修正課程標準適用

初中幾何教本

〔下册〕

駱師曾編

開明書店印行

初中幾何教本 下册 每册定價一元三角

二十八年十二月初版　三十五年十一月四版

編著者　駱師曾

發行者　開明書店
代表人范洗人

印刷者　開明書店

(123 P.) W　B 23

下册目次

第三編　理解幾何學(續)

第一章

圓的基本定理

第二章

關於圓的作圖題與軌跡

第三章

比例，相似形

第六章

正多角形與圓的度量

第四編 數值三角

第一章

三角函數定義

第二章

基本關係式，三角函數表的用法

第三章

直角三角形解法

第四章

簡易測量問題

附 錄

修正課程標準適用

初中幾何教本

下　册

第三編　理解幾何學(續)

第一章　圓的基本定理

§ 254. **直線與圓** 一直線與一圓只相遇於一點的,叫做**切線**;此相遇的一點,叫做切點.一直線與一圓相交於二點的,叫做**割線**.一線段的兩端在圓上的,叫做**弦**;故**直徑**便是過圓心的弦(如圖 401).

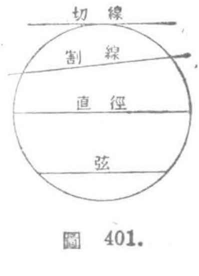

圖 401.

§ 255. **弧** 一圓被一弦所分的二部分,部叫做**弧**;大的一部分叫做**優弧**,小的一部分叫做**劣弧**;普通說弧,都指劣弧.弧的記號是︵,如圖 402, ACB 是劣弧,記作 $\overset{\frown}{ACB}$ 或 $\overset{\frown}{AB}$; ADB 是優弧,記作 $\overset{\frown}{ADB}$.

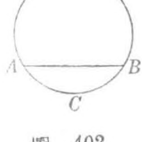

圖 402.

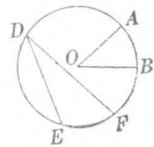

圖 403.

§256. **圓心角,圓周角** 二半徑所成的角,叫做圓心角.二弦相交於圓上一點,所成的角,叫做圓周角.如圖403,$\angle AOB$是圓心角,$\angle EDF$是圓周角.

§257. **弧度與角度** 將一圓分成360等分,每一等分的弧與他所對的圓心角,都叫做一度,就是圓心角的度數,與所對弧的度數相等,故可用弧量角.但角與弧的大小,都指度數,與半徑的大小無關.若講到弧的長短,就與半徑的大小有關,半徑大的圓上一度弧,必比半徑小的一度弧要長.

習題四十九

1. 什麼叫做圓?

2. 同圓或等圓的半徑,有什麼關係? 直徑呢?

3. 半徑相等的圓有什麼關係?

4. 直徑將圓分成怎樣的兩部分?

5. 互相垂直的二直徑,怎樣分圓?

6. 一圓可有兩個中心麼?

7. 點與圓心的距離,大於半徑,則點在那裏? 等於半徑呢? 小於半徑呢?

8. 割線與切線有什麼分別?

9. 割線與弦有什麼分別?

10. 直徑與弦有什麼分別?

11. 從圓外到圓可以畫幾種直線?

12. 優弧比半圓大呢還是小?　劣弧呢?

13. 圓心角與圓周角有什麼分別?

14. 弧的大小與半徑的大小,有沒有關係?　弧的長短呢?

15. 弧的度數與所對圓心角的度數等不等?

§258. 等圓心角對等弧定理　在同圓或等圓內,設二圓心角相等,則所對的弧也相等.

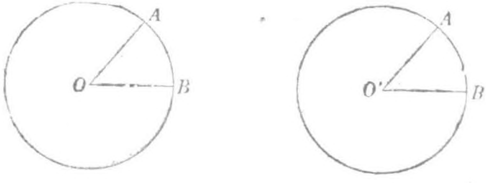

圖 404.

〔已知〕　等圓 O, O', $\angle O = \angle O'$.

〔求證〕　弧 AB = 弧 $A'B'$.

〔解析〕　依上節弧度與角度定義,此定理能成立很明.倘要另行證明,可用疊合證法.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 將圓 O' 疊在圓 O 上,使 $O'B'$ 與 OB 重合.	(1) 移形公理及等半徑定理.
(2) $O'A'$ 與 OA 重合.	(2) 已知 $\angle O = \angle O'$ 及等半徑定理.

(3) 弧 $A'B'$ 與弧 AB 重合.	(3) 圓的定義.
(4) $\therefore$ 弧 $A'B'$ = 弧 AB.	(4) 移形公理.

如在同圓內,只要將圓依圓心旋轉,使角邊重合.

大圓心角對大弧系 在同圓或等圓內,設二圓心角不等,則大圓心角所對的弧也大.

§259. 等弧對等圓心角定理 在同圓或等圓內,設二弧相等,則所對的圓心角也相等.

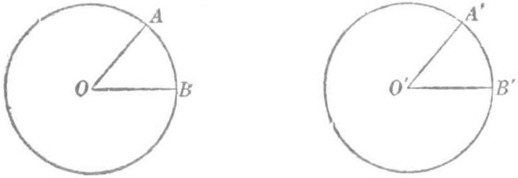

圖 405.

〔已知〕 等圓 O, O', 弧 AB = 弧 $A'B'$.

〔求證〕 $\angle O = \angle O'$.

〔解析〕 此是前節的逆定理,也可用疊合證法.

〔證明〕

敍述	理由
(1) 將圓 O' 疊在圓 O 上.使 $O'A'$ 落在 OA 上, A' 與 A 重合.	(1) 移形公理,及等半徑定理.
(2) 弧 $A'B'$ 落在弧 AB 上.	(2) 已知圓 O = 圓 O'.
(3) B' 與 B 重合.	(3) 已知弧 AB = 弧 $A'B$.

(4) $O'B'$ 與 OB 重合.	(4) 直線確定公理.
(5) $\therefore\ \angle O=\angle O'$.	(5) 移形公理.

大弧對大圓心角系　在同圓或等圓內,設二弧不等,則大弧所對的圓心角也大.

§260. **等弧對等弦定理**　在同圓或等圓內,設二弧相等,則所對的弦也相等.

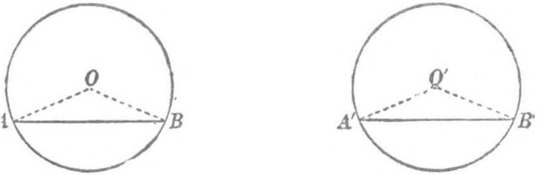

圖 406.

〔已知〕 等圓 O, O', 弧 $AB=$ 弧 $A'B'$.

〔求證〕 $AB=A'B'$.

〔解析〕 連結 $OA, OB, O'A', O'B'$, 先證明 $\angle O=\angle O'$, 再證明 $\triangle OAB\cong\triangle O'A'B'$, 即可證明 $AB=A'B'$.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 連結 $OA, OB, O'A', O'B'$.	(1) 直線確定公理.
(2) 弧 $AB=$ 弧 $A'B'$.	(2) 已知.
(3) $\angle O=\angle O'$.	(3) 等圓心角對等弧定理.
(4) $AO=A'O', BO=B'O'$.	(4) 等半徑定理.
(5) $\triangle AOB\cong\triangle A'O'B'$.	(5) $s.a.s.=s.a.s.$
(6) $AB=A'B'$.	(6) 全等形對應邊.

大弧對大弦系 在同圓或等圓內,設二弧不等,則大弧所對的弦也大.

§ 261 **等弦對等弧定理** 在同圓或等圓內,設二弦相等,則所對的弧也相等.

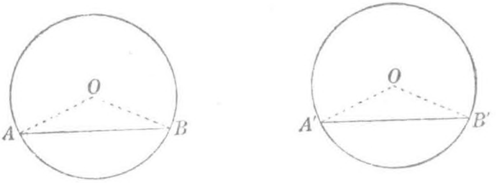

圖 407.

〔已知〕 等圓 O, O', 弧 $AB =$ 弧 $A'B'$.

〔求證〕 $AB = A'B'$.

〔解析〕 此是前節的逆定理,先連結 OA, OB, $O'A'$, $O'B'$, 證明 $\triangle AOB \cong \triangle A'O'B'$, 即可從 $\angle AOB = \angle A'O'B'$ 證明弧 $AB =$ 弧 $A'B'$.

〔證 明〕

敍 述	理 由
(1) 連結 $OA, OB, O'A', O'B'$.	(1) 直線確定公理.
(2) $AB = A'B'$.	(2) 已知.
(3) $OA = O'A', OB = O'B'$.	(3) 等半徑定理.
(4) $\triangle AOB \cong \triangle A'O'B'$.	(4) $s.s.s. = s.s.s.$
(5) $\angle AOB = \angle A'O'B'$.	(5) 全等形對應角.
(6) $\therefore$ 弧 $AB =$ 弧 $A'B'$.	(6) 等圓心角對等弧定理.

大弦對大弧系　在同圓或等圓內,設二弦不等,則大弦所對的弧也大.

§ 262. **等弧證法**　要證明同圓或等圓內的二弧相等,可證明此二弧所對的圓心角相等,或所對的弦相等.

習題五十

1. 設 AB, CD 是同圓的二直徑,試證弧 $AC=$ 弧 BD.

2. 如圖 408, O 是圓心, $\angle AOB=\angle COD$.

試證　　弧 $ABC=$ 弧 BCD.

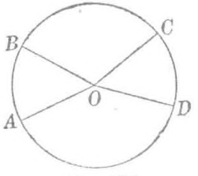

圖 408.

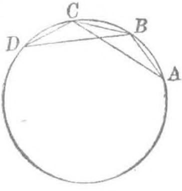

圖 409.

3. 如圖 409, 弦 $AB=$ 弦 $BC=$ 弦 CD.

試證　　弦 $AC=$ 弦 BD.

4. 圓心角的平分線,必平分此角所對的弧.

5. 如圖 410, ABC 是正三角形, O 是圓心,求 $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$ 各是幾度?

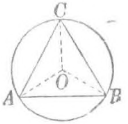

圖 410.

6. 將一圓分成六等分,試證每一等分弧所對的弦,必等於半徑(如圖 411, $AB=OA$).

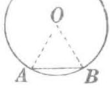

圖 411.

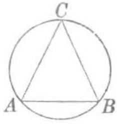

圖 412.

7. 如圖 412, $\angle A=\angle B$, 試證

弧 $AC=$ 弧 BC.

8. 如圖 413, AB 是直徑, OD 是半徑, AC 是弦, $\angle BOD=2\angle A$, 試證　　弧 $BD=$ 弧 BC.

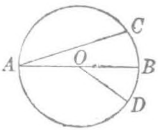

圖 413.

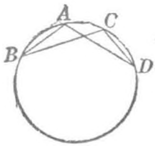

圖 414.

9. 如圖 414, 設相交二弦 $AD=BC$, 試證 $AB=CD$.

10. 如圖 415, 弧 AB 是弧 CD 的二倍,則圓心角 AOB 等於 COD 的二倍,弦 AB 小於 CD 的二倍.

〔提示〕 E 是弧 AB 的中點,連結 AE, OE, BE.

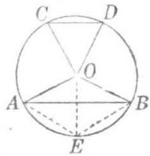

圖 415.

〔注意〕 弧與所對的圓心角成正比例,與所對的弦不成正比例.

11. 如圖416, P是圓O上一點,作直徑PA,弦PB,又作半徑OC平行於PB.試證OC平分弧AB.

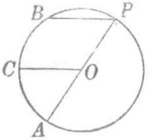

圖 416.

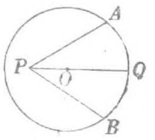

圖 417.

12. 如圖417, P與圓O上二點A, B等距離,連結PO並延長至Q,試證PQ平分弧AB.

13. 試證直徑是圓的最長弦.

14. 圓內二弦若互相平分,則必是直徑.

§263. **垂徑平分弦弧定理** 垂直於弦的直徑,平分此弦與他所對的弧.

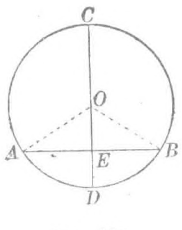

圖 418.

〔已知〕 圓O的直徑CD垂直於AB.

〔求證〕 $AE=EB$,弧$AD=$弧DB,弧$AC=$弧CB.

〔解析〕 連結OA, OB.先證明$\triangle AOE\cong\triangle BOE$,即可證明$AE=EB$.又從$\angle AOE=\angle BOE$,可證明弧$AD=$弧$DB$,弧$AC=$弧$CB$.

〔證　明〕

敍述	證明
(1) 連結 OA, OB.	(1) 直線確定公理.
(2) $OE \perp AB$.	(2) 已知.
(3) $\angle AEO = \angle BEO = \angle R$.	(3) 直角定義,直角公理.
(4) $OA = OB$.	(4) 等半徑定理.
(5) $OE = OE$.	(5) 公用.
(6) $\triangle AOE \cong \triangle BOE$.	(6) 直角△全等定理二.
(7) $\therefore AE = EB$, $\angle AOE = \angle BOE$.	(7) 全等形對應部分.
(8) $\therefore$ 弧 AD = 弧 DB.	(8) 等圓心角對等弧定理.
(9) 弧 DAC = 弧 DBC.	(9) 直徑分圓定理.
(10) $\therefore$ 弧 AC = 弧 CB.	(10) 等量減法公理.

弦的垂直平分線系　弦的垂直平分線,必通過圓心,且平分他所對的弧.

過弦中點的半徑系　過弦中點的半徑,必垂直於此弦.

§ **264**. **弦距圓心等遠定理**　在同圓或等圓內,等弦距圓心等遠.

〔已知〕　圓 O 內, $AB = CD$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$.

〔求證〕　$OE = OF$.

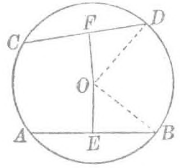

圖 419.

〔解析〕 連結 OB, OD, 證明 $\triangle OEB \cong \triangle OFD$, 卽可證明 $OE=OF$.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 連結 OB, OD.	(1) 直線確定公理.
(2) $AB=CD$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$.	(2) 已知.
(3) E, F 各是弦的中點.	(3) 垂徑平分弦弧定理.
(4) $EB=FD$.	(4) 等量除法公理.
(5) $OB=OD$.	(5) 等半徑定理.
(6) $\angle OEB=\angle OFD=\angle R$.	(6) 直角定義,直角公理.
(7) $\triangle OEB \cong \triangle OFD$.	(7) 直角△全等定理二.
(8) $\therefore OE=OF$.	(8) 全等形對應邊.

§ 265. **圓心距弦等遠定理** 在同圓或等圓內,距圓心等遠的弦相等.

〔已知〕 圓 O 內, $OE=OF$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$.

〔求證〕 $AB=CD$.

〔解析〕 此是前節的逆定理,可仿照前節證明.

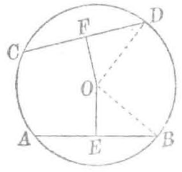

圖 420.

〔證明〕

敍述	理由
(1) 連結 OB, OD.	(1) 直線確定公理.
(2) $OB=OD$.	(2) 等半徑定理.
(3) $OE=OF$, $OE\perp AB$, $OF\perp CD$.	(3) 已知.
(4) $\angle OEB=\angle OFD=\angle R$.	(4) 直角定義,直角公理.
(5) $\triangle OEB\cong\triangle OFD$.	(5) 直角△全等定理二.
(6) $EB=FD$.	(6) 全等形對應邊.
(7) 但E, F是弦的中點.	(7) 垂徑平分弦弧定理.
(8) $\therefore AB=CD$.	(8) 等量乘法公理.

§266. **等弦證法** 要證明同圓或等圓內的二弦相等,可證明此二弦距圓心等遠,或所對的弧相等.

§267. **弦距圓心遠近定理** 在同圓或等圓內,如二弦不等,則大弦距圓心較近.

〔已知〕 圓O內,$AB>CD$, $OE\perp AB$, $OF\perp CD$.

〔求證〕 $OE<OF$.

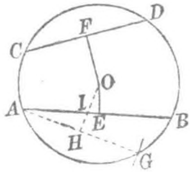

圖 421.

〔解析〕 作 $AG=CD$, $OH\perp AG$, 證明 $OH>OI>OE$, 卽

$$OE<OH=OF.$$

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) $CD<AB$.	(1) 已知.
(2) 弧 $CD<$ 弧 AB.	(2) 大弦對大弧系.
(3) 用 A 做圓心, CD 做半徑作弧,與弧 AB 相交於 G, 連結 AG, 則 $AG=CD$.	(3) 等線段作圖題.
(4) 作 $OH\perp AG$.	(4) 過直線外一點的垂線作圖題.
(5) $OH=OF$.	(5) 弦距圓心等遠定理.
(6) $OE<OI$.	(6) 點與直線距離系.
(7) $OI<OH$.	(7) 全量大於分量公理.
(8) $\therefore OE<OH=OF$.	(8) 代換公理.

§268. 圓心距弦遠近定理 在同圓或等圓內,距圓心較近的弦較大.

〔已知〕 圓 O 內, $OE<OF$, $OE\perp AB$, $OF\perp CD$.

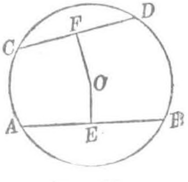

圖 422.

〔求證〕 $AB>CD.$

〔解析〕 AB 與 CD 的大小關係,只有三種: $AB=CD$, $AB<CD$, $AB>CD$. 但依前二種,則 $OE=OF$, $OE>OF$, 都與前提不合.故第三種必相合.

〔證明〕

敍述	理由
(1) AB 與 CD 的關係有三種: $AB=CD$, $AB<CD$, $AB>CD$.	(1) 二量關係公理.
(2) 設 $AB=CD$, 則 $OE=OF$.	(2) 弦距圓心等遠定理.
(3) 設 $AB<CD$, 則 $OE>OF$.	(3) 弦距圓心遠近定理.
(4) 但 (2), (3) 都不合.	(4) 已知 $OE<OF$.
(5) $\therefore AB>CD$.	(5) 因 $AB=CD$, $AB<CD$ 都不合.

§ 269. **不等弦證法** 要證明同圓或等圓內的二弦不等,可證明此二弦距圓心不等,或所對的弧不等.

習題五十一

1. 圓心角的平分線必平分此角所對的弦.

2. 如圖 423, O 是圓心, $AB=AC$, $OD\perp AB$, $OE\perp AC$, 試證

$$\triangle ADO\cong\triangle AEO.$$

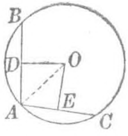

圖 423.

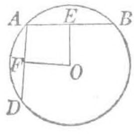

圖 424.

3. 如圖 424, O 是圓心, E 是 AB 的中點, F 是 AD 的中點,試證 $\angle A$ 與 $\angle O$ 互為補角.

4. 如圖 425, C 是圓心, $AB=AE$, $CD\perp AB$, $CF\perp AE$, 試證 ADF 是等腰三角形.

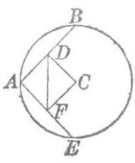

圖 425.

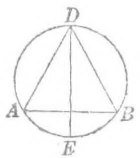

圖 426.

5. 如圖 426, DE 是直徑, $AB\perp DE$, 試證 ADB 是等腰三角形.

6. 二等弦相交,在交點所分各弦的二部分對應相等.

7. 相交二弦,若在交點所分的線段對應相等,則此二弦相等.

8. 二弦通過半徑上任一點,而與此半徑成等角,則此二弦相等.

9. 從直徑一端作二弦與此直徑成等角,則此二弦相等.

10. 從直徑兩端作二弦,與此直徑成等角,則此二弦相等.

11. 如圖427, O 是圓心, $OE\perp AB$, $OF\perp CD$, $\angle OEF>\angle OFE$, 試證 $AB>CD$.

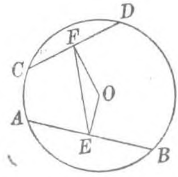

圖 427.

12. 過圓內定點的諸弦中,最短的必垂直於過此點的半徑.

〔提示〕 如圖428,過定點 P 任作弦 DE, 並作 $OC\perp DE$, 證明 $OP>OC$.

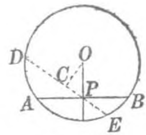

圖 428.

13. 設一直徑過二弦的中點,則此二弦必平行.

14. 設一弦平行於直徑,則此弦與此直徑所夾的二弧相等.

15. 在一圓內,平行二弦截相等的弧.

§270. 弓形 一弦與對弧所圍成的圖形,叫做**弓形**. 角的頂點在弧上而兩邊過弧兩端的,叫做**弓形角**. 如圖429, ACB 與 ADB 都是弓形, $\angle C$ 與 $\angle D$ 都是弓形角.

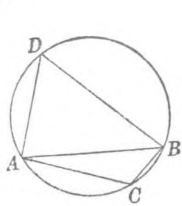

圖 429.

§271. **圓周角定理** 圓周角的度數,等於所對弧的

度數的一半(就是圓周角可用對弧的一半來量).

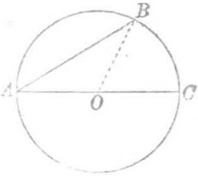

圖 430.

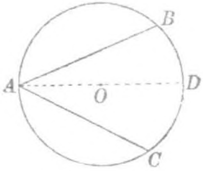

圖 431.

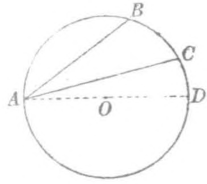

圖 432.

〔已知〕 $\angle BAC$ 是圓 O 內對弧 BC 的圓周角.

〔求證〕 $\angle BAC$ 的度數$=\frac{1}{2}$弧 BC 的度數.

〔解析〕 角與圓心的位置,有三種情形: (I) 圓心在角的一邊上,(II) 圓心在角內,(III) 圓心在角外,故要依三種情形分別證明. (I) 可如圖 430, 連結 OB, 則 $\triangle AOB$ 是等腰, $\angle BOC$ 是外角,等於 $2\angle A$. 又 $\angle BOC$ 的度數等於弧 BC 的度數,故 $\angle A$ 的度數等於$\frac{1}{2}$弧 BC 的度數. (II) 可如圖 431 分作二角的和, (III) 可如圖 432 分作二角的差,都根據 (I) 來證明.

(I) 圓心在角的一邊上(即一邊是直徑).

〔證明〕用圖 430

敍述	理由
(1) 連結 OB.	(1) 直線確定公理.
(2) $OB=OA$.	(2) 等半徑定理.
(3) $\angle B=\angle A$.	(3) 等腰△性質定理.
(4) $\angle BOC=\angle A+\angle B$.	(4) △內外角關係定理.
(5) $\angle BOC=2\angle A$.	(5) 代換公理.

(6) $\angle A=\frac{1}{2}BOC$.	(6) 等量除法定理.
(7) $\angle BOC$ 度數$=\overset{\frown}{BC}$ 度數.	(7) 弧度與角度.
(8) $\therefore \angle A$ 度數$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ 度數.	(8) 等量除法公理.

(II) 圓心在角內.

〔證明〕用圖 431

敍述	理由
(1) 過 A 作直徑 AD.	(1) 直線確定公理.
(2) $\angle BAD$ 度數$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ 度數.	(2) (I) 的證明.
(3) $\angle DAC$ 度數$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}$ 度數.	(3) (I) 的證明.
(4) $\therefore$ $(\angle BAD+\angle DAC)$ 度數$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{DC})$ 度數. 或 $\angle BAC$ 度數$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ 度數.	(4) 等量加法公理.

(III) 圓心在角外.

〔證明〕用圖 432

敍述	理由
(1) 過 A 作直徑 AD.	(1) 直線確定公理.
(2) $\angle BAD$ 度數$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ 度數.	(2) (I) 的證明.
(3) $\angle CAD$ 度數$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$ 度數.	(3) (I) 的證明.
(4) $\therefore$ $(\angle BAD-\angle CAD)$ 度數$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{CD})$ 度數. 或 $\angle BAC$ 度數$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ 度數.	(4) 等量減法公理.

弓形角系 同一弓形內的弓形角都相等.

如圖 433, $\angle A=\angle B=\angle C$.

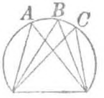

圖　433.

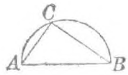

圖　434.

半圓含直角系　半圓內的圓周角是直角.

如圖 434, $\angle ACB=\angle R$.

§ **272.** **圓與多角形**　多角形的頂點都在一圓上的,叫做圓的**內接多角形**,如圖 435 的 $ABCDE$; 而圓叫做此多角形的**外接圓**;圓心叫做多角形的**外心**. 多角形的各邊都是一圓的切線的,叫做圓的**外切多角形**,如圖 436 的 $ABCDE$; 而圓叫做此多角形的**內切圓**,圓心叫做多角形的**內心**.

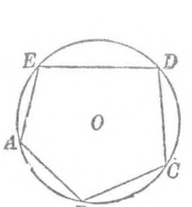

圖　435.

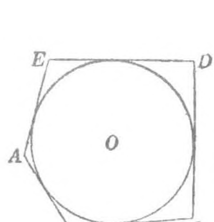

圖　436.

§ **273.** **內接四邊形對角定理**　內接四邊形的對角互爲補角.

〔已知〕 內接四邊形 $ABCD$.

〔求證〕
$$\angle A+\angle C=2\angle R,$$
$$\angle B+\angle D=2\angle R.$$

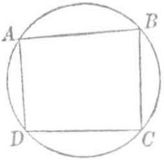

圖 437.

〔解析〕 全圓是 360 度,對角所對二弧的和是全圓,故對角的和等於$\frac{1}{2}\times 360°$或$180°$,即證明對角互為補角.

〔證明〕

敍述	理由
(1) $\angle A$ 度數$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}$度數.	(1) 圓周角定理.
(2) $\angle C$ 度數$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}$度數.	(2) 同 (1).
(3) $(\angle A+\angle C)$ 度數 $=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BCD}+BAD)$ 度數.	(3) 等量加法公理.
(4) $=\frac{1}{2}\times 360°=180°$.	(4) 角的單位.
(5) $\angle A+\angle C=2\angle R$.	(5) 直角定義.
(6) 同理, $\angle B+\angle D=2\angle R$.	(6) 同 (1) 到 (5).

內接四邊形外角系 內接四邊形的外角,等於他的內對角.

§ 274. **內接四邊形判別定理** 設四邊形的對角互為補角,則此四邊形可內接於圓.

〔已知〕 四邊形 $ABCD$ 內, $\angle B+\angle D=2\angle R$.

〔求證〕 此四邊形可內接於圓.

〔解析〕 過三點 A,B,C 作圓,假使不過點 D,而過 AD

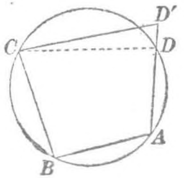

圖 438.

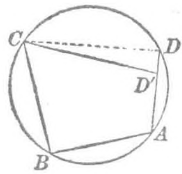

圖 439.

延長線上一點 D' (如圖 438), 或過 AD 上一點 D' (如圖 439), 則 $\angle D' \neq \angle D$, 卽 $\angle D' + \angle B \neq 2\angle R$, 此與內接四邊形對角定理不合,故 D' 與 D 不得不合而爲一, 卽四邊形 $ABCD$ 內接於圓.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 過三點 A, B, C 作圓, 假使過 AD 延長線上一點 D' (圖 438) 或過 AD 上一點 D' (圖 439).	(1) 圓過三點作圖題.
(2) $\angle D > \angle D'$ (圖 438). $\angle D < \angle D'$ (圖 439).	(2) △內外角比較定理.
(3) 但 $\angle B + \angle D = 2\angle R$.	(3) 已知.
(4) 故 $\angle B + \angle D' \neq 2\angle R$.	(4) 代換公理.
(5) $ABCD'$ 不是內接四邊形.	(5) 內接四邊形對角定理.
(6) D' 與 D 不得不合一.	(6) D' 在 AD 線上或在 AD 延長線上都不合.

(7) ∴圓必過點 D, 而 $ABCD$ 是內接四邊形.	(7) 內接多角形定義.

習題五十二

1. 如圖 440, O 是圓心, $\angle B=30°$, 求 $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{CB}$ 各是幾度?

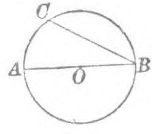

圖 440.

2. 如前圖, $\overset{\frown}{AC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CB}$, 求 $\angle A$, $\angle B$ 的度數.

3. 設 ABC 是內接三角形, $\overset{\frown}{AC}=80°$, $\overset{\frown}{AB}=120°$, 求各角的度數.

4. 設 $ABCD$ 是內接四邊形, $\overset{\frown}{AB}=80°$, $\overset{\frown}{BC}=120°$, $\overset{\frown}{CD}=90°$, 求各角的度數.

5. 小於半圓的弓形角是鈍角.

6. 大於半圓的弓形角是銳角.

7. 圓周角的平分線,平分他所對的弧.

8. 用等腰三角形一腰做直徑的圓,必平分他的底邊(如圖 441).

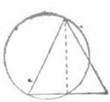
圖 441.

9. 二弦 AB, CD 在圓內相交於 M, 試證 $\triangle BCM$ 與 $\triangle ADM$ 是等角三角形.

10. 木匠常如圖 442, 用曲尺試驗木板的凹處是否半圓, 是根據什麼理由?

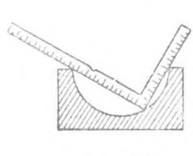
圖 442.

11. 要求圓形物件的中心,可如圖 443 用曲尺求得二點 A, B, 再求 AB 的中點,便是圓心.此是根據什麼理由?

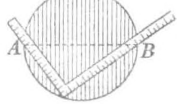

圖 443.

12. 正方形或矩形可內接於圓.

13. 圓的內接平行四邊形,必是矩形或正方形.

14. 圓的內接梯形,必是等腰.

§ **275. 切線定理** 過一圓半徑外端的垂線,便是此圓的切線.

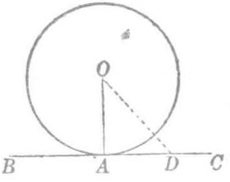

圖 444.

〔已知〕 圓 O 內, BC 垂直於半徑 OA 的外端 A.

〔求證〕 BC 是圓 O 的切線.

〔解析〕 依切線定義,只要證明在 BC 上除一點 A 外,其餘各點都在圓外.

〔證 明〕

敍 述	理 由
(1) 在 BC 上任取一點 D, 連結 OD.	(1) 直線確定公理.
(2) $OD>OA$.	(2) 點與直線距離系.

(3) 故D在圓外.	(3) 點與圓定理.
(4) $\therefore BC$是圓O的切線.	(4) 切線定義.

切點半徑系　切線垂直於過切點的半徑.

垂線過圓心系　在切點垂直於切線的直線,必過圓心.

垂線過切點系　從圓心至切線的垂線,必過切點.

切線惟一系　過一已知切點,只可作一條切線.

§276. **切線長**　從一點至一圓的切線長,即從此點至切點的線段長,如上節圖中的BA,便是從點B到圓O的切線長.

§277. **切線等長定理**　從圓外一點至圓的二切線等長.

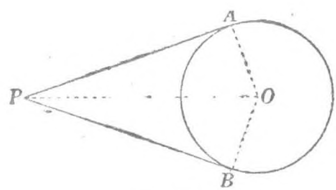

圖 445.

〔已知〕 從點P至圓O的二切線PA, PB.

〔求證〕 $PA=PB$.

〔解析〕 連結PO, OA, OB, 從$\triangle PAO\cong\triangle PBO$, 即可證明.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 連結PO, OA, OB.	(1) 直線確定公理.

敘述	理由
(2) $\angle PAO=\angle PBO$ $=\angle R.$	(2) 切點半徑系,直角公理.
(3) $OA=OB.$	(3) 等半徑定理.
(4) $PO=PO$	(4) 公用.
(5) $\triangle PAO\cong\triangle PBO.$	(5) 直角△全等定理二.
(6) $\therefore\ PA=PB.$	(6) 全等形對應邊.

切線等角系　從圓外一點至圓的切線,與此點至圓心的連結線成等角(如上圖, $\angle APO=\angle BPO$).

§278. 弦切角定理　切線與過切點的弦所成角的度數等於所夾弧度數的一半.

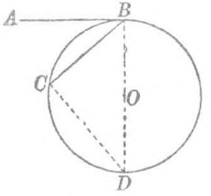

圖 446.

〔已知〕 圓 O 內切於點 B 的切線 AB 及弦 BC.

〔求證〕 $\angle ABC$ 的度數$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$的度數.

〔解析〕 作直徑 BD, 連結 CD, 則 $\angle ABD$ 與 $\angle C$ 都是直角, $\angle ABC$, $\angle BDC$ 都是 $\angle CBD$ 的餘角即相等,從此即得證明.

〔證　明〕

敘　述	理　由
(1) 作直徑 BD, 弦 CD.	(1) 直線確定公理.

(2) $\angle ABD=\angle R$.	(2) 切點半徑系.
(3) $\angle ABC$ 是 $\angle CBD$ 的餘角.	(3) 餘鄰角判別定理.
(4) $\angle C=\angle R$.	(4) 半圓含直角系.
(5) $\angle D$ 是 $\angle CBD$ 的餘角.	(5) 直角△二銳角互爲餘角系.
(6) $\angle ABC=\angle D$.	(6) 餘角定理.
(7) $\angle D$ 度數 $=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ 度數.	(7) 圓周角定理.
(8) $\angle ABC$ 度數 $=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ 度數.	(8) 代換公理.

§279. 二弦交角定理 圓內二弦相交,所成角的度數,等於此角與對頂角所對二弧度數的半和.

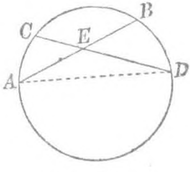

圖 447.

〔已知〕 圓內二弦 AB, CD 相交於 E.

〔求證〕 $\angle AEC$ 的度數 $=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$ 的度數.

$\angle AED$ 的度數 $=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CB})$ 的度數.

〔解析〕 連結 AD, 則 $\angle AEC=\angle A+\angle D$, 便可證明 $\angle AEC$ 的度數等於 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$ 的度數.

〔證　明〕

敘　述	理　由
(1) 連結 AD.	(1) 直線確定公理.
(2) $\angle AEC=\angle A+\angle D$.	(2) △內外角關係定理.
(3) $\angle A$ 度數$=\frac{1}{2}\widehat{BD}$ 度數, $\angle D$ 度數$=\frac{1}{2}\widehat{AC}$ 度數.	(3) 圓周角定理.
(4) $(\angle A+\angle D)$ 度數$=\frac{1}{2}(\widehat{AC}+\widehat{BD})$ 度數.	(4) 等量加法公理.
(5) $\therefore$ $\angle AEC$ 度數$=\frac{1}{2}(\widehat{AC}+\widehat{BD})$ 度數.	(5) 代換公理.

同理,連結 BD, 可證明

$$\angle AED \text{ 度數}=\frac{1}{2}(\widehat{AD}+\widehat{CB}) \text{ 度數}.$$

§ 280. 切割線交角定理　二割線或二切線或一切線與一割線在圓外相交,所成角的度數,等於所夾二弧度數的半差.

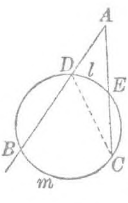

圖 448.

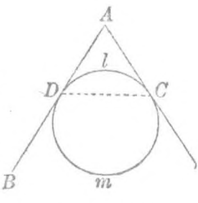

圖 449.

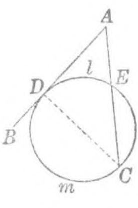

圖 450.

〔已知〕　兩割線(圖 448),兩切線(圖 449),一割線與一切線(圖 450)在圓外一點 A 相交.

〔求證〕　$\angle A$ 的度數$=\frac{1}{2}$弧 $(m-l)$ 的度數.

〔解析〕 連結 DC, 則 $\angle BDC=\angle A+\angle ACD$, 故 $\angle A=\angle BDC-\angle ACD$, 再依圓周角弦切角定理,便可證明.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 連結 DC.	(1) 直線確定公理.
(2) $\angle BDC=\angle A+\angle ACD$.	(2) △內外角關係定理.
(3) $\angle A=\angle BDC-\angle ACD$.	(3) 等量減法定理.
(4) $\angle BDC$ 度數$=\frac{1}{2}$弧 m 度數. $\angle ACD$ 度數$=\frac{1}{2}$弧 l 度數.	(4) 圓周角定理弦切角定理.
(5) $\angle A$ 度數$=\frac{1}{2}$弧$(m-l)$度數.	(5) 代換公理.

§281. 平行線截等弧定理 二平行線在一圓上所截的兩弧相等.

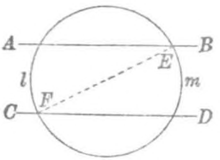

圖 451.

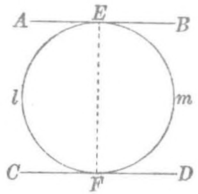

圖 452.

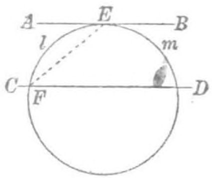

圖 453.

〔已知〕 一圓上的 $AB \parallel CD$, (在圖 451 是二割線, 圖 452 是二切線, 圖 453 是一割線與一切線).

〔求證〕 弧 $l=$弧 m.

〔解析〕 連結 EF, 則 $\angle AEF=\angle DFE$, 從此便可證明弧 $l=$弧 m.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 連結 EF.	(1) 直線確定公理.
(2) $\angle AEF=\angle DFE$.	(2) 平行線內錯角定理.
(3) $\angle AEF$ 度數 $=\frac{1}{2}$ 弧 l 度數, $\angle DFE$ 度數 $=\frac{1}{2}$ 弧 m 度數.	(3) 圓周角定理,弦切角定理.
(4) $\frac{1}{2}$ 弧 $l=\frac{1}{2}$ 弧 m.	(4) 代換公理.
(5) $\therefore$ 弧 $l=$ 弧 m.	(5) 等量乘法公理.

習題五十三

1. 在一圓直徑兩端的切線,互相平行.

2. 在一圓直徑的一端作切線,再作諸弦與切線平行,試證諸弦被此直徑所平分.

3. 從一點至一圓二切線的夾角,與過切點二半徑的夾角,互爲補角.

4. 如圖 454,是量圓物中心的儀器,用金屬製成,叫做圓心尺. AC 與 AB 等長, N 是螺旋,可以旋轉,使 AC, AD 任意開閉. AB 固定,常平分角 CAD. 用時將 AC, AD 靠緊圓邊,當作圓的切線,則 AB 必過圓心.試證明此理.

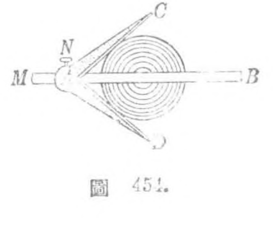

圖 454.

5. 用上題的圓心尺,怎樣可定圓心?

6. 用(4)題的圓心尺,若圓物過大,不能容於角$\angle CAD$內,則可將兩尖端C, D緊靠圓邊,使AC, AD變做圓的割線.試證此時AB也過圓心.

7. 如圖455,設直角三角形外切於圓,試證二股的和,等於弦與此圓直徑的和.

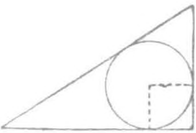

圖 455.

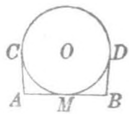

圖 456.

8. 如圖456,切線AB切圓O於M,AC切於C,BD切於D,試證

$$AB=AC+BD.$$

9. 圓的外切任何四邊形,相對二邊的和,必等於其他相對二邊的和.

10. 圓的外切平行四邊形,必是菱形或正方形.

11. 從一弦的兩端作二切線,此二切線與此弦所成的角相等.

12. 弦BC與圓上一點A的切線平行,則

弧$AB=$弧AC.

13 如圖457,設$\overset{\frown}{AB}=150°$, $\overset{\frown}{BC}=50°$, $\overset{\frown}{CD}=40°$, $\overset{\frown}{DE}=60°$, $\overset{\frown}{EF}=25°$. 試求u, v, w, x, y, z各角的度數.

