

## Lineare Algebra II

### Vorlesung 37

Neben den drei Eckpunkten eines Dreieckes gibt es noch weitere charakteristische Punkte eines Dreieckes wie den Schwerpunkt, den Umkreismittelpunkt, den Inkreismittelpunkt und den Höhenschnittpunkt.

#### SEITENHALBIERENDE UND SCHWERPUNKT

**Definition 37.1.** Zu einer Menge von  $n$  Punkten  $P_1, \dots, P_n$  in einem affinen Raum  $E$  über einem reellen Vektorraum  $V$  nennt man die baryzentrische Kombination

$$\frac{1}{n}P_1 + \frac{1}{n}P_2 + \dots + \frac{1}{n}P_n$$

den *Schwerpunkt* der Punkte.

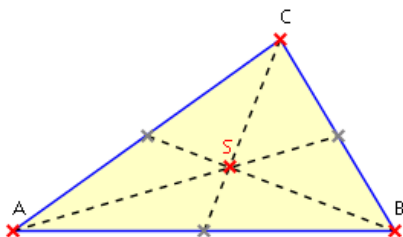
Es handelt sich also um diejenige baryzentrische Kombination der Punkte, bei der jeder Punkt mit der gleichen Gewichtung eingeht. Zu Punkten  $P, Q \in E$  heißt der Schwerpunkt  $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$  auch der Mittelpunkt der beiden Punkte (oder der Strecke  $\overline{P, Q}$ ). Bei zwei reellen Zahlen spricht man auch vom *arithmetischen Mittel* der beiden Zahlen. Bei  $n = 1, 2, 3$  ist der Schwerpunkt der Punkte auch der Schwerpunkt ihrer konvexen Hülle. Der Schwerpunkt von drei Punkten tritt als Durchschnitt der Seitenhalbierenden des Dreiecks auf.

**Definition 37.2.** Zu einem nichtausgearteten Dreieck  $A, B, C$  in einer euklidischen Ebene heißt die Gerade

$$\frac{B+C}{2} + s\left(A - \frac{B+C}{2}\right), s \in \mathbb{R},$$

die *Seitenhalbierende* durch  $A$ .

Die Seitenhalbierende durch  $A$  verläuft also durch den Punkt  $A$  und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Dreiecksseite.



**Satz 37.3.** *In einem nichtausgearteten Dreieck in der euklidischen Ebene treffen sich die drei Seitenhalbierenden im Schwerpunkt  $\frac{A+B+C}{3}$  des Dreiecks.*

*Beweis.* Es ist

$$\frac{B+C}{2} + \frac{1}{3} \left( A - \frac{B+C}{2} \right) = \frac{1}{3}A + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right)B + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right)C = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

ein Punkt der Seitenhalbierenden durch  $A$ . Wegen der Symmetrie der Situation gehört der Punkt auch zu den beiden anderen Seitenhalbierenden.  $\square$

Insbesondere schneidet der Schwerpunkt jede Seitenhalbierende im Verhältnis  $2 : 1$ , wobei der längere Teil am Punkt anliegt.

#### MITTELSENKRECHTE UND UMKREISMITTELPUNKT

**Definition 37.4.** *Zu zwei Punkten  $A \neq B$  in der euklidischen Ebene nennt man die Gerade, die senkrecht auf der durch  $A$  und  $B$  gegebenen Gerade steht und durch den Mittelpunkt der Strecke zwischen  $A$  und  $B$  verläuft, die *Mittelsenkrechte* der Strecke.*

