Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück SS 2018

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 3

Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1. Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.[1]

(1) $(\alpha \wedge \alpha) \leftrightarrow \alpha$.
(2) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$.
(3) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$.
(4) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$.
(5) $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$.

Aufgabe 3.2. Man beweise mittels Wahrheitstabellen die *Regeln von de Morgan*, nämlich dass

$$\neg(\beta \vee \gamma) \leftrightarrow (\neg\beta \wedge \neg\gamma)$$

und

$$\neg(\beta \wedge \gamma) \leftrightarrow (\neg\beta \vee \neg\gamma)$$

Tautologien sind.

Aufgabe 3.3. Skizziere ein Entscheidungsverfahren, das für eine gegebene Aussage $\alpha \in L^V$ entscheidet, ob es sich um eine aussagenlogische Tautologie handelt oder nicht.

Aufgabe 3.4. Zu einer Aussage $\alpha \in L^V$ und $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\neg^n\alpha$ die n-fache Negation von α. Zeige, dass $\neg^n\alpha \leftrightarrow \neg^m\alpha$ genau dann allgemeingültig ist, wenn $n - m$ ein Vielfaches von 2 ist.

Aufgabe 3.5. Es seien $p_1, \ldots, p_n$ Aussagenvariablen und $\beta_1, \ldots, \beta_n$ Aussagen. Zeige, dass man, wenn man in einer allgemeingültigen Aussage α jedes Vorkommen von p_i durch β_i ersetzt, wieder eine allgemeingültige Aussage erhält. Zeige, dass die Umkehrung davon nicht gilt.

Aufgabe 3.6. Zeige, dass eine Aussage $\alpha \in L^V$ genau dann eine Kontradiktion ist, wenn $\neg\alpha$ eine Tautologie ist.

Aufgabe 3.7. Man gebe möglichst viele Beispiele für aussagenlogische Kontradiktionen an.

[1] Wir verzichten hier und im Folgenden häufig auf Klammern, um die Lesbarkeit zu erhöhen. Gemeint sind immer die korrekt geklammerten Aussagen.

Aufgabe 3.8. Es sei V eine Menge von Aussagenvariablen und α eine Aussage in der zugehörigen formalen Sprache L^V. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine Abbildung und es sei $\varphi(\alpha)$ diejenige Aussage, die entsteht, wenn man in α jede Aussagenvariable p durch $\varphi(p)$ ersetzt. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Wenn α eine Tautologie ist, so ist auch $\varphi(\alpha)$ eine Tautologie.
(2) Wenn φ injektiv ist, so ist α genau dann eine Tautologie, wenn dies für $\varphi(\alpha)$ gilt.
(3) $\varphi(\alpha)$ kann eine Tautologie sein, auch wenn α keine Tautologie ist.
(4) Die Aussagen gelten ebenso, wenn man überall Tautologie durch Kontradiktion ersetzt.

Aufgabe 3.9. Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Teilmenge, die ausschließlich aus Aussagenvariablen oder aus negierten Aussagenvariablen besteht, wobei jede Aussagenvariable höchstens direkt oder in ihrer Negation auftritt. Zeige, dass Γ erfüllbar ist.

Aufgabe 3.10.*

Wenn Karl an Susanne denkt, bekommt er feuchte Hände, einen Kloß im Hals und einen roten Kopf. Einen roten Kopf bekommt er genau dann, wenn er an Susanne denkt oder wenn er das leere Tor nicht trifft. Wenn Karl das leere Tor trifft, bekommt er feuchte Hände. Karl bekommt den Ball vor dem leeren Tor. Kurz darauf bekommt er feuchte Hände, einen roten Kopf, aber keinen Kloß im Hals. Hat er an Susanne gedacht? Hat er das leere Tor getroffen?

Aufgabe 3.11.*

Folgende Aussagen seien bekannt.

(1) Der frühe Vogel fängt den Wurm.
(2) Doro wird nicht von Lilly gefangen.
(3) Lilly ist ein Vogel oder ein Igel.
(4) Für Igel ist 5 Uhr am Morgen spät.
(5) Doro ist ein Wurm.
(6) Für Vögel ist 5 Uhr am Morgen früh.
(7) Lilly schläft bis 5 Uhr am Morgen und ist ab 5 Uhr unterwegs.

Beantworte folgende Fragen.

(1) Ist Lilly ein Vogel oder ein Igel?
(2) Ist sie ein frühes oder ein spätes Tier?
(3) Fängt der späte Igel den Wurm?

Aufgabe 3.12.*

Der Professor kommt gelegentlich mit verschiedenen Socken und/oder mit verschiedenen Schuhen in die Universität. Er legt folgende Definitionen fest.