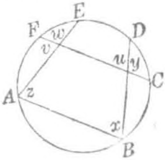

圖 457.

14　如圖 458, AB 是圓 O 的切線, BC 是弦,作 $CD\parallel AB$,試證弦切角定理.

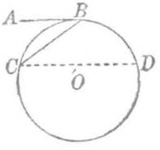

圖 458.

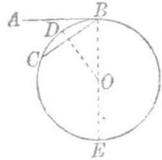

圖 459.

15.　如圖 459, AB 是圓 O 的切線, BC 是弦,作 $OD\perp BC$,直徑 BE. 試證弦切角定理.

〔提示〕 證明　$\angle BOD=\angle ABC$.

16.　如圖 460, 二弦 AB,CD 相交於 E,作 $AF\parallel CD$, 試證二弦交角定理.

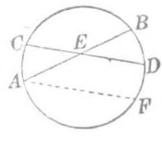

圖 460.

17.　如上圖,設 $\overset{\frown}{AC}=42°$, $\overset{\frown}{CB}=140°$, $\overset{\frown}{BD}=38°$, 求 $\angle CEB$, $\angle AEC$ 各角的度數.

18.　如 461, 462, 463 三圖,作 $EF\parallel AB$, 試證切割線交角定理.

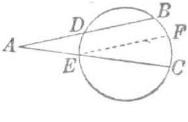

圖 461.

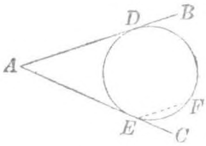

圖 462.

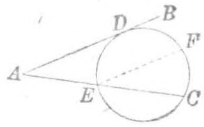

圖 463.

19.　設從一點至圓所作二切線的交角是 60°, 求所夾兩弧的度數.

20.　設從一點至圓所作一切線與一割線的交角是 20°, 所夾大弧是 90°, 求小弧的度數.

§ 282. **二圓關係** 有五種如下:

(1) **同心** 圓心相同的圓,叫做**同心圓**(圖 464).

(2) **相切** 公有一點的二圓,叫做**相切**.二圓各在圓外的叫做**外切**(圖 465);一圓在他圓內的,叫做**內切**(圖 466).

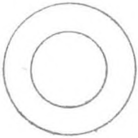
圖 464.

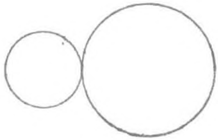
圖 465.

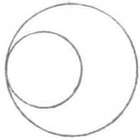
圖 466.

(3) **相交** 公有二點的二圓,叫做**相交**(圖 467).

(4) **相離** 不相交也不相切的二圓,各在圓外的,叫做**相離**(圖 468).

(5) **相含** 不同心也不相切的二圓,一圓在他圓以內的,叫做**相含**(圖 469).

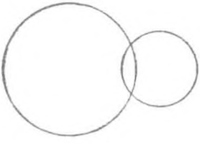
圖 467.

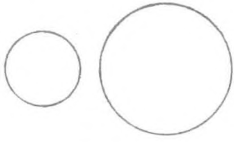
圖 468.

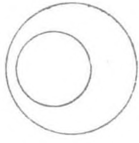
圖 469.

§ 283. **連心線** 連結二圓中心的線段,叫做**連心線**.如 470, 471, 472 三圖中的 OO',都是連心線.

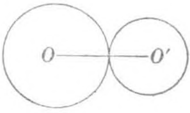

圖 470.

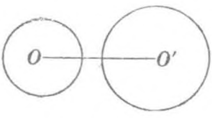

圖 471.

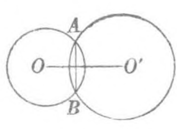

圖 472.

§284. **公弦**　連結相交二圓中二交點的線段,叫做公弦.如圖 472 中的 AB,就是公弦.

§285. **二圓相交定理**　相交二圓的連心線,垂直平分公弦.

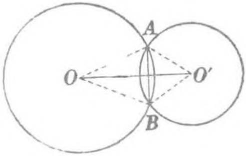

圖 473.

〔已知〕 二圓 O, O' 相交於 A 與 B.

〔求證〕 連心線 OO' 垂直平分 AB.

〔解析〕 連結 $OA, OB, O'A, O'B$, 從 $OA=OB$, $O'A=O'B$, 便可證明 OO' 垂直平分 AB.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1)　連結 $OA, OB, O'A, O'B$.	(1)　直線確定公理.
(2)　$OA=OB$, $O'A=O'B$.	(2)　等半徑定理.
(3)　$\therefore$ OO' 垂直平分 AB.	(3)　垂直平分線確定定理.

§286. **公切線**　一直線同時做二圓的切線,叫做公切線.二圓心分在公切線兩側的,叫做**內公切線**,同在公切線一側的,叫做**外公切線**.從二圓位置的關係,分別說明公切線的有無如下:

(1) 相離二圓,有二條內公切線,二條外公切線(圖474).

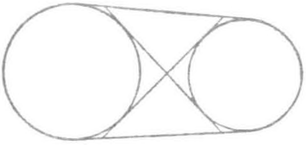

圖 474.

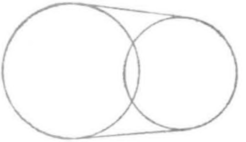

圖 475.

(2) 相交二圓,只有二條外公切線,無內公切線(圖475).

(3) 外切二圓,有二條外公切線,一條內公切線(圖476).

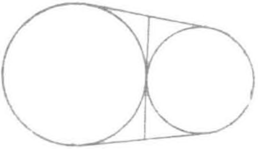

圖 476.

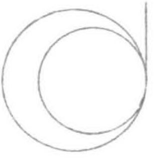

圖 477.

(4) 外切二圓,只有一條外公切線,無內公切線(圖477).

(5) 同心二圓,無公切線.

(6) 相含二圓,也無公切線.

公切線的長,便是二切點間線段的長.

§ 287. **二圓相切定理** 相切二圓的連心線必過切點.

〔已知〕 二圓 O, O' 相切於 C.

〔求證〕 連心線 OO' 過 C.

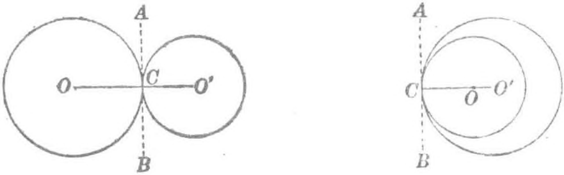

圖 478.

〔解析〕 設 AB 是過 C 的公切線,過 C 再作 AB 的垂線必過圓心 O, O',便已證明.

〔證明〕

敍述	理由
(1) 設 AB 是切於 C 的公切線.	(1) 公切線定義.
(2) 過 C 作 AB 的垂線.	(2) 過直線上一點的垂線作圖題.
(3) 此垂線必過 O, O'.	(3) 垂線過圓心系.
(4) $\therefore OO'$ 過 C.	(4) 直線確定公理.

習題五十四

1. 設二圓心的距離如下,則二圓位置的關係怎樣?

(a) 大於二半徑的和.

(b) 等於二半徑的和.

(c) 等於二半徑的差.

(d) 小於二半徑的差.

(e) 小於二半徑的和,而大於二半徑的差.

(f) 等於 O.

2. 設一直線與同心二圓相交,則二圓間所夾的二線段相等.

3. 在同心二圓內,大圓切於小圓的弦,必平分於切點.

4. 在同心二圓內,大圓切於小圓的諸弦必相等.

5. 一圓的等弦都可切於同心圓.

6. 相離二圓的外公切線相等.

7. 相離二圓的內公切線相等.

8. 如圖 479,二圓外切於 A,公切線切於 B, C. 試證點 A 的公切線平分 BC.

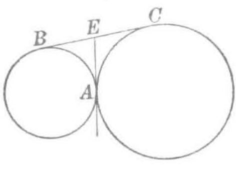

圖 479.

9. 如上題,試證角 BAC 是直角.

10. 二圓相交,作一直線平行於公弦,而與二圓相交,則二圓間所夾的二線段相等(如圖 480, $EC=FD$).

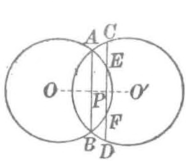

圖 480.

11. 設二圓切於二平行線及一截線,則平行線間所夾截線的線段,等於二心的距離(如圖 481, $CD=OO'$).

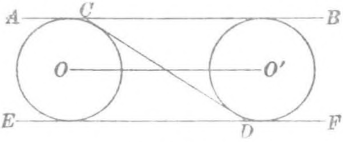

圖 481.

12. 二圓外切於 A, 過 A 作二直線: 一線與二圓相交於 B, C, 他線與二圓相交於 D, E. 求證 $BD \parallel EC$.

13. 如圖 482, 用圓 O 的半徑做直徑畫圓. 過切點 A 任作大圓的弦 AB, 與小圓相交於 C. 試證 AB 必平分於 C.

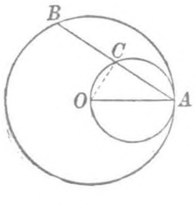

圖 482.

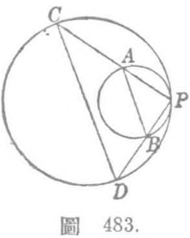

圖 483.

14. 如圖 483, 二圓內切於 P. 內圓的直徑是 AB, 連結 PA, PB, 與外圓相交於 C, D. 試證 CD 是外圓的直徑.

15. 二圓外切,過切點作直線,與二圓相交,則從交點各作二圓的直徑必平行(如圖 484).

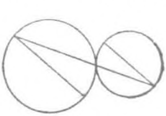

圖 484.

16. 二圓內切,過切點作直線,與二圓相交,則從交點各作二圓的直徑必平行(如圖 485)

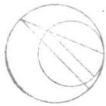

圖 485.

第二章　關於圓的作圖題與軌跡

§ 288　圓過三點作圖題的證明　作一圓過不在一直線上的三定點.

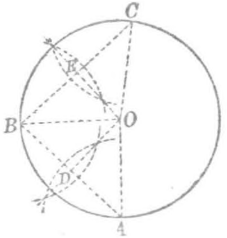

圖 486.

〔已知〕〔求作〕〔作法〕都見 § 39.

〔證　明〕

敘　述	理　由
(1)　AB 與 BC 相交於 B.	(1)　已知.
(2)　OE 垂直平分 BC, OD 垂直平分 AB.	(2)　作法.
(3)　OD 必可與 OE 相交於一點 O.	(3)　交線垂線系,二直線關係公理.
(4)　$OA=OB=OC$.	(4)　垂直平分線性質定理.
(5)　∴ 圓 O 過 A, B, C.	(5)　圓的定義.

三點確定一圓系 不在一直線上的三點,可確定一圓.

三角形外接圓系 任何三角形都可外接於圓.

直線與圓交點系 直線與圓的交點,不能多於二點.

二圓交點系 二圓的交點,不能多於二點.

§ 289. **求圓心作圖題的證明** 求定弧或定圓的圓心.

〔已知〕〔求作〕〔作法〕都見 § 40(用前節的圖).

〔證明〕 與前節同.

習題五十五

1. 有定弧求作全圓.

2. 求定弧的中點.

2. 過同在一直線上三點不能作圓,是什麼緣故?

4. 有一塊殘破的留聲機唱片如圖 487,怎樣求他的半徑?

圖 487.

5. 求作一圓過二定點,而圓心在定直線上.並討論在什麼時候,作圖不可能?

6. 用定半徑求作一圓過二定點.並討論作圖的不可能.

7. 描畫圓形實物如一分銅幣廿分鎳幣等,求出圓心的地位.

8. 求作正方形的外接圓.

9. 過圓內定點求作一弦,使平分於此點.

10. 在定圓內,求作一弦,與定弦相等且平行.

§ 290　過圓上定點的切線作圖題的證明　過圓上定點作圓的切線.

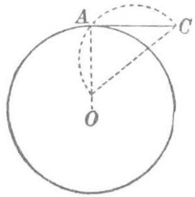

圖　488.

〔已知〕〔求作〕〔作法〕都見 § **41.**

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1)　$AC \perp AO$.	(1)　作法.
(2)　$\therefore AC$ 是圓 O 在點 A 的切線.	(2)　切線定理.

§ 291.　過圓外定點的切線作圖題的證明　過圓外定點作圓的切線.

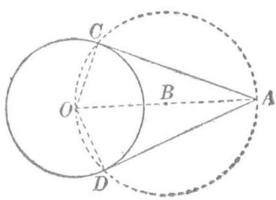

圖　489.

〔已知〕〔求作〕〔作法〕都見§42.

〔證明〕

敍述	理由
(1) 連結OC, OD.	(1) 直線確定公理
(2) $\angle ACO, \angle ADO$都是$\angle R$.	(2) 半圓含直角系
(3) $AC\perp OC$, $AD\perp OD$.	(3) 垂線定義.
(4) $\therefore AC, AD$是圓O的切線.	(4) 切線定理.

習題五十六

1. 求作一直線,切於定圓且與定直線平行.

2. 求作一直線,切於定圓且垂直於定直線.

3. 試依弦切角定理,在圓上定點作圓的切線.

〔提示〕 如圖490, $\angle TAB=\angle ACB$.

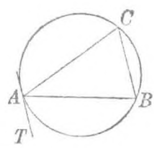

圖 490.

4. 求作一圓,切於定圓上定點,且過另一定點.

5. 用定點做中心,求作一圓切於定直線.

6. 求作一圓,切於一直線上定點,且使圓心在另一直線上.

§292 **三角形內切圓作圖題** 已知三角形,求作內切圓.

〔已知〕 三角形ABC.

〔求作〕 一圓內切於$\triangle ABC$.

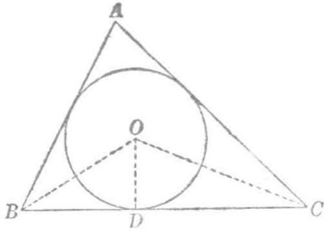

圖 491.

〔作法〕 (1) 作 $\angle B$ 的平分線 BO, $\angle C$ 角的平分線 CO, 相交於 O.

(2) 作 $OD \perp BC$.

(3) 用 O 做圓心, OD 做半徑,畫圓,卽所求的內切圓.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) O 與三邊 BC, AB, AC 的距離相等.	(1) 分角線性質定理.
(2) BC, AB, AC 垂直於圓 O 半徑的外端.	(2) 點與直線距離系.
(3) BC, AB, AC 都是圓 O 的切線.	(3) 切線定理.
(4) $\therefore$ 圓 O 是 $\triangle ABC$ 的內切圓.	(4) 內切圓定義.

§ 293. **傍切圓** 切於三角形一邊及其他二邊延長線的圓,叫做傍切圓,此圓心叫做傍心.一個三角形有三個傍切圓.

§294. **容定角弓形作圖題** 在定線段上,求作一弓形,使弓形角等於定角.

圖 492.

〔已知〕 角 G 及線段 AB.

〔求作〕 一弓形,用 AB 做弦,弓形角等於 $\angle G$.

〔作法〕 (1) 在 $\angle G$ 二邊上任意各取一點 H, K, 連結 HK.

(2) 用 AB 做底,作 $\angle A=\angle H$, $\angle B=\angle K$, 成 $\triangle ABC$.

(3) 作 $\triangle ABC$ 的外接圓.

(4) 弓形 ACB 便合所求.

〔證明〕

敍述	理由
(1) $\angle A=\angle H$, $\angle B=\angle K$.	(1) 作法.
(2) $\angle C=\angle G$.	(2) 二角相等的兩△系.
(3) 弓形 ACB 的角 $=\angle G$.	(3) 弓形角系.

故弓形 ACB 合於所求.

§295. **公切線作圖題** 求作相離不等二圓的內外公切線.

〔已知〕 二圓 O, O' 相離,圓 O 大於圓 O'.

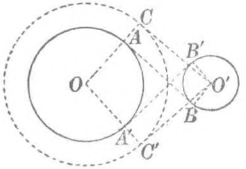

圖 493.

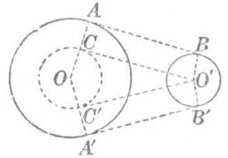

圖 494.

〔求作〕 二圓 O, O' 的內外公切線.

〔作法〕 (1) 用 O 做圓心,二圓半徑的和(圖 493)或差(圖 494)做半徑,畫輔助圓.

(2) 從 O' 作輔助圓的切線,切點是 C, C'.

(3) 連結 OC, OC',與圓 O 相交於 A, A'.

(4) 作圓 O' 的半徑 $O'B \parallel OA, O'B' \parallel OA'$.

(5) 連結 $AB, A'B'$,便是所求的切線(在圖 493 是內公切線,圖 494 是外公切線).

〔證 明〕

敍 述	理 由
(1) $AC = OC - OA$(圖 493). $AC = OA - OC$(圖 494).	(1) 作圖.
(2) $OC = OA + O'B$(圖 493). $OC = OA - O'B$(圖 494).	(2) 作圖.
(3) $AC = O'B$.	(3) 代換公理.
(4) $AC \parallel O'B$.	(4) 作圖.
(5) $ABO'C$ 是平行四邊形, $AB \parallel O'C$.	(5) ▱從一組對邊判別定理.

(6) $O'C \perp AC$.	(6) 切點半徑系.
(7) $OA \perp AB$, $O'B \perp AB$.	(7) 平行線公垂線系.
(8) $\therefore AB$切於二圓O, O'.	(8) 切線定理.

同法,可證明$A'B'$也切於二圓O, O'.

習題五十七

1. 已知三角形的三邊是4公分,5公分,6公分,求作此三角形,並作內切圓.

2. 求作上題三角形的三個傍切圓.

3. 求作三邊6寸,6寸,4寸的三角形,並作內切圓.又求各頂點至切點的距離.

4. 在每邊2寸的正三角形,求作內切圓. 從各頂點至切點的距離,是否相等?

5. 求作正方形的內切圓.

6. 容定角弓形作圖題,也可以如下法作成,試加證明:

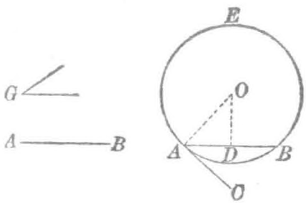

圖 495.

〔作法〕 作線段AB等於定線段,作$\angle BAC$等於定角G. 作OD垂直平分AB, 作$OA\perp AC$, OD與OA相交於O. 用O做圓心,OA做半徑,畫圓,則AEB便是所求的弓形(圖 495).

7. 在長 2 寸的線段上,求作弓形,使弓形角是45°, 或30°.

8. 有二圓,圓心相距 4 寸, 半徑一長 2 寸, 一長一寸,求作內外公切線.

9. 求作相等不相交二圓的內外公切線.

10. 求作外切二圓的內外公切線.

§296. 三角形頂點軌跡定理 三角形底邊的位置及長短都一定,頂角的大小也一定,且在底邊的上方,則頂點的軌跡,是用底邊做弦容頂角的弓形弧.

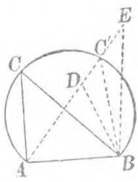

圖 496.

〔已知〕 $ACC'B$是用底邊AB做弦容頂角C的弓形弧.

〔求證〕 此弓形弧是$\triangle ABC$頂點C的軌跡.

〔證明〕 (1) 在此弓形弧上各點,都合於已知條件. 證法見§294容定角弓形作圖題.

(2)　不在此弓形弧上各點,都不合於已知條件.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1)　假使在弧 $ACC'B$ 內外各取一點 D 及 E, 連結 AD, AE, 與弧相交於 C'.	(1)　直線確定公理.
(2)　$\angle ADB > \angle AC'B$, $\angle AEB < \angle AC'B$.	(2)　△內外角比較定理.
(3)　∴ 弓形弧 $ACC'B$ 外各點都不合於已知條件.	(3)　因 $\angle ADB, \angle AEB$ 都不等於 $\angle C$.

故弓形弧 $ACC'B$ 是 $\triangle ABC$ 頂點 C 的軌跡.

〔注意〕　若不限定頂角在底邊的上方,則可在底邊下方照樣有一弓形弧也是頂點的軌跡.

§297. 軌跡交截法　設有甲乙二條件,合於各條件的點的軌跡是 A, B, 則此二軌跡的交點,必同時合於甲乙二條件很明,且合於甲乙二條件的點,必不在 A, B 二軌跡的交點以外. 若 A, B 二軌跡不相交,則必無同時合於甲乙二條件的點. 如此考慮,應用於作圖題,便利很多. 因作圖題的解法,可歸屬於求與某條件適合的點. 故求二軌跡的交點,即可發現此點.

例如圓過三點作圖題,即先求與此三點等距離的點,用此點做圓心畫圓,結果歸屬於求與三點等距離的點. 故與三點 A,B,C 等距離的點,必合於下列二條件:

(1)　與二點 A, B 等距離.

(2)　與二點 B, C 等距離.

當然又與 A, C 等距離.

故先求與二點 A, B 等距離點的軌跡,次求與二點 B, C 等距離點的軌跡,再求此二軌跡的交點.於是過三點 A, B, C 可畫一圓.

求軌跡與軌跡的交點,來解作圖題的方法,叫做軌跡交截法.

例題: 已知底邊,頂角及底邊上的中點,求作三角形.

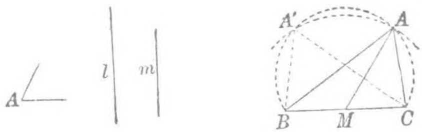

圖 497.

〔已知〕 底邊 l, 頂角 A, 中線 m.

〔求作〕 此三角形.

〔解析〕 設 $\triangle ABC$ 已作成, $BC=l$, $\angle BAC=\angle A$, M 是 BC 的中點, $AM=m$. 則

(1)　頂點 A 在弦 BC 上容角 A 的弓形弧上.

(2)　A 在用 M 做圓心 m 做半徑的圓上.

故 A 是 (1) 弓形 (2) 圓的交點.

〔作法〕 (1)　作 $BC=l$.

(2)　用 BC 做弦作容 $\angle A$ 的弓形弧.

(3) 用BC中點M做圓心,m做半徑,畫圓,與弓形弧的一交點是A.

(4) 連結AB, AC, 則$\triangle ABC$便合所求.

〔證明〕 從作法知 $BC=l$, $\angle BAC=\angle A$, $AM=m$, $BM=CM$. 故$\triangle ABC$與所求相合.

〔討論〕 依弧與圓的相交或相切或不相遇,此作圖題可有二解或一解或無解. 上圖是弧與圓相交於A, A', 故有二解,即$\triangle ABC$與$\triangle A'BC$都合於所求.

習題五十八

1. 直角三角形的弦一定,則直角頂點的軌跡,是用弦做直徑的半圓.

2. 已知直角三角形的弦,及弦上的高,求作此三角形.

3. 如圖498,兩根木條AB, AC互相垂直,在A處釘住. 再將第三根木條斜放,使兩端M, N緊靠AB, AC而移動. 則MN中點P的軌跡,是用A做圓心AP做半徑的弓形弧.

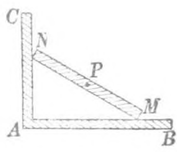

圖 498.

4. 切於一角二邊的圓,圓心的軌跡,是此角的平分線.

5. 從圓上一點所作諸弦中點的軌跡,是用此點與圓心連線做直徑的圓.

6. 過二定點諸圓中心的軌跡,是此二點連線的垂直平分線.

7. 定圓內等弦中點的軌跡,是此定圓的同心圓.

8. 三角形二頂點 B, C 的位置一定, BC 上的中線有定長,試求第三頂點的軌跡.

9 求作一點,與二定點 A, B 等距離,與另一定點 O 的距離是 l.

10. 用定長半徑,求作一圓,使與二定圓外切.

11. 已知底邊,高及頂角,求作三角形.

12. 已知底邊,高及底邊上的中線,求作三角形.

13. 過一定點求作一圓,使切於定直線上的定點.

14. 用定長半徑,求作一圓,使過一定點而與定圓相切.

15. 用定長半徑,求作一圓,使切於定直線及定圓.

第三章　比例,相似形

§ 298. **幾何圖形的度量** 用一標準量做單位,量一幾何圖形,其中所含單位的倍數,叫做此**幾何圖形的度量**.

例如,圖 499 線段 MN 長 5 公分,他的度量,在用公分做單位時便是 6,又如 $\angle ABC$ 大 45 度,他的度量,在用度做單位時便是 45.

圖 499.

§ 299. **幾何圖形的比** 同類幾何圖形用同單位量得度量的商,叫做**幾何圖形的比**.

例如,圖 500 線段 AB 長 3 公分,線段 CD 長 4 公分,則 AB 與 CD 的比,就是 4 除 3 的商卽 $\frac{3}{4}$, 寫作 3:4. 又如 $\angle A$ 是 30 度,$\angle B$ 是 45 度,則此二角的比,就是 45 除 30 的商卽 $\frac{30}{45}$ 或 $\frac{2}{3}$, 寫作 30 : 45. 式中“:”,是比的記號.

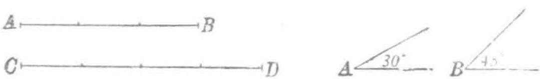

圖 500.

在任何比中,被除數叫做前項,除數叫做後項.

幾何圖形的比,與所用單位的長短大小毫無關係.如上圖的線段 AB,CD,用公寸做單位是 0.3 公寸與 0.4 公寸,則 AB 與 CD 的比是 $\frac{0.3}{0.4}$,化作整數的比仍舊是 $\frac{3}{4}$.

§300. **二量的關係**　用一單位同時量幾何圖形的同類二量,照事實上講,只要單位取得很小,必定可以量盡二量,但照理論上講,無論單位取得很小,也許有不能量盡的.在量盡時,此二量叫做**可通約量**,所用的單位叫做**公度量**.在不能量盡時,此二量叫做**不可通約量**,如正方形一邊與對角線的比是 $1:\sqrt{2}$,就是不可通約量.但對於初學,不必如此精密,故本書對於不可通約量,都取近似值代用,如 $1:\sqrt{2}$ 當作 1:1.41 或 1:1.414.

§301. **比例**　表示二比相等的算式,叫做**比例**.如 $a:b=c:d$ 是比例,可寫作方程 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,讀作 a 與 b 的比等於 c 與 d 的比,或 a 比 b 等於 c 比 d.

在比例 $a:b=c:d$ 中,a, b, c, d 順次叫做第一,第二,第三,第四項;第一項 a 與第四項 d 叫做**外項**,第二項 b 與第三項 c 叫做**中項**.

比例中的第四項叫做**第四比例項**.如 $a:b=c:d$ 中的 d,是 a, b 與 c 的第四比例項.

中項相等的比例,叫做**中項比例**,此中項叫做**比例中項**,最後一項,叫做**第三比例項**.如比例 $a:b=b:c$ 中,b 是 a 與 c 的比例中項,c 是 a 與 b 的第三比例項.

〔注意〕 比例 $a:b=c:d$ 與方程 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 意義相同,又比例各項都是不名數,故可用代數證明比例中的定理.

§302. **比例基本定理** 任何比例,中項的積等於外項的積.

〔已知〕 $a:b=c:d$.

〔求證〕 $ad=bc$.

〔證明〕 將原比例寫作 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 用 bd 乘兩邊便得.

全等比例系 凡一比例的任何三項,等於他一比例的對應三項,則所餘一項也必相等.

中項比例系 二量的比例中項,等於此二量乘積的平方根.

例如 $a:b=b:c$, 則 $b=\sqrt{ac}$.

§303. **積化比例定理** 設二數的積等於其他二數的積,則可任取二數做中項,他二數做外項,成一比例.

〔已知〕 $ad=bc$.

〔求證〕 $a:b=c:d$.

〔證明〕 用 bd 除原式兩邊,再寫成比例便得.

§304. **反比定理** 成比例的四項,第二項與第一項的比,等於第四項與第三項的比.

〔已知〕 $a:b=c:d$.

〔求證〕 $b:a=d:c$.

〔證明〕 將原式寫成 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 再用各邊除1, 寫成比例便得.

§ 305. **更比定理** 成比例的四項,將二外項互換或二中項互換,仍舊成比例.

〔已知〕 $a:b=c:d.$

〔求證〕 $a:c=b:d$, 及 $d:b=c:a.$

〔證明〕 將原式寫成 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 用 $\frac{b}{c}$ 乘兩邊便可證明第一式;又用 $\frac{d}{a}$ 乘兩邊,便可證明第二式.

§ 306. **合比定理** 成比例的四項,首二項的和比第二項,等於末二項的和比第四項.

〔已知〕 $a:b=c:d.$

〔求證〕 $a+b:b=c+d:d.$

〔證明〕 將原式寫成 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 在兩邊各加1, 通分後再寫成比例便得.

§ 307. **分比定理** 成比例的四項,首二項的差比第二項,等於末二項的差比第四項.

〔已知〕 $a:b=c:d.$

〔求證〕 $a-b:b=c-d:d.$

〔證明〕 將原式寫成 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 從兩邊各減1, 通分後再寫成比例便得.

§ 308. **合分比定理** 成比例的四項,首二項的和與差的比,等於末二項的和與差的比.

〔已知〕 $a:b=c:d.$

〔求證〕 $a+b:a-b=c+d:c-d.$

〔證明〕 依合比定理與分比定理各寫成分式,用第二分式的各邊除第一分式的各邊,再寫成比例便得.

§309. **冪根比定理** 成比例的四項,各項的同次冪或同次根,仍舊成比例.

〔已知〕 $a:b=c:d.$

〔求證〕 $a^n:b^n=c^n:d^n$ 及 $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}.$

〔證明〕 將原式寫成 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,各乘至 n 乘冪,便可證明第一式;又各開 n 次根,便可證明第二式.

§310. **和比定理** 設二以上諸比相等,則諸前項的和比諸後項的和,等於諸比中的任一比.

〔已知〕 $a:b=c:d=e:f=\cdots\cdots.$

〔求證〕 $a+c+e+\cdots:b+d+f+\cdots=a:b=\cdots\cdots.$

〔證明〕 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=r,$

則 $a=br,\ c=dr,\ e=fr,\ \cdots\cdots.$ (等量乘法公理)

$a+c+e+\cdots=br+dr+fr=(b+d+f)r.$ (等量加法公理)

$\therefore\ \frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}=r=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots.$ (等量除法公理)

故 $a+c+e+\cdots:b+d+f+\cdots=a:b=\cdots\cdots.$

§311. **積比定理** 二個以上的比例中,對應項的乘積,仍舊成比例.

〔已知〕 $a:b=c:d,\ m:n=p:q$

〔求證〕 $am:bn=cp:dq.$

〔證明〕 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$.

$\therefore\ \frac{am}{bn}=\frac{cp}{dq}$. (等量乘法公理)

$\therefore\ am:bn=cp:dq$.

積比系 設 $a:b=c:d$, 則 $ma:nb=mc:nd$.

§312. 倍比定理 二量等倍量的比,等於二量的比.

〔已知〕 二量 a 與 b.

〔求證〕 $ma:mb=a:b$.

〔證明〕 $a:b=a:b$. (同一)

$m:m=1:1$. (比例定義)

$\therefore\ ma:mb=a:b$. (積比定理)

習題五十九

1. 求下列比例中 x 的值:

$x:4=7:8$; $6:x=5:9$; $12:20=x:5$; $3:8=10:x$.

2. 求下列各組數的第四比例項:

2, 5 與 6; 8, 5 與 7; $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ 與 $\frac{1}{8}$; $1, a+b$ 與 $a-b$.

3. 求下列各組的比例中項.

4 與 25; 4 與 $(a-b)^2$; $12x^2$ 與 $3y^2$; x^2 與 $(x+1)^2$.

4. 從下列各式求 $x:y$:

$9x=2y$, $mx+nx=py$, $ax-ay=bx-by$.

5. 設 $x+y:y=7:3$, 求 $x:y$.

6. 設 $x-y:y=2:3$, 求 $x:y$.

7. 設 $x+y:x-y=12:5$, 求 $x:y$.

8. 設 $x+y:x-y=a:b$, 求 $x:y$.

9. 設 $x^3:y^3=8:27$, 求 $x:y$.

10. 設 $\sqrt[3]{x}:1=\sqrt[3]{y}:2$, 求 $x:y$.

11. 設 $x+y:x-y=13:3$, 求 $x^2:y^2$.

12. 設 $a:b=c:d=e:f=7:8$, 求 $a+c+e:b+a+f$.

13. 設 $x:4=y:3=z:2$, 求 $x+y+z:x$.

14. 設 $a:b=c:d$, 試證 $2a:3b=2c:3d$, 及 $a+3b:b=c+3l:d$.

15. 設 $a:b=b:c$, 試證 $a:c=a^2:b^2$.

§313. **內分外分** 將一線段從一點分成二段,若分點在原線段上,則叫做**內分**. 若分點在原線段延長上,則叫做**外分**.

如圖 501, AB 內分於 C, $AB=AC+CB$. 如圖 502, $A'B'$ 外分於 C', $A'B'=A'C'-B'C'$.

§314. **比例線段** 成比例的線段,叫做**比例線段**. 如圖 503, BC 與 AD, AE 相遇. 若 $AB:BD=AC:CE$, 則 BC 分二邊成比例線段. 若 $AB:AD=AC:AE$, 則二邊分成比例.

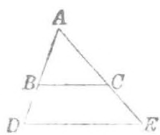

圖 503.

§315. 三角形一邊平行線定理　三角形一邊的平行線,分其他二邊成比例線段.

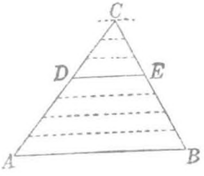

圖 504.

〔已知〕　$\triangle ABC$ 內, $DE \parallel AB$, DE 交 AC 於 D, 交 BC 於 E.

〔求證〕　$DC : AD = EC : BE$.

〔解析〕　用適宜的公度量將 AD, DC 各分成若干等分. 過各分點作直線與 AB 平行, 也等分第三邊, 從此便可證明.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 設 DC 含 m 個公度量, AD 含 n 個公度量.	(1) 公度量定義.
(2) 過 AC 的各分點作 AB 的平行線.	(2) 平行線作圖題.
(3) BC 分成 $m+n$ 等分, EC 內有 m 等分, BE 內有 n 等分.	(3) 平行截線定理.
(4) $DC : AD = m : n$, $EC : BE = m : n$.	(4) 幾何圖形的比定義.
(5) $DC : AD = EC : BE$.	(5) 代換公理.

〔注意〕 三角形底邊的平行線,若與二邊相交,則二邊內分成同比,如上圖.若與二邊延線相交,則二邊外分成同比,如圖 505.

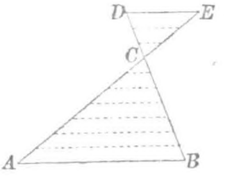

圖 505.

三角形一邊平行線系 三角形一邊的平行線,內分其他二邊成比例.

〔證明〕 用定理的圖, AC 有 $(m+n)$ 公度量, DC 有 n 公度量.

故 $$AC:DC=m+n:n,$$

同法, $$BC:EC=m+n:n.$$

$$\therefore\ AC:DC=BC:EC.$$

平行線分二線成比例系 諸平行線截二直線,所分的對應線段成比例.

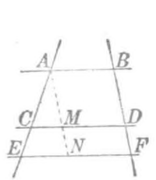

圖 506.

〔提示〕 作 $$AN \parallel BF,$$

則 $$AM=BD,\ MN=DF.$$

§316. 三角形二邊分成比例線段定理 設一直線分三角形二邊成比例線段,則此直線必與第三邊平行.

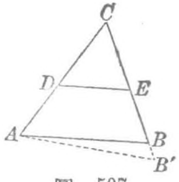

圖 507.

〔已知〕 $\triangle ABC$ 內, $DC : AD = EC : BE$.

〔求證〕 $DE \parallel AB$.

〔解析〕 作 $AB' \parallel DE$, 則 $DC : AD = EC : B'E$, 用此比例與已知比例比較,可證明 B' 與 B 重合,故 $DE \parallel AB$.

〔證 明〕

敍 述	理 由
(1) 過 A 作 $AB' \parallel DE$, 與 AE 相交於 B'.	(1) 平行線交線系.
(2) $DC : AD = EC : B'E$.	(2) 三角形一邊平行線定理.
(3) 但 $DC : AD = EC : BE$.	(3) 已知.
(4) $\therefore$ $BE = B'E$.	(4) 全等比例系.
(5) 點 B' 與點 B 重合, 即 AB 與 AB 重合.	(5) 直線確定公理.
(6) $\therefore$ $DE \parallel AB$.	(6) 平行線公理.

三角形二邊分成比例系 設一直線分三角形的二邊,第一邊與所分一線段的比,等於第二邊與所分對應線段的比,則此直線與第三邊平行.

習題六十

1. 試將長5寸的線段,內分於2:3的比.

2. 試將長6寸的線段,外分於2:3的比.

3. 一線段 AB, 可分作任何等分,如分作五等分的方法如下:作 AC 與 AB 成適宜的角 BAC, 又作 $BD \parallel AC$. 從 A 起在 AC 上取相等的4段,從 D 起在 BD 上也取同長的4段,連結各分點如圖508. 試證 AB 分成5等分.

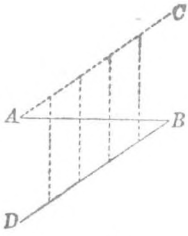

圖 508

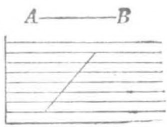

圖 509.

4. 試證線段 AB 可用橫格紙分成任何等分,如圖509是分成6等分.

5. 在 $\triangle ABC$ 內, DE 交 AC 於 D, 交 BC 於 E, 又 $DE \parallel AB$. 設 $AD=10$ 寸, $DC=8$ 寸, $BE=6$ 寸, 求 EC.

6. 在 $\triangle ABC$ 內, DE 交 AC 於 D, 交 BC 於 E. 設 $AD=12$ 寸, $DC=9$ 寸, $BE=8$ 寸, $EC=6$ 寸. 試證 $DE \parallel AB$.

7. 如圖 510, $DE \parallel AB$, 設 $CD=2$ 寸, $CA=3$ 寸. $CE=3\frac{1}{2}$ 寸, 求 EB 的長.

8. 如前圖,設 $CA=8$ 寸, $CB=12\frac{1}{4}$ 寸, $CE=9\frac{1}{2}$ 寸, 求 DA 的長.

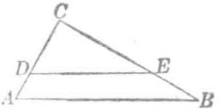

圖 510.

9. 試證梯形底邊的平行線,分兩腰成比例.

10. 如圖 511, $DF \parallel AB$, $EF \parallel DB$, 求證

$$CE : CD = CD : CA.$$

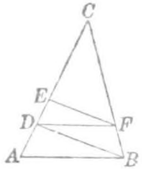

圖 511.

§ 317. 依定比分定線段作圖題 求將定線段分成數段,使等於定比.

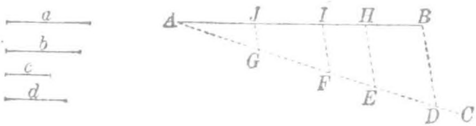

圖 512.

〔已知〕 線段 AB, 及 a, b, c, d.

〔求作〕 分 AB 成四段,使此四段的比等於 $a:b:c:d$.

〔作法〕 (1) 作 AC, 與 AB 成適宜角 BAC.

(2) 在 AC 上, 取 $AG=a$, $GF=b$, $FE=c$, $ED=d$.

(3) 連結 BD, 過 E, F, G, 各作直線與 BD 平行, 交 AB 於 H, I, J.

(4) 線段 AJ, JI, IH, HB 與所求相合,即

$$AJ:JI:IH:HB=a:b:c:d.$$

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) $AJ:AG=JI:GF=IH:FE$ $=HB:ED.$	(1) 平行線分二線成比例系.
(2) $AJ:a=JI:b=IH:c=HB:d.$	(2) 代換公理.
(3) $AJ:JI:IH:HB=a:b:c:d.$	(3) 更比定理.

