Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 1

Übungsaufgaben

AUFGABE 1.1. Welche der folgenden Aussagen sind wissenschaftliche Fakten? Zu welcher Wissenschaft gehören sie? Worauf beruht ihre Gültigkeit bzw. Nichtgültigkeit?

(1) Rauchen ist gesundheitsschädlich.
(2) Die Dinosaurier sind vor ca. 65 Millionen Jahren ausgestorben.
(3) Die Dinosaurier sind gar nicht ausgestorben.
(4) So etwas wie Dinosaurier hat es nie gegeben.
(5) Die Evangelien wurden nicht von Augenzeugen geschrieben.
(6) Die *abc*-Vermutung ist inzwischen ein Satz.
(7) Die *abc*-Vermutung ist immer noch eine Vermutung.
(8) Die Relativitätstheorie ist bestätigt.
(9) Es ist nicht möglich, Gold aus anderen Stoffen herzustellen.
(10) Die Welt wird bald untergehen.

AUFGABE 1.2. In der Vorlesung wurde ein vergleichsweise positives Bild von Wissenschaft angedeutet. Es gibt auch völlig andere Einschätzungen, wie in den folgenden Formulierungen zum Ausdruck kommt. Was ist Ihre Meinung?

(1) Wissenschaft ist in erster Linie ein Herrschaftsinstrument.
(2) Wissenschaft dient hauptsächlich zur abgedrehten Selbstbeschäftigung einer kleinen Elite.
(3) Wissenschaft ist ein modernes Märchen, ein sprachliches Konstrukt, ein diskursives Narrativ, das man ebenso dekonstruieren kann.
(4) Wissenschaft dient allein der Aufrechterhaltung des Patriarchats.
(5) Wissenschaft ist gegen Gott.
(6) Wissenschaft besteht aus einer willkürlichen Ansammlung von Aussagen, das Gegenteil ist stets genauso wahr.
(7) Die sogenannte Wissenschaft liefert nur ein sehr oberflächliches Bild. Wahre Erkenntnis erfordert das Einswerden mit der Welt.

AUFGABE 1.3. Warum ist Mathematik schwierig, obwohl darin doch alles logisch ist?

AUFGABE 1.4. Paraphrasiere die folgenden Aussagen als Wenn-dann-Aussagen.

(1) Was Hänschen nicht lernt, lernt Hans nimmermehr.

(2) Was der Bauer nicht kennt frisst er nicht.
(3) Sobald die Sonne scheint geht Lucy nach draußen.
(4) Ab 32 Punkten bekommt man eine 1.
(5) Mit dieser Einstellung sollten Sie nicht Lehrer werden.
(6) Was uns nicht umbringt macht uns härter.
(7) Früh übt sich, wer ein Meister werden will.
(8) Wer A sagt muss auch B sagen.
(9) Wer nicht kommt zur rechten Zeit, der muss sehn, was übrig bleibt.
(10) Wer selber ohne Sünde ist werfe den ersten Stein.

Aufgabe 1.5. Erstelle die Kontrapositionen zu den in Aufgabe 1.4 formulierten Aussagen. Vermeide dabei Doppelnegationen.

Aufgabe 1.6. Formalisere die Aussage „Wenn der Wind der Veränderung weht, bauen die einen Mauern und die anderen Windmühlen“ mit Aussagenvariablen und Junktoren.

Aufgabe 1.7. Folgende Implikationen stehen fest.

(1) Wenn Mustafa Müller lustige Grimassen macht, dann muss sich Heinz Ngolo den Bauch halten.
(2) Wenn er zu viele Gummibärchen isst, dann muss sich Heinz Ngolo den Bauch halten.
(3) Wenn er einen Ball gegen den Bauch bekommt, dann muss sich Heinz Ngolo den Bauch halten.

Im Moment muss sich Heinz Ngolo nicht den Bauch halten. Was kann man daraus schließen?

Aufgabe 1.8. Es gilt: Wenn keine Ferien sind und kein Wochenende ist und er nicht krank ist, dann muss Heinz Ngolo in die Schule. Heute muss Heinz Ngolo nicht in die Schule. Was kann man daraus schließen?

Aufgabe 1.9. Die folgenden Implikationen stehen fest.

(1) Genau dann freuen sich die Regenwürmer, wenn es regnet oder schneit.
(2) Genau dann freuen sich die Kinder, wenn die Sonne scheint oder es schneit.

