開明中學講義

開明幾何講義

劉薰宇編

開明函授學校出版

開明書店印行

開明中學講義

開明幾何講義

劉薰宇編

開明函授學校出版
開明書店印行

開明幾何講義

二十四年十月初版　三十八年一月七版

每册定價一・〇〇

編著者　劉薰宇

發行者　上海福州路 開明書店 代表人范洗人

印刷者　開明書店

(115 P.) W　　誥

內政部著作權註册執照警字第六六一〇號

編輯例言

一．本講義為初級中學程度，以適合自學自修為目標而編輯，亦可以供在校學生作課外自習之用。

二．本講義取材範圍根據部定中學課程標準。

三．本講義為適合自學起見，行文講釋力求詳細明白，但亦不陷於累贅嚕囌，以要言不煩為主旨。讀者對於書中所言，必須一一體會，不厭反覆求詳，勵行復習其效乃見。

四．本講義設題雖未見多，但均極精要。演題乃學算進步必經之階程，讀者必須實事求是，逐題親自演算，否則進步難見；空誦講義，實屬徒勞無功。

五．為學貴有恆心，自學尤屬必要，算學一科向被視為乾燥無味，但能用心精進，則其中自有妙味，讀者應於此中發見學習趣味，則自然樂於學習，不患不成矣。

六．本講義雖算術、代數、幾何各訂分冊，但有一貫之索線，須按步就班，循序漸進。

七．本講義所附小註說明，乃算學中最精警之語，幸勿忽視，如能善於體會，不難升堂入室，為進而修學高等算學之基礎。

八．本講義因篇幅關係，說明容有未盡詳明，取材容有疏漏，幸海內明達有以教正之。

目　錄

緒　論

(幾何學入門)

平面幾何學

第一章　直線形

第二章　圓

第三章　軌跡及作圖題

第四章　面積

第五章　比例

第六章　數值三角

緒　論
(幾何學入門)

(一)　立體　表面　線及點

1. 鐵球和鉛球，形狀是一樣的，但物質不一樣。鉛球和鉛的立方體，構成的物質是一樣的，但形狀不一樣。直徑 3 寸的鉛球和直徑 5 寸的鉛球，形狀和物質都一樣了，但大小不一樣。關於一切物事的研究，可以就構成物體的物質而論，也可以就物體的形狀和大小而研究之。

幾何學所研究的，是關於物體的形狀和大小的諸性質，又在處理二個物體以上時，也論及其相互間的位置的關係。

至於構成物體的物質如何，不是幾何學所顧及的。

2. 在算術裏，我們說明過計算如次圖一般物體的體積的方法。這是一個長方體，在幾何學上，我們叫牠做‘直六面體’，就是着眼於牠的形狀、大小及位置而研究時的稱謂。對於一種物體，我們只就牠的形狀、大小及位置而着想時，這物體叫做立體。所以也可以這樣說：

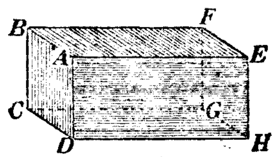


圖 1.

立體是物體所占有空間的部分。

直六面體也就是立體的一種，另外如立方體、球體、方柱、角錐、圓柱、圓錐等等，都是有規則的立體。無論什麼物體，只就

牠的形狀着想時，都是立體。

3. **前條所示的直六面體，是向三個方向推展，即是有三‘維’。**

(i) 從 A 向 B 的方向，

(ii) 從 A 向 D 的方向，

(iii) 從 A 向 E 的方向。

這三維即三個方向，叫做長、闊和高(或厚)。

立體一般有這長、闊、高的三維。

物質是一種占有空間的位置，爲吾人五官所能感知的東西，如木、石、水、空氣等。物體是物質的集合而成一定的形狀者，所以是泛指固體、液體、氣體三者的，如木板、石塊、水滴、氣泡便是。

物體因其種類，可以有種種的性質，譬如有個箱子在這裏，我們加以考察，便可以想到：

1. 組成這箱子的材料是木料還是金屬或皮革?
2. 牠的重量怎樣，色彩如何?
3. 硬度如何，有否若干的氣味?
4. 形狀如何?
5. 大小怎樣?
6. 這箱對於他種物體的位置關係(例如設在桌子上或在其左右)如何?

這樣可以從種種地方去觀察，而此等性質之中的 (1), (2), (3) 是屬於組成物體的物質的，(4), (5), (6) 則不論物質如何，是物體所共同的。物體可以形狀不同而組成的物質相同，也可以形狀相同而組成的物質不同，或形狀物質都相同而大小不同。所以對於物體的研究，可以就其組成的物質，也可以就其形狀、大小而論。再物體有二個時，還可以論其位置的關係。再從我們認識這些物體的性質上看，可以分爲單由我們的視覺可以知道，和單用視覺是不足以認識的。上說的形狀、大小、位置及顏色是可以由視覺而知，其他的硬度、重量、氣味等，都不能由視覺而知的。幾何學所研究的物體的性質，不是其性質的全部，只是就由我們的視覺可以認知而且和物質是無關係的諸種性質，換言之，就是形狀、大小、位置三者。至組成這物質的性質如何，不是幾何學上所顧及的。

4. 再就直六面體觀察，可以看見這立體有六個平的面做境界，各個面又有四條稜做界線，各條稜又有二個頂點限界着的。

立體的界，叫做表面。表面的界或二個表面的交，叫做線。線的盡頭或線和線的交，叫做點。

直六面體的面是表面，稜是線，頂點是點。

5. 直六面體的一面 $ABCD$ 有二'維'。即

(i) 從 A 向 B 的方向，

(ii) 從 A 向 D 的方向。

表面一般是向二個方向推展，即是有長、有闊而無高(或厚)。

直六面體的一稜 AB，只有從 A 向 B 的一個方向推展。所以

物體的形狀、大小及位置的性質，和構成的物質無關，是一切物體所共同的性質。我們知物體的存在，有無數的種類和數量，在宇宙之間，大如太陽、地球，小若塵沙、細菌，由其爲物體一點着眼，即有同等的位置。即此等物體均占有全宇宙中廣大場所之一部，是同一的。這宇宙全體的廣大場所，我們就叫牠空間。即空間爲宇宙全體的無限展擴；上下、前後、左右均是遠到無止境，有不能想像的大。

立體是空間的一部分，而幾何學所研究的是形狀、大小及位置，故可以說是研究空間的學問。

立體是空間的一部分，即立體的外部卻是空間的另一部分，故在立體和空間另一部分之間，非有境界不可，這界就是表面。這表面是不屬於立體，也不屬於空間的另一部分，所以沒有厚薄的。這裏須要注意的，一物體和他一物體相隔離而存在時，其中便有了空隙，故宇宙間所存在的許多物體之間，常有種種空隙，但不可只把這些空隙當是空間。原來物體不過是物質的組成了一定的形狀而占有了空間的一部分，所以這些空隙是空間，原無疑問，即該體所在的地方，也是空間。所以物體的存在於空間是和物體的存在於水及空氣中，把水和空氣排斥開去而占有其地位者不同，物體所在的地方，仍還是空間。

線一般只有一維，卽是只有長而無闊及高(或厚)。

直六面體的一個頂點 A，不向任何方向推展，沒有維。所以

點一般沒有大小，只有位置。

6. 上面由一個立體，我們分解出來得了表面、線、點等種種東西。其實不根據立體，我們也可以想像這些物事的。例如把粉筆灰想像做沒有大小的點，把絲線想像作無闊及厚的，便是線了。把紙想像做沒有厚的，便可以當做面了。

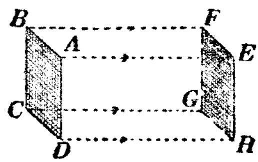


圖 2.

現在想像一個表面 $ABCD$，使牠照箭頭的方向移動，達到 $EFGH$ 的位置。這時：

(i) 點 A 所移動的痕跡是線 AE，

(ii) 線 AB 所移動的痕跡是表面 $ABFE$，

(iii) 表面 $ABCD$ 所移動的痕跡是立體 $ABCDEFGH$。

一般，點運動時產生線，線運動時產生表面，表面運動時產生立體。

所以也可以說線含有無數的點，表面含有無數的線，立體含有無數的表面。

表面沒有厚，所以無論多少表面叠合起來，不能成爲立體的。因爲本來無厚的東西無論疊合了多少，還是不會產生厚的。

照上面同樣的理論，線拼合攏來，也無論如何拼不成面，點積集起來，也無論如何積不成線的。因爲線本來沒有闊及厚，所以拼不出闊來，點本來沒有大小自然積不起長來的。

點、線、面的運動，和點、線、面的積集不同，積集不能改動其位置，而運動卻是把位置移動了。所以點、線、面的積集不能構成線、面、立體，而其運動卻能產生了這些。

請問，使立體運動時又生什麼呢？又有否線運動而不產生表面，表面運動而不產生立體的特別情形？

7. 點用 · 或 × 表示之，要指示時，則於其旁記一大寫的羅馬字母，例如附記了 A，則讀點 A 或 A 點。

線用——⌒等表示之。

表示表面用其作境界的線，表示立體用其作境界的表面。

要指示線、表面及立體時，普通用其中特殊的點所附註的文字。

8. 點、線、表面、立體或此種物事的集合體，叫做'圖形'。

(二) 直　線

9. 預備問題　把直六面體的稜和圓錐的底圓比較，有怎樣的差別？

線可分爲直線和曲線二種。

如直六面體的稜或角錐的稜，便是直線。圓柱或圓錐的底圓是曲線。

10. 預備問題　取直六面體的一稜，固定其上的二點而迴轉之，其時此稜在空間的位置變更否？又取圍成圓柱底面的線，固定其上的二點而迴轉之，又怎樣？從那裏就可以區別直線和曲線的不同？

所謂含有無數，卽指在立體中可以想像無數的表面，在表面上可以想像無數的線，在線上可以想像無數的點。

點沒有大小，線沒有闊及厚，所以無論把鉛筆削得怎樣尖銳，或用針尖總不能把幾何學上的線和點表出來。但幾何學是常常用到這點、線、面、立體的，故只得用一種不完備的記號，卽用平常的鉛筆之類畫出來。

表點、線、面所用之字母，常用羅馬字母之大楷。

幾何學是研究物體的形狀、大小、位置的科學，由着眼於物體的形狀、大小、位置，我們得着了立體、表面、線、點的圖形思想。所以幾何學不外卽是研究此種圖形的性質的，所以也可以說幾何學是研究圖形的性質的科學。

固定一線上的二點而迴轉此線時，其在空間的位置不生變化者，是直線。

11. 實地引直線時，常用直尺，是金屬或木材所製成的板條，其邊爲成直線形者，如右圖。

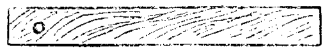


圖 3.

12. 預備問題 (*a*) 用直尺引過二點 A, B 之直線，看可以引幾線？(*b*) 用直尺引二直線而檢查此二直線能否含有二點以上的共有之點？

過二點只有唯一的直線。

故直線由二點而定，從而共有二個點的二直線，勢必相合而成爲一直線。

二點之間，引以直線，叫做'聯結'這二點。

二直線共有的點，不能多於一點。

因之二直線只能共有一個唯一的點，這時稱二直線相交，這唯一的共有點，是二直線的交點。

13. 指示直線，通例用其上二個點所附記的大寫羅馬字母，如 A——B，讀爲直線 AB。又有時也有小寫的羅馬字母附記於直線，以表示之，如 a——則讀爲直線 a 了。

14. 利用直線的性質，可以檢驗直尺的正確與否，其法如次：

先用直尺之一邊，於二點 A, B 間引一直線，次將直尺翻轉，仍於前記二點 A, B 間再引一直線。若直尺正確，則二線當一致相合，直尺不正確，則不能相合。

圖 4.

15. 用直尺引直線 AB, 次把直尺沿 AB 滑下，引直線 BC, 再把直尺沿 BC 滑下，引直線 CD,……次第如此做去。

圖 5.

直線得無限延長。

單稱直線時，其中即含有其長無限的意思。特地只指直線的一部分時，則叫做‘線段’或‘有限直線’。在二點間所引直線段的長，稱爲這二點間的距離。

通常說甲地和乙地的距離，是指甲乙二地間的路程，但在幾何學上所說二點間的距離，是其間的直線距離，即有最短距離之意，這是須注意的。

16. 預備問題　述直接比較二段絲線長短的方法。

以一線段疊合到他一線段上，使其一端點相合時，設其他一端點亦相合，則此二線段之長相等。若第二端點不相合，則此二線段之長不相等，而第二端點落在他一線段之延長上者爲大。

實際比較二線段的長短時，記一線段之長於直尺之一邊上即以此直尺湊合到他一線段上而比較之。通常用尺度量一線段之長，再量他一線段之長而相比較，實在就是這個方法的應用。

於此圖中，　$AB=CD$,

$AB>EF$,

$EF<CD$.

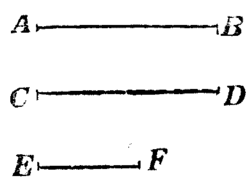


圖 6.

17. 今有二線段 AB, CD, 使 AB 向 B 的方向延長到 F, 使線段 BF 之長與線段 CD 相等，則線段 AF 是 AB, CD 之‘和’了。即用下式表之。

$$AF = AB + CD.$$

線段 AB 較 CD 大時，於 AB 上截取和 CD 等長的 BE，則線段 AE 是 AB，CD 的差，即

$$AE = AB - CD.$$

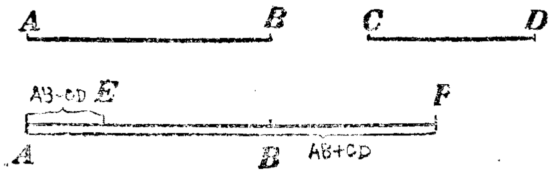


圖 7.

18. 預備問題　述以一尺爲單位，量一條線的長的方法。

從線段 AB 之一端起，順次截取與線段 CD（例如一尺）相等的部分，如有殘餘 EB 時，把 CD 分爲若干等分，使其一等分 CF 較 EB 爲小。再從 EB 之一端起，截取與 CF 等長（例如一寸）的部分。次第如此，即是以線段 CD 量線段 AB。

以 CD 爲單位量線段 AB 時，若 AB 恰好含有幾段的 CD，則表 AB 的數爲整數。倘不如此，而有另餘的含有 CD 的若干等分之幾，則表 AB 的數帶有分數了。表 AB 的數有時稱爲 AB 的數值的。

圖 8.

19. 過 O 點引一直線，於其上取與線段 CD 相等之 OA，

幾何學上二線段之長相同時，不用同而用相等二字表之。在同一物的再指出時，才用同字。即相等是用在量的比較上。因爲量不限於長短，故一般在比較量而不相等時，常用大小二字而不用長短、高低等鑑特的稱謂。

= 就是表相等的符號，> 就是表大於的符號，< 就是表小於的符號。

兩量的比較只有相等、大於或小於三者，此外不會發生別的情形。

OB 時，線段 AB 於 O 點分為相等的 OA, OB 二部分，O 點名叫線段 AB 的中點。

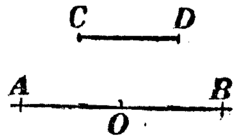


圖 9.

線段的中點，即是分此線為相等二部分的點。

練習問題 已知三線段 a, b, c 之長：

1. 作與 $a+b+c$ 相等的線段。

2. 作與 $2a, 3a, 5a$ 相等之線段。

3. 作與 $3a+2b, 3a-2b, 3a+b-2c$ 相等之線段。

4. 用尺度作與 $\frac{1}{2}a, \frac{1}{3}a, \frac{1}{4}a$ 相等的線段。

5. 作與 $a-b$ 相等的線段。次用尺度表示此線段之長，等於 a, b 二線段之差。

(三) 平面及平面形

20. 預備問題 試比較直六面體的面和圓柱體的側面，有什麼不同？

表面可分為平面和曲面二種。

直六面體或角錐等的面是平面，圓柱或圓錐等的側面是曲面。

21. 預備問題 取直尺，以其一邊置直六面體上，使過其上之任意二點。看此時直尺的邊和直六面體的面常密合否？若以直尺置圓柱的側面上，則又如何？木匠鉋平板時，常用尺的邊去湊合板面而觀察，何故？怎樣可以區別平面和曲面？

過表面上任意二點的直線，全與此表面密合時，則此表面是平面。

一線段的中點，也叫二等分點，只有唯一的點。O 是線段 AB 的中點時，

$$OA=\frac{1}{2}AB,\text{ 或 } AB=2OA=2OB.$$

一直線與平面密合時，叫這直線在該平面上。

22. 二鏡子的面相疊合，或以直六面體置於案桌上，此等表面如是平面，則必全然密合，即一般：

二平面相疊合時，此二面全相密合。

23. 直六面體的一面是由直線圍成的，圓柱體的底面，則由曲線圍成。

曲線或直線所圍成平面的部分，叫平面形。平面形由直線所圍成的叫多角形或直線形。圍成多角形的各線段，叫多角形的邊，相隣二邊的交點叫頂點。

如圖，$ABCDE$ 是多角形，線段 AB, BC, CD, DE, EA 是多角形的邊，而點 A, B, C, D, E 是多角形的頂點。

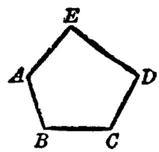


圖 10.

24. 預備問題 於直六面體的一面或角錐的一面，試查察其邊數和頂點之數。再任意畫一多角形，而查察其邊數和頂點的數，這些數中間有何關係，其理由如何？

表面可分為平面和曲面二種，平面和曲面怎樣區別，或問平面是怎樣的面？我們平常只有漠然的不正確的回答。平面和曲面的最顯著的差異即如在上記 (21) 所說的，可以實驗出來，即同鏡子一般的平面，若把正確的直尺的一邊放置上去，一定全然密合，不論放在平面的那一部分，而曲面則否。

平面的性質：

1. 平面的廣幅無限，同直線的可以無限延展一樣，平面也是向四周無限制擴大的。也可以像劃直線的一部分為線段，把平面劃出各形而研究。

2. 二個平面可以相疊合。

3. 平面可以摺合，其摺痕為直線，又於平面上畫一直線，以此直線為摺痕而摺合二平面，其時二平面相疊合了。

多角形的邊數和頂點數常相等。

邊的數是三、四、五、六等的多角形、各叫三角形、四角形、五角形、六角形、或叫三邊形、四邊形、五邊形、六邊形。

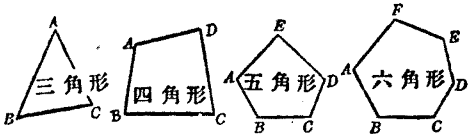


圖 11.

表示多角形時，用其頂點所附記的文字。如上圖之各多角形卽讀爲三角形 ABC，四角形 $ABCD$，五角形 $ABCDE$，六角形 $ABCDEF$。

25. 預備問題　試於前條所記各多角形，測其邊之長而求其和。

多角形各邊的和叫多角形的周。

例如四邊形 $ABCD$ 的周卽是 $AB+BC+CD+DA$。

26. 預備問題　引直線聯結五邊形不相隣的二頂點。此種直線凡幾條？在四邊形怎樣？在六邊形又怎樣？

聯結多角形不相隣二頂點的直線叫對角線。

如圖，AC，AD，BD，BE等是五邊形 $ABCDE$ 的對角線。

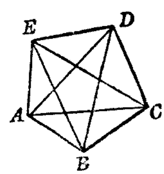


圖 12.

練習問題

1. 畫七角形，八角形，九角形，十角形，十一角形，十二角形而引其所有的一切對角線。

2. 設多角形的邊數爲 n，則該多角形的對角線的數爲 $\frac{n(n-3)}{2}$，其理由如何？

多角形的邊數，不能小於三，因爲二直線不能圍成一個平面形。

（四）圓

27. 曲線所圍成的平面形中，頂重要的是圓。裝飾品、實用品等，應用這圖形的很不少，今述圓的定義於次：

取線段 OA，固定 O 點，於紙面上使 OA 繞 O 點迴轉一周，此時因 OA 的運動而產生的平面形，就是圓。固定的點 O 是圓的中心（或圓心），故得定義如次：

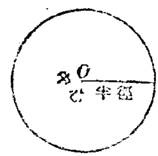


圖 13.

固定一線段的一端，於平面上繞此端點而迴轉一周所生之平面形名叫圓，其固定的點叫圓的中心，圍成圓的曲線叫圓周。圓周上的點和中心聯結的線段叫半徑。

由此可知次記各項：

圓周上一切點均在距離中心相等之位置，換言之即其到中心的距離均相等，所以

圓的半徑都相等。

又，距中心的距離等於半徑的點，都在圓周上。

28. 畫圓周我們用圓規（或叫兩腳規），此器有兩腳，畫圓周時，其固定之一腳之尖端爲中心，而兩腳尖端之距離則與半徑相當。

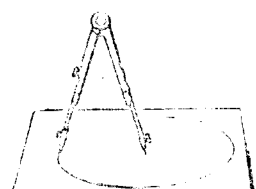


圖 14.

29. 在無混同之處時，圓周亦略稱圓。

表示圓，有時用其中心所附之文字，例如中心的點爲 O 時，此圓可叫做 O 圓或圓 O。又有時也於圓周上取三點附以文字而

表示之，如圓周上的三點爲 A, B, C, 則可以稱圓爲 ABC 圓或圓 ABC。

30. 過圓的中心而兩端迄於圓周的線段，叫圓的直徑。直徑的長是半徑的二倍。從而一圓的直徑的長都相等。

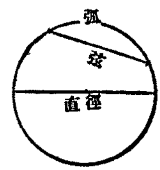


圖 15.

31. 圓周的一部分，即爲兩端點限定的圓周的部分叫弧。

圓周上二點所聯結的線段叫弦。

直徑可以說就是過圓的中心的弦。

32. 由弧及其兩端所聯結成的弦，所包圍而成的平面形叫弓形。由二個半徑及其間所夾的弧所圍成的平面形叫扇形。

33. 預備問題 (a) 畫一半徑爲 8 分的圓，於此圓之平面上，取中心爲 6 分之點，此點關於圓周之位置如何？又取距中心爲 10 分之點，則其位置如何？(b) 於圓內取一點，量其到中心的距離，而與半徑的長比較之。再於圓外取一點，作同樣之比較。

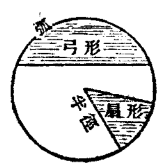


圖 16.

(a) 與中心的距離，比半徑小的點在圓內，比半徑大的點在圓外。

(b) 圓內的點，與中心的距離比半徑小，圓

圓周和圓不同。圓周是繞圓的外面而圍成圓的曲線，圓是圓周所圍的平面形全部。但在無混同之虞時，圓周也單叫圓。又圓周有時單稱周。

於圓周上取二點 A, B, 則分圓周爲二個弧，此二弧如有大小，大的叫優弧，小的叫劣弧。又圓周上二點 A, B 與中心 O 相聯結，則成二個扇形，其大者叫優扇形；小者叫劣扇形。同樣聯圓周上的二點，成優弓形和劣弓形的二個弓形。普通所說的弧、弓形、扇形，是但指劣弧、劣弓形及劣扇形的。

合起來可成一圓周的弧，叫相配弧，合起來可成一圓的弓形或扇形，叫相配弓形或相配扇形。這相配是指二者的關係。

外的點，與中心的距離比半徑大。

34. 預備問題 畫半徑爲 8 分的圓二個，可以使二圓全然相疊合否？其疊合的方法如何？

半徑相等的二圓，其一疊合於他一圓上，於二圓之中心相合一時，此二圓全相疊合。卽此時二圓恰如一圓，故全等。

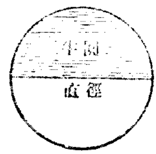


圖 17.

半徑相等之二圓全等。

35. 預備問題 畫一圓於紙上，引其直徑，以此直徑爲折痕而將紙摺合，則其二部分是否完全相疊合？

直徑分圓爲全等的二部分；這各部分叫做半圓。

36. 預備問題 以同一的點作中心，畫半徑 3 分、4 分、5 分的圓，這些圓周可以相交嗎？何故？

有同一中心的各圓叫同心圓。半徑不等的同心圓，不相交。

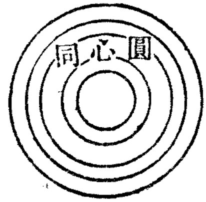


圖 18.

練習問題

1. 有 A, B 二點，其距離爲 5^{cm}：求 (*a*) 距 A 爲 3^{cm} 距 B 亦爲 3^{cm} 的點，(*b*) 距 A 爲 3^{cm} 距 B 爲 2^{cm} 的點，(*c*) 距 A 爲 3^{cm} 距 B 爲 1^{cm} 的點，可求得否？

2. 二圓的位置關係如何，試以圖表之。

3. 有一直線 a 及線外的一點 A，今以 A 做中心，以漸次增大的半徑畫多數的圓，看此等圓對於直線 a 的位置關係如何？

4. 一直線與一圓的位置關係如何？試以圖表示之。

〔注意〕 一直線與一圓，有於二點相會者稱‘相交’，有於一點相會者稱‘切’，亦有全不相會者；於後會說到。

相等的圓，叫等圓，和這對立的同一個的圓，卽叫同圓。

半圓卽是弓形的特款，半圓周也卽是弧的特款。

5. 一直線 a 上有一點 A，今於直線 a 上求距 A 爲已知距離(如 5 分)的點，問有幾點？

(五)　角

37. 從一點 (B) 引二直線 $(BA,\ BC)$ 則成一角，此點叫角的頂點，二直線叫角的邊。

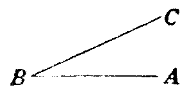


圖 19.

38. 呼角的名有次記三法：

(i) 叫做角 ABC，卽以角頂點的文字放於各邊上一點所附文字的中間而呼之。其記號爲 $\angle ABC$。

(ii) 叫做角 B，卽以角頂點的文字爲角名，其記號爲 $\angle B$。

(iii) 叫做角 α，卽於角的二邊中間另記一文字 α 而呼之，其記號爲 $\angle\alpha$。

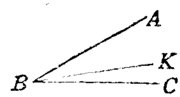


圖 20.

39. 想像一直線 BK，這直線是過一角的頂點 B，又是不離角的平面以 B 爲中心而迴轉的。

設 BK 從一邊 BC 的位置出發，迴轉至他邊 BA 時，則 BK 已經迴轉了角 CBA，卽角的大小和迴轉的大小相等，所以

角的大小和邊的長短無關。

40. 一直線過一角的頂點，以頂點爲中心從一邊迴轉到和他一邊全相疊合，其方法有二，卽如圖所示，一是照時鐘的針的方向迴轉，另一是取反對的方向。

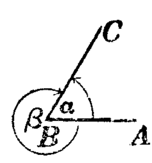


圖 21.

故由一點引二直線 $(BA,\ BC)$，也可以想做構成了二角 $(\alpha,\ \beta)$。

以二直線爲二邊的角，可叫做這二直線的夾角，如 α 爲 BA, BC 的夾角

這樣的二角，叫相配角，其中大的叫優角，小的叫劣角，單說角時，通例但指劣角。

41. 有二角 ABC, DEF, 今以角 ABC 疊合於角 DEF 上，把頂點 B 放在頂點 E 上，邊 BA 放在邊 ED 上，這時可以有次記的三種不同情形：

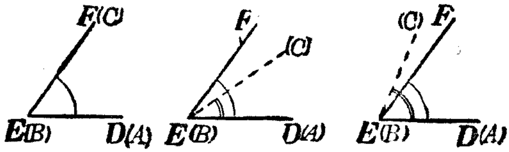


圖 22.

(i) 邊 BC 恰和邊 EF 相合一，這時 $\angle ABC=\angle DEF$。

(ii) 邊 BC 落於 $\angle DEF$ 之內，這時 $\angle ABC<\angle DEF$*。

(iii) 邊 BC 落於 $\angle DEF$ 之外，這時 $\angle ABC>\angle DEF$。

42. 如圖中的角 ABK 和 KBC, 共有頂點和一邊，而二角是在共有的邊的兩側的，這二角叫隣角。

這時 $\angle ABC=\angle ABK+\angle KBC$.

43. 上圖中若 $\angle ABK$ 和 $\angle KBC$ 相等，則 BK 是 $\angle ABC$ 的二等分線。

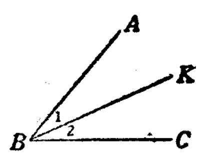


圖 23.

角的二等分線是分此角爲相等二隣角的直線。

44. 測角的大小時，以度爲單位。一度的大小，是一直線以其一端爲中心，迴轉一周的 360 分之一的大小。換言之，即一

* 角可以想做是由一直線的迴轉而造成，其從一邊迴轉到他一邊中間所通過的平面部分，叫角內，不通過的部分，叫角外。

角的二等分線只有一直線。

所以一直線以其一端爲中心而迴轉一周即生 360 度之角

度的角，是以圓周的 $\frac{1}{360}$ 相當的弧的兩端，引二半徑所成的角。一度的 60 分之一叫分，一分的 60 分之一叫秒。記度、分、秒時於數字的右肩上作 °, ′, ″ 的符號，例如三十七度四十二分十五秒即可記作 37°42′15″ 是也。

45. 測角可以用一種叫分度器(或測角器)的器具，這是由金屬或明骨的板所成的一個半圓形，於其上劃分度數，即在周上刻 180 等分的格子，即每格的二端所引半徑當構成一度之角。

用分度器測角(如 $\angle AOP$)時，先把分度器的中心 O 疊在角的頂點 (O) 上。記有 0° 的半徑疊在一邊 (OA) 上。再看角的他一邊 (OP) 是疊合在分度器的何處的？這時的邊所指分度器上的度數即是角的度數，如圖中角 AOP 為 57°。

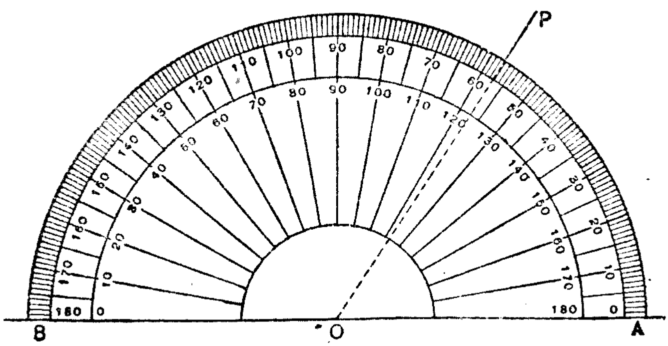


圖　24.

練習問題

1. 時鐘的時針一時間迴轉幾度？

2. 測右三角形各頂點的角，而求其和。

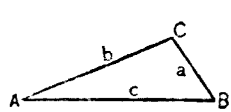


圖　25.

3. 測下面四角形各頂上的角 α,

β, γ, δ 而求其和；再測 $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ 而求其和(圖 26)。

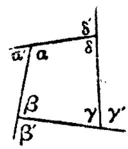


圖 26.

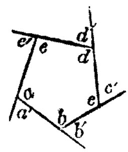


圖 27.

4. 測次五角形各角(圖 27)，求 $a+b+c+d+e$ 及 $a'+b'+c'+d'+e'$。

5. 用分度器量角的大小而作三角形各角的二等分線。

46. 預備問題 (a) 用分度器作等於 180° 的角。看此角二邊的位置，有何種特殊的情形。(b) 一直線以其一端爲中心而迴轉半周時所產生的角，其大小如何？

如圖中的角 ABC，角的二邊在頂點的兩側而接合成一直線時，這角叫平角。

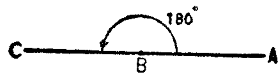


圖 28.

平角即是一直線迴轉半周所成的角，其大小爲 180°。

47. 平角的半叫直角。

直角即是一直線迴轉四分之一周所成的角，其大爲 90°。

表示直角用記號 $\angle R$，這 R 是直角的英字 Right angle 的縮寫。

測角時也有以直角做單位的，如說平角等於二直角。

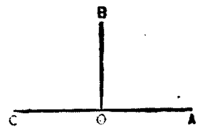


圖 29.

48. 在圖中，AOB 是直角時，則 BO 是 AC 的垂線，O 叫垂足。一般說來：

二直線成直角時，其一直線叫爲他一直線的垂線，或說二直線互相垂直，而其交點叫做垂線的足，略稱垂足。

平角是等於 180°，所以凡是平角都是這個度數，都是相等的，同樣，凡直角都是 90°，都相等。

因爲 BO 垂直於 AC 時，AC 也是垂直於 BO 的，所以叫互相垂直。

表示垂直常用記號 ⊥，是一種象形，如 $BO \perp AC$，卽表示 BO 垂直於 AC，或叫 AC，BO 互相垂直。

49. 預備問題　用分度器及直尺，於直線 AB 上的一點 D，引垂直於 AB 的直線，能引幾線？

於一直線上之一點，只能引其唯一的垂線。

50. 垂線可以用三角板引之。三角板爲直角三角形的器具，通常有次記二種：

(i) 一角是直角，他二角各是 45° 的。

(ii) 一角是直角，一角是 60°，又一角是 30° 的。

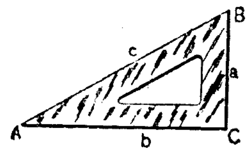


圖　30.

由前條的性質可以驗三角板的直角的正確與否。

先引一直線，以三角板的直角的一邊 BC，重合於此線上，再沿他邊引直線 AB。次把三角板翻身，仍使直角的一邊與原直線相重合，而使直角的頂點在 B 點，此時直角的他一邊若和 AB 不一致，則三角板的直角不準確。從這樣知道了直角是準確的板，可以利用之以作直角，又可以引垂線。

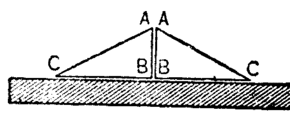


圖　31.

51. 比直角小的角，叫銳角(如 $\angle 5$)，比直角大而比平角小的角，叫鈍角(如 $\angle MNO$)。

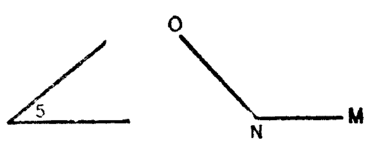


圖　32.

52. 二角的和等於一直角時，各角叫做他一角的餘角。二

角的和等於二直角時，各角叫做他一角的補角。如圖：

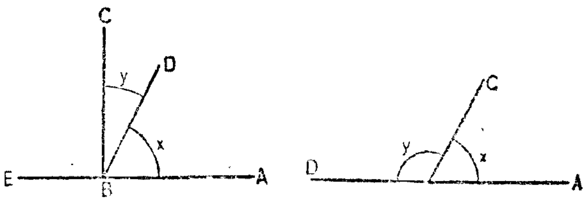


圖 33.

(i) $\angle ABD$ 的餘角是 $\angle DBC$。(左)

(ii) $\angle ABC$ 的補角是 $\angle CBD$。(右)

今 (i) 以 x 表一角，以 y 表其餘角，則 $x+y=90°$。

故 x 自 $0°$ 到 $90°$ 漸次增大時，則 y 必自 $90°$ 至 $0°$ 漸次減小。

又 (ii) 以 y 表 x 的補角，則 $x+y=180°$。

故 x 自 $0°$ 到 $180°$ 漸次增大時，則 y 必自 $180°$ 到 $0°$ 漸次減小。

像這樣的 x 和 y 的二量，有相互的關係，即其中

一量的大小變更時，他一量的大小也隨之而變更者，則叫各量爲他量的'函數'。

所以上說的 y 是 x 的函數，x 也是 y 的函數。

練習問題

1. 求次各角之餘角及補角：

(a) $35°$,　　(b) $43°36'$,　　(c) $12°50'16''$.

2. 作出圖 34 所示角的餘角及補角。

3. 已知一角的補角恰爲原角的四倍，求該角。

圖 34.

4. 用目測作次記諸角的餘角及補角，事畢後再以分度

器量你所作角，看其正確度如何： 30°, 36°, 75°.

53. 角 AOC 的二邊 AO, CO 向 O 的方向延長時，得新角 BOD。

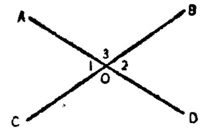


圖 35.

反過來，把這角 BOD 的二邊 BO, DO 延長，便得角 AOC。這樣的 $\angle AOC$ 和 $\angle BOD$ 的二角叫對頂角。

一角的二邊和他角二邊的延長相當時，這二角叫對頂角。

54. 預備問題 (a) 用分度器量對頂角 α, β 的大小而比較之。(b) 說明 $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$ 的理由，再由此導出 $\alpha=\beta$ 的結論。

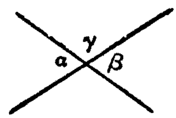


圖 36.

對頂角相等。

練習問題

1. 二直線相交成四角，若其中有一角是直角，則餘三角之大小如何？又若一角爲 30°，則又如何？

2. 求二等分對頂角各角的二直線所成的角度。

3. 過一直線 AB 上的一點 K，於其兩側各引一直線 KD, KC，使 $\angle AKC=\angle BKD$. 求 KC, KD 二直線所成之角。

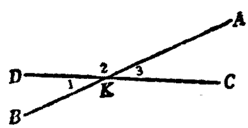


圖 37.

4. 示相等的二角，可以放置使成對頂角之形式。

(六) 作圖題

55. 預備問題 (a) 引三等分直角的直線。(b) 作二邊爲 8 分、10 分，夾角爲 60° 的三角形。

幾何學上也研究作成適合於已知條件的圖形的方法。關於這一類的問題，名叫作圖題。

解作圖題得使用有分劃的直尺，卽尺度，分度器，圓規和三角板。到第二編第三章時，使用的器械，是只限於無分劃的直尺及圓規，不得使用別種器械，而研究解作圖題的方法；現在則可以用上記四種器械，並無限制。

練習問題

1. 於一直線上的一定點，引其垂線(三角板)。

2. 從一直線外的一定點，引其垂線(三角板)。

3. 二等分一已知的線段(尺度)。

4. 引直角的二等分線(直尺和分度器)。

5. 引一已知角的二等分線(分度器和直尺)。

6. 過一直線上的一定點，引與此直線成 60° 角的直線(分度器和直尺)。

7. 過一直線 AB 上的一定點 C 引與此線成已知角 α 的直線(分度器和直尺)。

8. 已知二點 A, B 和二線段 a, b；求一點，使從 A 到此點的距離等於 a，從 B 到此點的距離等於 b (圓規)。

56. 前條練習問題的 7，不用分度器，只用直尺和圓規，也可以作解答如次：

以 α 角卽 $\angle DOE$ 的頂點 O 做中心，用任意長的半徑畫圓，設此圓周與兩邊的交點爲 D, E(圓規)。次以 C 點爲中心，作與前半徑相同的圓與 CB 的交點爲 F (圓規)。次以

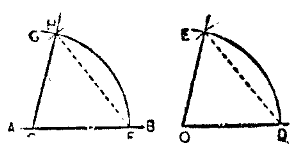


圖 38.

對於某事項，指定要怎樣怎樣，卽叫做已知條件。上記問題的已知條是卽 (a) 三等分直角，(b) 二邊爲 8 分、10 分，夾角爲 60° 是也。

尺用以量長度及引直線，分度器用以測角度，圓規用以移轉線段的長及畫圓，三角板用以作直角及引垂線。

F 爲中心，以線段 DE 爲半徑畫圓，與前所畫圓周之交點爲 H（圓規）。

聯結 CH（直尺），CH 卽所求之直線。

若問何以 $\angle BCH=$ 已知角 α，則試疊合二圖卽可知之。

練習問題　應用上述的方法以解次題：

1. 作已知二角的和及差。
2. 作與已知角的二倍、三倍相等的角。
3. 任意畫一三角形，而作與其三角之和相等的角。

（七）結　論

57. 復習問題　(a) 幾何學是什麼？卽問幾何學硏究什麼的？(b) 說明立體、表面、線及點的意義。(c) 什麼是圖形？

如在本篇開始時所述，幾何學是硏究關於物體的形狀、大小及其位置的諸種性質的科學。物體，只就其形狀、大小着想時便得着立體、表面、線、點等等圖形的思想，也已說明過了。這樣就可以說：

幾何學是論究圖形的性質的科學。

論究平面上所有的圖形的性質，叫平面幾何學。論究空間所有的圖形的性質，則是立體幾何學。

我們將於次講述平面幾何學及立體幾何學。

58. 古代的巴比侖人和埃及人雖已有關於圖形的種種知識，然不過是由於房屋的建築，田野的測量，星辰的觀測等等經驗所得的斷片知識，不能構成一種科學。到了希臘時代，始有

正式的幾何學上的解作圖題，只限用無分劃的直尺及圓規，有這二種其實已可抵得現在的四種了，§ 56 卽示只用這二種者如何同樣可解作圖題。

人把此等知識，整理起來，附以系統，以若干經驗的事實為基礎，而想由此等事項去導出關於圖形的諸性質，這是幾何學的萌芽。

現在我們所學的幾何學即是從希臘時代產生的幾何學。故論究關於圖形的諸性質時，不能滿足於只就實驗、觀察所確定的結果，必須要把這些歸納到更根本的事項而加以證明。

因之可以作為證明基礎的事項，勢必不能再由別的事項去證明，只能由直觀和經驗可立即決定其為眞理的。於此等事項中選擇若干，叫做公理。

今舉公理的重要者如次：

I.　等於同一個量的各量相等。

II.　等量加以相等的量，其和相等。

III.　等量減去相等的量，其差相等。

IV.　全量比其一部分為大。

特別關於幾何圖形的公理，是：

i.　圖形可不變其大小、形狀而變其位置。

ii.　能使全相合的二圖形，其大小相等。

iii.　過二點的直線有一而限於一。

在這裏以前，本篇中曾由實驗知道許多事項，嚴密說來，不能說都是公理，就是非經證明，不能無條件承認其為眞理。但我們很知道這些事的確為眞理，所以也不再求證明，將於次篇以下即將此等事項和其他公理為基礎，由推理而求新的眞理。這些新的眞理，叫做定理。

關於一般量的公理，在全般的算學上都用得到，即叫普通公理。專是幾何學上的事項的，是叫幾何學公理。

定理是由公理及公理所導出的事項所能證明的眞理。

59. 用直線所圍成的平面形叫多角形。這是多角形的定義。聯結多角形不相隣二頂點的直線叫對角線，是對角線的定義。

定義是規定用語(術語)的意義的陳述。

在研究一切科學學術時，不確定其用語(術語)的意義，便有發生種種紛亂的危險，故在一切科學上，都先規定用語的義意。幾何學也是如此，把定義和公理作爲研究的出發點。

雜問題

1. 問次記用語的定義:

平面形，圓，圓周，平角，直角，垂線，對頂角，銳角，鈍角，餘角，補角。

2. 述圓的重要性質。

3. 說明角的大小和其邊的長短無關。

4. 問次記方向間的角: (*a*) 北和北東，(*b*) 北和南東，(*c*) 北和南。

5. 分圓周爲四、八、十六等分。

6. 於次記各時刻，時鐘的長短針間的角度如何? (*a*) 一點二十五分，(*b*) 二點三十分，(*c*) 四點四十五分。

7. 某人向北走 1 里，向左轉 45° 又走 2 里，再向右轉 75° 走 3 里，今以 5 分代表 1 里作此人所行路的略圖，若欲走回原出發點，須轉若干度，直行幾里?

8. 某人欲測一河面的闊 AB，從 A 沿河岸走了 50 丈，到 C，測得 $\angle ACB = 36°$，試作適當的縮圖以求河的闊。

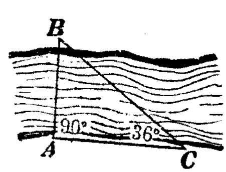


圖 39.

平面幾何學

第一章 直線形

第一節 三角形 (1)

60. 復習問題 問次記各名詞之定義？——多角形，三角形，多角形的邊。

圍成多角形，至少須有三線以上之直線，所以三角形是多角形中的頂簡單的。關於三角形的各種性質，又是幾何學的基礎，而且在實際上的應用，也極廣大，現在先來講述。這是很重要的，須得留心學習，幾何學的能否精熟，差不多就在這裏。

定義 三角形二邊所成的角，名其內角，或單稱角，一邊和其隣邊的延長所成的角，名其外角。

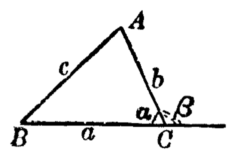


圖 40.

如右圖，$\angle\alpha$ 是內角，$\angle\beta$ 是外角。

在一般的多角形，也用同樣的名稱。

三角形的三邊和三內角，叫做三角形的六要素。

表三角形用記號 $\triangle$。如三角形 ABC 卽以 $\triangle ABC$ 表之。

邊 BC 和 $\angle A$，邊 CA 和 $\angle B$，邊 AB 和 $\angle C$ 互稱爲相對，卽 BC 是 $\angle A$ 的對邊，$\angle A$ 是 BC 所對的角，餘倣此。有時 BC, CA, AB 各以其所對角所附記文字之小寫 a, b, c 表之。

61. 預備問題 (*a*) 作三邊各爲 7 分的三角形。(*b*) 作二邊各爲 6 分而第三邊爲 4 分的三角形。(*c*) 作三邊爲 3.5 分，6 分，8 分的三角形。

三角形依照其邊的大小關係，可以分別如次：

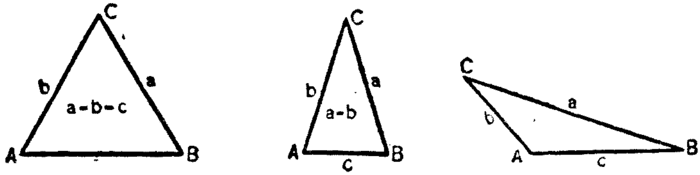


圖 41.

(a) 是三邊都相等的，

(b) 是三邊中有二邊相等的，

(c) 是各邊都不相等的。

定義 (a) 三角形的三邊都相等的，叫等邊三角形。

(b) 三角形中有二邊相等的，叫等腰三角形或二等邊三角形。

(c) 任何二邊均不相等的三角形，叫不等邊三角形或斜三角形。

62. **預備問題** (a) 作二角各爲 60° 的三角形而測其第三角之大小。(b) 作二角爲 75°, 45° 的三角形而測其第三角之大小。(c) 作一角爲 120° 的三角形。(d) 作一角爲直角的三角形。

三角形依照其角的大小關係，可以分別如次：

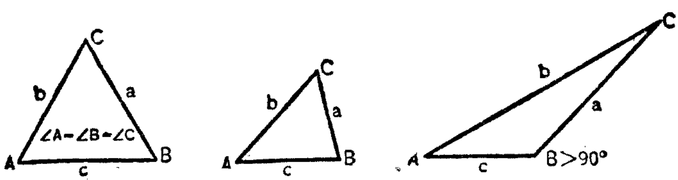


圖 42.

(a) 三角都相等，

等邊三角形亦卽等角三角形卽是正三角形。

(b)　三角都是銳角，

(c)　有一角是鈍角，

(d)　有一角是直角。

定義　(a)　三角都相等的，叫等角三角形。

(b)　三角形的三角都是銳角的，叫銳角三角形。

(c)　三角形有一角是鈍角的，叫鈍角三角形。

(d)　三角形有一角是直角的，叫直角三角形。其直角所對的邊叫斜邊，或弦。直角的夾邊叫句、股。

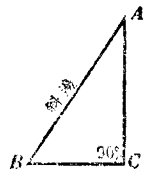


圖　43.

63.　在算術裏已經說到過的名詞，三角形的底邊和高，有怎樣的意義，看了次記的定義，可以更加明白。

定義　三角形中的一邊，可以叫做底邊，其時底邊所對的角，就叫做頂角，在底邊兩端的角，叫做底角。頂角的頂點，叫三角形的頂點，頂點到底邊所引垂線的長，叫三角形的高。

但在二等邊三角形，則常以其不相等的邊爲底邊。

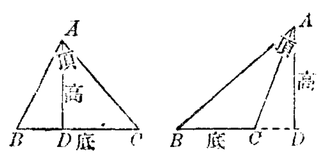


圖　44.