§318. 第四比例項作圖題 已知三線段,求作第四比例項.

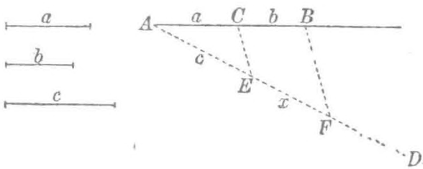

圖 513.

〔已知〕 三線段 a, b, c.

〔求作〕 此三線段的第四比例項,即求作線段 x, 使 $a:b=c:x$.

〔作法〕 (1) 作直線 AB, 從 A 取 $AC=a$, $CB=b$.

(2) 又作直線 AD, 與 AB 成適宜的角.從 A 在 AD 上取 $AE=c$.

(3) 連結 CE. 作 $BF \parallel CE$, 交 AD 於 F.

(4) 此 EF 即所求的線段 x.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) $BF \parallel CE$.	(1) 作法
(2) $AC:CB=AE:EF$.	(2) 三角形一邊平行線定理
(3) $\therefore\ a:b=c:EF$	(3) 代換公理.

§319. **三角形內角平分線定理** 三角形一內角的平分線,內分對邊所成二線段的比,等於二鄰邊的比.

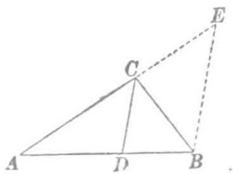

圖 514.

〔已知〕 $\triangle ABC$ 內, CD 平分 $\angle ACB$.

〔求證〕 $AD:DB=AC:CB$.

〔解析〕 作 $BE \parallel CD$, 與 AC 延長相交於 E, 證明 $AD:DB=AC:CE$. 再從 $\angle ACD=\angle AEB$, $\angle DCB=\angle CBE$, 證明 $\angle AEB=\angle CBE$, 於是證明 $CB=CE$, 代入比例便得.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 作 $BE \parallel CD$.	(1) 平行線作圖題.
(2) BE 與 AC 延線相交於 E.	(2) 平行線交線系.

(3) $AD:DB=AC:CE$.	(3) △一邊平行線定理.
(4) $\angle ACD=\angle DCB$.	(4) 已知CD平分$\angle ACB$.
(5) 但 $\angle AEB=\angle ACD$.	(5) 平行線同位角定理.
(6) 又 $\angle DCB=\angle CBE$.	(6) 平行線內錯角定理.
(7) $\therefore \angle AEB=\angle CBE$.	(7) 代換公理.
(8) $\therefore CE=CB$.	(8) 等腰△判別定理.
(9) $\therefore AD:DB=AC:CB$.	(9) 代換公理.

§ **320. 三角形外角平分線定理** 三角形一外角的平分線,外分對邊所成二線段的比,等於二鄰邊的比.

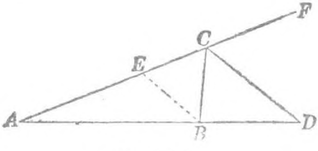

圖 515.

〔已知〕 $\triangle ABC$ 內,CD 平分 C 的外角,交 AB 的延線於 D.

〔求證〕 $AD:DB=AC:CB$.

〔解析〕 作 $BE\parallel CD$, 先證明 $AD:BD=AC:EC$, 再證明 $EC=CB$ 代入便得.

〔證 明〕

敍 述	理 由
(1) 作 $BE\parallel CD$.	(1) 平行線作圖題.
(2) BE 交 AC 於 E.	(2) 平行線交線系.
(3) $AD:BD=AC:EC$.	(3) △一邊平行線系.

(4)　$\angle BCD=\angle FCD$.	(4)　已知 CD 平分 $\angle FCB$
(5)　但 $\angle CBE=\angle BCD$.	(5)　平行線內錯角定理.
(6)　又 $\angle CEB=\angle FCD$.	(6)　平行線同位角定理.
(7)　$\therefore\ \angle CBE=\angle CEB$.	(7)　代換公理.
(8)　$\therefore\quad EC=CB$.	(8)　等腰△判別定理.
(9)　$\therefore\ AD:BD=AC:CB$.	(9)　代換公理.

習題六十一

1. 將定長線段分做二段,使成 3 與 4 的比

2. 說明怎樣用橫格紙,將定長線段分成所要的比. 如圖 516, 是分成 3 : 4.

圖 516

3. 有三線段長 1 寸, 2 寸, $1\frac{1}{2}$ 寸,試作此三線段的第四比例線. 量此結果線段, 並計算第四比例項,互相比較.

4. 設 $\angle ABC$ 內有定點 P. 求過 P 作線段,與角的二邊相交.而平分於 P.

(提示　作 $PD \parallel AB$, 如 $EP=FP$, 則 $ED=DB$ (圖 517).

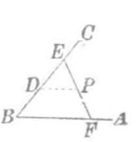

圖 517.

5. 設 $\angle ABC$ 內有定點 P. 求過 P 作線段與角的二邊相交,使於 P 分成 1 與 2 的比.

6. 已知二線段 a, b, 求作線段 x, 使 $x=ab$.

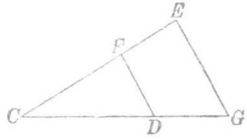

圖 518.

〔提示〕 任作相交二直線,取 $CD=a, CE=b, CF=1$. 連結 DF, 作 $EG \parallel FD$, 則 $CG=x$ (圖 518).

7. 設線段 a, b 的值如下表,求作 $x=ab$ 的線段 x. 再量 x 的長,並求 x 的值,互相比較:

$a=$	2	3	4	1.5	0.7	1.4
$b=$	3	4	5	2.5	0.7	0.9

8. 設線段 a, b 的值如下表,求作 $x=\dfrac{a}{b}$ 的線段 x. 再量 x 的長,並求 x 的值,互相比較.

$a=$	6	15	12	7.2	25	2.5
$b=$	3	5	8	0.6	5	5

9. 已知三線段 a, b, c, 求作線段 $x=\dfrac{bc}{a}$.

10. 已知二線段的比與和,求作此二線段.

11. 在 $\triangle ABC$ 內, $AB=5$ 寸, $AC=6$ 寸, $BC=7$ 寸,求 $\angle C$ 的平分線將對邊 AB 分成二線段的長.

12. 如上題的三角形,求 AC 與 BC 各被對角平分線所分成線段的長.

13. 試根據三角形內角平分線定理,證明等腰三角形頂角平分線平分底邊.

14. 試用間接證法證明**三角形內角平分線逆定理**:"設過三角形一頂點的直線,內分對邊所成二線段的比,等於相隣二邊的比,則此直線平分此形頂點的角".

15. 試用間接證法證明**三角形外角平分線逆定理**:"設過三角形一頂點的直線,外分對邊所成二線段的比,等於相鄰二邊的比,則此直線平分此形頂點的外角".

§321. 相似形　用紙版翦一個多角形,直放在燈光與牆壁中間,與牆壁平行,則壁上現出一個照原形放大的影,如圖 519, 原形與影的對應各角相等,對應各邊的比也相等:

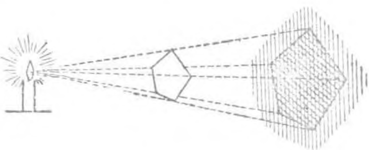

圖 519.

在方格紙上畫一個多角形,再畫一個邊數相同的小多角形,使大小兩形的對應各角相等,對應各邊的比相等,如圖 520 大小兩形的對應各角相等,對應各邊的比是5:1,則小形便是大形的縮小圖.

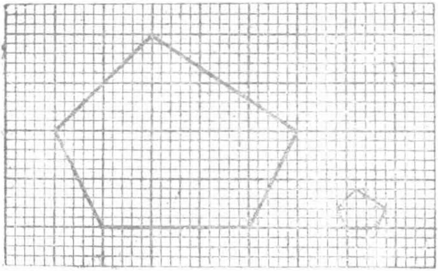

圖 520.

如上第一例的形與影,第二例的大小兩形,都叫做**相似多角形**,或單叫**相似形**.故二多角形須具有下列二條件,才是相似形.

(1) 對應各角相等. (2) 對應各邊的比相等.

如圖 521 中:

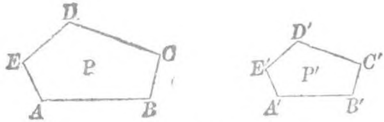

圖 521.

(1) $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $\angle D=\angle D'$, $\angle E=\angle E'$.

(2) $AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'=DE:D'E'=EA:E'A'$.

便是兩形相似,可寫作 $ABCDE\sim A'B'C'D'E'$,或多角形 $P\sim$ 多角形 P',式中 $\sim$ 便是相似的記號.

習題六十二

1. 相似形與全等形有什麼分別?

2. 任何兩個正方形,對應各角是否相等? 對應各邊的比是否相等? 那麼兩形是否相似?

3. 如圖 522, 對應各角是否相等? 對應各邊的比是否相等? 此二形是否相似?

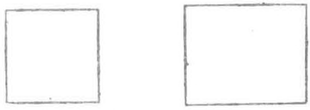

圖 522.

4. 如圖 523 兩個五角形,對應各角相等,對應各邊的比不等,此二形是否相似?

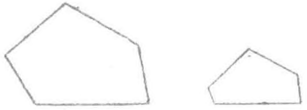

圖 523.

5. 如圖 524 的平行四邊形與矩形,對應各邊相等,對應各角不等,此二形是否相似?

圖 524.

6. 如圖 525 的兩個四邊形,對應各邊的比相等,對應各角不等,此兩形是否相似.

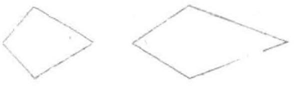

圖 525.

7. 如圖 526,任意畫三角形 ABC,再畫第二個三角形 DEF,使 $DE=\frac{1}{2}AB$, $\angle D=\angle A$, $\angle E=\angle B$. 量 AC, BC, DF, EF,對應各邊的比是否相等? 兩形是否相似?

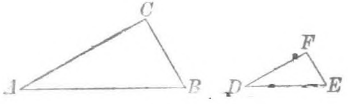

圖 526.

§ 322. **相似三角形從互等角判別定理** 兩三角形的對應各角相等,便是相似形.

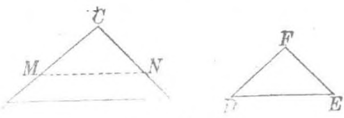

圖 527.

〔已知〕 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中, $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$.

〔求證〕 $\triangle ABC\sim\triangle DEF$.

〔解析〕 有對應各角相等,便與相似形的第一條件相合,故只要把小三角形疊在大三角形上,使一角疊合,則夾邊重合,證明第三邊平行,如此便可證明對應各邊成比例.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 將 $\triangle DEF$ 疊在 $\triangle ABC$ 上,使 $\angle F$ 與 $\angle C$ 重合, DF 與 AC 重合,則 EF 與 BC 重合, $\triangle DEF$ 移在 $\triangle MNC$ 的位置.	(1) 移形公理. 又已知 $\angle C=\angle F$.

(2) $\angle CMN=\angle D=\angle A$.	(2) 已知.
(3) $MN \parallel AB$.	(3) 平行線從同位角判別定理.
(4) $\therefore AC:MC=BC:NC$.	(4) △一邊平行線系.
(5) $\therefore AC:DF=BC:EF$.	(5) 代換公理.
(6) 又將$\angle D$與$\angle A$重合,可證明$AC:DF=AB:DE$.	(6) 同(1)至(5).
(7) $\therefore AC:DF=BC:EF=AB:DE$.	(7) 代換公理.
(8) 但$\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$.	(8) 已知.
(9) $\therefore \triangle ACD\sim\triangle DEF$.	(9) 相似形定義.

相似三角形從兩角相等判別系 兩三角形如有兩角對應相等,此兩形便相似.

相似直角三角形系 兩個直角三角形,如有一銳角相等,此兩形便相似.

相似三角形從一邊平行線判別系 三角形一邊的平行線與其他二邊相交所成的三角形,與原形相似.

§ 323. **相似三角形從各邊成比例判別定理** 兩三角形的對應各邊成比例,便是相似形.

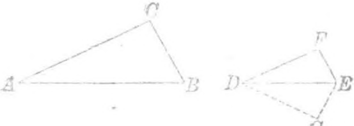

圖 528.

〔已知〕 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中, $AB:DE=BC:EF=AC:DF$.

〔求證〕 $\triangle ABC\sim\triangle DEF$.

〔解析〕 作 $\angle EDG=\angle A$, $\angle DEG=\angle B$, 證明 $\triangle DEG\sim\triangle ABC$, 再證明 $\triangle DEG\cong\triangle DEF$. 故 $\triangle DEF\sim\triangle ABC$.

〔證明〕

敍述	理由
(1) 作 $\angle EDG=\angle A$, $\angle DEG=\angle B$.	(1) 等角作圖題.
(2) 則 $\angle C=\angle G$.	(2) 二角相等的兩三角形系.
(3) $\therefore$ $\triangle ABC\sim\triangle DEG$.	(3) 相似三角形從互等角判別定理.
(4) $\therefore AB:DE=BC:EG$.	(4) 相似形定義.
(5) 但 $AB:DE=BC:EF$.	(5) 已知.
(6) $\therefore$ $EF=EG$.	(6) 全等比例系.
(7) 同理, $DF=DG$.	(7) 同(4), (5).
(8) $\triangle DEF\cong\triangle DEG$.	(8) s. s. s.=s. s. s.
(9) $\therefore$ $\triangle ABC\sim\triangle DEF$.	(9) 從(3),(8)用代換公理.

§324. **相似三角形從一角相等夾邊成比例判別定理** 兩三角形有一角相等,且夾等角的邊成比例,便是相似形.

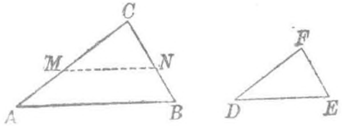

圖 529.

〔已知〕 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中, $\angle C=\angle F$, $AC:DF=BC:EF$.

〔求證〕 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

〔解析〕 將$\triangle DEF$疊在$\triangle ABC$上,使F與C疊合,DF, EF各與AC, BC重合,證明第三邊平行,如是便可證明各角相等而各邊成比例.

〔證 明〕

敍 述	理 由
(1) 將$\triangle DEF$疊在$\triangle ABC$上,使F與C重合,DF與AC重合,則EF與BC重合,$\triangle DEF$移在$\triangle MNC$的位置.	(1) 移形公理. 又已知$\angle F=\angle C$.
(2) $AC:DF=BC:EF$.	(2) 已知.
(3) $\therefore AC:MC=BC:NC$.	(3) 代換公理.
(4) $\therefore MN=AB$.	(4) △二邊分成比例系.
(5) $\angle CMN=\angle A$, $\angle CNM=\angle B$.	(5) 平行線同位角定理.
(6) 但 $\angle CMN=\angle D$, $\angle CNM=\angle E$.	(6) 已知.

(7) $\angle A=\angle D, \angle B=\angle E$.	(7) 代換公理.
(8) $\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$.	(8) 相似三角形從互等角判別定理.

§325. 相似三角形高與邊成比例定理 相似三角形的對應高與對應邊成比例.

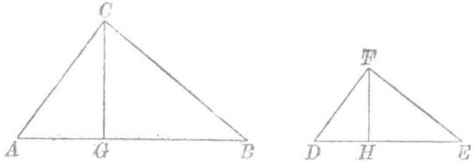

圖 530.

〔已知〕 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, CG, FH 是對應高.

〔求證〕 $CG:FH=AB:DE=BC:EF=AC:DF$.

〔解析〕 ACG 與 DFH 都是直角三角形,有 $\angle A=\angle D$,故此二形相似,由此證明 $CG:FH=AC:DF$.

〔證明〕

敍述	理由
(1) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.	(1) 已知.
(2) $\angle A=\angle D$.	(2) 相似形定義.
(3) $\angle AGC=\angle DHF=\angle R$.	(3) 直角公理.
(4) $\triangle ACG \sim \triangle DFH$.	(4) 相似直角三角形系.
(5) $\therefore CG:FH=AC:DF$.	(5) 相似形定義.
(6) 但 $AC:DF=AB:DE$ $=BC:EF$.	(6) 已知.

(7) $\therefore CG:FH=AC:DF$ $=AB:DE=BC:EF$	(7) 代換公理.

習題六十三

1. 兩個等腰三角形的頂角相等,便是相似形.

2. 兩個相似三角形對應邊上的中線,與任何對應邊成比例.

3. 兩個相似三角形對應角的平分線,與任何對應邊成比例.

4. 兩個三角形的各邊順次平行,便是相似形(圖 531).

〔提示〕 延長一邊或兩邊使相交,便發見各角順次相等.

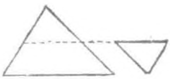

圖 531.

5. 兩個三角形的各邊順次垂直,便是相似形(圖 532).

〔提示〕 延長各邊相交,便發現各角順次相等.

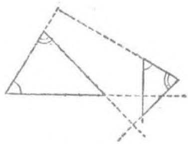

圖 532.

6. 如圖 533 AM 與 BN 是 $\triangle ABC$ 的高,試證

$$\triangle AMC \sim \triangle BNC.$$

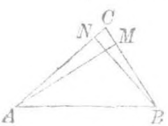

圖 533.

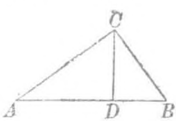

圖 534.

7. 如圖 534, $\triangle ABC$ 中, $\angle C$ 是直角, $CD \perp AB$, 試證

$\triangle ABC \sim \triangle ACD$, $\triangle ABC \sim \triangle BCD$, $\triangle ACD \sim \triangle BCD$.

8. 三角形的三邊是2寸,3寸,4寸.另有一個相似三角形,最短邊是5寸,求其餘二邊的長.

9 梯形的對角線互相分成比例線段.

10. 梯形$ABCD$內,底是AB與DC,對角線AC,BD相交於E.設$AE=12$,$EC=8$,$BD=24$,求BE與ED.

11. 直角三角形兩股的積,等於弦與弦上高的積.

12. 兩個相似三角形外接圓半徑的比,等於對應邊的比.

13. 兩個相似三角形內切圓半徑的比,等於對應邊的比.

14. 兩個相似三角形中,對應高分成的對應三角形也相似.

§326. 比例與相似形的應用 利用比例與相似形原理,可以測量距離,描繪圖畫,製造儀器,用處很多.現在略述幾種普通儀器如下:

§327. 比例規 是根據§324定理,用金屬製成.如圖535,AD與BC是兩桿,上有空槽,E是連繫兩桿的螺旋,可以在空槽中推動;AE,BE,ED,EC長度的比,可以用E調整,使$AB:CD=AE:ED$.

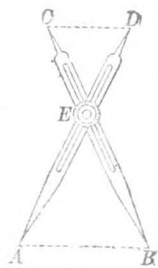

圖 535.

如$AE=6$公分,$ED=4$公分,則$AB:CD=6:4=1:\frac{2}{3}$,即$AB=\frac{3}{2}CD$,$CD=\frac{2}{3}AB$.如此畫縮小或放大任何比例線段很便.

§ 328. **畫圖縮放儀器** 是用四條竹桿或木桿製成,如圖 536, AB, BC, DE 與 EF 四桿,兩兩平行,在 B, D, E, F 連繫 $DEFB$ 是平行四邊形.若使 $AD:AB=BF:BC$,則三點 A, E, C 常在一直線上, $AE:AC$ 常等於 $AD:AB$.

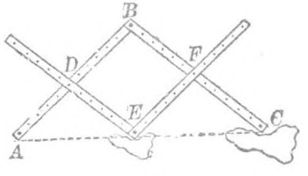

圖 536.

故如使 A 固定不動,將鉛筆放在 E 處 C 處,則點 E 與 C 畫成相似形.此儀器是根據 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 製成,可畫放大圖或縮小圖.

§ 329. **對角線尺** 是根據 § 325 定理製成,用他可量很短的長度.如圖 537, $AB=1$ 寸, $AC \perp AB$, 將 AB 與 AC 各分作 10 等分,過各分點作平行線如圖所示,則可以量到一寸的百分之一.如圖中 $LM=1.31$ 寸, $NP=1.03$ 寸, $QR=1.16$ 寸, $ST=2.69$ 寸.

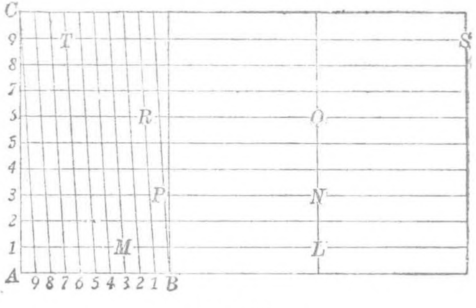

圖 537.

習題六十四

1. 在§327比例規的圖中,設$AE=7.5$公分,$ED=2.5$公分,則AB是CD的幾倍?

2. 在§328畫圖縮放儀器圖中,設$AB=2AD$,在E處描原圖,則C處畫成的圖,與原圖大小比較怎樣?

3. 依前題,設$AB=3AD$,在C處描原圖,則E處畫成的圖,與原圖大小比較怎樣?

4. 在§329對角線尺的圖中,指出下列各長度:

(a) 0.02寸, 0.03寸, 0.04寸, ……, 0.09寸.

(b) 0.12寸, 0.35寸, 0.93寸, 0.68寸.

(c) 1.85寸, 1.43寸, 2.56寸.

5. 畫每邊1寸的正方形,再畫對角線.用圓規與對角線尺,求對角線與一邊的比,至一寸的百分之一.

6. 用圓規與對角線尺,畫1.23寸,1.07寸,0.89寸的線段.

7. 已知三邊1.62寸,1.74寸,1.95寸,求作三角形.

8. 如圖538,已知桿長EF,桿影DE,樹影AB,用什麼定理可以求得樹高BC?

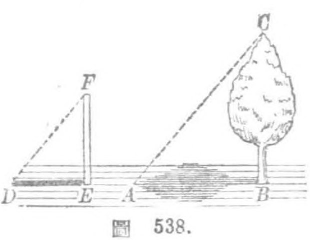

圖 538.

9. 依前題,設 $EF=6$ 尺, $DE=3\frac{1}{2}$ 尺, $AB=50$ 尺,求 BC.

10. 要測隔河二點 A, B 的距離,先作 $AC\perp AB$,再作 $CD\perp AC$. 從 D 望 B 定出 AC 上一點 E,量 AE, EC, CD (圖 539). 如此依什麼定理可以求得 AB?

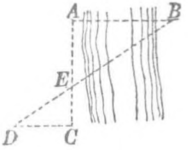

圖 539.

11. 依前題,設 $AE=120$ 尺, $EC=30$ 尺, $CD=40$ 尺,求 AB.

12. 如圖 540,要測隔河二點 A,B 的距離,先在岸上 A 處直立一桿 AC,再在桿頂架曲尺,使一邊 CD 正對點 B,同時使一邊 CE 正對 AB 的延長線而定一點 F. 量 FA 與 AC,則 AB 可從比例 $FA:AC=AC:AB$ 求得,試證此理.

設 $FA=8$ 尺, $AC=9.6$ 尺,求 AB.

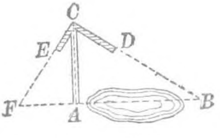

圖 540.

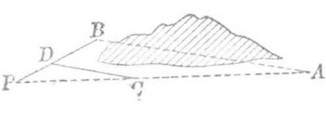

圖 541.

13. 如圖 541, A, B 是隔山的二點. 先選定合宜的一點 P,量 PA 與 PB. 依 $PC:PA=PD:PB$ 定二點 C, D,再量 CD,則 AB 可以求得. 設 $PA=84$ 尺, $PC=42$ 尺, $CD=40$ 尺,求 AB.

14.　用十字架可以測物體的高．如圖 542，將十字架橫條 DE 在直架 FG 上升降，使 D, F, B 三點成一直線．量 DE, EF, GE 及 GA，則樹高 AB 便可求得．設 $DE=18$ 寸，$EF=6$ 寸，$GE=30$ 寸，$GA=102$ 寸，求 AB.

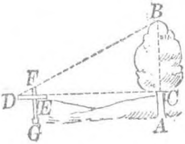

圖 542.

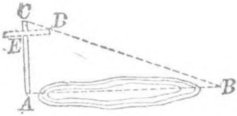

圖 543.

15.　如圖 543，說明怎樣用十字架測量不可近二點 A, B 的距離？ 設 $AC=60$ 寸，$EC=9$ 寸，$ED=24$ 寸，求 AB.

§330.　相似形周界定理

兩個相似形周界的比，等於任何二對應邊的比．

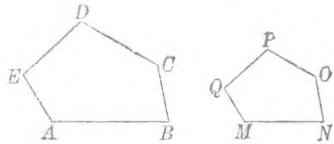

圖 544.

〔已知〕　多角形 $ABCD\cdots$

$\sim$ 多角形 $MNOP\cdots$

〔求證〕　$AB+BC+CD+\cdots : MN+NO+OP+\cdots$

$=AB : MN=\cdots\cdots$.

〔解析〕　相似形對應邊的比都相等，故依和比定理即可證明周界的比等於對應邊的比．

〔證　明〕

敘　述	理　由
(1)　多角形 $ABCD\cdots$ $\sim$ 多角形 $MNOP\cdots$.	(1)　已知.

(2) $AB:MN=BC:NO$ $=CD:OP=DE:PQ=\cdots\cdots$.	(2) 相似形定義.
(3) $\therefore AB+BC+CD+DE+\cdots$ $:MN+NO+OP+PQ+\cdots$ $=AB:MN=\cdots\cdots$.	(3) 和比定理.

§331. **相似形性質定理** 兩個相似多角形,必可分作同數的三角形;彼此相似且在相似位置.

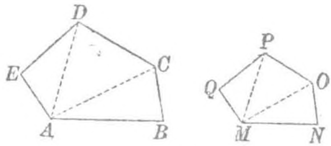

圖 545.

〔已知〕 多角形 $ABCD\cdots\sim$ 多角形 $MNOP\cdots$.

〔求證〕 此兩形可分作同數的三角形,彼此相似且在相似位置.

〔解析〕 此兩形都是五邊形,從對應頂點 A 與 M 各作可能的對角線,將兩形各分成三個三角形.依一角相等,夾邊對應成比例,卽可順次證明在相似位置的三角形都相似.

〔證 明〕

敍 述	理 由
(1) 作對角線 AC, AD 及 MO, MP 等.	(1) 直線確定公理.
(2) $\angle B=\angle N$, $AB:MN=BC:NO$	(2) 相似形定義.

(3) $\therefore \triangle ABC \sim \triangle MNO$.	(3) 相似△從一角相等夾邊成比例判別定理.
(4) $\angle ACB = \angle MON$, $AC:MO = BC:NO$.	(4) 相似形定義.
(5) 但 $\angle C = \angle O$.	(5) 已知.
(6) $\angle ACD = \angle MOP$.	(6) 等量減法公理.
(7) 又 $BC:NO = CD:OP$.	(7) 已知.
(8) $AC:MO = CD:OP$.	(8) (4),(7) 用代換公理.
(9) $\therefore \triangle ACD \sim \triangle MOP$.	(9) 相似△從一角相等夾邊成比例判別定理.
(10) 同理,可證 $\triangle ADE \sim \triangle MPQ$.	(10) 同(4)至(9).

§332. **相似形判別定理** 設兩個多角形各是同數相似且在相似位置的三角形所合成,便是相似形.

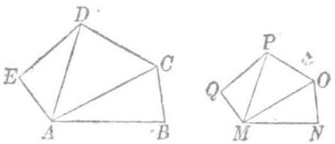

圖 546.

〔已知〕 多角形 $ABCD\cdots$ 與 $MNOP\cdots$ 中, $\triangle ABC \sim \triangle MNO$, $\triangle ACD \sim \triangle MOP$, …… 且在相似位置.

〔求證〕 多角形 $ABCD\cdots \sim$ 多角形 $MNOP\cdots$.

〔解析〕 從相似三角形的對應角相等對應邊成比例,可證明兩形的對應角相等對應邊成比例,便是相似形.

〔證 明〕

敘 述	理 由
(1) $\triangle ABC \sim \triangle MNP$.	(1) 已知.
(2) $\angle B = \angle N$, $\angle ACB = \angle MON$.	(2) 相似形定義.
(3) $\triangle ACD \sim \triangle MOP$.	(3) 已知.
(4) $\angle ACD = \angle MOP$, $\angle ADC = \angle MPO$.	(4) 相似形定義.
(5) $\angle ACB + \angle ACD$ $= \angle MON + \angle MOP$.	(5) 等量加法公理.
(6) $\angle C = \angle O$.	(6) 全量公理.
(7) 同理, $\angle D = \angle P$ 等.	(7) 同(3)到(6).
(8) 又 $AB : MN = BC : NO$ $= CD : OP = \cdots\cdots$	(8) 已知.
(9) $\therefore$ 多角形 $ABCD\cdots$ $\sim$多角形 $MNOP\cdots$.	(9) 相似形定義.

§ 333. **相似形作圖題** 求作一多角形與已知多角形相似,用定長線段做對應一邊.

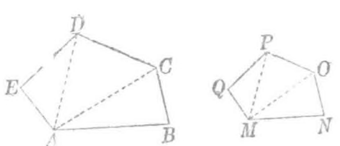

圖 547.

〔已知〕 多角形 $ABCDE$ 及線段 MN.

〔求作〕 一多角形與 $ABCDE$ 相似,用 MN 做 AB 的對應邊.

〔作法〕 (1) 從 A 作可能的各對角線.

(2) 在 M 作 $\angle OMN=\angle CAB$, $\angle PMO=\angle DAC$, $\angle QMP=\angle EAD$.

(3) 在 N 作 $\angle MON=\angle ABC$,得交點 O.

(4) 在 O 作 $\angle MOP=\angle ACD$,得交點 P.

(5) 在 P 作 $\angle MPQ=\angle ADE$,得交點 Q.

(6) 故 多角形 $MNOPQ\sim$多角形 $ABCDE$.

〔證明〕

敍述	理由
(1) $\triangle ABC\sim\triangle MNO$, $\triangle ACD\sim\triangle MOP$, $\triangle ADE\sim\triangle MPQ$.	(1) 相似三角形從兩角相等判別系.
(2) $\therefore$ 多角形 $ABCDE\sim$多角形 $MNOPQ$.	(2) 相似形判別定理.

題題六十五

1. 兩個相似多角形的周界是 144 尺與 256 尺,第一形的一邊是 18 尺,求第二形的對應邊.

2. 一多角形的各邊是 8 寸, 12 寸, 15 寸, 6 寸, 20 寸.另有一相似形對應於 8 寸的一邊是 6 寸,求相似形的周界.

3.　一多角形的周界是 p, 一邊是 x. 設另一相似形的周界 q, 求對應於 x 的一邊.

4.　一矩形田闊 w 丈, 長 l 丈. 另有一相似的田, 闊 3 丈, 求他的周圍.

5.　兩個相似多角形對應對角線的比, 等於對應邊的比.

6.　兩個相似三角形周圍的比, 等於對應高的比.

7.　如圖 548, 將已知多角形 $ABCDE$ 的各頂點與形外定點 H 連結. 作 $MN \parallel AB$, 與 AH 相交於 M, 與 BH 相交於 N. 又作 $NO \parallel BC$, $OP \parallel CD$, $PQ \parallel DE$, 並連結 QM.

試證:　　多角形 $MNOPQ \sim$ 多角形 $ABCDE$.

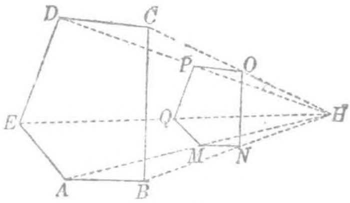

圖　548.

8.　隨便畫一個四邊形, 再用一寸長的線段做對應一邊, 用圓規與直尺畫一個相似四邊形.

§334. **相交二弦定理**　設圓內二弦相交, 則一弦所分二線段的積, 等於他弦所分二線段的積.

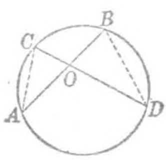

圖　549.

〔已知〕 圓內二弦 AB, CD 相交於 O.

〔求證〕 $AO\times OB=CO\times OD$.

〔解析〕 連結 AC, BD, 則 $\angle AOC=\angle BOD$, $\angle A=\angle D$, $\angle C=\angle B$, 故 $\triangle AOC\sim\triangle DOB$, 由此可證明

$$OD:AO=OB:CO.$$

〔證法〕

敍述	理由
(1) 連結 AC, BD.	(1) 直線確定公理.
(2) $\angle AOC=\angle BOD$.	(2) 對頂角定理.
(3) $\angle A=\angle D$, $\angle C=\angle B$.	(3) 弓形角系.
(4) $\triangle AOC\sim\triangle DOB$.	(4) 相似△從互等角判別定理.
(5) $AO:OD=CO:OB$.	(5) 相似形定義.
(6) $\therefore AO\times OB=CO\times OD$.	(6) 比例基本定理.

§335. **割線定理** 設從圓外一點作二割線,則一割線全部與他在圓外一段的積,等於另一割線與他在圓外一段的積.

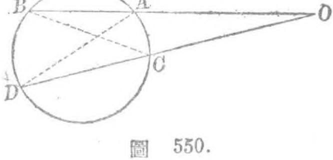

圖 550.

〔已知〕 從點 O 至圓作二割線 OB 與 OD, 順次交圓於點 A, B, C, D.

〔求證〕 $OA \times OB = OC \times OD.$

〔解析〕 連結 AD, BC, 則 $\triangle AOD$ 與 $\triangle COB$ 中,有 $\angle O$ 公用, $\angle B = \angle D$, 故二形相似,從此便可證明 $OA \times OB = OC \times OD.$

〔證 明〕

敍 述	理 由
(1) 連結 AD 與 BC.	(1) 直線確定公理.
(2) $\angle O = \angle O.$	(2) 公用.
(3) $\angle B = \angle D.$	(3) 弓形角系.
(4) $\triangle AOD \sim \triangle COB.$	(4) 相似△從兩角相等判別系.
(5) $OA:OC = OD:OB.$	(5) 相似形定義.
(6) $\therefore OA \times OB = OC \times OD.$	(6) 比例基本定理.

§336. **切割線定理** 設從圓外一點作圓的切線與割線,則割線全部與他在圓外一段的積,等於切線的平方.

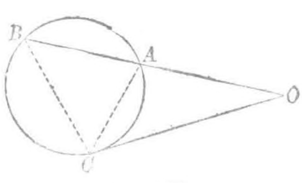

圖 551.

〔已知〕 割線 OB 與圓相交於 A, B, 切線 OC 切圓於 C.

〔求證〕 $OA \times OB = \overline{OC}^2.$

〔解析〕 連結 BC 與 AC,可證明 $\triangle OBC$ 與 $\triangle OCA$ 相似,卽可證明 $OA:OC=OC:OB$.

〔證 明〕

敍 述	理 由
(1) 連結 BC 與 AC.	(1) 直線確定公理.
(2) $\angle O=\angle O$.	(2) 公用.
(3) $\angle OCA=\angle B$.	(3) 弦切角定理,弓形角定理.
(4) $\triangle OCA \sim \triangle OBC$.	(4) 相似△從兩角相等判別系.
(5) $OA:OC=OC:OB$.	(5) 相似形定義.
(6) $\therefore OA\times OB=\overline{OC}^2$.	(6) 比例基本定理.

習題六十六

1. 二弦相交,一弦所分的二線段是 6 寸與 10 寸.設他弦所分的較短線段是5寸,求較長線段.

2. 二弦相交,一弦長8寸,他弦長 12 寸.設第一弦所分的線段是5寸與3寸,求第二弦所分二線段的長.

3. 在半徑 12 寸的圓內,長 18 寸的弦通過距圓心 8 寸的一點,求弦在此點所分二線段的長.

4. 從圓外一點作二割線,一割線全部與圓外一段的長是 14 寸與 6 寸.設他一割線是 12 寸,求他的圓外一段.

5. 依 § 335 的圓,若 $OA=OC$,則 $ABCD$ 是等腰梯形.

6. 從圓外一點作切線與割線.設在割線上所截的弦是4寸,圓外一段是7寸.求切線的長.

7. 從圓外一點作切線與割線,而割線通過圓心.設切線的長是 10 寸,割線在圓外一段的長是4寸,求圓的半徑.

8. 相交二圓,從公弦延長上任一點作二圓的切線 此二切線必相等.

§ 337. 射影 從一點至一直線作垂線,此垂線的足,叫做此點在直線上的射影.從一線段的兩端至一直線各作垂線,此兩垂線足間所夾的一段,叫做此線段在直線上的射影.

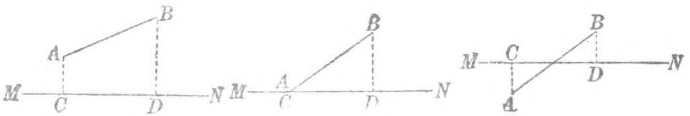

圖 552.

如圖 552, $AC \perp MN$, $BD \perp MN$, C 是 A 在 MN 上的射影, D 是 B 在 MN 上的射影, CD 是 AB 在 MN 上的射影.

§ 338. 股與弦上射影關係定理 直角三角形的一股,是他在弦上射影與弦的比例中項.

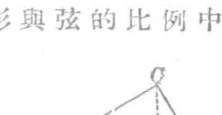

圖 553.

〔已知〕 $\triangle ABC$ 內，$\angle C$ 是直角，AD 與 DB 各是 AC 與 BC 在 AB 上的射影.

〔求證〕 $AB : AC = AC : AD$，及 $AB : BC = BC : DB$.

〔解析〕 (1) 先證明 $\triangle ABC \sim \triangle ACD$，便可證明 $AB : AC = AC : AD$.

(2) 先證明 $\triangle ABC = \triangle BCD$，便可證明 $AB : BC = BC : DB$.

〔證 明〕

敍 述	理 由
(1) $\triangle ABC, \triangle ACD, \triangle BCD$ 都是直角三角形.	(1) 已知.
(2) $\angle A = \angle A$.	(2) 公用.
(3) $\triangle ABC \sim \triangle ACD$.	(3) 相似直角△系.
(4) $\therefore AB : AC = AC : AD$.	(4) 相似形定義.
(5) $\angle B = \angle B$.	(5) 公用.
(6) $\triangle ABC \sim \triangle BCD$.	(6) 相似直角△系.
(7) $\therefore AB : BC = BC : DB$.	(7) 相似形定義.

直角三角形母子相似系 直角三角形從直角頂至弦的垂線，分原形成兩個直角三角形，都與原形相似.

如上圖，$\triangle ACD \sim \triangle ABC \sim \triangle BCD$.

弦與直徑關係系 圓的弦是此弦一端所作直徑與在此直徑上射影的比例中項.

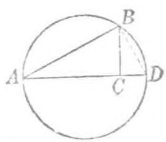

圖 554.

如圖 554，$AD : AB = AB : AC$.

§339. **高與兩股射影關係定理** 直角三角形弦上的高,是兩股在弦上射影的比例中項.

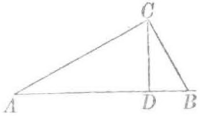

圖 555.

〔已知〕 $\triangle ABC$ 內, $\angle C$ 是直角, CD 是弦 AB 上的高, AD 與 DB 各是 AC 與 BC 在 AB 上的射影.

〔求證〕 $AD:CD=CD:DB.$

〔解析〕 從 $\triangle ACD\sim\triangle CBD$, 便可證明 $AD:CD=CD:DB.$

〔證 明〕

敍 述	理 由
(1) $\triangle ACD\sim\triangle CBD.$	(1) 直角三角形母子相似系.
(2) $AD:CD=CD:DB.$	(2) 相似形定義.

直徑與垂直弦關係系 垂直於直徑的弦的一半,是直徑所分兩線段的比例中項.

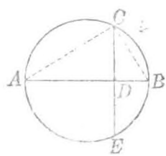

圖 556.

