**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2016**

# Lineare Algebra und analytische Geometrie II

## Arbeitsblatt 37

### Übungsaufgaben

Aufgabe 37.1. Es seien $E, F$ affine Räume und

$$\varphi \colon E \longrightarrow F$$

eine affin-lineare Abbildung. Zeige, dass der Schwerpunkt der Punkte $P_1, \ldots, P_n$ unter $\varphi$ in den Schwerpunkt der Bildpunkte $\varphi(P_1), \ldots, \varphi(P_n)$ überführt wird.

Aufgabe 37.2. Zeige, dass ein Dreieck genau dann gleichseitig ist, wenn der Schwerpunkt mit dem Umkreismittelpunkt übereinstimmt.

Aufgabe 37.3. Zeige, dass es kein gleichseitiges Dreieck gibt, dessen sämtliche Ecken rationale Koordinaten besitzen.

Aufgabe 37.4. Zeige, dass das Seitenmittelpunktsdreieck eines Dreiecks ähnlich zum Ausgangsdreieck ist.

Aufgabe 37.5.*

Es seien $A, B$ verschiedene Punkte in einer euklidischen Ebene. Zeige, dass die Mittelsenkrechte zu $A$ und $B$ aus allen Punkten besteht, die zu $A$ und $B$ den gleichen Abstand haben.

Aufgabe 37.6. Es seien $v, w$ linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^2$. Zeige, dass die Winkelhalbierende zu $v$ und $w$ mit $v$ bzw. $w$ den gleichen Winkel bildet.

Aufgabe 37.7. Zeige, dass der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks $(A, B, C)$ in einer euklidischen Ebene unter einer Verschiebung und unter einer winkeltreuen Abbildung auf den Umkreismittelpunkt des Bilddreiecks abgebildet wird.

Aufgabe 37.8. Zeige, dass der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks $(A, B, C)$ in einer euklidischen Ebene unter einer bijektiven affin-linearen Abbildung nicht unbedingt auf den Umkreismittelpunkt des Bilddreiecks abgebildet wird.

Aufgabe 37.9. Zeige, dass der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks $(A, B, C)$ in einer euklidischen Ebene unter einer Verschiebung und unter einer winkeltreuen Abbildung auf den Inkreismittelpunkt des Bilddreiecks abgebildet wird.

Aufgabe 37.10. Zeige, dass der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks $(A, B, C)$ in einer euklidischen Ebene unter einer bijektiven affin-linearen Abbildung nicht unbedingt auf den Inkreismittelpunkt des Bilddreiecks abgebildet wird.

Aufgabe 37.11. Zeige, dass der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks $(A, B, C)$ in einer euklidischen Ebene unter einer Verschiebung und unter einer winkeltreuen Abbildung auf den Höhenschnittpunkt des Bilddreiecks abgebildet wird.

Aufgabe 37.12. Zeige, dass der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks $(A, B, C)$ in einer euklidischen Ebene unter einer bijektiven affin-linearen Abbildung nicht unbedingt auf den Höhenschnittpunkt des Bilddreiecks abgebildet wird.

Aufgabe 37.13. Beweise elementargeometrisch den Sinussatz, also die Aussage, dass in einem Dreieck die Gleichheiten

$$\frac{\sin\,\alpha}{a} = \frac{\sin\,\beta}{b} = \frac{\sin\,\gamma}{c}$$

gelten, wobei $a, b, c$ die Seitenlängen gegenüber den Ecken mit den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma$ sind.

Aufgabe 37.14. Es sei $D$ ein Dreieck in der Ebene mit den drei Eckpunkten $A, B, C$. Zeige, dass man die Höhen, die Mittelsenkrechten, die Winkelhalbierenden und die Seitenhalbierenden mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.

Aufgabe 37.15.*

Ein Dreieck soll die Grundseite $[0, s]$ und die Höhe $h$ besitzen $(s, h > 0)$. Für welchen Höhenfußpunkt $x$ besitzt das Dreieck einen minimalen Umfang, und wie lange ist dieser?

Aufgabe 37.16. Wir fassen die Menge aller (auch entarteter, geordneter) Dreiecke $\triangle = (A, B, C)$ im $\mathbb{R}^2$ über ihre Koordinaten $A = (A_1, A_2), B = (B_1, B_2), C = (C_1, C_2)$ als den Vektorraum $\mathbb{R}^6$ auf. Insbesondere kann man so Dreiecke miteinander addieren und mit einem Skalar $s \in \mathbb{R}$ multiplizieren.

a) Zeige, dass die Dreiecke $\triangle$ und $s\triangle$ mit $\triangle$ nichtausgeartet und $s \neq 0$ zueinander ähnlich sind.

b) Es sei $S$ der Schwerpunkt des Dreiecks $(A, B, C)$. Zeige, dass die Dreiecke

$$(A, B, C),\ (B, C, A),\ (C, A, B) \text{ und } (S, S, S)$$

linear abhängig sind.

c) Bestimme, ob die folgenden Mengen an Dreiecken Untervektorräume des Dreiecksraumes bilden oder nicht. Wenn ja, so bestimme ihre Dimension.

(1) Die Menge aller nichtentarteten Dreiecke.
(2) Die Menge aller Dreiecke mit 0 als erstem Eckpunkt.
(3) Die Menge aller Dreiecke mit Schwerpunkt 0.
(4) Die Menge aller gleichseitigen Dreiecke.
(5) Die Menge aller Dreiecke, deren Umkreis der Einheitskreis ist.
(6) Die Menge aller zu einem Punkt zusammengeschrumpften Dreiecke.
(7) Die Menge aller rechtwinkligen Dreiecke.
(8) Die Menge aller rechtwinkligen Dreiecke, deren rechter Winkel sich als erster Punkt in 0 befindet und deren zweiter Punkt auf der $x$-Achse liegt.
(9) Die Menge aller Dreiecke mit Höhenschnittpunkt in 0.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 37.17. (4 Punkte)

Bestimme für das Dreieck $(0, 0), (3, 0), (0, 4)$ den Schwerpunkt, den Umkreismittelpunkt, den Inkreismittelpunkt und den Höhenschnittpunkt.

Aufgabe 37.18. (3 Punkte)

Bestimme für das Dreieck $(2, 3), (1, 8), (6, -5)$ die eulersche Gerade.

Aufgabe 37.19. (4 Punkte)

Bestimme für das Dreieck $(4, -3), (7, 2), (-1, 5)$ den Mittelpunkt und den Radius des Feuerbachkreises.

In der folgenden Aufgabe wird auf die Konvergenz von Folgen im $\mathbb{R}^2$ Bezug genommen. Sie liegt genau dann vor, wenn beide Komponentenfolgen in $\mathbb{R}$ konvergieren.

Aufgabe 37.20. (6 Punkte)

Zu einem Dreieck $\triangle = (A, B, C)$ ist das Seitenmittelpunktsdreieck durch die Eckpunkte $\frac{1}{2}(A+B), \frac{1}{2}(A+C), \frac{1}{2}(B+C)$ gegeben. Diese Konstruktion ergibt eine rekursiv definierte Folge von Dreiecken $\triangle_n$, wobei $\triangle_1 = \triangle$ und $\triangle_{n+1}$ das Seitenmittelpunktsdreieck zu $\triangle_n$ ist. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $x_n \in \triangle_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass diese Folge konvergiert und bestimme den Grenzwert.