在圖中，如以 BC 爲底邊，

三角形的三角中有一角是直角或鈍角，則餘二角必是銳角，在後會說到。

普通，三角形的任何一邊，都可以取來作爲底邊看待。其頂點及高是根據了底邊而決定的。所以換了一個看法，底和高可以有另一種的解答。不過在二等邊三角形，則有一定，如本文所說。

在圖中，也可以把 AB 看做底邊，其時 C 點是三角形的頂點，C 到 AB 的垂線是三角形的高了。又把 AC 看做底邊也可以，那時 B 是頂點，B 到 AC 的垂線是高。

則 $\angle A$ 為頂角，$\angle B$, $\angle C$ 都是底角而 A 是頂點，AD 是三角形的高。

64. 在 §34 中我們說過，能使之相疊合的二圓，叫全等的圓，在三角形，也是這樣的。

定義 一三角形和他一三角形相疊合時，能使之全相合者，這二三角形叫全等。

在一般的平面形，這定義同樣可以適用。卽兩形能使互相疊合，恰巧相合時，兩形是全等。

如用紙二張疊合而剪出二三角形來，則是兩個全等的三角形，如次圖：

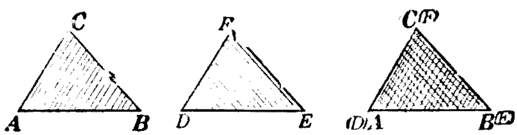


圖 45.

則 $\begin{cases} \angle A=\angle D, & \angle B=\angle E, & \angle C=\angle F; \\ BC=EF, & CA=FD, & AB=DE. \end{cases}$

所以，兩個全等的三角形中，相等邊對相等的角，又相等角對相等的邊，是須注意的。

表全等用記號 ≡ 或 ≅，例如 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等，則記作 $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$ 或 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$。

判定在何種情形之下，兩三角形是全等的，是幾何學上極重要的事項，關於此等事項的定理，叫三角形的全等定理。

以下對於此等定理，將依次說到，學者須留心習之。

65. 預備問題 作二邊為 5 分和 8 分，其夾角為 35° 的兩三角形，切取

三角形，圓形的形狀不同時，面積還可以相等，這時不能說是全等，該全等不但大小相等，而且形狀也要相同，兩者不可混合。

其中之一而重合到他一三角形上去，看是否能完全疊合？其疊法如何？因此可以猜想得怎樣的全等定理。

定理 1. 一三角形的二邊和其夾角，與他三角形的二邊和其夾角，各各相等時，則兩三角形全等。

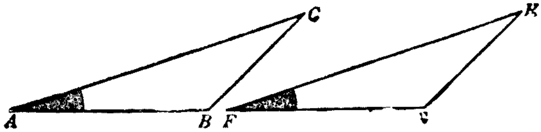


圖 46.

在 $\triangle ABC$, $\triangle FGH$ 中，設 $AB=FG$, $AC=FH$ 及 $\angle A=\angle F$ 時，則此兩三角形可以全相疊合，卽 $\triangle ABC\equiv\triangle FGH$。

因 $AB=FG$, 故把 FG 疊合到 AB 上去，使 F 點重合於 A 點，而 $\triangle FGH$ 放置在 $\triangle ABC$ 之上，且使兩三角形在 AB 之同一側，此時，因 $\angle F=\angle A$, 所以 FG 必沿 AB 而落下。又因 $AC=FH$, 故 H 點卽落在 C 點上，因之 GH 和 BC 全相疊合。這時兩三角形的三邊全相疊合了，卽兩三角形完全疊合。

因之 $\triangle ABC\equiv\triangle FGH$.

練習問題

1. 設線段 AB 的中點爲 O, 於 O 點引 AB 的垂線 OC, 於 OC 上取一點 P, 測 PA, PB, 則可知此二線段之長相等。試證明此定理。

像這問題中的 OC, 是過一線段的中點而又是其垂線，叫做該線段的垂直二等分線。卽上題的結果，也可以陳述如次：

一線段的垂直二等分線上的點，與此線段的兩端點的距離相等。

2. 欲知二點 A, B 間的距離，設其間有障礙物不能直接測得時，可照次法求之。

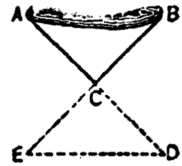


圖 47.

先在適當的地方取一點 C，測 AC, BC。其次延長 AC, BC；而於 AC 之延長上取 $CD=AC$, BC 之延長上取 $CE=BC$。再測 DE。其時 DE 之長與 AB 的距離相等。其理由如何？

66. 預備問題 作一邊為 1 寸，而其兩端的角為 35° 及 100° 的兩三角形。剪出其一，疊合於他形上而觀察之，能全相重合否？其疊合的方法如何？因此可以預想得怎樣的一個全等定理？

定理 **2.** 一三角形的二角和其頂點間的邊，與他三角形的二角和其頂點間的邊，各各相等時，則兩三角形全等。

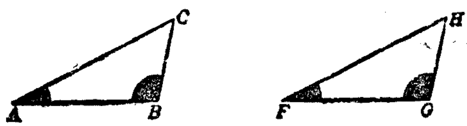


圖 48.

兩三角形 ABC, FGH 中，設 $\angle A=\angle F$, $\angle B=\angle G$, $AB=FG$, 則兩三角形可以全相重合，即：

$$\triangle ABC \equiv \triangle FGH.$$

因為 $AB=FG$, 故把 F 點放在 A 點上，使 FG 疊合於 AB 上，使 $\triangle FGH$ 重合於 $\triangle ABC$ 上，而且使兩三角形在 AB 的同側。這樣因 $\angle A=\angle F$, 故 FH 沿 AC 而落下，又 $\angle B=\angle G$, 故 GH 沿 BC 而落下，因之 H 點與 C 點相重合，*AC 與 FH 相合，BC 與 GH 相合，因而 $\triangle ABC$ 與 $\triangle FGH$ 完全相重合，即 $\triangle ABC \equiv \triangle FGH$。

*因 H 為 FH 上之點，故必落在 AC 上。又 H 亦為 GH 上之點，故必落在 BC 上。因之 H 點非得落在 AC 與 BC 的交點 C 上不可。

定理 2 又可陳述如次： 一三角形的一邊及在其兩端的角，與他三角形的一邊及其兩端的角，各各相等；則二三角形全等。

練習問題

1. 在右圖中，I 是 GH 的中點。若 $\angle G$ 和 $\angle H$ 都是直角，KL 爲過 I 點之一直線，則 $GK=HL$，試證明之。

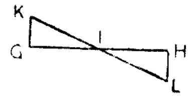


圖 49.

2. 古昔希臘有幾何學者泰勒斯 (Thales, 640–546 B.C.) 曾利用這定理 2 以求海岸上的一點 A 和船 V 的距離，其方法：

先於海岸上取一點 B，測 AB 的距離及二角 $\angle u$, $\angle v$（從二點望船與 AB 所成之角）。次於海岸上作直線與 AB 所成之角爲 $\angle x=\angle u$, $\angle y=\angle v$。設其交點爲 X，則測 AX，卽可得所求的距離。其理如何？

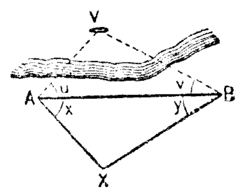


圖 50.

67. 預備問題　任意畫一二等邊三角形，次切取之，翻一轉身，而放入原來的位置裏，仍脗合否？由此求二底角的大小。

定理 3. 三角形二邊相等時，其相等邊所對角亦等。

三角形 ABC 中，$AB=AC$，試證明 $\angle B=\angle C$。

作與 $\triangle ABC$ 全等的三角形 $A'B'C'$，而設 $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle A=\angle A'$。

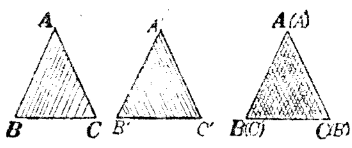


圖 51.

今把 $\triangle A'B'C'$ 翻身而疊合到 $\triangle ABC$ 上，使兩三角形在 AB 的同側，把 A' 放在 A 上使 $A'C'$ 沿 AB 而落下。此時因 $\angle A'=\angle A$，所以 $A'B'$ 沿 AC 而落下。

又因 $A'C'=AB$, $A'B'=AC$，故 C' 落在 B 上，B' 落在 C 上。從而 $B'C'$ 是與 BC 相重合的。

定理 3 的陳述，也可以寫做二等邊三角形之兩底角相等。

A' 讀作 A dash 或次 A，或 A prime。

因而 $\angle C'$ 與 $\angle B$ 相重合，即 $\angle C'=\angle B$。

但 $\angle C'=\angle C$ (因 $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$)。

故 $\angle B=\angle C$.

68. 次定理可以直接由前定理導出。

【系】 等邊三角形的三內角相等。

這樣由某一定理可以直接立刻導出的，叫做該定理的系。

練習問題

1. 試實際作圖，以比較二等邊三角形底邊的兩端與其對邊中點的聯結線段的長。其結果如何？並證明之。

2. 試實際作圖，以比較二等邊三角形二底角的二等分線迄於其所對邊的線段之長。其結果如何？并證明之。

69. 預備問題 任意作有二角相等的三角形，次切取之，翻身而放入原來的位置，能全胸合否？由此以考查等角所對二邊的大小。

定理 4. 三角形二角相等時，其相等角所對邊亦等。

於 $\triangle ABC$ 中，設 $\angle B=\angle C$，試證 $AB=AC$。

作與 $\triangle ABC$ 全等的 $\triangle A'B'C'$，設 $BC=B'C'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$。

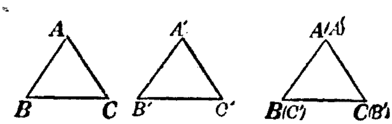


圖 52.

今將 $\triangle A'B'C'$ 翻身而放置於 $\triangle ABC$ 上，使兩三角形在 BC 的同側，把 B' 放在 C 上，$B'C'$ 與 CB 相合。此時，因 $\angle B'=\angle C$，$\angle C'=\angle B$，故 $B'A'$

上系由定理 3 推知的方法，因 $AB=AC$，故 $\angle B=\angle C$；又 $AB=BC$，故 $\angle A=\angle C$；故 $\angle A=\angle B=\angle C$。

總之，系也是一種定理，不過是由另一定理或公理直接可以導出，不必使用到別的定理、公理來輔助證明。故系者是系屬於該定理之意。

所以二等角三角形，因角等時邊亦等，實際即是二等邊三角形。

沿 CA 而落下，$C'A'$ 沿 BA 而落下，故 A' 點落在 A 點上。故 $A'C'=AB$，然 $A'C'=AC$（因 $\triangle A'B'C'\equiv\triangle ABC$），故 $AB=AC$。

由上定理立即推得：

【系】 三角形三角相等時，此三角形爲等邊三角形*。

70. 看以前所證明的定理，都是由二部分所成，例如

定理 1 {(一)一三角形的二邊和其夾角，與他三角形的二邊和其夾角，各各相等時，(二)則兩三角形全等。

定理 3 {(一)三角形二邊相等時，(二)其相等邊所對角亦等。

都有(一)及(二)二部分。別的定理也大抵有由這樣的二部分構造的形式。前一部分是說出"假使怎樣……"先在圖形中規定了條件，這叫做定理的假設。後一部分是說在那個假設之下，可以成立的事項，叫做定理的終結。

證明定理，就是由這定理的假設，根據了已知的公理和定理，演釋地導出那個定理的終結來，要其間絕無一點疑問，誰都可以首肯的。在證明時，先畫與定理相應的圖形，而附以符號文字，次就圖形述假設及終結，以說明定理的意義，然後應必要而作補助線等，再移到證明的步驟。

---

*參照上圖，設 $\angle A=\angle B=\angle C$；則由上記定理，因 $\angle B=\angle C$，故 $AB=AC$；又 $\angle B=\angle A$，故 $BC=AC$；因之 $AB=BC=AC$。

幾何學的問題，大抵和定理有同樣的資格，而且陳述的形式也相彷彿。所以證明問題，也和證明定理一樣，要根據假設去證明終結的爲眞；學者須取法於定理的證明，將練習問題仔細做好，以求有徹底之理解。

幾何學的問題，一經證明之後，即可當作定理應用，因爲問題實在也就是定理。

這講義中只證明了比較重要的定理，應用此等定理可以證明的問題，其數極多，可說無限。學者不但要記熟定理，即問題也要記得，方可應用自如。

練習問題

1. 指出定理 2 及定理 4 的假設及終結。

2. 假設和終結，在幾何學以外的事實的陳述中，也常有。試就次記各陳述，指示其假設及終結：

(a) 人若犯罪應受罰。

(b) 比水重的物體沈於水中。

(c) 凡人皆有死。

(d) 善有善報，惡有惡報；倘若不報，時辰未到。

3. 各自作與題 2 類似之陳述若干條，且述何者爲假設，何者爲終結。

71. 預備問題 任意作一二等邊三角形，引其頂角之二等分線。因此而成之兩三角形，有何種要素相等？二等分線與底邊所成之角如何？二等分線與底邊的交點是底邊中點否？

定理 **5.** 二等邊三角形頂角的二等分線，垂直於底邊上且二等分之。

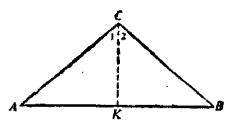


圖 53.

設 $\triangle ABC$ 爲二等邊三角形 ($BC = AC$)，線段 CK 爲頂角 C 的二等分線。

求證 $CK \perp AB$, $AK = BK$.

證明 於 $\triangle ACK$, $\triangle BCK$ 中, $\left.\begin{array}{r} BC = AC \\ \angle ACK = \angle BCK \end{array}\right\}$ (假設)

又 CK 是兩三角形公用的邊(這樣的邊叫公邊)。

因之在這兩三角形中，有二邊和其夾角相等。

故 $\triangle ACK \equiv \triangle BCK$. (定理 1)

因之 $\angle AKC = \angle BKC$.

但 $\angle AKC + \angle BKC = \angle AKB =$ 平角.

故 $CK \perp AB$.

又因 $\triangle ACK \equiv \triangle BCK$ $\therefore$ $AK = BK$.

【系 1】 二等邊三角形頂角的二等分線，分此形爲全等之二直角三角形。

【系 2】 二等邊三角形，頂角的二等分線；從頂點所引底邊的垂線；頂點和底中點的聯結線；三直線合一。

【系 3】 二等邊三角形底邊的垂直二等分線，二等分其頂角。

練習問題

1. 三角形頂角的二等分線，垂直於底邊時，此形爲何種三角形？

2. 於任何三角形中，頂角的二等分線，和從頂點所引底邊的垂線，能合一否？

72. 從定理 5 系 1, 可知以二等邊三角形頂角的二等分線爲摺痕，而摺疊之，則其兩部分，完全相合。因此，二等邊三角形於其頂角的二等分線爲對稱。

定義 以一直線爲摺痕而摺疊一平面形，其兩部分若完全相合，則此圖形可叫做於該直線爲對稱的圖形，此直線叫對稱軸。

例如，圓於其直徑爲對稱，而直徑是圓的對稱軸。

練習問題

1. 一線段的兩端，於其垂直二等分線爲對稱，試證明之。

2. 於自然界或人造諸物體的表面，有於直線爲對稱的平面形，試舉其例。

73. 預備問題 任意作一三角形，次作三邊各與此形之三邊相等之三角形，測兩三角形各角而比較之，因此可以預想得怎樣的全等定理。

定理 6. 一三角形的三邊與他三角形的三邊，各各相等時，則兩三角形全等。

於 $\triangle ABC$, $\triangle FGH$ 中，

$$AB=FG,\ BC=GH,\ CA=HF,\qquad\text{(假設)}$$

則　　$\triangle ABC\equiv\triangle FGH.$　　(終結)

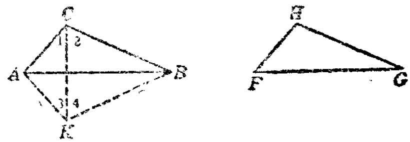


圖 51.

證明　取 $\triangle FGH$ 使與 $\triangle ABC$ 相接，把邊 FG 和邊 AB 疊合，使 H 點和 C 點在 AB 的相反對的一側。設 H 點所落下之處為 K。

聯結 CK，其時在 $\triangle ACK$ 中，　$AC=AK.$　(假設)

故　$\angle 1=\angle 3.$　(定理 3)

同樣，在 $\triangle BCK$ 中，　$BC=BK.$　(假設)

故　$\angle 2=\angle 4.$　(定理 3)

因之　$\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4.$

即　$\angle ACB=\angle AKB$*.

故於 $\triangle ABC$, $\triangle ABK$ 中，有二邊 $AC=AK$, $BC=BK$ 及夾角 $\angle ACB=\angle AKB$。

依定理 1，$\triangle ABC\equiv\triangle ABK$，因之 $\triangle ABC\equiv\triangle FGH$。

*A 和 K 的聯結線，不一定是通過 A 和 B 的中間，可如次圖，恰過 A（或 B）點，又或在二點的外側，AB 與 CK 不相交。

但那個結果的 $\angle ACB=\angle AKB$ 是始終不變的。因在 CK 過 A 點時，$\angle ACB=\angle KCB$, $\angle AKB=\angle CKB$。

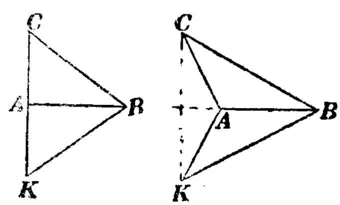


圖 55.

CK 與 AB 又不相交時，則 $\angle KCB-\angle ACK=\angle CKB-\angle AKC$，其結果亦同。

練習問題

1. 取與 A, B 點爲等距離的 P 點，聯結 P 和 A, B 的中點 C，證明 PC 爲 AB 的垂線。由此以導出次定理。

與二點爲等距離的點，均在此二點的聯結線段的垂直二等分線上。

2. 不用分度器，二等分一角 ABC 的方法如次：

先以角頂 B 爲中心，以任意的半徑畫圓，此圓與角的二邊交於 L, M 二點。次以 L 及 M 爲中心，以同半徑畫二圓，設其交點爲 G。聯結 BG，則 BG 二等分角 ABC。試證明之。

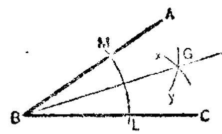


圖 56.

74. 預備問題 三角形有幾外角？各外角有幾不相隣的內角？

定義 不隣接三角形的一外角之二內角，均稱爲此外角的內對角。

75. 預備問題 任意作三角形，取其一外角而比較外角和各內對角的大小（用分度器或各自用特別方法均可）

定理 7. 三角形的外角大於其任何內對角。

設 $\angle DBC$ 爲 $\triangle ABC$ 的 $\angle B$ 的外角，則

$\angle DBC > \angle A$, 又 $\angle DBC > \angle C$.

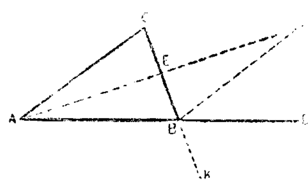


圖 57.

證明 設邊 BC 的中點爲 E。聯結 AE，延長之。於其延長

三角形的一內角有二邊，延長一邊與原來的他一邊，構成一外角，故一內角有二外角，因之三角形共有六外角。

三角形有三內角，外角爲一內角之隣角，故一外角有二不相隣之內角。

如上面的證明中所引 AEF 線是作證明的手段而引的，叫做補助線。

上取與 AE 相等之 EF，聯 BF。

此時於 $\triangle AEC$，$\triangle BFE$ 中，

$AE=EF$，$BE=EC$（作圖），$\angle AEC=\angle BEF$（對頂角）。

故 $\triangle AEC \cong \triangle BEF$，故 $\angle C=\angle EBF$。

但 $\angle DBC>\angle EBF$。因之 $\angle DBC>\angle C$。

同樣，取 AB 的中點與 C 相連而做上法就可以證明 $\angle ABK=\angle DBC$，而大於 $\angle A$。

練習問題

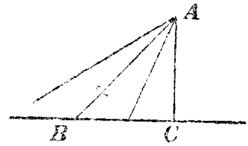


圖 58.

1. 右圖中，$AC\perp BC$，試想像 AB 依照矢的方向，繞 A 點而迴轉，則 $\angle ACB$ 與 $\angle A$ 之差，如何變化？又其差有為 0 的情形否？

2. 一三角形內得含有二直角否？

3. 一三角形內得含有二鈍角否？

第二節　平行線

76. 在第一節中，我們已說述了若干關於三角形的事項，但三角形的研究，並非盡於此。不過要再進而研究三角形的性質，非得先學習關於平行線的知識不可，現在先就平行線的性質講述一下。

平行線一語，普通也常常用到，但其意義並不明瞭，其在幾何學的意義，則如次記的定義。

練習問題：

1. 試列舉三角形的六要素　　2. 問三角形各部的名稱。
3. 依照角及邊而分類三角形。　　4. 三角形全等的意義如何？
5. 說出三角形全等的定理　　6. 說三角形的性質。
7. 問定理由何二部構成？

定義　在同一平面上的二直線，向雙方無論如何延長，永不相交者，叫平行線。

表平行用記號 ∥。例如 AB, CD 二直線平行，則以 $AB \parallel CD$ 表之。

圖　59.

77.　如下圖，一直線 TS 與其他多數之直線 AB, CD 等相交，此 TS 叫做 AB, CD 等直線的截線。

定義　與一組的直線相交的一直線，叫此組直線的截線。

二直線 AB, CD 與一截線 TS 相交時，於其二交點生八角 s, t, u, v, w, x, y, z。此等各角因其所在及位置的關係，有如次記的各種名稱。

(1)　t, u, x, w 的四角，均叫內角。

(2)　s, v, y, z 的四角，均叫外角。

(3)　t 和 w, u 和 x 的二組，互叫錯角。

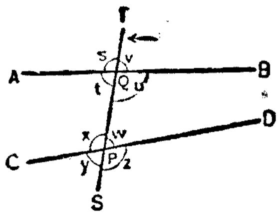


圖　60.

(4)　v 和 w, s 和 x, u 和 z, t 和 y 的四組，互叫同位角。

78.　預備問題　畫相交的三直線如下圖，問 $\alpha>\beta$ 的理由如何？次設想

同一平面上的二直線，充分延長起來，必定是相交或永不相交的。不相交的是平行線，相交的叫相交線。

平行和垂直，都是說二條線中間的關係，只是一直線時，不能說什麼平行或垂直的。

此處之內角、外角和三角形中所說的內角、外角不同，須注意之。

此處的錯角或叫內錯角，尚有 s 和 z；v 和 y 可以叫做外錯角。

這裏，內角和外角是由角的所在而取的名稱，錯角和同位角，是由二角相互間的位置關係而取的名稱，所以一定有對手，只有一角是不能成立什麼關係的，即 t 的錯角是 w，x 的錯角是 u；又以前說過的對頂角，也是由位置關係而起的名稱。

FD 繞 F 點依矢的方向而迴轉，其時 β 漸次增大，可以大到大於 α 的，所以在其中間必有一位置恰是 β 與 α 相等，其時，EB, FD 得相交否？

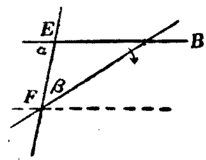


圖 61.

定理 8. 二直線與其截線所成的錯角相等時，此二直線平行。

二直線 AB, CD 與截線 TS 相交於 E, F 二點，若其所成的錯角 x, y 相等，則 $AB \parallel CD$。

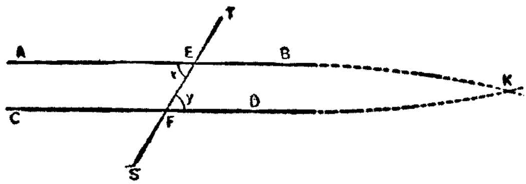


圖 62.

證明 設 AB, CD 不相平行，則 AB, CD 必有相交之一點，設此點爲 K，則 EFK 爲一三角形。今設 K 點在 EB 之延長上時，則 $\angle x$ 是 $\triangle EFK$ 的外角，因之 $\angle x > \angle y$（定理 7），此與假設不合。

又若 K 在 EA 之延長上時，則與前相反爲 $\angle y$ 爲 $\triangle EFK$ 的外角，故 $\angle x < \angle y$，此亦與假設不合。

故 $\angle x = \angle y$ 時，AB, CD 不能相交，卽 $AB \parallel CD$。

【系 1】 二直線與其截線所成之同位角相等時，此二直線平行（何故？因此時，其錯角必是相等的）*。

【系 2】 二直線與其截線所成在截線同側二內角之和，爲二直角時，二直線平行。

【系 3】 垂直於同一直線之二直線，平行。

二直線的平行，是一種位置關係，是相互的，AB 平行於 CD，同時 CD 平行於 AB；$AB \parallel CD$ 是表着這二種意思。

*因爲同位角相等的結果，錯角也是相等了，卽歸結到定理 8。

79. 證明上定理 8，所用的證明法，叫歸謬法，是和以前所用的方法不同，大家一看就明白的。一平面上的二直線，逃不出平行或相交的關係，且不相交則平行，不平行則相交。因之若能證明二直線相交是不對的，那麼二直線平行一定是對的了。就是證明一切反對陳述的終結的論者，全部謬誤，則其終結成立，自不待言。一般，先假定終結不成立，則有與假設相反的結果發生，或達到與既知的定理或公理相反的結論，以證明其終結的爲眞理，這種證明定理的方法，叫歸謬法。通常我們在推理時，也有用這種方法的，例如因石的吸引磁石而推定此石的含有鐵質，反對一個人的主張 60 是 4 的 18 倍，而把 4×18 的結果算給他看等等都是。

80. 應用定理 8，可以解次記作圖題。

作圖題 過一直線外之一點，引此直線的平行線。

CD 是定直線，E 是定點，不在 CD 上，今求過 E 引一直線與 CD 平行。

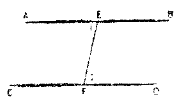


圖 63.

解法　過 E，任意引直線 EF，與 CD 之交點爲 F。

於 E 作 $\angle AEF$ 使等於 $\angle EFD$，此時 AE 卽所求的直線。

因爲錯角

$\angle AEF=\angle EFD$.

$\therefore\quad AE\parallel CD$.

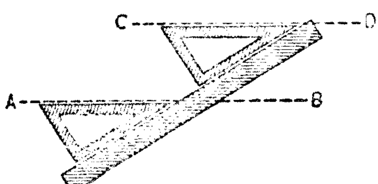


圖 64.

這作圖題，又可以三角板和直尺解之，卽先沿 CD 而放下三角板的一邊，再沿

於一直線之一點，作一角與已知角相等的作圖，前已說過其可能了。

在這圖中，把三角板的邊 CD，AB 看做與直尺的邊相交的，則同位角相等，故 $AB\parallel CD$。

三角板之他邊放置直尺(看上圖)。

次固定直尺,使三角板沿其邊而移動,本來靠貼 CD 的邊,推到通過 E 的位置,即沿此邊引 AB 直線,便合所求(其理由如何?可各自證明之)。

81 由前條作圖題的結果,過一直線外的一定點,引此直線的平行線,一定可以引的。但這樣的直線,依我們的經驗,只限於一線而不能多於一。

公理 過一直線外的一定點,所引此直線的平行線,有一而限於一。

這叫做平行線的公理。

82. 預備問題 說出定理8的假設和終結來。再把牠倒一轉,以原終結作為假設,原假設作為終結,而造成一新定理,試以實驗或推理研究此定理的成立否。

定理 9. 二平行線與其截線所成的錯角相等。

二平行直線 AB, CD 與截線 TS 交於 E 及 F, 所成錯角為 x 及 y, 求證 $\angle x = \angle y$。

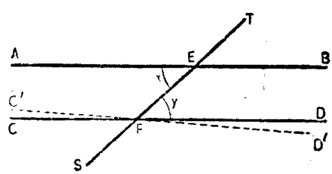


圖 65.

證明 設 $\angle x$ 不等於 $\angle y$, 則過 F 點可以另引一直線 $C'D'$, 使 $\angle EFD' = \angle x$, 此時 $C'D' \parallel AB$ (定理 8)。

但依平行線公理,過 F 點而平行於 AB 的直線,只限於一,因之 CD 不能平行於 AB, 此與假設相反。

故 $AB \parallel CD$ 時,必然 $\angle x = \angle y$。

【系 1】 二平行線與其截線所成同位角相等。

關於此種直線的只有一線或不止一線,依古昔的幾何學者所說的只有唯一的線。後人想加以證明,種種努力的結果,不能得滿意的證明。於是把這作為不要證明的明白的事實,當做一種公理。

【系 2】 二平行線與其截線所成在截線同側二內角之和為二直角。

【系 3】 於二平行線得引其公垂線。

83. 比較定理 8 及定理 9, 可知一方的假設和終結,恰好就是他方的終結和假設。這樣的二個定理,卽第一定理的假設是第二定理的終結,第一定理的終結是第二定理的假設時,這二個定理,各為他定理的逆定理(或單稱逆)。也可說二定理互為逆定理。

例如前述的定理 3 和定理 4, 也是互為逆定理的。

但一定理是眞的(卽合理的),這定理的逆,未必一定成立。就次例卽可明白。

1. 二角各等於直角時,此二角相等,這是不錯的,但說:
2. 二角若相等,此二角各等於直角。卻就大錯了。

又如說木造的船浮於水面。這是完全不錯。但牠的逆:浮於水面的船都是用木造,便不成立,因為軍艦、輪船等是用鐵造的。

所以,對於一定理的逆的成立,仍要證明。

84. 預備問題 引平行於 XY 的二直線 AB, CD, 試查 AB, CD 二直線平行否?又以歸謬法證明之。

定理 10. 平行於同一直線之諸直線,相互平行。

設二直線 AB, CD 均平行於一直線 XY。

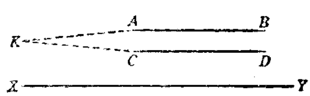


圖 66.

求證 $AB \parallel CD$.

證明 假定 AB, CD 二直線不平行,則必有相交的一點 K。這時變成達到了於 AB 外的一點 K, 可以引二直線平行於 XY 了,此與公理不合,卽 AB, CD 不得相交,故 $AB \parallel CD$

85. 預備問題 任意畫一角,次作二邊與此角二邊相平行之角,問這樣的

角有幾?並比較其大小。

定理 11. 一角之二邊各與他角之二邊相平行,此二角相等,或互爲補角。

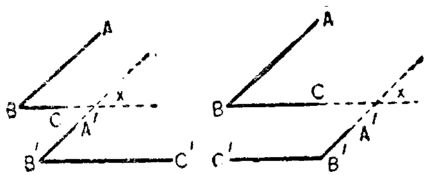


圖 67.

設於 $\angle ABC$, $\angle A'B'C'$ 中, $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$;

則 $\angle ABC = \angle A'B'C'$ (第一),

或 $\angle ABC + \angle A'B'C' = 2\angle R$ (第二)。

證明 (第一) 引長 BC, $B'A'$, 則兩線必相交,設其交角爲 $\angle x$。

依假設 $AB \parallel A'B'$, 故 $\angle ABC = \angle x$。

又依假設 $BC \parallel B'C'$, 故 $\angle x = \angle A'B'C'$。

$$\therefore \quad \angle ABC = \angle A'B'C'.$$

(第二) 設 BC, $B'A'$ 相交成 x 角,但 $B'C'$ 之方向相反;

則第一的證明 $\angle ABC = \angle x$, 然 $\angle A'B'C' + \angle x = 2\angle R$, 故 $\angle ABC + \angle A'B'C' = 2\angle R$。

在上記證明中,尚有如右圖之情形,如 (1) 之位置,則

$$\angle ABC = \angle A'B'C';$$

如 (2) 之位置,則

$$\angle ABC + \angle A'B'C' = 2\angle R.$$

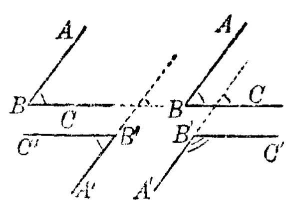


圖 68.

因之可以說,二角之二邊各相平行,其二邊各爲同方向或反方向者,此二角相等;若有一組的

邊為同方向而他一組為反方向者，則二角互為補角。

練習問題

1. 二平行線與一截線所成之錯角，有次記諸值時，求他角之大小：

(a) $73°12'$, (b) $45°13'$, (c) $112°43'$.

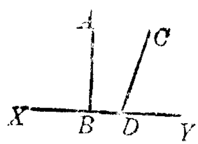


圖 69.

2. 垂直於 XY 的直線 AB，與斜交於 XY 之直線 CD，得平行否？

3. 二平行線與其截線所成二錯角，其二等分線平行，試證明之。

4. 垂直於相交二直線的二直線亦相交，試證明之。

5. 於二平行線各引一垂直線，證明此二垂直線亦平行。

第三節　三角形 (2)

86. 第二節裏已經學習了平行線的若干性質，今再回頭來研究三角形。

預備問題　在定理 7，我們已經知道三角形的外角比其任何內對角大。今先作如圖之三角形，於其圖中，先切取 A 角，使其頂點接合於 C 角而加於 C 角，再切取 B 角加上去。由此以比較 $\angle A$, $\angle B$ 之和與在 C 的外角的大小，並査 A, B, C 三角之和如何。次又於圖中畫與 BA 平行之 CE，而比較 $\angle ACE$ 和 $\angle A$；$\angle ECD$ 和 $\angle B$，從上的實驗，可以知道另外的什麼事項。三角形三角之和是多少？

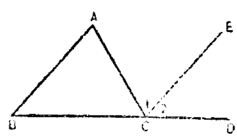


圖 70.

定理 12. 三角形三內角之和為二直角。

於 $\triangle ABC$ 中，設 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 是

練習問題：

1. 平行線的意義。 2. 何謂截線？ 3. 錯角與平行線的關係。 4 從直線外的一定點，引平行於此直線的直線的方法。 5. 平行線公理。 6 平行線與錯角的關係。 7. 平行於同一直線的二直線。 8. 二邊相平行的二角。

三內角，求證

$$\angle A+\angle B+\angle C=2\angle R.$$

證明 邊 BC 延長到 D，過 C 引平行於 BA 的直線 CE，此時$\angle A=\angle ACE$ (定理 9)，$\angle B=\angle DCE$ (定理 9 系 1)。

故 $$\angle A+\angle B=\angle ACD.$$

因之 $$\angle A+\angle B+\angle C=\angle ACD+\angle ACB=2\angle R.$$

故 $$\angle A+\angle B+\angle C=2\angle R.$$

【系 1】 三角形的外角，等於其二內對角的和。

【系 2】 直角三角形二銳角的和，等於一直角。

【系 3】 等角三角形的各內角，等於 60°。

【系 4】 一三角形的二角與他三角形的二角，兩兩相等時，第三角亦相等。

【系 5】 從直線外之一點，引直線的垂直線，只限於一。

練習問題

1. $\triangle ABC$ 中，$\angle A=47°25'$，$\angle B=84°13'$，求 $\angle C$。

2. O 爲 $\triangle ABC$ 內的一點，$\angle BAC$ 與 $\angle BOC$ 二角，何角較大？

3. 二等邊三角形頂角的外角，其二等分線，平行於底邊，試證明之。

4. 二等邊三角形的頂角，爲其一底角的二倍，求各角的大小。

5. 等邊三角形各內角的大小如何？

6. 三角形的一角，是其他二角的函數。試說明此語的意義。

87. 作爲定理 12 的應用，就多角形的角而研究之。

預備問題 畫各內角均爲劣角的四邊形、五邊形等。畫一或一以上的角爲優角的四邊形、五邊形等。

定義　各內角均爲劣角的多角形，叫凸多角形；有一或一以上的角爲優角的，叫凹多角形。

如圖，(I) 即凸多角形，(II) 即凹多角形。

通常單叫多角形時，常指凸多角形而言。須注意。

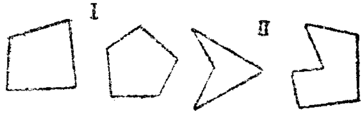


圖 71.

88.　預備問題　(a)　於四邊形內取一點，聯結此點與各頂點，四邊形分成若干三角形？對於五邊形、六邊形、n 邊形，行施同樣的練習，則各分得若干三角形？　(b)　照上面的做法，把邊數是 n 的多角形所分割成的三角形的內角的總和是多少？又此總和與多角形內角的和有何關係？

定理 13.　多角形之邊數爲 n 時，其內角之和爲 $(2n-4)$ 直角。

證明　取邊數爲 n 之多角形 $ABCDE$……內之一點 K，此點與各頂點聯結時，得 $\triangle AKB$, $\triangle BKC$, $\triangle CKD$,……等 n 個三角形。而此等一切三角形的內角之和，爲 $2n$ 直角。而此和即爲多角形內之和再加集於 K 點周圍諸角之和，即四直角。故多角形內角之和是 $(2n-4)$ 直角。

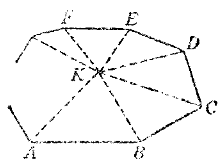


圖 72.

【系】　四邊形內角之和等於四直角。

此亦可由四邊形 $ABCD$ 之一對角線，分此形爲二三角形而證明之。

定理 14.　順次延長多角形各邊所成各外角之和，爲四直角。

設 n 邊的多角形 $ABCDE$……順次延長各邊所成之外角爲 7, 8, 9, 10, ……求證此等外角之和即

$$\angle 7+\angle 8+\angle 9+\cdots\cdots=4\angle R.$$

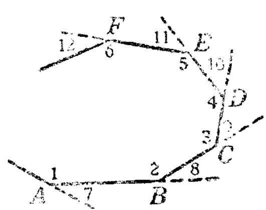


圖 73.

證明 設與 7, 8, 9,……各外角相隣之內角為 $A, B, C\cdots$, 則在各頂點的內角與外角的和為 2 直角,故其內角與外角的總和為 $2n$ 直角。但多角形內角的和是 $(2n-4)$ 直角,故其外角之和等於 4 直角。

【系】 多角形之內角不能有四以上之銳角*。

練習問題

1. 五角形各內角均相等,求各角之大小。

2. 一多角形各外角,均為 30° 時,求此形邊數。

89. 預備問題 於 $\triangle ABC$, $\triangle FGH$ 中, $\angle A=\angle F$, $\angle B=\angle G$, $BC=GH$, 試由此再導出定理 2 的假設。

定理 15. 一三角形之二角與他三角形之二角,各各相等,且有一組相等角之對邊亦相等時,此二三角形全等。

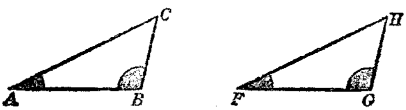


圖 74.

假設 $\triangle ABC$, $\triangle FGH$ 中, $\angle A=\angle F$, $\angle B=\angle G$, $BC=GH$ (或 $AC=FH$).

求證 $\triangle ABC\equiv\triangle FGH$.

證明 於 $\triangle ABC$, $\triangle FGH$ 中,

$\angle A=\angle F,\ \angle B=\angle G.$ (假設)

$\therefore\ \angle C=\angle H.$ (定理 12 系 4)

又 $BC=GH,\ \angle B=\angle G.$ (假設)

故 $\triangle ABC\equiv\triangle FGH.$ (定理 2)

*多角形內角若有了四以上的銳角,則依上定理之外角和為四直角不成立,故不合理。因邊數為 n 的內角與外角的和為 $2n$ 角,若內角有四角小於直角,則外角必有四角大於直角矣。

【系】 二直角三角形有斜邊與一銳角相等，則二形全等。

練習問題

1. AB 及 XY 為圓 O 之直徑，XL, YM 為從 X, Y 所引 AB 之垂直線，試證 $XL=YM$, 且述此為一般之定理。

2. 直角三角形的一銳角及其對邊，與他直角三角形的一銳角及對邊相等，此二直角三角形全等。

90. 預備問題 作斜邊長 1 寸，夾直角之邊長 6 分的二直角三角形，測各三角形中邊長 6 分的對角而比較之，二三角形為全等否?

定理 16. 直角三角形之斜邊及他一邊與他直角三角形之斜邊及他一邊，各各相等時，二直角三角形全等。

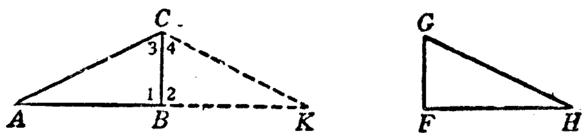


圖 75.

於 $\triangle ABC$ $\triangle FGH$ 中，$\angle B$ 及 $\angle F$ 為直角，$BC=FG$, 而斜邊 $AC=$ 斜邊 HG。

求證 $\triangle ABC \equiv \triangle FGH.$

證明 把 $\triangle FGH$ 接合到 $\triangle ABC$ 上去，使 GF 與 CB 相合，設此時 H 點所落下之點為 K。$\angle ABC$ 及 $\angle GFH$ 均為直角，故 $\angle ABK=2\angle R$ 即 ABK 為一直線。

因之在 $\triangle AKC$ 中，$AC=KC$, 故 $\angle A=\angle K$ (定理 3)。

但 $\angle K=\angle H$, 故 $\angle A=\angle H$。

因之於 $\triangle ABC$, $\triangle FGH$ 中，

$$\angle A=\angle H,\ \angle B=\angle F=\angle R.$$

又 $AC=HG.$ (假設)

故 $\triangle ABC \equiv \triangle FGH.$ (定理 15)

練習問題

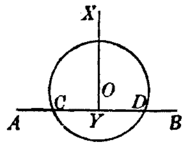


圖 76.

1. 於直線 AB 上一點 Y, 引一垂直線 XY, 以 XY 上一點 O 爲中心,畫一圓,與 AB 交於 C, D 二點,此時 $CY=DY$, 試證明之,并將此問題寫作一般之定理形式。

2. 於三角形底邊的中點,引到餘二邊之垂直線,若其長相等,則此三角形爲二等邊三角形,試證明之。

91. 把以前已經證明過的三角形全等定理,綜合起來,可知二三角形如有次記各項之要素相等,則爲全等形。

i. 二邊及其夾角,

ii. 二角及其頂點間之邊,

iii. 二角及其中一角之對邊,

iv. 三邊,

v. 於二直角三角形,斜邊與他一邊各各相等時,亦爲全等。

故有 (i), (ii), (iii), (iv) 中之一組的要素爲已知時,則三角形是已決定了*。如在直角三角形,則此外的 (v) 也可以決定之。

練習問題

1. 就上記 (i), (ii), (iii), (iv) 各項條件觀察,可知都是在三角形的六要素中取其相對應之三要素相等,而得全等之三角形。問此外尚有可以取出別的三要素的方法否?若有,則於該項條件下,三角形爲全等否?試以例說明之。

2. 說明何以有特別提出 (v) 的條件的必要?

92. 預備問題 任意畫一不等邊三角形,測其大邊的對角和小邊的對角而比較其大小。述其結果作一定理。

*所謂三角形已是決定,卽在這樣條件之下的三角形,只有一種,無論畫多少個出來,總是全等的。一般稱一圖形的決定卽是此意。

定理 17. 三角形二邊不相等時，大邊所對角大於小邊所對角。

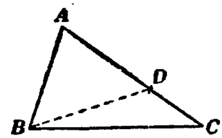


圖 77.

於 $\triangle ABC$ 中，設 $AC>AB$。

求證　$\angle ABC>\angle ACB$.

證明　因 $AC>AB$，故於 AC 上取等於 AB 之 AD，聯 BD，則 $\triangle ABD$ 爲二等邊三角形，故 $\angle ABD=\angle ADB$（定理 3）。

而 $\angle ADB$ 是 $\triangle DCB$ 的外角，

$$\therefore\quad \angle ADB>\angle ACB. \qquad (\text{定理 } 7)$$

又 $\angle ABC>\angle ABD$（因 $\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC$）。

$$\therefore\quad \angle ABC>\angle ACB.$$

練習問題

1. 作三邊爲 6 分、8 分、10 分的三角形，測其最大的角。
2. 三角形最大邊二端的角，都是銳角，試證明之。

93. 預備問題　作定理 17 的逆，於任何之三角形驗其眞僞。

定理 18. 三角形二角不等時，大角所對邊大於小角所對邊。

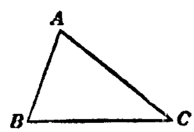


圖 78.

於 $\triangle ABC$ 中，$\angle B>\angle C$。

求證　$AC>AB$。

證明　比較同類的量，只有大於，小於或相等的三種不同結果，除此以外沒有別的。

故設不是 $AC>AB$，必是 $AB=AC$ 或 $AB>AC$。

但設 $AB=AC$，則 $\angle B=\angle C$（定理 3），此與假設不合，故不能 $AB=AC$。

又設 $AB>AC$，則 $\angle C>\angle B$（定理 17），此又與假設不合，故不能 $AB>AC$。

因之於 $\angle B > \angle C$ 必然是 $AC > AB$。

練習問題

1. 證明斜邊爲直角三角形的最大邊。

2. 方盒的一面的對角線，大於其長或闊，但小於方盒本身的對角線。

(方盒本身的對角線,是聯不在盒的同一面上二頂點的線。)

94. 預備問題* 作三邊之和爲 2 寸的三角形，這樣的三角形可作若干個?若規定其一邊長爲 8 分，則可作幾個?又設一邊之長，爲 1 寸或比 1 寸長，則又如何?

定理 19. 三角形二邊之和大於餘一邊。

設 ABC 爲任意之三角形，

則 $\begin{cases} AB+BC>CA, \\ BC+CA>AB, \\ CA+AB>BC. \end{cases}$

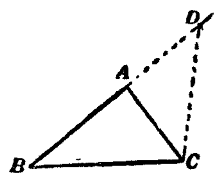


圖 79.

證明 於 BA 的延長上取與 AC 等長的 AD, 聯 DC。

其時 $\triangle ADC$ 爲二等邊三角形,故 $\angle ADC = \angle ACD$ (定理 3)。

又 $\angle BCD > \angle ACD$, 故 $\angle BCD > \angle BDC$。

故於 $\triangle BDC$ 中，$BD > DC$ (定理 18)。

但 $BD = AB + AC$, 故 $CA + AB > BC$。

同樣,可以證明 $BC+CA>AB$, $AB+BC>CA$。

【系】 三角形二邊之差小於他一邊。

*這裏我們知道三角形的邊的關係，即其中有一定的限制，若非二者之和大於一，又二者之差小於他一者，不能是三角形的三邊。

關於三角形性質的定理，已經學習者，列記於次:

1. 等邊所對之角相等。 2. 等角所對之邊相等。

3. 大邊所對之角大於小邊所對。 4. 大角所對之邊大於小角所對。

5. 三角形內角之和等於二直角。 6. 二邊和大於餘一邊，差小於餘一邊。

練習問題

1. 以次記各線段，可以作成三角形否？(a) 3 分，2 分，4 分；(b) 5 分，6 分，11 分；(c) 3^{cm}, 4^{cm}, 8^{cm}。

2. 設 O 是 $\triangle ABC$ 內的一點，證明 $AB+AC>OB+OC$。

3. 四邊形的周大於其二對角線之和，而小於其和之二倍，試證明之。

95. 於 $\triangle ABC$ 中，D 爲 BC 的中點時，AD 叫此三角形的中線。

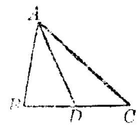


圖 80.

定義　三角形一角頂點與其對邊中點的聯結線名爲此角(或此邊)的三角形的中線。

練習問題

1. 一三角形有幾中線？

2. 三角形二邊之和，大於由此二邊夾角頂點所引中線之二倍，試證明之。

3. 三角形的周與其三中線之和，何者較大？

96. 應用定理 18，可以證明次定理：

定理 20. 由一直線外之一點所引至於此直線之諸直線中，垂線最短。

設 P 爲直線 AB 外之一點，PC 爲由 P 至 AB 之垂線，PD, PE 等爲由 P 至 AB 之非垂直諸直線。此等直線之內，垂線 PC 爲最短。

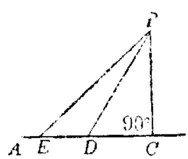


圖 81.