如圖 556, $AD:CD=CD:DB.$

§340. **比例中項作圖題** 求作已知二線段的比例中項.

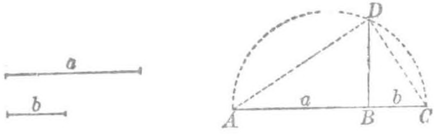

圖 557.

〔已知〕 二線段a與b.

〔求作〕 a與b的比例中項.

〔作法〕 (1) 作$AB=a$, 延長AB至C, 使$BC=b$.

(2) 用AC做直徑畫半圓.

(3) 從B作$BD\perp AC$, 與半圓相交於D.

(4) BD便是所求的比例中項.

〔證明〕

敍述	理由
(1) 連結AD與CD.	(1) 直線確定公理.
(2) $\angle ADC=\angle R$.	(2) 半圓含直角系.
(3) $\therefore AB:BD=BD:BC$. 即 $a:BD=BD:b$.	(3) 高與兩股射影關係定理.

習題六十七

1. 設$AB\parallel MN$, 試證AB在MN上的射影等於AB.

2. 設正三角形的一邊是10寸, 求一邊在他邊上射影的長.

3. §338的圖, 如$AB=25$寸, $AD=16$寸, 求AC, BC.

4. 直角三角形的弦是18寸,一股是15寸.求此股在弦的射影.

5. 任何直角三角形內,兩股平方的比,等於兩股在弦上射影的比.

〔提示〕 在§338圖中,$\overline{AC}^2=AB\times AD$, $\overline{BC}^2=AB\times DB$.

6. 任何直角三角形內,弦與一股的平方比,等於弦與此股在弦上射影的比.

〔提示〕 在§333圖中,$\overline{AB}^2=AB\times AB$, $\overline{AC}^2=AB\times AD$.

7. 直角三角形弦上的高,分弦成二線段,一長12寸,一長27寸.求弦上的高.

8. 直角三角形的弦是26寸,弦上的高是12寸.求弦被高所分兩線段的長.

9. 如圖558,設$AB=16$寸,$CD=4$寸.求直徑.

〔提示〕 $DB=\frac{1}{2}AB$, $CD:DB=DB:DE$, $CE=CD+DE$.

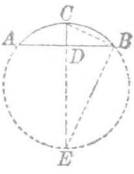

圖 558.

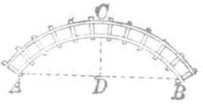

圖 559.

10. 如圖559,測量員要求鐵路曲線ACB的半徑,先量弦AB,及從弧中點至弦中點的距離CD.試證明怎樣方可算出曲線的半徑? 設$AB=100$尺,$CD=3$尺,求曲線的半徑.

11. 如圖 560, 窗闊 AB 是 60 寸,窗上有圓拱形,高 CD 是 20 寸. 求此拱形是用多少長的半徑做成?

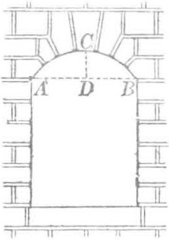

圖 560.

12. 有圓拱形的橋,橋頂高 18 尺,橋長 72 尺,造成此拱形所用的直徑是多少?

13. 作二線段,一長 1 寸,一長 4 寸. 求作此二線段的比例中項. 再量作圖的結果與計算的結果比較.

14. 設 a 與 b 是已知二線段,求作一線段 n, 使 $n=\sqrt{ab}$.

15. 設 a 是已知線段,求作一線段等於 $a\sqrt{2}$.

〔提示〕 $a\sqrt{2}=\sqrt{(2a)a}$.

第四章　畢氏定理及推廣

§341. 畢氏定理 任何直角三角形,弦的平方等於兩股平方的和.

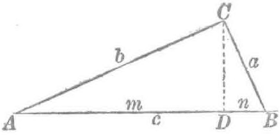

圖　561.

〔已知〕 $\triangle ABC$ 內,$\angle C$ 是直角,兩股是 a 與 b,弦是 c.

〔求證〕 $c^2=a^2+b^2$.

〔解析〕 作斜邊上的高,從股與弦上射影關係定理,便可證明.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 作 $CD\perp AB$, 設 $AD=m$, $DB=n$.	(1) 垂線作圖題.
(2) $c:a=a:n$ 及 $c:b=b:m$.	(2) 股與弦上射影關係定理.
(3) $cn=a^2$, $cm=b^2$.	(3) 比例基本定理.
(4) $cn+cm=a^2+b^2$.	(4) 等量加法定理.

(5) $c(n+m)=a^2+b^2$.	(5) 析因式.
(6) $\therefore c\times c$ 或 $c^2=a^2+b^2$.	(6) 代換公理.

弦與股平方關係系 直角三角形一股的平方,等於弦的平方減去他一股的平方.

〔注意〕 此定理是公元 540 年前,希臘哲學家畢達哥拉氏 (Pythagoras) 所發明,故叫做畢氏定理.我國最古的算法九章算術中有句股一章,依句方加股方等於弦方的理,以御高深廣遠,也就是此定理,而時代卻比畢氏爲早.

習題六十八

1. 直角三角形的兩股是12寸與 9 寸,求弦.

2. 直角三角形的弦是18公分,一股是14公分,求其他一股的長,至公分的十分之一.

3. 每邊 8 寸的正三角形,求他的高.

4. 正三角形的一邊是 a, 求他的高 h.

5. 直角三角形的兩股是 8 與 12,求兩股在弦上射影的長.

6. 正方形的一邊是 s, 求對角線的公式.

7. 等腰三角形的底是 8, 腰是 5, 求高.

8. 設等腰直角三角形的弦是 8 寸,求股的長.

9. 兩圓的半徑是 6 寸與21寸,圓心相距25寸,求外公切線的長.

10. 等腰梯形的腰是24寸,二底是40寸與56寸,求高.

11. 要用怎樣大的方鑽,才可以鑽成直徑2寸的圓孔.

12. 設三角形一邊的平方,等於他二邊平方的和,則必是直角三角形.

〔提示〕 用後二邊做二股畫直角三角形,再證二形相等.

13. 三角形的三邊是3尺,4尺與5尺,試證他是直角三角形.

14. 設四邊形的對角線互相垂直,則二對邊平方的和,等於他二對邊平方的和.

15. 如圖562, P是圓上任一點, x與y是從P至互相垂直二直徑的距離, r是半徑. 試證

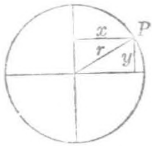

圖 562

$$x^2+y^2=r^2.$$

§342. 畢氏推廣定理一(銳角對邊定理) 凡三角形銳角對邊的平方,等於從其餘兩邊平方的和,減去其中一邊與他邊在此邊上射影的乘積二倍.

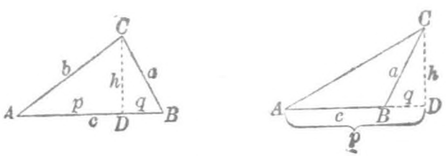

圖 563.

〔已知〕 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 是銳角, a, b, c 順次是 A, B, C 的對邊, p 是 b 在 c 上的射影.

〔求證〕 $$a^2=b^2+c^2-2cp.$$

〔解析〕 作 $CD\perp AB$, 依各邊射影關係及畢氏定理, 用代數式即可證明.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 作 $CD\perp AB$, 設 $CD=h$, q 是 a 在 c 上的射影.	(1) 垂線作圖題.
(2) $q=c-p$ (圖 563 左方). $q=p-c$ (圖 563 右方).	(2) 作圖.
(3) 各方程的兩邊平方,得 $q^2=p^2+c^2-2cp.$	(3) 等量乘法公理.
(4) 兩邊各加 h^2, 得 $h^2+q^2=h^2+p^2+c^2-2cp.$	(4) 等量加法公理.
(5) 但 $h^2+q^2=a^2$, $h^2+p^2=b^2$.	(5) 畢氏定理.
(6) $\therefore\ a^2=b^2+c^2-2cp.$	(6) 代換公理.

§343. 畢氏推廣定理二(鈍角對邊定理) 凡三角形鈍角對邊的平方,等於在其餘二邊的和,加上其中一邊與他邊在此邊上射影的乘積二倍.

〔已知〕 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 是鈍角, a, b, c 順次是 A, B, C 的對邊, p 是 b 在 c 上的射影.

〔求證〕 $$a^2=b^2+c^2+2cp.$$

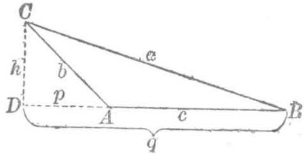

圖 564.

〔解析〕 可仿照上節方法證明.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 作 $CD \perp AB$, 設 $CD=h$, q 是 a 在 c 上的射影.	(1) 垂線作法.
(2) $q=p+c$.	(2) 作圖.
(3) 兩邊各平方,得 $q^2=p^2+c^2+2cp$.	(3) 等量乘法公理.
(4) 兩邊各加 h^2,得 $h^2+q^2=h^2+p^2+c^2+2cp$.	(4) 等量加法公理.
(5) 但 $h^2+q^2=a^2$, $h^2+p^2=b^2$.	(5) 畢氏定理.
(5) $\therefore$ $a^2=b^2+c^2+2cp$.	(6) 代換公理.

習題六十九

1. 設 a, b, c 順次是 $\triangle ABC$ 中 A, B, C 的對邊,試證:

若 $a^2<b^2+c^2$, 則 $\angle A$ 是銳角.

若 $a^2>b^2+c^2$, 則 $\angle A$ 是鈍角.

若 $a^2=b^2+c^2$, 則 $\angle A$ 是直角.

2. 依§342的圖,設 b, c, p 如下,求 a:

(a) $b=8, c=5, p=4$. (b) $b=5, c=6, p=3$.

3. 設三角形的二邊是15寸與25寸.而15寸邊在25寸邊上的射影是9寸,求第三邊的長.

4. 三角形的三邊是13寸,14寸,15寸.求13寸邊在14寸邊上的射影.

5. 設 a, b, c 順次是 $\triangle ABC$ 中 A, B, C 的對邊,長度如下,試決定此三角形是銳角或鈍角? 並求 b 在 c 上的射影.

(a) $a=20, b=15, c=25$. (b) $a=20, b=15, c=7$.

6. 從銳角對邊定理,可得公式:

$$p=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}.$$

若用此公式求得 p 等於0,該怎樣解釋?

7. 設 a, b, c 是三角形的三邊, p 是 b 在 c 上的射影, h_c 是 c 邊上的高,試證

$$h_c=\sqrt{b^2-p^2}=\sqrt{b^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2}.$$

8. 設 $2s=a+b+c$,試從上式證明

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

9. 在 $\triangle abc$ 內,設 $a=15, b=13, c=14$,求各邊上的高 h_a, h_b, h_c.

10. 在 $\triangle abc$ 內,設 $a=17, b=10, c=9$,求各邊上的高 h_a, h_b, h_c.

§344. **三角形中線定理** 凡三角形一邊的平方加此邊上中線的四倍,等於其餘二邊平方和的二倍.

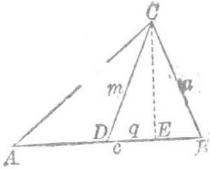

圖 565.

〔已知〕 $\triangle ABC$ 內, a, b, c 順次是 A, B, C 的對邊, m 是 c 上的中線.

〔求證〕 $$2a^2+2b^2=c^2+4m^2.$$

〔解析〕 作 $CE\perp AB$, 根據畢氏推廣定理,用代數式便可證明.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 作 $CE\perp AB$, 假設 E 在 A 與 D 中間,設 $DE=q$.	(1) 垂線作圖題.
(2) $a^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+m^2+2\left(\frac{c}{2}\right)q$.	(2) 鈍角對邊定理
(3) $b^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+m^2-2\left(\frac{c}{2}\right)q$.	(3) 銳角對邊定理.
(4) $a^2+b^2=2\left(\frac{c}{2}\right)^2+2m^2$.	(4) 等量加法公理.
(5) $\therefore\ 2a^2+2b^2=c^2+4m^2$.	(5) 等量乘法公理.

三角形中線長系

$$m=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

§345　**三角形分角線與邊關係定理**　凡三角形二邊的積,等於夾角平分線的平方,加第三邊上所分二線段的積.

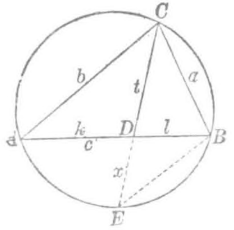

圖　566.

〔已知〕　$\triangle ABC$ 內, a, b, c 順次是 A, B, C 的對邊,分角線 t 將 c 分成二線段 k, l.

〔求證〕　$$ab=t^2+kl.$$

〔解析〕　作外接圓,延長分角線 CD, 與圓相交於 E, 連結 EB. 先證明 $\triangle CAB\sim\triangle CEB$, 再用相交二弦定理便可證明.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1)　作 $\triangle ABC$ 的外接圓,延長 CD 與圓相交於 E, 設 $DE=x$, 連結 EB.	(1)　三角形外接圓系.
(2)　$\angle ACD=\angle ECB$.	(2)　已知.

(3) $\angle A = \angle E$.	(3) 弓形角系.
(4) $\triangle CAB = \triangle CEB$.	(4) 相似△從兩角相等判別系.
(5) $b : t + x = t : a$.	(5) 相似形定義.
(6) $ab = t(t+x) = t^2 + tx$.	(6) 比例基本定理.
(7) 但 $tx = kl$.	(7) 相交二弦定理.
(8) $ab = t^2 + kl$.	(8) 代換公理.

三角形分角線長系.

$$t^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2},\quad t = \frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)},\ 但\ 2s = a+b+c.$$

〔提示〕根據三角形內角平分線定理,

$$k = \frac{bc}{a+b},\qquad l = \frac{ac}{a+b}.$$

§346　**三角形外接圓直徑與高乘積定理**　凡三角形二邊的積,等於第三邊上的高,乘外接圓的直徑.

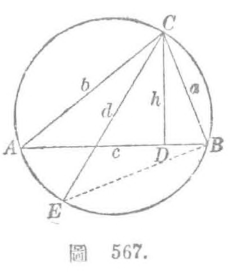

圖　567.

〔已知〕 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三邊, d 是外接圓的直徑, h 是 c 上的高.

〔求證〕　$ab = hd$.

〔解析〕 連結 EB, 則 $\angle CBE$ 是直角,又 $\angle CDA$ 也是直角,先證明 $\triangle CDA \sim \triangle CBE$, 再證明 $b:d=h:a$.

〔證 明〕

敍 述	理 由
(1) 連結 EB.	(1) 直線確定公理
(2) 因 CE 是直徑, 故 $\angle CBE=\angle R$.	(2) 已知, 半圓含直角系.
(3) 因 $CD \perp AB$, 故 $\angle CDA=\angle R$.	(3) 已知, 直角定義.
(4) $\therefore$ $\angle CBE=\angle CDA$.	(4) 直角公理.
(5) 又 $\angle A=\angle E$.	(5) 弓形角系.
(6) $\triangle CDA \sim \triangle CBE$.	(6) 相似△從兩角相等判別系.
(7) $b:d=h:a$.	(7) 相似形定義.
(8) $\therefore$ $ab=hd$.	(8) 比例基本定理.

三角形外接圓直徑系

$$d=\frac{ab}{h}.$$

習題七十

1. 三角形的三邊是 7 寸, 4 寸與 9 寸, 求 9 寸邊上的中線.

2. 在 $\triangle abc$ 內, $a=8$, $b=11$, c 上的中線 $m_c=8\frac{1}{2}$, 求 c.

3. 三角形的三邊是 18 寸, 9 寸與 21 寸, 求 21 寸一

邊對角平分線的長,及所分二線段的長.

4. 在$\triangle abc$內,$a=6$, $b=10$ c上的高$h_c=4$,求外接圓直徑.

5. $\triangle ABC$內接於半徑5寸的圓,設$AB=4$寸,$AC=5$寸,求BC上的高.

6. 在$\triangle abc$內,$a=9$, $b=12$,外接圓直徑是15.求c上的高及c.

7. 設a, b, c是三角形的三邊,d是外接圓直徑,$2s=a+b+c$,求證

$$d=\frac{abc}{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

〔提示〕用習題六十九的8題代入三角形外接圓直徑系公式.

8. 平行四邊形四邊平方的和,等於對角線平方的和.

9. 在任何四邊形中,四邊平方的和,等於對角線平方的和,加對角線中點連線平方的四倍.

〔提示〕如圖568, ED, EB, EF各是$\triangle ACD$, $\triangle ACB$, $\triangle BDE$中的中線,可各用三角形中線定理證明.

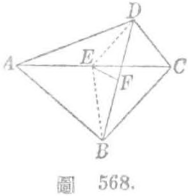

圖 568.

10. 從直角三角形弦的兩端至兩股各作中線,則兩中線平方和的四倍,等於弦的平方的五倍.

〔提示〕 即如圖569證明$4(\overline{AE}^2+\overline{BD}^2)=5\overline{AB}^2$.

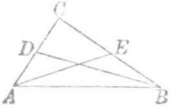

圖 569.

第五章　直線形的面積

§347. **等積形**　對應角與對應邊都相等的二多角形,叫做全等形.對應角相等對應邊成比例的二多角形叫做相似形,面積相等的二多角形叫做等積形.故全等形必是等積形並且是相似形,但等積形卻未必是全等形,也未必是相似形.

例如:　$\triangle ABC$ 的面積是30方尺.$\square MNOP$ 的面積也是30方尺,則 $\triangle ABC$ 與 $\square MNOP$ 是等積形,即

$$\triangle ABC = \square MNOP.$$

§348. **等高二矩形面積比定理**　等高二矩形面積的比,等於二形底的比.

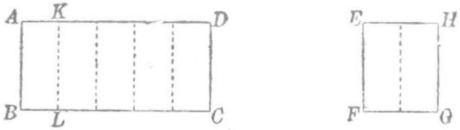

圖　570.

〔已知〕　等高二矩形 $ABCD$ 與 $EFGH$ 的底是 BC 與 FG

〔求證〕　$\square ABCD : \square EFGH = BC : FG.$

〔解析〕 取二底的適宜公度量,將二底各分成 m, n 等分,從各分點各作底的垂線,則二形也分成 m, n 個相等小矩形,從此便得證明.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 取 BC 與 FG 的公度量 BL, 得 $BC=m(BL)$, $FG=n(BL)$ (圖中 $m=5, n=2$).	(1) 公度量定義.
(2) $BC:FG=m:n$.	(2) 幾何圖形的比.
(3) 在 BC 與 FG 的各分點作垂線.	(3) 垂線作圖題.
(4) 二矩形各分成 m, n 個小矩形,各等於▭$ABLK$.	(4) 平行線間夾等長平行線段系,□全等定理.
(5) ▭$ABCD$: ▭$EFGH$ $=m:n$.	(5) 幾何圖形的比.
(6) $\therefore$ ▭$ABCD$: ▭$EFGH$ $=BC:EF$.	(6) 代換公理.

等底二矩形面積比系　等底二矩形面積的比,等於二形高的比.

§349　**二矩形面積比定理**　二矩形面積的比,等於底與高乘積的比.

〔已知〕 矩形 A 與 A' 的高是 a 與 a', 底是 b 與 b'.

〔求證〕　　▭A : ▭$A'=ab:a'b'$.

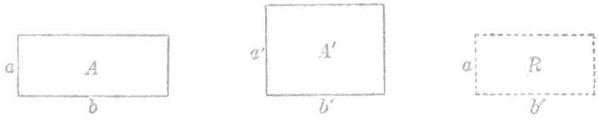

圖 571.

〔解析〕 作▭R與▭A等高,與▭A'等底. 從▭A：▭R $=b：b'$, 及▭R：▭$A'=a：a'$, 便可證明.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 作▭R, 與▭A等高, 與▭A'等底.	(1) 等線段及垂線作圖題.
(2) ▭A：▭$R=b：b'$.	(2) 等高二矩形面積比定理.
(3) ▭R：▭$A'=a：a'$.	(3) 等底二矩形面積比系.
(4) ▭A×▭R：▭R×▭A' $=ab：a'b'$.	(4) 積比定理.
∴ ▭A：▭$A'=ab：a'b'$.	

§350. **矩形面積定理** 矩形的面積,等於底乘高(參照§108).

圖 572.

〔已知〕 矩形 A 的高 a 及底 b.

〔求證〕 ▭$A=ab$.

〔解析〕 求矩形A與面積單位的比,便可證明.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 設▭U是面積單位,即高與底都是1的矩形.	(1) 面積定義.
(2) ▭A:▭$U=ab:1\times1$.	(2) 二矩形面積比定理.
(3) 但▭$U=1$.	(3) 面積定義.
(4) ∴ ▭$A=ab$.	(4) 比例基本定理,代換公理.

正方形面積系　正方形的面積,等於一邊的平方(參照§109).

習題七十一

1. 矩形的底是2.5寸,高是12寸,求面積.

2. 正方形的一邊$6\frac{1}{2}$寸,求面積.

3. 一塊矩形地,長120尺.分做A, B二塊,A闊50尺,B闊60尺,求A, B面積的比.

4. 正方形的面積160方寸,求一邊的長至百分之一寸.

5. 有地二塊,一塊是長80丈闊40丈的矩形,一塊是每邊60丈的正方形.求此兩地面積的比.

6. 矩形的闊50寸,長200寸,求等積正方形的一邊,

並求兩形周圍的比.

7. 長 8 尺的矩形板,鋸做二塊,一長 3.5 尺,一長 4.5 尺,求兩塊面積的比.

8. 有矩形田,周圍 220 尺,面積 2400 方尺,求長與闊.

§351. 平行四邊形面積定理 平行四邊形的面積,等於底乘高(參看 §111).

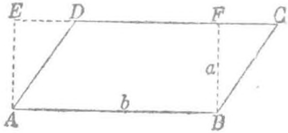

圖 573.

〔已知〕 平行四邊形 $ABCD$ 的高 a 及底 b.

〔求證〕 $\square ABCD = ab$.

〔解析〕 作 AE 垂直於 DC 的延線,先證明 $\triangle EAD = \triangle FBC$, 再證明 $\square ABCD = \square ABFE$ 便得.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 作 $AE \perp DC$ 的延線.	(1) 垂線作圖題.
(2) $AE \parallel BF$.	(2) 垂線平行系.
(3) $ABCD$ 是 $\square$,高是 a,底是 b.	(3) 矩形定義.
(4) $AE = BF$.	(4) 平行線間夾等長平行線段系.

(5) $AD=BC$.	(5) ▱對邊對角性質定理.
(6) $\angle E=\angle BFC=\angle R$.	(6) 作法,直角公理.
(7) $\triangle EAD=\triangle FBC$.	(7) 直角△全等定理二.
(8) 四邊形$ABCE-\triangle EAD$ =四邊形$ABCE-\triangle FBC$.	(8) 等量減法定理.
(9) $\therefore$ ▱$ABCD$=▭$ABFE$.	(9) 代換公理.
(10) 但 ▭$ABFE=ab$.	(10) 矩形面積定理.
(11) $\therefore$ ▱$ABCD=ab$.	(11) 代換公理.

等積平行四邊形系 等底等高的二平行四邊形等積.

二平行四邊形面積比系 任何二平行四邊形面積的比,等於底與高乘積的比.

等底二平行四邊形面積比系 等底二平行四邊形面積的比,等於二形高的比.

等高二平行四邊形面積比系 等高二平行四邊形面積的比,等於二形底的比.

§352. 三角形面積定理 三角形的面積,等於高與底乘積的一半(參看§112).

〔已知〕 三角形ABC的高a及底b.

〔求證〕 $\triangle ABC=\frac{1}{2}ab$.

〔解析〕 作$BD \parallel AC$, $CD \parallel AB$,成▱$ABDC$,證明

$$\triangle ABC=\tfrac{1}{2}\square ABDC.$$

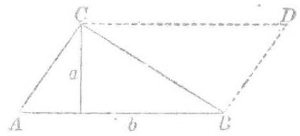

圖 574.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 作 $BD \parallel AC, CD \parallel AB$.	(1) 平行線作圖題.
(2) $ABDC$ 是 $\square$.	(2) $\square$ 定義.
(3) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\square ABDC$.	(3) $\square$ 對角線系.
(4) 但 $\square ABDC=ab$.	(4) $\square$ 面積定理
(5) $\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}ab$.	(5) 代換公理.

等積三角形系　等底等高的二三角形等積.

二三角形面積比系　任何二三角形面積的比,等於底與高乘積的比.

等高三角形面積比系　等高二三角形面積的比,等於二形底的比.

等底二三角形面積比系　等底二三角形面積的比,等於二形高的比.

三角形與平行四邊形面積關係系　三角形面積,等於等底等高平行四邊形面積的一半.

§353. 梯形面積定理　梯形的面積,等於高與兩底和乘積的一半(參看§113).

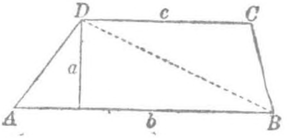

圖 575.

〔已知〕 梯形$ABCD$的高a及兩底b, c.

〔求證〕 梯形$ABCD=\frac{1}{2}a(b+c)$.

〔解析〕 作一條對角線,將梯形分成二三角形,求此二三角形面積的和,便可證明.

〔證 明〕

敍 述	理 由
(1) 作對角線DB.	(1) 直線確定公理.
(2) $\triangle ABD$, $\triangle DBC$的高都等於a.	(2) 平行線距離系.
(3) $\triangle ABD=\frac{1}{2}ab$, $\triangle DBC=\frac{1}{2}ac$.	(3) 三角形面積定理.
(4) 梯形$ABCD=\triangle ABD+\triangle DBC$.	(4) 全量公理.
(5) ∴ 梯形$ABCD=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ac=\frac{1}{2}a(b+c)$.	(5) 代換公理.

§ **354.** 畢氏定理別證 前§341講過的畢氏定理,也可以用面積定理證明,方法如下:

〔已知〕 在直角三角形ABC內,$AHKB$是弦上的正方形,$ACFG$與$CBDE$是兩股上的正方形.

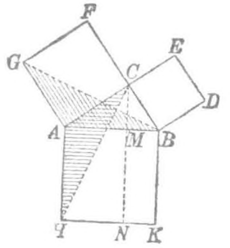

圖 576.

〔求證〕　$\square AHKB=\square ACFG+\square CBDE$.

〔解析〕 作 $CN \parallel AH$, 連結 GB, HC, 從 $\triangle AHC\cong\triangle ABG$, 證明 ▭$AHNM$=▭$ACFG$;同法,再證明 ▭$MNKB$=▭$CBDE$, 用等量加法公理便得.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) $AHKB$, $ACFG$ 與 $CBDE$ 都是正方形, $\angle ACB$ 是直角.	(1) 已知.
(2) 連結 GB, HC.	(2) 直線確定公理.
(3) 作 $CN \parallel AH$, 成 ▭$AHNM$ 與 ▭$MNKB$.	(3) 平行線公垂線系,矩形定義.
(4) $\angle HAB=\angle CAG=\angle R$.	(4) 直角公理.
(5) $\angle HAC=\angle BAG$.	(5) 等量加法公理
(6) $AC=AG$, $AH=AB$.	(6) 正方形定義.
(7) $\therefore\ \triangle AHC\cong\triangle ABG$.	(7) s. a. s.=s. a. s.
(8) $\angle FCA=\angle R$.	(8) 正方形定義.

(9) $\therefore\ \angle FCB=2\angle R$, FCB 是一直線.	(9) 平角定義.
(10) $\triangle AHC=\frac{1}{2}$▭$AHNM$, $\triangle ABG=\frac{1}{2}\square ACFG$.	(10) △與▱面積關係系.
(11) $\therefore$ ▭$AHNM=\square ACFG$.	(11) 等量乘法公理.
(12) 同法, ▭$NMKB=\square CBDE$.	(12) 同(4)至(11).
(13) $\therefore\ \square AHKB=\square ACFG+\square CBDE$.	(13) 代換公理.

習題七十二

1. 平行四邊形的底12寸,高7寸,求面積.

2. 平行四邊形的面積150方尺,底$8\frac{1}{3}$尺,求高.

3. 三角形的田,高144尺,底64尺,求面積.

4. 三角形的面積112方尺,高14尺,求底.

5. 梯形的兩底是19寸與25寸,高15寸,求面積.

6. 梯形的面積1701方尺,高42尺,一底36尺,求其餘一底.

7. 試證菱形面積定理: 菱形的面積,等於二對角線乘積的一半.

8. 菱形的二對角線是25寸與28寸,求面積.

9. 設 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三邊, s 是半周,試證:

$$\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

〔提示〕 用習題六十九第(8)題的結果.

10. 三角形的三邊是6寸,8寸與12寸,求面積.

11. 一塊矩形地,闊42尺,長56尺;用闊12寸長14寸的長方磚鋪滿,共要幾塊?

12. 一張地圖,是用1寸當60里畫的.現在圖上有一塊矩形地,長3寸闊5寸;問實在的面積是多少?

13. 求作一平行四邊形,使面積等於已知平行四邊形的二倍.

14. 求作一矩形,使面積等於已知平行四邊形的一半.

15. 平行四邊形的二對角線,分原形成四個等積三角形.

16. 順次連結任何四邊形各邊中點所成的平行四邊形,等於原形的一半.

17. 通過平行四邊形對角線交點的任何直線,必平分原形.

18. 梯形的面積,等於中線與高乘積的一半.

19. 同底在同側的等積二三角形,連結頂點的直線,必與底平行.

20. 二三角形有二邊相等,夾角互為補角,則此二三角形必等積.

〔提示〕　將二三角形合成補鄰角,如圖577.

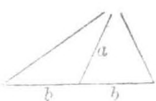

圖 577.

21. 如圖578,試證:

$\square AFED+\square FHGE+\square HMKG+\square MBCK=\square ABCD.$

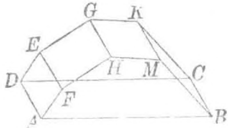

圖 578.

22. 如圖579,設M是梯形$ABCD$邊BC的中點,過M作$EF \parallel DA$,與AB相交於F,與DC的延線相交於E.試證梯形$ABCD=\square AFED$.

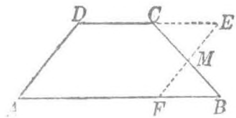

圖 579.

§355. **一角相等的三角形面積比定理** 設二三角形有一角相等,則面積的比,等於夾等角兩邊乘積的比.

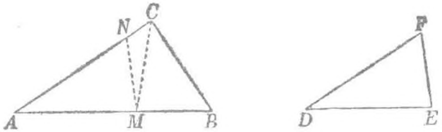

圖 580.

〔已知〕 $\triangle ABC$與$\triangle DEF$中,$\angle A=\angle D$.

〔求證〕 $\triangle ABC:\triangle DEF=AB\times AC:DE\times DF$.

〔解析〕 將二三角形依等角疊合,可得等高二三角形的面積比二個,從此便可證明.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 將 $\triangle DEF$ 疊在 $\triangle ABC$ 上,使 $\angle A$ 與 $\angle D$ 重合,如 $\triangle AMN$ 的位置.	(1) 移形公理. 已知 $\angle A=\angle D$.
(2) 連結 CM.	(2) 直線確定公理.
(3) $\triangle ABC:\triangle AMC=AB:AM$, $\triangle AMC:\triangle AMN=AC:AN$.	(3) 等高二△面積比系.
(4) $\triangle ABC\times\triangle AMC:\triangle AMC\times\triangle AMN=AB\times AC:AM\times AN$. 或 $\triangle ABC:\triangle AMN=AB\times AC:AM\times AN$.	(4) 積比定理
(5) $\therefore\ \triangle ABC:\triangle DEF=AB\times AC:DE\times DF$.	(5) 代換公理.

§356. 相似三角形面積比定理 相似三角形面積的比,等於任何對應邊平方的比.

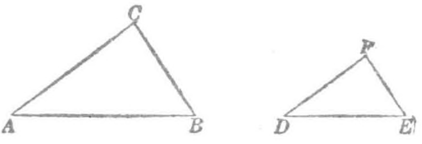

圖 581.

〔已知〕 $\triangle ABC\sim\triangle DEF$.

〔求證〕 $\triangle ABC:\triangle DEF=\overline{AB}^2:\overline{DE}^2$.

〔解析〕 因相似三角形對應角相等,對應邊成比例,故可根據上節定理證明.

〔證明〕

敍述	理由
(1) $\angle A=\angle D$.	(1) 相似形定義.
(2) $\triangle ABC:\triangle DEF$ $=AB\times AC:DE\times DF$, 或 $\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{AB\times AC}{DE\times DF}=\frac{AB}{DE}\times\frac{AC}{DF}$.	(2) 一角相等的△面積比定理.
(3) 但 $AB:DE=AC:DF$, 或 $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$.	(3) 相似形定義.
(4) $\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{AB}{DE}\times\frac{AB}{DE}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{DE}^2}$, $\therefore\ \triangle ABC:\triangle DEF=\overline{AB}^2:\overline{DE}^2$.	(4) 代換公理.

§ 357. **相似多角形面積比定理** 相似多角形面積的比,等於任何對應邊平方的比.

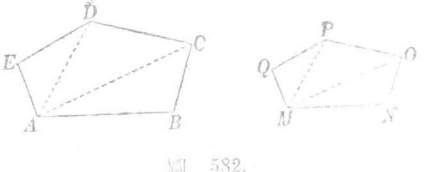

圖 582.

〔已知〕 多角形 $ABCD\cdots\cdots\sim$ 多角形 $MNOP\cdots\cdots$.

〔求證〕 多角形 $ABCD\cdots\cdots:$ 多角形 $MNOP\cdots\cdots$

$$=\overline{AB}^2:\overline{MN}^2$$

〔解析〕 各作對角線,將二多角形分成同數的相似三角形,根據相似三角形面積比定理及和比定理,便可證明.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 從 A 及 M 各作可能的對角線.	(1) 直線確定公理.
(2) $\triangle ABC \sim \triangle MNO$, $\triangle ACD \sim \triangle MOP$, ……………………….	(2) 相似形性質定理.
(3) $\triangle ABC:\triangle MNO=\overline{AB}^2:\overline{MN}^2$, $\triangle ACD:\triangle MOP=\overline{CD}^2:\overline{OP}^2$, ………………………………….	(3) 相似△面積比定理.
(4) 但 $AB:MN=CD:OP=\cdots$.	(4) 相似形定義.
(5) $\therefore \overline{AB}^2:\overline{MN}^2=\overline{CD}^2:\overline{OP}^2=\cdots$	(5) 冪根比定理.
(6) $\triangle ABC:\triangle MNO$ $=\triangle ACD:\triangle MOP=\cdots$.	(6) 代換公理.
(7) $\triangle ABC+\triangle ACD+\cdots:\triangle MNO$ $+MOP+\cdots=\triangle ABC:\triangle MNO$.	(7) 和比定理.
(8) 多角形 $ABCD\cdots$: 多角形 $MNOP\cdots=\triangle ABC:\triangle MNO$.	(8) 全量公理,代換公理.
(9) 多角形 $ABCD\cdots$: 多角形 $MNOP\cdots=\overline{AB}^2:\overline{MN}^2$.	(9) 代換公理.

相似形面積比系一 相似形面積的比,等於對應對角線平方的比.

相似形面積比系二 相似形面積的比,等於周界平方的比.

習題七十三

1. 設$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$等積,$\angle A=\angle A'$, $AB=2$寸,$A'B'=3$寸,$A'C'=4$寸,求AC.

2. 二三角形有一角相等,夾等角的邊,順次是4寸,9寸,及12寸,5寸.求面積的比.

3. 相似三角形的對應邊是8寸與12寸.設小三角形的面積是48方寸,求大三角形的面積.

4. $\triangle ABC\sim\triangle DEF$, AB與DE是對應邊,設$AB=2DE$,求面積的比.又設$AB=3DE$,再比較面積.

5. 二相似多角形的對應邊是5寸與8寸,小形的面積是125方寸,求大形的面積.

6. 一個四邊形的各邊是4寸,6寸,10寸與12寸,另有一個相似四邊形,面積大16倍,求他的各邊.

7. 設二三角形有一角互爲補角,則面積的比,等於夾此角二邊乘積的比.

8. 設二平行四邊形有一角相等,則面積的比,等於夾等角二邊乘積的比.

9. 試證相似三角形面積的比,等於對應高平方的比.

10. 已知四邊形 $ABCD$, 求作一相似形,使面積等於 $ABCD$ 的四分之一.

11. 三角形一角的平分線,將原形分成二三角形,求此二三角形面積的比.

12. 試證相似三角形面積的比,等於對應分角線平方的比. 又等於對應中線平方的比.

§358. 二正方形和的等積正方形作圖題 求作一正方形,等於已知二正方形的和.

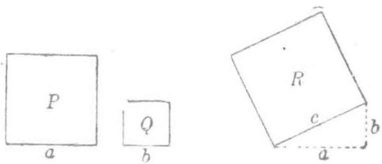

圖 583.

〔已知〕 二正方形 P 與 Q, 及邊 a 與 b.

〔求作〕 一正方形等於 $\square P+\square Q$.

〔作法〕 (1) 用 a, b 做二股作直角三角形,得弦 c.

(2) 用 c 做一邊作正方形 R.

(3) 此 R 便是所求的正方形.

〔證　明〕

敘　述	理　由
(1) $\square P=a^2$, $\square Q=b^2$.	(1) 已知.
(2) $c^2=a^2+b^2$.	(2) 作法,畢氏定理.
(3) $c^2=\square R$.	(3) 作法.
(4) $\therefore\ \square R=\square P+\square Q$.	(4) 代換公理.

§359. 二相似多角形和的等積多角形作圖題 求作一多角形與已知二相似多角形相似,且面積等於已知二形面積的和.

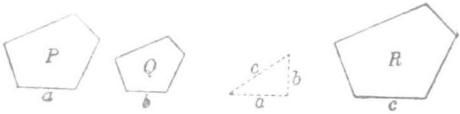

圖 584.

〔已知〕 二相似多角形 P 與 Q, 對應邊 a 與 b.

〔求作〕 一多角形與 P, Q 相似,且等於 $P+Q$.

〔作法〕 (1) 用 a, b 做二股作直角三角形,得弦 c.

(2) 用 c 做 a 的對應邊,作多角形 R, 與 P 或 Q 相似.

(3) 此 R 便是所求的多角形.

〔證明〕

敍述	理由
(1) 多角形 $R\sim$ 多角形 P $\sim$ 多角形 Q.	(1) 作法.
(2) $c^2=a^2+b^2$.	(2) 畢氏定理.
(3) 多角形 P : 多角形 R $=a^2:c^2$, 多角形 Q : 多角形 R $=b^2:c^2$. 或 $\dfrac{\text{多角形 } P}{\text{多角形 } R}=\dfrac{a^2}{c^2}$, $\dfrac{\text{多角形 } Q}{\text{多角形 } R}=\dfrac{b^2}{c^2}$.	(3) 相似多角形面積比定理.

(4) $\dfrac{\text{多角形}P+\text{多角形}Q}{\text{多角形}R}$ $=\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=\dfrac{c^2}{c^2}=1.$	(4) 等量加法公理, 代換公理.
(5) 多角形P+多角形Q =多角形R.	(5) 等量乘法公理.

§360. **多角形變成等積三角形作圖題** 求作一三角形,與已知多角形等積.

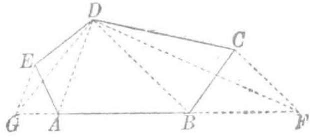

圖 585.

〔已知〕 多角形$ABCDE$.

〔求作〕 一三角形等於$ABCDE$.

〔作法〕 (1) 作對角線DB.

(2) 作$CF \parallel DB$,交AB的延線於F.

(3) 連結DF,則多角形$AFDE$=多角形$ABCDE$,而較少一邊.

(4) 作多角形$AFDE$的對角線AD.

(5) 作$EG \parallel DA$,交AB的延線於G.

