Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 31

Übungsaufgaben

Aufgabe 31.1. Die Süddeutsche Zeitung schrieb am 10.3.2020 unter dem Titel „Die Wucht der großen Zahl" (von Christian Endt, Michael Mainka und Sören Müller-Hansen):

„Um zu verstehen, warum das neue Coronavirus so gefährlich ist, muss man sich klarmachen, was exponentielles Wachstum bedeutet. Der Begriff ist etwas sperrig, das Konzept dahinter aber einfach. Es geht um eine Vermehrung, die sich ständig selbst beschleunigt. Und dieses Muster lässt sich auch beim Coronavirus erkennen. Das ist der Hintergrund, warum nun immer strengere Auflagen verhängt werden, Fußballspiele ohne Publikum ausgetragen, Feste und Kongresse abgesagt werden. Und warum Gesundheitsminister Jens Spahn, Kanzlerin Angela Merkel und andere davon sprechen, man müsse die Ausbreitung des Virus verlangsamen. Sprich: Verhindern, dass es sich exponentiell verbreitet."

(1) Beschleunigt sich lineares Wachstum „ständig selbst"?
(2) Beschleunigt sich quadratisches Wachstum wie bei der Funktion $f(x) = x^2$ „ständig selbst"?
(3) Wie kann man exponentielles Wachstum charakterisieren?
(4) Wenn man exponentielles Wachstum „verlangsamen" möchte, verhindert man dann exponentielles Wachstum oder ändert man Parameter (welche?) für exponentielles Wachstum?

Aufgabe 31.2.*

(1) Es sei $a > 1$ und $g(x) = a^x$ die Exponentialfunktion zur Basis a. Zeige, dass es ein $w \in \mathbb{R}_+$ mit $g(x + w) = 2g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt.
(2) Es sei $w > 0$ vorgeben. Zeige, dass es eine Exponentialfunktion b^x mit $b > 1$ und mit
$$b^{x+w} = 2b^x$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt.
(3) Man gebe ein Beispiel für eine stetige, streng wachsende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x + 1) = 2f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die keine Exponentialfunktion ist.

Aufgabe 31.3. Bestimme, für welche $c, d \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung mit Verzögerung

$$y'(t) = c(y(t) - y(t-d))$$

eine Lösung der Form

$$y(t) = \alpha t + \beta$$

besitzt.

Aufgabe 31.4. Finde alle Lösungen zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = y.$$

Aufgabe 31.5. Finde alle Lösungen zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = cy.$$

Aufgabe 31.6.*

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 2 \text{ mit } y(5) = 3\,.$$

Aufgabe 31.7.*

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 3t^2 - 3t + 4 \text{ mit } y(-1) = -5\,.$$

Aufgabe 31.8. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 3t^3 - 2t + 5 \text{ mit } y(3) = 4\,.$$

Aufgabe 31.9. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \sin t \text{ mit } y(\pi) = 7\,.$$

Aufgabe 31.10. Man mache sich anschaulich und mathematisch klar, dass bei einer ortsunabhängigen Differentialgleichung der Abstand zwischen zwei Lösungen y_1 und y_2 zeitunabhängig ist, d.h. dass $y_1(t) - y_2(t)$ konstant ist.

Man gebe ein Beispiel, dass dies bei zeitunabhängigen Differentialgleichungen nicht der Fall sein muss.

Aufgabe 31.11. Untersuche die gewöhnlichen Differentialgleichungen, die sowohl zeit- als auch ortsunabhängig sind.

Aufgabe 31.12. Wie sieht der Graph einer Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus, die nur von einer Variablen abhängt.

Aufgabe 31.13. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei

$$D(I, \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ differenzierbar}\}$$

die Menge der differenzierbaren Funktionen. Zeige, dass $D(I, \mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum ist und dass die Ableitung

$$D(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Abb}\,(I, \mathbb{R}),\ f \longmapsto f',$$

eine lineare Abbildung ist. Bestimme den Kern dieser Abbildung und seine Dimension.

Aufgabe 31.14. Es sei

$$D(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ unendlich oft differenzierbar}\}$$

die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen. Bestimme die Eigenwerte, die Eigenvektoren und die Dimension der Eigenräume der Ableitung

$$D(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow D(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \longmapsto f'.$$

Aufgabe 31.15. Finde die Lösungen für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = cy^{\frac{2}{3}}$$

mit $c \in \mathbb{R}_+$.

Finde eine inhaltliche Interpretation zu dieser Differentialgleichung analog zu Beispiel 31.14.

Aufgabe 31.16. Zeige, dass $y(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}_+)$ eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = ny^{\frac{n-1}{n}}$$

auf $\mathbb{R}_+$ ist.

Aufgabe 31.17.*

a) Es sei $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein nullstellenfreies Vektorfeld, d.h. $f(t,y) \neq 0$ für alle $(t,y) \in \mathbb{R}^2$. Zeige, dass jede Lösungskurve zur Differentialgleichung

$$y' = f(t,y)$$

injektiv ist.

b) Sei f nun ein zeitunabhängiges Vektorfeld. Zeige, dass f genau dann nullstellenfrei ist, wenn jede Lösungskurve injektiv ist.

c) Man gebe ein Beispiel für ein Vektorfeld, das nicht nullstellenfrei ist, für das aber jede Lösungskurve injektiv ist.

Aufgabe 31.18. Finde eine differenzierbare Funktion $y(t)$ (nicht die Nullfunktion), die die Bedingung

$$y'(t) = y(t-1)$$

erfüllt (dabei ist $y(t-1)$ als der Wert der Funktion y an der Stelle $t-1$ zu verstehen, nicht als das Produkt der Funktionsvariablen y mit $t-1$; es handelt sich also *nicht* um eine Differentialgleichung).

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 31.19. (2 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 3t^2 - 4t + 7 \text{ mit } y(2) = 5\,.$$

Aufgabe 31.20. (3 Punkte)

Finde eine Lösung zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = y + t.$$

Aufgabe 31.21. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{t^3}{t^2+1} \text{ mit } y(1) = 2\,.$$

Aufgabe 31.22. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \frac{1}{\sinh t}$$

auf $\mathbb{R}_+$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 7$.

Tipp: Man schreibe Sinus hyperbolicus mit der Exponentialfunktion, führe die Substitution $s = e^t$ durch und finde so eine Stammfunktion.

Aufgabe 31.23. (5 Punkte)

Zeige, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ unendlich oft differenzierbare Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

derart gibt, dass die n-te Ableitung $f^{(n)}$ mit f übereinstimmt, die Ableitungen $f^{(i)}$, $1 \leq i < n$, aber nicht.

Tipp=Denke an Potenzreihen.

Abbildungsverzeichnis