證明　於 $\triangle PEC$ 中，$\angle PCE=\angle R$，故 $\angle E<\angle C$。故 $PC<PE$。

同樣，$PC<PD$ 等(定理 18)。

97. 這樣的 PC 的長，叫做從 P 點到直線 AB 的距離。

定義　一點與一直線的距離，即從此點所引到該直線的

垂線之長。

由上記定義，參照定理 20 的結果，可知一點和一直線的距離，是從此點所引到該直線最短之線段。

練習問題

1. 二等邊三角形底邊之中點，與他二邊之距離相等，試證明之。

2. $\angle ABC$ 之二等分線，爲 BX, P 爲 BX 上任意一點，證明 P 到 AB, BC 爲等距離。並記此爲一般的定理。

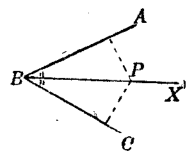


圖 82.

98. 定義　與一直線相交，而不爲其垂線，叫做斜線。其交點叫斜線的足。

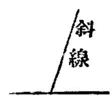


圖 83.

99. 預備問題　由一直線 AB 外的一點 P，引 AB 之垂直線，次由 P 引和垂線成 30° 的角之斜線，共可引幾線？比較此等斜線的長短

再引與垂線成 45° 角之斜線，測其長而和前次所引之斜線比較之。

定理 **21**　從一直線外一點所引該直線之斜線中：

(一)　與垂線成角相等之二斜線相等。

(二)　與垂線成角大之斜線大於與垂線成角小之斜線。

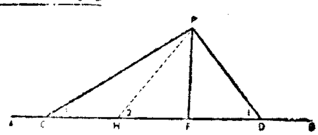


圖 84.

設 PF 爲 P 點到 AB 的垂線，PC, PD, PH 爲斜線。

而　$\angle FPD = \angle FPH$, $\angle FPD < \angle CPF$.

求證　(1)　$PD = PH$,　(2)　$PD < PC$.

證明　(1)　於 $\triangle PFD$, $\triangle PFH$ 中，

$\angle PFD = \angle PFH = \angle R$, $\angle DPF = \angle HPF$（假設）。

又 PF 是兩形的公邊，$\therefore$　$\triangle PFD \equiv \triangle PFH$（定理 2）。

因之　$PD = PH$.

(2)　$\angle PHF > \angle PCF$，故 $\angle PHC > 90°$，故 $\triangle PHC$ 中，$\angle PHC$ 是鈍角。

故 $\angle PHC$ 之對邊 PC 是 $\triangle PHC$ 中之最大邊，卽 $PC > PH$。

但 $PD = PH$，故 $PC > PD$。

練習問題

1.　從一直線外之一點，引此直線的 (a) 相等二斜線，與垂線所成角相等，(b) 斜線大者與垂線所成角大於斜線小者與垂線所成角；試證明之。

2.　於同一情形下 (a) 自垂足到二相等斜線之足，其距離相等。(b) 到較大斜線之足之距離大於較小者之距離。

100.　預備問題　作二邊爲 6 分、8 分及其夾角爲 $80°$ 之三角形。再作二邊仍爲 6 分及 8 分而夾角爲 $40°$ 之三角形。比較此二三角形的第三邊，孰大？

定理 22.　一三角形之二邊與他三角形之二邊各各相等，而其夾角不等時，夾角大者之第三邊大於其小者之第三邊。

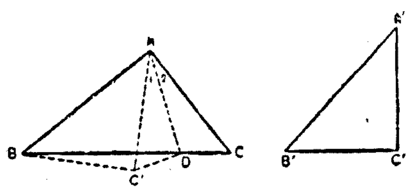


圖　85.

設於 $\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$ 中，

$$AB = A'B',\ AC = A'C',\ \angle BAC > \angle B'A'C';$$

則　　$$BC > B'C'.$$

證明　取 $\triangle A'B'C'$ 置於 $\triangle ABC$ 上，使 $B'A'$ 與 BA 相重合。

其時因 $\angle BAC > \angle B'A'C'$，故 $A'C'$ 落於 $\angle BAC$ 之內。設 $A'C'$ 所落下之位置卽爲 AC'，引 $\angle C'AC$ 之二等分線與

BC 交於 D。聯 $C'D$, 其時於 $\triangle AC'D$ $\triangle ACD$ 中，$AC'=AC$ (假設), AD 爲二形之公邊，$\angle C'AD=\angle CAD$ (作圖)。

$$\therefore \quad \triangle AC'D \equiv \triangle ACD. \qquad \text{(定理 1)}$$

因之 $\qquad C'D=CD.$

但 $C'D+DB>C'B$ (定理 20), 故 $CD+DB>C'B$.

故 $BC>BC'$ 卽 $BC>B'C'$.

練習問題

1. 如上記 $\triangle A'B'C'$ 與 $\triangle ABC$ 疊合時，C' 點或有適落於 BC 上者，試繪其圖，并査上記之證明仍可適用否？

2. 於右圖 D 爲 BC 之中點, $\angle ADB=120°$, AB, AC 何者爲大？

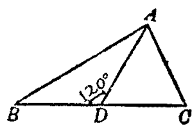


圖 86.

101. 預備問題 就圖說明定理 22 之假設與終結。次以其假設中之一, $\angle BAC>\angle B'A'C'$ 與終結 $BC>B'C'$ 交換而作成定理。就圖查驗此定理之眞僞。

定理 23. 一三角形之二邊與他三角形之二邊各各相等，而其第三邊不等時，此二邊之夾角中，第三邊大者大於其小者之夾角。

於 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 中，

$$AB=A'B',\ AC=A'C',\ BC>B'C' \text{ 時；}$$

則 $\qquad \angle A>\angle A'.$

證明 若非 $\angle A>\angle A'$ 則必爲 $\angle A=\angle A'$ 或 $\angle A<\angle A'$ 二者中之一。

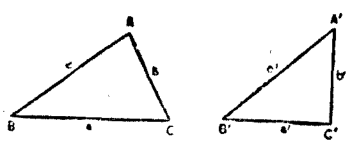


圖 87.

但設 $\angle A=\angle A'$, 則 $BC=B'C'$ (定理 4), 此與假設不合。

又設 $\angle A<\angle A'$, 則 $BC<B'C'$ (定理 22), 此又與假設不合。

故 $\angle A>\angle A'$.

〔注意〕 如定理 22 之假設,是由若干部分所成時,其假設中之一與終結交換而得的定理,也叫逆定理。即定理 23 是定理 22 的逆,反之定理 22 也是定理 23 的逆。

練習問題

1. 比較定理 23 與定理 17 的證明法,此種證明法何名?

2. 於 $\triangle ABC$ 設 BC 之中點爲 D, 於 (a) $AB>AC$ 時, $\angle ADB$ 爲鈍角, (b) $AB=AC$ 時, $\angle ADB$ 爲直角, (c) $AB<AC$ 時, $\angle ADB$ 爲銳角;試證明之。

雜問題

1. 列舉三角形的全等的定理。

2. 畫等邊三角形,引其三中線, 三角的二等分線及三個高度,此等直線間有何關係?其證明如何?

3. 二等邊三角形之底邊及頂角與他二等邊三角形之底邊及頂角相等時,此二二等邊三角形爲全等。試證明之。

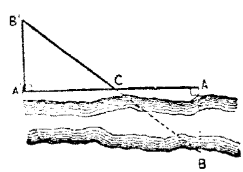


圖 88.

4. 一河川之闊 AB, 可如次法求得:

定與 AB 之方向成 90° 角之直線 AA', 取 AA' 之中點 C, 定與 AA' 成 90° 角之直線 $A'B'$, 於

以上所說述的三角形的性質,實在可以叫做幾何學的基礎,極爲重要。此後將研究平行四邊形及圓等事項, 時常要應用到三角形的性質, 學者須要熟讀以前所說述的,並且還得理解其內容。倘不熟記此等公理及定理、定義,對於以後的研究是很有不便之處的。

$A'B'$ 上求一點 B'，通過聯 BC 之直線，此時 $A'B'$ 與河川之闊 AB 相等。試證其合理。

5. 於 $\triangle ABC$ 引其在 B, C 的外角的二等分線，比較此直線所成角與在 A 的外角之半。

6. 由二等邊三角形兩端所引之二中線相等。

7. 任意畫一角，次作垂直於此角二邊之二直線。有幾種不同的圖形可作？於各圖中，此角與二垂直線所成角之關係如何？

第四節 平行四邊形

102. 預備問題 問多角形，四邊形，多角形的對角線等的定義。

如右圖，$AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$ 時，四邊形 $ABCD$，叫平行四邊形。所以平行四邊形即是二組的相對邊互相平行的四邊形。

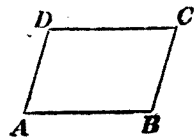


圖 89.

定義 二組相對邊平行的四邊形，叫平行四邊形。

表平行四邊形，可以用記號 ▱，如平行四邊形 $ABCD$，可以記作 ▱$ABCD$。

這一節所講述的，是關於平行四邊形的諸性質及其應用。

以前當討論一定理時，每先設預備問題，從實驗入手，以確認此定理，再用論理的方法，證明此定理的一般的眞實性。從這裏起，想把這放在定理前的預備問題減少。不過學習的人，仍須按照定理的假設，作正確的圖形，再就圖形而檢驗之，果有如終結所說之性質否。

四邊形中，在幾何學上，平行四邊形最爲重要。其中又有矩形、菱形、正方形之分。

103. 二平行線與其一截線所成同側二內角之和，等於二直角，故立卽可以推得次定理。

定理 24. 平行四邊形相隣二角之和等於二直角。

104. 次記定理，爲平行四邊形諸性質中之最重要者，學者須留意。

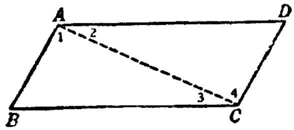


圖 90.

定理 25. 平行四邊形之對角線，分此形爲全等之二三角形。

設 $ABCD$ 是一平行四邊形，AC 是 $\square ABCD$ 的對角線。

求證 $\triangle ABC \equiv \triangle CDA.$

證明 於 $\triangle ABC$, $\triangle CDA$ 中，

$\angle BAC = \angle ACD$ （定理 9 $\because$ $AD \parallel BC$, 錯角），

$\angle ACB = \angle CAD$ （錯角），又 AC 是公邊。

故 $\triangle ABC \equiv \triangle CDA.$ （定理 2）

又引對角線 BD 時，同樣可以證明 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$。

【系 1】 平行四邊形相對之邊相等。

【系 2】 平行四邊形之相對角相等。

從系 1, 得：

【系 3】 平行四邊形相隣接之邊相等時，其各邊均等。

定義 平行四邊形各邊均等者，叫做菱形。

從定理 23 和上記系 2, 得：

【系 4】 知平行四邊形一角時，其餘各角之大小卽可求得。

例如 於 $\square ABCD$, $\angle A = 60°$, 則

$$\angle C = \angle A = 60°, \quad \angle B = \angle D = 120°.$$

因之，平行四邊形之一角已定時，其餘各角亦爲已定。

從系 4, 得：

【系 5】 平行四邊形一角爲直角時，其餘各角均爲直角。

定義　平行四邊形各角均爲直角者，叫做矩形或長方形。

定義　矩形之各邊均相等者，叫做正方形。

圖 91.

所以正方形卽是矩形而兼菱形的，也卽是各角爲直角的菱形。

105. AB, CD 爲平行直線時，引此二直線之公垂線 XY, $X'Y'$ 等，其在平行線間的線段爲 LM, $L'M'$ 等。此時，由定理 25 系 1，知 LM, $L'M'$ 等均相等，LM, $L'M'$ 等的長，叫平行線 AB, CD 間的距離。卽：

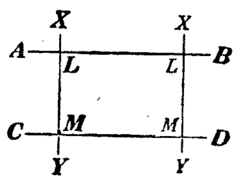


圖 92.

定義　二平行線間所有公垂線的長，叫此二平行線間的距離。

練習問題

1. 引直線平行於一已知直線 AB，且使二線距離爲 8 分。

2. 證明矩形之二對角線相等。

3. 平行四邊形二對角線相等時，則此形爲矩形，試證明之。

4. 三等分 $\square ABCD$ 對角線 BD 之點爲 X, Y；證 $AX = CY$。

5. 平行四邊形於其對角線爲對稱否？

106. 平行四邊形又有次記之性質。

定理 **26.** 平行四邊形之對角線，互爲二等分。

設 $\square ABCD$ 之對角線 AC, BD 相交於 M。

平行四邊形相對的邊卽叫對邊，相對的角卽叫對角。

求證 $AM=CM$, $BM=DM$.

證明 於 $\triangle AMB$, $\triangle CMD$ 中,

$\angle ABM=\angle CDM$ (定理 9),

$\angle BAM=\angle DCM$ (定理 9),

又 $AB=CD$ (定理 25 系 1)。

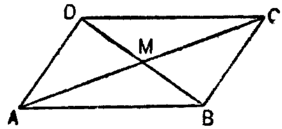


圖 93.

故 $\triangle AMB\equiv\triangle CMD$. (定理 2)

故 $AM=CM$, $BM=DM$.

練習問題

1. 證明菱形的對角線相交成直角。

2. 平行四邊形對角線相交成直角時,則此形爲菱形。

107. 四邊形在何種情形之下,則可斷定其爲平行四邊形,此事項極爲重要,關於此事項,有次記三個重要定理。

定理 27. 四邊形二組相對之邊相等者,爲平行四邊形。

設四邊形 $ABCD$ 中,

$AB=DC$, $BC=AD$。

求證 $BBCD$ 爲平行四邊形。

證明 聯結 AC, 於 $\triangle ABC$, $\triangle CDA$ 中, $AB=DC$, $BC=AD$,

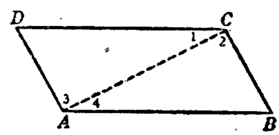


圖 94.

又 AC 爲共通之邊。

故 $\triangle ABC\equiv\triangle CDA$.

故 $\angle BAC=\angle DCA$, $\angle ACB=\angle CAD$.

故 $AB\parallel DC$, $BC\parallel AD$. (定理 8)

因之 $ABCD$ 是平行四邊形。

【系】 四邊形對角線互爲二等分者,此四邊形爲平行四邊形。

定理 28. 四邊形一雙相對邊相等且平行者,爲平行四邊形。

設四邊形 $ABCD$ 中，

$$AB=DC,\ AB\parallel DC.$$

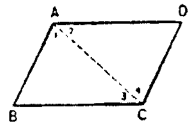


圖 95.

求證　$ABCD$ 是平行四邊形。

證明　聯結 AC，於 $\triangle ABC$, $\triangle CDA$ 中，

$AB=DC$, AC 爲公邊，又 $AB\parallel DC$.

$\therefore\quad \angle BAC=\angle ACD.$　　　　(定理 9)

$\therefore\quad \triangle ABC\equiv\triangle CDA.$

故　$\angle ACB=\angle CAD$, 故 $AD\parallel BC$, 又由假設 $AB\parallel DC$, 故 $ABCD$ 爲平行四邊形。

定理 29.　四邊形二組相對之角相等者，爲平行四邊形。

設四邊形 $ABCD$ 中，

$$\angle A=\angle C,\ \angle B=\angle D.$$

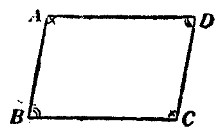


圖 96.

求證　$ABCD$ 爲平行四邊形。

證明　$\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$. (假設)

故　$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D.$

但　$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4\angle R.$　　　(定理 13 系)

故　$\angle A+\angle B=2\angle R=\angle C+\angle D.$

故　$AD\parallel BC.$　　　(定理 8 系 2)

同樣，可證 $AB\parallel DC$ 卽 $ABCD$ 爲平行四邊形。

108.　綜合前述各項，可得四邊形成爲平行四邊形之條件如次記。

(i)　二組相對邊相等。

(ii)　一組相對邊相等且平行。

(iii)　二組相對角相等。

(iv)　對角線互爲二等分。

練習問題

1.　平行四邊形之對邊 BC、AD 的中點爲 F 和 H, 聯

AF, HC, 求證 $AF \parallel HC$。

2. 作二隣邊不相等之任意平行四邊形，引其四內角之二等分線，證明此四直線圍成一矩形。

3. 已知二全等之三角形，試述放置此二形而合成爲一平行四邊形之方法。

109. 定理 30. 一平行四邊形之二隣邊及其夾角與他平行四邊形之二隣邊及其夾角，各各相等時，二平行四邊形全等。

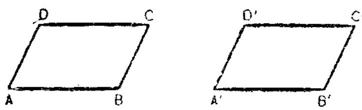


圖 97.

於 $\square ABCD$, $\square A'B'C'D'$ 中，

$$AB = A'B',\ AD = A'D',\ \angle BAC = \angle B'A'C'.$$

求證 $\square ABCD \equiv \square A'B'C'D'$.

證明 以 $\square A'B'C'D'$ 重合於 $\square ABCD$ 之上，使 $A'B'$ 與 AB 相疊合。其時因 $\angle BAC = \angle B'A'C'$ (假設)，故 $A'D'$ 必沿 AD 而落下，且 $A'D' = AD$, 故 C' 點必落於 C 點上。依平行線公理，其時 $C'D'$ 沿 CD 而落下。

又 A' 點與 A 點疊合，且 $A'B'$ 與 AB 相疊合，故依平行線公理，$A'D'$ 沿 AD 而落下。因之 D' 點落於 D 點上。

故 $\square A'B'C'D'$ 與 $\square ABCD$ 全相合。卽

$$\square ABCD \equiv A'B'C'D'.$$

【系 1】 一矩形之二隣邊與他矩形之二隣邊相等，此二矩形全等。

【系 2】 一正方形之一邊與他正方形之一邊相等，此二正方形全等。

因此可以說矩形的二隣邊爲已知時，此矩形爲已定。正方形之一邊已知時，正方形爲已定。平行四邊形已知其何者，亦可說是已定了。

練習問題

1. 作二隣邊爲 8 分及 1 寸，夾角爲 $60°$ 的平行四邊形。

2. 於二平行四邊形中次記各要素各各相等，此等平行四邊形爲全等否？

(*a*) 四邊，(*b*) 二隣邊及一對角線。

110. 定理 31. 聯三角形二邊中點之線段，平行於第三邊且等於其長之半。

於 $\triangle ABC$ 中，二邊 AB, AC 之中點爲 D, E。

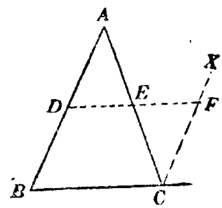


圖 98.

求證 $DE \parallel BC$，又 $DE=\frac{1}{2}BC$。

證明 引 CX 平行於 BA，與 DE 之延長交於 F，其時於 $\triangle AED, \triangle CEF$ 中，$\angle AED=\angle CEF$ (對頂角)，$\angle DAE=\angle FCE$ (定理 9)。

又 $AE=CE$ (假設)，故 $\triangle AED\equiv\triangle CEF$ (定理 2)。

故 $CF=AD$，從而 $CF=BD$。

因之在四邊形 $DBCF$ 中，$BD=CF$，又 $CF\parallel BD$。

故 $DBCF$ 爲▱，故 $DE\parallel BC$。(定理的第一部分證明了。)

又因 $\triangle AED\equiv\triangle CEF$，故 $DE=EF$，故 $DF=2DE$。

即 $$DE=\frac{1}{2}DF.$$

因四邊形 $DBCF$ 爲平行四邊形，故 $BC=DF$。

故 $DE=\frac{1}{2}BC$。(定理的第二部分也證明了。)

【系】 過三角形一邊之中點，引平行於他邊之直線，通過第三邊之中點。

這可以用歸謬法證明之，也可用本定理同樣的作圖而證明。

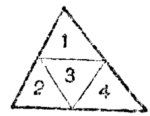


圖 99.

練習問題

1. 證明聯結三角形三邊中點的直線，分該三角形為四個全等的三角形。

2. 順次聯結四邊形各邊之中點，成一平行四邊形。

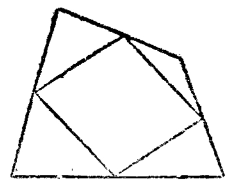


圖 100.

111. 定理 32. 三以上平行直線從一截線截取之線段相等時，則此等平行線從他截線所截取之線段亦相等。

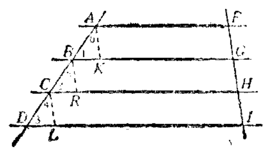


圖 101.

已知 平行線 AF, BG, CH, DI 從其截線 AD 上所截取之各線段 $AB=BC=CD$; 其從另一直線 FI 上所截取的各線段為 FG, GH, HI。

求證 $FG=GH=HI.$

證明 過 A, B, C 各點引平行於 FI 之直線交 BG, CH, DI 於 K, R, L 各點，則 AK, BR, CL 均互相平行(定理 10)。

在各三角形 ABK, BCR, CDL 中，

$$\angle 1=\angle 2=\angle 3,\ \angle 4=\angle 5=\angle 6. \qquad \text{(同位角)}$$

而 $AB=BC=CD.$ (假設)

故 $\triangle ABK\equiv\triangle BCR\equiv\triangle CDL.$

$\therefore\ AK=BR=CL.$

但 $AK=FG,\ BR=GH,\ CL=HI.$ (定理 25 系 1)

故 $FG=GH=HI.$

112. 如右圖之四邊形，只有一組的相對邊平行，而另一組則不平行者，叫做梯形。梯形的不相平行之兩邊相等者，叫做等腰梯形。

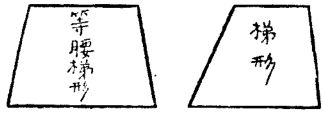


圖 102.

練習問題

1. 聯結梯形不相平行二邊中點之線段，其長等於其平行二邊之和之半。

2. 三平行線從一截線所截取之二線段，其一爲其他之二倍時，此等平行直線從其他截線所截取之二線段，其一亦爲其他之二倍，試證明之。

3. 於畫有距離相等之平行直線的格子上，欲二等分，三等分，四等分，五、六、七、八等分已知線段之方法如何？

113. 預備問題 (a) 任意引三直線，交點有幾點？ (b) 任意作一三角形，引其三中線，此等中線的交點有幾點？

定理 33. 三角形之三中線過同一之點，又此點與各頂點之距離，等於該頂點中線長的三分之二。

證明 於 $\triangle ABC$ 引二中線 BE, CF。此二線必相交，設此交點爲 O。聯 AO，延長之與 BC 相交於 D。

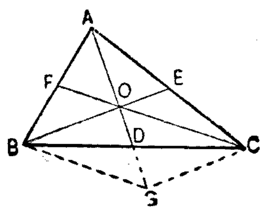


圖 103.

次過 B 平行 FC 引 BG，與 AO 之延長相交於 G。聯 CG。

此時 $\triangle ABG$ 中，$AF=FB$（假設），$FO \parallel BG$（作圖），故 $AO=OG$（定理 31 系）。

又 $AE=EC$（假設）。故於 $\triangle AGC$ 中，$OE \parallel GC$（定理 31）。

即 $$BO \parallel GC.$$

因之四邊形 $BGCO$ 爲平行四邊形。

故對角線的交點 D，是 BC 之中點（定理 27）。

即 AD 是中線。

即三中線通過同一的 O 點。

又 $AO=OG=2OD$, 故 $AO=\frac{2}{3}AD.$

同樣 $BO=GC=2OE$, 故 $BO=\frac{2}{3}BE.$

$CO=GB=2OF$, 故 $CO=\frac{2}{3}CF.$

〔注意〕 證明定理的步驟，如 § 70 所述，先就圖形說明定理的意義、次移及證明，是爲通例。但也不必拘泥於此，如不直接證明定理，而證明可以替代定理之他事項，也是可以的。有些定理的直接證明，極爲困難，常常須要想出可以替代的他事項，爲間接的證明。如上定理，即其一例。即上而不證三中線的交於一點，而證二中線的交點與他頂點之聯結線即爲第三中線，即可推知三中線交於一點了。

定義 三角形三中線的交點，叫三角形的重心。

114. 由以上所學習過的，可知一切定理都建立於已知的公理或其他定理之上，要證明一定理，是可以順次由終結的結果，逆推上去而達到已知的定理或公理，以證明其不謬的。今示其例於次。

例 1. 定理 平行四邊形相對角之二等分線相互平行。

設 $ABCD$ 爲平行四邊形，DE, BF 爲其相對角 D 及 B 之二等分線。

求證 $DE \parallel BF.$

那麼，要證明 $DE \parallel BF$, 能主張同位角 $\angle AED=\angle FBA$ 即可。

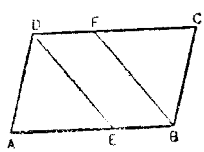


圖 104.

幾何學的目的有二，一即是證明定理，又一是解決作圖題。其中證明定理和由此以發見新的定理，更加重要。學習幾何，而不知如何去證明問題，便等於不學。這裏詳細說明了證明問題的方法和，推理的路徑，希望學習者不要輕輕看過。

然從假設得 $CD \parallel BA$, $\therefore \angle AED=\angle FDE$.

故要說 $\angle AED=\angle FBA$ 能證明 $\angle FDE=\angle FBA$ 即可。

但由假設 $\angle FDE=\frac{1}{2}\angle D$, 又 $\angle FBA=\frac{1}{2}\angle B$,

故欲證二角之相等,能說 $\angle D=\angle B$ 即可。但 $ABCD$ 爲▱,故 $\angle D=\angle B$ 爲已知的定理。

因此上記的定理,是可以證明了。

即照這例,在一切定理的證明時,次第以其他簡單的定理替代原定理的終結,努力於達到已知的定理或公理即可。但一旦其證明方法已求得之後,因發表須要簡潔之故,仍循其原來的路徑而逆行之爲常例。即上面所得證明,記述如次。

證明 $ABCD$ 是▱,故 $\angle D=\angle B$ (定理 25 系 2)。

$\angle FDE=\frac{1}{2}\angle D$, $\angle FBA=\frac{1}{2}\angle B$. 故 $\angle FDE=\angle FBA$.

但 $\angle FDE=\angle AED$ (錯角,定理 9),故 $\angle AED=\angle FBA$.

故 $DE \parallel BF$. (定理 8 系 1)

例 2. **定理** 三角形二中線相等時,此三角形爲二等邊三角形。

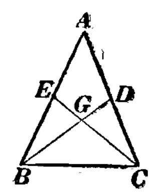


圖 105.

設三角形 ABC 之二中線 $BD=CE$。

求證 $AB=AC$.

由假設 D, E 是 AC, AB 的中點,故要證 $AB=AC$,能證明 $BE=CD$ 即可。要說 $BE=CD$,能證明 $\triangle BGE\equiv\triangle CGD$ 即可。

因 $\angle BGE=\angle CGD$ (對頂角),故要證 $\triangle BGE\equiv\triangle CGD$,再能說出 $EG=DG$, $BG=CG$ 的理由即可。

但由假設 $BD=CE$, 故要證 $EG=DG$, $BG=CG$, 能說 G 點是用同樣的比分割 BD, CE 之點即可,這在定理 33 已經證

明了，故上定理即可證明。

今記出其證明的寫述如次：

證明　設 BD, CE 的交點為 G，因 BD, CE 為中線，故 G 是三角形的重心。

因之 $$BG=\frac{2}{3}BD,\ GD=\frac{1}{3}BD,$$

$$CG=\frac{2}{3}CE,\ GE=\frac{1}{3}CE.$$

依假設 $BD=CE$.

故 $$BG=CG,\ GD=GF,$$

又 $$\angle BGE=\angle CGD.\qquad\text{(對頂角)}$$

故 $\triangle BGE\equiv\triangle CGD$，故 $BE=CD$。

但 $$AB=2BE,\ AC=2CD.$$

故 $$AB=AC.$$

雜問題

1. 直角三角形之一角為 30°，其斜邊為最小邊之二倍。

2. 平行四邊形之對角線相等且成直角，此平行四邊形為正方形。

3. 平行四邊形一雙相對邊中點與對角線二端相聯結之二直線，三等分他一對角線。

4. 等邊三角形三中線相等。又此定理之逆成立否？

5. 於不等邊三角形，小邊上之中線大於大邊上之中線。

6. 二等邊三角形頂點及其相等二邊中點所引底邊之三垂線，四等分底邊。

7. 證明二等邊三角形底邊上一點，引他二邊之垂線，其和等於從底邊之一端所引對邊上垂線之長。由此以證明，二等邊三角形底邊上一點到他二邊之距離之和等於定長。

8. 於平行四邊形 $ABCD$, 使 $\angle B$ 逐漸增大，則 $\angle A$ 如何變化？又對角線 AC 及 BD 如何變化其大小？

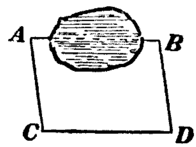


圖 106.

9. A, B 二點間有障礙物不能直接測其距離時，得如次法求得之。

過 A 及 B 向同方向(例如向北方)引 AC, BD, 使 AC, BD 有相等之長，測 CD 之距離即可。其理如何？

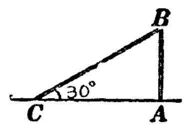


圖 107.

10. 直立於地面長 75 尺之竿 AB, 忽於 B 點中斷，其尖端 C 着於地面，測其角爲 $30°$, 求 AB 的長。

第二章　圓

第一節　中心角弧及弦

115. 復習問題

(a)　述圓,圓周,圓的中心,半徑,直徑,弧,弦,半圓,弓形,扇形,同心圓等的定義。

(b)　一點對於圓周的位置關係有幾種?取各位置到中心的距離與半徑比較之。

(c)　半徑相等之二圓全等,此語之意義如何?

〔注意〕此後半徑相等的圓單稱為等圓。

(d)　證明圓於其直徑為對稱*。又應用此事項以證明互相垂直之二直徑,分圓為全等的四部分。

〔注意〕此各部分名叫四分圓,或象限。

116. 如右圖,弧 ACB 與弧 ADB,合成一完全的圓周。二弧之有此性質者,叫相配弧。

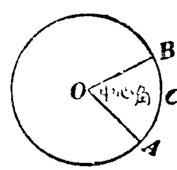


圖　108.

定義　合成一圓周之二弧,叫相配弧,大者叫優弧,小者叫劣弧。單稱弧時,常指劣弧而言。

先參看緒論(四),§27 以下,該段所述關於圓的各種性質,為本章之基礎,須加以周到之復習。

*對稱的義意閱 §72。

指示弧，用表其二端點之文字爲通例，如言弧 AB。若於有混同之虞時，則更以表弧上一點之文字加入其表二端文字之間，如言弧 ACB。

表弧有用記號⌢者，卽弧 AB 以 $\overset{\frown}{AB}$ 表之。

定義　一圓之二半徑所成角，名中心角。我們說中心角立於所夾之弧上，或說中心角與其所夾之弧相對。

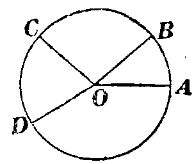


圖 109.

117. 同圓 O 的二弧 AB, CD, 得用次記方法而比較其大小。

扇形 OAB 繞 O 而旋轉，疊合於扇形 OCD 上，使 A 與 C 相合，此時

(i) B 與 D 相合，則二弧 AB, CD 相等，

(ii) B 落在 C 和 D 中間，則弧 AB 比弧 CD 小，

(iii) B 落在 C 和 D 之外，則弧 AB 比弧 CD 大。

今着眼於二弧所對之中心角 AOB, COD, 則可知

於 (i) 爲 $\angle AOB=\angle COD$,

於 (ii) 爲 $\angle AOB<\angle COD$,

於 (iii) 爲 $\angle AOB>\angle COD$.

於相等圓上之二弧，可以疊合二圓而行同樣之比較。

綜上所述，卽可推得次記之定理。

定理 34. 於同圓或等圓中，相等弧所對的中心角相等。弧

優弧劣弧，是關於弧的大小的名稱，卽弧如大於半圓，叫優弧，小於半圓，叫劣弧，非謂一組相配弧，然後有大者爲優弧，小者爲劣弧之名也。

在上圖中，半徑 OA, OB 所成之角，可以說有二，一是優角，一是劣角，通常所謂中心角是指劣角而言的。卽 $\angle AOB$ 立於弧 AB 上，或弧 AB 對中心角 AOB。

此處 §117，所述者卽定理 34 之疊合法證明。

不等時，大弧所對之中心角大於小弧所對者。

又逆

於同圓或等圓，相等中心角所對之弧相等，中心角不等時，大角所對之弧大於小角所對者。

【系】 於同圓或等圓，一弧為他弧之 n (整數) 倍時，則前弧所對之中心角亦為後弧所對中心角之 n 倍。此定理之逆亦成立*。

118. 定理 35. 於同圓或等圓：(a) 相等弧所對之弦相等，(b) 二弧不相等時，大弧所對之弦大於小弧所對者。

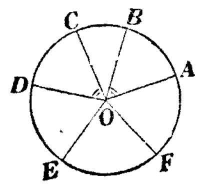


圖 110.

於圓 O, (a) $\widehat{AB}=\widehat{CD}$, 則 $AB=CD$。

(b) $\widehat{AB}<\widehat{EF}$, 則 $AB<EF$。

證明 (a) 引半徑 OA, OB, OC, OD。

此時於 $\triangle OAB$, $\triangle OCD$ 中，

$$OA=OC, OB=OD, \angle AOB=\angle COD. \qquad \text{(定理 34)}$$

故 $\triangle OAB\equiv\triangle OCD$, 故 $AB=CD$。

(b) 引半徑 OA, OB, OE, OF。

此時於 $\triangle OAB$, $\triangle OEF$ 中，

$$OA=OE, OB=OF, \angle AOB<\angle EOF. \qquad \text{(定理 34)}$$

故 $$AB<EF. \qquad \text{(定理 21)}$$

在等圓，同樣可以證明之。

定理 34 之逆，用歸謬法卽容易證明之。或照上記，把中心角疊合起來，卽可見弧之是否相合而知其大小。

由上定理可知中心角與所對之弧有密切之關係，弧的大小可以由所立於其上之中心角之大小而判定，中心角之大小也可以由其所對之弧而決定，極為便利。

*先設一弧為他弧之 2 倍或 3 倍而證明之，此時引各分點及中心之聯結線，卽可解決。

練習問題

1. 上記定理中的弧均作劣弧解釋，今若代以優弧，定理應如何變更？

2. 於同圓或等圓，一弧爲他弧之二倍，比較其所對之弦，亦爲二倍否？

119. 次定理與上記定理之逆相當，比較同樣的三角形，即可證明之。

定理 36. 於同圓或等圓：(a) 相等弦所對之弧相等，(b) 弦若不相等，大弦所對之弧大於小弦所對者。

練習問題

1. 以歸謬法證明上記之定理。

2. 上記定理中的弧，是指劣弧，今若代以優弧，定理應如何變更？

120. **定理 37.** 從圓的中心所引弦的垂線，二等分此弦。

設 AB 是 C 圓的弦，CK 爲從 C 所引此弦的垂線，K 爲垂足。

求證 $AK=KB$.

證明 於 $\triangle CKA$, $\triangle CKB$ 中，$CA=CB$, CK 公邊，$\angle CKA=\angle CKB=\angle R$.

$\therefore \quad \triangle CKA \equiv \triangle CKB$ （定理 15）

故 $\quad AK=KB$.

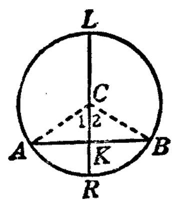


圖 111.

【系 1】 圓的中心與弦的中點的聯結線，垂直於弦。

【系 2】 弦的垂直二等分線過圓的中心，且二等分此弦所對之弧。

定理 36 爲定理 35 之逆，可用歸謬法或倣照 35 的證明，比較二三角形而證明之。

【系 3】 一直線與一圓周相會之點，不得過於二點*。

練習問題

1. A, B, C 爲圓周上之三點時，AB, BC 的垂直二等分線的交點，是圓的中心，試證明之。

2. 過二點，作半徑爲已知長的圓。

121. 預備問題 (a) 過一定點可作圓幾個? (b) 過二定點可作圓幾個? (c) 過在同一直線上三定點，可以作圓否? (d) 證明相交二直線的垂線仍相交。(e) 證明線段的垂直二等分線上的點，距線段之兩端爲等距離。(f) 證明距二點爲等距離的點，均在此二點聯結線段的垂直二等分線上。

定理 38. 過不在同一直線上之三點，有一圓可作，但限於一。

A, B, C 爲不在同一直線上的三點。

此時過 A, B, C 可作一圓，但限於一。

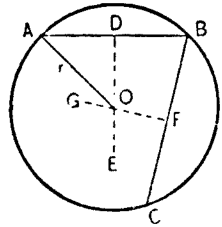


圖 112.

證明 聯結 AB, BC，引 AB, BC 之垂直二等分線 DE, FG。AB, BC 爲相交之二直線，故 DE, FG 亦相交（預備問題 d）。

*因爲若與圓周有 A, B, C 三交點，則 AB 及 BC 都是圓的弦。故從中心引直線至 AB 及 BC 之中點，都是垂直的，但從直線 ABC 外之一點引垂直於該直線之直線，只有一線，因之不能有二線垂直於 AB 及 BC，此與假設不合。故交點不能多於二點。

(d) 設垂直於相交二直線 AC, BC 之直線爲 AD, BE。

證明 AD, BE 之相交。

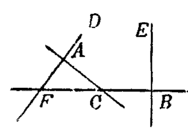


圖 113.

(1) 若 $AC \perp BC$，則 $AD \parallel BC$ (定理 8 系 3)。

故 AD, BE 相交。

(2) 若 AC, BC 斜交，則 AD, BC 相交，設其交點爲 F。因 $AC \perp AD$，故 CF 與 AD 不爲垂直 (定理 12 系 4)。因之 AD, BC 是斜交，而 BE, BC 是直交，故 AD, BE 相交。

此定理 38 之證明，極爲複雜，須熟記之。

設其交點爲 O, 聯 OA, OB, OC。此時因 O 是 AB 的垂直二等分線 DE 上的點，故 $OA=OB$（預備問題 e）。

同樣，O 又爲 BC 的垂直二等分線 FG 上之點。

故 $OB=OC$, 因之 $OA=OB=OC$。

因之，以 O 爲中心，以 OA 之長爲半徑作圓，必通過 A, B, C 三點。

即過 A, B, C 三點可以作一圓。

次過 A, B 二點之圓，其中心必在 AB 之垂直二等分線 DE 上，過 B, C 之圓，其中心必在 BC 之垂直二等分線 FG 上（預備問題 f）。

故過 A, B, C 三點之圓，其中心不得不爲 DE, FG 之交點。然 O 以外，DE, FG 不再相交，故除以 O 爲中心，OA 爲半徑之圓以外，再無過 A, B, C 三點之圓。

【系 1】 圓周上之三點爲已知時，圓爲已定。

指示圓時，有用表圓周上三點之文字者，即由此故。

【系 2】 二圓不能有二以上之點相會。

練習問題

1. 求已知圓之中心。

2. 弧爲已知時，欲將其補成一完全之圓周，有何方法？

122　定理 **39**. 於同圓或等圓，相等弦與中心之距離相等。

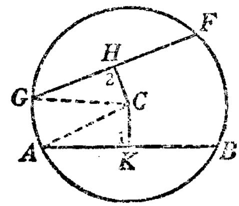


圖 114.

於圓 C, 設弦 $AB=$ 弦 GF, 由中心 C 引 AB, GF 之垂線 CK, CH; 則 $CK=CH$。

證明　引半徑 CA, CK。此時

$$AK=\frac{1}{2}AB,\ GH=\frac{1}{2}GF,$$

故 $AK=GH$。 又 $\angle 1=\angle 2=\angle R$,

因之於 $\triangle CAK$, $\triangle CGH$ 爲斜邊(半徑)及一邊各各相等之二直角三角形,故爲全等。

故 $CK=CH$, 即 AB, GF 距 C 點爲等距離。

在相等之二圓中,也可以同樣證明之。

【系】 於同圓或等圓,距中心爲等距離之弦,其長相等。

123. 定理 **40.** 於同圓或等圓,二弦不相等,大弦距中心之距離小於其小者。

設於圓 C, 弦 $AB>$ 弦 FG, 從中心 C 引 AB, FG 之垂線爲 CK, CH, 則 $CK<CH$。

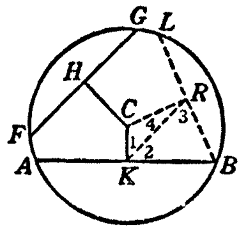


圖 115.

證明 過 B, 引弦 BL 等於弦 FG 之長,從 C 引 BL 之垂線 CR, 聯 KR。以 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ 表 $\angle CKR$, $\angle BKR$, $\angle BRK$, $\angle CRK$ 各角。

此時 $BK=\frac{1}{2}AB$, $BR=\frac{1}{2}BL=\frac{1}{2}FG$.

$\because$ $AB>FG$, $\therefore$ $BK>BR$,

$\therefore$ $\angle 3>\angle 2$. (定理 16)

又 $\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4=\angle R$, 故 $\angle 4<\angle 1$。

故於 $\triangle CKR$ 中, $CK<CR$ (定理 7),但 $CR=CH$。

故 $CK<CH$。

在等圓,也可以同樣證明。

【系 1】 於同圓或等圓,距中心距離不相等之二弦,其距離小者大於其距離大者。

【系 2】 弦,平行於其本身而移動時,漸近中心則弦漸增其長,漸遠中心則弦漸減其長。

學習者試各自作本節所講述之總括。

【系 3】 直徑爲最大之弦。

練習問題

1. 過直徑上之一點，與直徑成角相等之二弦，相等。

2. 聯結一圓之一切相等弦之中點，得何種線？

3. 過直徑上之一點，引其垂直之弦，比過此點所引其他諸弦小。又其逆成立否？

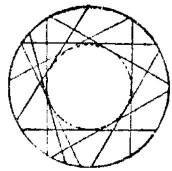


圖 116.

第二節　弓形

124. 復習問題　述弓形之定義？

指示弓形，以其弧上一點之文字置於弦兩端文字之間，例如次圖中之弓形，即叫弓形 ACB。

定義　弓形的弧上一點，與弦的兩端聯結二直線所成之角，叫做弓形角。又說弓形含此角。

如右圖，$\angle\alpha$ 是弓形 ACB 所含之角。

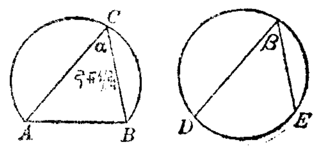


圖 117.

定義　從圓周上一點，引二弦所成之角，叫做圓周角。

說圓周角立於其所夾之弧上，或圓周角對其所夾之弧。

如上圖，$\angle\beta$ 是立於 DE 弧上之圓周角，或弧 DE 所對之圓周角。

125. 定理 **41.** 圓周角等於同弧所對中心角之半。

設於圓 O, $\angle BAC$ 爲立於 $\overset{\frown}{BC}$ 上的圓周角，$\angle BOC$ 爲立於同弧上的中心角，則 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

證明　就中心 O 之位置，可以有次記三種不同情形。

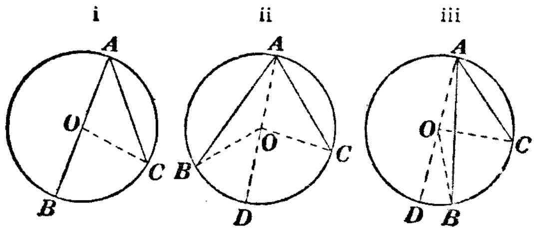


圖 118.

(i) O 在 $\angle BAC$ 之一邊 (AB) 上（圖 i）。

(ii) O 在 $\angle BAC$ 之內（圖 ii）。

(iii) O 在 $\angle BAC$ 之外（圖 iii）。

(i) $\angle BOC = \angle BAC + \angle ACO.$ （定理 12 系 1）

但 $\angle ACO = \angle BAC.$ （定理 3）

$\therefore$ $\angle BOC = 2\angle BAC$ 即 $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC.$

(ii) 及 (iii) 過 A 引直徑 AD。此時從 (i)，得

$$\angle DAC = \frac{1}{2}\angle DOC,\ \angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD.$$

故於 (ii) 爲 $\angle DAC + \angle BAD = \frac{1}{2}\angle DOC + \frac{1}{2}\angle BOD$

故 $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC.$

於 (iii) 爲 $\angle DAC - \angle BAD = \frac{1}{2}\angle DOC - \frac{1}{2}\angle BOD.$

故 $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC.$

【系 1】 立於同弧上之圓周角相等。

【系 2】 同一弓形所含角相等。

【系 3】 於同圓或等圓立於相等弧上之圓周角相等。

【系 4】 於同圓或等圓，相等圓周角所夾之弧相等。

練習問題

1. 弧爲圓周之六分之一，求其上所立圓周角及中心角的大小。

2. 二弦 AB, CD 交於圓內之一點 P, 則 $\angle APB$ 等於二弧 AC 及 BC 上所立圓周角之和，試證明之。

3. 二弦 AB, CD 之延長，交於圓外之一點 P, 則 $\angle APC$ 等於二弧 AC 及 BD 所對圓周角之差，試證明之。

4. 弓形之弦所對在弓形內一點之角，比弓形角大。

5. 弓形之弦所對在弓形外一點之角，比弓形角小。

6. 二平行直線與一圓周相交，其所截二弧相等。

126. 一弧上所立圓周角，得設想爲這弧的相配弧與此弦所圍成之弓形所含之角。因之，由上定理，即可導出次記之定理。

定理 42. (*a*) 弓形爲半圓時，弓形角爲直角；(*b*) 弓形比半圓小時，弓形角爲鈍角；(*c*) 弓形比半圓大時，弓形角爲銳角。

又其逆 (*a*) 弓形角爲直角時，弓形爲半圓；(*b*) 弓形角爲鈍角時，弓形比半圓小；(*c*) 弓形角爲銳角時，弓形比半圓大。

127. 預備問題 (*a*) 使三角板一角之二邊，常過 A, B 二定點而移動此三角板，此時該角之頂點，畫成何種線？(*b*) 於線段 AB 之同側，取 C, D, E 等點，使 $\angle ACB$, $\angle ADB$, $\angle AEB$ 等各角均爲 $60°$, 此時 C, D, E 等點之位置如何？

定理 43. 一線段所對定角之頂點，在此線之同側者，均在以此線段爲弦之同一弓形之弧上。

C, D 爲任意二點，在線段 AB 之同側而 $\angle ACB = \angle ADB$, 此時，C, D 在以 AB 爲弦之同一弓形的弧上。

證明 過 A, B, C 三點，可以畫一圓弧(定理 38)。D 點當

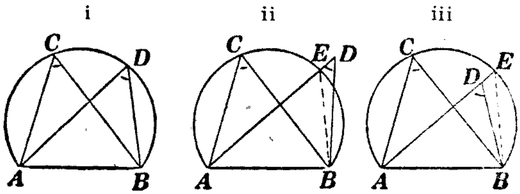


圖 119.

亦在這弧上。今設 D 點不在此弧上，則聯 AD, AD 或其延長，必與弧相交於 D 以外之點 E。聯 BE (圖 ii 及 iii)。此時

$$\angle ACB = \angle AEB. \qquad \text{(定理 41 系 2)}$$

但 $\qquad \angle AEB = \angle ADB \pm \angle EBD. \qquad$ (圖 ii 及 iii)

故 $\qquad \angle AEB \neq \angle ADB,$

因之 $\angle ACB \neq \angle ADB$, 此與假設相反。

故 $\angle ACB = \angle ADB$ 時，D 點必在弧 ACB 上。

【系 1】 二點之聯結線段，所對在其同側之他二點之角相等時，此四點在同一圓周上。

【系 2】 一線段所對角為直角之點，皆在以此線段為直徑之圓周上。

練習問題

1. 以二等邊三角形之一等邊為直徑所畫圓，過底邊之中點。

2. 證明弦 AB 不同側的相配兩弓形角互成補角，又證明其逆亦眞。

3. 過中心 O 的圓周上一定點 A 之弦，為以 OA 作直徑之圓周所二等分。

4. 從 $\triangle ABC$ 之頂點 B, C 引其對邊之垂線 BE, CF; E, F 為垂足，則 $\angle CBE = \angle CFE$, 試證明之。

第三節 割線及切線

128. 圓的弦 AB 向雙方延長，則得與圓周交於 A, B 二點之直線 XY。這樣的 XY 直線，叫做圓的割線。

定義 與圓周相會於二點之直線，說在此二點與圓相交，此直線叫做圓的割線。

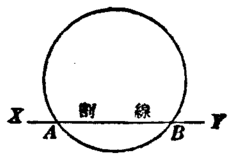


圖 120.