(6) 連結DG,則$\triangle GDF$=多角形$AFDE$,此GDF便是所求的三角形.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) $CF \parallel DB$.	(1) 作法.
(2) $\triangle DBF$ 與 $\triangle DBC$ 的高相等.	(2) 平行線距離系.
(3) $DB=DB$.	(3) 公用.
(4) $\triangle DBF=\triangle DBC$.	(4) 等積三角形系.
(5) ∴多角形 $ABCDE$=四邊形 $AFDE$.	(5) 代換公理.
(6) 同法, $\triangle ADG=\triangle ADE$.	(6) 同 (1) 至 (4).
(7) ∴ $\triangle GFD$ =四邊形 $AFDE$ =多角形 $ABCDE$.	(7) 代換公理.

§ 361. **平行四邊形變成等積正方形作圖題** 求作一正方形,與已知平行四邊形等積.

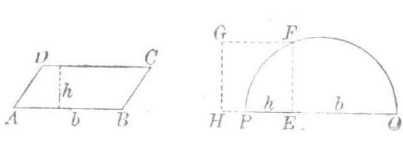

圖 586.

〔已知〕 $\square ABCD$, 底是 b, 高是 h.

〔求作〕 一正方形等於 $\square ABCD$.

〔作法〕 (1) 作線段 $PE=h$, 從 E 延長至 Q, 使 $EQ=b$.

(2) 用 PQ 做直徑作半圓.

(3) 作 $EF \perp PQ$, 交半圓於 F.

(4) 用 EF 做一邊,作 $\square EFGH$, 便是所求的正方形.

〔證 明〕

敍 述	理 由
(1) $PE : EF = EF : EQ$.	(1) 作法,比例中項作圖題.
(2) $\overline{EF}^2 = PE \times EQ$.	(2) 比例基本定理.
(3) 但 $\square ABCD = hb = PE \times EQ$, $\square EFGH = \overline{EF}^2$.	(3) ▭及□定義.
(4) $\therefore \square EFGH = \square ABCD$.	(4) 代換公理.

習題七十四

1. 求作一正方形,等於已知三正方形的和.

2. 求作一正方形,等於已知二正方形的差.

3. 求作一正方形,等於已知正方形的二倍.

4. 求作一正方形,等於已知正方形的一半.

5. 求作一多角形,與已知三個相似多角形相似,且等於三形的和.

6. 求作一等腰三角形,與已知三角形等積,而公用底邊.

7. 求作一正方形,與已知矩形等積.

8. 求作一正方形,與已知三角形等積.

9. 試作 $\sqrt{2}$ 寸, $\sqrt{3}$ 寸至 $\sqrt{5}$ 寸的各線段.

10. 求作一三角形,與每邊 2 寸的正方形等積.

11. 求作一直角三角形,使有已知高而與已知平行四邊形等積.

12. 求作一平行四邊形,與已知正方形等積,而底與高的和等於定長線段.

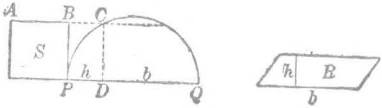

圖 587.

〔提示〕 延長正方形S的一邊至Q,使PQ等於定長線段.在PQ上作半圓,延長AB交半圓於C,作$CD \perp PQ$.用PD做高,DQ做底,作平行四邊形R,便合所求(圖587).

13. 求作一矩形,與已知正方形等積,而底與高的差,等於定長線段.

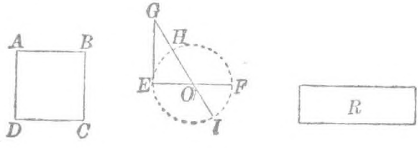

圖 588.

〔提示〕 $ABCD$是正方形,EF是定長線段,切線$EG=AB$,割線GI過圓心O.用GI做底,GH做高,作矩形R,使合所求(圖588).

14. 在已知底上,求作一三角形,等於已知三角形.

〔提示〕 設已知三角形的底是 a, 高是 h, 已知底是 b. 先求 b, a 與 h 的第四比例項 k. 用 b 做底, h 做高,作三角形,便合所求.

15. 在已知底上,求作一三角形,等於已知平行四邊形.

〔提示〕 設已知平行四邊形的底是 a, 高是 h, 已知底是 b. 先求 $b, 2a$ 與 h 的第四比例項 k. 用 b 做底, k 做高,作三角形,便合所求.

16. 求作一等腰三角形,使頂角及面積都與已知三角形相等.

〔提示〕 設 $\triangle ABC$ 是已知三角形, $\triangle DCE$ 是所求三角形,則 $\overline{CD}^2=CA\times CD$ (圖 589).

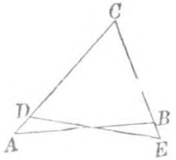

圖 589.

17. 求作已知平行四邊形一邊的垂線,平分原形.

18. 過定點求作一直線,平分已知平行四邊形.

19. 過三角形的任一頂點,求作一直線,平分原形.

20. 過三角形一邊上的定點,求作一直線平分原形.

〔解析〕 設 P 是定點, PE 是所求的直線, D 是 AC 的中點,因 BD 平分三角形.故 $\triangle PBE=\triangle PBD$, 而 $DE\parallel PB$. 如此可在 BC 上求得 E (圖 590).

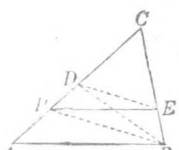

圖 590.

21. 過三角形一邊上的定點,求作二直線,三等分原形.

22. 求作一直線,與已知三角形的一邊平行,平分此三角形.

〔解析〕 如圖591 設EF是所求的直線,DB是中線,則$\triangle DCB$必等於$\triangle ECF$. 故$CE\times CF=CD\times CB$, 即$CD:CE=CF:CB$, 又$CE:CA=CF:CB$, 故$CD:CE=CE:CA$, 即CE是CD與CA的比例中項,如此可求得E.

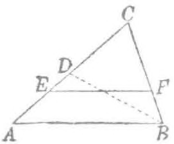

圖 591.

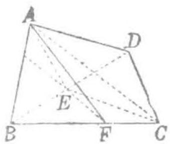

圖 592.

23. 過任何四邊形的一頂點,求作一直線,平分此形.

〔解析〕 如圖592, 設AF是所求的直線,E是對角線BD的中點,則AE與CE分原形成相等二部分.故用AC做底,作三角形等於$\triangle AEC$, 使頂點在此四邊形的一邊上,如此可求得F.

24. 求作二直線過已知平行四邊形的一頂點,三等分此形.

第六章　正多角形與圓的度量

§ 362. **正多角形外接圓定理**　任何正多角形,都可畫一外接圓.

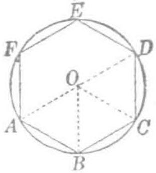

圖　593.

〔已知〕 $ABCD\cdots\cdots$是任何正多角形.

〔求證〕 可畫一圓外接於$ABCD\cdots\cdots$.

〔解析〕 過任何三頂點作一圓,再證明此圓也經過其他各頂點.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 過A,B,C作圓,圓心是O.	(1) 圓過三點作圖題.
(2) 連結OA,OB,OC,OD.	(2) 直線確定公理.
(3) $OB=OC$.	(3) 等半徑定理.
(4) $\therefore \angle OBC=\angle OCB$.	(4) 等腰△性質定理.
(5) $\angle ABC=\angle BCD$, $AB=CD$.	(5) 正多角形定義.

(6) ∴ $\angle ABO=\angle OCD$.	(6) 等量減法公理.
(7) ∴ $\triangle AOB=\triangle COD$.	(7) $s.a.s.=s.a.s.$
(8) $OA=OD$, OD是半徑.	(8) 全等形對應邊.
(9) ∴此圓也經過D.	(9) 半徑定義.
(10) 同法,此圓也經過E等.	(10) 同(3)至(9).
(11) 故圓O是$ABCD\cdots\cdots$的外接圓.	(11) 外接圓定義.

正多角形中心角系 正n邊形的中心角等於$\frac{360}{n}$度.

〔注意〕 外接圓的中心,叫做正多角形的中心,外接圓的半徑,叫做正多角形的半徑.從一邊兩端所作兩半徑的夾角,叫做正多角形的中心角.

§363. **正多角形內切圓定理** 任何正多角形,都可畫一切內圓.

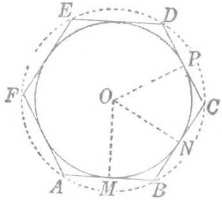

圖 594.

〔已知〕 $ABCD\cdots\cdots$是任何正多角形.

〔求證〕 可畫一圓內切於$ABCD\cdots\cdots$.

〔解析〕 作一外接圓O.作$OM\perp AB$, $ON\perp BC$, $OP\perp CD$,

等等,證明 $OM=ON=OP=\cdots\cdots$. 用 O 做圓心, OM 做半徑畫圓,證明 $AB, BC, CD,\cdots\cdots$ 都是此圓的切線.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 作 $ABCD\cdots\cdots$ 的外接圓 O.	(1) 正多角形外接圓定理.
(2) $AB=BC=CD=\cdots\cdots$.	(2) 正多角形定義.
(3) 作 $OM\perp AB, ON\perp BC, OP\perp CD,\cdots\cdots$.	(3) 垂線作圖題
(4) $OM=ON=OP=\cdots\cdots$.	(4) 弦距圓心等遠定理.
(5) 用 O 做圓心, OM 做半徑畫圓,必過 M,N,P,等等.	(5) 半徑定義.
(6) $AB, BC, CD,\cdots\cdots$ 都切於此圓.	(6) 切線定義.
(7) 故此圓是 $ABCD\cdots\cdots$ 的內切圓.	(7) 內切圓定義.

§ 364. **圓內接正多角形定理**　設將一圓分成許多等弧,則諸弧的弦組成一內接正多角形.

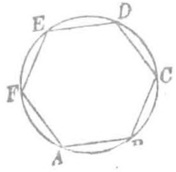

圖 595.

〔已知〕 弧 $AB=$ 弧 $BC=$ 弧 $CD=\cdots\cdots$.

〔求證〕 $ABCD\cdots\cdots$ 是一內接正多角形.

〔解析〕 從等弧可證明各邊相等,又證明各角相等.

〔證 明〕

敍 述	理 由
(1) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\cdots\cdots$.	(1) 已知.
(2) $AB=BC=CD=\cdots\cdots$.	(2) 等弧對等弦定理.
(3) 弧 $BCD\cdots\cdots F=$ 弧 $CDE\cdots\cdots A=\cdots\cdots$.	(3) 等量加法公理.
(4) $\angle A=\angle B=\cdots\cdots$.	(4) 圓周角定理.
(5) 故 $ABCD\cdots\cdots$ 是內接正多角形.	(5) 正多角形定義.

圓內接等邊多角形系 圓內接等邊多角形,必是正多角形,

圓內接倍邊數正多角形系 設從圓內接正多角形的各頂點,與此邊對弧的中點,用線段連結,則組成另一內接正多角形,而邊數加倍.

§ 365. **圓外切正多角形定理** 設將一圓分成許多等弧,在各分點作切線,則組成一外切正多角形.

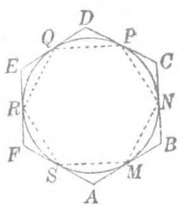

圖 596.

〔已知〕 弧 $MN=$ 弧 $NP=$ 弧 $PQ=\cdots\cdots$, 及 AB, BC, CD, ……是在 M, N, P,……的切線.

〔求證〕 $ABCD$……是一外切正多角形.

〔解析〕 如圖596,先證明 $\triangle MBN$,$\triangle NCP$,……是全等等腰三角形,再證明 $\angle A=\angle B=\angle C=\cdots\cdots$ 及 $AB=BC=CD=\cdots\cdots$.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 作弦 $MN, NP, PQ, \cdots\cdots$.	(1) 直線確定公理.
(2) $MN=NP=PQ=\cdots\cdots$.	(2) 等弧對等弦定理.
(3) $\angle BMN=\angle BNM$ $=\angle CNP$ $=\cdots\cdots$.	(3) 弦切角定理.
(4) $\triangle MBN\cong\triangle NCP\cong\cdots\cdots$.	(4) $a.s.a.=a.s.a.$
(5) $\angle A=\angle B=\angle C=\cdots\cdots$.	(5) 全等形對應角.
(6) $MB=BN=NC=CP$ $=\cdots\cdots$.	(6) 等腰△判別定理. 全等形對應邊.
(7) $\therefore AB=BC=CD=\cdots\cdots$.	(7) 等量加法公理.
(8) 故 $ABCD$……是外切正多角形.	(8) 正多角形定義.

圓外切倍邊數正多角形系 設在圓外切正多角形相鄰二切點間所夾弧的中點,各作切線,則組成另一外切正多角形,而邊數加倍.

圓內接與外切正多角形系 設從圓內接正多角形的頂點,各作切線,則組成一外切正多角形,而邊數相同.

習題七十五

1. 下列正多角形的內角各是幾度?

10邊形, 16邊形, 20邊形.

2. 下列正多角形的中心角各是幾度?

五邊形, 六邊形, 八邊形.

3. 正多角形的中心角與頂角,必互爲補角.

4. 從正多角形任何頂點作一切對角線,必等分在此頂點的角.

5. 設多角形的內切圓與外接圓同心,必是正多角形.

6. 圓內接正多角形的周界,小於二倍邊數內接正多角形的周界.

7. 圓外切正多角形周界,大於二倍邊數外切正多角形的周界.

8. 如圖597,在圓內接正多角形各邊所對弧的中點作切線,則組成外切正多角形而邊數相同.

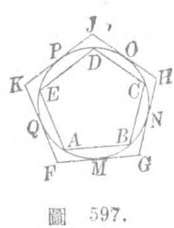

圖 597.

9. 如圖 598, 正六邊形 $ABCDEF$ 的對角線 AC, BD, CE,……組成另一正六邊形 $MNOPQR$.

〔提示〕　證明 $AC, BD, CE, \cdots\cdots$ 都相等，再證明可作一圓內切於六邊形 $MNOPQR$.

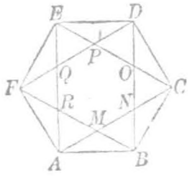

圖　598.

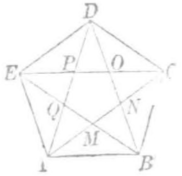

圖　599.

10.　如圖 599，正五邊形 $ABCDE$ 的對角線組成另一正五邊形 $MNOPQ$.

§366. **正多角形相似定理**　邊數相同的二正多角形必相似.

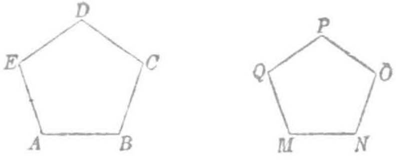

圖　600.

〔已知〕　$ABCD\cdots\cdots$ 及 $MNOP\cdots\cdots$ 是邊數相同的正多角形.

〔求證〕　多角形 $ABCD\cdots\cdots \sim$ 多角形 $MNOP\cdots\cdots$.

〔解析〕　因正 n 邊形的各內角都等於 $\dfrac{2n-4}{n}$ 直角，各邊都相等，故兩形的各角都相等，各邊都成比例，便是相似形.

〔證 明〕

敍 述	理 由
(1) 設兩形的邊數是 n, 則 $\angle A=\angle B=\cdots=\frac{2n-4}{n}$ 直角. $\angle M=\angle N=\cdots=\frac{2n-4}{n}$ 直角.	(1) 正多角形內角系.
(2) $\therefore \angle A=\angle B=\cdots=\angle M=\angle N=\cdots$.	(2) 代換公理.
(3) 又 $AB=BC=\cdots$, $MN=NO=\cdots$.	(3) 正多角形定義.
(4) $\therefore AB:MN=BC:NO=\cdots$.	(4) 等量除法公理.
(5) $\therefore$ 多角形 $ABCD\cdots\sim$ 多角形 $MNOP\cdots$.	(5) 相似形定義.

正多角形面積比系 邊數相同二正多角形面積的比,等於一邊平方的比.

§ 367. **正多角形周界比定理** 邊數相同二正多角形周界的比,等於半徑或邊心距的比.

圖 601.

〔已知〕 二正n邊形的一邊是AB及CD,中心是M及N,周界是P及P',半徑是MB及ND,邊心距是ME及NF.

〔求證〕 $P:P'=MB:ND=ME:NF$.

〔解析〕 首先證明$P:P'=AB:CD$,次從$\triangle ABM\sim\triangle CDN$證明$AB:CD=MB:ND$,及$AB:CD=ME:NF$.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) 因二多角形相似.	(1) 正多角形相似定理.
(2) 故$P:P'=AB:CD$.	(2) 相似形周界定理.
(3) $\angle M=\angle N=\dfrac{360}{n}$度.	(3) 正多角形中心角系.
(4) $MA=MB$, $NC=ND$.	(4) 等半徑定理.
(5) $MA:NC=MB:ND$.	(5) 等量除法公理.
(6) $\triangle AMB\sim\triangle CND$.	(6) 相似△從一角等夾邊成比例判別定理.
(7) $AB:CD=MB:ND$.	(7) 相似形定義.
(8) $AB:CD=ME:NF$.	(8) 相似△高與邊成比例定理.
(9) $\therefore P:P'=MB:ND$ $=ME:NF$.	(9) 代換公理.

二正n邊形面積比系 二正n邊形面積的比,等於半徑平方或邊心距平方的比.

§368　**正多角形面積定理**　任何正多角形的面積,等於邊心距與周界乘積的一半.

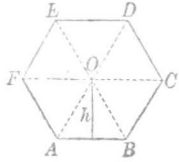

圖 602.

〔已知〕　正n邊形$ABCD\cdots$的邊心距是h,周界是P.

〔求證〕　正n邊形$ABCD\cdots$的面積$=\frac{1}{2}hp$.

〔解析〕　從中心至各頂點作線段,將正n邊形分成n個三角形,再求各三角形面積的總和便得.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1)　作$OA, OB, \cdots\cdots$將原形分成n個三角形.	(1)　直線確定公理.
(2)　此n個三角形的高,都等於邊心距h卽內切圓半徑.	(2)　正多角形內切圓定理.
(3)　$\triangle OAB=\frac{1}{2}h\times AB$ $\triangle OBC=\frac{1}{2}h\times BC$, …………………………	(3)　三角形面積定理.
(4)　$\triangle OAB+\triangle OBC+\cdots$ $=\frac{1}{2}h\times AB+\frac{1}{2}h\times BC+\cdots$.	(4)　等量加法公理.

(5) $\triangle OAB+\triangle OBC+\cdots$ $=\frac{1}{2}h(AB+BC+\cdots)=\frac{1}{2}hp.$	(5) 析因數, 代換公理.
(6) 正 n 邊形 $ABCD\cdots$ 的面積 $=\frac{1}{2}hp.$	(6) 全量公理.

習題七十六

1. 二個正六角形的邊,一是2寸,一是6寸,求二形周界的比及面積的比.

2. 二個正方形各內切於半徑2公分及8公分的二圓,求二形周界的比及面積的比.

3. 內接及外切於同圓的二個正三角形,其周界的關係怎樣?

4. 依上題,二形面積的關係怎樣?

5. 試證同圓內接正方形的面積,等於外切正方形面積的一半.

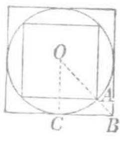

圖 603.

〔提示〕 如圖603,使角頂在內圓半徑的延線上,則 $OC=CB$, 故 $\overline{OB}^2=2\overline{OC}^2=2\overline{OA}^2$.

§369. **圓內接正方形作圖題** 求作一正方形內接於定圓.

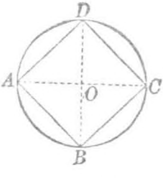

圖 604.

〔已知〕 一圓的中心是 O.

〔求作〕 一正方形內接於此圓.

〔作法〕 (1) 作互相垂直的二直徑 AC 與 BD.

(2) 連結 AB, BC, CD, DA.

(3) 此 $ABCD$ 便是所求的正方形.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) $\angle AOB=\angle BOC=\cdots=\angle R$.	(1) 作法,直角公理.
(2) 弧 AB=弧 $BC=\cdots$.	(2) 等圓心角對等弧定理.
(3) $\therefore$ $ABCD$ 是內接正方形.	(3) 圓內接正多角形定理.

圓內接正 4, 8, 16, ……邊形作法　從本節作圖題,可作 4, 8, 16,……邊的正多角形,內接於一圓.

用§364圓內接倍邊數正多角形系便可作.

圓外切正 4, 8, 16, …… 邊形作法　從圓內接正 4, 8, 16,……邊形的頂點,各作切線,則成同邊數的外切正多角形.

根據§365節圓內接與外切正多角形系及本節圓內接正 4, 8, 16,……邊形作圖題.

圓內接正方形邊長系　設 r 是圓半徑,則內接正方形的邊長等於 $r\sqrt{2}$.

§370. 圓內接正六邊形作圖題　求作一正六邊形內接於定圓.

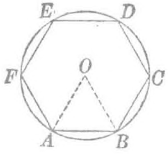

圖 605.

〔已知〕 一圓的中心是 O.

〔求作〕 一正六邊形內接於此圓.

〔作法〕 (1) 在圓上任取一點 A. 用 A 做中心,等於圓 O 半徑的長做半徑,畫弧;交圓於 B.

(2) 連結 AB.

(3) 此 AB 便是所求六邊形的一邊. 依 AB 順次作六條弦,便得內接正六邊形 $ABCDEF$.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1) $OA=OB=AB$.	(1) 作法,等半徑定理.
(2) $\triangle OAB$ 是正三角形.	(2) 正三角形定義.
(3) $\angle AOB=\dfrac{2\times 3-4}{3}\angle R=60^\circ$.	(3) 正多角形內角系.
(4) 弧 $AB=60^\circ$.	(4) 弧度與角度定義.
(5) 弧 $AB=$ 弧 $BC=\cdots$.	(5) 作法,等弦對等弧定理.

(6) 故全圓六等分於 A,B,C,D,E,F 六點.	(6) 弧度定義.
(7) $\therefore ABCDEF$ 是內接六邊形.	(7) 圓內接正多角形定理.

圓內接正三角形作法 順次連結圓內接正六邊形隔一的二頂點,便成圓內接正三角形.

圓內接正3,6,12,……邊形作法 從本節作圖題,可作3,6,12,……邊的正多角形內接於一圓.

圓外切正3,6,12,……邊形作法 從圓內接正3,6,12,……邊形的頂點,各作切線,則成同邊數的外切正多角形.

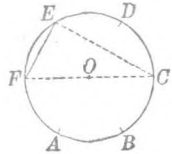

圖 606.

圓內接正六邊形邊長系 設 r 是圓半徑,則內接正六邊形的邊長等於 r.

圓內接正三角形邊長系 設 r 是圓半徑,則內接正三角形的邊長等於 $r\sqrt{3}$.

如圖606,直徑 $FC=2r$, $FE=r$, CE 是所求的一邊.

§371. 圓內接及外切正 n 邊形邊長的關係公式 設圓半徑是 r,內接正 n 邊形的邊長是 a_n,外切正 n 邊形的邊長是 a'_n,則有下列的關係:

$$\text{(I)}\quad a'_n=\frac{2a_n r}{\sqrt{4r^2-a_n{}^2}},\quad \text{(II)}\quad a_n=\frac{2a'_n r}{\sqrt{4r^2+a'_n{}^2}}.$$

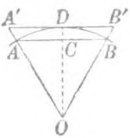

圖 607.

〔證明〕 設 $AB=a_n$, $A'B'=d_n$, $OA=OD=OB=r$.

敘　述	理　由
(1) $OC \perp AB$	(1) 過弦中點的半徑系
(2) $OD \perp A'B'$	(2) 切線定理.
(3) $AB \parallel A'B'$	(3) 垂線平行系.
(4) $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$.	(4) 相似△從一邊平行線判別定理.
(5) $A'B' : AB = OD : OC$.	(5) 相似△高與邊成比例定理.
(6) $A'B' = \dfrac{AB \times OD}{OC}$, $\therefore\ a'_n = \dfrac{a_n r}{OC}$.	(6) 比例基本定理,等量除法公理.
(7) 但 $OC = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{r^2 - \dfrac{a^2_n}{4}} = \dfrac{\sqrt{4r^2 - a^2_n}}{2}$.	(7) 弦與股平方關係系.
(8) $\therefore$ (I) $a'_n = \dfrac{2a_n r}{\sqrt{4r^2 - a^2_n}}$.	(8) 代換公理.
(9) $AB : A'B' = OA : OA'$.	(9) 相似形定義.
(10) $AB = \dfrac{A'B' \times OA}{OA'}$, $\therefore\ a_n = \dfrac{a'_n r}{OA'}$.	(10) 比例基本定理,等量除法公理.
(11) 但 $OA' = \sqrt{\overline{OD}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{r^2 + \dfrac{a'^2_n}{4}} = \dfrac{\sqrt{4r^2 + a'^2_n}}{2}$.	(11) 畢氏定理
(12) $\therefore$ (II) $a_n = \dfrac{2a'_n r}{\sqrt{4r^2 + a'^2_n}}$.	(12) 代換公理.

〔例 1〕 設圓半徑 $r=\frac{1}{2}$, 內接正三角形的邊長是 $r\sqrt{3}$, 求外切正三角形的邊長.

〔解〕 從公式(I),

$$a'_3=\frac{2\sqrt{3}r^2}{\sqrt{4r^2-3r^2}}=\frac{2\sqrt{3}r^2}{r}=2\sqrt{3}r=2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}=1.7320508.$$

〔例 2〕 設圓半徑 $r=\frac{1}{2}$, 外切正方形的邊長是 $2r$, 求內接正方形的邊長.

〔解〕 從公式(II),

$$a_4=\frac{2r\times 2r}{\sqrt{4r^2+4r^2}}=\frac{4r^2}{2r\sqrt{2}}=\frac{2r}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}r=\sqrt{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1.4142136}{2}=0.7071068.$$

§ 372. 圓內接正 n 邊形及正 $2n$ 邊形邊長的關係公式 設圓半徑是 r, 內接正 n 邊形的邊長是 a_n, 內接正 $2n$ 邊形的邊長是 a_{2n}, 則有下列的關係:

(I) $a_{2n}=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-a_n^{\,2}}}.$

(II) $a_n=\dfrac{a_{2n}\sqrt{4r^2-a^2{}_{2n}}}{r}.$

圖 608.

〔證明〕 $OA=OC=r$, $AB=a_n$, $AC=a_{2n}$.

敍述	理由
(1) $\triangle CAD$ 是直角三角形.	(1) 半圓含直角系.
(2) $\overline{AC}^2=CD\times CM$, $\therefore\ a_{2n}=\sqrt{2r\times CM}$.	(2) 股與弦上射影關係定理.

(3) 但 $CM=OC-OM$ $=OC-\sqrt{(\overline{OA}^2-\overline{AM}^2)}$ $=r-\sqrt{r^2-\frac{a^2_n}{4}}=r-\frac{\sqrt{4r^2-a^2_n}}{2}$.	(3) 畢氏定理
(4) ∴ (I) $a_{2n}=\sqrt{2r\left(r-\frac{\sqrt{4r^2-a^2_n}}{2}\right)}$ $=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-a^2_n}}$.	(4) 代換公理, (3) 代入 (2).
(5) $AC\times AD=AM\times CD$ ∴ $a_{2n}\times AD=\frac{a_n}{2}\times 2r$.	(5) △外接圓直徑與高乘積定理.
(6) $a_n=\frac{a_{2n}\times AD}{r}$.	(6) 等量除法公理.
(7) 但 $AD=\sqrt{\overline{CD}^2-\overline{AC}^2}$ $=\sqrt{4r^2-a^2_{2n}}$.	(7) 弦與股平方關係系.
(8) ∴ (II) $a_n=\frac{a_{2n}\sqrt{4r^2-a^2_{2n}}}{r}$.	(8) 代換公理, (7) 代入 (6).

〔例 1〕 設圓半徑 $r=\frac{1}{2}$, 內接正方形的邊長是 $r\sqrt{2}$, 求內接正八邊形的邊長.

〔解〕 從公式 (I),

$$a_8=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-2r^2}}=\sqrt{2r^2-r^2\sqrt{2}}=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2-1.4142136}=\frac{1}{2}\times 0.765366=0.382683.$$

〔例2〕　設圓半徑$r=\frac{1}{2}$,內接六邊形的邊長是r,求內接正三角形的邊長.

〔解〕　從公式(II),

$$a_3=\frac{r\sqrt{4r^2-r^2}}{r}=\sqrt{3r^2}=r\sqrt{3}$$

$$=\frac{1}{2}\times 1.7320508$$

$$=0.8660254.$$

§373. 同圓內接外切正多角形的周界　從上面二節的公式,已知內接正多角形的邊長,可以求得外切同邊數正多角形的邊長,及內接或外切二倍邊數正多角形的邊長.又若已知正多角形的邊長,則用邊數去乘,便得周界.今設圓的直徑是1,即半徑是$\frac{1}{2}$,從正方形起,求得內接及外切正4, 8, 16, 32,……邊形的周界如下表:

邊數	內接多角形周界	外切多角形周界
4	2.8284271	4.0000000
8	3.0614675	3.3137085
16	3.1214452	3.1825979
32	3.1365485	3.1517249
64	3.1403312	3.1441184
128	3.1412773	3.1422236
256	3.1415138	3.1417504
512	3.1415729	3.1416321
1024	3.1415877	3.1416025
2048	3.1415914	3.1415951
4096	3.1415923	3.1415933

§374. 圓周與內接外切正多角形周界的比較 從習題七十五的(6)(7)題,可見圓內接正多角形的邊數倍增,周界越大,漸趨近於圓周;圓外切正多角形的邊數倍增,周界越小,漸趨近於圓周;看上節的表,更加可從事實證明此理.故圓周的長,必在同邊數的內接外切多角形周界之間,若邊數越多,則二周界的差越小,幾乎與圓周相等.今查上節表中,同圓內接外切多角形的周界,求到 4096 邊之多,有前六位數 3.14159 相同,此時圓周的長,也與 3.14159 相差無幾,故圓周與直徑的近似比值是 3.14159.

習題七十七

以下(1)—(8)題,都設 r 是圓半徑:

1. 已知內接正方形的邊長是 $r\sqrt{2}$,試證面積等於 $2r^2$.

2. 已知內接正三角形的邊長是 $r\sqrt{3}$,試證面積等於 $\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$.

3. 已知外切正三角形的邊長是 $2r\sqrt{3}$,試證面積等於 $3r^2\sqrt{3}$.

4. 已知內接正六邊形的邊長是 r,試證面積等於 $\frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$.

5. 試證外切正六邊形中:

$$\text{邊長}=\frac{2}{3}r\sqrt{3},\ \text{周界}=4r\sqrt{3},\ \text{面積}=2r^2\sqrt{3}.$$

6. 設內接正方形的面積是400方寸,試求邊心距與圓半徑.

7. 設內接正三角形的面積是$12\sqrt{3}$方寸,試求圓的半徑.

〔提示〕 $\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.

8. 設正三角形的面積是$108\sqrt{3}$方寸,試求內切圓半徑.

9. 設圓半徑是24寸,求內接及外切正三角形的面積.

10. 設圓半徑是4寸,求內接及外切正方形的邊長及面積.

11. 試證圓內接正六邊形的面積,等於同圓內接及外切正三角形面積的比例中項.

12. 已知圓的半徑是r,及內接正十邊形的邊長是$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)r$,試證明同圓內接正五邊形的邊長是:

$$\frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

13. 設圓的半徑是$\frac{1}{2}$,試計算內接正十二邊形的邊長.

14. 已知一邊,求作正六邊形.

15. 求作正八邊形外切於定圓.

16. 求作正十二邊形內接於定圓.

§ **375.** **圓周相比定理**　任何二圓周的比,等於二半徑的比.

圖　609.

〔已知〕　二圓 O, O',半徑各是 r, r',圓周各是 C, C'.

〔求證〕　$C : C' = r : r'$.

〔解析〕　從圓周與內接正多角形的周界比較,便可證明.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1)　在二圓內,各作內接同邊數的正多角形,設周界各是 P, P,則兩形相似.	(1)　正多角形相似定理.
(2)　$P : P' = r : r'$.	(2)　正多角形周界比定理.
(3)　若所作內接形邊數無限倍增,則可當作 $P = C,\quad P' = C'$.	(3)　§ 374.
(4)　$\therefore\ C : C' = r : r'$.	(4)　代換公理.

圓周相比系　任何二圓周的比,等於二直徑的比.

因 $C:C'=r:r'$, 即 $\dfrac{C}{C'}=\dfrac{r}{r'}=\dfrac{2r}{2r'}$, 故 $C:C'=2r:2r'$.

圓周與直徑相比系 任何圓周與直徑的比,是一定不變的常數.

因 $C:C'=2r:2r'$, 依更比定理, 得 $C:2r=C':2r'$, 故 $\dfrac{C}{2r}=\dfrac{C'}{2r'}=$常數.

§376. 圓周率 上節圓周與直徑相比系中的常數,叫做圓周率,通常都用希臘文字代表.因無論直徑的長短怎樣,圓周率一定不變,故根據§373,得π的近似值如下:

$$\pi=3.14159\cdots\cdots.$$

§377. 圓周長定理 任何圓周的長,等於直徑乘π或半徑二倍乘π.

〔證明〕 設圓周是C,直徑是d,半徑是r,則依圓周與直徑相比系, $\dfrac{C}{d}=\dfrac{C}{2r}=\pi$, 即 $C=dr=2r\pi$.

弧長系 弧$m°$的長$=\dfrac{m}{360}\times 2\pi r=\dfrac{1}{180}\times\pi mr$.

§378. 圓面積定理 圓的面積,等於半徑與圓周乘積的一半.

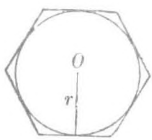

圖 610.

〔已知〕 圓O,半徑r,圓周C,面積A.

〔求證〕　$A=\frac{1}{2}rC.$

〔解析〕　從圓周與外切正多角形的周界比較,用正多角形面積定理,便可證明.

〔證　明〕

敍　述	理　由
(1)　作圓 O 的外切正多角形,設 A' 是面積,P' 是周界,則 $A'=\frac{1}{2}rP'$.	(1)　正多角形面積定理.
(2)　若所作外切形邊數無限倍增,則可當作 $P'=C,\ \ A'=A.$	(2)　§ 374
(3)　$\therefore\ A=\frac{1}{2}rC.$	(3)　代換公理.

半徑表圓面積系　圓的面積,等於 π 乘半徑平方.

因依圓周長定理 $C=2\pi r$, 故從本節定理,

$$A=\frac{1}{2}rC=\frac{1}{2}r\times 2\pi r=\pi r^2.$$

二圓面積比系　二圓面積的比,等於半徑平方的比,或直徑平方的比.

扇形面積系　圓心角 m° 的扇形面積,等於 $\frac{m}{360}\times\pi r^2.$

習題七十八

1. 圓半徑是4寸,求圓周及面積.

2. 圓周長24尺,求直徑及半徑.

3. 圓面積256方寸,求半徑直徑及圓周.

4. 在半徑8寸的圓內,求圓心角36度所對的弧長.

5. 圓心角40度,半徑12寸,求扇形面積.

6. 設弓形的弧60度,半徑3尺,求面積.

7. 埃及人亞默斯氏(Ahmes公元前1700年人)計算圓面積的公式,是從直徑減去$\frac{1}{9}$而將其餘者自乘即$\{2r(1-\frac{1}{9}\}^2$ (式中r是半徑),問他所用π的值等於多少?

8. 亞奇默德氏(Archimedes公元前287年人)求得π的值在$3\frac{1}{7}$與$3\frac{10}{71}$之間,試各用小數表示,並與3.14159比較.

9. 半徑35寸的車輪,走一里路要轉幾次?

10. 設同心二圓的半徑各是r與r',試證此二圓所夾環形的面積是

$$\pi(r+r')(r-r') \text{ (圖 611).}$$

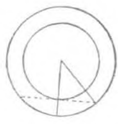

圖 611.

11. 如上題,試證環形的面積,又等於用外圓切於內圓的弦做直徑的圓面積.

12. 求作一圓,使圓周等於已知二圓周的和.

13. 求作一圓,使面積等於已知二圓面積的和.

14. 求作一圓,使面積等於已知圓的3倍.

15. 求作一圓,使面積等於已知同心二圓所夾的環形面積.

16. 設正三角形的高是6寸,求內切圓及外接圓的面積.

17. 設正方形面積 $12\frac{1}{4}$ 方寸,求內切圓的面積.

18. 延長正六邊形各邊所成的星形,他的面積,等於原形的二倍(圖 612).

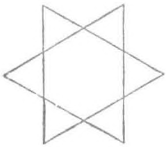

圖 612.

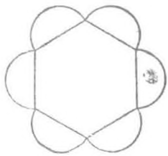

圖 613.

19. 正六邊形的邊長2寸,在各邊上向外作半圓,求全部面積(圖 613).

20. 設在直角三角形 ABC 的各邊上作半圓,如圖614,試證月形 $ADBE$ 與 $BFCG$ 面積的和,等於原三角形的面積.

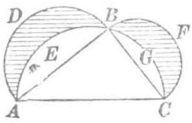

圖 614.

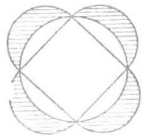

圖 615.

21. 設用圓內接正方形的各邊做直徑,向圓外各作半圓,則所成四個月形面積的和,等於此內接正方形(圖 615).

22. 設正三角形的邊長是 a, 用各頂點做中心,各邊做半徑畫弧,試求此三弧所圍成圖形的面積(圖 616).

圖 616.

總 習 題

1. 設直徑 AB 平分二弦 AC, AD 所成的角 CAD, 則弧 BC=弧 BD.

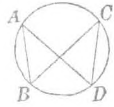

圖 617.

2. 如圖 617, 設 $AB=CD$, 則 $BC=AD$.

3. 從圓內接六邊形的頂點,各作半徑,則分原形成六個全等正三角形.

4. 試證從圓心至內接正多角形各邊的垂線必相等.

5. 設四邊形的頂點在一圓上,則各邊的垂直平分線,必相交於一點.

6. 兩圓相交於二點,A,B 過 A 任作一直線,交二圓於 C,D, 試證 $\angle CBD$ 爲定角.

7. 自圓外一點至此圓引二割線,此二割線所夾的弧,一爲 28 度,一爲 34 度,問此二割線的交角是幾度?

8. 設 $ABCD$ 是圓內接四邊形, $\angle A=80°$, $\angle B=90°$, 求 $\angle C$ 及 $\angle D$.

9. 設 $ABCD$ 是圓內接正方形, M 是弧 AB 上任一點,則 MC 與 MD 必三等分 $\angle AMB$.

10. 設二弦 AB 與 CD, 在圓外相交於 M, 試證 $\triangle BCM$ 與 $\triangle ADM$ 的各角相等.

11. 設 $ABCD$ 是圓 O 的外切四邊形, 試證

$$\angle AOB+\angle COD=2\angle R.$$

12. 試證圓周角必小於角頂在圓內兩邊夾同弧的角, 而大於角頂在圓外兩邊夾同弧的角 (圖 618).

圖 618.

13. 如圖 619, AB, AC 是圓 O 的切線, BD 是直徑, 試證 $\angle A=\angle DOC$.

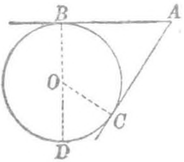

圖 619.

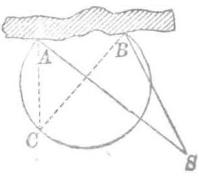

圖 620.

14. 如圖 620, A, B 是燈塔, 圓 ACB 內都是危險的礁石. 船 S 爲安全計, 常依 $\angle S$ 小於 $\angle C$ 行駛. 此是根據什麼理由?

15. 火車的軌道, 常依圓弧形轉彎. 如圖 621, $\angle a$ 是切線與直軌所成的角, $\angle c$ 是圓心角, 試證 $\angle c=\angle a$.