Die Mittelsenkrechte wird durch

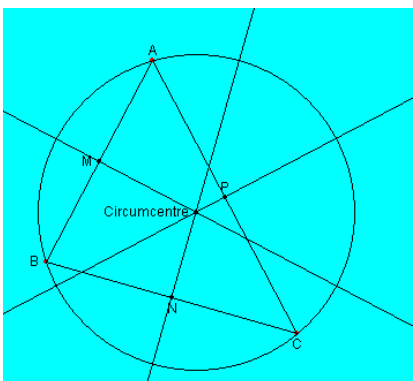
$$\frac{A+B}{2} + s(B-A)^\perp, \quad s \in \mathbb{R},$$

beschrieben, wobei  $(B-A)^\perp$  einen beliebigen, zu  $B-A$  senkrechten Vektor  $\neq 0$  bezeichnet. Wenn  $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  in kartesischen Koordinaten gegeben sind, so ist die Mittelsenkrechte gleich

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_2 - a_2 \\ -b_1 + a_1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

**Lemma 37.5.** *Es seien  $A, B$  verschiedene Punkte in einer euklidischen Ebene. Dann besteht die Mittelsenkrechte zu  $A$  und  $B$  genau aus allen Punkten, die zu  $A$  und  $B$  den gleichen Abstand haben.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 37.7.  $\square$



**Satz 37.6.** *Die Mittelsenkrechten der drei Seiten in einem nichtausgearteten Dreieck der euklidischen Ebene schneiden sich in einem Punkt. Alle Eckpunkte des Dreiecks besitzen zu diesem Schnittpunkt den gleichen Abstand.*

*Beweis.* Die Mittelsenkrechte zur Strecke zwischen  $A$  und  $B$  besteht nach Lemma 37.5 genau aus allen Punkten der Ebene, die zu diesen beiden Punkten den gleichen Abstand besitzt. Der Schnittpunkt  $P$  der Mittelsenkrechte zu  $A$  und  $B$  mit der Mittelsenkrechte zu  $A$  und  $C$  hat also zu allen drei Eckpunkten den gleichen Abstand. Dies ergibt den Zusatz und auch, dass sich alle drei Mittelsenkrechten in diesem Punkt treffen.  $\square$

**Definition 37.7.** Der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten in einem nichtausgearteten Dreieck in der euklidischen Ebene heißt *Umkreismittelpunkt*.

Der Umkreismittelpunkt ist der Mittelpunkt des *Umkreises*; das ist derjenige Kreis, der die drei Eckpunkte des Dreiecks (auf seiner Peripherie) enthält.

#### WINKELHALBIERENDE UND INKREISMITTELPUNKT

**Definition 37.8.** Zu zwei linear unabhängigen Vektoren  $v$  und  $w$  in einem normierten reellen Vektorraum  $V$  nennt man die von

$$\frac{v}{\|v\|} + \frac{w}{\|w\|}$$

erzeugte Gerade die *Winkelhalbierende* der beiden Strahlen.

Die Winkelhalbierende wird also ohne Bezug auf einen Winkel definiert, es wird ja noch nicht einmal ein Skalarprodukt vorausgesetzt. Wenn sich aber die beiden Vektoren in einem euklidischen Raum befinden, so zeigt eine einfache Überlegung (siehe Aufgabe 37.13), dass die Winkelhalbierende in der Tat den Winkel halbiert. Die Definition überträgt sich direkt auf einen affinen Raum über einem normierten Vektorraum, und zwar definieren drei nicht

kollineare Punkte jeweils eine Winkelhalbierende durch jeden der beteiligten Punkte.

**Lemma 37.9.** *Es seien  $v, w$  linear unabhängige Vektoren in  $\mathbb{R}^2$ . Dann liegen auf der Winkelhalbierenden zu  $v$  und  $w$  nur Punkte, die zu den Geraden  $\mathbb{R}v$  und  $\mathbb{R}w$  den gleichen Abstand haben. Wenn ein Punkt zu  $\mathbb{R}v$  und  $\mathbb{R}w$  den gleichen Abstand besitzt, so liegt er auf der Winkelhalbierenden zu  $v$  und  $w$  oder auf der Winkelhalbierenden zu  $v$  und  $-w$ .*