129. 一割線 XY 與圓周相會於 AB，則 XY 除 A, B 二點外，不再在其他之點與圓周相會。

今設 XY 繞 A 點依矢之方向（去中心之距離漸遠之狀態）而旋轉時，則弦 AB 漸次減小，因此到了某一位置 AC（距中心之距離等於圓半徑時），B 即合於 A 點。此時 AC 與圓周相會於唯一之點 A。這樣的 AC 叫做圓的切線。

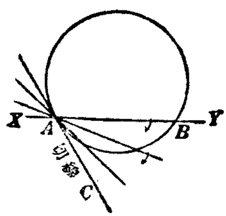


圖 121.

定義 與圓周相會於唯一點之直線，說直線於此點切於圓，此直線叫做圓的切線，點叫做切點。

130. 茲一直線對於一圓之位置關係如次：

(i) 不相會

(ii) 相會 $\begin{cases}\text{於二點，即交於圓（割線）}\\\text{於一點，即切於圓（切線）}\end{cases}$

過圓周上一點之直線，欲定其爲切線或割線，有次記定理。

131. 定理 44. 過圓周上一點之直線中：(a) 與在此點之半徑斜交之直線，爲圓之割線；(b) 與在此點之半徑垂直之直線爲圓之切線。

過圓周 O 上一點 A，與半徑 OA 斜交之直線爲 AB，與半

徑 OA 垂直之直線為 AC。

此時，AB 為圓之割線，AC 為切線。

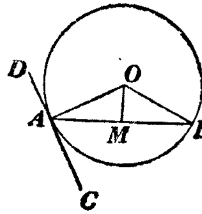


圖 122.

證明　從 O 引 AB 之垂直線 OM，於 AM 之延長上取 $BM=AM$，聯 OB，則 $\triangle OAM \equiv OBM$（定理 1），故 $OB=OA$，故 B 點在圓周上。故直線 AB，於二點 A 及 B 與圓周相會，即 AB 是割線。

次於 AC 上 A 點以外任意取一點 D，此時因 OA 為 AC 之垂線（假設），而 OD 則為 AC 之斜線，故 $OD>OA$，因之 D 點在圓外。

故直線 AC 上 A 之外之點，皆在圓周之外，即直線 AC 於唯一之點 A 與圓周相會，故 AC 是圓的在 A 點的切線。

【系 1】　切線垂直於在切點之半徑。

【系 2】　於圓周上之一點，可引一切線，但限於一。

【系 3】　圓之中心與一直線之距離，比半徑小時，直線為圓之割線；等於半徑時為圓之切線；大於半徑時，直線與圓全不相會。又，其逆亦眞。

練習問題

1.　於圓周上之一點，引圓之切線。

2.　證明一圓內之相等諸弦皆切於此圓之一同心圓。以此第二圓與 § 123 之練習問題 2 比較之。

132.　定理 **45.**　<u>從圓外一點，可引此圓之二切線，但限於二。</u>

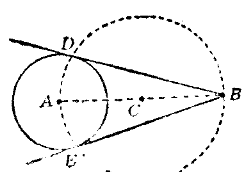


圖 123.

設 B 為圓 A 外之任意一點，此時過 B 點可以引二直線切於圓 A，但切線之數不能多於二。

證明　以 AB 為直徑畫圓，則此圓

周必與圓周 A 相交於二點。設其交點爲 D 及 E。聯 DB, EB。又引半徑 AD, AE。

此時，$\angle BDA=\angle BEA=\angle R$（都是半圓的弓形角），故 DB 及 EB 切於圓 A（定理 44）。

卽從 B 點可引二直線切於 A 圓。

次從 B 任意引其他一直線 BF, 其與圓周 A 之交點爲 F。以 BA 爲直徑之圓與 A 圓，除 D 及 E 二點外，不在其他之點與 A 圓相會，故 F 點不在以 BA 爲直徑之圓周上，故 $\angle BFA$ 不能爲直角，故 AF 非 A 圓之切線。

故從 B 點所引切於 A 圓之直線，除 DB, EB 二直線外，不再存在。

【系 1】　從圓外一點所引圓之二切線，其長相等。

【系 2】　圓外一點與圓的中心的聯結線，二等分由此點所引圓之二切線所成之角。

練習問題

1. 作切於 $\angle ABC$ 一邊 BA 上之 D 點且切於邊 BC 之圓。

2. 從圓外一點所引圓之二切線，其聯結二切點之線段，爲此點與中心之聯結線所垂直二等分，試證明之。

3. 圓 O 外之一點 A, 在以 O 爲中心之另一圓周上移動時，證明從 A 點所引切於 O 圓之二切線之長及其所夾之角，均爲一定。

4. A 漸次遠離中心 O 時，從 A 所引二切線之長及其所夾角如何變化？示此等變化爲 OA 之函數。又若 A 點漸近圓周，則此各量又如何變化？

133. 定理 46. <u>弦與接於其一端之切線所成角，等於此角內之弧所對之圓周角。</u>

設 AD 爲圓 O 之弦，BAC 爲圓 O 之切線。

此時，銳角 DAC 等於此角內之弧 AFD 所對之圓周角。

又鈍角 DAB 等於此角內之弧 AED 所對之圓周角。

證明　引直徑 AE，聯 DE，則

$\angle ADE=\angle R$　(定理 42)。

故 $\angle AED+\angle DAE=\angle R$。又切線 BC 垂直於直徑 AE，

故 $\angle DAE+\angle DAC=\angle R$，

故 $\angle DAC=\angle AED$

即 $\angle DAC$ 等於弧 AFD 所對之圓周角。

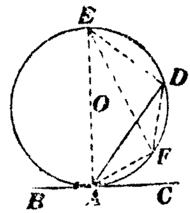


圖 124.

次於弧 AFD 上任意取一點 F，聯 FA，FD，FE。

此時 $\angle BAE=\angle R$.　(定理 44 系 1)，

$\angle AFE=\angle R$　(定理 42)。

故 $\angle BAE=\angle AFE$，

又 $\angle EAD=\angle EFD$　(定理 41 系 1)。

故 $\angle BAE+\angle EAD=\angle AFE+\angle EFD$.

即 $\angle BAD=\angle AFD$.

即 $\angle DAB$ 等於其內所含弧 AED 所對之圓周角。

【系】　弦與過其一端之直線所成角，與對於弦在此角之反對側之弓形角相等時，此直線爲圓之切線。

練習問題

1. 於定理46之圖中，若 $\angle DAC=72^\circ$，則 $\angle AED$，$\angle AFD$，$\angle DAB$ 之大小如何？

2. AB，AC 爲一圓之直徑及弦，於過 C 之切線引其垂線 AD 時，證明 AC 二等分 $\angle BAD$。

此定理 46 極爲重要，當在問題中遇到切線時，即須想起切線與圓只有一公有點，垂直於半徑，及此定理。

3. 一弦所對弧之中點，距此弦及在其一端之切線，其距離相等，試證明之。

4. AB 爲一定長的直線，並且和定圓相切，切點就是 B；證明 B 點在定圓周上移動時，A 點也在另一個圓周上移動(可證明 A 點到定圓心 O 的距離是一定)。

5. 證明於一圓的直徑之兩端所引圓之切線，相互平行。

第四節 內切圓與外接圓

134. 定義 一多角形之頂點，皆在一圓周上者，叫做多角形內接於圓或圓外接於多角形。

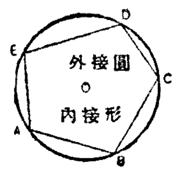


圖 125.

外接於多角形的圓，略稱外接圓，內接於圓的多角形，略稱內接形。

定義 一多角形之邊，皆切於在其內之一圓周者，叫做多角形外切於圓，或圓內切於多角形。

內切於多角形的圓，略稱內切圓，外切於圓的多角形，略稱外切形。

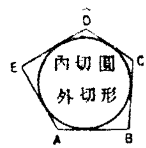


圖 126.

135. 從定理 38 卽可以推得次定理。

定理 47. 外接於三角形之圓有一而限於二。

定義 三角形外接圓之中心，名三角形之外心。

【系】 三角形各邊之垂直二等分線，過同一之點。此點爲三角形之外心。

136. 預備問題 證明次記二定理：

(a) 一角的二等分線上的點，距角之二邊爲等距離(§ 97 練習問題 2)。

(b) 距角之二邊爲等距離之點，均在此角之二等分線上。

定理 48 內切於三角形之圓有一而限於一。

證明 於 $\triangle ABC$ 引 $\angle BAC$, $\angle ABC$ 之二等分線，此二線必相交，設其交點為 O。

從 O 引三邊 AB, BC, CA 之垂線 ON, OL, OM,

則 $$OM=ON,\ ON=OL$$ (預備問題 a)。

故以 O 為中心，OL 為半徑之圓，切於 AB, BC, CA 三邊 (定理 44)。此即內切於 $\triangle ABC$ 之圓。

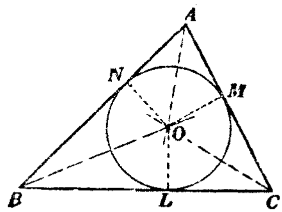


圖 127.

次須證明如此之內切圓只有一個。

因 $\triangle ABC$ 的內切圓的中心，須在距 $\angle BAC$ 的二邊為等距離之處，故此中心必在 $\angle BAC$ 之二等分線 AO 上(預備問題 b)。

同樣，此中心又須在 $\angle ABC$ 之二等分線 BO 上。

故若有內切圓，其中心須在 AO 及 BO 上，故不得不為 AO, BO 之交點 O。但二直線只有一個交點。

因之 $\triangle ABC$ 之內切圓除以 O 為中心，OL 為半徑者之外，再不存在。即內切圓限於一。

定義 三角形內切圓之中心，叫三角形之內心。

【系】 三角形各角之二等分線，過同一之點，此點為三角形之內心。

137. 在定理 33，已經證明了三角形的三中線，過同一點，該點名叫重心。今又有三角形外接圓之中心(即各邊垂直二等

除上所記外心、內心、垂心、重心之外，三角形尚有傍心，此五者叫三角形的五心。

傍心，即三角形一內角與二外角之二等分線之交點，即為其傍切圓之中心。此傍切圓是切於三角形之一邊及其他二邊之延長者。參照 § 168.

分線之交點)爲外心，及其內切圓之中心(即各角二等分線之交點)爲內心。這三點均爲三角形中特殊的點。此外尚有一可注意之點，叫做垂心，雖與此處所述之內切與外接無關，但因可以由定理 47 的系去證明，故爲便宜計一並揭載於此。

定理 49. 從三角形各頂點所引其對邊之三垂線，過同一之點。

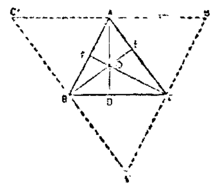


圖 128.

於 $\triangle ABC$ 中，

$AD \perp BC$, $BE \perp CA$, $CF \perp AB$;

則 AD, BE, CF 過同一之點。

證明 過 A, B, C 各點，引平行於其對邊之直線，得一三角形 $A'B'C'$。

此時，$ABCB'$, $ACBC'$ 均爲平行四邊形，故

$$AC' = BC,\ AB' = BC. \qquad \text{(定理 25 系 1)}$$

故 $AB' = AC'$ 即 A 爲 $B'C'$ 之中點。

同樣，B, C 亦各爲 $C'A'$, $A'B'$ 之中點。

故 AD, BE, CF 爲 $\triangle A'B'C'$ 各邊之垂直二等分線。

故 AD, BE, CF 過同一之點(定理 47 系)。

定義 三角形各邊頂點所引其對邊之垂線，交於一點，此點名叫三角形之垂心。

練習問題

1. 以一角的二等分線上的一點爲中心，以此點到其一邊之距離爲半徑所作之圓，切於此角之二邊。

2. 等邊三角形之內心、外心、重心、垂心合一。

3. 由三角形外心之在形內，在形之一邊上，或在形外，可以知道該三角形之爲銳角三角形，直角三角形，或鈍角三角形，試言其理。

4. 畫直角三角形，鈍角三角形，而作其垂心。

138. **定理 50** 內接於圓之四邊形，其相對角互為補角。

四邊形 $ABCD$ 內接於圓，則

$$\angle A+\angle C=2\angle R,\quad \angle B+\angle D=2\angle R.$$

證明 引半徑 OB, OD。

此時，$\angle A$ 是立於弧 BCD 上之中心角之半。

同樣，$\angle C$ 是立於弧 BAD 上之中心角之半。

故 $\angle A+\angle C$ 是在 O 的相配二角之和之半，即

$$\angle A+\angle C=2\angle R.$$

同樣，可證明

$$\angle B+\angle D=2\angle R.$$

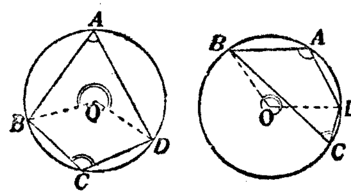


圖 129.

(註) 圖 129 之二圖表示兩種情形，其一表中心在四邊形之內，另一表在四邊形之外，其證法一致。

【系 1】 圓內接四邊形之外角等於內對角(即其隣接內角之相對角)。

【系 2】 四邊形之相對之角，互為補角時，此四邊形可內接於圓。

139. 在上定理，我們得了四個點在同一圓周上的條件。即以四點為頂點之四邊形，若其相對之角互為補角時，通過四點，可以畫一圓。

練習問題

1. 證明矩形、正方形可內接於圓。

2. 平行於等腰三角形 ABC 底邊 BC 之直線 XY，與 AB, AC 或其延長之交點為 D, E 時，過四點 B, C, D, E 可畫一圓。試證明之。

3. 從 $\triangle ABC$ 頂點 A，引 BC 之垂線 AD，再從 D 引 AB, AC 之垂線 DE, DF 時，證明四點 B, C, E, F 在一圓周上。

4. 四邊形 $ABCD$ 內接於圓時，對邊 AB, CD 延長之交點為 E, 對邊 AD, BC 延長之交點為 F 時，$\triangle BCE$, $\triangle DCF$ 之外接圓相交於 EF 上之一點。試證明之。

140. 定理 **51.** 圓外切四邊形相對邊之和相等。

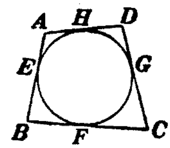


圖 130.

四邊形 $ABCD$ 外切於一圓上之點 E, F, G, H 時，則

$$AB+CD=BC+AD.$$

證明 E, F, G, H 是各邊 AB, BC, CD, DA 的切點。

因從圓外一點所引之圓二切線相等，故

$AE=AH,\ BE=BF,\ CF=CG,\ DG=DH.$ (定理 45 系 1)

故 $AE+BE+CG+DG=AH+DH+CF+BF.$

即 $AB+CD=AD+BC.$

【系】 四邊形相對邊之和相等時，此四邊形可外切於圓。

練習問題

1. 證明在菱形可畫其內切圓。

2. 證明外切於圓的平行四邊形是菱形。

141. 定義 多角形的各邊各角均相等者，叫做正多角形。邊數為 n 之正多角形，稱正 n 角形或正 n 邊形，例如名有 5 邊之正多角形為正五角形或正五邊形。

從上記定義，可知多邊形成為正多角形的條件是：

(i) 其一切的邊相等， (ii) 其一切的角相等。

但在三角形，其三邊相等時，三角亦相等。又其逆，三角相等時，三邊亦相等，即上記二條件中之一成立時，其他也同時成立，即有一條件成立，已可說是成為正三角形。但在四邊形則不然，例如菱形是四邊相等了，但其四角不都相等，又矩形是四角相等了；但四邊不等。

練習問題

1. 證明等角四角形是正方形。

2. 求正 n 邊形的一內角之大小。

3. 於正六邊形之外，作以其各邊爲一邊之正六邊形時，其周圍之地位得盡充實。試證明之。

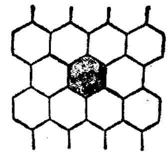


圖 131.

142. 定理 52. 分圓周爲若干相等弧時，以各弧所對弦而圍成之內接形爲正多角形。於其各分點引切線而圍成之外切形亦爲正多角形。

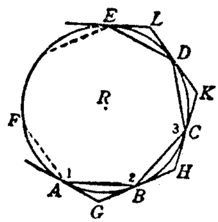


圖 132.

於 A, B, C, D……等點，分圓周爲若干相等的弧。此等弧所對弦即爲 AB, BC, CD……等，在各分點之切線爲 GH, HK, KL,……等。此時內接形 $ABCD$……，外切形 $GHKL$……皆爲正多角形。

證明　內接形 $ABCD$……之各邊爲相等弧所對之弦，故各邊之長皆等(定理 35)。

又內接形 $ABCD$…… 之各角爲從圓周取去連續二相等弧所餘之弧上之圓周角，故各角之大小皆等(定理 41 系 3)。

故內接形 $ABCD$……爲正多角形。

次從圓外一點引圓之二切線相等，故

$GA=GB,\ HB=HC,\ KC=KD$……　(定理 45 系 1)

因之 $\triangle GAB$, $\triangle HBC$, $\triangle KCD$……等，都爲二等邊三角形。而其各底角爲弦與在弦一端之切線所成角，故與此角內之弧 AB, BC, CD……等所對之圓周角相等，故此等底角皆相等。又其底邊也相等。

因之 $\triangle GAB \equiv \triangle HBC \equiv \triangle KCD \equiv$……等。

即外切形 $GHKL$……之角皆等。

又 $GA=GB=HB=HC=KC=KD=\cdots\cdots$ 等。

而外切形 $GHKL\cdots\cdots$ 的各邊卽爲此等相等的二線段之和，故皆等。

故外切形 $GHKL\cdots\cdots$ 爲正多角形。

練習問題

1. 外切於圓之多角形，其各角相等時，此形爲正多角形。

2. 作內接、外切於圓之正方形。

3. 證明內接於圓之正六邊形之一邊，等於圓之半徑。應用此定理作內接及外切於圓之正六邊形。

4. 應用前題，外內接及外切於圓之正三角形。又用分度器作同圖。

143. 定理 **53.** 於正多角形可畫其外接圓及內切圓。

$ABCDE\cdots\cdots$ 是一正多角形。此時外接或內切於正多角形 $ABCDE\cdots\cdots$ 均可畫圓。

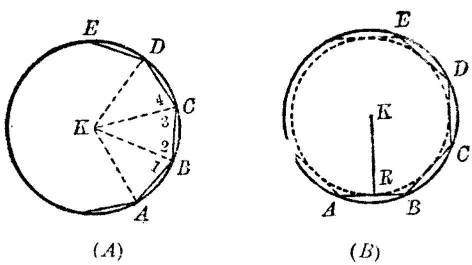


圖 133.

證明 設 $\angle A$, $\angle B$ 之二等分線之交點爲 K。

聯結 KA, KB, KC, KD,……等，

則於 $\triangle KAB$, $\triangle KBC$ 中，

$AB=BC$ (假設)，$KB=KB$, $\angle ABK=\angle CBK$ (作圖)。

故 $\triangle KAB\equiv\triangle KBC$.

故 $KA=KC$。然 $\triangle KAB$ 之二角 $\angle KAB$, $\angle KBA$ 各爲

正多角形一角之半，故相等，

故　　$KA=KB$,

故　　$KA=KB=KC$。

又因 $KB=KC$，故 $\angle KCB=\angle KBC$。

故 $\angle KCB$ 等於 $\angle B$ 之半，從而等於 $\angle C$ 之半，即 KC 二等分 $\angle C$。

因之 K 點又爲 $\angle C$ 及 $\angle B$ 之二等分線之交點，即爲 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 三角二等分線之交點。

故與前同樣，$KB=KC=KD$。

順次如此，可以證明 $KA=KB=KC=KD=KE\cdots\cdots$。

故以 K 爲中心，以 KA 之長爲半徑畫圓，外接於正多角形 $ABCDE\cdots\cdots$。

次，從 K 引邊 AB 之垂直線 KR，因 K 爲外接圓心，故自 K 到各相等弦的距離，皆相等。故 K 到 AB, BC, CD 各邊之距離均等(定理 40 系 1)。

故以 K 爲中心，以 KR 之長爲半徑畫圓，則於 AB, BC, $CD\cdots\cdots$各邊之中點切於各邊(定理 44)。

即此圓內切於正多角形 $ABCDE\cdots\cdots$。

【系】 二等分正多角形各角之直線，過同一之點，而此點即爲其外接圓及內切圓之公用中心。

練習問題

1. 證明正方形之外接圓及內切圓之公用中心，是其對角線之交點。

2. 二等分多角形各角之直線，過同一之點，證明此多角形可畫其內切圓。

3. $ABCD$ 四邊形中，若 $AB=AD$, $CB=CD$，而 $AB\neq CB$，則 $ABCD$ 只有內切圓而無外接圓。

第五節 二圓之位置

144. 預備問題 取不相等二圓之模形,先把小圓置於大圓之外,再移動小圓使二圓之中心漸次接近,終至二圓之中心相合。此時,着眼於圓周,而觀二圓之位置,有若干情形。我們在這節裏,卽欲研究此種事項。

145. 定義 過二圓中心之直線,叫二圓之中心線。其長叫二圓的中心距離。

146. 定理 54. 二圓周於不在其中心線上之一點相會時,此二圓周更於其他一點再相會。

中心爲 O, O' 之二圓周,於不在其中心線 OO' 上之一點 A 相會,則此二圓周在 A 點外尙有一點相會。

證明 從 A 引 $AC \perp OO'$。於 AC 之延長上取 $CB = AC$。

聯 OA, OB, $O'A$, $O'B$。此時,因 OO' 是 AB 之垂直二等分線。

故 $OA = OB$, $O'A = O'B$。

故 B 在中心 O 及 O' 之二圓周上,卽二圓周於 B 點再相會。

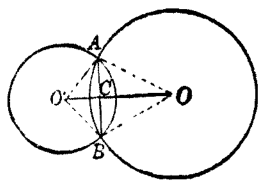


圖 134.

定義 二圓周於二點相會時,名此二圓爲相交。

【系】 相交二圓之公弦,爲二圓之中心線以直角二等分之

147 定理 55. 二圓於其中心線上之一點相會時,此二圓周不再於他點相會。

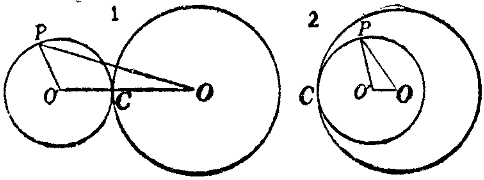


圖 135.

設中心 O, O' 之二圓周，於其中心線上之一點 C 相會，此二圓周不再於其他之點相會。

證明　於 O' 圓上 C 點外任意取一點 P。

聯 OP, $O'P$, 中心 O' 在 O 圓之外時(圖 1),

$$OP+O'P>OO'.$$

故 $$OP>OO'-O'P.$$

故 $$OP>OO'-O'C.\quad (\because\quad O'P=O'C)$$

故 $$OP>OC.\quad (\because\quad OO'-O'C=OC)$$

故 P 點在 O 圓之外，卽於 O' 圓周上之點，除 C 點外，均在 O 圓之外。

又　中心 O' 在 O 圓之內時(圖 2),

$$OP<OO'+O'P.$$

$$OP<OO'+O'C.\quad (\because\quad O'P=O'C)$$

$$OP<OC.\quad (\because\quad OO'+O'C=OC)$$

故 P 點在 O 圓之內，卽在 O' 圓周上除 C 點之外，均在 O 圓之內。

故在 O' 圓上之 P 點須在 O 圓之外或在 O 圓之內，決不能在 O 圓周上。卽二圓周 O 及 O' 於 C 點外不再相會。

定義　二圓周於唯一之點相會時叫二圓相切，名其點叫切點。

此時各圓在他圓之外時(圖 1)，叫二圓爲外切，一圓在他圓之內時(圖 2)，叫二圓爲內切。

【系 1】　二圓相切時其中心線過切點。

【系 2】　相切之二圓，於其切點，有一公切線(卽同時切於二圓之切線)。

148　兩個不相等之圓，不相交，不相切時，可以各圓全在他圓之外，也可以一圓全在他圓之內。故二圓之位置關係有如

次記各種:

I. 各圓全在他圓之外;

II. 外切;

III. 相交;

IV. 內切;

V. 一圓全在他圓之內。

今以二圓之中心距離為 d, 大圓之半徑為 R, 小圓之半徑為 r. 即可證明次記各事項。

於 I 時, $d>R+r$;

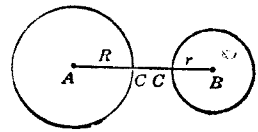
於 II 時, $d=R+r$;

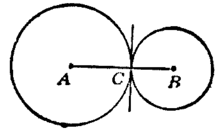
於 III 時, $R+r>d>R-r$;

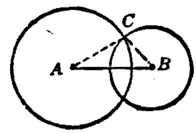
於 IV 時, $d=R-r$;

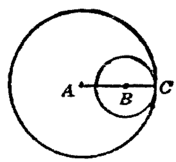
於 V 時, $d<R-r$.

因之卽得次定理。

I.


II.


III.


IV.


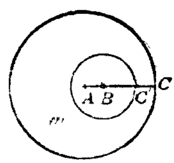
V.


圖 136.

定理 56. 二圓之中心距離: (I) 各圓在他圓之外時, 比半徑之和大; (II) 二圓外切時, 與半徑之和相等; (III) 二圓相交時, 比半徑之和小而比其差大; (IV) 二圓內切時, 與半徑之差相等; (V) 一圓全在他圓之內時, 比半徑之差小*。

【系】 此定理之逆亦眞。

練習問題

1. 二圓相等時, 其位置關係如何?

*同心圓為 v 之特別情形, 卽此時其中心距離 $d=0$。

2. 二圓之半徑爲 8 分及 6 分，其中心距離爲次記各値時，其位置關係如何？

(a) 10 分, (b) 14 分, (c) 1 分, (d) 2 分, (e) 18 分, (f) 22 分。

3. 半徑爲 4.8 寸，3.6 寸，4.2 寸之三圓，各圓互相外切於他二圓時，以三中心爲頂點之三角形，各邊長幾何？

4. 相切二圓之中心爲 O, O'，過切點之直線與二圓周 O, O' 之交點爲 A, B，證明半徑 $OA \parallel O'B$。

5. 過相切二圓切點之二直線，從各圓所割取之弧，其所對之弦平行，試證明之。

雜問題

1. 聯圓之平行各弦中點之直線，通過圓之中心。

2. 一直線與二同心圓相交時，其二圓周間所有之二部分相等。

3. 直徑二等分平行於接於其一端之切線之弦。

4. 圓內接四邊形之對角成直角時，從其交點所引一邊之垂直線之延長，二等分此邊之對邊。

〔註 此定理名伯拉美加答 (Brahmagupta) 定理，印人伯氏首發見之。〕

5. 從三角形外接圓上之一點，引三角形各邊之垂直線，其三垂足在一直線上。

二圓的位置關係，有不相交、相交、內切、外切及一圓在他圓之內種種，可以由二圓之中心距離與半徑之和或差比較而定之。即設中心距離爲 d，半徑爲 R 及 r，則

1. $d>R+r$，各圓在他圓之外。 2. $d=R+r$，相外切。

3. $R+r>d>R-r$，相交。 4. $d=R-r$，相內切。

5. $d<R-r$，一圓在他圓之內。 6. $d=0$，同心圓。

此即爲定理 56 之逆。蓋本節所述實只此一定理耳。

〔註　此名西摩松 (Simson) 定理，過三垂足之直線名西摩松線。〕

6. 述上定理之逆，並證明之。

7. 以三角形之三垂線(即由各頂點所引對邊之垂線)之三垂足爲頂點之三角形，叫原三角形之垂足三角形。試證三角形之三垂線二等分其垂足三角形之內角或外角。

8. 證明直角三角形內切圓之直徑，等於夾直角二邊之和與斜邊之差。

9. A, B 爲相內切二定圓之中心，P 爲內切於大圓而外切於小圓之任意圓之中心，則 $AP+BP$ 爲定長，試證明之。

10. 從一點所引一圓之二切線成角爲 $60°$ 時，此點與圓之中心之距離等於圓之直徑，試證明之。

第三章　軌跡及作圖題

第一節　軌　跡

149. 在前已證明過的，距二定點爲等距離之點，都在這二點聯結線段的垂直二等分線上；又此垂直二等分線上之點，距該二定點的距離都相等。這事項可以用軌跡一語，述之如次。

距二點爲等距離之點之軌跡，爲此二點聯結線段之垂直二等分線。

又距圓中心之距離等於半徑之點，均在圓周上。而圓周上之點距圓之中心之距離，均等於半徑之長。故也可以說：

距一點爲等距離之點之軌跡，爲以此點爲中心之圓周。

一般軌跡之定義如次：

定義　滿足於某一條件之點，皆在某線上，同時此某線上

距二點爲等距離之點，都在這二點聯結線的垂直二等分線上，這話的反面是垂直二等分線外之點，對於該二定點，均非等距離。又垂直二等分線上之點，距該二定點的距離都相等，這話的反面，即是規定了距二點不爲等距離之點，在這線上沒有。

條件之意，即如前例中之距二點爲等距離，或距圓之中心之距離等於半徑等等，即限定一個點所應遵守的範圍。適合於這個條件的，即叫滿足於條件。因之軌跡可以視爲具有某種條件的點所畫的線分，即此種點所通過的軌道，是合於某特別條件的直線或圓，決不逸出該範圍以外的。

之點，皆滿足於該某條件時，此某線名爲該某條件之軌跡。

換句話來說，就是滿足於某條件之軌跡，是必含有滿足於該條件之一切之點，而條件以外之點，則毫不含有的。如以幾何學以外之事項爲例，則如倘使爲官僚派的都穿用藍袍黑掛，而穿用藍袍黑掛的又只限於官僚派，則就可以說，穿用藍袍黑掛者，是官僚派的軌跡。

要判定某線是否爲滿足於某條件之軌跡，須證明次記二事項：

(i)　滿足於某條件之點，均在此線上。

(ii)　此線上之點，均滿足於某條件*。

我們於次將研究關於軌跡之若干事項。

150. 定理 **57.** 距角之二邊爲等距離之點之軌跡，爲此角之二等分線。

設 BE 爲 $\angle ABC$ 之二等分線，此時 BE 應爲距二邊 BA, BC 距離相等之點之軌跡。即到二邊 BA, BC 是等距離之點，均在 BE 上，而 BE 上之點，到二邊 BA, BC 之距離，均相等。

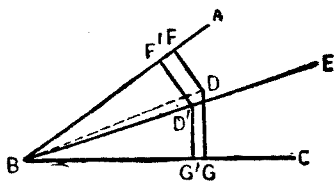


圖 137.

*或證明其反面的不在此線上的點，皆不滿足於該條件。

前已說過，確定一個軌跡須要證明二種事項，即 (I) 是適合於某條件的點，皆在該線上，(II) 是線上的點皆合於該條件，讀者須注意其如何加以證明。

要證明 BE 上的一切點，距 BA, BC 都是等距離，這是無限制而不可能的，因之只在 BE 上任意取一點，而證明其合於要求。因爲該一點是任意的一點，故 BE 上的無論那一點都可以，即 BE 上的一切點，均有此種性質。在 (II) 也是同樣任意取一點，而證明之。在這裏的任意二字是極其重要，而且的確要是任意的點，不能以特殊的一點，而證條件的一般適合，須特別留意。

證明　設 D 爲距 BA, BC 爲等距離之任意一點。

由 D 引 BA, BC 之垂線 DF, DG。聯 BD。

此時於 $\triangle DBG$, $\triangle DBF$ 中，$DG=DF$（假設），DB 公邊，$\angle DGB=\angle DFB=\angle R$。

故　$\triangle DBG\equiv\triangle DBF$（定理 16），故 $\angle DBG=\angle DBF$。

故直線 DB 二等分 $\angle ABC$，故 D 點在 BE 上。因 D 爲任意之距 BA, BC 相等距離之點，故凡距 BA, BC 爲等距離之點，皆在 BE 上。

次於 BE 上任意取一點 D'，從 D' 引 BA, BC 之垂線 $D'F'$, $D'G'$。

此時於 $\triangle D'BG'$, $\triangle D'BF'$ 中，$\angle D'BG'=\angle D'BF'$（假設），$BD'$ 公邊，$\angle D'G'B=\angle D'F'B=\angle R$。

故　$\triangle D'BG'\equiv\triangle D'BF'$，故 $D'G'=D'F'$。

卽 BE 上任意之點 D' 到 BA, BC 是等距離，故凡 BE 上之點，到二邊 BA, BC 均爲等距離。

因之，BE 是到 BA, BC 爲等距離之點之軌跡。

練習問題

1. 求過二定點之圓之中心之軌跡。
2. 求切於一角之二邊之圓之中心之軌跡。

151. 相交二直線所成角之二等分線有二。因爲二直線相交，共成四角卽二雙對頂角，但各組對頂角之二等分線，恰好接成一直線，故只有二線。因此由上記定理，可以推得次定理。

定理 **58.** 距相交二直線爲等距離之點之軌跡，爲二等分其所成角之二直線。

軌跡問題的出題法有二種，第一是證明何線是什麽的軌跡，這樣一形式，是和普通的幾何題一樣，而把軌跡提出的。另外一法是像這裏的習題，須解題的人，自己去發見軌跡的爲何種線而再加以證明。

練習問題

1. 仿定理 57 之證明法，直接證明定理 58。

2. 求切於相交二直線之圓之中心之軌跡。

3. 距二平行直線爲等距離之點之軌跡，爲過其公垂線之中點，而平行於二直線之直線。試證明之。

4. 求切於二平行直線之圓之中心之軌跡。

152. 預備問題　(a) 引與一定直線 AB 之距離爲 5 分，而平行於該直線 AB 之直線，這樣的直線有幾？(b) 距一定直線 AB 之距離爲 5 分之點之軌跡如何？

定理 59. 距一直線爲定距離之點之軌跡，爲在該直線兩側與之平行之二直線。

AB 爲既定之一直線，d 爲定距離。到 AB 之距離爲 d，而平行於 AB 之二直線爲 XY 及 $X'Y'$。此時，XY 及 $X'Y'$ 爲距 AB 之距離等於定長 d 之軌跡。

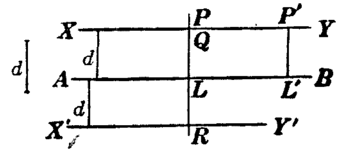


圖 138.

證明　設 P 爲到 AB 之距離等於 d 之任意一點，由 P 引 AB 之垂線 PL，直線 PL 與 XY 及 $X'Y'$ 之交點爲 Q, R。

此時，因 QL 爲 XY 與 AB 之距離，故等於 d。同樣 RL 亦等於 d。

今 P 到 AB 之距離 $PL=d$（假設），故 P 不得不與 Q 或 R 合一。故 P 點在 XY 或 $X'Y'$ 上。

即距 AB 之距離爲 d 之點，盡在 XY 或 $X'Y'$ 上。

次設 P' 爲 XY 上任意之一點，由 P' 引 AB 之垂線 $P'L'$，此時 $P'L'$ 爲 XY 與 AB 之距離，故 $P'L'=d$。即 XY 上之點與 AB 之距離皆等於 d。

同樣，可證 $X'Y'$ 上之點與 AB 之距離皆等於 d。

故 XY 及 $X'Y'$ 爲距 AB 之距離等於 d 之點之軌跡。

練習問題

1. 畫與一直線 AB 之距離爲 8 分之點之軌跡。

2. 求切於一直線而半徑爲 5 分之圓之中心之軌跡。

153. 由定理 43 及定理 41 的系 2 得次定理。

定理 **60.** 一線段以定角所對之點之軌跡，爲以此線段爲弦，含此角之二弓形之弧。

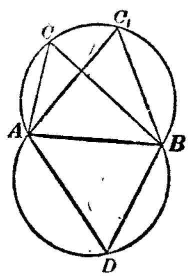


圖 139.

【系 1】 底邊爲定長，頂角之大小爲定角之三角形，其頂點之軌跡，爲以其定底邊爲弦而含此定角之二弓形之弧。

【系 2】 以一線段爲斜邊之直角三角形之頂點之軌跡，爲以此線段爲直徑之圓周。

練習問題

1. 求切於一直線上之一定點之圓之中心之軌跡。

2. 求切於一圓周上之一定點之圓之中心之軌跡。

3. 求自一直線外之一定點所引迄於此直線之線段之中點之軌跡。

4. 圓之各平行弦之中點之軌跡，爲垂直於此弦之直徑，試證明之。

5. 求一圓之相等弦之中點之軌跡。

6. 求一圓之過一定點之弦之中點之軌跡。

7. 有半徑 8 分之定圓，求切於此圓而半徑爲 5 分之圓之中心之軌跡。

第二節　作圖題

154. 比方說‘從圓外之一點，引圓之切線’或‘知二邊及其

夾角，作三角形，此種問題，叫做作圖題。即

定義　求作滿足於某條件之圖形之問題，叫做作圖題。所成之圖形，叫作圖題的解答，作圖的程序及方法，叫作圖法，或單叫作圖。

155. 如緒論(六)所述，解作圖題，可以用直尺、圓規、分度器、尺度及三角板等器械，如欲等分線段，可用尺度；等分角度，可用分度器；作與定角相等之角，也用分度器；引垂直線，可利用三角板之直角等等。

這在實用上，原極爲便利；但不能說是幾何學的作圖方法。

幾何學上之作圖法，具有陳規，不可違反，即使用之器械，只限於無分劃之直尺及圓規二種，其他任何器械，均不得使用。直尺用以引二點間之聯結線，或用以延長已定之有限直線。圓規用以畫圓。因之在最基本之處之作圖爲可能者，是限於次記三者。

(1)　引聯結二點之直線。

(2)　延長線段至任意長。

(3)　以任意之點爲中心，畫半徑爲任意長之圓周。

其他的一切作圖題，均須以此三者爲基礎，而求其解法。但在此 (3) 中，包括將一長度轉移到另一位置。於次我們即將述用此幾何學之方法而解作圖題之法。

156. 以前所用之作圖法與幾何學的作圖法之差異，即在尺度、分度器及三角板之使用與否。故在前的作圖法之內，端賴此三種器械而成之事項，如能設法以幾何學的方法而解決之，則在以前是可能的作圖題，用了幾何學的方法，也是完全可以解決的。今靠尺度、分度器及三角板所行之基本作圖，爲下記五

項。

(1) 二等分已知之線段

(2) 引已知角之二等分線。

(3) 於一直線上之一定點，引與此線成角等於已知角之直線。

(4) 於一直線上之一定點，引該直線之垂直線。

(5) 從一直線外之一定點，引該直線之垂直線。

今先將此五項以幾何學的方法處理之。

157. 作圖題 求二等分一已知之線段。

設 AB 為已知線段。

〔作圖〕 以 A 及 B 為中心，以較 AB 之半更長之半徑畫二相等圓*，設其交點為 K 及 R，聯 KR 與 AB 交於 C 點。

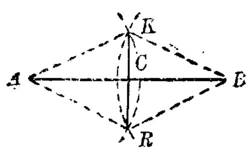


圖 140.

此時 C 即為 AB 之中點，即二等分 AB。

〔證明〕 聯 AK, AR, BK, BR。

此時於 $\triangle AKR$, $\triangle BKR$ 中，$AK=BK$, $AR=BR$（作圖），KR 公邊。故 $\triangle AKR\equiv\triangle BKR$（定理 6）。

故 $\angle AKR=\angle BKR$，故 KC 二等分等腰三角形 KAB 之

如於本題，解作圖題，先要說明已知之條件，再講出作圖法來，然後證明由作圖所得之圖形，是滿於所要之條件的。但若證明極為簡單時，即可於作圖中附述之。

*所謂畫圓，只須畫出其必要部分的圓弧。

頂角 AKB, 故 C 爲底邊 AB 之中點 (定理 5)。

此作圖所得之 KR 直線，不但二等分 AB, 且垂直於 AB, 故用同方法，卽可以作一定線段之垂直二等分線。

158. 作圖題　求作已知角之二等分線(參照 §97 習題 2)。

設 $\angle BAC$ 爲定角。

〔作圖〕　以 A 爲中心，以任意長之半徑畫圓，與 AB, AC 交於 R, K 二點。

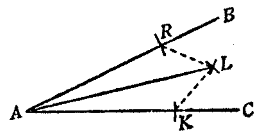


圖 141.

再以 R 及 K 爲中心，以任意之同半徑畫相交二圓，設其交點爲 L。

聯 AL, 卽所求之 $\angle BAC$ 之二等分線。

〔證明〕　聯結 LK, LR。於 $\triangle AKL$, $\triangle ARL$ 中，

$AK=AR$, $LK=LR$ (作圖), AL 公邊。

故 $$\triangle AKL \equiv \triangle ARL. \qquad \text{(定理 6)}$$

$$\therefore \quad \angle LAK=\angle LAR.$$

故　AL 二等分 $\angle BAC$。

159. 作圖題　求於一直線上之一定點，引一直線與該直線成角等於已知角。

設 $\angle ABC$ 爲已知之角，F 爲定直線 FG 上的定點。

〔作圖〕　以 B 爲中心，以任意長之半徑畫圓，交 AB 於 R, BC 於 K。再以 F 爲中心，BK 爲半徑畫圓弧 VL 交 FG 於 L; 以 L 爲中心及弦 KR 之長爲半徑畫圓截 VL 弧於 H。聯

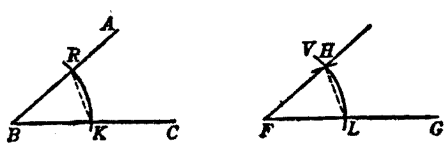


圖 142.

FH, 則 $\angle HFG$ 卽所求之角。

〔證明〕 聯 RK, HL, 則在兩三角形 BRK, FHL 中,

$$BR=BK=FL=FH,\ RK=HL. \qquad (\text{作圖})$$

故 $$\triangle BRK \equiv \triangle FHL.$$

故 $\angle HFL=\angle ABC$, 卽 $\angle HFG$ 爲所求之角。

160. 作圖題 於一直線上之一定點,求作其垂直線。

設 K 爲直線 AB 上之定點。

〔作圖〕 以 K 爲中心,以任意之半徑畫圓,與 AB 交於 L, R 二點。次以 L 及 R 爲中心,以較 LR 之半爲長之半徑畫圓,設其交點之一爲 G, 聯 KG, 卽所求之垂線。

〔證明〕 聯 GL, GR。此時

於 $\triangle GLK$, $\triangle GRK$ 中,

$KL=KR$, $GL=GR$ (作圖), GK 公邊.

故 $\triangle GLK \equiv \triangle GRK$.

故 $\angle LKG=\angle RKG$.

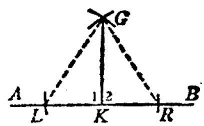


圖 143.

但 LKR 爲一直線, $\therefore$ $\angle LKG=\angle R$.

卽 GK 於 K 點垂直於 AB。

161. 作圖題 求從一直線外之一定點,作該直線之垂線。

設 K 爲直線 AB 外之一定點。

〔作圖〕 以 K 爲中心,畫一與 AB 相交之圓,設其二交點爲 R, L。次以 R 及 L 爲中心,以任意之同半徑畫相交之二圓,設其交點之一爲 G, 聯直線 KG, 卽所求。

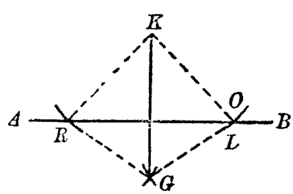


圖 144.

〔證明〕 聯 KL, KR, GL, GR, 則於 $\triangle KLG$, $\triangle KRG$ 中,

$$KL=KR,\ GL=GR\ (\text{作圖}),\ KG\ \text{公邊}.$$

故 $$\triangle KLG \equiv \triangle KRG.$$

故　$\angle LKG = \angle RKG$.

因之 KG 爲二等分二等邊三角形 KLR 之頂角 RKL 之直線。

故　KG 垂直於其底邊 RL。

卽是 KG 過 K 點而垂直於 AB 之直線。

162. 應用了以上所說明的五個作圖題，則以前用圓規、分度器、尺度及三角板所能解決之作圖題，現在不用此等器械，只用無分劃之直尺及圓規二者，卽是用幾何學的方法，也是可以解決的了。今再舉數例於次。

例 1.　作圖題　巳知二邊及其夾角，求作三角形。

設 b, c 爲巳知二邊之長，a 爲巳知之角。

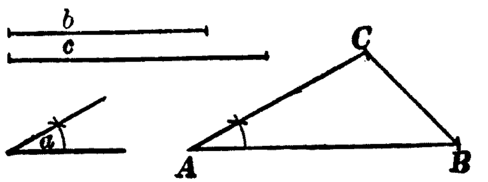


圖　145.

〔作圖〕　引等於 c 之線段 AB (用圓規及直尺)。

次作等於 $\angle a$ 之角 BAC (前是用分度器及直尺，現可照 §159 的作圖)。

於 AC 上取 $AC = b$ (用圓規割之)。

聯 BC (用直尺)。

此時 $\triangle ABC$ 卽所求。

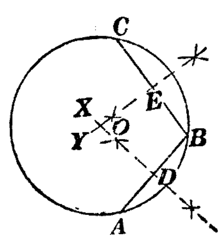


圖　146.

例 2.　作圖題　求定圓之中心。

設 ABC 爲定圓。

〔作圖〕　於圓周上任取三點 A, B, C，聯 AB, BC (用直尺)。

次引 AB, BC 垂直二等分線(前用直尺及三角板,現照 §157 的作圖)。

此二直線 DX, EY 之交點 O, 即所求之圓心。

例 3. 作圖題 求於圓周上之一定點,引圓之切線。

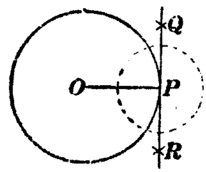


圖 147.

〔作圖〕 求圓的中心 O (照上例作圖)。聯 OP, 於 P 引 OP 之垂直線 PQ (前用三角板,現可照 §160 作圖),此 PQ 即所求之切線。

練習問題

1. 於一已知三角形,求作其外接圓。
2. 作一內切於已知三角形之圓。
3. 二等分一已知之圓弧。
4. 從圓外之一定點,引圓之切線。
5. 過一直線外之一點,引其平行直線。
6. n (整數)等分一已知之線段。
7. 作與已知二角之和及差相等之二角。
8. 已知次記各要素,求作三角形: (a) 二角及頂點間之邊。(b) 三角及其中一角之對邊。(c) 三邊。
9. 已知一邊,求作正方形。
10. 已知二隣邊,作矩形。
11. 已知二隣邊及其夾角,作平行四邊形。
12. 已知一對角線之長,求作正方形。

163. 只用直尺及圓規之作圖所能求得之角度,如次所記:

(a) 由於一直線上之一定點,引其垂線,可以得 90° 的角。

(b) 二等分 90° 之角,又二等分其一分角,順次如此分之,可以得 45°, 22°30′, 11°15′……等角。

(c) 由作等邊三角形可以得 60° 之角, 二等分 60° 之角,

再順次二等分之，可以得 $30^\circ, 15^\circ, 7^\circ 30'$ 等角。

(d)　與上所求得各角之 2 倍，3 倍，4 倍相當者，例如 75°，$105^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 240^\circ, 270^\circ$ 等。

練習問題

1.　三等分直角。

2.　作內接或外切於定圓之正方形，正八角形，正十六角形。

3.　作內接或外切於定圓正三角形，正六邊形，正十二邊形。

164.　關於三角形之作圖題中，次記一題，應特別注意之。

作圖題　已知二邊及其一邊之所對角，求作三角形。

設已知之二邊為 a, b，又 a 之對角為 $\angle\alpha$.

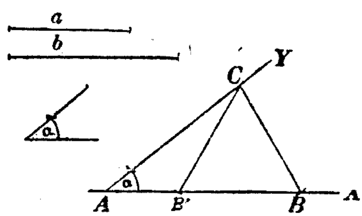


圖　148.