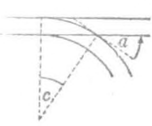

圖 621.

16. 如圖622,是交叉的轉彎軌道,O, O' 是弧形的圓心,r, r' 是半徑,SC, TC 是切線.試證

$$\angle SCT=\angle COA+CO'B.$$

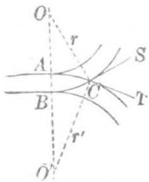

圖 622.

17. 如圖623,是橫路轉彎到直路的弧形,r 是弧的半徑,t 是初轉彎處與直路的距離.試證 $MN=r-\sqrt{r^2-t^2}$.

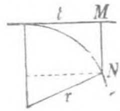

圖 623.

18. 用一張正方形或矩形的紙,可以求圓的直徑如圖624,試說明理由.

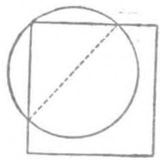

圖 624.

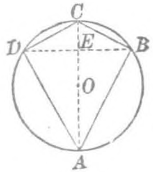

圖 625.

19. 相鄰二邊各相等的四邊形,叫做風箏形.試證圓的內接風箏形,必有二隻直角;又一條對角線是直徑(如圖625).

20. 有一種器械可將任何角分成三等分,叫做三分角器,如圖626.此器是根據圖627構成的:DE=圓半徑,$\angle ABC=3\angle EDB$,故 $\angle EDB=\frac{1}{3}\angle ABC$.試證明理由.

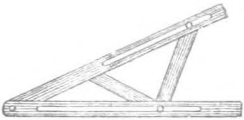

圖 626.

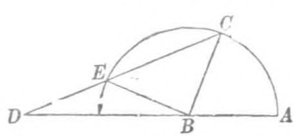

圖 627.

21. 在相交二直線 OX, OY 上,求決定二點 A, B, 使 $\angle OAB=3\angle OBA$.

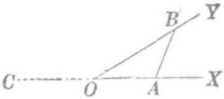

圖 628.

〔提示〕 延長 XO 至 C, 使 $\angle OBA=\frac{1}{4}\angle COB$. (圖 628)

22. 設二圓外切,過切點任作一直線,與二圓相交.過交點作圓的切線,則此二切線必平行(629 圖).

〔提示〕 作內公切線,則 $\angle ABD$ 及 $\angle ACE$ 與在 A 的角有什麼關係?

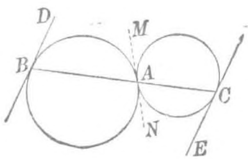

圖 629.

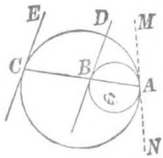

圖 630.

23. 設二圓內切,過切點任作一直線,與二圓相交.過交點各作圓的切線,則此二切線必平行(圖 630).

24. 設等腰三角形外切於圓,則底邊必平分於切點.

25. 設一圓內切於正三角形,則三邊都平分於切點.

26. 圓外切任何梯形的周界,等於不平行二邊連線的四倍.

27. 圓的外切任何六邊形,每隔一邊一組的和,等於他組的和.

如圖631, $AB+CD+EF=BC+DE+FA$.

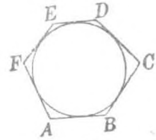

圖 631.

28. 設二平行切線在第三切線上截一線段,則此線段對於圓心張直角.

〔提示〕 如圖632, 證 $\angle BOD=\angle R$.

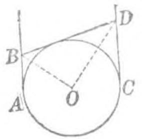

圖 632.

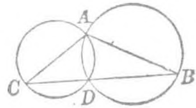

圖 633.

29. 任何三角形,用兩邊各做直徑畫圓,必相交於第三邊上.

〔提示〕 如圖633, 設 D 是兩圓的交點.作 AD, BD, CD, 證明 CDB 是一直線.

30. 相等二圓相交於 A, B. 過 A 作二線段 CD, EF, 到圓爲止. 試證二弦 CE, DF 必相等(圖 634).

31. 如上題的圖,再作 CB, DB 及 EB, FB. 試證 $CB=DB$, 及 $EB=FB$.

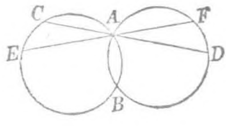

圖 634.

32. 圓半徑16寸,從距圓心24寸的一點至此圓所求切線的長多少?

33. 同心二圓的直徑是20寸與36寸,求外圓切於內圓的弦長.

34. 圓半徑 28 寸,距圓心 6 寸有一點,求過此點最短弦的長.

35. 二圓的半徑是 10 公分與 6 公分,圓心相距 20 公分.求外公切線的長.

36. 在 $\triangle ABC$ 內,二高 AD 與 BE 相交於 M. 試證

$$AM \times MD = BM \times ME.$$

〔提示〕 如圖 635, 可作一圓過 A, B, D, E 四點.

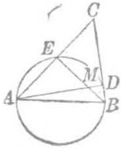

圖 635.

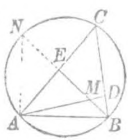

圖 636.

37. 在 $\triangle ABC$ 內,二高 AD 與 BE 相交於 M. 試證

$$BE \times EM = AE \times EC.$$

〔提示〕 如圖 636 作 $\triangle ABC$ 的外接圓,與 BE 的延長相交於 N, 則 $AE \times EC = BE \times EN$. 故要先證 $EM = EN$.

38. 設 C 是弧 AB 的中點,又弦 CD 與 AB 相交於一點 E, 則 $CE : CA = CA : CD$ (圖 637).

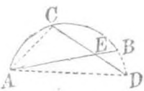

圖 637.

39. 二圓相交,公弦的延線,必平分公切線.

40. 一人站在半圓形的拱橋下,距圓弧的一端為 2 丈,他端為 8 丈,則自此人的足至頭頂對上的弧,相距高幾丈?

41. 如圖 638,要量隔湖二點 A,B 的距離,先量得 AE 是 80 尺, EC 是 20 尺, DB 是 100 尺, DC 是 [illegible]5 尺, ED 是 30 尺.問怎樣方可[illegible]得 AB?

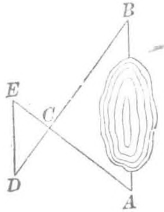

圖 638.

42. 如圖 639,是照相的原理, L 是鏡頭的中心, AB 是實物, $A'B'$ 是照片, D,F 各是 AB, $A'B'$ 的中點, AB, $A'B'$ 都垂直於 FD. 設 AB 是 3 尺, LD 是 15 尺, FL 是 5 尺,求 $A'B'$ 的長.

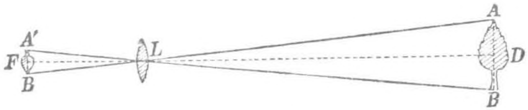

圖 639.

43. 如圖 640, FPA 是地上一直線,樹 AT 及桿 EF 都垂直於 FPA. 有人在 P 處見樹反映在湖中的倒影 AT', 而 EPT' 恰成一直線.已知 $EF=5$ 尺, $FP=8$ 尺, $PA=30$ 尺.問怎樣方可求得此樹的高?

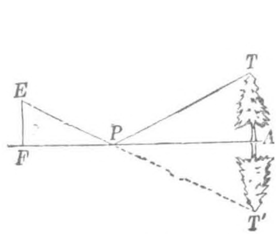

圖 640.

44. 如圖641, OX 與 OA_1 互相垂直,各等於1寸.延長 OA_1, 取 $OA_2=XA_1$, $OA_3=XA_2$, $OA_4=XA_3$,……則 OA_2, OA_3, OA_4……各等於 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, ……寸.如此可求得任何整正數的平方根.試證明此原理.

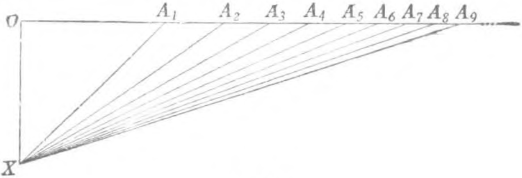

圖 641.

45. 設直角三角形二銳角是30°, 60°, 試證弦等於30°角對邊的二倍.普通三角板中,有無如此的一塊?

46. 設 AB 與 XY 成60度角. $AB=c$, 試證 AB 在 XY 上的射影等於 $\frac{c}{2}\sqrt{3}$.

47. 設 AB 與 XY 成45度角, $AB=c$, 試證 AB 在 XY 上的射影等於 $\frac{c}{2}\sqrt{2}$.

48. 試證正三角形邊心距,等於外接圓半徑之半.

49. 石賴提尼氏 (Ceradini) 用作圖求圓周近似值的方法如下:作直徑 AB, 切線 CD 切於 A, 取 $\angle COB=30°$, $CD=3r$ (r 是半徑).連結 AD, 則 $2AD$ 約等於圓周.試計算 $2AD$ 與 AB 的比(圖 642).

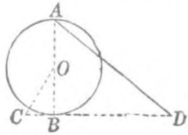

圖 642.

〔提示〕 各用 r 表 AB 與 $2AD$ 再相除.

50. 木匠常用下法求圓周的近似值：先作正三角形AOB，次延長高OD至E. 用$6AO+2DE$當作圓周的長. 試求其結果與$\pi=3.14159$的誤差（圖643）.

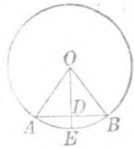

圖 643.

51. 畢氏定理也可以用下列作圖證明：已知$\triangle ABC$中，$\angle B$是直角. 用中心A半徑AC作圓. 延長CB，AB與圓相交. 根據相交二弦定理，證明$(b+c)(b-c)=a^2$. 試補足全部證法（圖644）.

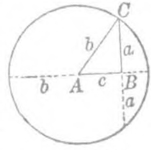

圖 644.

52. 圓內接矩形的面積是48方寸，設圓半徑是5寸，求矩形兩邊的長.

53. 正六邊形的邊長4寸，求面積.

54. 工程上求同心二圓間所夾環形的面積，常用公式面積$=\pi\times\dfrac{D+d}{2}\times t$，式中$D$是外圓直徑，$d$是內圓直徑，$t$是環形的厚（卽內外圓半徑的差）. 試證此公式.

55. 同心二圓的圓周各等於36與40寸. 試求二圓間所夾環形的面積.

56. 求作一圓，使切於定直線上一定點，而通過定直線外一定點.

〔解析〕 設求得的圓切AB於M，半徑$OM\perp AB$，通過M，N作弦MN，則O在MN的垂直平分線上. 故O是AB上M點的垂線與MN的垂直平分線的交點（圖645）.

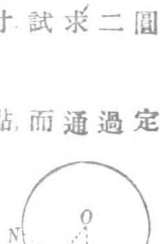

圖 645.

57. 用定長半徑求作一圓,切於定角的二邊.

〔解析〕 設 r 是定半徑,$\angle ABC$ 是定角.則圓心 O 必要在與 AB 距離 r 的平行線上,也必要在 $\angle B$ 的平分線上,故 O 是此二線的交點(圖 646).

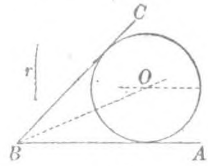

圖 646.

58. 已知一股及弦上的高,求作直角三角形.

〔解析〕 設 $\triangle ABC$ 是所求的三角形,股 AB 等於已知線段 a,弦 BC 上的高 AD 等於已知線段 b,則 BC 切於中心 A 半徑 AD 的圓上(圖 647).

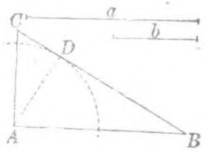

圖 647.

59. 已知弦及弦上的高,求作直角三角形.

60. 已知正三角形的高,求作此形.

61. 已知一邊及此邊上的高與中線,求作三角形.

62. 已知二邊及其中一邊上的高,求作三角形.

63. 求作等腰三角形,已知周界及底上的高.

〔解析〕 設 a 是已知高,AB 是已知周界,$\triangle DEF$ 是所求的三角形,則 $DE=AE$, $DF=FB$. 怎樣定 E 與 F 的位置?(圖 648).

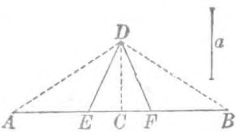

圖 648.

64. 求作一圓,使過二定點而與定直線相切.

〔提示〕 根據切割線定理.

65. 求作一圓,使圓周等於已知二圓周的差.

66. 求作一圓,使面積等於已知二圓面積的差.

67. 求作一圓,使圓周等於已知半圓.

68. 求作同心二圓,分已知圓成三等分

〔提示〕 三等分半徑 AO 於 M 及 N. 用 OA 做直徑作半圓,作 AO 的垂線 MB, MC, 交半圓於 B, C, 用 O 做圓心, OB, OC 各做半徑畫二圓便得(圖 649).

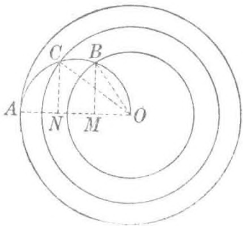

圖 649.

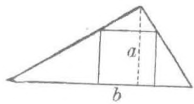

圖 650.

69. 求作正方形內接於已知三角形.

〔提示〕 設 x 等於正方形的一邊,已知三角形的高是 a, 底是 b, 則

$$\frac{a-x}{a}=\frac{x}{b}, \quad \therefore\ x=\frac{ab}{a+b}.$$

故 x 是 $a+b$, a,b 的第四項,(圖 650).

70. 求作正方形內接於已知半圓.

第四編　數值三角

第一章　三角函數定義

§ 379. 三角法　從三角形的性質,研究其中邊與角的關係及三角形的解法與應用,叫做**三角法**.本編注重實用,假設數值,從實例入手,故名**數值三角**.

§ 380. 三角函數　任作一銳角 AOX, 設是 α 度,在一邊 OA 上任取一點 P, 作 PM 垂直於他邊 OX, 則從三線段 OP, OM, PM 中,作二線段的比值,可有六種如下:

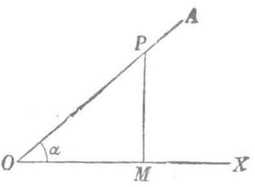

圖　651.

(1)　$\dfrac{PM}{OP}=\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$, 叫做 $\angle\alpha$ 的**正弦** (sine), 記作 $\sin\alpha$.

(2)　$\dfrac{OM}{OP}=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$, 叫做 $\angle\alpha$ 的**餘弦** (cosine), 記作 $\cos\alpha$.

(3)　$\dfrac{PM}{OM}=\dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$, 叫做 $\angle\alpha$ 的**正切** (tangent), 記作 $\tan\alpha$.

(4)　$\frac{OM}{PM}=\frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}$,叫做$\angle\alpha$的餘切(cotangent),記作$\cot\alpha$.

(5)　$\frac{OP}{OM}=\frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}$,叫做$\angle\alpha$的**正割**(secant),記作$\sec\alpha$.

(6)　$\frac{OP}{PM}=\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}$,叫做$\angle\alpha$的餘割(cosecant),記作$\csc\alpha$.

以上的六比,叫做角α的三角函數.

§381. 等角的三角函數不變定理　同角或等角的三角函數值,一定不變.

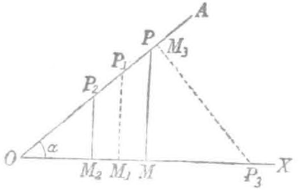

圖 652.

〔已知〕　$\angle\alpha$.

〔求證〕　$\angle\alpha$的三角函數有定值.

〔證明〕

敍述	理由
(1) 任作 PM, P_1M_1, P_2M_2 都 $\perp OX$,又作 $P_3M_3\perp OA$.	(1) 垂線作圖題.
(2) $\triangle PMO$,$\triangle P_1M_1O$,$\triangle P_2M_2O$,P_3M_3O 都是直角三角形.	(2) 作法,直角定義.
(3) $\angle\alpha=\angle\alpha$.	(3) 同角.
(4) 此諸三角形都相似.	(4) 相似直角△系.

(5) $\therefore \dfrac{PM}{OP}=\dfrac{P_1M_1}{OP_1}=\cdots=\dfrac{P_3M_3}{OP_3}=\sin\alpha,$	(5) 相似形定義,更比定理,三角函數定義.
$\dfrac{OM}{OP}=\dfrac{OM_1}{OP_1}=\cdots=\dfrac{OM_3}{OP_3}=\cos\alpha,$	
$\dfrac{PM}{OM}=\dfrac{P_1M_1}{OM_1}=\cdots=\dfrac{P_3M_3}{OM_3}=\tan\alpha.$	
(6) 又 $\dfrac{OM}{PM}=\dfrac{OM_1}{P_1M_1}=\cdots=\dfrac{OM_3}{P_3M_3}=\cot\alpha,$	(6) 反比定理,三角函數定義.
$\dfrac{OP}{OM}=\dfrac{OP_1}{OM_1}=\cdots=\dfrac{OP_3}{O_3M_3}=\sec\alpha,$	
$\dfrac{OP}{PM}=\dfrac{OP_1}{P_1M_1}=\cdots=\dfrac{OP_3}{P_3M_3}=\csc\alpha.$	

§382. 三角函數的線段表示 如圖作單位圓即半徑是 1 的圓,及互相垂直二半徑.在圓心 O 作 $\angle FON=\angle\alpha$,二邊與圓相交於 P, N.作 $PM\perp ON$,切線 QN 及 RS,割線 OS,則表 $\angle\alpha$ 三角函數的線段如圖653所示.

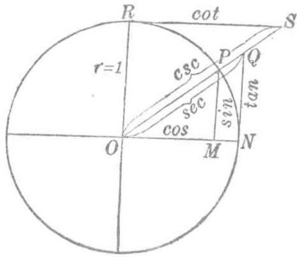

圖 653.

圖中 $RS \parallel ON$ (垂線平行系),故 $\angle RSO=\angle POM=\angle\alpha$ (平行線內錯角定理).又 $OR=OP=ON=1$ (作法),故得證明如下:

$$\sin\alpha=\frac{PM}{OP}=\frac{PM}{1}=PM,$$

$$\cos\alpha=\frac{OM}{OP}=\frac{OM}{1}=OM,$$

$$\tan\alpha=\frac{PM}{OM}=\frac{QN}{ON}=\frac{QN}{1}=QN,$$

$$\cot\alpha=\frac{RS}{OR}=\frac{RS}{1}=RS,$$

$$\sec\alpha=\frac{OP}{OM}=\frac{OQ}{ON}=\frac{OQ}{1}=OQ,$$

$$\csc\alpha=\frac{OS}{OR}=\frac{OS}{1}=OS.$$

三角函數中正弦餘弦正切餘切正割餘割的名詞,即取義於此,讀者看圖很易記憶.

習題七十九

1. 設 a, b 是夾直角的二邊, c 是斜邊, $\angle C$ 是直角. 依下列的數值作圖,試用分數表示 a 邊對角 A 的三角函數:

(1) $a=3, b=4, c=5.$　(2) $a=12, b=5, c=13.$

(3) $a=60, b=11, c=?$　(4) $a=3, b=5, c=?$

2. 如圖 654,設 $BD \perp AC$, $CE \perp AB$, 試用 AD, DC, AB, BD, BC, BE, CE 表示下列各題中的三角函數:

(1) $\sin BAD$, $\tan BAD$.

(2) $\cos DCB$, $\sin DCB$.

(3) $\tan CBD$, $\sin CBD$.

(4) $\sin DBA$, $\cos DBA$.

(5) $\sin CBE$, $\cos CBE$, $\tan CBE$.

(6) $\cos BCE$, $\tan BCE$, $\sin BCE$.

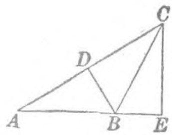

圖 654.

3. 在上圖中,下列各比是表示什麼角的正弦,餘弦或正切:

$$\frac{DB}{BC}, \frac{DB}{AB}, \frac{BE}{EC}, \frac{CD}{DB}, \frac{AD}{DB}, \frac{DB}{AD}, \frac{CE}{BC}, \frac{CE}{EB}, \frac{BE}{BC}.$$

4. 已知直角三角形的一股 BC 是 2, 弦 AB 是 $\sqrt{13}$. 求 AC 的值,並求 $\angle A$ 的三角函數.

5. 設直角三角形的斜邊 AB 是 16 公分,一邊 BC 是 5 公分,求 $\angle A$ 的三角函數.

6. 設 $ABCD$ 是四邊形, $AB\perp BC$, $AC\perp AD$, $AB=3$, $BC=4$, $AD=7$, 求 $\angle A$ 及 $\angle D$ 的三角函數.

§383. 已知一銳角求三角函數法 已知一銳角,要求此角的三角函數,可用量角器在方格紙上求得近似值.示例如下:

〔例 1〕 作 43° 的角,求 sin 43° 的值.

〔解〕 (1) 用量角器在方格紙上作 $\angle MOP=43°$. 如圖 655.

(2) 取 $OP=10$ 單位(圖中用二格作一單位), 作 $PM\perp OM$.

(3) 得 $$\sin 43°=\frac{MP}{OP}=\frac{6.8}{10}=0.68.$$

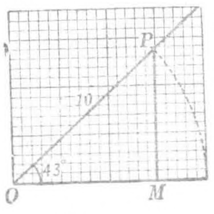

圖 655.

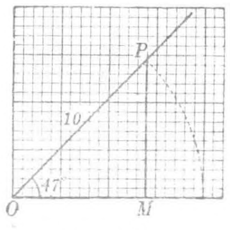

圖 656.

〔例 2〕 作 47° 的角,求 cos 47° 的值.

〔解〕 (1) 如前例作 $\angle MOP=47°$. 如圖 656.

(2) 取 $OP=10$ 單位,作 $PM\perp OM$.

(3) 得 $$\cos 47°=\frac{OM}{OP}=\frac{6.8}{10}=0.68.$$

〔例 3〕 作 57° 的角,求 tan 57° 的值.

〔解〕 (1)　如前例作 $\angle MOP=57°$. 如圖 657.

(2)　取 $OM=10$ 單位,從 M 作 $MP\perp OM$.

(3)　得　$\tan 57°=\frac{PM}{OM}=\frac{15.4}{10}=1.54.$

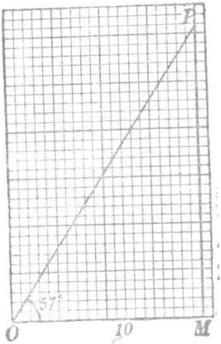

圖 657.

〔例 4〕 作 33° 的角,求 cot 33° 的值.

〔解〕 (1)　如前例作 $\angle AOB=33°$. 如圖 658.

(2)　在 OB 上,任一點 B, 作 $BC\perp OB$, 取 $BC=10$ 單位.

(3)　過 C 作 $PC \parallel OB$, 交 OA 於 P. 從 P 作 $PM\perp OB$.

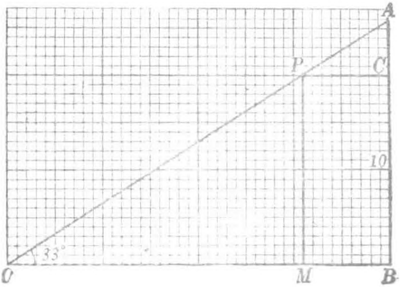

圖 658.

(4) 得 $\cot 33^\circ=\frac{OM}{MP}=\frac{15.4}{10}=1.54.$

〔例 5〕 作 50° 的角,求 $\sec 50^\circ$ 的值.

〔解〕 (1) 如前例,作 $\angle AOB=50^\circ$. 如圖 659.

(2) 在 OB 上取 $OM=10$ 單位,作 $MP\perp OB$.

(3) 得 $\sec 50^\circ=\frac{OP}{OM}=\frac{15.6}{10}=1.56.$

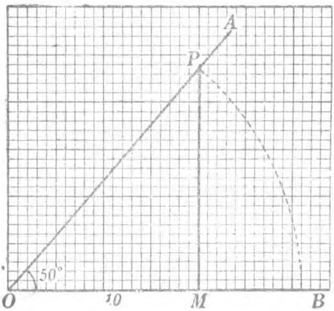

圖 659.

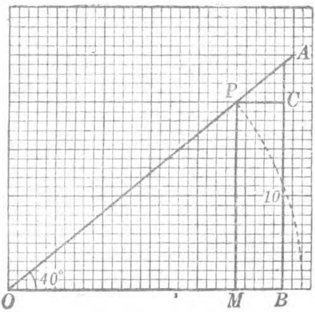

圖 660.

〔例 6〕 作 40° 的角,求 $\csc 40^\circ$ 的值.

〔解〕 (1) 如前例,作 $\angle AOB=40^\circ$. 如圖 660.

(2) 在 OB 上任一點 B, 作 $BC\perp OB$, 取 $BC=10$ 單位.

(3) 過 C 作 $PC\parallel OB$, 交 OA 於 P, 從 P 作 $PM\perp OB$.

(4) 得 $\csc 40^\circ=\frac{OP}{PM}=\frac{15.6}{10}=1.56.$

§384. 已知三角函數求銳角法 已知三角函數要求此角的度數,可在方格紙上畫圖,再用量角器求得角的近似值,示例如下:

〔例 1〕 已知一角的正弦是 $\frac{3}{5}$, 求此角的度數.

〔解〕 (1) 作直線 AB, 從 B 作 $BC \perp AB$, 取 $BC=6$. 如圖 661.

(2) 用 C 做圓心, 10 單位做半徑, 畫弧, 交 AB 於 D, 連結 CD.

(3) 因 $CD=$ 半徑 $=10$ 單位,

故
$$\sin CDB=\frac{CB}{CD}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

(4) 用量角器量得 $\angle CDB=37°$.

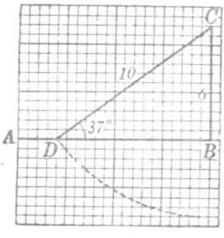

圖 661.

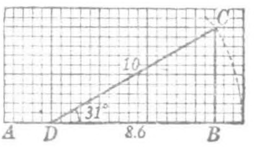

圖 662.

〔例 2〕 已知一角的餘弦是 0.86, 求此角的度數.

〔解〕 (1) 作直線 AB, 取 $BD=8.6$ 單位, 作 $BC \perp AB$. 如圖 662.

(2) 用 D 做圓心, 10 單位做半徑, 畫弧, 交 BC 於 C, 連結 CD.

(3) 量得　$\angle CDB=31°$.

〔例 3〕 已知一角的正切是 0.9, 求此角的度數.

〔解〕 (1) 作 $DB=10$ 單位, 如圖 663.

(2) 作 $BC \perp DB$，取 $BC=9$ 單位.連結 CD.

(3) 量得 $\angle CDB=42^\circ$.

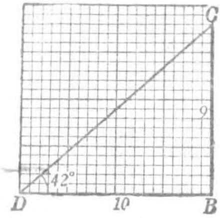

圖 663.

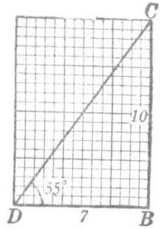

圖 664.

〔例 4〕 已知一角的餘切是 0.7，求此角的度數.

〔解〕 (1) 作 $DB=7$ 單位，如圖 664.

(2) 作 $BC \perp DB$，取 $BC=10$ 單位，連結 CD.

(3) 量得 $\angle CDB=55^\circ$.

〔例 5〕 已知一角的正割是 1.3，求此角的度數.

〔解〕 (1) 作 $DB=10$ 單位，如圖 665.

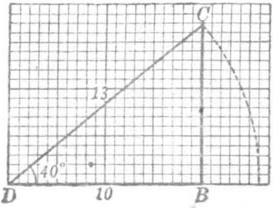

圖 665.

(2) 作 $BC \perp DB$.

(3) 用 D 做圓心，13 單位做半徑，畫弧，交 BC 於 C，連結 CD.

(4) 量得 $\angle CDB=40^\circ$.

〔例 6〕 已知一角的餘割是 1.2, 求此角的度數.

〔解〕 (1) 作 AB, 在 B 作 $BC\perp AB$, 取 $BC=10$ 單位, 如圖 666.

(2) 用 C 做圓心, 12 單位做半徑, 畫弧, 交 AB 於 D, 連結 CD.

(3) 量得 $\angle CDB=56^\circ$.

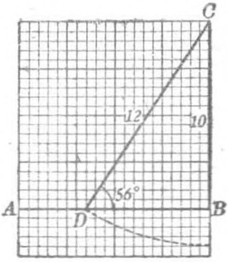

圖 666.

§ 385. **銳角正弦餘弦的增減** 作單位圓 O 的四分圓, 半徑 $OB\perp OA$. 過 O 作半徑 OP_1, OP_2, OP_3, OP_4, 又從 P_1, P_2, P_3, P_4 作 P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3, P_4M_4 都垂直於 OA, 則

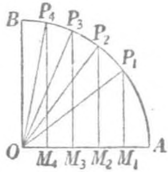

圖 667.

$$\sin P_1OA=\frac{P_1M_1}{OP_1}=P_1M_1,\quad \cos P_1OA=\frac{OM_1}{OP_1}=OM_1;$$

$$\sin P_2OA=\frac{P_2M_2}{OP_2}=P_2M_2,\quad \cos P_2OA=\frac{OM_2}{OP_2}=OM_2;$$

$$\sin P_3OA=\frac{P_3M_3}{OP_3}=P_3M_3,\quad \cos P_3OA=\frac{OM_3}{OP_3}=OM_3;$$

$$\sin P_4OA=\frac{P_4M_4}{OP_4}=P_4M_4,\quad \cos P_4OA=\frac{OM_4}{OP_4}=OM_4.$$

今從圖 667 易見: $P_4M_4>P_3M_3>P_2M_2>P_1M_1$,

$$OM_4 < OM_3 < OM_2 < OM_1.$$

$$\therefore\quad \sin P_4OA > \sin P_3OA > \sin P_2OA > \sin P_1OA,$$

$$\cos P_4OA < \cos P_3OA < \cos P_2OA < \cos P_1OA.$$

故可得定理如下:

銳角增大,他的正弦也增大,餘弦反減小.

§ **386. 銳角正切正割的增減** 作單位圓 O 的四分圓,半徑 $OB \perp OA$. 在 A 作切線,並在切線上任取 T_1, T_2, T_3, T_4 各點,連結 OT_1, OT_2, OT_3, OT_4. 則

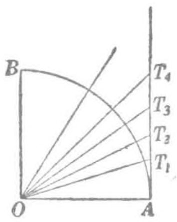

圖 668.

$$\tan T_1OA = \frac{AT_1}{OA} = AT_1, \quad \sec T_1OA = \frac{OT_1}{OA} = OT_1;$$

$$\tan T_2OA = \frac{AT_2}{OA} = AT_2, \quad \sec T_2OA = \frac{OT_2}{OA} = OT_2;$$

$$\tan T_3OA = \frac{AT_3}{OA} = AT_3, \quad \sec T_3OA = \frac{OT_3}{OA} = OT_3;$$

$$\tan T_4OA = \frac{AT_4}{OA} = AT_4, \quad \sec T_4OA = \frac{OT_4}{OA} = OT_4.$$

今從圖 668 易見: $AT_4 > AT_3 > AT_2 > AT_1$,

又據斜線長短比較定理,得 $OT_4 > OT_3 > OT_2 > OT_1$,

$\therefore\quad \tan T_4OA > \tan T_3OA > \tan T_2OA > \tan T_1OA,$

$\sec T_4OA > \sec T_3OA > \sec T_2OA > \sec T_1OA.$

故可得定理如下:

銳角增大,他的正切正割也都增大.

§337. **銳角餘切餘割的增減**　作單位圓 O 的四分圓,半徑 $OB \perp OA$, 從 B 作切線,並在切線上任取 C_1, C_2, C_3, C_4 各點,連結 OC_1, OC_2, OC_3, OC_4, 因切線與半徑 OA 平行,故

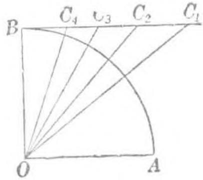

圖 669.

$$\angle C_1OA = \angle BC_1O,\ \angle C_2OA = \angle BC_2O, \cdots\cdots \text{則得}$$

$$\cot C_1OA = \frac{BC_1}{OB} = BC_1,\quad \csc C_1OA = \frac{OC_1}{OB} = OC_1;$$

$$\cot C_2OA = \frac{BC_2}{OB} = BC_2,\quad \csc C_2OA = \frac{OC_2}{OB} = OC_2;$$

$$\cot C_3OA = \frac{BC_3}{OB} = BC_3,\quad \csc C_3OA = \frac{OC_3}{OB} = OC_3;$$

$$\cot C_4OA = \frac{BC_4}{OB} = BC_4,\quad \csc C_4OA = \frac{OC_4}{OB} = OC_4.$$

但　$BC_1 > BC_2 > BC_3 > BC_4$. (見圖 669)

$OC_1 > OC_2 > OC_3 > OC_4$. (斜線長短比較定理)

$\therefore\quad \cot C_1OA > \cot C_2OA > \cot C_3OA > \cot C_4OA,$

$\csc C_1OA > \csc C_2OA > \csc C_3OA > \csc C_4OA.$

故得定理如次:

銳角增大,他的餘切餘割反都減小.

習題八十

1. 求$30°, 45°, 60°$各角的三角函數值.

2. 從上題求得的三角函數值,可以證明角度減小,那幾個函數值也隨着減小,那幾個函數值反而增大?

3. 已知$\sin A=0.19$,求$\angle A$的度數.

4. 已知$\cos A=0.97$,求$\angle A$的度數.

5. 已知$\tan A=0.51$,求$\angle A$的度數.

6. 已知$\cot A=2.9$,求$\angle A$的度數.

7. 已知$\sec A=1.2$,求$\angle A$的度數.

8. 已知$\csc A=1.6$,求$\angle A$的度數.

9. 設圓半徑是1,求下列內接正多角形的邊心距與邊長:

正方形, 正三角形, 正五邊形, 正六邊形.

10. 細看§383的六例,一角與餘角的三角函數,有什麼關係?

第二章　基本關係式,

三角函數表的用法

§388. 同角的三角函數相互關係　以前所述一角的六種三角函數間,彼此有很密切的關係,可分做三類如下:

(I) **倒數關係式.**

如圖 670 從三角函數定義,

$$\sin A \csc A=\frac{a}{c}\times\frac{c}{a}=1,$$

$$\cos A \sec A=\frac{b}{c}\times\frac{c}{b}=1,$$

$$\tan A \cot A=\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1.$$

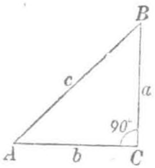

圖 670.

$$\therefore\ \left.\begin{array}{l}\sin A\csc A=1,\ \sin A=\dfrac{1}{\csc A},\ \csc A=\dfrac{1}{\sin A};\\ \cos A\sec A=1,\ \cos A=\dfrac{1}{\sec A},\ \sec A=\dfrac{1}{\cos A};\\ \tan A\cot A=1,\ \tan A=\dfrac{1}{\cot A},\ \cot A=\dfrac{1}{\tan A}.\end{array}\right\}\cdots(\mathrm{I})$$

(II) **相除關係式.**

如圖 671 從三角函數定義,

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{\sin A}{\cos A},$$

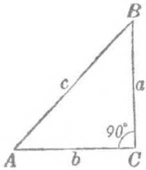

圖 671.

$$\cos A=\frac{b}{a}=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=\frac{\cos A}{\sin A}.$$

$$\therefore\quad \tan A=\frac{\sin A}{\cos A},\quad \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

(III) 平方關係式.

如前圖依畢氏定理, $a^2+b^2=c^2$.

將此式順次用 c^2, b^2, a^2 去除,得

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{b^2}{c^2}=1. & \therefore\quad \sin^2 A+\cos^2 A=1.\\[2ex] \dfrac{a^2}{b^2}+1=\dfrac{c^3}{b^2}. & \therefore\quad \tan^2 A+1=\sec^2 A.\\[2ex] 1+\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{c^2}{a^2}. & \therefore\quad 1+\cot^2 A=\csc^2 A.\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(\mathrm{III})$$

從此公式,又可得下列四式:

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A,\quad \cos^2 A=1-\sin^2 A,$$

$$\tan^2 A=\sec^2 A-1,\quad \cot^2 A=\csc^2 A-1.$$

〔注意〕 $\sin^2 A, \cos^2 A$ 等卽表 $(\sin A)^2$, $(\cos A)^2$ 等.

§389. 三角函數的關係圖 上節所述的三角函數關係,可以用圖表明.如圖6 2,將六種三角函數寫在六邊形的各頂點, sin, tan, sec 在左, cos, cot, csc 在右,次序都是從上到下.當中寫1,聯絡全部,則有如下的表示:

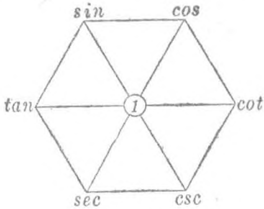

圖　672.

(I)　**倒數關係.**

夾 1 相對的二函數,都有倒數的關係,卽此二函數的積等於 1. 如 $\sec A=\frac{1}{\cos A}$, $\cos A\sec A=1$.

(II)　**相除關係.**

沿六邊形的各頂點,每相鄰三函數中,用前(或後)一函數除當中一函數,便得後(或前)一函數,卽如下:

$$\frac{\cos A}{\sin A}=\cot A,\quad \frac{\cot A}{\cos A}=\csc A,\quad \frac{\csc A}{\cot A}=\sec A,$$

$$\frac{\sec A}{\csc A}=\tan A,\quad \frac{\tan A}{\sec A}=\sin A,\quad \frac{\sin A}{\tan A}=\cos A;$$

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\tan A,\quad \frac{\tan A}{\sin A}=\sec A,\quad \frac{\sec A}{\tan A}=\csc A,$$

$$\frac{\csc A}{\sec A}=\cot A,\quad \frac{\cot A}{\csc A}=\cos A,\quad \frac{\cos A}{\cot A}=\sin A.$$

因方向有順逆的不同,故每種都有二式.

(III)　**平方關係.**

上面六邊形圖中,有頂角向下的三角形三個,每一個三角形中,上二數平方的和,等於下一數的平方. 如

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1.$$

故從上圖,可將同一銳角的三角函數全部公式,容易記憶.

§390. 三角函數的互換 已知銳角的一個三角函數,便可依§388同角的三角函數相互關係,求得其他各函數,此是代數解法.若作直角三角形的圖,從圖求得其他各函數,則為幾何解法.

〔例 1〕 已知 $\sin A$,求其他的三角函數.

〔解 1〕 代數解法.

依平方關係式,

$$\cos^2 A=1-\sin^2 A.$$

因 $\cos A$ 是正數,故

$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A},$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}},$$

$$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A},$$

$$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}},$$

$$\csc A=\frac{1}{\sin A}.$$

〔解 2〕 幾何解法.

設 $\sin A=s=\frac{s}{1}$,作垂線等於 s,斜邊等於1單位的直角三角形如圖673,則底邊等於 $\sqrt{1-s^2}$. 故

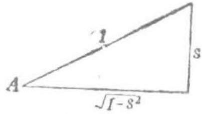

圖 673.

$$\cos A=\frac{\sqrt{1-s^2}}{1}=\sqrt{1-\sin^2 A},$$

$$\tan A=\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}=\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}},$$

$$\cot A=\frac{\sqrt{1-s^2}}{s}=\frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A},$$

$$\sec A=\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}},$$

$$\csc A=\frac{1}{s}=\frac{1}{\sin A}.$$

〔例 2〕 已知 $\tan A=\frac{2}{3}$, 求其他三角函數的值.

〔解 1〕 代數解法.

因 $$\sec^2 A=1+\tan^2 A=1+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{13}{9}.$$

故 $$\cos^2 A=\frac{9}{13}.$$

因 $\sin A$, $\cos A$ 都是正數, 故

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{9}{13}}=\frac{2}{\sqrt{13}},$$

$$\cos A=\sqrt{\frac{9}{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}},$$

$$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{3}{2},$$

$$\sec A=\sqrt{\frac{13}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{3},$$

$$\csc A=\frac{1}{\sin A}=\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

〔解 2〕 幾何解法.

