{1}{12}, \frac{2}{3}, \frac{5}{9}$$

$$\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{9}{10}, \frac{7}{12}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{6}, \frac{8}{8}, \frac{3}{4}, \frac{5}{12}, \frac{5}{8}, \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{7}, \frac{3}{14}, \frac{1}{4}, \frac{7}{10}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4}, \frac{3}{10}, \frac{5}{16}, \frac{14}{15}, \frac{2}{5}, \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \frac{9}{20}, \frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{1}{6}$$

$$\frac{7}{9}, \frac{7}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$$

$$\frac{5}{9}, \frac{19}{24}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$$

$$\frac{17}{30}, \frac{1}{9}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, \frac{1}{6}, \frac{9}{10}$$

$$\frac{7}{18}, \frac{4}{9}, \frac{1}{8}, \frac{21}{25}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}$$

$$\frac{5}{7}, \frac{5}{21}, \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{6}, \frac{11}{30}, \frac{4}{5}$$

第四步已經較難，初學者恐怕不容易找同分母；或者可以移到六年級用，其實都可以移到六年級，五年級不必學通分，還有像

有像 $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{10}$ ；小學生儘可不必學，這等分數找同分母時，非常困難，像 $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{10}$ ，彷彿是第一階段中第二步和第三步的混合，先照第三步把 4 和 10 找得 20，再照第二步把 3 和 20 乘作

60，像 $\frac{1}{8}, \frac{5}{12}, \frac{4}{9}$ 彷彿是第三步兩組的混合，12 和 8 可用 24；24 和 9 可用 72，直接觀察，恐怕不及用小公倍省便，那末留給初

中最妥。

結束的話

這一本小書，可以暫告結束。我們的補習，依然在進行。小學生重要的計算技能，本不外整數的四則，和小數四則的基本，複名數的計算，不外整數或小數的應用，成分、折扣、利息等等，完全是小數的應用。分數在小學裏，可教，也可不教，即使教，也只須一些極淺近的，與其做不必要的繁複的練習，不如先培養好一種根本的意義。日常生活裏不用分數，接觸的機會少，所以意義不容易明白。“幾分之幾”的一句話，近來城市裏比較通行些；在鄉間，普通語彙中簡直沒有這一句話，有的地方用“股”字。這字和“分”字，可以當作一樣的意思。農夫在那裏說：“秋天容易生病，老闆病了，我們九個人中間病了三個；三股裏病了一股。”他們的分數觀念，正合我第 26 節分數初步用教材的第一段。農夫們通行這句話，小農夫們學分數便可從此出發，用“三股一”“五股一”等代“三分之一”“五分之一”也好。到後來，再介紹新的讀法，拿“分之”兩字代“股”字，這樣，學習從已知的出發，可以很順利的進行。

總之不論是初學或是補習，算學中的技能部分，絕對不是可以速成的；並且絕對不能叫二個以上的學生用同一速度進行的，這是我經過這次長時間的補習而更確信的。教材的支配可

以左右學生的學習，有了合程度的教材，方濟，可以說是過渡罷了，不過，過渡也不是可以很馬虎的，“合程度”一詞的意思，應當作合於學生進程的速度講；不僅是合他們一時的能力，譬如在某一天，教材雖合學生程度；到後來一天天的隔離，結果完全和學生的能力不合。我的補習工作，差不多完全在調整教材進程和他能力間速度的平衡。日常上課，教師在這方面應當多用些力，這裏用力，是最經濟不過的，因為調節到了平衡，可以由學生自動的進行，這樣，上課時可以省卻三反四復的講解；課後批閱練習簿，也可以省卻好多無謂的改訂。這是這次我得到的最有價值的教訓，特地在結束時提出來，供獻給同道！