〔作圖〕　作 $\angle XAY = \angle\alpha$。

於 AY 上取 $AC = b$。

以 C 點為中心，a 為半徑畫圓，與 AX 或其延長（下圖）相交於 B 及 B' 二點。

聯 CB, CB'。

此時，如上圖，B 及 B' 均在 AX 上，則 $\triangle ABC$, $\triangle AB'C$ 均為滿足於條件之圖形，即解答有二。

若如下圖，B' 在 XA 之延長（限於 α 不是直角），則只有

$\triangle ABC$ 合於條件，即只有一種解答。

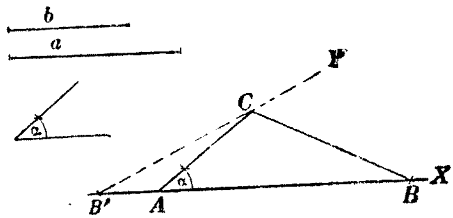


圖 149.

又若以 C 為中心，a 為半徑之圓，與直線 AX 不相交，則沒有三角形可作，即無解答。

又若此圓切於 AX 直線，則交點只有一點，故只有一三角形，因之解答也只有一，而是直角三角形。

〔注意〕 由此作圖題一想，也可以知道，一三角形之二邊，與他三角形之二邊各各相等，且有一組相等邊之對角亦相等時，二三角形不一定是全等的。即或是二三角形全等，或不全等。而於不全等時，則他一組相等邊之對角，當互為補角。

165. 次作圖題屢為解其他作圖題所引用，玆先述之。

作圖題　作以已知線段為弦，而有已知角之弓形。

設 AB 為已知之線段，$\angle x$ 為已知之角。

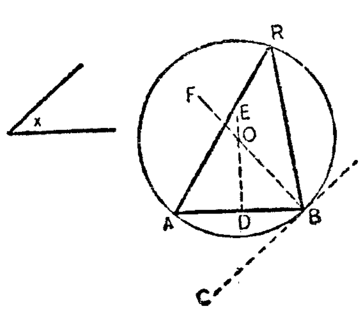


圖 150.

〔作圖〕 作 $\angle ABC=\angle x$。

於 B 引 BC 之垂直線 BF, 次引 AB 之垂直二等分線 DE。以 BF, DE 二線之交點 O 爲中心，OB 之長爲半徑畫圓。此時所生以 AB 爲弦之二弓形之內，在 $\angle ABC$ 之反對側者，卽 ARB 爲所求之弓形。

同樣，在 AB 之另一側，也可以照樣畫這弓形。

〔證明〕 從定理 46 甚明白。

練習問題

1. 從定圓截取含有定角之弓形。

2. 求作一三角形，內接於一定圓，使三角形的三角各等於他一已知三角形的角。

166. 解作圖題，是常常要利用軌跡的，今示其例。

作圖題 已知底邊之位置及大小，頂角及高，求作三角形。

設 BC 爲已定之底邊，$\angle a$ 爲已知之頂角，h 爲已知之高。

因所求三角形之頂點與 AB 之距離爲 h, 故此頂點在距離 AB 是 h 的點的軌跡上。又在這頂點，BC 的對角爲 $\angle a$, 故此頂點又在 BC 所對角爲 $\angle a$ 的點的軌跡上。

故此點不得不爲此二軌跡的交點，因得次記之作圖。

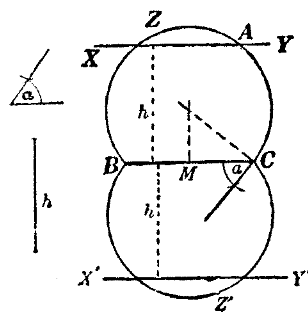


圖 151.

〔作圖〕 引平行於 BC 而與之距離爲 h 之二直線 XY 及 $X'Y'$（第一軌跡）。

次作以 BC 爲弦，含等於 $\angle a$ 之角之弓形，其弧爲 BZC 及 $BZ'C$（第二軌跡）。

XY 及 $X'Y'$ 與弧 BZC 及弧 $B'Z'C$ 之交點之一爲 A, 聯 AB, AC, 此時 $\triangle ABC$ 卽所求。

〔證明〕 $\triangle ABC$ 之底邊爲 BC 而頂角 $A=\angle\alpha$, A 與 BC 之距離卽三角形之高 $=h$。

故 $\triangle ABC$ 滿足於條件。

〔注意〕 作圖題因巳知要素之大小及位置之關係，有不能得解者，亦有可得一以上之解者。例如上記作圖題中，其在作圖中所用之二軌跡，可以全不相遇，或可以相切，也可以相交；因而其所得之解，可以爲沒有，或爲二個全等之三角形，或爲四個全等之三角形。

此種論巳知條件之要素之變化及於所求圖形之影響，叫做作圖題的檢討或吟味。

167. 上記解作圖題之方法，叫做軌跡交截法。其要點在想出所要之點是在二個軌跡之上，因以其交點爲所求之點。今再示一例於次。

作圖題　求距三角形三邊之無限直線爲等距離之點。

設 AB, BC, CA 爲 $\triangle ABC$ 之三邊。因所要之點爲距 AB, BC 是等距離的，故此點在這樣的軌跡上。又所要之點，距 BC, CA 也是等距離，故此點又在那樣的軌跡上，卽此點是這二軌跡的交點，因得次作圖。

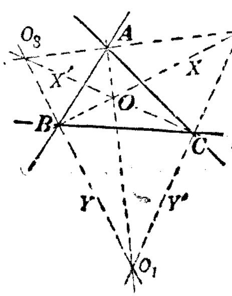


圖 152.

〔作圖〕 引二等分 AB, BC 所成角之二直線 X 及 Y (第一軌跡)。

再引二等分 BC, CA 所成角之二直線 X' 及 Y' (第二軌跡)。

設 X 與 X' 及 Y' 之交點爲 O 及 O_2, Y 與 X' 及 Y' 之交點爲 O_1 及 O_3; 則 O, O_1, O_2, O_3 卽爲所求之點。

〔證明〕 O 在 X 上，故距 AB, BC 之等距離，同時 O 亦在 X', 故距 BC, CA 也是等距離。因之 O 點距 BC, CA, AB 三直線爲等距離。其他三點也可以同樣證明其合於所求。

〔檢討〕 X 不與 X' 及 Y' 中之任何線平行，故必相交而有二交點。Y 亦不平行於 X' 或 Y'，故亦常有二交點。因之此作圖題之解答，常有四點。

168. 上記作圖題中之 O 點，我們在前已經知道，那是 $\triangle ABC$ 的內心。卽以 O 爲中心，以 O 到三角形一邊之距離爲半徑畫圓，切於三邊，卽是內切圓。又在上情形中，以 O_1 做中心，以 O_1 到邊 BC 的距離爲半徑畫圓，則切於 $\triangle ABC$ 之一邊及他二邊之延長上。在 O_2 及 O_3 也有相同的情形。這樣的圓，叫三角形的旁切圓。

定義　切於三角形之一邊及他二邊之延長上之圓，叫三角形的旁切圓，其中心叫三角形的旁心。

練習問題

1. 於 §167 之圖，證明 O_1, O_2, O_3 在二等分內角或外角的直線上。

2. 過一定點畫圓，且於一直線上之一定點切於該直線。

3. 過一定點畫圓，且於一圓周上之一定點切於該圓。

4. 已知底邊、頂角及頂點到底邊之中線，求作三角形。

5. 已知底邊、高及頂點到底邊之中線，求作三角形。

6. 以定長爲半徑，作外切於互相外切之二圓。

169. 當作圖題之解法不易發見時，可依照次記各例而求其解。卽先假定問題已經解決，圖形已經畫好，用若干補助線段，調查其性質，以求畫此圖形之必要條件，這叫做解析。

例 1. 作圖題　於三角形 ABC，引一直線平行於 AB，與 AC, BC 之交點爲 P, Q，使 $PQ=AP+BQ$。

〔解析〕 假定問題已經解答，於 PQ 上取 PX 等於 AP，則 $\triangle APX$ 爲二等邊三角形，故 $\angle PAX=\angle PXA$，

但 $PQ \parallel AB$，故 $\angle AXP=\angle BAX$ (錯角)。

故 $\angle BAX=\angle CAX$ 卽 X 在 $\angle BAC$ 之二等分線上。

又因 $QX=QB$，故與前記同樣，X 亦在 $\angle ABC$ 之二等分線上。

故 X 點爲 $\angle BAC$ 及 $\angle ABC$ 之二等分線之交點。卽 PQ 過此交點 X。

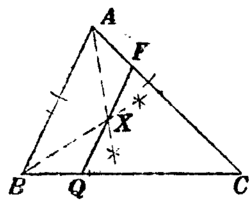


圖 153.

因之得次記作圖法。

〔作圖〕 引 $\angle BAC$，$\angle ABC$ 之二等分線，其交點爲 X。過 X 引平行於 AB 之直線與邊 AC，BC 交於 P，Q。聯 PQ 卽所求。

〔證明〕 AX 是 $\angle BAC$ 之二等分線，故 $\angle BAX=\angle PAX$。

又 $PQ \parallel AB$，故 $\angle BAX=\angle PXA$，故 $\angle PAX=\angle PXA$，故 $AP=PX$。

同樣，可證 $BQ=QX$，故 $PQ=PX+XQ=AP+BQ$。

〔檢討〕 X 點必可求得，而且只有一點，又惟過 X 點之平行線方合於條件，故此問題常得一解答。

例 2. 作圖題 <u>已知二邊及在第三邊上之中線，求作三角形。</u>

設已知之二邊及中線爲 a, b 及 m。

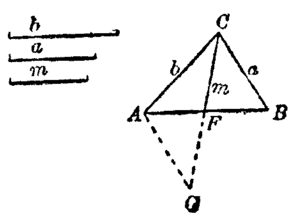


圖 154.

〔解析〕 設 $\triangle ABC$ 爲滿足於條件之三角形。

其二邊 BC, CA 及中線 CF 之長等於 a, b 及 m。

於 CF 之延長上取 $FG=CF$。聯 AG；

則於 $\triangle BCF$, $\triangle AGF$ 中，

$AF=FB$ (假設)，$CF=FG$ (作圖)，$\angle AFG=\angle CFB$ (對頂角)。

故 $\triangle BCF\equiv\triangle AGF$, 故 $AG=BC$。

因之 $\triangle ACG$ 之三邊 AC, CG, GA 各與 $b, 2m, a$ 相等。

卽此 $\triangle ACG$ 各邊均爲已知之長，可以作圖。而後以 F 爲 CG 之中點，而求得 F。

因此 B 點之位置，亦可決定。因得次記的作圖法。

〔作圖〕　作 $\triangle ACG$, 使其三邊 AC, CG, GA 各與 $b, 2m, a$ 相等。次求 CG 之中點 F, 聯 AF, 於延長上取 $FB=AF$。聯 BC。此時 $\triangle ABC$ 卽所求。

〔證明〕　$\triangle AGF$, $\triangle BCF$ 因作圖，二邊及其夾角相等，故全等。故 $BC=GA=a$。而 $CG=2m$, F 爲 CG 之中點，故 $CF=m$。AC 本等於 b。

故 $\triangle ABC$ 之二邊 BC 及 AC 與其中線 CF 是等於 a, b 與 m, 卽 $\triangle ABC$ 合於所求。

〔檢討〕　$\triangle ACG$ 若成立時，必可以作得一所要之三角形。又可以求得 $\triangle ABC$ 時，則 $\triangle ACG$ 必成立，故依三角形二邊和大於他一邊之條件，卽如

$$2m<a+b,\ a<b+2m,\ b<a+2m$$

能成立，則 $\triangle ACG$ 之作圖爲可能，而有一解。但 $2m\geqq a+b$, $a\geqq b+2m$ 或 $b\geqq a+2m$ 中有一式成立時，則沒有解答。

練習問題

1. 引直線平行於 $\triangle ABC$ 之一邊 AB, 與 AC, BC 之交點爲 P, Q; 使 PQ 之長等於一已知之長。

2. 於定圓引一切線，使與一定直線平行。

3. 過定點求於定圓上，作定長之弦。

4. 已知二角及周，求作三角形。

5. 已知斜邊及他二邊之差，求作直角三角形。

6. 過定角 AOB 內之一定點 P, 引直線使在此角二邊間

所有之部分，為 P 所二等分。

7. 外切於定圓，求作與已知三角形等角之三角形。

170. 定義 二圓之公切線，其二切點在中心線之同側者（如 CD），叫外公切線；二切點在中心線之異側者（如 AB），叫內公切線。

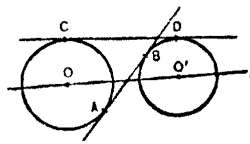


圖 155.

171. 作圖題 求於不相等之二定圓作其公切線。

設 O, O' 為二定圓之中心，其半徑為 R, r 而 $R>r$。

〔解析〕 設 DF 為公切線，其切點為 D 及 F。

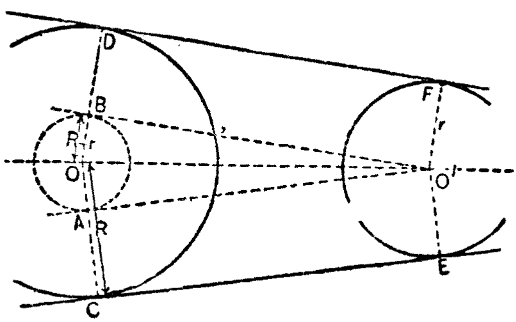


圖 156.

聯 $OD, O'F$。

過 O' 平行於 DF 引 $O'B$ 與 OD 交於 B 點。

此時因 $DBO'F$ 為矩形，故 $\angle OBO' = \angle R$，而 $BD = FO' = r$。

故 $O'B$ 為在 B 點切於中心為 O 而半徑為 OB 之圓之切線。而此半徑 OB，若 DF 為外公切線時（圖 156），則等於 $R-r$，若 DE 為內公切線時（圖 157），則等於 $R+r$. 因之得作圖如次記。

〔作圖〕 以大圓之中心 O 為中心，以 $R-r$ 及 $R+r$ 為半

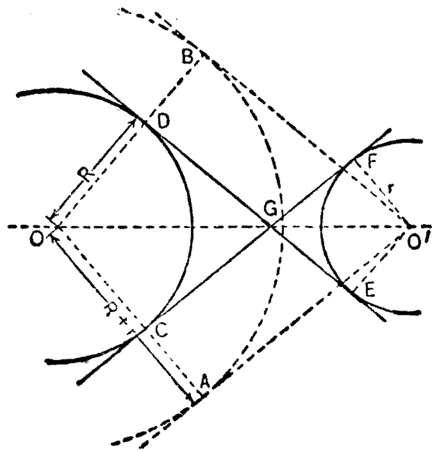


圖 157.

徑畫圓(圖 156 及圖 157)。從 O' 引此圓切線 $O'B$, 其切點爲 B。聯結 OB, 與定圓之交點爲 D。

次平行於 OD 引半徑 $O'F$ ($O'E$), 聯 DF (或 DE) 卽所求之切線。

〔證明〕 試各自爲之。

〔檢討〕 外公切線之數,與從 O' 引中心爲 O, 半徑爲 $R-r$ 之圓之切線數相等。內公切線之數,與從 O' 引中心爲 O, 半徑爲 $R+r$ 之圓之切線數相等。因之有如次記之結果。

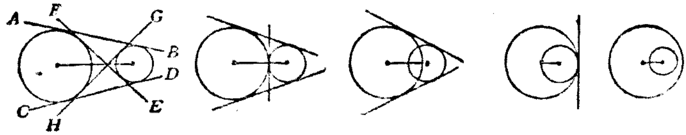


圖 158.

二圓之位置關係	外公切線數	內公切線數
$OO'>R+r$ (各圓全在他圓之外時)	2	2
$OO'=R+r$ (二圓外切時)	2	1
$R+r>OO'>R-r$ (二圓相交時)	2	0
$OO'=R-r$ (二圓內切時)	1	0
$OO'<R-r$ (一圓在他圓之內時)	0	0

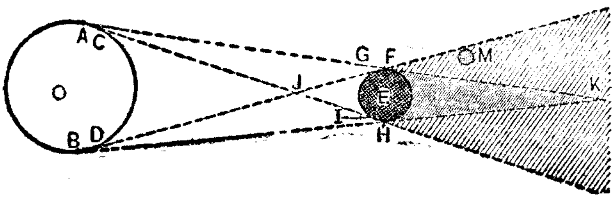


圖 159.

外公切線及內公切線，可應用以說明日蝕、月蝕之理，如圖所示。設以 S 表太陽，E 表地球，M 表月球。若 M 在 FK 線之上(或 HK 線之下)的地球的陰影中，則爲部分蝕，因太陽光有一部分被地球所掩遮而不能照着。若在 FK 與 HK 的中間，則太陽光全部被地球遮阻，而成爲全蝕。在部分蝕的區域，叫做地球的半影，在全蝕的區域，叫做本影。若月球行在太陽與地球之間，也有同樣情形，而成日蝕，地球若處於月球之影中，則地上人面看不見太陽光。

雜問題

1. 於相等二圓，引其公切線。
2. 已知次記要素，作等腰三角形：

(a) 底邊與頂角。 (b) 底邊與外接圓半徑。

(c) 底邊與內切圓半徑。 (d) 周與高。

3. 已知次記要素,作直角三角形:

(a) 斜邊及他一邊。 (b) 一邊及在斜邊所引之高。 (c) 斜邊及在斜邊之高。 (d) 夾直角之一邊及內切圓之半徑。 (e) 內切圓之半徑及一銳角。

4. 給次要素,作三角形:

(a) 底邊,高度及底角之一。 (b) 一邊與在其一端之角,他二邊之和。 (c) 一邊與在其一端之角,他二邊之差。

5. 三角形底邊之位置及大小與頂角同爲已定時,其內心及垂心之軌跡如何?

6. 一定長之線段之兩端,於交成直角之二直線上移動時,此線的中點的軌跡如何?

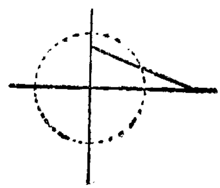


圖 160.

7. 一線段之一端,置於一圓周上保持與他一定直線平行之位置而移動時,其他端之軌跡如何 (圖 161)?

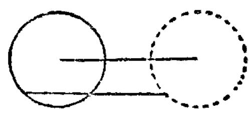


圖 161.

8. 求從一定點所引以他一定點爲中心之諸圓之切線之切點之軌跡 (圖 162)。

9. 求以從一定點到一定直線所引線段爲一邊而作成之諸正三角形之頂點之軌跡 (圖 163)。

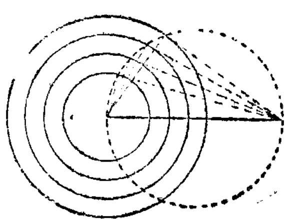


圖 162.

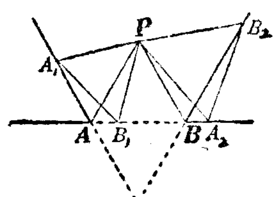


圖 163.

10. 一直線 AB 之同側有二定點 P, Q; 於 AB 上求一點 X, 使 $\angle PXA = \angle QXB$ (圖 164)。

11. 一直線 AB 之同側有二定點 P, Q; 今自 P 出發到 AB 上一點,再回到 Q, 求其爲最短路程之 AB 上之點(圖 164)。

12. 不使用圓之中心,求於圓周上之定點引圓之切線 (圖 165)。

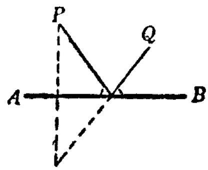


圖 164.

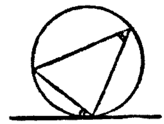


圖 165.

13. 不使用二直線之交點,引二等分其所成角之直線。

14. 已知一邊及對角線,求作矩形。

15. 從定角 ABC 之一邊上之定點 P, 引直線 PQ 與 AC 交於 Q, 使 $\angle APQ$ 爲 $\angle AQP$ 之三倍。

第四章 面 積

第一節 矩形及正方形

172. 定義 平面形所圍的平面部分之大小，叫平面形的面積。兩平面的面積相等叫做兩平面形相等，或叫兩形等積。

表示相等用記號＝。

根據了上述的定義，我們可以說

全等的平面形相等*。

例如 (i) 一切全等的三角形；

(ii) 一切全等的平行四邊形，特別是二隣邊相等的一切矩形，一邊相等的一切正方形；

(iii) 一切半徑相等的圓；

面積都是相等的。

但兩個平面形的相等，不一定要是全等了才成，非全等的平面形，其面積也可以相等，例如全等平面形之和或差，雖不得全等的圖形，而面積則常常是相等的。

173. 如以 1^{m}, 1^{cm}, 1^{km} 作為長的單位時，則其對應的面積單位是 1^{qm}, 1^{qcm}, 1^{qkm}**，凡測面積時，常以長的單位為一邊的正

計算面積的方法，在算術中已略有述及。這裏所要說的，是把此種知識再弄得準確些，又和代數學上所學過的幾個公式，也生連絡。

*全等的平面形，面積必然相等，但面積相等的平面形，未必一定是全等，而且大都是可以不全等的，須加注意。

**m, cm, km 是標準制長度的略號，可參看算術講義 50 頁。q 是方的意思。

方形的面積，作爲單位。

一平面形的面積爲面積單位的 n 倍時，則謂'表此面積之數爲 n'，或'此面積之數值爲 n'，或略稱'此面積爲 n'。

174. 兩隣邊爲 AB, CD 的矩形，叫做 AB, CD 所包矩形。一邊爲 AB 的正方形，叫做 AB 上的正方形。

定義 二線段所包矩形，是說二隣邊等於此二線段的矩形。一線段上之正方形，是說一邊等於此線段的正方形。

175. 定理 61. 表矩形面積的數，等於表二隣邊的數的積。

$ABCD$ 是矩形，設以 S 表其面積，a 及 b 爲表二隣邊 AB, BC 之數，則 $S=ab$。

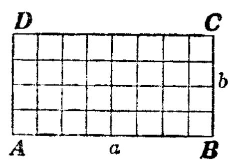


圖 166.

證明 (i) 設 a 及 b 均爲整數，則 a 等分 AB, b 等分 BC 之後，其各部分都等於長的單位。

今於 AB 上之各分點，引平行於 BC 之直線，過 BC 上的各分點，引平行於 AB 之直線；則將矩形 $ABCD$ 分成 ab 個小正方形了。

這些小正方形的一邊，等於長的單位，所以此種小正方形就是面積的單位。即 $ABCD$ 含有 ab 個面積單位，故 $S=ab$。

(ii) a 及 b 雙方或一方是分數時，則先化作同分母的分數形，$a=\frac{m}{p}$, $b=\frac{n}{p}$。此時再 m 等分 AB, n 等分 BC，則其各部分的長，等於長的單位的 $\frac{1}{p}$。

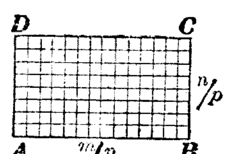


圖 167.

今過此各分點，照 (i) 同樣引平行直線時，則分全形爲 mn 個小正方形。此各小正方形之一邊，等於

單位長的 $\frac{1}{p}$，故其面積爲等於面積單位的 $\frac{1}{p^2}$。

故 $ABCD$ 等於面積單位的 $\frac{mn}{p^2}=\frac{m\cdot n}{p\cdot p}$ 倍。

卽
$$\boldsymbol{S=\frac{m\cdot n}{p\cdot p}=\frac{m}{p}\cdot\frac{n}{p}=a\cdot b.}$$

簡略之，述此理如次：

定理 62. 矩形之面積等於二隣邊之積。

此種定理的記述，大都是採用此簡略之形式的。

因這定理中所記的關係，故 AB, BC 所包矩形，也有用 $AB\cdot BC$ 表示的。但 AB, BC 原無表示線段的數値的意味，而只表線段本身，故此 $AB\cdot BC$ 的記號不過是表二邊所包矩形的一種記號，並不作其他意義使用。

【系 1】 正方形之面積等於其邊之平方。

設 a 爲表正方形一邊之數，S 爲表其面積之數，則 $S=a^2$。

故 AB 上之正方形，卽可以 AB^2 表之，但 AB 非表線段之數値，而表線段本身，故 AB^2 不過是表 AB 上正方形之一記號耳。

【系 2】 二線段之積，由其所包矩形之面積表之。一線段之平方，由其上之正方形表之。

練習問題

1. 設矩形之面積一定不變，若其一邊 2 倍，3 倍……n 倍時，則他一邊應如何變化？

2. 正方形之一邊 2 倍，3 倍……n 倍時，其面積如何變化？

3. 說明正方形之面積，爲其一邊之函數，且以曲線表其變化。

176. 與代數公式 $m(a+b+c+\cdots)=ma+mb+mc+\cdots$

對應之幾何定理。

設 AB 上有 C, D, E 各分點，PQ 爲另一線段，而表 AC, CD, DE, EB 及 PQ 各數爲 a, b, c, d 及 m。

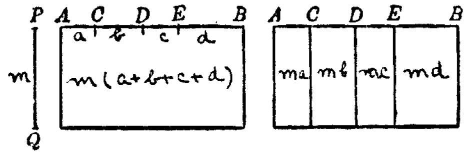


圖 168.

此時表 AB 之數爲 $a+b+c+d$，故 $m(a+b+c+d)$ 是表矩形 $PQ\cdot AB$ 的面積的數。而 ma, mb, mc, md 是表矩形 $PQ\cdot AC$, $PQ\cdot CD$, $PQ\cdot DE$, $PQ\cdot EB$ 的面積的數。

由代數學之公式 $m(a+b+c+d)=ma+mb+mc+md$。

故 $\boldsymbol{PQ\cdot AB=PQ\cdot AC+PQ\cdot CD+PQ\cdot DE+PQ\cdot EB}$.

卽得次記定理：

定理 63. 二線段所包之矩形，等於其一與其他一線段之各部所包矩形之和。

此亦可由上圖依照幾何學的方法證明之。

177. 與代數公式 $\boldsymbol{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$ 對應之幾何定理。

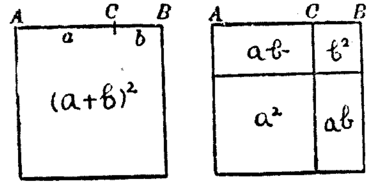


圖 169.

線段 AB 是 AC, CB 之和，表 AC, CB 之數各爲 a, b；則表 AB 者爲 $a+b$。

故 $(a+b)^2$ 爲表正方形 AB^2 面積之數，而 a^2, b^2, ab 各爲表正方形 AC^2, 正方形 CB^2 及矩形 $AC\cdot CB$ 之面積者。

由代數學的公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。

故 $\boldsymbol{AB^2=AC^2+2AC\cdot CB+CB^2}$.

即得次記定理：

定理 64. 二線段和上之正方形，等於各線段上正方形之和，加其所包矩形之二倍。

此亦可由上圖依照幾何學的方法證明之。

178. 與代數公式 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 對應之幾何定理。

線段 AC 爲 AB, CB 之差，表 AB, CB 之數各爲 a, b，則表 AC 者爲 $a-b$。

故 $(a-b)^2$ 爲表正方形 AC^2 的面積的數。

而 a^2, b^2 及 ab 各爲表正方形 AB^2，正方形 BC^2 及矩形 $AB\cdot BC$ 之面積者。

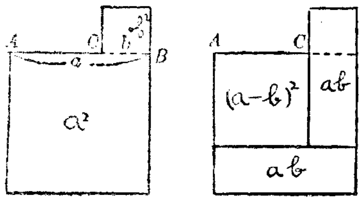


圖　170.

由代數學公式 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$。

故　$AC^2=AB^2-2AB\cdot BC+BC^2$.　即得次定理：

定理 65. 二線段差上之正方形，等於從各線段上正方形之和，減去其所包矩形之二倍。

此亦可就上圖以幾何學的方法證明之。

179. 與代數公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 對應的幾何定理。

C 爲線段 AB 上之一點，表 AB, AC 之數各爲 a, b，則表 $AB+AC$ 之數 $a+b$，表 $AB-AC$ 卽 BC 之數爲 $a-b$.

故 $(a+b)(a-b)$ 爲表 AB, AC 之和及其差所包矩形之面積。

又 a^2, b^2 各爲表正方形 AB^2，正方形 AC^2 之面積。

由代數學公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。

故　$AB^2-AC^2=(AB+AC)(AB-AC)$.　因得次定理：

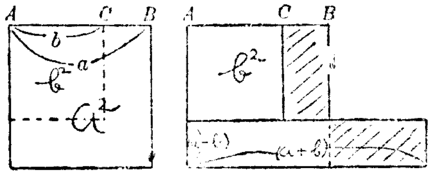


圖 171.

定理66. 二線段上正方形之差，等於其和及差所包之矩形。

此亦可就上圖以幾何學的方法證明之

練習問題

1. 試由次記代數學公式導出幾何學定理:

(a) $a(b-c)=ab-ac.$ (b) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2).$

(c) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$

2. 線段 AB 之中點爲 M, 線外有一點 P, 證明 $AP^2+BP^2=2(AM^2+MP^2)$。并述此事項爲一般之定理。

第二節 多角形之面積

180. 復習問題 問三角形之底邊及高之定義。

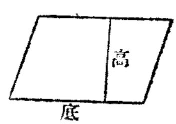


圖 172.

定義 平行四邊形之任何邊，均可名之曰底邊。底邊與其對邊之距離，名曰平行四邊形之高。

181. 定理 67. 底邊相等，高相等之兩平行四邊形相等。

設兩平行四邊形 $ABCD$, $EFGH$ 中，底邊 BC, FG 相等，且高度亦相等時，則兩形相等。

證明 以 □$EFGH$ 疊合於 □$ABCD$ 上，使底 FG 與 BC 相合，設 E 及 H 落下之點，各爲 E' 及 H'。此時因二平行四

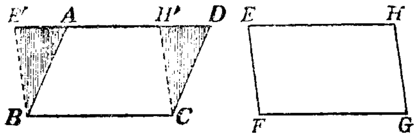


圖 173.

邊形之高度相等,故 $E'H'$ 落在 AD 直線上。今比較 $\triangle ABE'$, $\triangle DCH'$, 則因此二三角形有二邊及夾角相等,故為全等形。

而從全圖形上取去了 $\triangle ABE'$ 或 $\triangle DCH'$ 時,各得平行四邊形 $ABCD$ 或 $E'BCH'$。

故 $\square ABCD = \square E'BCH'$, 因之 $\square ABCD = \square EFGH$。

【系 1】 平行四邊形等於與之等底及等高之矩形。

【系 2】 平行四邊形之面積等於其底及高之積。($S=bh$)

【系 3】 兩相等平行四邊形之底邊(高)相等時,其高(底邊)亦相等。

182. 定理 68. 三角形等於與之等底等高之平行四邊形之二分之一。

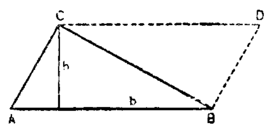


圖 174.

如圖,作平行四邊形,卽容易證明之。 (學者試自爲之)

【系 1】 三角形之面積等於其底邊及高之積之二分之一。($S=\frac{1}{2}bh$)

【系 2】 等底等高之兩三角形相等。

【系 3】 於同底邊上,在底邊同側之兩相等三角形,其頂點之聯結線,平行於底邊。

【系 4】 正多角形之面積,等於內切圓之半徑及周之積之二分之一。

練習問題

1. 平行四邊形用平行於其一邊之直線 n (整數)等分之。

2. 在同底邊同側之三角形，面積為定值之頂點之軌跡如何？

3. 證明三角形為其一中線所二等分。

4. 證明三角形之重心與各頂點所聯成之直線，三等分三角形。

5. 順次聯結四邊形各邊之中點所生之平行四邊形，為原形之二分之一，試證明之。

6. 兩三角形之二邊各各相等，其所夾之角成補角時，證明此兩三角形相等。

183. 復習問題　問梯形之定義？

定義　梯形之平行二邊間之距離，名其高。

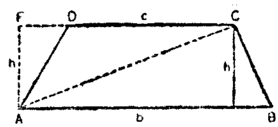


圖 175.

令 b, c 為表梯形之平行二邊之數，h 為表其高之數，此時由梯形之對角線所分成兩三角形之面積，為 $\frac{1}{2}bh$ 及 $\frac{1}{2}ch$，故設梯形之面積為 S；則

$$S=\frac{1}{2}bh+\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}(b+c)h.$$

因之得次記定理。

定理 69. 梯形之面積等於其平行二邊之和及其高之積之二分之一。

184. 實測多角形地面之面積時，得用次二法。

(i) 例如欲實測多角形 $ABCDE$ 之面積，先過其一頂點 A 引基本線 AX，次從各頂點引垂直於基本線之 BB', CC', DD', EE' 各線，并測其長。

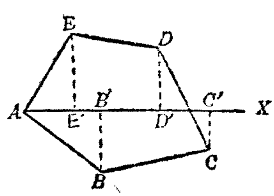
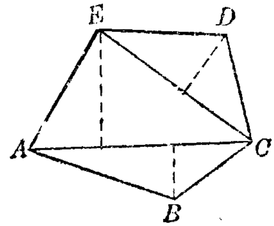


圖 176.

又次測各垂線之足 B', C', D', E' 與 A 之距離。

如此則已將全形分割若干三角形及梯形，計算其面積而加減之卽可。



(ii) 引要實測之多角形 $ABCDE$ 之互不相交之對角線，將原形分割爲若干之三角形。由測得各三角形之底及高，計算其面積之和卽可。

圖 177.

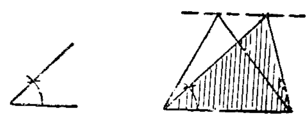
練習問題

1. 設上記 (i) 之圖所用者，爲百分之一之縮尺，今使用尺就圖量得必要線段之長，而計算該多角形面積之實際大小。

2. 照上題所記求上 (ii) 之圖中多角形之面積。並與上題之結果比較之。

第三節 變形問題

185. 作圖題 與已知三角形等積，共有其底邊，且有一角等於已知角，求作三角形。



作圖可由右圖而自悟，證明亦極簡單。

圖 178.

186. 作圖題 與已知三角形等積，共有其一底角，且有一邊等於已知線段，求作三角形。

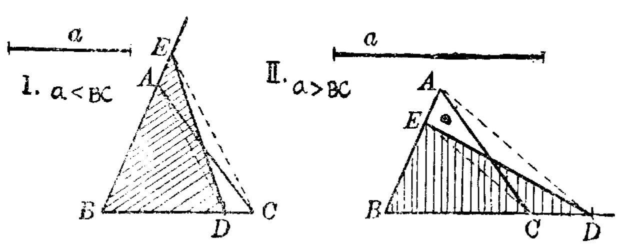


圖 179.

$\triangle ABC$ 爲已知三角形，$\angle B$ 共有，a 爲已知線段。

〔作圖〕 於底邊 BC 或其延長上取點 D, 使 $BD=a$。次聯 AD, 引 CE 平行於 AD, 與 AB 或其延長交於 E。聯 ED。$\triangle EBD$ 卽所求。

〔證明〕 $\triangle ADC=\triangle ADE.$ (定理 68 系 2)

於 I 圖雙方各加以 $\triangle ABD$,
於 II 圖自 $\triangle ABD$ 中各減雙方; } 則得

$\triangle ABC$ 或 $\triangle EBD$, 故 $\triangle ABC=\triangle EBD$。

而 $\triangle EBD$ 與 $\triangle ABC$ 共有一底角 B, 其底邊等於 a, 故 $\triangle EBD$ 卽合所求。

〔檢討〕 試各自爲之。

187. 結合上記二個作圖題，可解次記之作圖題。

作圖題 與已知三角形等積，有已知底邊，且使一底角等於已知角，求作三角形。

練習問題

1. 與已知平行四邊形等積，作與之同底：(*a*) 矩形，(*b*) 菱形。

2. 與已知三角形等積，作其有同底之 (*a*) 二等邊三角形，(*b*) 直角三角形，(*c*) 頂角爲已知角 α 之三角形。

3. 與已知三角形等積，且含有一已知角，求作平行四邊形。

188. **作圖題** 作與已知多角形等積，而邊數較原形少一之多角形。

設 $ABCDEF$ 爲已知 n 邊形。求作其等積的 $(n-1)$ 邊形。

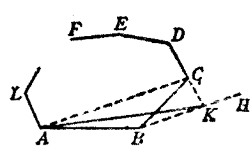


圖 180.

〔作圖〕 引對角線 AC, 過 B 引 BK 平行於 AC 與 DC 之延長交於 K,

聯 AK。此時 $AKDEF$……為所求之多邊形。而有 $(n-1)$ 邊。

〔證明〕 $\triangle DBQ$, $\triangle DBC$ 在同底邊 DB 上，而高相等，故 $\triangle ACB=\triangle ACK$。因之加多邊形 $ACDEF$……於雙方，其和仍為相等，即 $ABCDEF\ldots\ldots=AKDEF\ldots\ldots$。

〔檢討〕 此種作圖常為可能。解答之數亦不一，因對角線可以任意取，而結果即不同。

189. 前條所記之作圖法，若反覆行施，則其邊數逐一減少，而最終達到與已知多角形等積之三角形。即可以解次作圖題。

作圖題 作與已知多角形等積之三角形。

190. 定理 **70.** 過平行四邊形對角線上之一點，平行於其二隣邊引直線，所生四平行四邊形之中，不為原對角線所分割之二平行四邊形相等。

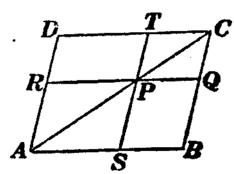


圖 181.

$ABCD$ 為平行四邊形，過其對角線 AC 上之一點 P，引平行於 AB, BC 之 RQ, ST 與其周交於 Q, R, S, T。

求證 $\square RPTD=\square PSBQ$.

證明 $\triangle ABC=\triangle ADC$,

$$\triangle ASP=\triangle ARP,\ \triangle PQC=\triangle PCT.$$

故 $\triangle ABC-\triangle ASP-\triangle PQC$

$=\triangle ADC-\triangle ARP-\triangle PTC$.

即 $\square PSBQ=\square RPTD$.

〔注意〕 上圖之平行四邊形中，$ASPR$ 及 $PQCT$ 名沿對角線 AC 之平行四邊形，而 $SBQP$ 及 $RPTD$ 名其餘形。

【系】 商 ab/c 可以面積等於 ab，而一邊等於 c 之矩形之他一邊表之。

191. 作圖題 作與已知矩形等積，且有一邊等於已知線

段之矩形。

設 $ABCD$ 爲已知之矩形，a 爲已知之線段。

〔作圖〕 延長 AB，於其延長上取 $BE=a$，聯 EC 與 AD 之延長交於 F。從 E 及 F 引平行於 BC 及 AB 之直線其交點爲 G，又與 BC 及 DC 之延長交於 H, K；則 $CHGK$ 爲所求之矩形。

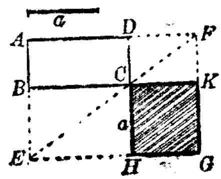


圖 182.

〔證明〕 矩形 $CHGK$ 之一邊 $CH=BE=a$，而由上記定理 70 知矩形 $CHGK=$矩形 $ABCD$。

〔檢討〕 常得一解。

由此作圖題可以導出次記之作圖題。

作圖題　設 a, b, c 爲表線段之長之數，求作用 ab/c 所表線段之長。

練習問題

1. 與已知平行四邊形等積，而有其等角，且含有一已知邊，求作平行四邊形。

2. 作與已知三角形等積，且有一已知邊之矩形。

3 作與已知多角形等積，且有一已知邊之矩形(應用問題 2 及 § 188 則可解)。

第四節　畢他哥拉斯定理及其應用

192. **定理 71**. 直角三角形斜邊上正方形，等於他二邊上正方形之和。

直角三角形 ABC 之斜邊爲 AC，則

$$AC^2=AB^2+BC^2.$$

證明　$ACDE$, $ABHK$, $BCFG$ 各爲 AC, AB, BC 上的正方形。

過 B, 平行於 AE 引 BIL 與 AC, ED 交於 I, L。聯 BE, KC。此時 $\triangle ABE \equiv \triangle ACK$. ($\because$ $AK=AB$, $AC=AE$, $\angle KAC=\angle BAE$).

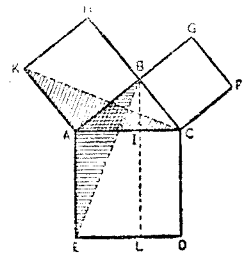


圖 183.

但 $ABHK=2\triangle ACK$,

$AELI=2\triangle ABE$.

故 $ABHK=AELI$.

同樣，可證 $BCFG=CDLI$, 故

$$ABHK+BCFG=AELI+CDLI=ACDE.$$

即 $$AB^2+BC^2=AC^2.$$

【系】 a, b, c 各爲表直角三角形之斜邊及他二邊之數，則

$$a^2=b^2+c^2.$$

因之若已知表直角三角形二邊之數，即可由上式以求表他一邊之數。

〔注意〕 此定理相傳爲古希臘畢他哥拉斯 (Pythagoras, B.C. 500 年頃)所發見，故名畢他哥拉斯定理，爲應用最廣定理之一。

練習問題

1. 直角三角形之斜邊及他一邊爲一寸三分及一寸二分，求第三邊之長。

2. 證明邊 1 之正方形之對角線爲$\sqrt{2}$。

3. 室之縱橫及高爲 4 丈，3 丈，2 丈時，求其對角線之長。

4. 作等於二正方形之和或差之正方形。

193. 如圖，AM, BN 爲由 A, B 各點所引 CD 之垂線，M 稱爲 A 點在 CD 上所投之正射影，MN 叫做線段 AB 在 CD

上所投之正射影。卽

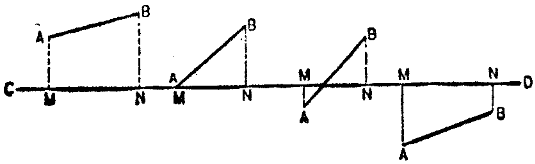


圖 184.

定義　一點在一直線上所投之正射影，是由此點所引該線垂線之垂足。一線段在一直線上所投之正射影，爲由此線段之兩端所引該線垂線之垂足間之線段。

194.　次記定理之證明，已含於畢他哥拉斯定理證明中。

定理 72.　直角三角形夾直角之一邊上之正方形，等於此邊在斜邊上所投之正射影與斜邊所包之矩形。

195.　作圖題　作等於已知矩形之正方形。

$ABCD$ 爲已知矩形，其短邊爲 AD，長邊爲 AB。

〔作圖〕　以 AB 爲直徑畫半圓周，於 AB 上取 $AE=AD$，過 E 作垂直於 AB 之直線交半圓周於 F。聯 AF，此時 AF 上之正方形卽所求。

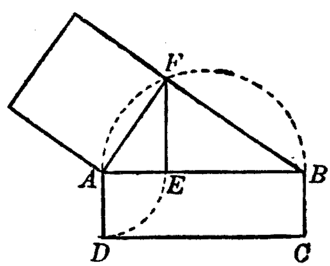


圖 185.

〔證明〕　從定理 72 自明。

練習問題

1.　作等於已知正方形且含有一已知邊之矩形。

說明此題可由 § 191 之作圖題解答，或參照圖 186 想別種解法。

2.　述作等於三角形之正方形之順序。

3.　述作等於多角形之正方形之順序。

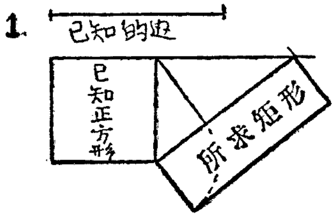


圖 186.

196. 定理 73. 鈍角三角形,鈍角所對邊上之正方形等於他二邊上正方形之和加其一邊與此邊在他邊上所投正射影所包矩形之二倍。

於 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 爲鈍角,由 C 所引 AB 垂線之足爲 D, 則

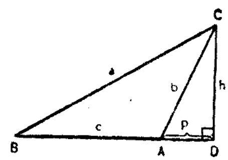


圖 187.

$$BC^2=AB^2+AC^2+2AB\cdot AD.$$

證明　$BC^2=CD^2+DB^2$.

(畢他哥拉斯定理)

又因　$DB=AD+AB$,

$$DB^2=AB^2+AD^2+2AB\cdot AD,\ \text{又}\ CD^2=AC^2-AD^2.$$

故　$BC^2=AB^2+AC^2+2AB\cdot AD.$

197. 定理 74. 三角形銳角對邊上之正方形等於他二邊上正方形之和,減其一邊與此邊在他一邊上之正射影所包矩形之二倍。

於 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 爲銳角,則

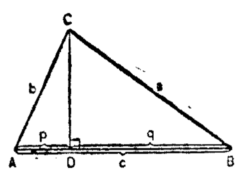


圖 188.

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AD.$$

證明　$BC^2=CD^2+DB^2$.

(畢他哥拉斯定理)

但　$DB=AB-AD$, 故　$DB^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD.$

又　$CD^2=AC^2-AD^2$, 故　$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AD.$

198. 應用上記二定理，即容易證明次定理。

定理 75. 三角形二邊上正方形之和，等於第三邊半長上之正方形與第三邊中點所引中線上正方形和之二倍。

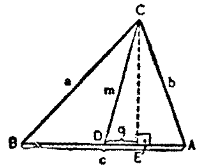


圖 189.

寫成式子就是

$$BC^2+AC^2=2(CD^2+BD^2).$$

雜問題

1. 證明菱形二對角線上正方形之和，等於其一邊上正方形之四倍。

2. 平行四邊形二對角線上正方形之和，等於其四邊上正方形之和。

3. 作等於已知正方形之 2 倍，3 倍，4 倍……之正方形。

4. 過三角形一邊上之一定點，引二等分其面積之直線。

5. 從三角形一邊上之一定點，引二直線，三等分此三角形。

6. 以 $a=m^2+n^2$, $b=2mn$, $c=m^2-n^2$ 之 a, b, c 三邊所作三角形爲直角三角形。

〔注意〕 由上問題之式可以求得表示直角三角形三邊之數的無數整數組。

7. 求距二定點距離上之正方形之和爲定積之點之軌跡。

8. 證明次各關係式：

(a) 一邊爲 a 之正方形，其對角線 $d=a\sqrt{2}$。

(b) 一邊爲 a 之正三角形，其高 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$。

(c) 一邊爲 a 之正三角形，其面積 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$。

(d) 二等邊三角形之等邊爲 a，底邊爲 b 時，其面積

$$S=\frac{b}{2}\sqrt{a^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

9. 有周 60^{cm} 之等邊三角形及正方形。面積孰大?

10. 一邊 3^{cm} 正方形,各邊三等分,聯結隣近頂點之二分點,則得一八邊形,求其周及面積。

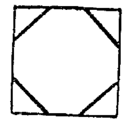


圖 190.

11. 一邊 3^{cm} 之正三角形,各邊三等分,聯結隣近頂點之二分點,則得一六邊形,求其周及面積。

12. 三角形周為 $2s$, 內切圓之半徑為 r, 證明其面積為 rs。

13. 定適宜之長為單位,以作圖求 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ 所表之長。

14. 作等於已知正方形之二分之一,四分之一,八分之一之正方形。

15. 測一矩形之二邊,得 6.38^{cm}, 7.76^{cm}。於此實測中,設其誤差之限度為 0.5^{cm}, 則矩形之面積,以此二邊之數計算時,誤差之限度如何?

第五章 比例

第一節 比及比例

199. 用同單位測 XY, PQ 二線段，所得之數值爲 a, b 時，a 對 b 之比名 XY 對 PQ 之比。

故實際求二線段之比，可以用寸、分或其他適當之單位，而求其數值之比。

一般關於量之比，有次定義。

定義　一量 A 對其同種類量 B 之比，爲用同一單位所測得表 A 量之數值對表 B 量之數值之比。

A 對 B 之比，記作 $A:B$ 或 A/B。A, B 各叫比的項，A 爲比之前項，B 爲其後項。

5 尺長之線段，對 2 尺長線段之比，爲 $5:2$。今以寸爲單位測此等線段時，所得之數爲 50 及 20，故其比爲 $50:20$，又若以 1^{cm} 爲單位而測之，則其所得數值又爲 $\frac{500}{3}$ 及 $\frac{200}{3}$，故其比爲 $\frac{500}{3}:\frac{200}{3}$，然 $5:2=50:20=\frac{500}{3}:\frac{200}{3}$.