作底邊是 3 單位,垂線是 2 單位的直角三角形如圖 674, 則斜邊$=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$. 故從此圖可得結果與解 1 相同.

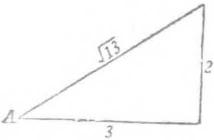

圖 674.

習題八十一

1. 試用$\cos A$表銳角A的其餘各函數.
2. 試用$\cot\theta$表銳角θ的其餘各函數.
3. 試用$\sec\alpha$表銳角α的其餘各函數.
4. 試用$\csc x$表銳角x的其餘各函數.
5. 已知$\sin A=\frac{15}{17}$, 求銳角A的其餘各函數.
6. 已知$\cos x=\frac{b}{a}$, 求銳角x的其餘各函數.
7. 已知$\sec A=2$, 求銳角A的其餘各函數.
8. 已知$\cot x=6$, 求$\sin x$, $\cos x$的值至小數第三位.
9. 試從$6\cos\theta+\sec\theta=5$, 求$\cos\theta$的值.
10. 試從$1+\sin^2\theta=3\cos\theta\sin\theta$, 求$\tan\theta$的值.

§391. 簡單三角恆等式 前§388所講的各種公式,是三角函數間的基本關係式,從此等公式,又可得各種複雜的關係,都叫做三角恆等式.換句話說,凡三角函數等式中的角,無論用任何度數代入,兩邊都能相等的,就是恆等式,要證明三角恆等式的眞確,最普通的有下列三種方法:

(I) **從複雜一邊導出簡單一邊的方法.**

〔例 1〕 證明 $\sec A-\tan A\sin A=\cos A$.

〔證明〕 $\sec A-\tan A\sin A$

$$=\frac{1}{\cos A}-\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\sin A \quad \text{(倒數及相除關係)}$$

$$=\frac{1-\sin^2 A}{\cos A}=\frac{\cos^2 A}{\cos A} \quad \text{(平方關係)}$$

$$=\cos A$$

(II) **兩邊導出同一式的方法.**

〔例 2〕 證明 $\dfrac{\csc A-\sec A}{\cot A+\tan A}=\dfrac{\cot A-\tan A}{\csc A+\sec A}$.

〔證明〕 左邊$=\dfrac{\dfrac{1}{\sin A}-\dfrac{1}{\cos A}}{\dfrac{\cos A}{\sin A}+\dfrac{\sin A}{\cos A}}$ (倒數及相除關係)

$$=\frac{\cos A-\sin A}{\cos^2 A+\sin^2 A} \quad \text{(母子同用 } \sin A\cdot\cos A \text{ 乘)}$$

$$=\frac{\cos A-\sin A}{1} \quad \text{(平方關係)}$$

$$=\cos A-\sin A.$$

右邊$=\dfrac{\dfrac{\cos A}{\sin A}-\dfrac{\sin A}{\cos A}}{\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{1}{\cos A}}$ (倒數及相除關係)

$$=\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos A+\sin A} \quad \text{(母子同用 } \sin A\cdot\cos A \text{ 乘)}$$

$$=\cos A-\sin A \quad \text{(除法).}$$

故此恆等式眞確.

(III) **從已知恆等式導出的方法.**

〔例 3〕 證明 $\tan^2 A-\cot^2 A=\sec^2 A-\csc^2 A$.

〔證明〕 從平方關係,

$$1+\tan^2 A=\sec^2 A,$$

$$1+\cot^2 A=\csc^2 A.$$

從前式兩邊各減後式兩邊,即得

$$\tan^2 A-\cot^2 A=\sec^2 A-\csc^2 A.$$

故此恆等式眞確.

習題八十二

證明下列各恆等式:

1. $\tan^2 A-\sin^2 A=\tan^2 A\sin^2 A$.

2. $\tan A-\cot A=\sec A\csc A$.

3. $\sec^2 A+\csc^2 A=\sec^2 A\csc^2 A$.

4. $\tan^2 x\cos^2 x+\cot^2 x\sin^2 x=1$.

5. $\cot^2 A-\cos^2 A=\cos^2 A\cot^2 A$.

6. $(\tan A+\sec A)^2=\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}$.

7. $\cos^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\sin^2 A$.

化簡下列各式:

8. $(\sin A-\csc A)^2+(\cos A-\sin A)^2-(\tan A-\cot A)^2$.

9. $(\csc x-\sin x)(\sec x-\cos x)(\tan x+\cot x)$.

10. $\dfrac{(\tan A+\cot A)\sin A\cos A}{\dfrac{1}{\tan^2 A+1}+\dfrac{1}{\cot^2 A+1}}$.

§392. 餘角的三角函數.

如圖 675, 依三角函數定義.

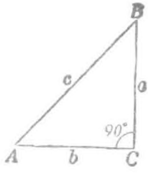

圖 675.

$$\sin B=\frac{b}{c}=\cos A,$$

而 $$B=90^\circ-A.$$

又 $$\cos B=\frac{a}{c}=\sin A,$$

$$\tan B=\frac{b}{a}=\cot A,$$

$$\cot B=\frac{a}{b}=\tan A,$$

$$\sec B=\frac{c}{a}=\csc A,$$

$$\csc B=\frac{c}{b}=\sec A.$$

$$\therefore\quad \sin(90^\circ-A)=\cos A,$$
$$\cos(90^\circ-A)=\sin A,$$
$$\tan(90^\circ-A)=\cot A,$$
$$\cot(90^\circ-A)=\tan A,$$
$$\sec(90^\circ-A)=\csc A,$$
$$\csc(90^\circ-A)=\sec A.$$

由本節所得的結果,可見一銳角的餘弦,餘切餘割,即等於其餘角的正弦,正切,正割,此便是餘弦等命名的理由.

§393. 45° 的三角函數.

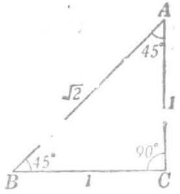

圖 676.

設 ABC 是直角三角形, $\angle C=90°$, $\angle A=45°$, $BC=1$, 則

$\angle B=45°$ (直角三角形二角互爲餘角系)

$AC=1$ (等腰三角形判別定理)

$AB=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ (畢氏定理)

依三角函數定義,即得

$$\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan 45°=\frac{1}{1}=1, \qquad \cot 45°=\frac{1}{1}=1,$$

$$\sec 45°=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}, \qquad \csc 45°=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}.$$

〔注意〕 45° 的三角函數,只要從直角三角形三邊的比是 $1:1:\sqrt{2}$, 着想,即易於記憶.

§394. 60° 及 30° 的三角函數

設 ABC 是正三角形,邊長是 2, 作 $\angle A$ 的平分線 AD, 則

$\angle ABD=60°$ (正多角形內角系)

$\angle BAD=30°$ (作圖) $=90°-60°$

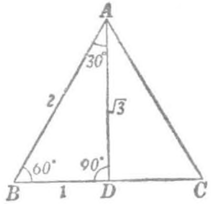

圖 677.

$\angle ADB=90°$ (等腰三角形頂角平分線系),

$AB=2$ (作圖),

$BD=1$ (等腰三角形頂角平分線系),

$AD=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BD}^2}$

$=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}.$ (弦與股平方關係系)

依三角函數定義,及餘角的三角函數,即得

$$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30°,$$

$$\cos 60°=\frac{1}{2}=\sin 30°,$$

$$\tan 60°=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}=\cot 30°,$$

$$\cot 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan 30°,$$

$$\sec 60°=\frac{2}{1}=2=\csc 30°,$$

$$\csc 60°=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}=\sec 30°.$$

〔注意〕 30° 及 60° 的三角函數,只要從直角三角形三邊的比是 $1:\sqrt{3}:2$ 着想,即易於記憶.

§395. 0°的三角函數

設$\angle AOP=\angle\theta$是一很小的角，$PM\perp OA$. 半徑$OP=OA=1$，則

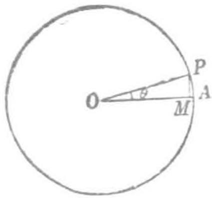

圖 678.

$$\sin\theta=\frac{PM}{OP}=PM,$$

$$\cos\theta=\frac{OM}{OP}=OM.$$

若OP向OA移動,且至於重合,則

$$\theta\text{ 變成 }0°,$$

$$OM\text{ 變成 }OA=1.$$

$$\therefore\quad \sin 0°=0,\qquad\qquad \cos 0°=1,$$

$$\tan 0°=\frac{\sin 0°}{\cos 0°}=\frac{0}{1}=0,\qquad \cot 0°=\frac{\cos 0°}{\sin 0°}=\frac{1}{0}=\infty,$$

$$\sec 0°=\frac{1}{\cos 0°}=\frac{1}{1}=1,\qquad \csc 0°=\frac{1}{\sin 0°}=\frac{1}{0}=\infty.$$

〔注意〕 參看§337. 又∞是無窮大的記號.

§396. 90°的三角函數

設$\angle AOP=\angle\theta$是近於90°的角，$PM\perp OA$, 半徑$OA=OP=1$，則

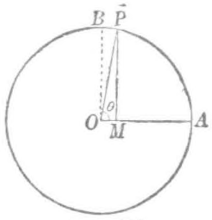

圖 679.

$$\sin\theta=\frac{PM}{OP}=PM,$$

$$\cos\theta=\frac{OM}{OP}=OM.$$

作$OB\perp OA$. 若OP向OB移動,且至於重合,則

$$\theta\text{變成}90°,\quad PM\text{變成}OB=1,\quad OM\text{變成}0.$$

$\therefore \quad \sin 90^\circ = 1, \qquad\qquad \cos 90^\circ = 0,$

$$\tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty, \quad \cot 90^\circ = \frac{\cos 90^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\sec 90^\circ = \frac{1}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty, \quad \csc 90^\circ = \frac{1}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{1} = 1.$$

〔注意〕 參看 § 386.

習題八十三

試求下列各式的值:

1. $\sin 30^\circ + \cos^2 45^\circ$.　　2. $\tan 45^\circ + \cot 45^\circ$.

3. $\sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ$.　　4. $\cos 45^\circ \sin 45^\circ - \sin^2 30^\circ$.

5. $\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$.

6. $\cot^2 30^\circ \csc^2 45^\circ - \tan^2 60^\circ$.

7. $3 \sin 30^\circ - 4 \sin^3 30^\circ$.

8. $2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ \cot 60^\circ$.

9. 試化簡: $\sin(90^\circ - A)\cot(90^\circ - A)$.

10. 設 $A = 30^\circ$, 試證 $\sin 2A$ 是不是與 $2 \sin A$ 相等? 又 $\cos 2A$ 與 $2 \cos A$ 相等麼? $\tan 2A$ 與 $2 \tan A$ 相等麼?

試證下列各式:

11. $\tan 36^\circ \tan 54^\circ = 1$.

12. $\sin^2 27^\circ + \sin^2 63^\circ = 1$.

13. $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ = \sin 90^\circ$.

14. $\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 60^\circ = \sin 30^\circ$.

15. $\dfrac{\tan 60^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 30^\circ} = \tan 90^\circ$.

16.　$4\cos^3 30^\circ - 3\cos 30^\circ = \cos 90^\circ$.

17.　$\tan(45^\circ+\theta)\tan(45^\circ-\theta)=1$. (但 $\theta<45^\circ$)

18.　$\sin^2(45^\circ+\theta)+\sin^2(45^\circ-\theta)=1$. (但 $\theta<45^\circ$).

19.　$\sec(90^\circ-A)-\cot A\cos(90^\circ-A)\tan(90^\circ-A)=\sin A$.

20.　$\cot 60^\circ(1+\cos 30^\circ+\sin 30^\circ)=\cos 60^\circ+\sin 60^\circ$.

§397. **三角函數真數表**　前§383求銳角的三角函數值,是根據實驗的,但全憑目力觀察,所得數目,只能準確到一二位,究不能合於實用,§393到§396的求法,是根據理論的,雖然比較的可靠,但僅限於特別角,不敷應用,故古人費許多工夫,算出一般銳角的三角函數值,調製成表,以供實用,叫做**三角函數真數表**,如本書卷後所載的便是.因據§392,一銳角的三角函數,等於餘角的餘函數,故只載三種表,便足以應用:第一種是正弦餘弦,第二種是正切餘切,第三種是正割餘割.

每一種表中,載自0°至90°止每隔6分的三角函數,另將1, 2, 3, 4, 5分的差數,列在右邊公差一欄.因據§385至§387三角函數的增減,角度愈大,正弦正切正割也愈大,餘弦餘切餘割反愈小,故前三者應從上向下看,公差欄的數目應加入,後三者應從下向上看,公差欄的數目應減去.至於造表的方法,留待高級中學時再講,現在只把用法分述於下:

§398. **有銳角求函數值**

〔例 1〕 求 $\sin 17^\circ 38'$ 的值.

〔解〕 在第233頁表中左邊,從上向下查得正弦17°的一列是:

	0′	6′ 12′ 18′	24′ 30′ 36′	……	……		1′ 2′ 3′	4′ 5′
17	.2924	2940 2957 2974	2990 3007 3024	……	……	72	3 6 8	11 14

$\therefore\quad \sin 17°36' = .3024,$

差數　　　　　　　$2' = .0006;$

∴ 相加,　　　$\sin 17°38' = .3030.$

〔例 2〕 求 $\cos 58°28'$ 的值.

〔解〕 在第233頁表中右邊,從下向上查得餘弦58°的一列是:

31	.5150	…………	…… 5240	5255 5270 5284	5299	**58**	2 5 7	10 12
	60′	…………	…… 24′	18′ 12′ 6′	0′		1′ 2′ 3′	4′ 5′

$\therefore\quad \cos 58°24' = .5240,$

差數　　　　　　　$4' = .0010;$

∴ 相減,　　　$\cos 58°28' = .5230.$

〔例 3〕 求 $\tan 71°36'$ 的值.

〔解〕 在第236頁表中左邊,從上向下查得正切71°的一列是:

	0′	6′ 12′ 18′	24′ 30′ 36′	……	…		1′ 2′ 3′	4′ 5′
71	2.9042	9208 9375 9544	9714 9887 0061	……	…	18	29 58 87	115 144

此列中各行的數都是小數,公用首行的2做整數,但在第一數字上面有橫線的,該將2加1成3做整數.

$$\therefore \quad \tan 71°36' = 3.0061.$$

〔例 4〕 求 $\tan 84°32'$ 的值.

〔解〕 在第236頁表中左邊,從上向下查得正切84°的一列是:

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	……	…		1′	2′	3′	4′	5′
84	9.5144	9.677	9.845	1.002	1.020	1.039	1.058	……	…	5					

此列中因正切增大很快,故公差欄中沒有數目.此時要求差數,宜用比例求得.

$$\tan 84°30' = 10.39,$$

差數　　$6' = .19$ (因 $10.58 - 10.39 = .19$),

差數　　$2' = .06$ (因 $.19 \times \frac{1}{3} = .06$);

$$\therefore \quad \tan 84°32' = 10.39 + .06 = 10.45.$$

此外求正割與求正切相仿,求餘切餘割與求餘弦相仿,不再舉例.

§399. 有函數值求銳角

〔例 1〕 已知 $\sin A = .8351$, 求 A.

在第234頁表中,查得正弦值與.8351相近的一列是:

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	……	……		1′	2′	3′	4′	5′
56	.8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	……	……	33	2	3	5	6	8

$$\sin 56°36' = .8348,$$

差數　　$2' = .0003;$

$$\therefore \quad \sin 56°38' = .8351,$$

即　　$A = 56°38'.$

〔例 2〕 已知 $\cos A=.5259$, 求 A.

在第233頁表中,查得餘弦值與.5259相近的一列是:

31	5150	…………	…………	5255 5270 5284	5299	58	2 5 7	10 12
	60′	…………	…………	18′ 12′ 6′	0′		1′ 2′ 3′	4′ 5′

$$\cos 58°18'=.5255,$$

差數 $$2'=.0004\ (\text{近似值}),$$

$$\therefore\ \cos 58°16'=.5259,\ \text{即}\ A=58°16'.$$

2′應減而.0004應加,須注意.

此外從正切正割求角度,與從正弦求角度相仿,從餘切餘割求角度,與從餘弦求角度相仿,不再舉例.

§ 400. 簡單三角方程 含三角函數的方程,叫做三角方程.求適合於三角方程的角,叫做解三角方程.

〔例 1〕 求適合於 $\sec^2\theta=3\tan^2\theta-1$ 的銳角 θ.

〔解〕 依平方關係代入,得

$$1+\tan^2\theta=3\tan^2\theta-1.$$

移項化簡, $\tan^2\theta=1$, $\therefore\ \tan\theta=1$.

從§393或查正切眞數表,知 $\theta=45°$.

〔例 2〕 解 $2\cos^2 x+3\sin x=3$.

〔解〕 依平方關係代入,得

$$2(1-\sin^2 x)+3\sin x=3,$$

移項化簡, $2\sin^2 x-3\sin x+1=0.$

$$\therefore\ (\sin x-1)(2\sin x-1)=0.$$

如 $\sin x-1=0$, 則 $\sin x=1$, 從 § 396 或查正弦眞數表, 知 $x=90^\circ$.

如 $2\sin x-1=0$, 則 $\sin x=\frac{1}{2}$, 從 § 394 或查正弦眞數表, 知 $x=30^\circ$.

〔例 3〕 解 $\sqrt{2}\cos A=\cot A$.

〔解〕 依相除關係代入得

$$\sqrt{2}\cos A=\frac{\cos A}{\sin A}.$$

移項析因式, $$\cos A\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sin A}\right)=0.$$

$$\therefore\quad \cos A=0, \text{或} \sin A=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

從 § 396 及 § 393 或查正弦餘弦眞數表, 知 $A=90^\circ$ 或 $A=45^\circ$.

〔注意〕 此處因限於銳角,故三角函數取正數不取負數.

習題八十四

1. 求下列三角函數的值:

$\sin 10^\circ 6'$, $\sin 53^\circ 24'$, $\sin 74^\circ 47'$, $\sin 66^\circ 55'$;

$\cos 28^\circ 6'$, $\cos 38^\circ 54'$, $\cos 55^\circ 55'$, $\cos 73^\circ 17'$;

$\tan 30^\circ$, $\tan 51^\circ\ 5'$, $\tan 65^\circ 44'$, $\tan 78^\circ 56'$;

$\cot 38^\circ$, $\cot 59^\circ 12'$, $\cot 7^\circ 18'$, $\cot 14^\circ 44'$;

$\sec 42^\circ$, $\sec 45^\circ 24'$, $\sec 64^\circ\ 8'$, $\sec 78^\circ 20'$;

$\csc 35^\circ$, $\csc 56^\circ 30'$, $\csc 60^\circ 40'$, $\csc 64^\circ 50'$.

2. 求下列各式中的銳角 A:

$\sin A=.5505$, $\sin A=.9121$;

$\cos A=.8900$, $\cos A=.3132$;

$\tan A=2.2228$, $\tan A=5.4125$;

$\cot A=3.0415$, $\cot A=10.68$;

$\sec A=7.0112$, $\sec A=17.64$;

$\csc A=9.1129$, $\csc A=11.83$.

3. 查表校正§383, §384中各例的結果.

解下列各方程式:

4. $\sin x=\cos 2x$.　5. $\tan(30^\circ-x)=\tan 4x$.

6. $\sin x=\cot 4x$.　7. $\cos 3x=\sin 7x$.

8. $6\cos^2\theta=1+\cos\theta$.　9. $\sin^2\theta-2\cos\theta+\frac{1}{4}=0$.

10. $2(\tan\theta+\cot\theta)=5$.　11. $\tan x+\cot x=2$.

12. $4\cos^2\theta-2(1+\sqrt{2})\cos\theta+2=0$.

13. $5-4\sin x-4\cos^2 x=0$.

第三章　直角三角形解法

§401. 直角三角形解法　根據§181三角形全等的條件,知直角三角形全等的條件,有下列四種:

(I)　一銳角與弦對應相等.

(II)　一銳角與一股對應相等.

(III)　一弦與一股對應相等.

(IV)　二股對應相等.

換句話說,在直角三角形中,已知

(I)　一銳角與弦.

(II)　一銳角與一股.

(III)　弦與一股.

(IV)　二股.

便可作圖,再依三角法從已知元素的數值求得末知元素的數值,就叫做直角三角法解法.故解直角三角形,也可如上分做四種,分述於下:

§402. 已知一銳角與弦的解法

如圖680,已知銳角B與弦c,則

$$\angle A=90^\circ-\angle B;$$

$$\frac{a}{c}=\cos B,\quad\therefore\ a=c\cos B;$$

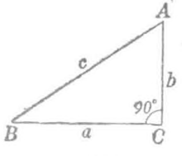

圖　680.

$$\frac{b}{c}=\sin B,\quad \therefore\quad b=c\sin B.$$

〔例 1〕 如上圖,已知 $\angle B=9°20'$, $c=125$ 尺,求 $\angle A, a, b$.

〔解〕 $\angle A=90°-9°20'=80°40'$.

$$a=125\cos 9°20'=125\times.9868=123.35(\text{尺}).$$

$$b=125\sin 9°20'=125\times.1622=20.275\ (\text{尺}).$$

〔例 2〕 一人在海中望見海面上有三燈塔在半圓上,如圖 681,已知 $\angle CAB=60°$,圓半徑 8 里,求從 C 至 A 與 B 的距離及 $\angle CBA$ 的度數.

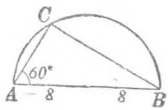

圖 681.

〔解〕 $\angle ACB=90°$. (半圓含直角系)

$$\angle CBA=90°-\angle CAB=90°-60°=30°.$$

$$\frac{CA}{AB}=\cos 60°=\frac{1}{2}.\quad \therefore\ CA=\frac{1}{2}AB=8\ (\text{里}).$$

$$\frac{CB}{AB}=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}.\quad \therefore\ CB=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=8\sqrt{3}(\text{里}).$$

〔答〕 CA 距離 8 里, CB 距離 $8\sqrt{3}$ 里, $\angle CBA=30°$.

§ 403. 已知一銳角與一股的解法

如圖 682,已知銳角 B (或 A) 與股 b,則

$$\angle A=90°-\angle B.$$

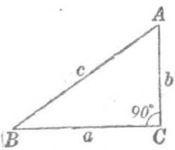

圖 682.

$$\frac{a}{b}=\tan A,\quad \therefore\quad a=b\tan A.$$

$$\frac{b}{c}=\sin B,\quad \therefore\quad c=\frac{b}{\sin B}.$$

〔注意〕 如求得 a,也可依公式 $c^2=a^2+b^2$ 求 c.

〔例 1〕 如上圖,已知 $\angle B=52°55'$, $b=27$ 公尺,求 $\angle A$, a, c.

〔解〕 $\angle A=90°-52°55'=37°5'$.

$$a=27\tan 37°5'=27\times .7559=20.41\ (\text{公尺}).$$

$$c=\frac{27}{\sin 52°55'}=\frac{27}{.7978}=33.83\ (\text{公尺}).$$

〔例 2〕 有一起重機,臂與水平面成角 60°,繫桿是水平的,長 12 尺,求臂的長及機的高.

〔解〕 如圖 683, AB 是機, BC 是繫桿, AC 是臂,則

$$\frac{c}{12}=\tan 60°,$$

$$\therefore\quad c=12\tan 60°=12\sqrt{3}=20.78\ (\text{尺}).$$

$$\frac{12}{b}=\cos 60°.$$

$$\therefore\quad b=\frac{12}{\cos 60°}=\frac{12}{\frac{1}{2}}=24\ (\text{尺}).$$

〔答〕 機高 20.78 尺,臂長 24 尺.

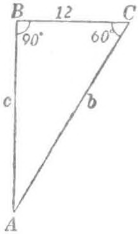

圖 683.

§ 404. 已知弦與一股的解法

如圖 684, 已知弦 c 與股 a (或 b), 則

$$\cos B=\frac{a}{c}\left(\text{或 }\sin B=\frac{b}{c}\right).$$

$$\angle A=90°-\angle B.$$

$$b^2=\sqrt{c^2-a^2}\ (\text{或 } a=\sqrt{c^2-b^2}).$$

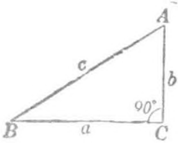

圖 684.

〔例 1〕 如上圖,已知 $c=18$, $b=6\sqrt{2}$, 求 $\angle A$, $\angle B$, a.

〔解〕 $\sin B=\dfrac{6\sqrt{2}}{18}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}=.4714=\sin 28°7'$.

$$\therefore \quad \angle B = 28^\circ 7 .$$

$$\angle A = 90^\circ - 28^\circ 7' = 61^\circ 53'.$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{18^\circ - (6\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{252} = 6\sqrt{7} \doteqdot 15.87.$$

〔例 2〕 一人移高 50 尺的梯,斜靠於高 $45\frac{1}{2}$ 尺的牆上,使梯頂與牆頂相齊.試求梯足至牆足的距離及梯的傾斜角.

〔解〕 如圖 685, AB 是牆, AC 是梯, 則

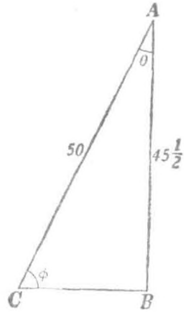

圖 685.

$$\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{45.5}{50} = .91$$

$$= \cos 24^\circ 30'.$$

$$\therefore \angle\theta = 24^\circ 30'.$$

$$\angle\phi = 90^\circ - 24^\circ 30' = 65^\circ 30'.$$

$$\frac{CB}{AC} = \sin\theta = \sin 24^\circ 30' = .4147.$$

$$\therefore CB = 50 \times .4147 = 20.735 \text{ (尺)}.$$

〔答〕 梯與牆成角 $24^\circ 30'$, 與地面成角 $65^\circ 30'$, 梯足與牆足距離 20.735 尺.

§ 405. 已知二股的解法

如圖 686, 已知二股 a 與 b, 則

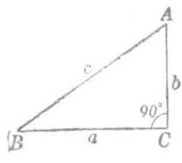

圖 686.

$$\tan B = \frac{b}{a},$$

$$\angle A = 90^\circ - B^\circ,$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

〔例 1〕　如上圖,已知$a=100$尺,$b=600$尺,求$\angle A$, $\angle B$, c.

〔解〕　$\tan B=\frac{600}{100}=6=\tan 80°32'.2$。

$$\therefore\quad \angle B=80°32'.2.$$

$$\angle A=90°-80°32'.2=9°27'.8.$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{100^2+600^2}$$

$$=\sqrt{370000}=608.3\ (尺).$$

〔例 2〕　山高3000尺,山頂有敵兵.今離山腳4000尺的平地上,要架礮轟擊山頂敵兵.問礮管該與地面成幾度的角? 又礮彈的射程至少要多少遠?

〔解〕　如圖 687, A是山頂, B是架礮處,則

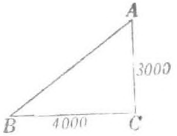

圖 687.

$$\tan B=\frac{3000}{4000}=.75=\tan 36°52'.$$

$$\therefore\quad \angle B=36°52'.$$

$$AB=\sqrt{3000^2+4000^2}$$

$$=\sqrt{25000000}=5000\ (尺).$$

〔答〕　該與平地成角$36°52'$,射程至少要5000尺.

習題八十五

解下列各題的直角三角形ABC,其中C是直角, a, b, c是各角A, B, C的對邊:

1.　$c=250$尺, $\angle B=72°$.　2.　$a=12$公尺, $A=62°36'$.

3.　$a=5\sqrt{3}$, $b=15$.　4.　$a=5$寸, $b=7$寸.

5. $a=220$ 尺, $c=500$ 尺.

6. $\angle B=29^\circ$, $c=10$.

7. $a=8.9$, $\angle B=28^\circ 30'$.

8. $c=8.7$, $A=42^\circ$.

9. 如圖 688, A, B 是隔河二點, $\angle A$ 是直角, $AC=650$ 尺, $\angle C=48^\circ$, 求 AB 的距離.

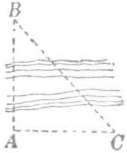

圖 688.

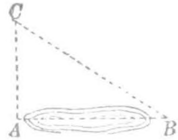

圖 689.

10. 如圖 689, A, B 是隔湖二點, $AC \perp AB$, $AC=820$ 尺, $\angle BCA=56^\circ$. 求 AB.

11. 高 8 尺的竿直立地上,他的影是3.5尺.求太陽的高度(卽太陽光線與平地所成的角).

12. 如圖 690, 試決定他是直角三角形,並求各角的度數.

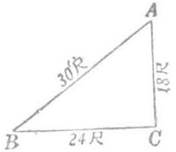

圖 690.

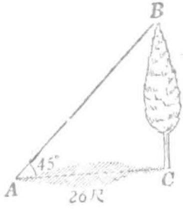

圖 691.

13. 如圖 691, 太陽高度是 45° 時,樹影是 26 尺.求樹高.

14. 一人放風箏,已放出線1000尺,線與平地成角60°,如線張緊不下垂,問此時風箏距地面的高是多少?又風箏直對地面上的點距人的站立處有多遠?

§406. 等腰三角形解法 等腰三角形頂角的平分線,可將原形分成兩個全等直角三角形(見§177等腰三角形頂角平分線系),故解等腰三角形,可應用直角三角形解法.

〔例1〕 等腰三角形的腰是40寸,底角是25°.解此三角形,並求面積.

〔解〕 如圖692,$\angle B=180°-(\angle A+\angle C)=180°-50°=130°$.

從B作$BD\perp AC$.

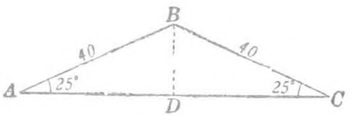

圖 692.

$$AD=AB\cos A=40\cos 25°=40\times .9063=36.25\ (\text{寸}).$$

$\therefore\ AC=2AD=72.50$ (寸).

又 $BD=AB\sin A=40\times\sin 25°=40\times .4226=16.9$ (寸).

$$\text{面積}=\frac{1}{2}AC\times BD=\frac{1}{2}(72.5\times 16.9)=612.6\ (\text{方寸}).$$

〔答〕 $\angle B=130°$,底邊$=72.5$寸,面積$=612.6$方寸.

〔例2〕 有一倉間,闊60尺,屋頂是人字形,頂上的椽子長$30\sqrt{2}$尺.求屋頂的斜度,及屋頂棟樑高出屋簷有多少尺?

〔解〕 如圖 693, x 是屋頂的斜度, BC 垂直於 AD, 是棟樑對於屋簷的高,則

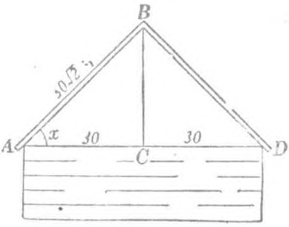

圖 693

$$\cos x=\frac{AC}{AB}=\frac{30}{30\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos 45^\circ,$$

$$\therefore \quad x=45^\circ.$$

又 $$BC=AB\sin x=30\sqrt{2}\sin 45^\circ$$

$$=30\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=30\ (\text{尺}).$$

〔答〕 屋頂斜度 45°, 棟樑高出屋簷 30 尺.

§407. **正多角形解法** 根據 § **362**, § **363**, 知從正 n 邊形的中心與各角頂連結,就是外接圓的半徑,且將原形分成 n 個全等等腰三角形.又從原形中心至各邊作垂線,便是內切圓的半徑,且將此種 n 個全等等腰三角形分成 $2n$ 個全等直角三角形.故正多角解法也可屬於直角三角形解法.

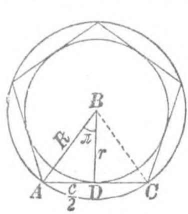

圖 694.

故如圖 694, $\triangle ABC$ 是等腰三角形, $\triangle ABD$ 是直角三角形,則

$$\angle ABC=\frac{360^\circ}{n}$$ (正多角形中心角系),

$$\angle ABD=\angle x=\frac{360^\circ}{2n}$$

$$=\frac{180^\circ}{n}$$ (等腰三角形頂角平分線系),

$AD=\frac{1}{2}c=$ 邊長的一半(同上),

$AB=R=$ 外接圓半徑,

$BD=r=$ 內切圓半徑,

$P=nc=$ 正 n 邊形的周界(周界定義),

$\frac{1}{2}rP=$ 正 n 邊形的面積(正多角形面積定理).

〔例〕 正十邊形的邊長是10寸,求內切與外接圓的半徑及此形的周界與面積.

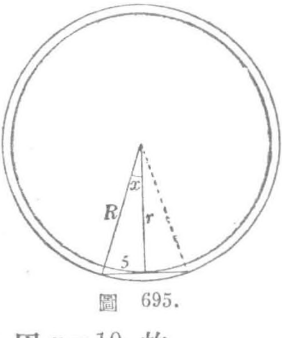

圖 695.

〔解〕 如圖695,因 $n=10$,故

$$x=\frac{180^\circ}{n}=\frac{180^\circ}{10}=18^\circ,$$

$$R=\frac{5}{\sin 18^\circ}=\frac{5}{.3090}=16.18\text{ (寸)},$$

$$r=\frac{5}{\tan 18^\circ}=\frac{5}{.3249}=15.39\ (\text{寸}),$$

$$P=10\times 10=100\ (\text{寸}),$$

$$\frac{1}{2}rP=\frac{100\times 15.39}{2}=769.5\ (\text{方寸}).$$

〔答〕 外接圓半徑是16.18寸,內切圓半徑是15.39寸.周界是100寸,面積是769.5方寸.

§408. 屬於直角三角形解法的問題 除上二節所述等腰三角形及正多角形,可以用直角三角形解法以外,還有許多問題的解法,要用兩個直角三角形方可求得的,略舉二例如下:

〔例 1〕 如圖696,在三角形ABC中,$\angle A$與$\angle B$各是30°與135°,AB是100尺.求從C至AB延線上垂線的長.

〔解〕 作CD垂直於AB延線,設$CD=x$,則

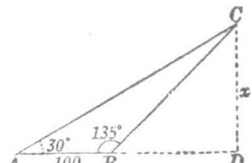

圖 696.

$$\angle CBD=180^\circ-135^\circ=45^\circ,$$

$$\angle BCD=90^\circ-\angle CBD=45^\circ.$$

$$\therefore\quad BD=CD=x.$$

在直角三角形ADC內,

$$\frac{CD}{AD}=\tan 30^\circ,$$

即
$$\frac{x}{x+100}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore\quad x\sqrt{3}=x+100,$$

$$x(\sqrt{3}-1)=100,$$

$$x=\frac{100}{\sqrt{3}-1}=\frac{100(\sqrt{3}+1)}{3-1}=50(\sqrt{3}+1)$$

$$=50\times 2.732=136.6\ (\text{尺}).$$

〔答〕 所求的垂線長136.6尺.

〔例 2〕 如圖 697, 在 $\triangle ABC$ 中, $a=9.6$ 公分, $c=5.4$ 公分, $B=37°$. 求從 A 至 BC 上垂線的長,及 $\angle A$, $\angle C$ 的度數.

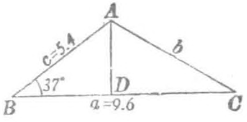

圖 697.

〔解〕 在直角三角形 ABD 中,

$$\frac{BD}{BA}=\cos ABD=\cos 37°,$$

$$\therefore\quad BD=BA\cos 37°=5.4\times.7986=4.31\ (\text{公分}).$$

又 $$\frac{AD}{AB}=\sin ABD=\sin 37°,$$

$$\therefore\quad AD=AB\sin 37°=5.4\times.6017=3.25\ (\text{公分}),$$

但 $CD=BC-BD=9.6-4.31=5.29$ (公分).

從直角三角形 ACD,

$$\tan C=\frac{AD}{CD}=\frac{3.25}{5.29}=.6144=\tan 31°34'.$$

$$\therefore\quad \angle C=31°34',$$

又 $$\angle A=180°-37°-31°34'=111°26'.$$

〔答〕 $AD=3.25$ 公分, $\angle A=111°26'$, $\angle C=32°$.

習題八十六

1. 等腰三角形的一腰是 363 尺,一底角是 75°. 求底邊,底邊上的垂線及面積.

2. 等腰三角形的底是24寸,頂角是48°.求他角,他邊,頂角到底邊的垂線及面積.

3. 在等腰三角形內,等腰是241尺,夾角是96°.求底邊,底角,高及面積.

4. 在等腰三角形內,底是65尺,一腰是90尺,求各角,高及面積.

5. 已知正九邊形的邊長是12,求外接內切圓的半徑及此形面積.

6. 設正n邊形的邊長是c,試證:

$$外接圓半徑\ R=\frac{1}{2}c\csc\frac{180^\circ}{n},$$

$$內切圓半徑\ r=c\cot\frac{180^\circ}{n}.$$

7. 設圓半徑是24尺,求內接正三角形,正方形,正五邊形,正六邊形,正七邊形,正八邊形的一邊及邊心距離的長.

8. 設r是圓半徑,試證:

$$內接正\,n\,邊形的一邊=2r\sin\frac{180^\circ}{n},$$

$$外切正\,n\,邊形的一邊=2r\tan\frac{180^\circ}{n}.$$

9. 在$\triangle ABC$內,已知$\angle A=30^\circ$, $\angle C=120^\circ$, $AC=20$, BD垂直於AC延線,求BD.

10. 設BD垂直於$\triangle ABC$的底AC,已知$\angle A=30^\circ$, $\angle C=45^\circ$, $BD=10$.求a及c.

11. 在$\triangle ABC$內, $AD\perp BC$, 已知$BD=15$尺, $\angle B=30°$, $\angle C=60°$, 求AB, AC, AD的長.

12. 設PQ垂直於線段QRS, 已知$PQ=36$, $\angle RPQ=35°$, $\angle SPQ=53°$. 求RS.

第四章 簡易測量問題

§409. **測量術** 應用三角法來研究地面上的形狀位置距離面積等,叫做**測量術**. 本編所講的,專限於測高低遠近的問題,是測量術中最簡易的.現在將測量中常用的術語,及距離與角的實測方法,分述於下,以便一方面可以解決此種問題,一方面可以實際應用.

§410. **捲尺** 實測距離,常用**捲尺**.捲尺用皮帶或金屬製成,一面刻公尺,一面刻英尺,用時可以拿外端抽出伸長,不用時可以捲藏匣內,如圖 698.

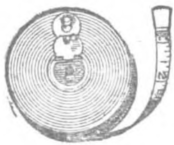

圖 698.

§411. **直立線直立面直立角** 用絲線繫重錘下垂,如此方向的線,叫做**直立線**,如直立於平地上的竹竿便是.含直立線的平面,叫做**直立面**,如牆壁便是.在直立面中的角,叫做**直立角**,如直竿斜倚於電柱所成的角便是.

§412. **水平線水平面水平角** 垂直於直立線的直線或平面,叫做**水平線**或**水平面**,如地板的板縫便是水平線,靜止的水面,便是水平面.在水平面中的角,叫做**水平角**,如平地上畫相交二直線所成的角便是.

§ **413. 仰角俯角** 從低處仰望高物,視線與水平線所成的角,叫做仰角或高度.從高處俯視低物,視線與水平線所成的角,叫做俯角.故仰角俯角,都是直立面中的一直線與水平線所成的角(圖 699).

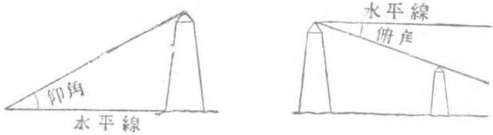

圖 699.

§ **414. 羅盤** 羅盤是用於實測水平角的器,卽將全圓周依東南西北分成 4 象限,每象限各分成 8 等分,全圓周共分成32等分,以指示方位,故每相鄰二方位間的角等於 $\frac{360^\circ}{32}=11^\circ15'$. 盤上從南或北起,向東向西各分到 90° 爲止,形式如圖 700,方位對照如圖 701.

圖 700.

圖 701.