Welche Schlussfolgerung kann man in den folgenden Fällen ziehen.

a) Die Kinder und die Regenwürmer freuen sich.

b) Die Kinder freuen sich und die Regenwürmer freuen sich nicht.

c) Die Kinder freuen sich nicht und die Regenwürmer freuen sich.

Aufgabe 1.10.*

Folgende Aussagen seien bekannt.

(1) Der frühe Vogel fängt den Wurm.
(2) Doro wird nicht von Lilly gefangen.
(3) Lilly ist ein Vogel oder ein Igel.
(4) Für Igel ist 5 Uhr am Morgen spät.
(5) Doro ist ein Wurm.
(6) Für Vögel ist 5 Uhr am Morgen früh.
(7) Lilly schläft bis 5 Uhr am Morgen und ist ab 5 Uhr unterwegs.

Beantworte folgende Fragen.

(1) Ist Lilly ein Vogel oder ein Igel?
(2) Ist sie ein frühes oder ein spätes Tier?
(3) Fängt der späte Igel den Wurm?

Aufgabe 1.11.*

Im Pokal spielt Bayern München gegen den TSV Wildberg. Der Trainer vom TSV Wildberg, Herr Tor Acker, sagt „Wir haben in dem Spiel nichts zu verlieren“. Die Logiklehrerin von Wildberg, Frau Loki Schummele, sagt „Wenn die Wildberger in dem Spiel nichts zu verlieren haben, dann haben auch die Münchner in dem Spiel nichts zu gewinnen“. Der Trainer von Bayern München, Herr Roland Rollrasen, sagt „Wir haben in dem Spiel etwas zu gewinnen“.

(1) Ist die Aussage von Frau Schummele logisch korrekt?
(2) Es sei vorausgesetzt, dass die Aussage des Bayerntrainers wahr ist. Welche Folgerung kann man dann für die Aussage von Herrn Acker ziehen?

Aufgabe 1.12. Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.

(1) $\alpha \wedge \beta \longleftrightarrow \beta \wedge \alpha$.
(2) $\alpha \vee \beta \longleftrightarrow \beta \vee \alpha$.

Aufgabe 1.13. Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.

(1) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \longleftrightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.
(2) $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \longleftrightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$.

Aufgabe 1.14. Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.

(1) $(\alpha \wedge \alpha) \leftrightarrow \alpha$.
(2) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$.
(3) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$.
(4) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$.
(5) $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg \alpha \vee \beta)$.

Aufgabe 1.15. Man beweise mittels Wahrheitstabellen die *Regeln von de Morgan*, nämlich dass

$$\neg(\beta \vee \gamma) \leftrightarrow (\neg\beta \wedge \neg\gamma)$$

und

$$\neg(\beta \wedge \gamma) \leftrightarrow (\neg\beta \vee \neg\gamma)$$

Tautologien sind.

Aufgabe 1.16. Man beweise mittels Wahrheitstabellen die (verallgemeinerten) *Regeln von de Morgan*, nämlich dass

$$(\alpha \wedge \neg(\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \neg\beta) \wedge (\alpha \wedge \neg\gamma))$$

und

$$(\alpha \wedge \neg(\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\alpha \wedge \neg\gamma))$$

Tautologien sind.

Aufgabe 1.17.*

Zeige, dass der aussagenlogische Ausdruck

$$(r \to (p \wedge \neg q)) \to (\neg p \to (\neg r \vee q))$$

allgemeingültig ist

Aufgabe 1.18.*

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	?
w	w	f
w	f	f
f	w	w
f	f	f

Aufgabe 1.19. Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	?
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	w

Aufgabe 1.20. In einer Höhle befinden sich im Innern am Ende des Ganges vier Personen. Sie haben eine Taschenlampe bei sich und der Gang ins Freie kann nur mit der Taschenlampe begangen werden. Dabei können höchstens zwei Leute gemeinsam durch den Gang gehen. Die Personen sind unterschiedlich geschickt, die erste Person benötigt eine Stunde, die zweite Person

benötigt zwei Stunden, die dritte Person benötigt vier Stunden und die vierte Person benötigt fünf Stunden, um den Gang zu durchlaufen. Wenn zwei Personen gleichzeitig gehen, entscheidet die langsamere Person über die Geschwindigkeit.

(1) Die Batterie für die Taschenlampe reicht für genau 13 Stunden. Können alle vier die Höhle verlassen?
(2) Die Batterie für die Taschenlampe reicht für genau 12 Stunden. Können alle vier die Höhle verlassen?