一般得次定理。

定理 **76.**　<u>二量之比值，與測其量時所用單位之大小無關。</u>

以 x 爲單位測二量 A, B 所得之數值爲 a, b；以 y 爲單位時，測同量所得之數值爲 p, q，則此時應爲 $a:b=p:q$.

證明　設 $mx=y$，則 $a=mp$，$b=mq$.

故　$a:b=mp:mq=p:q$.

〔注意〕　同種類的兩量 A,B 均爲第三量 C 之整數倍時，C 名 A,B 之公約量，A,B 名可通約之量。A,B 爲可通約量時，以其公約量 C 爲單位，測 A,B 所得之數值，均爲整數。故 $A:B$ 的比能以整數表之。

同種類之兩量，有時無可爲公約之量者，例如正方形之一邊之數值爲 1 時，其對角線之數值爲 $\sqrt{2}$。但 $\sqrt{2}$ 爲不盡根數，故正方形之對角線，不能爲其一邊之若干分之一之整數倍，即正方形之對角線與其一邊無公約量，這樣的兩量名非通約之量。非通約量之比，用任何單位，必不能以整數之比表示之。然此比之近似數值，則欲其任何精密，均可以用二個整數之比表示。若就上例言之，則因 $\sqrt{2}=1.41421\cdots\cdots$ 故以一邊之 $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ 爲單位時，對角線對一邊之比之近似値，各爲 $\frac{14}{10}$, $\frac{141}{100}$, $\frac{1414}{1000}$, $\frac{14142}{10000}$ 所表出。故設所取之單位到十分小，則欲此近似值任何精密，都能做到。故在本章中，凡非通約之兩量之比，以其近似値論之，使同種類兩量之比，常可以用整數之比表示。

200.　次記定義，大都在算術及代數中已經習過，玆再記出，聊作復習。

定義　$A:B=C:D$ 時，名叫四量 A,B,C,D 成比例。A 及 D 名比例之外項，B 及 C 名比例之內項。又稱 D 爲 A,B,C 之第四比例項。A 與 C，B 與 D 名爲相對應之項。

定義　$A:B=B:C$ 時，說三量成比例，而名 C 爲 A,B 之第三比例項，名 B 爲 A,C 之比例中項。

定義　一比之前項、後項各爲他比之後項及前項時，名爲他比之反比。

故比與其反比之積等於1。

定義　等於數多比之積之比，名其複比，或相乘比。等於一比之自乘者，名其二乘比，等於一比之三乘者，名其三乘比。

$A:B$ 及 $C:D$ 之複比爲 $(A:B)(C:D)$ 或以 $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}$ 表之。

$A:B$ 之二乘比，以 $(A:B)^2$ 或 $\left(\frac{A}{B}\right)^2$ 表之。

201.　兩量之比，等於用同單位所測得之數值之比。故在算術，代數上所學習過的關於比例之定理條款，多數仍然能適用於量之比例，今記其主要者於次。

i.　$A:B=C:D$ 時，則隨 $A\gtreqless B$ 而 $C\gtreqless D$.

ii.　A, B, C, D 爲同種類之量，而 $A:B=C:D$ 時，則

$$A:C=B:D,\quad D:B=C:A.$$

iii.　$A:B=C:D$ 時，則 $\begin{cases}(A\pm B):A=(C\pm D):C;\\(A\pm B):B=(C\pm D):D;\\(A+B):(A-B)\\\qquad=(C+D):(C-D).\end{cases}$

iv.　$A:B=C:D=E:F=\cdots\cdots$ 而此等量均爲同種類時，則此各比等於 $(A+C+E+\cdots\cdots):(B+D+F+\cdots\cdots)$。

v.　$A:B$ 及 $B:C$ 之複比，等於 $A:C$。

以下所述，爲特別關於線段之比及比例。

202.　**定理 77.**　<u>四線段成比例時，其外項所包矩形等於內項所包矩形。</u>

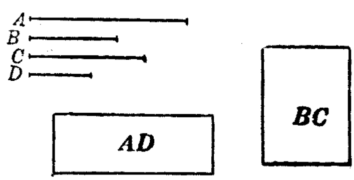


圖 191

A, B, C, D 爲四線段，設 $A:B=C:D$；則

$$A\cdot D=B\cdot C.$$

證明　設用同單位測 A, B, C, D 所得數值各爲 a, b, c, d；

則　$A:B=a:b$,　$C:D=c:d$.　故　$a:b=c:d$.

故從代數學之定理 $a\cdot d=b\cdot c$, 然 ad 是表 A 及 D 所包矩形之數，bc 是 B 及 C 所包矩形之數，故 $A\cdot D=B\cdot C$。

【系 1】　此定理之逆亦眞。

【系 2】　二線段所包之矩形,等於其比例中項上之正方形。又其逆亦眞。

203.　定理 **78**.　二組線段之比之複比,等於其前項所包矩形與後項所包矩形之比。

設 A, B, C, D 爲四線段時,$(A:B)(C:D)=A\cdot C:B\cdot D$。

證明　設以同單位測 A, B, C, D 所得之數値各爲 a, b, c, d。

此時 $A:B$ 及 $C:D$ 之複比等於 $a:b$ 及 $c:d$ 之複比，即 $ac:bd$, 而 ac 是表 A 及 C 所包矩形之數，bd 是表 B 及 D 所包矩形之數，故 $(A:B)(C:D)=A\cdot C:B\cdot D$。

【系 1】　二線段之比之二乘比,等於各線段上正方形之比。

因線段之比 $A:B$ 及 $C:D$ 之複比，可以用 $A\cdot C:B\cdot D$ 或 $\dfrac{A\cdot C}{B\cdot D}$ 表之，故線段之比 $A:B$ 之二乘比，可以用 $A^2:B^2$ 表之。

【系 2】　兩矩形之比，等於其底邊之比及高之比二者之複比。又，正方形之比，等於其一邊之二乘比。

【系 3】　兩三角形之比，等於其底邊之比及高之比二者之複比。

【系 4】　等高(或等底)矩形之比,等於其底邊(或高)之比。

【系 5】　等高(或等底)三角形之比，等於其底邊(或高)之比。

第二節　比例線

204.　定義　一線段上之一點，名內分此線段；其延長上

之一點，名外分此線段。分點與線段兩端點之距離，名各分段；而使兩分段之比等於已知之比時，名以已知之比內分或外分該線段。

於內分時，線段等於其二分段之和；於外分時，線段等於其二分段之差，則為應注意者也。

205. 定理 79. 平行於三角形一邊之直線，內分或外分他二邊為相同之比。

平行於 $\triangle ABC$ 之 BC 邊之一直線為 XY，與邊 AB，AC 或其延長之交點為 X，Y；則

$AX:XB=AY:YC.$

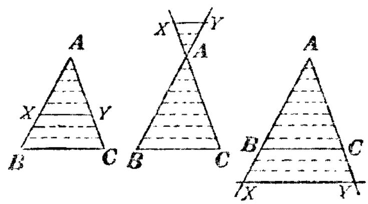


圖 192.

證明　設以某同單位測 AX, XB 所得的數，各為 m, n（但 m, n 為正整數）。

此時 $AX:XB=m:n$。今分 AX, XB 為等於單位長之 m 及 n 段，過各分點引平行於 BC 之直線，則此等平行直線分 AY, YC 為 m 及 n 之相等線段（定理 32 系）。

設其一段之長為 L，則 $AY=mL$, $YC=nL$。

故 $AY:YC=m:n$，故 $AX:XB=AY:YC$。

【系 1】 在上面定理的假設之下，同時成立

$AB:AX=AC:AY$ 及 $AB:XB=AC:YC$.

【系 2】 一組平行直線分割二截線時，其相對應部分的線段之比相等.

206. 作圖題　以已知之比內分及外分一線段。

AB 為一線段，m, n 為成已知比之二線段。

〔作圖〕 過 A 引不與 AB 一致之直線 AX，使其長等於 m，於 AX 延長上取 XY 等於 n。聯 YB，引 XC 平行於 YB，與

AB 交於 C，則 C 卽所要之內分點。

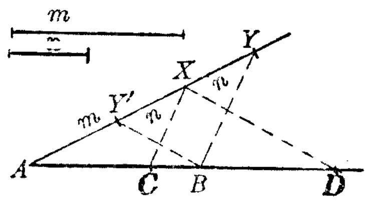


圖 193.

又於 XY 之反對方向取 XY' 等於 n，聯 $Y'B$，引 XD 平行於 $Y'B$ 交 AB 於 D，則 D 卽所求之外分點。

〔證明〕 於 $\triangle ABY$ 中， $XC \parallel YB$。

故 $$AC:CB=AX:XY=m:n.$$

卽 C 以 $m:n$ 之比內分 AB。

又於 $\triangle ABY'$，$XD \parallel Y'B$，故 $AD:DB=AX:XY'=m:n$。

卽 D 以 $m:n$ 之比外分 AB。

〔檢討〕 C 點必可求得，故所要的內分點必有一點。又 $m \neq n$ 時，D 點必可求得，故於已知之比不爲 1 時，外分點亦必有一點。次要說明各分點只限於一。

若所要的內分點 C 之外尙有 C'，則應爲 $AC':C'B=m:n$，故 $AC':C'B=AC:CB$，故 $AC'+C'B:C'B=AC+CB:CB$。

卽 $$AB:C'B=AB:CB.$$

故 $$C'B=CB.$$

故 C' 不能不與 C 一致。卽所要的內分點只限於一點。同樣，亦可證明所要之外分點亦限於一。

$m=n$ 時，則外分點如何？試各自研究之。

207 由前記作圖題之所述，得次定理。

定理 80. <u>內分一線段爲已知比之點有一點，又若已知比不等於 1 時，其外分之點亦有一，而各分點只限於一。</u>

在前記作圖題之事項，名爲 C, D 調和分割 AB，卽

定義 二點 C, D 以同比內分及外分一線段 AB 時，名爲 C, D 調和分割 AB，各點 A, B, C, D，名叫調和點列。

208. 定理 **81.** 以同比內分或外分三角形二邊之直線平行於其第三邊。

直線 XY, 與 $\triangle ABC$ 之二邊 AB, AC 或其延長線交於 X, Y 二點,若 $AX:XB=AY:YC$, 則 $XY \parallel BC$。

證明　設 XY 不平行於 BC, 另引 $XY' \parallel BC$, 與 AC 交於 Y';

則 $AX:XB$

$=AY':Y'C$ (定理79)。

而 $AX:XB$

$=AY:YC$.

故 $AY:YC$

$=AY':Y'C$.

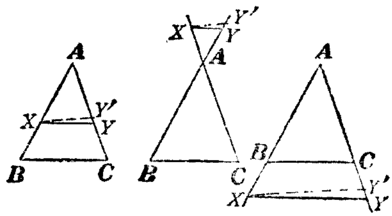


圖 194.

故 Y, Y' 一致 (定理 80)。

即　　　　$XY \parallel BC$.

【系】 X, Y 為 $\triangle ABC$ 之邊 AB, AC 上之二點,

$AB:AX=AC:AY$ 則 $XY \parallel BC$.

209. 作圖題　作已知三線段之第四比例項。

m, n, p 為已知三線段。

〔作圖〕　引二直線 AH, AK。於 AK 上取 AB, BC 等於 m, n; 於 AH 上取 AD 等於 p。聯 BD。過 C 平行於 BD 引 CE 與 AH 交於 E。此時 DE 即所要之第四比例項。

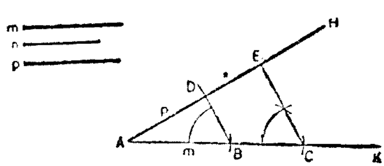


圖 195.

〔證明〕　試各自為之。

練習問題

1. 過 $\angle ABC$ 內之一點 P, 引直線與角之二邊 BA, BC

交於 X, Y，使 $XP : PY$ 等於已知之比。

2. 求已知二線段之第三比例項。

3. 說明解次作圖題得用 § 209 之作圖題。——作等於已知矩形而有一邊等於已知之長之矩形。

4. 求一線段使與已知三線段 l, m, n 成比例。

5. 知二線段之和及其比，求各線段。

6. 知二線段之差及其比，求各線段。

7. 線段 AB 之長爲 a，以 $m : n$ 之比分之，其內分及外分點爲 C 及 D 時，計算 AC, AD 之長，而示 AC 及 AD 爲 $m : n$ 之値之函數。

8. P 點在線段 AB 上自 A 向 B 移動時，$AP : PB$ 之變化如何？又 P 點在 AB 之延長上次第遠 B 而去，則此比之變化又如何？試析言之。

9. A, B, C, D 爲調和點列時，設表 AB, AC, AD 之數各爲 x, y, z，則 $\frac{2}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$，試證明之。

210. 定理 82. 二等分在三角形頂點之內角及外角之直線，以他二邊之比內分及外分其底邊。

三角形 ABC 內角 BAC 之二等分線 AX 與 BC 邊交於 X；外角 CAD 之二等分線 AY 與 BC 之延長交於 Y；則

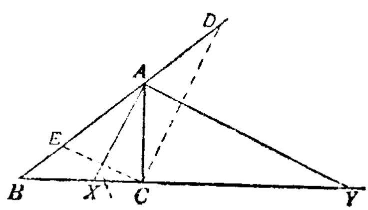


圖 196.

$$BX : XC = AB : AC, \quad BY : YC = AB : AC.$$

證明　過 C 平行於 AX 引 CD 與 BA 之延長線交於 D。

此時　$\angle ADC = \angle BAX$，　(同位角)

又 $\angle BAX=\angle CAX$, (假設)

又 $\angle CAX=\angle ACD$. (錯角)

故 $\angle ADC=ACD$.

故 $AC=AD$.

然於 $\triangle BCD$ 中，$AX \parallel CD$。故

$$BX : XC=BA : AD.$$

故 $$BX : XC=AB : AC.$$

同樣，過 C 平行於 AY 引 CE, 可以證明

$$BY : YC=AB : AC.$$

【系 1】 在三角形頂點之內角及外角之二等分線，調和分割其底邊。

【系 2】 以三角形二邊之比，內分及外分其底邊所得之點與頂點聯結之直線，二等分在其頂點之內角及外角。

練習問題

1. 三角形 ABC 三邊 BC, CA, AB 之長各為 8 分, 6 分, 4 分時，二等分在 A 之內角及外角之直線，分底邊 BC 之各段，其長各如何？又一般以 a, b, c 表三邊之長時，則各分段之大小又如何表之？

2. 三角形 ABC 邊 BC 之中點為 D, $\angle ADC$, $\angle ADB$ 之二等分線，與 AC, AB 之交點各為 E, F, 此時 $EF \parallel BC$, 試證明之。

211. 定理 83. 距二定點之距離之比，等於已知之比（不等於 1 者）之點之軌跡，為以此比內分及外分二定點聯結線段之二分點間之線段為直徑之圓周。(Apollonius 圓)

設 A, B 為二定點，以已知比 $m : n$ 內分及外分 AB 之點為 X 及 Y。此時距 A, B 二點之比等於已知比 $m : n$ 之點之軌跡，為以 XY 為直徑之圓周。

證明 設 P 為滿足於條件之任意一點。

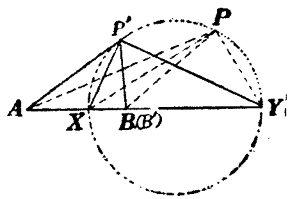


圖 197.

聯 PA, PB, PX, PY, 則

$$PA : PB = m : n,$$

$$AX : XB = m : n,$$

$$AY : YB = m : n.$$

故 PX, PY 為 $\triangle PAB$ 在 P 之內角及外角之二等分線，故 $\angle XPY = \angle R$, 故 P 點在以 XY 為直徑之圓周上。即滿足於所要條件之點，皆在以 XY 為直徑之圓周上。

次任意於 XY 為直徑之圓周上取一點 P', 聯 $P'A$, $P'X$, $P'Y$, 作 $P'B'$ 使 $\angle AP'X = \angle XP'B'$ 交 AY 於 B'。

此時 $P'X$ 是 $\triangle P'AB'$ 中在 P' 之內角之二等分線，與 $P'X$ 成直角之 $P'Y$ 為在 P' 外角之二等分線。故

$$AX : XB' = AP' : P'B',$$

$$AY : YB' = AP' : P'B'. \qquad \text{(定理 82)}$$

故 $AX : XB' = AY : YB'$, 又 $AX : XB = AY : YB$。

故 $XB' : YB' = XB : YB$, 即 B 及 B' 為 XY 之同一比之內分點，故二者須一致 (定理 80)。

故 $P'A : P'B = AX : XB = m : n.$

故 P' 滿足於所要之條件，即以 XY 為直徑之圓周上之點，均滿足於所要之條件，故距 AB 之距離之比等於 $m : n$ 之比之軌跡為以 XY 為直徑之圓周。

〔注意〕 此圓名為阿波羅尼斯圓 (Apollonius' circle), 阿氏為 B. C. 200 年頃人，係當時著名之幾何學者。此軌跡為彼所發見。

練習問題

1. 求距二定點之距離之比等於 1 之點之軌跡。

2. 前定理中其已知之比從近於 0 之值漸次增大時，為其

軌跡之圓如何變化?

3. 已知底邊，他二邊之比及頂角，求作三角形。

4. 已知底邊，他二邊之比及高，求作三角形。

5. 已知底邊，他二邊之比及頂點到底邊之中線，求作三角形。

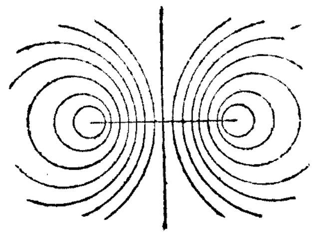


圖 198.

第三節 相似多角形

212. 兩多角形 $ABCDE$, 及 $A'B'C'E'$ 中，其各角 $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $\angle D=\angle D'$, $\angle E=\angle E'$ 時，此兩多角形叫等角多角形。邊 AB, BC, CD, DE, EA 各與邊 $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'A'$ 爲對應。卽

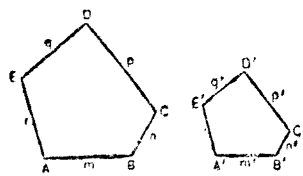


圖 199.

定義 在兩多角形中，順次所取之角，各各相等時，則兩多角形爲等角多角形。其相等之角叫對應角，對應角頂點間之邊，叫對應邊。

213. 有多角形 $ABCDE$ 之地面，以一丈爲一分所作成之縮圖爲 $A'B'C'D'E'$, 則此兩多角形爲等角，而且其對應邊之比，均爲一丈與一分之比。這樣的兩多角形，叫做相似。卽

定義 兩多角形爲等角，而且其對應邊成比例，則此兩多角形是相似多角形。

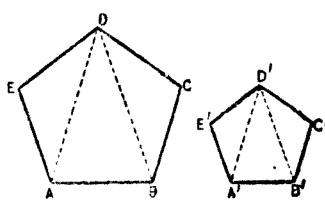


圖 200.

例如，多角形 $ABCDE$ 及

$A'B'C'D'E'$ 中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$\angle D=\angle D'$，$\angle E=\angle E'$ 及 $AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'=DE:D'E'=EA:E'A'$ 時，則此兩多角形爲相似多角形。

表相似用記號 $\sim$，例如多角形 $ABCDE$ 與 $A'B'C'D'E'$ 的相似，卽以 $ABCDE\sim A'B'C'D'E'$ 表之。次記三定理極易證明。

定理 84. 二相似多角形周之比，與其對應邊之比相等。

〔§ 201 (iv) 項參照〕

定理 85. 二全等之多角形爲相似，又邊數相等之正多角形相似。

定理 86. 與一多角形爲相似之二多角形相似。

214. 定理 87. 等角之二三角形相似。

設 $\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$ 中，
$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，
$\angle C=\angle C'$；則

$$\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'.$$

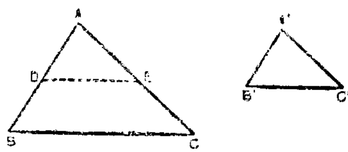


圖 201.

證明　於 AB 上，取 $AD=A'B'$，於 AC 上取 $AE=A'C'$。

聯 DE，則 $\triangle ADE\cong\triangle A'B'C'$。故 $\angle ADE=\angle B'$。

因之 $\angle ADE=\angle B$，故 $DE\parallel BC$.

故　　$AB:AD=AC:AE$.　　（定理 79 系 1）

因之　　$AB:A'B'=AC:A'C'$.

同樣，於 BA, BC 上取等於 $B'A'$, $B'C'$ 之線段時，可以證明

$$AB:A'B'=BC:B'C'.$$

故　$AB:A'B'=BC:B'C'=CA:C'A'$.

因之　　$\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$.

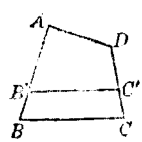


圖 202.

〔注意〕　由此定理可知等角之三角形是相似形。但其他之多角形，則角雖相等，亦未必卽

爲相似。例如,圖中 $BC \parallel B'C'$,則此兩四邊形 $ABCD$ 及 $AB'C'D$ 雖有角相等,而對應邊不成比例,故不爲相似。

【系 1】 一三角形之二角與他三角形之二角各各相等時,則二三角形爲相似。

【系 2】 平行於三角形底邊之直線與他二邊所成之三角形與原形相似。

練習問題

1. 過同一點之數多直線,爲二平行線所截取之對應線段之比相等。又其逆眞否?

2. 相似三角形在其相對應之頂點所引之高,其比等於對應邊之比。

3. 一三角形之三邊,各平行於他三角形之三邊時,此二三角形爲相似。

4. 梯形之二對角線,互分其他一線爲平行二邊之比。

5. 測地面上之塔影爲 200 公尺,同時,地面上直立之竿高 0.8^m 者,其影長爲 1^m。問塔高。

215. **定理 88.** 一三角形之三邊與他三角形之三邊成比例時,二三角形爲相似。

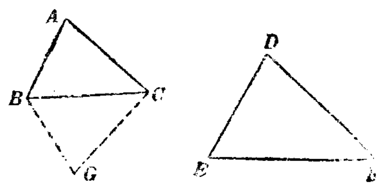


圖 203.

設 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ 之三邊成比例,即 $AB : DE = BC : EF = CA : FD$; 則

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

證明　作 $\angle CBG = \angle E$, $\angle BCG = \angle F$, 使 A 與 G 在 BC 反對之側;則

$$\triangle GBC \sim \triangle DEF. \qquad \text{(定理 81 系 1)}$$

故　$BC : EF = CG : FD = GB : DE$.

然 $BC : EF = CA : FD = AB : DE$, 故 $CG = CA$, $GB = AB$,

故 $\triangle ABC \cong \triangle GBC$，故 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$。

練習問題

1. 以三角形各邊之 n 倍為邊之三角形，與原三角形相似。

2. 有一三角形之地，其三邊為 75^m, 60^m, 45^m，今作其縮圖，設以 1^m 為其最大邊時，其他二邊應為若干？

216. 定理 89. 二三角形中有一角相等，此等角之夾邊成比例時，二三角形為相似。

設 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 中，$\angle A = \angle D$，又 $AB : DE = AC : DF$；則

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

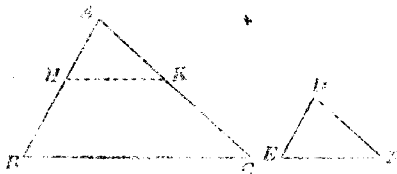


圖 204.

證明　於 AB 上取 $AH = DE$，又於 AC 上取 $AK = DF$。結 HK，則

$$\triangle AHK \cong \triangle DEF. \qquad (\text{定理 } 1)$$

又因 $AB : DE = AC : DF$，故 $AB : AH = AC : AK$。

故 $HK \parallel BC$（定理 81），故 $\angle AHK = \angle B$，$\angle AKH = \angle C$。

故 $\triangle ABC \sim \triangle AHK$。因之 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$。

〔注意〕 使線段以定比增大或減小時所用之放大尺，係根據此定理而作成。

練習問題

1. 比較三角形相似之定理及全等之定理而舉其相異點。

2. 相似三角形之對應頂點所引中線之比，等於對應邊之比。

217. 定理 90. 相似多角形可分為同數之相似三角形。

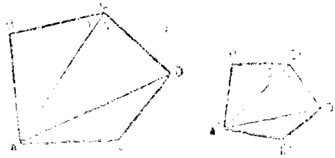


圖 205.

設 $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ 為相似多角形而頂點 A, B, C, D, E

各與頂點 A', B', C', D', E' 相對應，則 $ABCDE$ 與 $A'B'C'D'E'$ 可以分成同數之相似三角形。

證明　引過 A 點之對角線 AC, AD。再引過 A' 點之對角線 $A'C', A'D'$。

此時兩形已分成同數之三角形。再比較 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$；則 $\angle B=\angle B'$ (假設)，$AB : A'B' = BC : B'C'$. 故

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

又再比較 $\triangle ACD$, $\triangle A'C'D'$, 則 $\angle ACD=\angle A'C'D'$, 而 $AC : A'C' = BC : B'C' = CD : C'D'$. 故

$$\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'.$$

同樣可以證明 $\triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$ 即 $ABCDE, A'B'C'D'E'$ 所分成同數之三角形爲相似。

【系】聯相似多角形對應頂點所聯對角線之比，等於其對應邊之比。

218. 作圖題　作多角形與已知多角形相似，且使其邊等於已知之長。

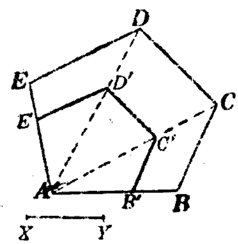


圖 206.

$ABCDE$ 爲已知多角形，XY 爲已知之長。

〔作圖〕 聯 AC, AD。於 AB 上取 $AB'=XY$.

過 B' 引 BC 之平行線交 AC 於 C'。過 C' 引 CD 之平行線交 AD 於 D'。過 D' 引 DE 之平行線交 AE 於 E'；則 $AB'C'D'E'$ 即所求之多角形。

〔證明〕 由作圖明白可知 $AB'C'D'E'$ 與 $ABCDE$ 爲等角多角形。

又 $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$, $\triangle ACD \sim \triangle AC'D'$, $\triangle ADE \sim AD'E'$。

故 $AB : AB' = BC : B'C' = CD : C'D' = DE : D'E' = EA : E'A$。故 $ABCDE \sim AB'C'D'E'$。而 $AB'C'D'E'$ 之一邊

$AB' = XY$，故 $AB'C'D'E'$ 爲所求之圖形。

〔檢討〕　如等於 XY 之邊，不規定爲 AB 之對應邊，則亦可取爲 BC, CD……等邊之對應邊，則各得不同之圖形。

219.　應用上記作圖題及 § 209 的作圖題，可解次記作圖題。

〔作圖題〕　作多角形與已知多角形相似，且使其對應邊之比等於已知之比。

練習問題

1.　作多角形與已知多角形相似，且使對應邊之比爲 3:2。

2.　作四邊形與已知四邊形相似，而使其一對角線等於已知之長。

220.　定理 91.　二相似多角形可以放置於使其對應頂點之聯結線過同一點之位置。

$ABCD$ 與 $A'B'C'D'$ 爲相似多角形，頂點 A, B, C, D 各爲與 A', B', C', D' 相對應者；則可以放置之，使 AA', BB', CC', DD' 過同一之點。

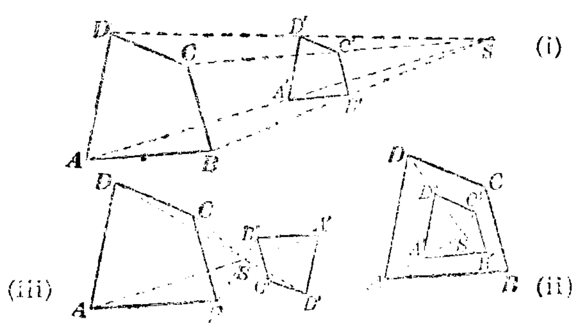


圖 [illegible]

證明　$\angle B' = \angle B$，故可以放置之使 $A'B'$, $B'C'$ 各各平行於 AB, BC。在此時，因其他各角相等，故又成 $C'D' \parallel CD$,

$D'A' \parallel DA$ 之位置。

今證明於此位置中 AA', BB', CC', DD' 過同一之點。

設 AA', BB' 之交點爲 S, 則 $\triangle SAB \sim \triangle SA'B'$。故

$$SB : SB' = AB : A'B'.$$

又設 BB', CC' 之交點爲 S', 則 $\triangle S'BC \sim \triangle S'B'C'$。故

$$S'B : S'B' = BC : B'C'.$$

但 $AB : A'B' = BC : B'C'$,故 $SB : SB' = S'B : S'B'$,故 S 及 S' 須一致,即 CC' 過 S 點。

同樣,可以證明 DD' 過 S 點。

故 AA', BB', CC', DD' 過同一之點 S。

〔注意〕 圖 i 及 ii 所示及 AB 與 $A'B'$ 平行而在同方向者, iii 爲 AB, $A'B'$ 平行而在反對之方向者。S 點在前一種狀態之下, 則以對應邊之比外分 AA', BB', CC', DD'。在後一種狀態之下,則以對應邊之比內分之。於各種狀態稱兩相似形爲在透視之位置, S 叫相似中心,或透視中心。

練習問題

1. 過相似中心 S 之任意直線,爲對應邊所截取之線段,以對應邊之比分於 S。

2. 一點與多角形各頂點之聯結線,以一定比內分之,則各分點爲與原多角形相似之一多角形之頂點。外分時亦然,試證明之。

3. 應用前題以解 § 219 條之作圖題。

〔注意〕 解此作圖題及擴大或縮小圖形,有用寫圖器 (Pantograph) 者,該種器械亦有數種,如圖所示亦其一種。係由四片木條或金屬板所造成,如右圖所示,使在 A, B, C 及 D 四點以活栓結合而成平行四邊形,即使 $AB=DC$ 及 $AD=BC$,而可使自由轉動。使用此器時,先固定 P 點,而 A 及 B 二點可以 P 爲中心而作圓

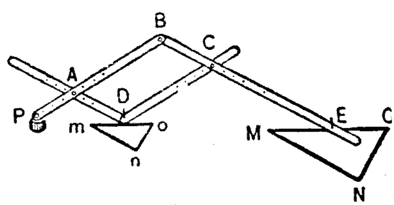


圖 208.

運時，如欲放大一圖形，則置針於 D 而置鉛筆於 E（欲縮小時反之），則針尖沿原圖形移動時，筆尖卽繪出一擴大（或縮小）之圖。

4. 就上記之寫圖器，證明次記各事項：

(a) 針 D 沿已知圖形移動時，$\triangle PAD$ 及 $\triangle PBE$ 常為相似形。(b) P, D, E 常在同一直線上而 $PD : PA = DE : PB$。(c) 已知圖形之各頂點與 P 之聯結直線，為在 E 所繪成圖形之各頂點同比所外分，而此兩圖形為相似形，對應邊之比等於 PA 及 PB 之比。

221. 定理 92. 從直角三角形直角頂點所引斜邊之垂直線，為斜邊被此線所分成二段之比例中項。

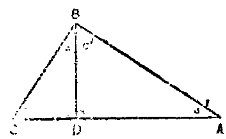


圖 209.

設 $\triangle ABC$ 為直角三角形，其直角為 $\angle B$，而 BD 為自 B 至 AC 之垂線，則 $AD : BD = BD : DC$。

證明　於 $\triangle ABD$, $\triangle BCD$ 中，

$\angle ADB = \angle BDC = \angle R$。

$\angle BAD = \angle CBD$（同為 $\angle DBA$ 之餘角）

故　$\triangle ABD \sim \triangle BCD$.

故　$AD : BD = BD : DC$.

【系 1】 從直角三角形直角頂點所引斜邊之垂線上之正方形，與斜邊之為此垂線所分二段所包矩形相等。

【系 2】 於直角三角形，從直角頂點引斜邊之垂線，分斜邊為二段，設表二段之數為 a, b，則表垂線之數為 $\sqrt{ab}$。

222. 作圖題 求作已知二線段之比例中項。

設 m, n 為已知之二線段。

〔作圖〕 作等於 m 之線段 AB，於其延長上取 $BC = n$。以 AC 之長為直徑畫圓，於 B 引垂直於 AC 之直線與圓周交於 D；則 BD 卽所求之 m 及 n 之比例中項。

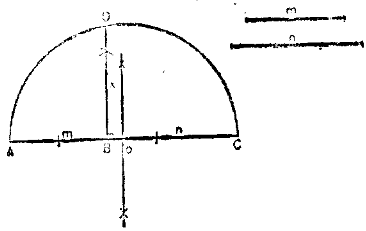


圖 210.

〔證明〕 聯結 AD, DC 照上記定理 92 卽容易證明。

由此作圖題可以導出次記二作圖題。

作圖題 作等於已知矩形之正方形。 (別解已見 § 195)

作圖題 表二已知線段之長之數爲 a, b,作以 $\sqrt{ab}$ 所表之線段。

練習問題

1. 從直角三角形直角之頂點所引斜邊之垂線,分此形爲與原三角形相似之三角形。

2. 直角三角形夾直角之一邊,爲斜邊及此邊在斜邊上之正射影之比例中項。並由此導出畢他哥拉斯定理。

3. 直角三角形夾直角二邊上正方形之比(二邊之二乘比),等於此二邊在斜邊上所投正射影之比。

4. 應用定理 92, 以解次作圖題:

(a) 求已知二線段之第三比例項。 (b) 作等於已知正方形含有一已知邊之矩形。 (別解見 § 195 下)

第四節 面積之比

223 定理 93. 含有一相等角之二三角形之比,等於夾此角之二邊所包矩形之比。

設 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C$ 有 C 及 C 角相等,而放置在一圖

形上，使兩相等之角重合，卽圖中 C 角爲共有之角，求證

$$\triangle ABC:\triangle A'B'C=AC\cdot BC:A'C\cdot B'C.$$

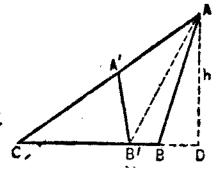


圖 211.

證明　聯 AB'，則因兩三角形 ABC 及 $AB'C$ 有相同之高 h，

故　$\triangle ABC:\triangle AB'C=BC:B'C.$

又同理　$\triangle AB'C:\triangle A'B'C=AC:A'C.$

然 $(\triangle ABC:\triangle AB'C)(\triangle AB'C:\triangle A'B'C)=(BC:B'C)(AC:A'C)$，故 $\triangle ABC:\triangle A'B'C=AC\cdot BC:A'C\cdot B'C$。

故　$\triangle ABC:\triangle A'B'C=AC\cdot BC:A'C\cdot B'C.$

【系】一角相等之二平行四邊形之比，等於其夾等角之二邊(之相乘比)所包矩形之比。

224. 定理 **94.** 兩相似三角形之比，等於對應邊之二乘比。

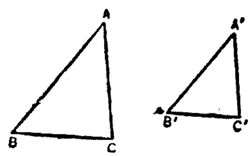


圖 212.

設 $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$，頂點 A, B, C 各與 A', B', C' 相對應，則

$$\triangle ABC:\triangle A'B'C'=AB^2:A'B'^2.$$

證明　因 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle B=\angle B'$。

故　$\triangle ABC:\triangle A'B'C'=AB\cdot BC:A'B'\cdot B'C'$. (定理 93)

但因 $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$，故 $AB:A'B'=BC:B'C'$，故 $AB\cdot BC:A'B'\cdot B'C'=AB^2:A'B'^2$。

$$\therefore\quad \triangle ABC:\triangle A'B'C'=AB^2:A'B'^2.$$

【系】二相似三角形之比，等於對應邊上正方形之比。

225. 定理 **95.** 二相似多角形之比，等於對應邊之二乘比。

設 $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ 爲相似多角形，頂點 A, B, C, D, E 各與頂點 A', B', C', D', E' 相對應，則

$$ABCDE : A'B'C'D'E' = AB^2 : A'B'^2.$$

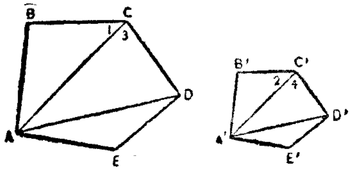


圖 213.

證明 聯結 AC, AD 及 $A'C'$, $A'D'$, 則各三角形 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$, $\triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$(定理 90)。

故 $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = AB^2 : A'B'^2$,

$\triangle ACD : \triangle A'C'D' = CD^2 : C'D'^2 = AB^2 : A'B'^2$,

$\triangle ADE : \triangle A'D'E' = DE^2 : D'E'^2 = AB^2 : A'B'^2$.

故 $(\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE) : (\triangle A'B'C' + \triangle A'C'D' + \triangle A'D'E) = \triangle ABC : \triangle A'B'C' = AB^2 : A'B'^2$。

即 $ABCDE : A'B'C'D'E' = AB^2 : A'B'^2$.

【系】 二相似多角形之比，等於其對應邊上正方形之比。

練習問題

1. 相似三角形對應邊之一爲他一之 25%，其面積之比如何?

2. 在縮尺五萬分之一地圖上，所有三角形之面積，當實際地面之幾分之一?

3. 於直角三角形各邊上，以各邊爲對應邊作相似之多角形，則斜邊上之多角形等於他二邊上多角形之和。

(此定理爲畢他哥拉斯定理之更普遍之形式者，證明用定理 95 及畢他哥拉斯定理即可。)

4. 二相似三角形之比，爲次記各要素之二乘比，試證明之:

(a) 其對應之高。 (b) 其對應之中線。

(c) 其內切圓之半徑，　(d) 其外接圓之半徑。

5. 設 $\triangle ABC$ 之重心爲 G, 邊 AC, AB 之中點爲 E, F; 求 $\triangle GBC$, $\triangle GEF$ 之比。

226. 定理 **96.** 圓之二弦或其延長相交時,各弦之二段所包矩形相等。

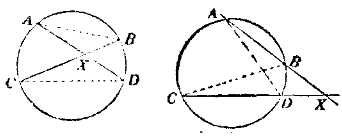


圖 214.

設圓 $ABDC$ 之二弦 AD, BC 相交於 X, 則

$$XA \cdot XD = XC \cdot XB.$$

證明　聯結 AB, CD, 則在 $\triangle AXB$, $\triangle CXD$ 中,

$$\angle AXB = \angle CXD,\ \angle A = \angle C. \qquad \text{(定理 40 系 1)}$$

故　$$\triangle AXB \sim \triangle CXD.$$

故　$$XA : XC = XB : XD. \qquad \text{(定理 81 系 2)}$$

故　$$XA \cdot XD = XC \cdot XB.$$

【系 1】 圓之過一定點之諸弦爲此點所分二段所包矩形爲定積。

【系 2】 二線段或其延長相交，其交點分割各線段之二段所包矩形相等時,則二線段之各端,在同一圓周上。

227. 在前條右圖中，想像直線 XDC 以 X 爲中心，漸次遠離圓心而迴轉,則 C, D 二點逐漸接近,終至相合,其時 XDC 可視爲圓之切線,而 $XC \cdot XD$ 則爲切線上之正方形。故得預想定次定理。

定理 **97.** 從圓外一點所引割線，爲圓周分割之二段所包矩形,等於由此點所引該圓之切線上之正方形。

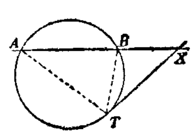


圖 215.

設圓 ABT 外之一點 X, 所引圓之割線爲 XBA, 切線爲 XT, 則 $XA \cdot XB = XT^2$。

證明 AT, BT 聯結，則在 $\triangle AXT$, $\triangle TXB$ 中，

$$\angle AXT = \angle TXB,\ \angle XAT = \angle XTB. \quad \text{(定理 46)}$$

故 $$\triangle AXT \sim \triangle TXB. \quad \text{(定理 87 系)}$$

故 $XA : XT = XT : XB$. 故 $XA \cdot XB = XT^2$.

【系】 從圓外一點所引迄於圓周之線段中，其線段上之正方形等於由此點所引圓之割線二段所包矩形時，此線切於圓。

228. 作圖題 內分或外分一線段使其一分段上之正方形，等於他分段及全線段所包之矩形。

設 AB 爲已知之線段。

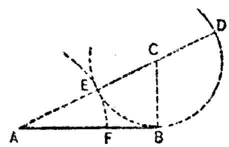


圖 216.

〔作圖〕 於 B 引 AB 之垂線 CB，使其長等於 AB 之半，以 C 爲中心，CB 爲半徑畫圓。設直線 AC 與此圓之交點爲 E, D.

於 AB 上取 $AF = AE$, BA 之延長上取 $AF' = AD$, 則 F, F' 卽所要之分點。

〔證明〕 $AB^2 = AE \cdot AD = AE(AE + ED) = AE(AE + AB)$ $= AE^2 + AE \cdot AB = AF^2 + AF \cdot AB$。

故 $AF^2 = AB^2 - AF \cdot AB = AB(AB - AF) = AB \cdot BF$.

卽 F 爲所要之內分點。

又同樣可證明 F' 爲所要之外分點。(圖中不載，學者試自爲之。)

〔注意〕 線段的這樣分割，叫黃金分割或叫分線段爲外中比。

229. 前條之作圖題得利用之以作內接或外切於圓之正十角形。

作圖題 作內接於圓之正十角形。

設圓 O 爲已知之圓。

〔解析〕 設 AB 爲所要正十邊形之一邊，引半徑 OA, OB,

則 $\angle AOB=36°$。

故 $\angle OAB=\angle OBA=72°$。

故引直線 BG, 二等分 $\angle OBA$ 與 OA 交於 G;

則 $\triangle BAG$ 爲頂角等於 $36°$ 之二等邊三角形。故 $\triangle BAG\sim\triangle OAB$.

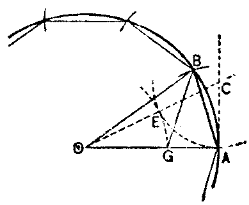


圖 217.

故 $OA:AB=AB:AG$, 卽 $AB^2=OA\cdot AG$。

但 $AB=BG=OG$.

故 $OG^2=OA\cdot AG$, 卽線段 OA 於 G 點分爲中外比。因之得次記作圖。

〔作圖〕 引半徑 OA, 於其上求一點 G, 使 $OG^2=OA\cdot AG$ (§ 228)。引弦 $AB=OG$, 則 AB 卽所要之正十角形之一邊。(證明試自爲之。)

由此作圖題可以導出次記之作圖題。

作圖題 <u>(a) 作外切於圓之正十邊形。 (b) 作內接或外切於圓之正五邊形，正二十邊形。</u>

230. 內接於圓之正十邊形及正六邊形之一邊，各爲 BK, BC, 則 $\angle BOK=36°$, $\angle BOC=60°$,故 $\angle KOC=24°$,故聯 KC, 則 KC 與 O 圓內接之正十五邊形之一邊相當。因之可解次作圖題。

作圖題 <u>作內接或外切於圓之正十五邊形。</u>

次記之正多角形可單純用直尺及圓規而作圖。

(a) 正方形，正 8 邊形，正 16 邊形，正 32 邊形……。(b) 正三角形，正 6 邊形，正 12 邊形，正 24 邊形……。(c) 正 5 邊形，正 10 邊形，正 20 邊形，正 40 邊形……正 15 邊形，正 30 邊形，

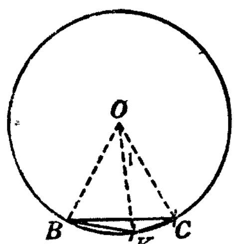


圖 218.

正 60 邊形，正 120 邊形……。

此外 C. F. Gauss (德國算學家，1775—1855) 已證明正 17 邊形，正 257 邊形可以作圖。一般 2^n+1 形之數，當 n 為質數時，則正 2^n+1 邊形是單純用直尺及圓規可以作圖的。但其理較高深，此間不能述及了。

又於 § 163 所述諸角之外，次記各角之作圖是可由正十邊形及正十五邊形而導出的。

(a) 72°, 36°, 18°, 9°,……。

(b) 24°, 12°, 6°, 3°,……。

從而與此等角之二倍，三倍相當者，亦可求得。

練習問題

1. 作過二定點而切於一定直線之圓。

2. 作過二定點而切於一定圓之圓。

3. 一線段之長為 a 時，計算在此線段以外中比分割時之各分段之長。

4. 自相交二圓二交點所聯結之直線上之點，所引二圓之切線相等。

5. 過圓內一點之弦，為此點所分割之二段所包矩形，等於過此點之最小弦之半長上之正方形。

231 定理 **98.** 圓內接四邊形相對邊所包矩形之和，等於其對角線所包矩形。(Ptolemy 定理)

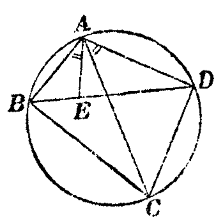


圖 219.

設 $ABCD$ 為圓內接四邊形，則

$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$

證明 作 $\angle BAE=\angle CAD$。AE 與 BD 之交點為 E;

則 $\triangle ABE$ 及 $\triangle ACD$ 中，$\angle ABE=\angle ACD$ (同弧之圓周角)，$\angle BAE=\angle CAD$ (作圖)。

故 $\triangle ABE \sim \triangle ACD$ (定理 87 系),故 $AB : AC = BE : CD$。

故 $$AB \cdot CD = BE \cdot AC.$$

又於 $\triangle ABC$ 及 $\triangle AED$ 中, $\angle ACB = \angle ADE$ (同弧之圓周角),又 $\angle BAC = \angle EAD$。 故 $\triangle ABC \sim \triangle AED$。

故 $BC : ED = AC : AD$, 故 $BC \cdot AD = AC \cdot ED$。

因之 $$AB \cdot CD + AD \cdot BC = BE \cdot AC + AC \cdot ED$$
$$= AC(BE + ED) = AC \cdot BD.$$

〔註〕 Ptolemy 是第二世紀頃人,寓居亞歷山大府。

練習問題

1. 圓內接四邊形之對角線成直角時,其相對邊所包矩形之和,為原四邊形之二倍,試證明之。

2. $\triangle ABC$ 為圓內接等邊三角形, P 為劣弧 BC 上之一點時,試證 $PB + PC = PA$。

第五節　代數計算與作圖題

232. a, b, c, d 為表已知線段之長, n 為正整數時,滿足於次記各式之 x 及 y 所表之線段,是可以用幾何學的作圖求得的。

1. $x = a + b$　　線段 a 與線段 b 之和。

2. $x = a - b$　　線段 a 與線段 b 之差。

3. $x = na$　　線段 a 之 n 倍。

4. $x = \dfrac{a}{n}$　　線段 a 之 n 分之一。

5. $x = \dfrac{ab}{c}$　　a, c, b, 之第四比例項,或等於 a, b 所包矩形而有一邊之長為 c 之矩形之他一邊。

6. $x = \sqrt{ab}$　　a, b 之比例中項。

7. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$　　夾直角二邊為 a 及 b 之直角三角形之斜邊。

8. $x=\sqrt{a^2-b^2}$ 斜邊爲 a，夾直角之一邊爲 b 之直角三角形之第三邊。

9. $x=a\sqrt{n}$ $n=2$ 時，是以 a 爲一邊之正方形之對角線。一般則因 $x^2=a^2n$，故爲 a, na 之比例中項。

10. $x\pm y=a,\ x:y=c:d$ 線段 a 以 $c:d$ 之比內分或外分之各分段。

11. $x^2-ax+b^2=0$ 因 $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2}$ 中，

$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2}$ 可依 (8) 而作圖，故從 $\frac{a}{2}$ 減或加該數卽得。

12. $x^2-ax-b^2=0$ 照上例。

練習問題

1. 以作圖求 $x=\frac{a^2}{b}$。

2. 以作圖求 $x=\frac{a^2}{b}+c$。

3. 以作圖求 $x=a\sqrt{5}$

4. 以作圖求 $x=\frac{a}{2}\sqrt{3}$

5 $x^2+ax+b^2=0$，可以作圖嗎？

233. 當解作圖題時，有時可由已知線段算出所要線段之長，則利用如上所記之各式方法，於作圖有很便利之處，今例示於次。

例 1. 作圖題 作正方形與已知之正方形成已知之比。

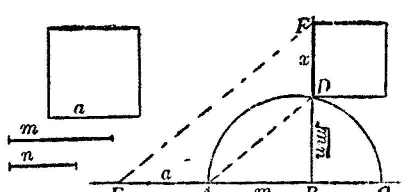


圖 220.

