

Elliptische Kurven

Arbeitsblatt 12

Aufgaben

AUFGABE 12.1. Es sei $\Gamma = \langle u, v \rangle \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter in \mathbb{C} und sei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$. Es sei $s > 2$. Zeige

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2, (m,n) \neq (0,0)} (mu + nv)^{-s} = \sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2, (k,\ell) \neq (0,0)} (k(au + bv) + \ell(cu + dv))^{-s}.$$

AUFGABE 12.2.*

Finde eine Lösung für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$z' = \sqrt{z^3 + az + b}$$

mit $z(0) = 0$ bis zur vierten Ordnung durch einen Potenzreihenansatz (es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $b > 0$).

AUFGABE 12.3. Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter in \mathbb{C} und \wp die zugehörige Weierstraßsche Funktion \wp . Drücke \wp'' als rationale Kombination in \wp und \wp' aus.

AUFGABE 12.4. Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter in \mathbb{C} . Zeige, dass es zu jeder elliptischen Funktion f eine rationale Funktion

$$h: V_+(F) \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$$

derart gibt, dass

$$f = h \circ \psi$$

mit ψ aus Satz 12.13 gilt.

AUFGABE 12.5. Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter in \mathbb{C} mit dem Torus \mathbb{C}/Γ und der zugehörigen elliptischen Kurve aus Satz 12.14. Zeige, dass die Festlegungen in Definition 12.4 und Definition 12.5 mit den Festlegungen in Definition 5.7 und Definition 5.8 übereinstimmen.

AUFGABE 12.6. Führe den Beweis zu Satz 12.14 für die projektiven Geraden der Form $V_+(\rho x + \sigma w)$ durch.

AUFGABE 12.7. Zeige, dass für streckungsäquivalente Gitter in \mathbb{C} die zugehörigen komplexen Tori isomorph sind.

AUFGABE 12.8. Es sei E eine elliptische Kurve über \mathbb{R} . Skizziere die Möglichkeiten, wie $E(\mathbb{R})$ auf $E(\mathbb{C})$ liegen kann (vergleiche Aufgabe 6.7 und Aufgabe 6.8).

Es ist nicht einfach, dem Gitter anzusehen, ob es zu einer elliptischen Kurve über \mathbb{R} (oder über \mathbb{Q}) führt).

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3