(1) Ein Tag heißt *sockenzerstreut*, wenn er verschiedene Socken anhat.

(2) Ein Tag heißt *schuhzerstreut*, wenn er verschiedene Schuhe anhat.
(3) Ein Tag heißt *zerstreut*, wenn er sockenzerstreut oder schuhzerstreut ist.
(4) Ein Tag heißt *total zerstreut*, wenn er sowohl sockenzerstreut als auch schuhzerstreut ist.

a) Vom Jahr 2015 weiß man, dass 17 Tage sockenzerstreut und 11 Tage schuhzerstreut waren. Wie viele Tage waren in diesem Jahr maximal zerstreut und wie viele Tage waren minimal zerstreut? Wie viele Tage waren in diesem Jahr maximal total zerstreut und wie viele Tage waren minimal total zerstreut?

b) Vom Jahr 2013 weiß man, dass 270 Tage sockenzerstreut und 120 Tage schuhzerstreut waren. Wie viele Tage waren in diesem Jahr maximal zerstreut und wie viele Tage waren minimal total zerstreut?

c) Erstelle eine Formel, die die Anzahl der sockenzerstreuten, der schuhzerstreuten, der zerstreuten und der total zerstreuten Tage in einem Jahr miteinander in Verbindung bringt.

Die folgenden Aufgaben verwenden den Begriff einer Äquivalenzrelation. Dieser ist für viele Konstruktionen in der Mathematik und in der mathematischen Logik entscheidend. Siehe den Anhang zu Äquivalenzrelationen.

Eine *Äquivalenzrelation* auf einer Menge M ist eine Relation $R \subseteq M \times M$, die die folgenden drei Eigenschaften besitzt (für beliebige $x, y, z \in M$).

(1) Es ist $x \sim x$ (*reflexiv*).
(2) Aus $x \sim y$ folgt
$y \sim x$ (*symmetrisch*).
(3) Aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$ (*transitiv*).

Dabei bedeutet $x \sim y$, dass das Paar (x, y) zu R gehört.

Aufgabe 3.13. Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ lebe eine Kolonie von Flöhen, und jeder Flohsprung geht fünf Einheiten weit (in beide Richtungen). Wie viele Flohpopulationen gibt es? Wie kann man einfach charakterisieren, ob zwei Flöhe zur gleichen Population gehören oder nicht?

Aufgabe 3.14. Wir betrachten die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und eine fixierte natürliche Zahl $a \geq 0$. Zeige, dass auf $\mathbb{Z}$ durch

$$x \sim y, \text{ wenn die Differenz } x - y \text{ ein Vielfaches von } a \text{ ist},$$

eine Äquivalenzrelation definiert wird. Wie viele Äquivalenzklassen gibt es?

Aufgabe 3.15. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir betrachten die Relation auf V, die durch

$$v_1 \sim v_2 \text{ genau dann, wenn } v_1 - v_2 \in U$$

definiert ist. Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 3.16. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass die Relation auf V, die durch

$$v \sim w, \text{ falls es ein } \lambda \in K, \lambda \neq 0, \text{ mit } v = \lambda w \text{ gibt}$$

eine Äquivalenzrelation ist. Was sind die Äquivalenzklassen?

Aufgabe 3.17. Wir betrachten für je zwei Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$ die symmetrische Differenz

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Wir setzen

$$A \sim B\,,$$

falls $A \triangle B$ endlich ist. Zeige, dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ definiert wird.

Aufgabe 3.18.*

Betrachte auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ die Relation

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc \text{ ist}\,.$$

a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Zeige, dass es zu jedem (a, b) ein äquivalentes Paar (a', b') mit $b' > 0$ gibt.

c) Es sei M die Menge der Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation. Wir definieren eine Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{Z} \longrightarrow M,\ z \longmapsto [(z, 1)].$$

Zeige, dass φ injektiv ist.

d) Definiere auf M (aus Teil c) eine Verknüpfung $+$ derart, dass M mit dieser Verknüpfung und mit $[(0, 1)]$ als neutralem Element eine Gruppe wird, und dass für die Abbildung φ die Beziehung

$$\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$$

für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ gilt.

Aufgabe 3.19.*

Seien M und N Mengen und sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Zeige, dass durch die Festlegung

$$x \sim y,$$

wenn

$$f(x) = f(y),$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert wird.

AUFGABE 3.20.*

Es sei M die Menge der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Definiere auf M eine Relation durch

$$f \sim g \text{ falls } f(0) = g(0),\ f'(0) = g'(0) \text{ und } f''(1) = g''(1)\,.$$

a) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

b) Finde für jede Äquivalenzklasse dieser Äquivalenzrelation einen polynomialen Vertreter.

c) Zeige, dass diese Äquivalenzrelation mit der Addition von Funktionen verträglich ist.

d) Zeige, dass diese Äquivalenzrelation nicht mit der Multiplikation von Funktionen verträglich ist.