設已知正方形之一邊爲 a，表已知比之線段爲 m 與 n。

〔解析〕　設所要正方形之一邊爲 x，則

$$a^2 : x^2 = m : n.$$

$$\therefore \quad mx^2 = na^2.$$

故 $x^2 = \frac{n}{m}a^2$，　即 $x = \sqrt{\frac{na^2}{m}} = \frac{a\sqrt{mn}}{m}$。

即 x 爲 $a, m, \sqrt{mn}$ 之第四比例項。

〔作圖〕　取 $AB = m$，於其延長上取 $BC = n$。次以 AC 爲直徑畫圓與由 B 點所引 AC 之垂直線 BD 交於 D。再於 BA 之延長上取 $AE = a$，聯 AD。過 E 引 AD 之平行線 EF 與 BD 之延長交於 F，此時 $DF = x$，即所求正方形之一邊。

〔證明〕　因 ADC 爲直角三角形，AC 爲斜邊，BD 垂直於 AC。

$\therefore BD^2 = mn, BD = \sqrt{mn}$。 $\frac{FD}{BD} = \frac{AE}{AB} = \frac{a}{m}$，即 $\frac{FD}{\sqrt{mn}} = \frac{a}{m}$。

即
$$FD = \frac{a\sqrt{mn}}{m} = x.$$

例 2.　作圖題　知二線段之和及其所包矩形之面積，求二線段。

設二線段之和爲 a，其所包矩形之面積爲 b^2。

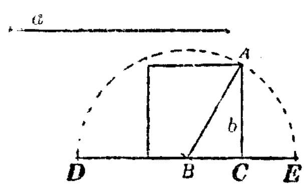


圖　221.

〔解析〕　設二線段爲 x, y，則

$$x + y = a, \ xy = b^2.$$

故
$$y = a - x.$$

$\therefore \quad xy = x(a-x) = b^2.$　　$\therefore \quad x^2 - ax + b^2 = 0.$

$$\therefore \quad x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}, \quad y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}.$$

故所要之線段爲 $\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$ 及 $\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$ 所表的長。

〔作圖〕 設已知正方形之一邊 $b=AC$。以 A 爲中心，$\frac{a}{2}$ 爲半徑畫弧，以 B 爲中心，以 $\frac{a}{2}$ 爲半徑圓畫於 CB 上截取 BD, BE 等於 $\frac{a}{2}$, 此時 CD 及 CE 卽所求之線段。

〔證明〕 $CB=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2}$,因而$CD$,$CE$各等於$\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2}$ 及$\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-b^2}$。

故將在解析所經過之理論逆推，則可知 CD, CE 爲所要之線段。

〔檢討〕 $\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2\geqq 0$, 爲本題有解答之必要之條件,否則無解。

練習問題

1. 知二線段之差及其所包矩形,求二線段。

2. 利用代數計算求以外中比分一線段之方法。

3. 知直角三角形夾直角之一邊及他邊在斜邊上之正射影,求作此三角形。

4. 分一線段爲二,使其一分段上之正方形爲他分段上正方形之二倍。

5. 分一線段爲二,使其各分段上正方形之差，等於一已知正方形。

6. 分一線段爲二,使各分段上正方形之和，等於已知正方形。

7. 作矩形使有已知之面積，而二隣之比等於已知之比。

第六節 圓周率

234. 設 $ABCD\cdots\cdots$ 爲圓內接正 n 邊形，$PQRS\cdots\cdots$ 爲同

圓之外切正 n 邊形，而此二形之位置，則為前形之頂點適當後形之切點。

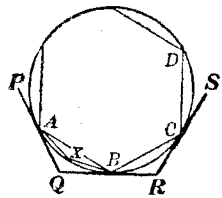


圖 222.

今設弧 AB 之中點為 X，聯 XA, XB 時，則 XA, XB 各為圓內接正 $2n$ 邊形之一邊，而 $XA+XB>AB$，故得次定理。

定理 **99**. 內接於圓之正多角形，邊數二倍之，則其周增大。

又於前圖中，於 X 點引切線，與外切正多角形之二邊 PQ, QR 交於 L, M；則 LM 為外切正 $2n$ 邊形之一邊了，而 $LM<QL+QM$，故得次定理。

定理 **100**. 外切於圓之正多角形，其邊數二倍時，則其周減小。

就直觀上說，也很明白的，外切正多角形之周及內接正多角形之周，每經一次的二倍其邊數時，漸近圓周。而由上記二定理，則此時前者漸小，而後者漸增大，故得次定理。

定理 **101**. (a) 圓周比外切正多角形之周小，而比內接正多角形之周大，(b) 圓周與外切正多角形周或內接正多形周之差，因增加正多形之邊數可以使之小至任意之度；從而正多角形之邊數增至非常之多時，與圓周相一致。

235.　定理 **102**. 二圓周之比等於其半徑之比。

設二圓 O, O' 之半徑各為 r, r'，其圓周各為 c, c'；則 $c : c'=r : r'$。

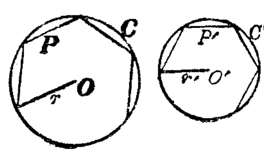


圖 223.

證明　於各圓周畫同邊數的內接正多邊形 P, P'。其周各為 p, p'；則此時 $P\sim P'$，故 $p : p'=r : r'$。

而在比例，不因正多角形之邊數漸次二倍，或無論如何增加而變動。然 P 及 P' 之邊數無限增加時，p 及 p' 終至與 c, c' 殆相

一致，故 $c : c' = r : r'$。

【系 1】 圓周與直徑之比爲定值。

此比名叫圓周率，以希臘字母 π 表之。

【系 2】 半徑爲 r 的圓周之長爲 $2\pi r$。

236. 定理 103. 半徑 r 之圓面積等於 πr^2。

證明 作外切於圓之正多角形 Q，其周爲 q，則

$$Q = \tfrac{1}{2}qr. \qquad \text{(定理 68 系 1)}$$

此關係式於 Q 之邊數二倍，或無論如何增加時常是成立。而 Q 之邊數增至無限多時，q 終至與圓周一致，Q 亦與圓一致，故

圓面積 $= \frac{1}{2}$ 圓周 $\times r = \frac{1}{2} 2\pi r \times r = \pi r^2$。

【系】 二圓面積之比，等於其半徑之二乘比。

237. 次示計算圓周率"π"之一方法。

(a) 於半徑爲 R 之圓，知其內接正 n 角形之一邊爲 a_n，計算其外切正 n 角形之一邊 a'_n。

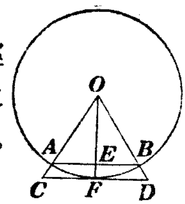


圖 224.

設 AB 爲內接正 n 角形之一邊。引半徑 $OF \perp AB$。引於 F 點切於圓之直線與 OA, OB 之延長交於 C, D，則 CD 爲外切正 n 角形之一邊。

今設 OF 與 AB 之交點爲 E，設 $OE = r$。

因 $\triangle OEA$ 爲直角三角形，故

$$OE^2 = OA^2 - AE^2.$$

即 $$r^2 = R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2.$$

$\therefore \quad r = \sqrt{R^2 - \dfrac{a^2_n}{4}}$， 而 $CD : AB = OF : OE$。

故 $$a'_n : a_n = R : r.$$

因之 $$a'_n = \frac{a_n R}{\sqrt{R^2 - \dfrac{a^2_n}{4}}},$$

(b)　於半徑爲 R 之圓知其內接正 n 角形之一邊爲 a_n，而計算其內接正 $2n$ 角形之一邊 a_{2n}。

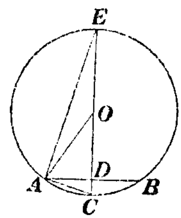


圖 225.

設 AB 爲內接正 n 角形之一邊，垂直於 AB，引半徑 OC，聯 AC 時，AC 卽內接正 $2n$ 角形之一邊。

延長 CO 與圓周交於 E，OC 與 AB 之交點爲 D，設 $OD=r$；

則　$AC^2=CE\cdot CD$.（定理 72）　$\therefore\quad a^2_{2n}=2R(R-r)$.

然由 (a) 的計算，　$r=\sqrt{R^2-\dfrac{a^2_n}{4}}$.

故　$$a^2_{2n}=2R\left(R-\sqrt{R^2-\frac{a^2_n}{4}}\right).$$

卽　$$a_{2n}=\sqrt{2R\left(R-\sqrt{R^2-\frac{a^2_n}{4}}\right)}.$$

(c)　圓周率 π 爲圓周與直徑之比，此比與任何圓均一定，故直徑 1 之圓周所表之長，卽 π 之值。

因而此數値的計算：

於圓內接正六角形，其一邊之長等於半徑，故直徑 1 之圓，其內接正六角形之周爲 3。

故由 (a) 可得外切於圓之正六角形之周，由 (b) 可得內接於圓之正十二角形之周。順次如此計算下去，得於直徑 1 之圓，內接及外切正二十四角形，正四十八角形等等，今將此等之値(至小數 7 位止)表記於次。

邊數	內接正多角形之周	外切正多形之周
6	3	3.4647016
12	3.1058285	3.2153903
24	3.132686	3.1596599
48	3.1393502	3.1460862
96	3.1410320	3.1427146
192	3.1414525	3.1418731
384	3.1415576	3.1416628
768	3 1415839	3.1415102
1536	3.1415909	3.1415970

直徑 1 之圓周，在內接正多角形之周及外切正多角形之周之間，故表此圓周長的數在 3.1415909 及 3.1415970 之間，即

$$3.1415909<\pi<3.1415970. \qquad \therefore\ \pi=3.14159\cdots\cdots.$$

再繼續計算內接及外切正多角形之邊數更多之周，便可求 π 之更精密之値。然此値以有限之小數不能正確表示，則因 π 實爲一無理數之故。

作爲 π 的近似値，在實際上應用者，有 $\frac{22}{7}$，$\frac{355}{113}$ 及 3.1416 等。$\frac{22}{7}$ 相傳爲 Archimedes (亞幾默得，287—212 B.C.) 所發見，$\frac{377}{120}=3.11466\cdots\cdots$ 則 Ptolemy 所曾採用，而 $\frac{355}{113}$ 則爲 Metius (1571—1616) 所求得，此數到小數第六位是正確的。

π 之計算，尙有較簡捷之許多方法，然需要更高深之理論，

此地不能講到。用此種方法所求之值，有至小數數百位，其中 Shank 於1873年所發表之707位之值爲現在所知之最精密者。

練習問題

1. 求在半徑 r, r' 之二同心圓中間之部分之面積。

2. 半徑 r 之圓內，一扇形之角爲 α，求其面積。

3. 以直角三角形之斜邊爲直徑所畫之圓，等於以他二邊爲直徑所畫二圓之和。

4. 作圓等於二已知圓之和或差。

5. 作圓周等於二已知圓周之和或差。

6. 半徑 r 之圓之弓形角爲 $45°$ 時，求其弧長及面積。

7. 地球赤道上之一點，當自轉時，一時迴轉若干哩，又在緯度 $30°$ 之一點如何？地球之半徑以 3960 哩及 $\pi=\frac{22}{7}$ 計算。

8. 作圓等於二已知同心圓間所圍之平面形之面積。

雜問題

1. 梯形之二平行線，其一爲他一線之二倍時，則對角線互相在三等分處相交。試證之。

2. 應用比例證明三角形之二中線，互爲三等分，由此以證明三中線交於一點。

3. 二圓之公切線，以半徑之比內分及外分其中心線。

4. TP, TQ 爲中心 C 圓之切線，P 及 Q 爲其切點，今設 CT 與 PQ 之交點爲 N，試證 $CN\cdot CT=CP^2$。

5. $ABCDE$ 爲正五角形，BE; AD 之交點爲 F，證明 EF 爲 AD, AE 之第三比例項。

6. 外切於 P 之二圓其公切線之切點爲 Q, R，則 QR 爲此二圓之直徑之比例中項。

7. 作圖論究次記方程式之 x:

(a) $x^2+3x-2=0$, (b $2x^2+5x+1=0$, (c) $x^2=12$.

8. 試證三角形之高與外接圓直徑所包矩形,等於其夾頂角之二邊所包矩形。

9. 三角形頂角二等分線上之正方形,等於二邊所包之矩形與底邊爲頂角二等分線所分之二段所包矩形之差。

10. 三角形之三邊爲 13 分,11 分,6 分時,計算各角二等分線之長。又一般用 a, b, c 表三邊而計算之。

11. 求圓外切之正六角形及內接於同圓之正六角形之比。

12. 於半徑 r 之圓,計算其內接或外切正三角形之周及面積。

13. 計算一邊爲 a 之正三角形之內接或外切圓之半徑。

14. 於半徑 r 之圓,計算其內接或外切正方形之周及面積。

15. 計算內接於半徑 r 之圓之正十角形之一邊。

16. O 爲一定點,P 爲一定直線上任意之點,令 OP 於 Q 以 $m:n$ 之比分割時,求 Q 點之軌跡。

17. 求距二平行線之距離爲一定比之點之軌跡。

18. 求距相交二直線之距離爲定比之點之軌跡。

19. 從一定點到一定圓所引之線以 $m:n$ 之比分割之點之軌跡若何?

20. 引平行於三角形底邊之直線二等分此三角形。

21. 平行於三角形底邊引三直線四等分此三角形。

22. 平行於三角形底邊引直線截取等於其六分之一之三角形。

23. 在三角形內之正方形,其各頂點在三角形之邊上時,叫正方形內接於三角形,試作內接於已知三角形之正

24. 作三角形與已知三角形相似,且成已知之比。

25. 作多角形，等於已知多角形 A 且與他已知多角形 B 相似。

〔作圖〕 作等於 A 及 B 的正方形，其一邊各爲 a 及 b, 設 l 爲 B 之一邊，求滿足於 $b:a=l:x$ 之 x, 於 x 上作與 B 相似之多角形 C, 使 b 與 x 對應，此時 C 卽所求之多角形。

〔證明〕 試各自爲之。

26. 平行於三角形之底邊引直線，內分他二邊，使以頂點爲一端之二段之和，爲他二段和之二倍。

27. 二點間有障礙物不能直接測其距離時,試想出應用比例以求二點間距離之法。

28. 利用木匠所用之曲尺或三角板之夾角二邊上刻有分劃之物，間接求塔或木之高之方法如何?

29. 高 5 尺 3 寸之人，立於燈塔之南,量自身之影得 21 尺 2 寸，向西再走 15 丈,又測自身之影,得 31 尺 8 寸,問燈塔之高。

30. $\triangle ABC$ 之 $\angle A$ 爲直角，以各邊爲直徑畫半圓，如圖所示，則 $\triangle ABC$ 等於附有陰影之兩平面形之和，試證明之。

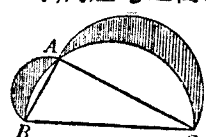


圖 226.

31. 以線段 AB 爲直徑畫半圓，與於 AB 上一點 C 引 AB 之垂線交於 D, 次以 AC, CB 爲直徑各畫半圓於前半圓之同側，此時三個半圓所成之平面形(附有陰影者)等於以 CD 爲直徑之圓，試證明之。

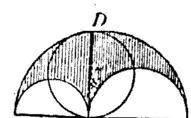


圖 227.

第六章 數値三角

第一節 角的測法

238. **角的測法** 通常測量一個角的大小總是拿直角來做標準，這拿直角來做標準的測量法叫做六十分法。

239. 六十分法是將一個直角分作 60 等分，每一等分叫一度；將一度分作 60 等分，每一等分叫一分；再將一分分作 60 等分，每一等分叫一秒。

用 $\circ$ 表度，$'$ 表分，$''$ 表秒，則 32 度 51 分 42 秒，可記爲 $32°51'42''$。度、分、秒的關係爲：

$$60''=1';\qquad 60'=1°;\qquad 90°=\text{一直角}。$$

除了這種測量法之外，還有兩種測角方法：一是百分法，一是弧度法。

240. 百分法也是將直角作單位，不過把一直角分作 100 等分，每一等分叫一級；再將一級分作 100 等分，每一等分叫一分；再將一分分作 100 等分，每一等分叫一秒。

用 g 表級，$`$ 表分，$``$ 表秒，則 32 級 51 分 42 秒，可記爲 $32^g51`42``$。級、分、秒的關係爲：

$$100``=1`;\qquad 100`=1^g。$$

241. 六十分法與百分法的互化。

因爲 $$90°=100^g.$$

$$\therefore\quad 1°=\frac{10^g}{9}.$$

反之　$$1^g=\frac{9^\circ}{10}.$$

〔注意〕 由上面公式來看，我們知道要將度化爲級，只須加上牠的 $\frac{1}{9}$；將級化爲度，只須減去牠的 $\frac{1}{10}$ 就行了。

例 1.　$36^\circ=(36+\frac{1}{9}\times 36)^g=40^g.$

例 2.　$64^g=(64-\frac{1}{10}\times 64)^\circ=(64-6.4)^\circ=57.6^\circ.$

〔注意〕 如所給的角不只度或級一個單位，須先化成度或級一個單位。

例 3.　化 $63^\circ 14'51''$ 爲百分法的數。

$$51''=\frac{51'}{60}=\frac{17'}{20}=0.85'.$$

$$14'51''=14.85'=\left(\frac{14.85}{60}\right)^\circ=0.2475^\circ.$$

$$63^\circ 14'51''=63.2475^\circ=\frac{63.2475}{90}\text{直角}$$

$$=0.70275\text{ 直角}$$

$$=70.275^g=70^g27.5^{`}=70^g27^{`}50^{``}.$$

例 4.　化 $94^g23^{`}87^{``}$ 爲六十分法的數。

$$94^g23^{`}87^{``}=0.942387\text{ 直角}=90^\circ\times 0.942387$$

$$=84.81483^\circ=84^\circ+60'\times 0.81483$$

$$=84^\circ 48.8898'=84^\circ 48'+60''\times 0.8898$$

$$=84^\circ 48'53.388''.$$

$$\therefore\quad 94^g23^{`}87^{``}=84^\circ 48'53.388''.$$

練習問題

將下列各角化爲直角：

1.　60°.　2.　$75^\circ 15'$.　3.　$63^\circ 17'25''$.　4.　$370^\circ 20'48''$.

將下列各角化爲百分法的數:

5. $81°$. 6. $138°30'$. 7. $35°47'15''$.

將下列各角化爲六十分法的數:

8. 120^g. 9. $45^g35`24``$. 10. $39^g45`36``$.

242. 弧度法 在弧度法中,用來作測量的單位的叫做"弧度角"。這個單位是這樣得來的:

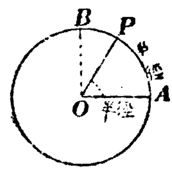


圖 228.

任意畫一個圓(如圖 228) APB。設圓心爲 O, 圓的半徑爲 OA, 在圓周上畫弧一段,弧 AP 即等於 OA。連接 OA 同 OP, 得 AOP 角,這個角就叫一個弧度角,便是弧度法的單位,牠的符號是 1^c。

這個單位是一個常數,不因圓的大小而改變的; 因爲任何一個圓的圓周同牠的直徑之比永遠是不變的常數。這個常數通常拿希臘字母 π 來代表。

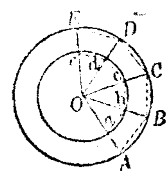


圖 229.

證明 畫兩個同心圓(如圖 229),圓心爲 O, 在外圓的周上作 n 邊的正多邊形 $AACD$……,

聯接 OA, OB, OC, OD, ……遇小圓周於 a, b, c, d,……然後聯接 ab, bc, cd, de……;

則 $abcde$……也是一個 n 邊的正多邊形。

因爲 $Oa=Ob$, $OA=OB$, $\therefore$ ab 與AB 平行。

而 $$\frac{AB}{ab}=\frac{OA}{Oa},$$

習題解答:

1. $\frac{2}{3}$. 2. $\frac{301}{360}$. 3. $\frac{45569}{64800}$. 4. $4\frac{388}{3375}$.

5. 90^g. 6. $153^g88`88.8``$. 7. $39^g76`38.8``$. 8. $1\frac{1}{5}$ 直角或 $108°$.

9. 0.453524 直角或 $40°49'1.776''$. 10. 0.394536 直角或 $35°30'29.664''$.

所以 $$\frac{n\cdot AB}{n\cdot ab}=\frac{AB}{ab}=\frac{OA}{Oa}.$$

就是 $$\frac{\text{外多邊形的周圍}}{\text{內多邊形的周圍}}=\frac{OA}{Oa}.$$

設想這個多邊形的邊數非常多，就是 n 非常大的時候，多邊形的周圍便極近於圓周。所以：

$$\frac{\text{外圓的周}}{\text{內圓的周}}=\frac{OA}{Oa}=\frac{\text{外圓的半徑}}{\text{內圓的半徑}}.$$

由此，得 $$\frac{\text{外圓的周}}{\text{外圓的半徑}}=\frac{\text{內圓的周}}{\text{內圓的半徑}}\doteq\text{一個常數。}$$

一個圓的圓周既然同牠的半徑成比例，所以同牠的直徑也成比例。

設圓周為 C，半徑為 r，便得公式如下：

$$\frac{C}{2r}\equiv\pi,\quad\text{或}\quad C=2\pi r.$$

π 是一個無理數，通常把牠的值作為 $\frac{22}{7}$，或 3.1416。現在再回頭來證明弧度也是一個常數角。

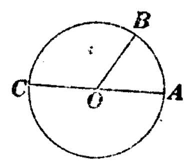


圖 230.

證明　任意作一個圓，O 是圓心，OA 是半徑，在圓周上取弧 $AB=OA$，聯接 OB，則 $\angle AOB$ 是個弧度角。延長 AO，使遇圓周於 C。因為圓心角是同牠們所對的弧成比例的；所以

$$\frac{\angle AOB}{\text{兩個直角}}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{ABC}}=\frac{\text{半徑}}{\text{半圓周}}$$

$$=\frac{r}{\pi r}=\frac{1}{\pi}.$$

π 既是常數，$\frac{1}{\pi}$ 自然也是常數，所以弧度角也是一個常數。

243. 弧度角的大小　設圓心角 $\angle AOC$ 等於一個直角；

$\angle AOB$ 等於一個弧度角。

那末　$$\frac{\angle AOC}{\angle AOB}=\frac{\widehat{AC}}{\widehat{AB}}=\frac{\frac{1}{4}(\text{圓周})}{\text{半徑}}=\frac{\frac{1}{4}(2\pi r)}{r}=\frac{\pi}{2}.$$

就是一個直角中含有 $\frac{\pi}{2}$ 個弧度角；因此得：

$$180^\circ=2\text{ 直角}=\pi\text{ 弧度角},$$
$$360^\circ=4\text{ 直角}=2\pi\text{ 弧度角}。$$

〔注意〕 通常大家以爲 π 就是 180°，這是錯誤的。π 弧度角相當於 180°，但是 π 本身是一個數而且只是一個數，務須留心。

244. 各種測法的互化。

$$90^\circ=100^g=\frac{\pi}{2}\text{ 弧度角},$$

$$180^\circ=200^g=\pi\text{ 弧度角}。$$

例 1.　$0.45\pi^c=0.45\times180^\circ=81^\circ=90^g.$

例 2.　$3^c=\frac{3}{\pi}\times\pi^c=\frac{3}{\pi}\times180^\circ=\frac{3}{\pi}\times200^g.$

例 3.　$40^\circ15'36''=40^\circ15\frac{3'}{5}=40.26^\circ$

$$=40.26\times\frac{\pi^c}{180}=0.2236\,\pi\text{ 弧度角}。$$

例 4.　$40^g15`36``=40.1536^g=40.1536\times\frac{\pi}{200}$ 弧度角

$$=0.200768\,\pi\text{ 弧度角}。$$

練習問題

將下列各角化爲度、分、秒：

1.　$\frac{\pi^c}{3}$.　　2.　$\frac{4\pi^c}{3}$.　　3.　$10\pi^c$.　　4.　1^c.

將下列各角化爲級、分、秒：

5. $\dfrac{4\pi^c}{5}$.　　6. $\dfrac{7\pi^c}{6}$.

將下列各角化為弧度角：

7. $60°$.　　8. $110°30'$.　　9. $47°25'36''$.

10. 60^g.　　11. $110^g30^{`}$.　　12. $345^g25^{`}36^{``}$.

第二節 三角函數

245. 定義. 設 OA 是固定的線，OP 是轉動的線；OP 從 OA 慢慢地繞着 O 旋轉，就生出 POM 角來；所以角的大小和牠的邊的長短毫無關係。若從 OP 上，任取一點 P，作 PM 垂直於 OA，交 OA 於 M；則 POM 為直角三角形，OP 是斜邊，OM 是 POM 角的隣邊，PM 是牠的對邊，由這三邊中，任取兩邊相比，便可得六個比：

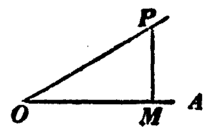


圖 231.

1. $\dfrac{MP}{OP}$ 就是 $\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$，這叫做 AOP 角的"正弦"；

2. $\dfrac{OM}{OP}$ 就是 $\dfrac{\text{隣邊}}{\text{斜邊}}$，這叫做 AOP 角的"餘弦"；

3. $\dfrac{MP}{OM}$ 就是 $\dfrac{\text{對邊}}{\text{隣邊}}$，這叫做 AOP 角的"正切"；

4. $\dfrac{OM}{MP}$ 就是 $\dfrac{\text{隣邊}}{\text{對邊}}$，這叫做 AOP 角的"餘切"；

習題解答：

1. $60°$　　2. $240°$.　　3. $1800°$.　　4. $54°17'44.87''$.

5. 160^g.　　6. $233^g37^{`}33.3^{``}$.　　7. $\dfrac{\pi}{3}$.　　8. $\dfrac{221}{360}\pi$.

9. $\dfrac{3557}{13500}\pi$.　　10. $\dfrac{3\pi}{10}$.　　11. $\dfrac{1103}{2000}\pi$.　　12. 1.726268π.

5. $\dfrac{OP}{OM}$ 就是 $\dfrac{\text{斜邊}}{\text{隣邊}}$，這叫做 AOP 角的“正割”；

6. $\dfrac{OP}{MP}$ 就是 $\dfrac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}$，這叫做 AOP 角的“餘割”。

這六個比的值，是隨了角的大小變的，所以稱爲 AOP 角的三角函數。

〔注意〕 三角函數通通是數，而且是不名數，這六個比例，通常用下面的符號表示：

$$AOP\text{的正弦}=\sin AOP=\frac{MP}{OP},\ AOP\text{的餘割}=\csc AOP=\frac{OP}{MP},$$

$$AOP\text{的餘弦}=\cos AOP=\frac{OM}{OP},\ AOP\text{的正割}=\sec AOP=\frac{OP}{OM},$$

$$AOP\text{的正切}=\tan AOP=\frac{MP}{OM},\ AOP\text{的餘切}=\cot AOP=\frac{OM}{MP}.$$

〔注意〕 研究三角函數的性質和相互的關係，以及用三角函數研究三角形的質等，這只是數學中的一科目，稱爲平面三角。本講義依照課程標準只附於幾何中略述大意而已。

246 三角函數的基本關係。

從上面的各比看來，csc AOP 恰恰是 sin AOP 的倒數，而 sec AOP 恰恰是 cos AOP的倒數，cot AOP 恰恰是 tan AOP 的倒數；即牠們的關係爲

$$\csc AOP=\frac{1}{\sin AOP},$$

$$\sec AOP=\frac{1}{\cos AOP},$$

$$\cot AOP=\frac{1}{\tan AOP}.$$

這些函數的值，在同一的角或相等的角裏是不變的。

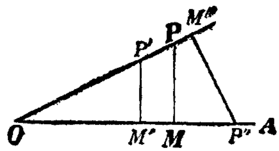


圖 232.

證明　在動線 OP 上任取兩點 P' 與 P''，作 $P'M'$ 垂直於 AO，$P''M''$ 垂直於 OP。從三角形 MOP，得：

$$\sin AOP=\frac{PM}{OP};$$

從三角形 $M'OP'$，得 $\sin AOP=\frac{P'M'}{OP'}$；

從三角形 $M''OP''$，得 $\sin AOP=\frac{P''M''}{OM''}$.

但是三角形 $M'OP'$ 同三角形 $M''OP''$ 有一銳角和一直角相等，所以牠們是相似的。

$$\therefore\quad \frac{PM}{OP}=\frac{P'M'}{OP'}=\frac{P''M''}{OM''}.$$

就是在 AOP 角一定的時候，$\sin AOP$ 的值是一定的。同樣，可以證明餘弦，正切等函數的值在同一的角或相等的角中也是不變的。

練習問題

1. 畫 30° 的角，而兩邊的比爲 $4:2\sqrt{3}$；求這個角的各三角函數。

2. 畫 45° 的角，隣邊和對邊各爲 6 公寸；求這個角的各三角函數。

3. 畫 60° 的角，兩邊的比爲 $6:3$；求這個角的各三角函數。

4. 上題 1 和 2 的三角函數有什麼關係？

5. 先畫一個角 MOP，再畫一個角 MOP' 等於 MOP 的二

倍，由實測計算 MOP' 角的各三角函數不等於 MOP 角的各三角函數的二倍。

247. 已知一三角函數，求其餘的三角函數。

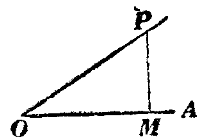


圖 233.

設 AOP 角等於 θ，因 MOP 爲直角三角形。依定理 71 知道：

$$MP^2+OM^2=OP^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

(1) 的兩邊除以 OP^2，則得：

$$\left(\frac{MP}{OP}\right)^2+\left(\frac{OM}{OP}\right)^2=\left(\frac{OP}{OP}\right)^2.$$

即 $$\sin^2\theta+ +\cos^2\theta=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{I})$$

〔注意〕 θ 讀作 theta。三角函數的乘方如 $(\sin\theta^2)$, $(\cos\theta)^3$, $(\tan\theta)^4$ 通常寫作 $\sin^2\theta$, $\cos^3\theta$, $\tan^4\theta$。

(1) 的兩邊除以 OM^2，則得：

$$\left(\frac{MP}{OM}\right)^2+\left(\frac{OM}{OM}\right)^2=\left(\frac{OP}{OM}\right)^2.$$

即 $$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta.$$

把牠反過來得： $$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{II})$$

(1) 的兩邊除以 MP^2，則得：

$$\left(\frac{MP}{MP}\right)^2+\left(\frac{OM}{MP}\right)^2=\left(\frac{OP}{MP}\right)^2.$$

即 $$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta.$$

把牠反過來得： $$\csc^2\theta=1+\cot^2\theta \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{III})$$

因爲 $$\sin\theta=\frac{MP}{OP}$$

和 $$\cos\theta=\frac{OM}{OP};$$

所以 $$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{MP}{OP}}{\frac{OM}{OP}}=\frac{MP}{OM}=\tan\theta.$$

即 $$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{IV})$$

又 $$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

所以 $$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{V})$$

應用以上的各公式，若已知一角的一個函數，則其餘的五個都可以求出來。

例 1.　已知 $\sin A=\frac{1}{2}$，求 A 角的其餘函數。

由公式， $$\sin^2A+\cos^2A=1,$$

得 $$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cos^2A=1,$$

即 $$\frac{1}{4}+\cos^2A=1.$$

$$\therefore\quad \cos^2A=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

而 $$\cos A=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

又 $$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3},$$

$$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3},$$

$$\csc A=\frac{1}{\sin A}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

例 2. 已知 $\tan\theta=1$, 求 θ 角的其餘函數。

由公式, $$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta},$$

得 $$\cot\theta=\frac{1}{1}=1.$$

又由 $$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta,$$

得 $$\sec^2\theta=1+1^2=2.$$

$$\therefore\quad \sec\theta=\sqrt{2}.$$

而 $$\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

又 $$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta.$$

$$\therefore\quad \frac{\sin\theta}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}=1,$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

而 $$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

〔注意 1〕 遇開平方時本有正負二根, 但這裏只用正的, 理由以後再說。

〔注意 2〕 知一個函數求其餘的五個函數; 先求那一個, 全看由已知的函數代入那一個公式比較便當。

練習問題

1. 60° 角的餘弦為 $\frac{1}{2}$，求牠的其餘五個函數。

2. $\cos A=\frac{12}{13}$，求 $\sin A$ 和 $\tan A$.

3. $\tan A=2$，求 $\sin A$ 和 $\cos A$.

4. 試由第 1 題所得的 $\cot 60°$ 的值，求其餘五個函數。

5. 試由第 1 題所得的 $\sec 60°$ 的值，求其餘五個函數。

6. 試由第 1 題所得的 $\csc 60°$ 的值，求其餘五個函數。

〔註〕一角的函數相互的關係如下：

(i) $\sin\theta\csc\theta=1,\quad \sin\theta=\frac{1}{\csc\theta},\quad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta};$

(ii) $\cos\theta\sec\theta=1,\quad \cos\theta=\frac{1}{\sec\theta},\quad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta};$

(iii) $\tan\theta\cot\theta=1,\quad \tan\theta=\frac{1}{\cot\theta},\quad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta};$

(iv) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1;$

(v) $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta;$

(vi) $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta;$

(vii) $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta};$

(viii) $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$

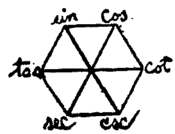


圖 234.

將六個三角函數排成如圖 234 六角形，與上面的八個公式對照，則記憶較易，讀者該仔細比較發現這圖和公式的關係。

248. 用正弦表示其餘的函數。

由前面的例題和習題，知道若已知一個角的正弦的值，則這個角的其餘的函數的值都可由公式求得。這裏再說明用正弦表示其餘函數的公式。

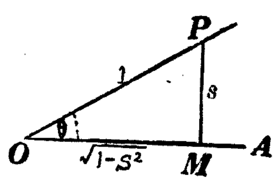


圖 235.

設 AOP 角為 θ, OP 等於 1, MP 等於 S；則依定理 70,

$$OM=\sqrt{OP^2-MP^2}$$
$$=\sqrt{1-S^2}.$$

所以

$$\sin\theta=\frac{MP}{OP}=\frac{S}{1}=S,$$

$$\cos\theta=\frac{OM}{OP}=\pm\sqrt{1-S^2}=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta},$$

$$\tan\theta=\frac{MP}{OM}=\pm\frac{S}{\sqrt{1-S^2}}=\pm\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}},$$

$$\cot\theta=\frac{OM}{MP}=\frac{\pm\sqrt{1-S^2}}{S}=\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta},$$

$$\sec\theta=\frac{OP}{OM}=\frac{1}{\pm\sqrt{1-S^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}},$$

$$\csc\theta=\frac{OP}{MP}=\frac{1}{S}=\frac{1}{\sin\theta}.$$

〔注意〕 根號前的 $\pm$ 號表示有時取正，有時取負。應取正或負的條件，以後再說。

249. 用餘弦表示其餘的函數。

設 AOP 角為 θ, $OM=x$, $OP=1$；

那末　$MP=\sqrt{OP^2-OM^2}$

$$=\sqrt{1-x^2}.$$

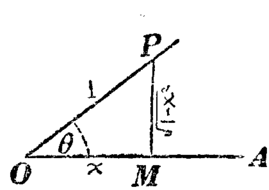


圖 236.

所以

$$\cos\theta=\frac{OM}{OP}=\frac{x}{1}=x,$$

$$\sin\theta=\frac{MP}{OP}=\sqrt{1-x^2}=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta},$$

$$\tan\theta=\frac{MP}{OM}=\frac{\pm\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta},$$

$$\cot\theta=\frac{OM}{MP}=\frac{x}{\pm\sqrt{1-x^2}}=\frac{\cos\theta}{\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}},$$

$$\sec\theta=\frac{OP}{OM}=\frac{1}{x}=\frac{1}{\cos\theta},$$

$$\csc\theta=\frac{OP}{MP}=\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}}.$$

同樣地，用其餘的四個函數中的一個，也可表示其他的五個函數，總括起來如下表：

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
$\sin\theta$	$\sin\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\csc\theta}$
$\cos\theta$	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\csc^2\theta-1}}{\csc\theta}$
$\tan\theta$	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\cot\theta$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\csc^2\theta-1}$
$\sec\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\frac{\csc\theta}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\csc\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\csc\theta$

250. 已知一角的函數，求作這個角及牠的其餘的函數。

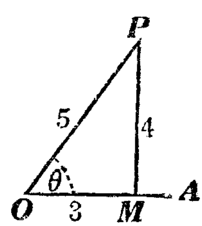


圖 237.

例 1. 若 $\cos\theta=\frac{3}{5}$，求其餘函數的值。

因為 $\cos\theta=\frac{OM}{OP}$.

設 $OM=3,\ OP=5$;

則 $MP=\sqrt{OP^2-OM^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4.$

因此，本題已成爲已知三邊，求作三角形。依 162 節，便可作成 MOP 三角形，而 MOP 角卽 θ。

因此得：
$$\sin\theta=\frac{4}{5},\qquad \csc\theta=\frac{5}{4},$$
$$\tan\theta=\frac{4}{3},\qquad \sec\theta=\frac{5}{3},$$
$$\cot\theta=\frac{3}{4}.$$

例 2. 有一個角 θ，牠的正弦是 $\frac{1}{3}$. 試作此角，並求牠的其餘的函數。

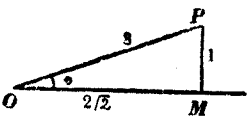


圖 238.

因 $\sin\theta=\dfrac{MP}{OP}=\dfrac{1}{3}$.

先作直線 OP，以 OP 爲直徑畫圓，再以 P 爲圓心，以 OP 的 $\frac{1}{3}$ 爲半徑畫弧，與圓交於 M，連 OM，則 MOP 角卽所求的角。

因 $$\sin\theta=\frac{MP}{OP}=\frac{\frac{1}{3}OP}{OP}=\frac{1}{3},$$

$$\therefore\quad OM=\sqrt{OP^2-MP^2}=\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

而 $$\cos\theta=\frac{OM}{OP}=\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{2},$$

$$\sec\theta=\frac{OP}{OM}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}\sqrt{2},$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{1}{4}\sqrt{2},$$

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=2\sqrt{2},$$

$$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=3.$$

例 3. 已知 $\tan\theta=\frac{3}{4}$. 畫 θ 角，並求牠的其餘的函數。

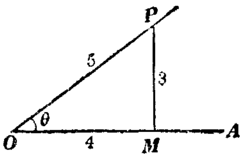


圖 239.

因 $\tan\theta=\frac{MP}{OP}=\frac{3}{4}$.

畫直線 OM, 於 M 點作 MP 垂直於 OM, 且等於 $\frac{3}{4}OM$. 聯接 OP, 則 MOP 角便等於 θ。而

$$OP=\sqrt{\overline{OM}^2+\overline{MP}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{3}{5},\qquad \csc\theta=\frac{5}{3},$$

$$\cos\theta=\frac{5}{4},\qquad \cot\theta=\frac{4}{3},$$

$$\sec\theta=\frac{4}{5}.$$

〔注意〕 已知函數求角，例 1 和例 2 的兩種作圖法，任用一種都可以。

練習問題

1. 試依 § 248 的方法，求用正切表示其餘的函數。
2. 試依 § 248 的方法，求用正割表示其餘的函數。
3. 試依 § 248 的方法，求用餘割表示其餘的函數。
4. 若 $\sin A=\frac{11}{61}$, 畫出 A, 並求 $\tan A$, $\cos A$ 同 $\sec A$ 各函數。
5. 若 $\cot\theta=\frac{15}{8}$, 畫出 θ, 並求 $\cos\theta$, 同 $\csc\theta$ 各函數。

習題解答： 4. $\frac{11}{60}$; $\frac{60}{61}$; $\frac{61}{60}$. 5. $\frac{15}{17}$; $\frac{17}{18}$. 6. $\frac{1}{2}\sqrt{5}$; $\frac{3}{5}\sqrt{5}$.

6. 若 $\sec A=\frac{3}{2}$，畫出 A，並求 $\tan A$ 同 $\csc A$ 各函數。

§51. 三角恆等式　表三角函數相互關係的恆等式，稱爲三角恆等式，三角恆等式的證明在平面三角中是很重要的。現在舉幾個例如下：

例 1.　證明　$\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\csc A-\cot A.$

〔證明〕　$\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\sqrt{\frac{(1-\cos A)^2}{1-\cos^2 A}}=\frac{1-\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$

$$=\frac{1-\cos A}{\sin A}=\frac{1}{\sin A}-\frac{\cos A}{\sin A}=\csc A-\cot A.$$

例 2.　證明　$\sqrt{\sec^2 A+\csc^2 A}=\tan A+\cot A.$

〔證明〕　$\sqrt{\sec^2 A+\csc^2 A}=\sqrt{(1+\tan^2 A)+(1+\cot^2 A)}$

$$=\sqrt{\tan^2 A+2+\cot^2 A}$$

$$=\sqrt{\tan^2 A+2\tan A\cot A+\cot^2 A}$$

$$=\sqrt{(\tan A+\cot A)^2}$$

$$=\tan A+\cot A.$$

例 3.　證明

$$(\csc A-\sin A)(\sec A-\cos A)(\tan A+\cot A)=1.$$

〔證明〕　$(\csc A-\sin A)(\sec A-\cos A)(\tan A+\cot A)$

$$=\left(\frac{1}{\sin A}-\sin A\right)\left(\frac{1}{\cos A}-\cos A\right)\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}\right)$$

$$=\frac{1-\sin^2 A}{\sin A}\times\frac{1-\cos^2 A}{\cos A}\times\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{\cos^2 A}{\sin A}\times\frac{\sin^2 A}{\cos A}\times\frac{1}{\sin A\cos A}=1.$$

〔注意〕 證明三角恆等式的方法如例 1 例 2 所示的，是直接應用代數式變化的法則和三角中的公式，這全靠多練習。例 3 是將各函數都用正弦或餘弦表示，

再應用代數的方法和三角的公式。通常證明恆等式，在初學的人，用這種法子較易着手。

練習問題

證明下列各恆等式:

1. $\sin A \cot A = \cos A$.
2. $\cos A \tan A = \sin A$.
3. $\cot A \sec A = \csc A$.
4. $\sin A \sec A = \tan A$.
5. $\cos A \csc A = \cot A$.
6. $(1-\cos^2 A)\csc^2 A = 1$.
7. $\cot A \sec A \sin A = 1$.
8. $(1-\sin^2 A)\sec^2 A = 1$.
9. $\cot^2\theta(1-\cos^2\theta) = \cos^2\theta$.
10. $(1-\cos^2\theta)\sec^2\theta = \tan^2\theta$.
11. $\cos^4 A - \sin^4 A + 1 = 2\cos^2 A$.
12. $(\sin A + \cos A)(1-\sin A\cos A) = \sin^3 A + \cos^3 A$.
13. $\dfrac{\sin A}{1+\cos A} = \dfrac{1+\cos A}{\sin A} = 2\csc A$.
14. $\cos^6 A + \sin^6 A = 1 - 3\sin^2 A\cos^2 A$.
15. $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A$.
16. $\dfrac{\csc A}{\csc A - 1} + \dfrac{\csc A}{\csc A + 1} = 2\sec^2 A$.
17. $(\sec A + \cos A)(\sec A - \cos A) = \tan^2 A + \sin^2 A$.
18. $\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$.
19. $(\sec\theta\cot\theta)^2 - (\cos\theta\csc\theta)^2 = 1$.
20. $\tan^2\theta - \cot^2\theta = \sec^2\theta - \csc^2\theta$.
21. $(1+\cot A - \csc A)(1+\tan A + \sec A) = 2$.
22. $\dfrac{1}{\cos^2 A} - \dfrac{1}{\cot^2 A} = 1$.

252. 三角方程式。

能由等式中，求出未知角的三角函數者，叫做三角方程式，其解法與代數方程式之解法相同，如次記之例。倘有不只一種函數常須先化爲一種函數而後解之。

例 1. 若 $2\sin\theta=2-\cos\theta$，求 $\sin\theta$ 的值。

$$2\sin\theta=2-\cos\theta.$$

移項，$$2\sin\theta-2=-\cos\theta.$$

依公式，$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}.$$

兩邊平方，$$(2\sin\theta-2)^2=(-\sqrt{1-\sin^2\theta})^2,$$

$$4\sin^2\theta-8\sin\theta+4=1-\sin^2\theta.$$

卽 $$5\sin^2\theta-8\sin\theta+3=0;$$

或 $$(5\sin^2\theta-3)(\sin\theta-1)=0.$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{3}{5},\text{ 或 } 1.$$

例 2. 若 $\cot\theta+\csc\theta=5$，求 $\cos\theta$ 的值，

$$\cot\theta+\csc\theta=5.$$

依公式，$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}};\quad \csc\theta=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}.$$

代入原式，得 $$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}+\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}=5.$$

去分母，$$\cos\theta+1=5\sqrt{1-\cos^2\theta}.$$

兩邊平方，$$(\cos\theta+1)^2=(5\sqrt{1-\cos^2\theta})^2,$$

$$\cos^2\theta+2\cos\theta+1=25-25\cos^2\theta.$$

卽 $$26\cos^2\theta+2\cos\theta-24=0.$$

兩邊除以 2，$$13\cos^2\theta+\cos\theta-12=0;$$

$$(\cos\theta+1)(13\cos\theta-12)=0.$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{12}{13},\text{ 或 } -1.$$

例 3.　$3\sec^4\theta+8=10\sec^2\theta$, 求 $\tan\theta$ 的值。

依公式,　$\sec\theta=\sqrt{1+\tan^2\theta}$.

代入原式;　$3(\sqrt{1+\tan^2\theta})^4+8=10(\sqrt{1+\tan^2\theta})^2$,

$$3(1+\tan^2\theta)^2+8=10+10\tan^2\theta,$$

$$3(1+2\tan^2\theta+\tan^4\theta)+8=10+10\tan^2\theta,$$

$$3+6\tan^2\theta+3\tan^4\theta+8=10+10\tan^2\theta,$$

$$3\tan^4\theta-4\tan^2\theta+1=0.$$

即　$(3\tan^2\theta-1)(\tan^2\theta-1)=0.$

$$\therefore\quad \tan\theta=\sqrt{\frac{1}{3}},\ 或\ 1.$$

〔注意 1〕 這類題的解法總是先將各個函數都用所求的函數表示。

〔注意 2〕 解方程式常得正負兩值,在這裏只取正的,理由以後再說。

習練問題

1. 若 $\sin\theta=1+\cos\theta$, 求 $\sin\theta$ 的值。
2. 若 $\tan\theta+\sec\theta=1.5$, 求 $\sin\theta$ 的值。
3. 若 $\tan^2\theta+\sec\theta=5$, 求 $\cos\theta$ 的值。
4. 若 $\tan\theta+\cot\theta=2$, 求 $\sin\theta$ 的值。
5. 若 $\tan\theta=\dfrac{2x(x+1)}{2x+1}$, 求 $\sin\theta$ 同 $\cos\theta$ 的值。

第三節　特別角的三角函數的值

253.　45° 角的函數的值。

設 AOP 角等於 45°,

習題解答:

1. $\frac{3}{5}$ 或 $\frac{5}{13}$.　　2. $\frac{5}{13}$.　　3. $\frac{1}{2}$.

4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.　　5. $\frac{2x(x+1)}{2x^2+2x+1}$; $\frac{2x+1}{2x^2+2x+1}$.

因三角形的三內角之和等於二直角，

$\therefore \quad \angle OPM = 180° - \angle POM - \angle PMO$

$= 180° - 45° - 90°$

$= 45° = \angle POM.$

$\therefore \quad OM = MP.$

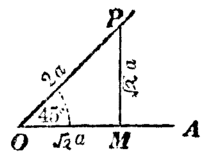


圖 240.