*Beweis.* Wir können annehmen, dass  $v$  und  $w$  normiert sind. Es sei  $P \in \mathbb{R}^2$ . Nach Korollar 35.7 ist

$$d(P, \mathbb{R}v)^2 = \|P\|^2 - \langle P, v \rangle^2$$

und entsprechend

$$d(P, \mathbb{R}w)^2 = \|P\|^2 - \langle P, w \rangle^2.$$

Also sind die Abstände genau dann gleich, wenn

$$\langle P, v \rangle = \pm \langle P, w \rangle$$

ist. Wenn

$$P = s(v + w)$$

ist, so ist

$$\langle P, v \rangle = \langle s(v + w), v \rangle = s + s \langle w, v \rangle = \langle s(v + w), w \rangle = \langle P, w \rangle$$

und die Gleichung gilt. Für die Umkehrung können wir

$$P = sv + tw$$

ansetzen. Bei

$$\langle P, v \rangle = \langle P, w \rangle$$

folgt

$$s + t \langle v, w \rangle = \langle sv + tw, v \rangle = \langle sv + tw, w \rangle = t + s \langle v, w \rangle$$

und somit

$$s(1 - \langle v, w \rangle) = t(1 - \langle v, w \rangle).$$

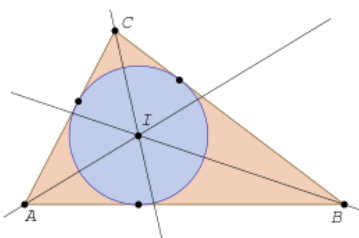
Da  $v$  und  $w$  normiert und linear unabhängig sind, ist nach Aufgabe 31.9

$$|\langle v, w \rangle| < 1,$$

der rechte Faktor ist nicht 0 und somit ist  $s = t$ . Bei

$$\langle P, v \rangle = -\langle P, w \rangle$$

folgt mit einer ähnlichen Überlegung  $s = -t$ . □



**Satz 37.10.** Die drei Winkelhalbierenden in einem nichtausgearteten Dreieck treffen sich in einem gemeinsamen Schnittpunkt, der zu jeder Seite des Dreiecks den gleichen Abstand besitzt. Wenn die Eckpunkte durch  $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  und die Seitenlängen mit  $a = d(B, C)$ ,  $b = d(A, C)$ ,  $c = d(A, B)$  bezeichnet werden, so besitzt dieser Schnittpunkt die Koordinaten

$$\frac{1}{a + b + c} \begin{pmatrix} aa_1 + bb_1 + cc_1 \\ aa_2 + bb_2 + cc_2 \end{pmatrix}.$$

*Beweis.* Nach Lemma 37.9 besteht die Winkelhalbierende zu  $A$  aus Punkten, die zu den anliegenden Seiten (geraden)  $\mathbb{R}\overrightarrow{AB}$  und  $\mathbb{R}\overrightarrow{AC}$  den gleichen Abstand haben. Ebenso besteht die Winkelhalbierende zu  $B$  aus Punkten, die zu den anliegenden Seiten (geraden)  $\mathbb{R}\overrightarrow{BA}$  und  $\mathbb{R}\overrightarrow{BC}$  den gleichen Abstand haben. Daher besitzt der Schnittpunkt dieser beiden Winkelhalbierenden, den es geben muss, zu allen drei Seiten den gleichen Abstand.

Zur Koordinatenbestimmung schreiben wir die Winkelhalbierende durch  $A$  als

$$A + s \left( \frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{\overrightarrow{AC}}{b} \right)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + s \left( \frac{1}{c} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{b} \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix} \right).$$

Die Gleichsetzung mit der Winkelhalbierenden durch  $B$  führt auf

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + s \left( \frac{1}{c} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{b} \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + t \left( \frac{1}{c} \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{a} \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \end{pmatrix} \right).$$