AUFGABE 3.21. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Betrachte die Relation R auf U, wobei xRy bedeutet, dass es eine stetige Abbildung

$$\gamma\colon\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ t \longmapsto \gamma(t),$$

mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gibt. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf U ist.

AUFGABE 3.22. Sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M mit den Äquivalenzklassen $[x]$. Es sei I die Menge aller Äquivalenzklassen. Zeige folgende Aussagen.

(1) Es ist $x \sim y$ genau dann, wenn $[x] = [y]$ ist, und dies gilt genau dann, wenn $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.
(2) $M = \bigcup_{x \in I} [x]$ ist eine disjunkte Vereinigung.

AUFGABE 3.23. Sei B ein Blatt Papier (oder ein Taschentuch). Man versuche, sich die folgenden Äquivalenzrelationen auf B und die zugehörige Identifizierungsabbildungen vorzustellen (möglichst geometrisch).

(1) Die vier Eckpunkte sind untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(2) Alle Randpunkte sind untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(3) Jeder Punkt des linken Randes ist äquivalent zu seinem horizontal gegenüber liegenden Punkt am rechten Rand, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(4) Jeder Punkt des linken Randes ist äquivalent zu seinem horizontal gegenüber liegenden Punkt am rechten Rand und jeder Punkt des oberen Randes ist äquivalent zu seinem vertikal gegenüber liegenden Punkt, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(5) Jeder Punkt des Randes ist äquivalent zu seinem punktsymmetrisch (bezüglich des Mittelpunktes des Blattes) gegenüber liegenden Punkt, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.

(6) Sei K ein Kreis (d.h. eine Kreislinie) auf dem Blatt. Alle Kreispunkte seien untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(7) Es gebe zwei Punkte $P \neq Q$, die untereinander äquivalent seien, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(8) Sei H die horizontale Halbierungsgerade des Blattes. Zwei Punkte sind genau dann äquivalent, wenn sie achsensymmetrisch zu H sind.

Aufgabe 3.24. Zeige, dass die Beziehung

$$\alpha \sim \beta, \text{ falls } (\alpha) \leftrightarrow (\beta) \text{ allgemeingültig ist},$$

eine Äquivalenzrelation auf L^V definiert. Zeige, dass sowohl alle Tautologien als auch alle Kontradiktionen eine Äquivalenzklasse bilden. Wie viele Äquivalenzklassen besitzt diese Äquivalenzrelation, falls V n Elemente besitzt?

Aufgabe 3.25. Es sei $\sim$ die in Aufgabe 3.24 diskutierte Äquivalenzrelation auf L^V und sei Q die zugehörige Quotientenmenge. Es sei λ eine Wahrheitsbelegung auf V. Zeige, dass dies eine wohldefinierte Abbildung auf Q induziert.

Unter einer *disjunktiven Normalform* versteht man einen aussagenlogischen Ausdruck, der eine $\vee$-Verknüpfung von Ausdrücken der Form $\pm p_1 \wedge \ldots \wedge \pm p_n$ ist, wobei $\pm$ bedeutet, dass entweder die Aussagenvariable direkt oder in ihrer Negation genommen wird.
Aufgabe 3.26.*

Man bringe die Aussage

$$((p \vee (r \to q)) \wedge (q \to p)) \vee (((p \wedge \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg p)) \wedge (r \to (p \vee \neg q)))$$

in disjunktive Normalform.

Aufgabe 3.27. Es sei $\sim$ die in Aufgabe 3.24 diskutierte Äquivalenzrelation auf L^V. Zeige, dass jede Äquivalenzklasse $[\alpha]$ einen Repräsentanten in disjunktiver Normalform besitzt.

Aufgabe 3.28. Es sei α ein aussagenlogischer Ausdruck in disjunktive Normalform, in dem die Aussagenvariablen $p_1, \ldots, p_n$ vorkommen. Zeige, dass α genau dann eine Tautologie ist, wenn α die $\vee$-Verknüpfung von sämtlichen Kombinationen $\pm p_1 \wedge \ldots \wedge \pm p_n$ ist.

Aufgabe 3.29. Es sei T die Menge aller Tautologien in einer aussagenlogischen Sprache L^V. Zeige $T^{\vDash} = T$.

Aufgabe 3.30. Die Ausdrucksmenge $\Gamma \subseteq L^V$ enthalte eine Kontradiktion. Zeige $\Gamma^{\vDash} = L^V$.