若 $\qquad OP = 2a.$

那末 $\qquad 4a^2 = OP^2 = OM^2 + MP^2 = 2 \cdot OM^2.$

卽 $\qquad OM = a\sqrt{2}.$

$$\therefore \quad \sin 45° = \frac{MP}{OP} = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos 45° = \frac{OM}{OP} = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\tan 45° = \frac{MP}{OM} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1.$$

其餘的三個函數是這三個函數的倒數。因此：

$\csc 45° = \sqrt{2};\quad \sec 45° = \sqrt{2};\quad \cot 45° = 1.$

254. 30° 角的函數的值。

設 AOP 角等於 30°，延長 PM 到 P'，使 MP' 等於 MP。

因此 OMP 同 OMP' 這兩個三角形有 OM 同 MP 等於 OM 同 MP'，而這兩條線所夾的角也是相等的。所以

$OP' = OP,$

$\angle OP'P = \angle OPP' = 60°,$

$\therefore \quad P'OP$ 是一個正三角形。

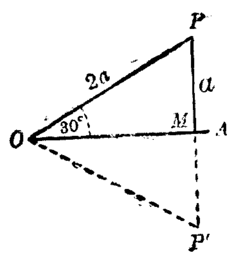


圖 241.

設 $\qquad MP = \frac{1}{2}P'P = \frac{1}{2}OP = a;$

則 $\qquad OM = \sqrt{OP^2 - MP^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$

$$\therefore \quad \sin 30^\circ = \frac{MP}{OP} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

其餘的三角函數：

$$\csc 30^\circ = 2;$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3};$$

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3}.$$

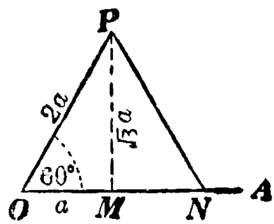


圖 242.

255. 60° 角的函數的值。

設 AOP 角等於 60°。

在 OA 線上取一點 N, 使

$$OM = MN = a.$$

現在，在 OMP 同 NMP 兩個三角形中，有 OM 同 MP 與 NM 同 MP 各各相等，而牠們各各所夾的角也相等。

$$\therefore \quad PN = OP,$$

$$\angle PNM = \angle POM = 60^\circ.$$

因此 OPN 三角形是一個正三角形，所以

$$OP = ON = 2\,OM = 2a.$$

$$\therefore \quad MP = \sqrt{OP^2 - OM^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\therefore \quad \sin 60^\circ = \frac{MP}{OP} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \sqrt{3}.$$

其餘的三個函數是:

$$\csc 60^\circ = \frac{2}{3}\sqrt{3};\quad \sec 60^\circ = 2;\quad \cot 60^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

256. 0° 角的函數的值。

設動線 OP 向 OA 慢慢地挨近，挨近到 AOP 角小到不能測量，幾乎等於 0° 的時候，那末 OP 慢慢地便同 OM 相合，MP 因此也慢慢地縮短，短到只有一點同 M 相合了。到這時候:

$$OP = OM;$$

$$PM = 0.$$

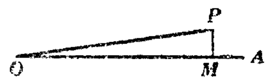


圖 243.

所以

$$\sin 0^\circ = \frac{0}{PO} = 0;$$

$$\cos 0^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1;$$

$$\tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0;$$

$$\cot 0^\circ = \frac{1}{\tan 0^\circ} = \frac{1}{0} = \infty;$$

$$\sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} = 1;$$

$$\csc 0^\circ = \frac{1}{\sin 0^\circ} = \frac{1}{0} = \infty.$$

〔注意〕 ∞ 是代替"無窮大"的符號，因爲 0 無論除什麼數，牠的值都不能用有限的數表示，所以我們說牠等於 ∞。

257. 90° 角的函數的值。

設 AOP 角差不多等於一直角。

當 OP 眞是移動到使 AOP 角等於 90° 的時候，OM 縮小成一點與 O 相合了，MP 同 OP 也相合了。

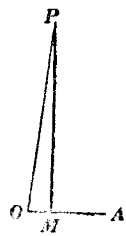


圖 244.

$$\therefore\quad OM = 0;$$

$$OP = MP.$$

因此 $$\sin 90° = \frac{MP}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1;$$

$$\cos 90° = \frac{OM}{OP} = \frac{0}{OP} = 0;$$

$$\tan 90° = \frac{MP}{OM} = \frac{MP}{0} = \infty;$$

$$\cot 90° = \frac{OM}{MP} = \frac{0}{MP} = 0;$$

$$\sec 90° = \frac{OP}{OM} = \frac{OP}{0} = \infty;$$

$$\csc 90° = \frac{OP}{MP} = \frac{OP}{OP} = 1.$$

例 1. 求 $\sec^3 45°$ 同 $\sin 60° \cot 30° \tan 45°$ 的值。

$$\sec^3 45° = (\sec 45°)^3 = (\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$\sin 60° \cot 30° \tan 45° = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{3}{2}.$$

例 2. 求 $2\cot 45° + \cos^3 60° - 2\sin^4 60° + \frac{3}{4}\tan^2 30°$ 的值。

$$2\cot 45° + \cos^3 60° - 2\sin^4 60° + \frac{3}{4}\tan^2 30°$$

$$= (2 \times 1) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= 2 + \frac{1}{8} - 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{8} - \frac{9}{8} + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}.$$

練習問題

求下列各題之值：

1.　$\tan^2 60°+2\tan^2 45°$.　2.　$2\csc^2 45°-3\sec^2 30°$.

3.　$2\sin 30°\cos 30°\cot 60°$.

4.　$\tan^2 60°+4\cos^2 45°+3\sec^2 30°$.

5.　$\tan^2 30°+2\sin 60°+\tan 45°-\tan 60°+\cos^2 30°$.

6.　$3\tan^2 30°+\frac{4}{3}\cos^2 30°-\frac{1}{2}\sec^2 45°-\frac{1}{3}\sin^2 60°$.

7.　$\frac{1}{3}\sin^2 60°+\frac{1}{2}\sec^2 60°\tan^2 30°+\frac{4}{3}\sin^2 45°\tan^2 60°$.

258. 餘角函數的值。

設動線 OP 由 OA 起到 OP 止，得 AOP 角等於 θ，從 P 點作 PM 垂直於 OA，因為三角形三內角之和等於二直角，OMP 角已經等於一個直角，所以 POM 角與 OPM 角互為餘角。

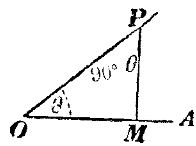


圖　245.

但　　$\angle POM=\theta$,

$\therefore\quad \angle OPM=90°-\theta$.

因此　$\sin(90°-\theta)=\sin MPO=\frac{MO}{PO}=\cos AOP=\cos\theta$;

$\cos(90°-\theta)=\cos MPO=\frac{PM}{PO}=\sin AOP=\sin\theta$;

$\tan(90°-\theta)=\tan MPO=\frac{MO}{PM}=\cot AOP=\cot\theta$;

$\cot(90°-\theta)=\cot MPO=\frac{PM}{MO}=\tan AOP=\tan\theta$;

$\sec(90°-\theta)=\sec MPO=\frac{PO}{PM}=\csc AOP=\csc\theta$;

習題解答：

1.　5.　2.　0.　3.　$\frac{1}{2}$.　4.　9.　5.　$2\frac{1}{12}$.　6.　$\frac{1}{4}$.　7.　$1\frac{11}{12}$.

$$\csc(90° - \theta) = \csc MPO = \frac{PO}{MO} = \sec AOP = \sec\theta.$$

例 1. $\sin 60° = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

例 2. $\sin 30° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}.$

例 3. $\tan 60° = \cot 30° = \sqrt{3}.$

例 4. 若 $\cos 2A = \sin 3A$，求 A 的值。

【解】 $\sin 3A = \cos(90° - 3A),$

$\therefore \quad \cos 2A = \cos(90° - 3A),$

$90° - 3A = 2A,\ 90° = 5A.$

$\therefore \quad A = 18°.$

例 5. 證明 $\sin(90° - A)\cot(90° - A) = \sin A$。

【證】 $\sin(90° - A)\cot(90° - A)$

$$= \cos A \tan A = \cos A \cdot \frac{\sin A}{\cos A} = \sin A.$$

例 6. 證明 $\dfrac{\sin(90° - A)}{\sec(90° - A)} \cdot \dfrac{\tan(90° - A)}{\cos A} = \cos A.$

〔證〕
$$\frac{\sin(90° - A)}{\sec(90° - A)} \cdot \frac{\tan(90° - A)}{\cos A} = \frac{\cos A}{\csc A} \cdot \frac{\cot A}{\cos A}$$

$$= \frac{\cot A}{\csc A} = \frac{\dfrac{\cos A}{\sin A}}{\dfrac{1}{\sin A}} = \cos A.$$

例 7. 若 $x\sin(90° - A)\cot(90° - A) = \cos(90° - A)$；求 x。

【解】
$$x = \frac{\cos(90° - A)}{\sin(90° - A)\cot(90° - A)} = \frac{\sin A}{\cos A \dfrac{\sin A}{\cos A}} = 1.$$

練習問題

證明下列各式:

1. $\sin^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ = \frac{3}{2}$.

2. $\tan^2 30^\circ + \tan^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ = 4\frac{1}{3}$.

3. $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = 1$.

4. $\cos 45^\circ \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

5. $\csc^2 45^\circ \sec^2 30^\circ \sin^8 90^\circ \cos 60^\circ = 1\frac{1}{3}$.

由下列關係求 A 的值:

6. $\sin A = \cos 4A$.

7. $\cos 3A = \sin 7A$.

8. $\tan A = \cot 3A$.

9. $\cot A = \tan 2A$.

10. $\sec 5A = \csc A$.

證明下列各恆等式:

11. $\sin A \tan(90^\circ - A) \sec(90^\circ - A) = \cot A$.

12. $\cos A \tan A \tan(90^\circ - A) \csc(90 - A) = 1$.

13. $\sin A \cos(90^\circ - A) + \cos A \sin(90^\circ - A) = 1$.

14. $\cos(90^\circ - A) \csc(90^\circ - A) = \tan A$.

15. $\csc^2(90^\circ - A) = 1 + \sin^2 A \csc^2(90^\circ - A)$.

16. $\sin A \cot A \cot(90^\circ - A) \sec(90^\circ - A) = 1$.

17. $\tan^2 A \sec^2(90^\circ - A) - \sin^2 A \csc^2(90^\circ - A) = 1$.

18. $\frac{\csc^2 A \tan^2 A}{\cot(90^\circ - A)} \cdot \frac{\cot A}{\sec^2 A} = \sec^2(90^\circ - A) - 1$.

19. $\frac{\cot^2 A \sin^2(90^\circ - A)}{\cot A \cos A} = \tan(90^\circ - A) \cos A$.

20. 若 $\sec A \csc(90^\circ - A) - x \cot(90^\circ - A) = 1$, 求 x.

第四節 直角三角形的解法

解普通三角形,一定要知道三個互相獨立的部分,而這三部分中,還至少要一部分是邊的長,但對於直角三角形,因為已有一個角是直角,所以只要知道其他的兩個獨立條件就可以了。若應用三角函數的關係,也只要知道兩邊或一邊與一個銳角就可以解出來,現在分述如下:

259. 已知兩邊解三角形。

【解】 設 ABC 為一直角三角形,A 是直角。

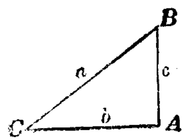


圖 246.

假定其中有兩邊是已知的,那末其餘的一邊,運用 $a^2=b^2+c^2$ 這個公式就可以求出來了。

再由 $\cos C=\dfrac{b}{a}$ 及 $B=90°-C$,

則 C 角,B 角都一齊可以求出來了。

例. 已知 $B=90°$, $a=20$, $b=40$; 解三角形。

【解】
$$c^2=b^2-a^2$$
$$=40^2-20^2$$
$$=1600-400=1200.$$
$$\therefore\quad c=20\sqrt{3}.$$

而
$$\sin A=\frac{a}{b}=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}.$$
$$\therefore\quad A=30°.$$

因此
$$C=90°-30°=60°.$$

〔注意 1〕 A, B, C 代角, a, b, c 代各角所對的邊,不可弄混。

〔注意 2〕 應用三角函數,解直角三角形,往往不只一個方法。上題還可以這樣做。

$$\cos C=\frac{a}{b}=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad C=60°.$$

而 $$A=90°-C=90°-60°=30°.$$

所以 $$\frac{c}{40}=\cos C=\cos 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore\quad c=20\sqrt{3}.$$

260. 已知一邊與一個銳角，解三角形。

【解】 設 ABC 為一直角三角形，A 是直角。

現在假設 b 邊與角銳 C，是已知的；

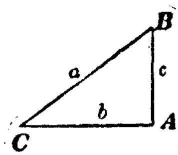


圖 247.

那末 $$B=90°-C,$$

並且 $$\frac{a}{b}=\sec C,$$

$$\therefore\quad a=b\sec C;$$

又 $$\frac{c}{b}=\tan C,$$

$$\therefore\quad c=b\tan C.$$

所以 B, a, c 的值都可以決定了。

例 1. 已知 $B=90°$，$A=30°$，$c=5$，解直角三角形。

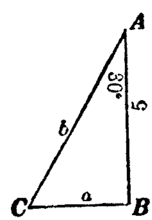


圖 248.

【解】 因 $$A=30°,$$

$$\therefore\quad C=90°-30°=60°.$$

而 $$\frac{a}{5}=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\therefore\quad a=5\tan 30°=5\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

同樣地， $$\frac{b}{5}=\sec 30°=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\therefore\quad b=5\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{10}{\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

〔注意〕 解題時，所取的三角函數，須與題上所給的條件，同着要找的東西有直接關係。

例 2. 若 $C=90°$, $B=25°43'$, $c=100$, 應用三角函數表解直角三角形。

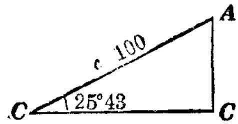


圖 249.

【解】 因 $B=25°43'$,

$\therefore\quad A=90°-25°45'=64°17'.$

現在 $$\frac{a}{100}=\cos 25°43',$$

$\therefore\quad a=100\times\cos 25°43'=100\times 0.9012=90.12$ (查表).

同樣地， $$\frac{b}{a}=\tan 25°43',$$

$$\therefore\quad b=90\cdot 12\times 0.4817$$
$$=43\cdot 41\ (\text{查表}).$$

〔注意〕 上面解直角三角形的法則，並不限於只求那個直角三角形的各部分，還可以引伸出去求旁的與直角三角形有關的量。

例 1. 有一個三角形 ABC, 牠的 A 角等於 $30°$, B 角等於 $135°$, AB 邊長 100 尺；求從 C 點到 AB 邊上的垂直線。

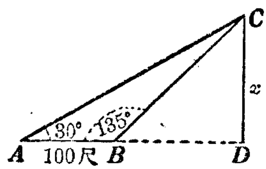


圖 250.

【解】 作 CD 垂直於 AB。

設 $$CD=x.$$

因 $$\angle CBD=180°-135°=45°,$$

$$\therefore\quad BD=CD=x.$$

從直角三角形 ADC 中，得：

$$\frac{CD}{AD}=\tan DAC=\tan 30°.$$

即是 $$\frac{x}{100+x}=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

三 角 函 數 表

角	正弦	餘弦	正切	角	正弦	餘弦	正切
1°	.0175	.9998	.0175	46°	.7193	.6947	1.0355
2	.0349	.9994	.0349	47	.7314	.6820	1.0724
3	.0523	.9986	.0524	48	.7431	.6691	1.1106
4	.0698	.9976	.0699	49	.7547	.6561	1.1504
5	**.0872**	**.9962**	**.0875**	**50**	**.7660**	**.6428**	**1.1918**
6	.1045	.9945	.1051	51	.7771	.6293	1.2349
7	.1219	.9925	.1228	52	.7880	.6157	1.2799
8	1392	.9903	.1405	53	.7986	.6018	1.3270
9	.1564	.9877	.1584	54	.8090	.5878	1.3764
10	**.1736**	**.9848**	**.1763**	**55**	**.8192**	**.5736**	**1.4281**
11	.1908	.9816	.1944	56	.8290	.5592	1.4826
12	.2079	.9781	.2126	57	.8387	.5446	1.5399
13	.2250	.9744	.2309	58	.8480	.5299	1.6003
14	.2419	.9703	.2493	59	.8572	.5150	1.6643
15	**.2588**	**.9659**	**.2679**	**60**	**.8660**	**.5000**	**1.7321**
16	.2756	.9613	.2867	61	.8746	.4848	1.8040
17	.2924	.9653	.3057	62	.8829	.4695	1.8807
18	.3090	.9511	.3249	63	.8910	.4540	1.9626
19	.3256	.9455	.3413	64	.8988	.4384	2.0503
20	**.3420**	**.9397**	**.3640**	**65**	**.9063**	**.4226**	**2.1445**
21	.3584	.9336	.3839	66	.9135	.4067	2.2460
22	.3746	.9272	.4040	67	.9205	.3907	2.3559
23	.3907	.9205	.4245	68	.9272	.3746	2.4751
24	.4067	.9135	.4452	69	.9336	.3584	2.6051
25	**.4226**	**.9063**	**.4663**	**70**	**.9397**	**.3420**	**2.7475**
26	.4384	.8988	.4877	71	.9455	.3256	2.9042
27	.4540	.8910	.5095	72	9511	.3090	3.0777
28	.4695	.8829	.5317	73	.9563	.2924	3.2709
29	.4848	.8746	.5543	74	.9613	.2756	3.4874
30	**.5000**	**.8660**	**.5774**	**75**	**.9659**	**.2588**	**3.7321**
31	.5150	.8572	.6009	76	9703	.2419	4.0108
32	.5299	.8480	.6249	77	9744	.2250	4.3315
33	.5446	.8387	.6494	78	9781	.2079	4.7046
34	.5592	.8290	.6745	79	.9816	.1908	5.1446
35	**.5736**	**.8192**	**.7002**	**80**	**.9848**	**.1736**	**5.6713**
36	.5878	.8090	.7265	81	.9877	.1564	6.3138
37	.6018	.7986	.7536	82	.9903	.1392	7.1154
38	.6157	.7880	.7813	83	.9925	.1219	8.1443
39	.6293	.7771	.8098	84	.9945	.1045	9.5144
40	**.6428**	**.7660**	**.8391**	**85**	**.9962**	**.0872**	**11.4301**
41	.6561	.7547	.8693	86	.9976	.0698	14.3006
42	.6691	.7431	.9004	87	.9986	.0523	19.0811
43	.6820	.7314	.9325	88	.9994	.0349	28.6363
44	.6947	.7193	.9657	89	9998	.0175	57.2900
45	**.7071**	**.7071**	**1.0000**	**90**	**1.0000**	**.0000**	....

$$\therefore \quad x\sqrt{3}=100+x,$$

$$x(\sqrt{3}-1)=100.$$

$$\therefore \quad x=\frac{100}{\sqrt{3}-1}=\frac{100(\sqrt{3}+1)}{2}=50(\sqrt{3}+1).$$

即 CD 長 $50(\sqrt{3}+1)$ 尺。

例 2. 在 ABC 三角形中，$a=9.6$ 寸，$c=5.4$ 寸，$B=37°$。求從 A 角到 BC 邊的垂直線和 A 角與 C 角的近似值。

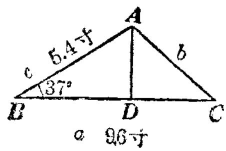


圖 251.

【解】 在 ABD 三角形中，得：

$$\frac{BD}{AB}=\cos ABD=\cos 37°,$$

$$\therefore \quad BD=AB\cos 37°$$
$$=5.4\text{ 寸}\times 0.7986 \text{ (查表)}$$
$$=4.31\text{ 寸}。$$

同樣地，
$$\frac{AD}{AB}=\sin ABD=\sin 37°,$$

$$\therefore \quad AD=AB\sin 37°$$
$$=5.4\text{ 寸}\times 0.6018 \text{ (查表)}$$
$$=3.25\text{ 寸}。$$

但是
$$CD=BC-BD$$
$$=9.6\text{ 寸}-4.31\text{ 寸}=5.39\text{ 寸}。$$

又從 ACD 直角三角形中，得：

$$\tan ACD=\frac{AD}{CD}=\frac{3.25}{5.29}=0.6144$$

查表得： $\tan 31°=0.6009$，$\tan 32°=0.6249$，

$$\therefore \quad \angle ACD=32° \text{ (近似值)},$$

$$\angle BAC=180°-37°-32°=111°.$$

因此得： $AD=3.25$ 寸， $\angle A=111°$， $\angle C=32°$.

261. 求任何三角形的面積。

設 Δ 代 ABC 三角形的面積，作 AD 垂直於 BC。

根據平面幾何的定理：

$$\Delta=\frac{1}{2}(\text{底}\times\text{高})$$

$$=\frac{1}{2}BC\cdot AD.$$

但是 $$\frac{AD}{AB}=\sin B,$$

$$\therefore\quad AD=AB\sin B.$$

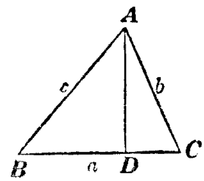


圖 252.

$$\therefore\quad \Delta=\frac{1}{2}BC\cdot AB\sin B$$

$$=\frac{1}{2}ca\sin B.$$

〔注意〕 若從 C 點作直線垂直於對邊，或從 B 點作直線垂直於對邊，所得的結果是：

$$\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C$$

與 $$\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

由此得定理： 任何三角形的面積等於三角形的兩邊及這兩邊所夾的角的正弦的積的一半。

即是 $\Delta=\frac{1}{2}$(兩邊的積)$\times$(這兩邊所夾的角的正弦)。

例. 有一個平行四邊形，牠的兩隣邊等於 42 尺與 32 尺，這兩邊所夾的角是 30°；求牠的面積。

【解】 作平行四邊形 $ABCD$ 的對角線 AC，則 ABC 與

ADC 爲兩個相等的三角形。

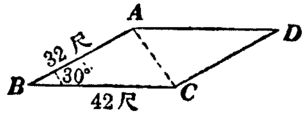


圖 253.

設 ABC 三角形的面積爲 Δ, 則

$$\Delta=\frac{1}{2}BC\cdot AB\cdot\sin B$$

$$=\frac{1}{2}\times 42\times 32\times\sin 30°$$

$$=672\times\frac{1}{2}=336\ (\text{方尺})。$$

因　　　　$\Delta ABC=\triangle ADC.$

$\therefore$　平行四邊形 $ABCD$ 的面積 $=336$ 方尺 $\times 2$

$=672$ 方尺。

練習問題

解三角形:

1. $A=90°,\ a=4,\ b=2\sqrt{3}$。
2. $C=90°,\ b=12,\ a=4\sqrt{3}$。
3. $a=20,\ c=20,\ B=90°$。
4. $b=c=2,\ A=90°$。
5. $C=90°,\ a=9\sqrt{3},\ A=30°$。
6. $B=C=45°,\ c=4$。
7. 若 $C=90°$, $\cot A=0.07$, $b=49$, 求 a。
8. 若 $C=90°$, $A=38°19'$, $c=50$, 求 a。

(查表得 $\sin 38°19'=0.62$)

9. $B=90°,\ A=36°,\ c=100$。

(查表得 $\tan 36°=0.73$, $\sec 36°=1.24$)

10. $A=90°,\ c=37,\ a=100$。

(查表得 $\sin 21°43'=0.37$, $\cos 21°43'=0.93$)

11. ABC 是一個三角形, BD 垂直於 AC; 求 BD。已知

$A=30°$, $C=120°$, $AC=20$。

12. 若 BD 垂直於 ABC 三角形的底邊 AC；求 a 與 c。已知 $A=30°$, $C=45°$, $BD=10$。

13. 在 ABC 三角形中，AD 垂直於 BC, BD 等於 15 尺；求 AB, AC 與 AD 的長。已知 C 角等於 $60°$, B 角等於 $30°$。

14. 在直角三角形 PQR 中，求斜邊 PR 之長。已知 $QR=8$, $\angle QRP=60°$, $\angle QPR=30°$。

15. 在 ABC 三角形中，B 角等於 $45°$, C 角等於 $120°$, $a=40$；求從 A 到 BC 延長線上的垂直線的長。

16. 已知三角形的兩邊爲 300 尺與 120 尺,這兩邊所夾的角爲 $150°$；求這個三角形的面積。

17. 已知三角形的一邊爲 30 尺，牠的兩個隣角爲 $22\frac{1}{2}°$ 與 $112\frac{1}{2}°$；求這個三角形的面積。

第五節　測量上的應用

應用三角的解法,可以測量物體的高,物體間的距離及地面

習題解答:

1. $c=2$; $B=60$; $C=30°$.
2. $c=8\sqrt{3}$; $A=30°$; $B=60°$.
3. $b=20\sqrt{2}$; $A=C=45°$.
4. $a=2\sqrt{2}$; $B=C=45°$.
5. $B=60°$; $b=27$; $c=18\sqrt{3}$.
6. $A=90°$; $a=4\sqrt{2}$; $b=4$.
7. $a=700$.
8. $a=31$.
9. $C=54°$; $a=73$; $b=124$.
10. $B=68°17'$; $C=21°43'$; $b=93$.
11. $BD=10\sqrt{3}=17.32$.
12. $a=10\sqrt{2}=14.14$; $c=20$.
13. $AB=17.32$ 尺; $AC=10$ 尺; $AD=8.66$ 尺。
14. $PR=12$; 4.
15. $20(3+\sqrt{3})=94.64$.
16. 9000 方尺。
17. 225 方尺。

的面積。

262. 在這裏先解釋測量上常用的幾個術語。

a. 地平面與地平線(水平面或水平線) 是假設與大地平行的面或線。

b. 垂直線　是與地平面或地平線相交成直角的線。

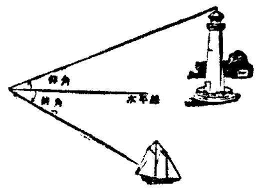


圖 254.

c. 仰角　從地平線仰望比地平線高的一點時，視線和地平線所成的角。如圖 OM 是地平線，P 是比地平線高的一點，MOP 角就是從 O 望到 P 的仰角。

d. 俯角　從與地平面平行的線上一點，望較低的一點時，視線和平行線所成的角。如圖 NP 是平行於 OM 的，NPO 即是從 P 望到 O 的俯角。

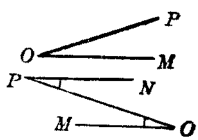


圖 255.

263. 測量用的器械。

測量長度用的，有"卷尺"與"測鎖"；測量角度用的，有"經緯儀"和"六分儀"(圖見下頁)；決定方向用的，有"羅盤"。

264. 測量在地平面上可以接近的直立物體的高。

例 1. 有一隻旗竿，直立在地平面上，在離竿腳 30 尺的地方測得仰角爲 60°；求這旗竿的高。

【解】 設旗竿的高爲 BC。

因　　BC 垂直於 AC，

而　　$AC=30$ 尺，

$\angle CAB=60°$，

$\therefore\quad \dfrac{BC}{AC}=\tan 60°$.

$\therefore\quad BC=AC\tan 60°$

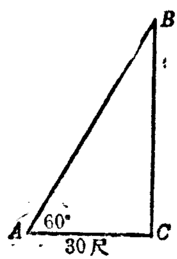


圖 256.

$$=30\text{ 尺}\times\sqrt{3}=30\text{ 尺}\times1.732=51.96\text{ 尺}。$$

即　　　　　　旗竿的高爲 51.96 尺。

〔注意〕 通常看直立於地平面上的物體，總是假設牠垂直於地平面的。

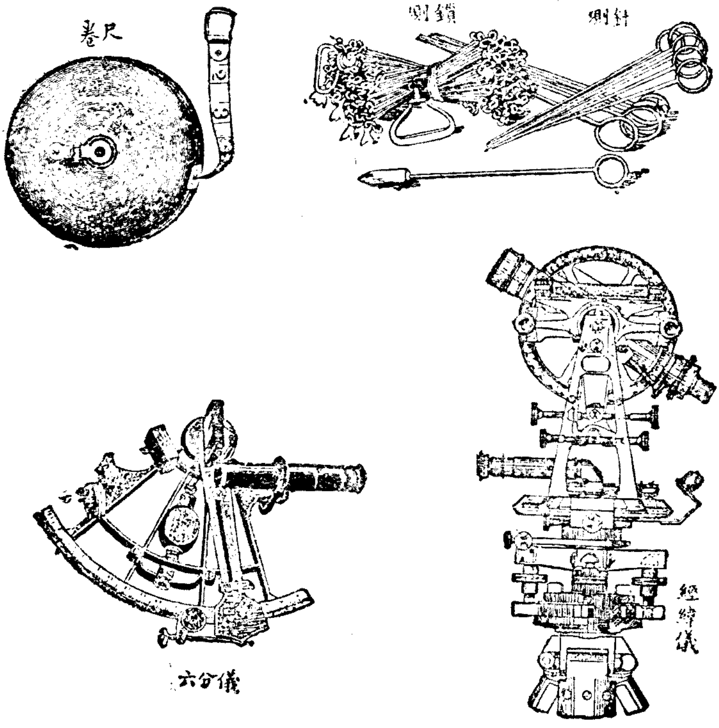


圖　257.

例 2.　有一個人在某點測量一個禮拜堂的塔頂，得仰角爲 45°，他向禮拜堂走近了 100 尺，再測這塔頂，得仰角爲 60°（這個人是與禮拜堂在同一地平面上的）；求禮拜堂的高。

【解】 設 P 爲禮拜堂的塔頂，A 與 B 是這個人兩次測量禮拜堂的立足點。

作 PM 垂直於 AB。

設　$PM=x$.

因　$\angle MAP=45°$,

$\therefore$　$\angle APM=45°$.

又　$\angle MBP=60°$,

則　$\frac{AM}{x}=\cot 45°=1$,

$\frac{BM}{x}=\cot 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

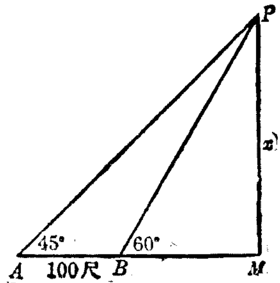


圖 258.

$\therefore$　$AM=x$;

$BM=\frac{x}{\sqrt{3}}$;

$$AM-BM=x-\frac{x}{\sqrt{3}}=x\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}=100.$$

$$\therefore\quad x=\frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{100\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3-1}=50(3+\sqrt{3})$$

$$=50(3+1.732\cdots)=236.6.$$

即　禮拜堂約高 236.6 尺。

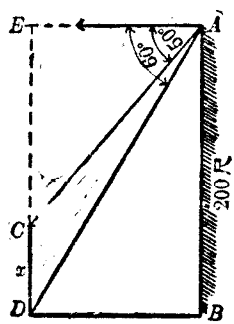
例 3.　從高 200 尺的崖上，測崖下一座塔的頂得俯角 50°，測塔的脚得俯角 60°；求這座塔的高。

【解】 設 A 爲測量者的立足點，BA 爲崖石的高，DC 爲塔的高。

作 AE 平行於 DB。

因此　$\angle EAC=50°$;　$\angle EAD=60°$。

設　DC 爲 x 尺；延長 DC 與 AE 交於 E 點，則



$$CE=BA-x$$

圖 259.

$$=200-x.$$

而 $$\angle ADB=\angle DAE=60°,$$

$$\therefore\quad DB=AB\cot ABD.$$

$$=200\cot 60°=\frac{200}{\sqrt{3}}.$$

但 $$\frac{200-x}{DB}=\frac{CE}{EA}=\tan 50°=1.1918.$$

$$\therefore\quad 200-x=DB\times 1.1918=\frac{200}{\sqrt{3}}\times 1.1918.$$

$$\therefore\quad x=200-\frac{200}{\sqrt{3}}=62.3$$

即 塔高 62.3 尺.

例 4. 從塔腳測一山的高，得仰角 60°，再從塔頂測這山的高，得仰角 30°。塔高 50 丈；求山的高。

【解】 設高爲 $BA=x$ 丈；塔高爲 DC。

作 CE 平行於 DB，則

$$EA=BA-BE=x-50.$$

又設 $$DB=CE=y.$$

從直角三角形 ADB 中，得：

$$y=x\cot 60°=\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

從直角三角形 ACE 中，得：

$$y=(x-50)\cot 30°=\sqrt{3}(x-50).$$

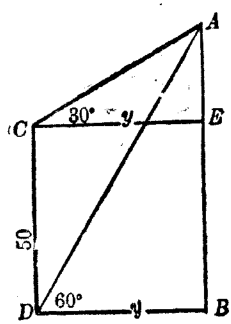


圖 260.

$$\therefore\quad \frac{x}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}(x-50),$$

$$x=3(x-50),$$

$$\therefore\quad x=75.$$

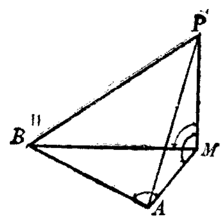
即　　山高 75 丈。

265. 測量不能接近的物體的距離。

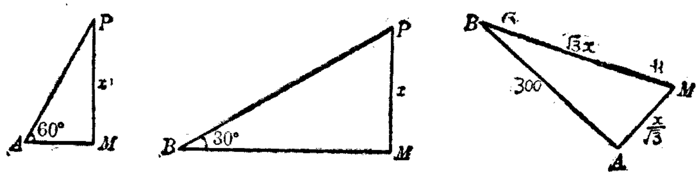
例 1. 有一個人在正南方測量一座塔，得仰角 60°，在同地面上，他向正西走 300 尺，再測這座塔，得仰角 30°；求這座塔的高同他原來與塔的距離。

【解】 設 P 爲塔頂，PM 爲塔高，A 在塔的正南面，B 在 A 的正西；則 PMA 角，PMB 角，MAB 角都是直角。

將三角形 PAM, PBM, ABM（在不同的地平面上）分開來，則成爲 (B)，(C) 及 (D) 各圖。



(A)



(B)　　(C)　　(D)

圖 261.

已知　　$AB=300$ 尺，

$\angle PAM=60°$,

$\angle PBM=30°$.

設塔高爲 x 尺。

從 (B) 圖，得：

$$\frac{AM}{x}=\cot 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\therefore\quad AM=\frac{x}{\sqrt{3}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

從 (C) 圖，得：

$$\frac{BM}{x}=\cot 30^\circ=\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad BM=x\sqrt{3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

從 (D) 圖，得：

$$BM^2=AM^2+AB^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

將 (1), (2) 代入 (3), 則

$$3x^2=\frac{1}{3}x^2+300^2.$$

$$8x^2=3\times 300^2.$$

$$\therefore\quad x=\frac{300\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=150\times\frac{\sqrt{6}}{2}=75\times\sqrt{6}$$

$$=75\times 2.45=183.71.$$

又這人與塔原來的距離 $AM=x\cot 60^\circ$

$$=\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{300\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{300\sqrt{2}}{4}$$

$$=75\times\sqrt{2}=75\times 1.414=10.607.$$

即　塔高約 83.71 尺，他原來與塔的距離約為 106.07 尺。

例 2.　有人在 150 尺高的崖石上，測量崖石正南方的兩艘船，測量得一個俯角是 15°，另一個俯角是 75°；求兩船之間的距離。

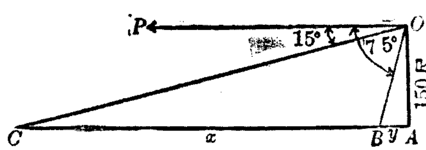


圖　262.

【解】設 AO 為崖石的高，B 與 C 為兩船，PO 為過 O 點的地平線。

因　　$\angle POC=15^\circ$ 和 $\angle POB=75^\circ$,

$\therefore$　$\angle OCA=15^\circ$ 和 $\angle OBA=75^\circ$.

設　　$CB=x$,

$$BA = y,$$

則 $$CA = x + y.$$

從直角三角形 OBA 中,得:

$$y = 150 \cot 75° = 150(2 - \sqrt{3})$$
$$= 300 - 150\sqrt{3} \cdots\cdots (1)$$

從直角三角形 OCA 中,得:

$$x + y = 150 \cot 15° = 150(2 + \sqrt{3})$$
$$= 300 + 150\sqrt{3} \cdots\cdots (2)$$

從 (2) 減 (1), 則

$$x = 300\sqrt{3} = 519.6.$$

即　　兩船之間之距離約爲 519.6 尺。

例 3. 在燈塔 L 上看見兩隻船 A 與 B, A 在 L 的西南, B 在 L 的東偏南 15°。而 B 又在 A 的東偏西。LA 等於 4 里; 求 A, B 兩船之間的距離。

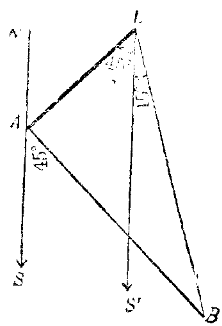


圖 263.

【解】 依正南方向作 LS'.

因 $\angle ALS' = 45°$, $\angle BLS' = 15°$,

$$\therefore \quad \angle ALB = 60°.$$

過 A 點作 NS 線平行於 LS'; 則

$$\angle NAL = \angle ALS' = 45°.$$

因 B 是在 A 的東南,

$$\therefore \quad \angle BAS = 45°.$$

$$\therefore \quad \angle BAL = 180° - 45° - 45°$$
$$= 90°.$$

從直角三角形 ABL 中,得:

$$AB = AL \tan ALB = 4 \tan 60°$$
$$= 4\sqrt{3} = 6.928.$$

即　　A, B 兩船間的距離約爲 6.928里。

〔注意〕 東，南，西，北等等的方向，可以從羅盤上去查，由此得推知各方向間的角度。

例 4. 有一隻船在上午九時向東偏南 37° 航行，每小時行 8 浬。在起初航行的時候，船上的人看見一座礮臺，這礮臺在船的東北 53°，到了上午十一時，礮臺便在船的北西 20° 了；求船在九時和十一時的時候與礮臺的距離。

【解】 設 A 與 C 爲船第一次與第二次的所在地，C 爲礮臺。

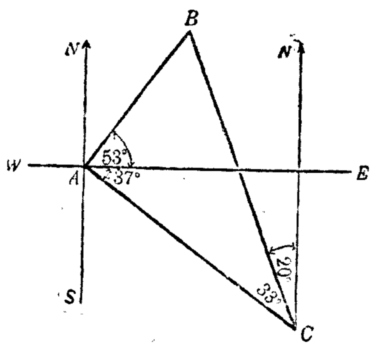


圖 264.

過 A 作 SN 和 WE，指出東，南，西，北各方向。

從 A, C 兩處看，得：

$$\angle EAC = 37°,$$

$$\angle EAB = 53°.$$

因此 $\angle BAC = 90°$.

過 C 作 CN' 平行於 SN，則 $\angle BCN' = 20°$，因這時候礮臺在船的北西 20° 的地方。

又
$$\angle ACN' = \angle CAS$$
$$= 90° - 37° = 53°.$$

$$\therefore \quad \angle ACB = \angle ACN' - \angle BCN'$$
$$= 53° - 20° = 33°.$$

從直角三角形 BAC 中，得：

$$AB = AC \tan ACB = 16 \tan 33°$$
$$= 16 \times 0.6494 \text{ (查表)}$$
$$= 10.3904.$$

而
$$BC = AC \sec ACB = 16 \sec 33°$$
$$= 16 \times 1.924 \text{ (查表)}$$

$=19.0784.$

即 礮臺與船兩次的距離：一爲 10.3904 浬，一爲19.0784 浬。

練習問題

1. 離一隻煙囱 300 尺的地方測煙囱的頂，得仰角 $30°$；求煙囱的高。

1. 從高 160 尺的牆上測一艘兵艦，得俯角 $30°$；求兵艦與這隻船的距離。

3. 有一隻立在地上的竿子長 6 尺，牠的影子長 $2\sqrt{3}$ 尺，求從影子的一端仰望到太陽的仰角。

4. 在離一座塔 86.6 尺的地方，測塔頂得仰角 $30°$；求塔高與測量的人同塔頂的距離。

5. 有一架 45 尺長的梯子，剛剛可以靠着一座牆的頂，若梯子與牆所成的角是 $60°$；求牆的高及梯腳與牆腳的距離。

6. 有人測一座塔的頂得仰角 $30°$；這個人向塔走了 100 碼，再測塔的頂得仰角 $60°$；求塔的高。

7. 有人測量一廂房子上的旗竿，測得竿頂與房頂的仰角爲 $60°$ 同 $30°$；房頂高二丈五尺；求旗竿的高。

8. 有兩個人在一座禮拜堂的正東同時測量禮拜堂的高，他們測得禮拜堂頂的仰角，一爲 $45°$，一爲 $30°$，他們兩人之間的距離是 200 尺；求禮拜堂的高。

9. 有一廂房子是 30 尺高，從這屋頂測一旗竿的頂得仰角 $45°$，從屋腳測這旗竿頂得仰角 $30°$；求旗竿的高同這屋子與旗竿的距離。

10. 有一座山高出地面 3300 尺。在同一地面上的 A 點測量這山頂得仰角 $60°$。有一個氣球在 A 點以平均速度飛起，5 分鐘後，在氣球上測這山頂得仰角 $30°$；求氣球每小時所飛的里數。

11. 從高 100 尺的紀念柱上測牠正西的兩廂房子，得俯角一爲 45°，一爲 30°；求兩房子間之距離。

12. 從高 96 尺的柱上測一座塔的頂與腳，得俯角一爲 30°，一爲 60°；求塔的高。

13. 在高 150 尺的崖石上，測正北海中的兩艘船，得俯角一爲 30°，一爲 15°；求兩船間的距離。

14. 有一個人向正東走時看見他的北東有兩廂房子，他走了 800 碼以後，一廂房子在他的正北，一廂房子便在他的北西了；他最初與這兩廂房子相隔多遠？

15. 有一艘船向正東航行時，船上的人看見在他們的正南停得有兩隻兵艦，等航了 3 浬之後，這兩隻兵艦便在他們的南到西 60° 與 30° 了；他們這時與兵艦相離多遠？

16. 有兩艘船在正午的時候一向西偏南 28°，一向東偏南 62° 的方向航行，牠們的速度每小時一爲 10 浬，一爲 $12\frac{1}{2}$ 浬。求下午兩點鐘時，牠們相隔的距離。

17. 有一艘船向正南航行時，船上的人看見兩座燈塔在他們的正西的一條線上。等航了 10 浬之後，這兩座燈塔便一在他們的北西，一在他們的西北西了；求他們最初與燈塔的距離。

18. 有圓池，從地上一點夾這池的兩直線成 60° 角，從這一點到池邊的最短距離爲 15 丈；池的直徑長幾丈？池的周圍長幾丈？

習題解答：

1. 173.2 尺。	2. 277.12 尺。	3. 60°.
4. 50 尺；100 尺。	5. 22.5 尺；38.97 尺。	6. 86.6 碼。
7. 46.19 尺。	8. 273.2 尺。	9. 70.98 尺；70.98 尺.
10. 5 里。	11. 73.2 尺。	12. 64 尺。
13. 300 尺。	14. 565.6碼；1131.2碼。	15. 3.464 浬；6 浬。
16. 29 浬。	17. 10 浬；24.14 浬.	18. 30 丈。

雜問題

1. 兩角的和爲 80°，差爲 10°，求牠們的度數。

2. 同一個角，照六十分法測得 x 分，照百分法測得 y 分；證明 $50x=27y$。

3. 同一個角，照六十分法測得 s 秒，照百分法測得 t 秒；證明 $250s=81t$。

4. 一個三角形的兩個角，照弧度法測得 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$；求牠的第三個角有多少度？

5. 在三點半鐘時，時分兩針所成的角，求由三種不同的測法來計算的數。

證明下列各恆等式：

6. $\sec^4 A-\sec^2 A=\tan^4 A+\tan^2 A.$

7. $(1+\cot A+\tan A)(\sin A-\cos A)=\dfrac{\sec A}{\csc^2 A}-\dfrac{\csc A}{\sec^2 A}.$

8. $(\sin\alpha+\csc\alpha)^2+(\cos\alpha+\sec\alpha)^2=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+7.$

9. $\sin^2 30°+\sin^2 45°+\sin^2 60°=\frac{3}{2}.$

10. $\sin 30°\cos 60°+\cos 30°\sin 60°=1.$

11. $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1.\ (A=30°)$

12. $\sin 2A=2\sin A\cos A.\ (A=45°)$

13. $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A.\ (A=30°)$

14. $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A.\ (A=45°)$

15. $\sin\theta=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$，求 $\cos\theta$ 和 $\cot\theta$.

16. 若 $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$，證明

$\cos A+\sin(270°+A)-\sin(270-A)+\cos(180°+A)=0.$

17. 證明 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=2\sin^2\alpha-1.$

18. 直角三角形一銳角的正切爲 0.75，牠的周圍爲 12 寸；問斜邊的長多少？

19. 直角三角形 ABC, C 爲直角,試證 $\tan A+\tan B=\frac{c^2}{ab}$。

20. 若 $4\cos^2 x-2(\sqrt{3}+1)\cos x+\sqrt{3}=0$, 求 x 的值。

22. 若 $4+\sqrt{2}=4\cos^2 x+2(\sqrt{2}+1)\sin x$, 求 x 的值。

21. 若 $\begin{cases}\tan^2 x+\tan^2 y=\frac{10}{3},\\ \tan x\tan y=1,\end{cases}$ 求 x, y 的值。

23. 已知斜邊 c 與兩邊的和爲 $a+b=k$, 試解直角三角形。

24. 有五級的塔,從塔脚500尺的地方,望牠的頂,得仰角30°;求塔高。

25. 有長12尺的梯子,恰靠着牆的頂,與地面成60°的角;求牆的高同梯脚與牆脚的距離是多少尺?

26. 有高閣,高220尺,有一個人在某地測得閣頂的仰角爲15°;求這個人與閣的距離。(已知 $\cot 15°=2+\sqrt{2}$)

27. 有人在 B 點測某山頂 C 的仰角爲60°,他向後退了500尺,到 A 點再測 C 的仰角爲30°;求山的高。

38. 有人登坂路,行755丈;坂路與地面成30°角的傾斜;這人升高了多少?

29. 有坂路長100尺,同水平面的傾斜爲45°。若減傾斜爲30°,則坂路應該變成多少長?

30. 屋上豎有旗竿,在離屋40尺的地方測竿上下兩端得仰角爲60°與30°;求竿的長。

31. A, B 爲海面上的兩點,相隔2500公尺, AB 線上有輕氣球 C。從 A, B 望輕氣球,視線同水平面所成的角是45°與60°。求氣球的高。

32. 在同一水平面上 A, B 兩點,距離爲2公里。從 A, B

各望飛行船的方位及仰角，在 A 測得：方位北，仰角 $30°$；在 B 測得：方位東，仰角 $60°$。求船的高(到公尺為止)。

33 一軍艦向正北航行時見正西方有二燈塔，再航行一小時之後，一燈塔在軍艦的南西，另一燈塔則在軍艦的南偏西 $30°$，已知這兩燈塔的距離為 12 浬，軍艦每小時航行幾浬？

34. 證明三角形的面積等於：$\dfrac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$。

35. 證明 n 邊的正多邊形，若 R 為牠的外接圓的半徑，則牠的面積等於：$2R \sin\dfrac{180°}{n}$。

36. 一個正六邊形的小池，每邊長一丈二尺，蓄水深六尺；所蓄的水是多少立方尺？

習題解答：

1. $45°, 35°$；　4. $(\pi - \frac{1}{2} - \frac{1}{3})$弧度角 $= 122°43'$；

5. $177°$, 196.6^g, 3.08^c；　18. 5 寸；

20. $60°, 30°$；　21. $45°, 30°$；　22. $x = 60°, y = 30°$；

23. 設直角之邊為 x，解方程式 $c^2 = x^2 + (k-x)^2$ 卽可.

24. 288.7 呎；　25. 10.4 尺, 6 尺；　26. $220(2+\sqrt{2})$ 尺；

27. 433 尺；　28. 377.5 丈；　29. 81.8 尺；

30. 46.2 尺；　31. 1585 公尺；　32. 1095 公尺；

33. 28.39 浬；　36. 2244 立方尺.