Eine natürliche Zahl n heißt *gerade*, wenn man sie in der Form $n = 2k$ mit einer natürlichen Zahl k schreiben kann.

Eine natürliche Zahl heißt *ungerade*, wenn sie nicht gerade ist. Versuche die folgenden vertrauten Aussagen ausgehend von den Definitionen zu begründen. Was muss man dabei über das Dezimalsystem wissen?

Aufgabe 1.21. Zeige, dass eine natürliche Zahl n genau dann gerade ist, wenn ihre letzte Ziffer im Dezimalsystem gleich $0, 2, 4, 6$ oder 8 ist.

Aufgabe 1.22. Zeige, dass eine natürliche Zahl n genau dann ungerade ist, wenn ihre letzte Ziffer im Dezimalsystem gleich $1, 3, 5, 7$ oder 9 ist.

Aufgabe 1.23. Zeige, dass eine natürliche Zahl n genau dann ungerade ist, wenn man sie in der Form $n = 2k+1$ mit einer natürlichen Zahl k schreiben kann.

Aufgabe 1.24. Es sei n eine natürliche Zahl. Zeige mittels einer Fallunterscheidung, dass $n^2 - n$ stets gerade ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 1.25. (4 Punkte)

Folgende Aussagen stehen fest.

(1) In den Sommerferien fahren wir nach Italien.
(2) In den Winterferien fahren wir nach Österreich.
(3) Wenn wir in Österreich sind, besuchen wir auch die Oma.
(4) Wenn wir nach Italien fahren, fahren wir durch die Schweiz oder durch Österreich.

Beantworte die folgenden Fragen.

a) Wir fahren nach Italien, aber nicht durch die Schweiz. Besuchen wir die Oma?

b) Es sind Sommerferien und wir fahren nicht durch die Schweiz. Besuchen wir die Oma?

c) Kann man die Aussage „Wenn wir die Oma nicht besuchen, dann sind keine Winterferien“ aus den Voraussetzungen erschließen?

d) Kann man die Aussage „In den Sommerferien und in den Winterferien besuchen wir die Oma" aus den Voraussetzungen erschließen?

Aufgabe 1.26. (2 Punkte)

Bestimme den Wahrheitswert der Aussage

$$(((\neg(\neg(p))) \rightarrow (\neg(q))) \vee (\neg(r))) \leftrightarrow ((\neg(r)) \wedge (q)),$$

wenn p und r falsch sind und q wahr ist.

Aufgabe 1.27. (2 Punkte)

Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.

(1) $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \longleftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$.
(2) $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \longleftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.

Aufgabe 1.28. (2 Punkte)

So stellt sich unser Künstler einen gutgelaunten Zombie vor.

Wir betrachten folgendes Zitat von Sven Walter aus dem Artikel „Zombies, Dualismus und Physikalismus"

(Zeitschrift für philosophische Forschung, Bd. 65, H. 2 (2011), pp. 241-254, https://www.jstor.org/stable/pdf/41346224.pdf).

¨(P_1) Zombies sind vorstellbar.

(P_2) Wenn Zombies vorstellbar sind, dann sind Zombies möglich.

(P_3) Wenn Zombies möglich sind, dann ist der Physikalismus falsch.

Also: Der Physikalismus ist falsch.¨

Formalisiere die hier verwendete aussagenlogische Schlussweise und zeige mit Hilfe von Wahrheitstabellen, dass sie eine Tautologie ist.

Aufgabe 1.29. (4 Punkte)

Die Räuberbande „Robin Hood“ besteht aus fünf Personen. Sie legt für ihr Diebesgut eine Schatztruhe an, die sie mit verschiedenen Schlössern sichern möchte, wobei die (mehrfachen) Schlüssel an die Mitglieder verteilt werden sollen. Dabei soll erreicht werden, dass je zwei Bandenmitglieder allein nicht an den Schatz kommen, dass aber je drei Bandenmitglieder die Truhe aufschließen können. Wie viele Schlösser braucht man dafür und wie müssen die Schlüssel verteilt werden?

Aufgabe 1.30. (3 (1+1+1) Punkte)

(1) Formuliere Rechenregeln für die Addition und die Multiplikation von geraden und ungeraden natürlichen Zahlen.
(2) Beweise die Rechenregeln mit den Endzifferbeschreibungen (siehe Aufgabe 1.21 und Aufgabe 1.22).
(3) Beweise die Rechenregeln mit den Gleichungsbeschreibungen (Definition und Aufgabe 1.23).

Abbildungsverzeichnis