Die Lösung ist durch

$$s = \frac{bc}{a + b + c}$$

und

$$t = \frac{ac}{a + b + c}$$

gegeben, da dies eingesetzt jeweils zu

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \frac{bc}{a+b+c} \left( \frac{1}{c} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{b} \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix} \right) \\ = & \frac{1}{a+b+c} \begin{pmatrix} a_1(a+b+c) + b(b_1 - a_1) + c(c_1 - a_1) \\ a_2(a+b+c) + b(b_2 - a_2) + c(c_2 - a_2) \end{pmatrix} \\ = & \frac{1}{a+b+c} \begin{pmatrix} aa_1 + bb_1 + cc_1 \\ aa_2 + bb_2 + cc_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

führt. Dies ist also der Schnittpunkt, und zwar von allen drei Winkelhalbierenden.  $\square$

**Definition 37.11.** Der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden in einem nichtausgearteten Dreieck in der euklidischen Ebene heißt *Inkreismittelpunkt*.

Der Kreis um den Inkreismittelpunkt, der die drei Seiten des Dreiecks tangential trifft, heißt entsprechend *Inkreis*.

## HÖHENSCHNITTPUNKT

**Lemma 37.12.** *Es sei  $U$  der Umkreismittelpunkt und  $S$  der Schwerpunkt eines nichtausgearteten Dreieck in der euklidischen Ebene. Dann liegt der Punkt*

$$U + 3\overrightarrow{US}$$

*auf jeder Höhenggeraden des Dreiecks. Insbesondere schneiden sich die drei Höhenggeraden in einem Punkt.*

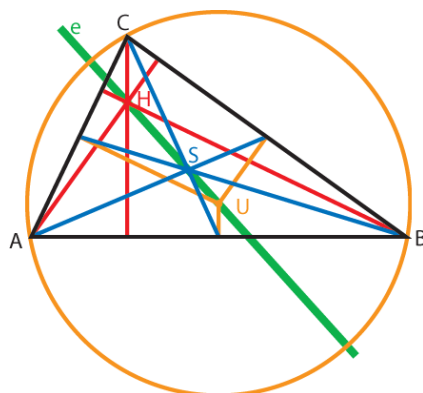
*Beweis.* Wir machen  $U$  zum Ursprungspunkt, sodass die Punkte  $A, B, C$  die gleiche Norm besitzen. Der in Frage stehende Punkt ist dann  $A + B + C$ . Die durch diesen Punkt und  $A$  gegebene Gerade hat den Richtungsvektor  $B + C$ . Sie verläuft durch  $A$  und es ist

$$\langle B + C, B - C \rangle = \langle B, B \rangle - \langle C, C \rangle.$$

Wegen der Normgleichheit ist dies 0, also handelt es sich um die Höhenggerade durch  $A$ .  $\square$

**Definition 37.13.** Zu einem nichtausgearteten Dreieck  $A, B, C$  in einer euklidischen Ebene heißt der Schnittpunkt der drei Höhen der *Höhenschnittpunkt*.

## DIE EULERSCHE GERADE

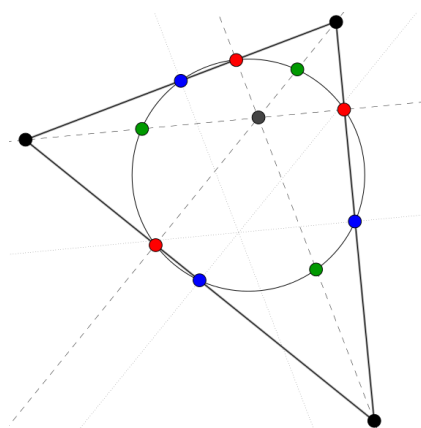


**Korollar 37.14.** *Der Schwerpunkt, der Umkreismittelpunkt und der Höhenschnittpunkt eines nichtausgearteten Dreiecks in der euklidischen Ebene liegen auf einer Gerade.*

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Lemma 37.12. □

Wenn das Dreieck gleichseitig ist, so fallen die drei Punkte zusammen und es gibt viele Geraden durch diesen Punkt. Andernfalls sind diese Punkte nicht gleich (siehe Aufgabe 37.2) und es gibt genau eine Gerade, die durch diese drei Punkte verläuft. Man nennt sie die *eulersche Gerade*.