Aufgabe 3.31. Interpretiere die Wahrheitstabellen zu den Junktoren $\neg$, $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ als Wertetabellen von Funktionen. Was sind die Definitions-, die Werte- und die Bildmengen dieser Funktionen?

Aufgabe 3.32. Zeige, dass die axiomatisch fixierten syntaktischen Grundtautologien allgemeingültig sind

Aufgabe 3.33.*

Beweise die aussagenlogische Tautologie

$$\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha \wedge \beta)$$

aus den aussagenlogischen Axiomen.

Aufgabe 3.34. Zeige das Assoziativgesetz für die Konjunktion, also

$$\vdash (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \rightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) .$$

Aufgabe 3.35. Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Ausdrücke und es seien $i_1, \ldots, i_k$ Elemente aus $\{1, \ldots, n\}$. Zeige, dass

$$\vdash \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha_{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{i_k}$$

gilt.

Aufgabe 3.36.*

Zeige

$$\vdash \alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \beta$$

unter Verwendung von

$$\vdash \gamma \wedge \delta \rightarrow \delta \wedge \gamma$$

(Lemma 3.14).

Aufgabe 3.37. Zu einer Aussage $\alpha \in L^V$ und $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\neg^n \alpha$ die n-fache Negation von α. Zeige, dass $\vdash \neg^n \alpha \rightarrow \neg^m \alpha$ genau dann gilt, wenn $n - m$ ein Vielfaches von 2 ist.

Aufgabe 3.38. Zeige die folgende Ableitungsregel für die Aussagenlogik.

Aus $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ und $\vdash \delta \rightarrow \beta$ folgt $\vdash \alpha \rightarrow (\delta \rightarrow \gamma)$.

Aufgabe 3.39. Zeige, dass aus $\vdash \alpha_1, \ldots, \vdash \alpha_n$ und $\vdash \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ die Ableitbarkeit $\vdash \beta$ folgt.

Aufgabe 3.40.*

Zeige, dass eine Regel der Form

Wenn $\vdash \alpha$, dann $\vdash \beta$ gelten kann, ohne dass $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ gilt.

Aufgabe 3.41. Es seien $p_1, \ldots, p_n$ Aussagenvariablen und $\beta_1, \ldots, \beta_n$ Aussagen. Zeige, dass man, wenn man in einer syntaktischen Tautologie α jedes Vorkommen von p_i durch β_i ersetzt, wieder eine Tautologie erhält.

Aufgabe 3.42. Es sei α eine ableitbare Tautologie. Zeige, dass es eine Ableitung für α gibt, bei der in jedem Ableitungsschritt nur Aussagenvariablen auftreten, die in α vorkommen.

Aufgabe 3.43. Skizziere ein Verfahren, wie man (bei V abzählbar) eine Auflistung sämtlicher syntaktischer Tautologien aus L^V erhalten kann.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.44. (3 Punkte)

Zeige, dass in einer aussagenlogischen Tautologie (und ebenso in einer aussagenlogischen Kontradiktion) mindestens eine Aussagenvariable mehrfach vorkommen muss.

Aufgabe 3.45. (2 Punkte)

Zeige, dass die Aussage

$$(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \beta) \to \gamma$$

allgemeingültig ist.

Aufgabe 3.46. (2 Punkte)

Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Aussagenmenge derart, dass in keiner Aussage $\alpha \in \Gamma$ das Negationszeichen $\neg$ vorkommt. Zeige, dass dann die Wahrheitsbelegung, die jeder Aussagenvariablen den Wert 1 zuweist, zu einer Interpretation I mit $\Gamma \subseteq I^{\vDash}$ führt.

Aufgabe 3.47. (3 Punkte)

Zeige

$$\vdash (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \beta) \to \gamma\,.$$

Aufgabe 3.48. (2 Punkte)

Begründe die folgende Ableitungsregel: Aus $\vdash \alpha$ und $\vdash \alpha \wedge \beta \to \gamma$ folgt $\vdash \beta \to \gamma$.

Aufgabe 3.49. (3 Punkte)

Zeige, dass folgende rekursive Definition zur gleichen Menge an syntaktischen Tautologien führt:

Die Grundtautologien werden nur mit Aussagenvariablen formuliert.

Neben dem Modus Ponens gibt es die Ersetzungsregel, d.h. wenn $\vdash \alpha$, so ist auch $\vdash \alpha'$, wobei α' ein Ausdruck ist, der ensteht, wenn man in α Aussagenvariablen durch beliebige Aussagen ersetzt.

Zeige, dass ohne diese Ersetzungsregel nicht die gleiche Menge beschrieben wird.