## DER FEUERBACHKREIS



Die neun Punkte des Neun-Punkte-Kreises: Die Seitenmittelpunkte (blau), die Höhenfußpunkte (rot) und die Mittelpunkte (grün) zwischen Eckpunkten und Höhenschnittpunkt (schwarz).

**Lemma 37.15.** *Durch die Eckpunkte  $A, B, C$  sei ein nichtausgeartetes Dreieck  $\Delta$  in der euklidischen Ebene gegeben. Es sei  $F$  der Umkreis zu den Seitenmittelpunkten des Dreiecks. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Der Radius von  $F$  ist die Hälfte des Umkreisradius von  $\Delta$ .*
- (2) *Die Verbindungsstrecken des Höhenschnittpunkts und der Eckpunkte werden durch  $F$  halbiert.*
- (3) *Die Höhenfußpunkte von  $\Delta$  liegen auf  $F$ .*

*Beweis.* (1) Es sei  $U$  der Umkreismittelpunkt des Ausgangsdreiecks, den wir als Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems ansetzen. Wir betrachten dann den Punkt

$$U' = \frac{1}{2}(A + B + C).$$

Der Mittelpunkt  $A' = \frac{1}{2}(B + C)$  der Dreiecksseite durch  $B$  und  $C$  besitzt zu  $U'$  den Abstand

$$\left\| \frac{1}{2}(B + C) - U' \right\| = \left\| \frac{1}{2}(B + C) - \frac{1}{2}(A + B + C) \right\| = \frac{1}{2}\|A\|.$$

Da die Normen von allen Eckpunkten  $A, B, C$  nach Wahl von  $U$  gleich sind, ist  $U'$  der Umkreismittelpunkt des Seitenmittelpunktsdreiecks und der Radius ist die Hälfte des Umkreisradius.

(2) Nach Lemma 37.12 ist  $A + B + C$  der Höhenschnittpunkt. Daher ist der Mittelpunkt der Strecke von  $A$  zum Höhenschnittpunkt gleich

$$\frac{1}{2}(A + B + C) + \frac{1}{2}A = A + \frac{1}{2}(B + C).$$

Der Abstand davon zu  $U'$  ist

$$\left\| \frac{1}{2}(A + B + C) - \left( A + \frac{1}{2}(B + C) \right) \right\| = \left\| -\frac{1}{2}A \right\| = \frac{1}{2}\|A\|.$$

(3) Zunächst liegen die unter (1) bzw. (2) konstruierten Punkte auf dem Kreis  $F$  gegenüber. Es ist ja

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}(B + C) \right) + \frac{1}{2} \left( A + \frac{1}{2}(B + C) \right) = \frac{1}{2}(A + B + C)$$

der Mittelpunkt von  $F$ . Somit bilden ein Seitenmittelpunkt, der gegenüberliegende Halbierungspunkt zwischen Eckpunkt und Höhenschnittpunkt und der entsprechende Höhenfußpunkt ein rechtwinkliges Dreieck. Dessen Thaleskreis ist stets der Kreis  $F$ .  $\square$

Den Kreis in der vorstehenden Aussage nennt man den *Feuerbachkreis* oder auch den *Neun-Punkte-Kreis*.

## ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Quelle = Dreieck mit Seitenhalbierende.png , Autor = Benutzer Birgit Lachner auf de Wikipedia, Lizenz = GNU FDL	2
Quelle = Circum.png , Autor = Benutzer GifTagger auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	3
Quelle = Bisectrices.svg , Autor = Benutzer jtico auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	5
Quelle = EulerGeradeColor.png , Autor = Benutzer Strike auf de Wikipedia, Lizenz = gemeinfrei	7
Quelle = Feuerbach circle.svg , Autor = Benutzer Piotr mil auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	7
Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <a href="http://commons.wikimedia.org">http://commons.wikimedia.org</a> ) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz.	9
Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt.	9