羅盤上有指南針,測目的物的水平角時,將羅盤安放在水平面上,使指南針正對南北二點,依目的物與盤中心的視線經過盤上,即可知他的方位角,如方位是北東,就是目的物在北偏東 45°,可記作北 45° 東.如方位是西北西,就是目的物在北偏西 67°30′,可記作北 67°30′ 西.

§ 415. **方位問題**　方位問題,對於旅行航海,有很大的關係,略舉數例如下:

〔例 1〕 一船航行,見二燈塔的方位在北東與北北東;再向北進行 20 里,又見前二燈塔都在正東.求此二燈塔的距離.

〔解〕 如圖 702, 船的位置起先在 O, 後來在 C. 二燈塔的位置是 A, B, 則

$\angle BOC = 22°.5,\ \angle AOC = 45°.$

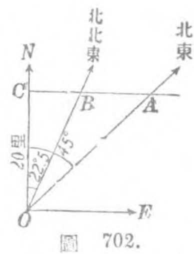

圖 702.

$\therefore\ AC = OC = 20$ 里.

$$\frac{BC}{OC} = \tan 22°.5.$$

$\therefore\ BC = OC \tan 22°.5 = 20 \times .4142 = 8.284$ (里).

$AB = AC - BC = 20 - 8.284 = 11.716$ (里).

〔答〕 二燈塔距離 11.716 里.

〔例 2〕 從一礮臺 L 見二兵艦 A, B 的方位在南東及南 15° 東,同時從 A 望 B 的方位在南東.設 A 距 L 是 4 里,求二兵艦的距離.

〔解〕 如圖 703, 過 L 作 $S'L$ 指示南北,則從二艦的方位,得

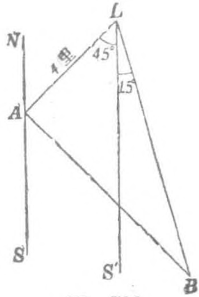

圖 703.

$$\angle ALS'=45°,\ \angle BLS'=15°,$$

故 $\angle ALB=45°+15°=60°.$

過 A 作南北線 SN, 則

$\angle NAL=\angle ALS'$

$=45°$ (平行線內錯角定理),

$\angle BAS=45°$ (因 B 在 A 的南東).

故 $\angle BAL=180°-45°-45°=90°.$

在直角三角形 BAL 中,

$$AB=AL\tan ALB=4\tan 60°=4\sqrt{3}=6.928\ (里).$$

〔答〕 二兵艦距離 6.928 里.

〔例 3〕 一兵艦依每時速度 24 公里向東 37° 南駛行,在上午 9 時,見一礮臺在北 53° 東至上午 11 時,又見此礮臺在北 20° 西.求兵艦先後二位置與礮臺的距離.

〔解〕 如圖 704, 設 A, C 是兵艦先後二位置,過 A 作南北線 SN, 東西線 EW, 則

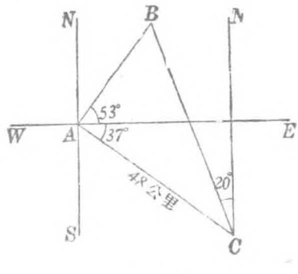

圖 704.

$\angle EAC=37°,$

$\angle EAB=53°,$

故 $\angle BAC=37°+53°=90°.$

過 C 向北作 CN', 則

$\angle BCN'=20°.$

$$\angle ACN' = \angle CAS \text{ (平行線內錯角定理)}$$
$$= 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ.$$
$$\therefore \quad \angle ACB = \angle ACN' - \angle BCN' = 53^\circ - 20^\circ = 33^\circ.$$

在直角三角形 BAC 中,

$$AB = AC \tan ACB = 48 \tan 33^\circ$$
$$= 48 \times .6494 = 31.17 \text{ (里)},$$
$$BC = \frac{AC}{\cos ACB} = \frac{48}{\cos 35^\circ} = \frac{48}{.8387} = 57.23 \text{ (里)}.$$

〔答〕 先後的距離是31.17里與57.23里.

習題八十七

1. 用南北做標準,記出下列各方位的度數:

北東微北, 北東微東, 東南東, 南南東,

南西微西, 西南西, 西北西, 北西微北.

2. 求下列各組中二方位間相差的度數:

$S.$ 與 $S.W.$,	$N.W.$ 與 $S.W.$,
$N.$ 與 $E.S.E.$,	$S.S.E.$ 與 $W.N.W.$,
$S.W.$ *by* $S.$ 與 $S.W.$ *by* $W.$,	$N.W.$ *by* $W.$ 與 $S.$ *by* $E.$

3. 一輪船依每時速度10公里,向北東駛行,問每時向北推進幾公里?

4. 一人從通東西南北大道的交叉點,先依北30°東的方向進行60丈,再轉方向依北東進行40丈,到達目的地,問目的地距東西大道,及南北大道各有幾里?

5. 一兵艦向北駛行,見正西有二燈塔.經一時後,見一燈塔在南西,又一燈塔在南 30° 西.已知二燈塔距離12公里,求此兵艦每時的速度.

6. 一人向東步行,見二塔都在北東,行800尺後,見一塔在正北,又一塔則在北西.問此人初見二塔時各有多遠?

7. 二船在正午開船,一向南28西,一向南 62° 東駛行,每時速度順次是20與21公里.問至午後二時,二船相距幾公里?

8. 二船 A, B 從一海口同時開船;A 向北 35° 西,每時行8公里;B 向南 55° 西,每時行 $8\sqrt{3}$ 公里.求一時後二船的距離,及此時 B 對於 A 的方位.

§416. **經緯儀** 經緯儀是實測直立角及水平角的儀器;上部裝一架望遠鏡,可以自由轉動,鏡軸上裝一個直立分度圈.下部裝一個與羅盤相同的水平分度圈,如圖705.用時將水平分度圈校正成水平,如是將上部左右平旋,可測水平角,將望遠鏡上下直轉,可測直立角.

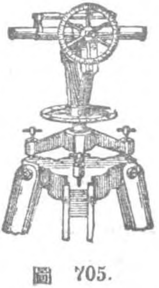

圖 705.

§417. **代用經緯儀** 上節的經緯儀,價值很貴,不易置備,故又有代用經緯儀發明,即如圖 706. 圖中直立桿 MM' 可以在 M 處插座中自由旋轉,此處裝一水平指針,能在水平分度圈上指出度數. M' 處的指針,以備觀測,且可在直立分度圈上繞 M' 四周自由轉動,依此針所指,即可測定直立角.

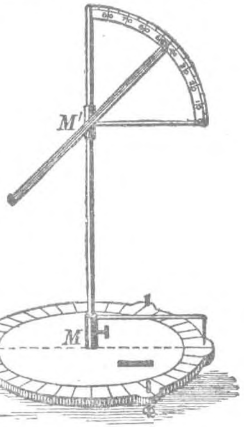

圖 706.

§418. **象限儀** 象限儀一名四分儀,也是測角用的儀器,比經緯儀更加簡單易備. 此器的主要部分,是依四分之一圓周金屬製成,上面刻度數從 0° 到 90°.

如圖 707, 將象限儀放在直立位置,針 A 處繫鉛垂線 AB 落下在 90° 位置,設針影落在 C 處,則依對頂角定理,仰角 SAD 等於 $\angle CAE$.

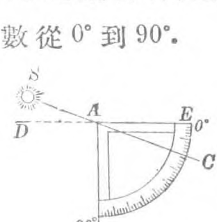

圖 707.

又如圖708,將象限儀放在直立位置,使 A, B 與目的物成一直線,則依對頂角定理及餘角定理,仰角 A 等於 $\angle CAD$.

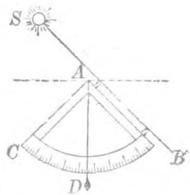

圖 708.

§419. **高與距離問題** 關於高與距離的問題,以前雖略有講過,但都是很淺易的,實際測量上,有時因限於地點,有時要避免障礙,斷不能都如此直捷,今再示數例於下,使讀者可以觸類旁通:

〔例 1〕 軍行至一地,見前面有一山,山頂直立高30尺的旗竿,且有敵軍屯紮.先測山頂,得仰角 $38°20'$;再測竿頂,得仰角 $40°20'$.求山高.

〔解〕 如圖709,設 BL 是山高,PB 是山頂上的旗竿,C 是測點.則 $PB=30$ 尺, $\angle LCB=38°20'$, $\angle LCP=40°20'$. 設 $CL=x$, $BL=y$.

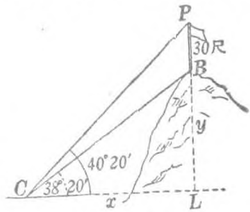

圖 709.

在 $\triangle LCB$ 中, $\dfrac{LB}{CL}=\tan 38°20'$. $\therefore$ $\dfrac{y}{x}=.7908$ ……………(1)

在 $\triangle LCP$ 中, $\dfrac{LP}{CL}=\tan 40°20'$. $\therefore$ $\dfrac{y+30}{x}=.8491$ ……(2)

(1) ÷ (2), $$\frac{y}{y+30}=\frac{7908}{8491}.$$

解此方程,得 $y=406.18$ 尺.

〔答〕 山高 406.18 尺.

〔例 2〕 屋高 50 尺,從屋基測塔頂,得仰角 60°, 從屋頂再測,得仰角 30°. 求塔高.

〔解〕 如圖 710, AB 是塔, CD 是屋. 作 $CE \parallel DB$.

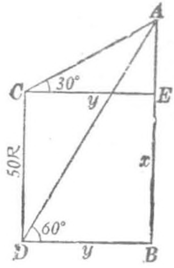

圖 710.

設 $AB=x$, 則

$$AE=AB-EB=x-50,$$

又設 $DB=CE=y$.

從直角三角形 ABD,

$$y=\frac{x}{\tan 60^\circ}=\frac{x}{\sqrt{3}},$$

從直角三角形 ACE,

$$y=\frac{x-50}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}(x-50),$$

$$\therefore \quad \frac{x}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}(x-50), \text{ 解得 } x=75 \text{ (尺)}.$$

〔答〕 塔高 75 尺.

〔例 3〕 在高150尺的山上屯兵,望見正西平地上有敵軍礮位二個,測得俯角是 15° 與 75°. 求此二礮位的距離.

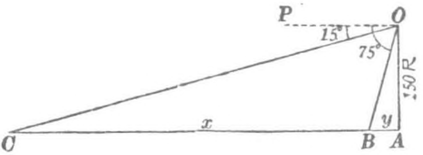

圖 711.

〔解〕 如圖 711, 設 DA 是山, B, C 是礮位, OP 是過 O 的水平線. 則

$$\angle POC=15^\circ,\quad 及\quad \angle POB=75^\circ.$$

$$\therefore\quad \angle OCA=15^\circ,\quad 及\quad \angle OBA=75^\circ.$$

設 $CB=x$, $BA=y$, 則 $CA=x+y$.

從直角三角形 OAB,

$$y=150\cot 75^\circ=150\times .2679,$$

從直角三角形 OAC,

$$x+y=150\cot 15^\circ=150\times 3.7321,$$

相減得 $x=150(3.7321-.2679)=519.63$ (尺).

〔答〕 二礮位相距 519.63 尺.

〔例 4〕 在平地上相距 2 公里的 A, B 二村,同時測空中飛機的方位及仰角.在 A 測得方位在正北,仰角 30°. 在 B 測得方位在正東,仰角 60°. 求此時飛機離地面的高.

〔解〕 如圖 712, 設飛機的高 DO 是 x 尺,則 $\angle DAO=30^\circ$, $\angle DBO=60^\circ$,

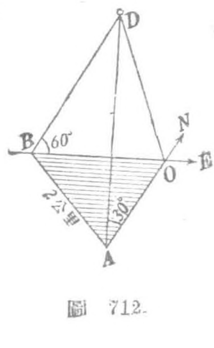

圖 712.

$$BO=\frac{x}{\tan 60^\circ}=\frac{x}{\sqrt{3}},$$

$$AO=\frac{x}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}x,$$

但 $\angle AOB=90^\circ$.

故依畢氏定理,

$$\overline{AO}^2+\overline{BO}^2=\overline{AB}^2.$$

$$\therefore\quad 3x^2+\frac{x^2}{3}=2000^2=4000000.$$

解得　　　$x=200\sqrt{30}=1095.$(公尺)

〔答〕飛機高1095公尺.

習題八十八

1. 有二塔,高相差30尺.距低塔100尺的平地上一點,望二塔的頂恰成一直線,而仰角是$27°2'$.求此二塔的高.

2. 設Q, R, T是一直線上的三點,$TP\perp QT$.設$PT=a$, $\angle PQT=\beta$, $\angle PRT=2\beta$,試各求TR, QT, PQ的長.

3. 在平地上一處測礮臺的頂,得仰角10°.走近200尺再測,得仰角15°.求礮臺的高及第二測點與礮臺的距離.

4. 屋頂上直立旗竿,離屋基40尺測屋頂與竿頂,得仰角60°與30°.求旗竿與屋的高.

5. 有一水塔,從塔的正東A點測塔頂,得仰角60°.若從塔的正西B點測塔頂,得仰角45°.設AB距離100尺,求水塔的高.

6. 塔高100尺,從塔頂觀察塔北二物,得俯角60°及45°,求此二物的距離.

7. 在高40尺的塔頂上,望高30尺的城,得俯角11°.求塔與城的距離.

8. 從塔底測得山頂的仰角是60°,在塔頂測得山頂的仰角是30°度.已知塔高50尺,求山高.

9. 從 a 尺高的山頂,測量與山腳同在平地一直線上的二處敵軍,得俯角 A 與 B. 求此二處敵軍的距離.

10. 有孤懸海中的小島,離島中心 3 里內,周圍都有暗礁.一輪船從西向東駛行,見此島中心點在東 $21°$ 北;再行 5 里,見此島中心點在東 $42°$ 北.如果此船路線不變,仍向東行,有無危險?

總習題

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90°$, $b=2mn$, $c=m^2+n^2$, 求二角 A, B 的三角函數.

2. 設 $ABCD$ 是邊長 a 的正方形,連結頂點 C 與 AD 中點 E, 求 $\angle ECD$ 的正弦及餘弦.

3. 長 l 的線段,投於他直線上的射影是 a. 求此二直線所成角的正切.

4. 用方格紙作 $10°, 20°$ 至 $90°$ 各角的三角函數圖,並查表比較.

5. 看上題所作的圖,正弦餘弦是不是都小於 1?

6. 試證 $\sin A+\cos A>1$.

7. 設 $\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 時,求 $\cos 15°, \tan 15°$.

8. 設 $\tan 75°=2+\sqrt{3}$ 時,求 $\sin 75°, \cos 75°$.

9. 試證下列三角函數相互換算表:

	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	$\cot A$	$\sec A$	$\csc A$
$\sin A=$	$\sin A$	$\sqrt{1-\cos^2 A}$	$\dfrac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$	$\dfrac{\sqrt{\sec^2 A-1}}{\sec A}$	$\dfrac{1}{\csc A}$
$\cos A=$	$\sqrt{1-\sin^2 A}$	$\cos A$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$	$\dfrac{\cot A}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$	$\dfrac{1}{\sec A}$	$\dfrac{\sqrt{\csc^2 A-1}}{\csc A}$
$\tan A=$	$\dfrac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$	$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}$	$\tan A$	$\dfrac{1}{\cot A}$	$\sqrt{\sec^2 A-1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\csc^2 A-1}}$
$\cot A=$	$\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}$	$\dfrac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$	$\dfrac{1}{\tan A}$	$\cot A$	$\dfrac{1}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$	$\sqrt{\csc^2 A-1}$
$\sec A=$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$	$\dfrac{1}{\cos A}$	$\sqrt{1+\tan^2 A}$	$\dfrac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$	$\sec A$	$\dfrac{\csc A}{\sqrt{\csc^2 A-1}}$
$\csc A=$	$\dfrac{1}{\sin A}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$	$\dfrac{\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$	$\sqrt{1+\cot^2 A}$	$\dfrac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$	$\csc A$

化簡下列各題(10—12):

10. $\sec^2\theta\csc^2\theta-\tan^2\theta-\cot^2\theta.$

11. $\sin^2A\tan^2A+\cos^2A\cot^2A-\tan^2A-\cot^2A.$

12. $\dfrac{1}{1+\sin^2x}+\dfrac{1}{1+\cos^2x}+\dfrac{1}{1+\sec^2x}+\dfrac{1}{1+\csc^2x}.$

13. 已知 $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ 及 $\sin A=\cdot 6$, $\sin B=\dfrac{5}{13}$, 求 $\sin(A-B)$ 的值.

14. 設 $\tan\theta=0.75$, 求 $\sin^6\theta+\cos^6\theta$ 的值.

15. 設 $\sin A+\cos A=\dfrac{17}{13}$, 求 $\sin A$ 及 $\cos A$.

16. 設 $\tan A+\cot A=\dfrac{13}{6}$, 求 $\sin A$ 及 $\cos A$.

17. 設 $\tan\theta+\sec\theta=1.5$, 求 $\sin\theta$.

18. 試證 $\sin^4A-\cos^4A=\sin^2A-\cos^2A.$

19. 試證 $\dfrac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}=\cos^2x-\sin^2x.$

20. 試證 $\sin A\sec A\cot A=1.$

21. 試證 $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2=2.$

22. 試證 $\tan A\sin A+\cos A=\sec A.$

23. 試證 $\tan A+\cot A=\sec A\csc A.$

24. 試證 $\sec A-\cos A=\tan A\sin A.$

25. 試證 $(\sec A-\tan A)^2=\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}.$

26. 試證 $\tan^4A+\tan^2A=\sec^4A-\sec^2A.$

27. 設 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{5}{4}$, 求 $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ 的值.

28. 設 $\sin\theta+\sin^2\theta=1$, 試證 $\cos^2\theta+\cos^4\theta=1$.

29. 求方程 $\tan\theta+\cot\theta=2$ 中的銳角 θ.

解下列各方程中的銳角(30—34):

30. $\cot x=\tan 2x$.

31. $\sin 5x=\cos 7x$.

32. $2\sin^2\theta=3\cos\theta$.

33. $\sin^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta-\frac{7}{4}=0$.

34. $\csc^2\theta+\cot^2\theta=3$.

35. 直角三角形一銳角的正切是 0.75, 周圍是 12 寸.求弦的長.

36. 風箏的線長 200 公尺,仰角是 30°. 假設風箏的線是直線,求風箏的高.

37. 設鐵路軌道的傾斜是 $\frac{1}{40}$, 求軌道與水平線所成的角.

38. 設斜坡公路線與水平面成角 7°20′. 則行 5400 尺之後,比前高出幾尺?

39 有直角三角形的地面,弦長 60 尺,一銳角 20°. 求面積.

40. 設 $\triangle ABC$ 的 C 是直角, $AB=2\sqrt{3}$, $AC=3$, 求角 B 平分線的長.

41. 將長繩的一端繫於船的桅頂,一端繫於後梢,後梢繫繩處與桅竿最近的距離是 60 尺,繩的斜度是 60°. 求繩長.

42. 靠牆有披屋,檐與牆的距離是 6 尺,椽的傾斜是 15°. 求椽長.

43. 有鐵絲,一端繫於高 18 尺的電柱頂,一端繫於離柱腳 10 尺的樁上.求鐵絲的長及傾斜角度.

44. 有正方形的城,從一邊中點至對角有直路,求此路將對角分成二角的度數.

45. 離山腳 275 尺的地方,測得山頂的仰角是 52°. 求山高.

46. 塔高 136 尺,從某處測得塔頂的仰角是 23°, 求測點距塔基的遠.

47. 屋闊 32 尺,屋頂椽長 22 尺. 求椽與水平線所成的角度.

48. 航海員在船上測燈塔的頂,得仰角 7°. 已知燈塔比船高 60 尺,求船離燈塔的遠.

49. 有輪船從吳淞口開船,向東 24° 北駛行.某時查水程表知已行 450 公里,問此時船的位置,已向正東及正北各進行幾里?

50. 如圖 713, 一輪船從 A 埠至 B 埠,路線是東 12° 北,再從 B 至 C,路線是西 57° 北,又從 C 至 D,路線是東 47° 北. 在水程表上查得的距離,是 $AB=72$ 里, $BC=38$ 里, $CD=40$ 里. 問 D 埠在 A 埠正東及正北各有幾里?

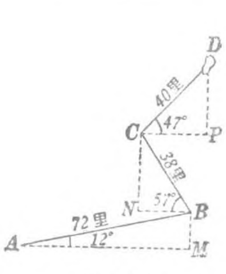

圖 713.

〔提示〕 計算 AM, NB, CP. 則 $AM+CP-NB$ 的結果,便是 D 在 A 正東的距離.又計算 BM, CN, DP, 相加得 D 在 A 正北的距離.

51. 從平地上一點測樹梢,得仰角 $45°$. 從離地高 30 尺的窗中再測,得仰角 $30°$, 求樹的高.

52. 屋頂上直立高 30 尺的旗竿,從平地上一點測竿頂及屋頂,得仰角 $57°$ 及 $50°$. 求屋高.

53. 如圖 714, A, B 二點,相隔一湖,不能直接量得 AB 的連線.就從 A 量 120 公尺至 C, 測得 $\angle CAB=100°$, $\angle ACB=30°$. 求 A, B 的距離.

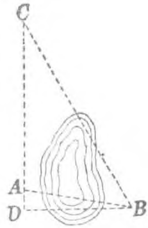

圖 714.

54. 二人相隔 1000 尺,同時同向測遠來的飛機,得仰角 $40°$ 及 $55°$. 求此時飛機離地面的高.

55. 沿河有成直線的長堤.今要從對岸 B 點至此堤造橋,因爲要節省造費,橋宜最短.就在堤上選擇相距 200 尺的 A, C 二處,測得 $\angle BAC=45°$, $\angle BCA=60°$. 求橋的長.

56. 在船上桅頂測江中浮標,得俯角 $35°$. 下降 3 尺再測浮標,得俯角 $34°$. 求船與浮標的距離.

57. 在碉堡正東的平地上,測得堡頂的仰角 $30°$, 從此處向正南行 100 公尺,再測堡頂,得仰角 $18°$. 求碉堡的高.

58. A, B 二人在東西相隔1里的地方,同時測空中的飛機,A 測得方位在北西,B 測得方位在北東,仰角都是 $45°$,求此時飛機離地的高.

59. 有兵在高800公尺的山頂屯紮,見敵軍兵車依直線進行,測得方位在正西,俯角$30°$.經6分鐘後,再測得方位在正南,俯角$15°$.問此兵車每時的速度.

60. 一人在平地上望空中飛行的汽球,測得夾球體兩視線所成的角是 a,球心的仰角是 β.設球半徑是 r 尺,人目離地面高 h 尺,試證球心離地面的高等於

$h + r \csc \dfrac{a}{2} \sin B$.

正弦眞數表

加

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		分 1′	2′	3′	4′	5′
0°	·0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89°	3	6	9	12	15
1	·0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88	3	6	9	12	15
2	·0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	87	3	6	9	12	15
3	·0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0608	86	3	6	9	12	15
4	·0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0872	85	3	6	9	12	14
5	·0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045	84	3	6	9	12	14
6	·1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219	83	3	6	9	12	14
7	·1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392	82	3	6	9	12	14
8	·1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564	81	3	6	9	12	14
9	·1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	1736	80	3	6	9	11	14
10	·1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79	3	6	9	11	14
11	·1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	78	3	6	9	11	14
12	·2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2232	2250	77	3	6	9	11	14
13	·2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76	3	6	8	11	14
14	·2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	2588	75	3	6	8	11	14
15	·2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74	3	6	8	11	14
16	·2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73	3	6	8	11	14
17	·2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72	3	6	8	11	14
18	·3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71	3	6	8	11	14
19	·3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3420	70	3	5	8	11	14
20	·3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69	3	5	8	11	14
21	·3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68	3	5	8	11	14
22	·3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	8891	3907	67	3	5	8	11	13
23	·3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66	3	5	8	11	13
24	·4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	4226	65	3	5	8	11	13
25	·4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64	3	5	8	11	13
26	·4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63	3	5	8	10	13
27	·4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62	3	5	8	10	13
28	·4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61	3	5	8	10	13
29	·4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	5000	60	3	5	8	10	13
30	·5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59	3	5	8	10	13
31	·5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58	2	5	7	10	12
32	·5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57	2	5	7	10	12
33	·5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56	2	5	7	10	12
34	·5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	55	2	5	7	10	12
35	·5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54	2	5	7	9	12
36	·5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53	2	5	7	9	12
37	·6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52	2	5	7	9	12
38	·6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51	2	5	7	9	11
39	·6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	6428	50	2	4	7	9	11
40	·6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49	2	4	7	9	11
41	·6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48	2	4	7	9	11
42	·6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47	2	4	6	9	11
43	·6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46	2	4	6	8	11
44	·6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	7071	45°	2	4	6	8	10
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′		1′ 分	2′	3′	4′	5′

減

餘弦眞數表

正弦眞數表

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48	54′	60′		加 分 1′	2′	3′	4′	5′
45°	·7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	7193	44°	2	4	6	8	10
46	·7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	43	2	4	6	8	10
47	·7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	7431	42	2	4	6	8	10
48	·7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	7547	41	2	4	6	8	10
49	·7547	7558	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	7660	40	2	4	6	8	9
50	·7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	7771	39	2	4	6	7	9
51	·7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	7880	38	2	4	5	7	9
52	·7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	7986	37	2	4	5	7	9
53	·7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	8090	36	2	3	5	7	9
54	·8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	8192	35	2	3	5	7	8
55	·8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	8290	34	2	3	5	7	8
56	·8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	8387	33	2	3	5	6	8
57	·8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	8480	32	2	3	5	6	8
58	·8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	8572	31	2	3	5	6	8
59	·8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	8660	30	1	3	4	6	7
60	·8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	8746	29	1	3	4	6	7
61	·8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	8829	28	1	3	4	6	7
62	·8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	8910	27	1	3	4	5	7
63	·8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	8988	26	1	3	4	5	6
64	·8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	9063	25	1	3	4	5	6
65	·9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	9135	24	1	2	4	5	6
66	·9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	9205	23	1	2	3	5	6
67	·9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	9272	22	1	2	3	4	6
68	·9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	9336	21	1	2	3	4	5
69	·9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	9397	20	1	2	3	4	5
70	·9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	9455	19	1	2	3	4	5
71	·9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	9511	18	1	2	3	4	5
72	·9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	9563	17	1	2	3	4	4
73	·9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	9613	16	1	2	2	3	4
74	·9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	9659	15	1	2	2	3	4
75	·9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	9703	14	1	1	2	3	4
76	·9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	9744	13	1	1	2	3	3
77	·9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	9781	12	1	1	2	3	3
78	·9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	9816	11	1	1	2	2	3
79	·9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	9848	10	1	1	2	2	3
80	·9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	9877	9	0	1	1	2	2
81	·9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	9903	8	0	1	1	2	2
82	·9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	9925	7	0	1	1	2	2
83	·9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	9945	6	0	1	1	1	2
84	·9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	9962	5	0	1	1	1	1
85	·9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	9976	4	0	0	1	1	1
86	·9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	9986	3	0	0	1	1	1
87	·9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	9994	2					
88	·9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	9998	1					
89	·9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	1·0000	0°					
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′		1′	2′	3′	4′	5′
													分 減				

餘弦眞數表

正切眞數表

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		加 分 1′	2′	3′	4′	5′
0°	·0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89°	3	6	9	12	15
1	·0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88	3	6	9	12	15
2	·0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	0524	87	3	6	9	12	15
3	·0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	0699	86	3	6	9	12	15
4	·0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	0875	85	3	6	9	12	15
5	·0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	1051	84	3	6	9	12	15
6	·1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	1228	83	3	6	9	12	15
7	·1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	1405	82	3	6	9	12	15
8	·1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	1584	81	3	6	9	12	15
9	·1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	1763	80	3	6	9	12	15
10	·1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	79	3	6	9	12	15
11	·1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	78	3	6	9	12	15
12	·2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	77	3	6	9	12	15
13	·2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	76	3	6	9	12	15
14	·2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	2679	75	3	6	9	12	16
15	·2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	74	3	6	9	13	16
16	·2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	73	3	6	9	13	16
17	·3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	72	3	6	10	13	16
18	·3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	71	3	6	10	13	16
19	·3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3640	70	3	7	10	13	16
20	·3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	69	3	7	10	13	17
21	·3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	68	3	7	10	13	17
22	·4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	67	3	7	10	14	17
23	·4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	66	3	7	10	14	17
24	·4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4663	65	4	7	11	14	18
25	·4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	64	4	7	11	14	18
26	·4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	63	4	7	11	15	18
27	·5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	62	4	7	11	15	18
28	·5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	61	4	8	11	15	19
29	·5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	5774	60	4	8	12	15	19
30	·5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	59	4	8	12	16	20
31	·6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	58	4	8	12	16	20
32	·6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	57	4	8	12	16	20
33	·6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	56	4	8	13	17	21
34	·6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	7002	55	4	9	13	17	21
35	·7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	7265	54	4	9	13	18	22
36	·7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	53	5	9	14	18	23
37	·7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	52	5	9	14	18	23
38	·7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	8098	51	5	10	14	19	24
39	·8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	8391	50	5	10	15	20	24
40	·8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	8693	49	5	10	15	20	25
41	·8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	9004	48	5	10	16	21	26
42	·9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	9325	47	5	11	16	21	27
43	·9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	9657	46	6	11	17	22	28
44	·9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	1·0000	45	6	11	17	23	29
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′		1′ 分 減	2′	3′	4′	5′

餘切眞數表

正切真數表

加

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		分 1′	2′	3′	4′	5′
45°	1·0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	0355	44°	6	12	18	24	30
46	1·0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	0724	43	6	12	18	25	31
47	1·0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	1106	42	6	13	19	25	32
48	1·1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	1504	41	7	13	20	26	33
49	1·1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	1918	40	7	14	21	28	34
50	1·1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	2349	39	7	14	22	29	36
51	1·2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	2709	38	8	15	23	30	38
52	1·2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	3270	37	8	16	24	31	39
53	1·3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	3764	36	8	16	25	33	41
54	1·3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	4281	35	9	17	26	34	43
55	1·4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	4826	34	9	18	27	36	45
56	1·4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	5399	33	10	19	29	38	48
57	1·5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	6003	32	10	20	30	40	50
58	1·6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	6643	31	11	21	32	43	53
59	1·6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	7321	30	11	23	34	45	56
60	1·7321	7391	7461	7532	7603	7675	7747	7820	7893	7966	8040	29	12	24	36	48	60
61	1·8040	8115	8190	8265	8341	8418	8495	8572	8650	8728	8807	28	13	26	38	51	64
62	1·8807	8887	8967	9047	9128	9210	9292	9375	9458	9542	9626	27	14	27	41	55	68
63	1·9626	9711	9797	9883	9970	0057	0145	0233	0323	0413	0503	26	15	29	44	58	73
64	2·0503	0594	0686	0778	0872	0965	1060	1155	1251	1348	1445	25	16	31	47	63	78
65	2·1445	1543	1642	1742	1842	1943	2045	2148	2251	2355	2460	24	17	34	51	68	85
66	2·2460	2566	2673	2781	2889	2998	3109	3220	3332	3445	3559	23	18	37	55	74	91
67	2·3559	3673	3789	3906	4023	4142	4262	4383	4504	4627	4751	22	20	40	60	79	99
68	2·4751	4876	5002	5129	5257	5386	5517	5649	5782	5916	6051	21	22	43	65	87	108
69	2·6051	6187	6325	6464	6605	6746	6889	7034	7179	7326	7475	20	24	47	71	95	119
70	2·7475	7625	7776	7929	8083	8239	8397	8556	8716	8878	9042	19	26	52	78	104	130
71	2·9042	9208	9375	9544	9714	9887	0061	0237	0415	0595	0777	18	29	58	87	115	144
72	3·0777	0961	1146	1334	1524	1716	1910	2106	2305	2506	2709	17	32	64	96	129	161
73	3·2709	2914	3122	3332	3544	3759	3977	4197	4420	4646	4874	16	36	72	108	144	180
74	3·4874	5105	5339	5576	5816	6059	6305	6564	6806	7062	7321	15	41	82	122	162	203
75	3·7321	7583	7848	8118	8391	8667	8947	9232	9520	9812	0108	14	46	94	139	186	232
76	4·0108	0408	0713	1022	1335	1653	1976	2303	2635	2972	3315	13	53	107	160	214	267
77	4·3315	3662	4015	4374	4737	5107	5483	5864	6252	6646	7046	12	62	124	186	248	310
78	4·7046	7453	7867	8288	8716	9152	9594	0045	0504	0970	1446	11	73	146	219	292	366
79	5·1446	1929	2422	2924	3435	3955	4486	5026	5578	6140	6713	10	87	175	262	350	438
80	5·6713	7297	7894	8502	9124	9758	0405	1066	1742	2432	3138	9					
81	6·3138	3859	4596	5350	6122	6912	7720	8548	9395	0264	1154	8	正切餘切的值,至此增加很快,故此公差欄不能用。				
82	7·1154	2066	3002	3962	4947	5958	6996	8062	9158	0285	1443	7					
83	8·1443	2636	3863	5126	6427	7769	9152	0579	2052	3572	5144	6					
84	9·5144	9·677	9·845	10·02	10·20	10·39	10·58	10·78	10·99	11·20	11·43	5					
85	11·43	11·66	11·91	12·16	12·43	12·71	13·00	13·30	13·62	13·95	14·30	4					
86	14·30	14·67	15·06	15·46	15·89	16·35	16·83	17·34	17·89	18·46	19·08	3					
87	19·08	19·74	20·45	21·20	22·02	22·90	23·86	24·90	26·03	27·27	28·64	2					
88	28·64	30·14	31·82	33·69	35·80	38·19	40·92	44·07	47·74	52·08	57·29	1					
89	57·29	63·66	71·62	81·85	95·49	114·6	143·2	191·0	286·5	573·0	∞	0°					
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′		1′	2′	3′	4′	5′
													分				

減

餘切真數表

正割眞數表

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		加 分 1′	2′	3′	4′	5′
0°	1·0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0001	0001	0001	0002	89°					
1	1·0002	0002	0002	0003	0003	0003	0004	0004	0005	0006	0006	88					
2	1·0006	0007	0007	0008	0009	0010	0010	0011	0012	0013	0014	87					
3	1·0014	0015	0016	0017	0018	0019	0020	0021	0022	0023	0024	86	0	0	1	1	1
4	1·0024	0026	0027	0028	0030	0031	0032	0034	0035	0037	0038	85	0	0	1	1	1
5	1·0038	0040	0041	0043	0045	0046	0048	0050	0051	0053	0055	84	0	1	1	1	1
6	1·0055	0057	0059	0061	0063	0065	0067	0069	0071	0073	0075	83	0	1	1	1	2
7	1·0075	0077	0079	0082	0084	0086	0089	0091	0093	0096	0098	82	0	1	1	2	2
8	1·0098	0101	0103	0106	0108	0111	0114	0116	0119	0122	0125	81	0	1	1	2	2
9	1·0125	0127	0130	0133	0136	0139	0142	0145	0148	0151	0154	80	0	1	1	2	2
10	1·0154	0157	0161	0164	0167	0170	0174	0177	0180	0184	0187	79	1	1	2	2	3
11	1·0187	0191	0194	0198	0201	0205	0209	0212	0216	0220	0223	78	1	1	2	2	3
12	1·0223	0227	0231	0235	0239	0243	0247	0251	0255	0259	0263	77	1	1	2	3	3
13	1·0263	0267	0271	0276	0280	0284	0288	0293	0297	0302	0306	76	1	1	2	3	4
14	1·0306	0311	0315	0320	0324	0329	0334	0338	0343	0348	0353	75	1	2	2	3	4
15	1·0353	0358	0363	0367	0372	0377	0382	0388	0393	0398	0403	74	1	2	3	3	4
16	1·0403	0408	0413	0419	0424	0429	0435	0440	0446	0451	0457	73	1	2	3	4	4
17	1·0457	0463	0468	0474	0480	0485	0491	0497	0503	0509	0515	72	1	2	3	4	5
18	1·0515	0521	0527	0533	0539	0545	0551	0557	0564	0570	0576	71	1	2	3	4	5
19	1·0576	0583	0589	0595	0602	0608	0615	0622	0628	0635	0642	70	1	2	3	4	5
20	1·0642	0649	0655	0662	0669	0676	0683	0690	0697	0704	0711	69	1	2	3	5	6
21	1·0711	0719	0726	0733	0740	0748	0755	0763	0770	0778	0785	68	1	2	4	5	6
22	1·0785	0793	0801	0808	0816	0824	0832	0840	0848	0856	0864	67	1	3	4	5	7
23	1·0864	0872	0880	0888	0896	0904	0913	0921	0929	0938	0946	66	1	3	4	6	7
24	1·0946	0955	0963	0972	0981	0989	0998	1007	1016	1025	1034	65	1	3	4	6	7
25	1·1034	1043	1052	1061	1070	1079	1089	1098	1107	1117	1126	64	2	3	5	6	8
26	1·1126	1136	1145	1155	1164	1174	1184	1194	1203	1213	1223	63	2	3	5	6	8
27	1·1223	1233	1243	1253	1264	1274	1284	1294	1305	1315	1326	62	2	3	5	7	9
28	1·1326	1336	1347	1357	1368	1379	1390	1401	1412	1423	1434	61	2	4	5	7	9
29	1·1434	1445	1456	1467	1478	1490	1501	1512	1524	1535	1547	60	2	4	6	8	9
30	1·1547	1559	1570	1582	1594	1606	1618	1630	1642	1654	1666	59	2	4	6	8	10
31	1·1666	1679	1691	1703	1716	1728	1741	1753	1766	1779	1792	58	2	4	6	8	10
32	1·1792	1805	1818	1831	1844	1857	1870	1883	1897	1910	1924	57	2	4	7	9	11
33	1·1924	1937	1951	1964	1978	1992	2006	2020	2034	2048	2062	56	2	5	7	9	12
34	1·2062	2076	2091	2105	2120	2134	2149	2163	2178	2193	2208	55	2	5	7	10	[illegible]
35	1·2208	2223	2238	2253	2268	2283	2299	2314	2329	2345	2361	54	3	5	8	10	13
36	1·2361	2376	2392	2408	2424	2440	2456	2472	2489	2505	2521	53	3	5	8	11	13
37	1·2521	2538	2554	2571	2588	2605	2622	2639	2656	2673	2690	52	3	6	8	11	14
38	1·2690	2708	2725	2742	2760	2778	2796	2813	2831	2849	2868	51	3	6	9	12	15
39	1·2868	2886	2904	2923	2941	2960	2978	2997	3016	3035	3054	50	3	6	9	12	16
40	1·3054	3073	3093	3112	3131	3151	3171	3190	3210	3230	3250	49	3	7	10	13	16
41	1·3250	3270	3291	3311	3331	3352	3373	3393	3414	3435	3456	48	3	7	10	14	17
42	1·3456	3478	3499	3520	3542	3563	3585	3607	3629	3651	3673	47	4	7	11	14	18
43	1·3673	3696	3718	3741	3763	3786	3809	3832	3855	3878	3902	46	4	8	11	15	19
44	1·3902	3925	3949	3972	3996	4020	4044	4069	4093	4118	4142	45°	4	8	12	16	20
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′		1′	2′	3′	4′	5′ 分 減

餘割眞數表

正割眞數表

													加分				
	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		1′	2′	3′	4′	5′
45°	1·4142	4167	4192	4217	4242	4267	4293	4318	4344	4370	4396	44°	4	8	13	17	21
46	1·4396	4422	4448	4474	4501	4527	4554	4581	4608	4635	4663	43	4	9	13	18	22
47	1·4663	4690	4718	4746	4774	4802	4830	4859	4887	4916	4945	42	5	9	14	19	23
48	1·4945	4974	5003	5032	5062	5092	5121	5151	5182	5212	5243	41	5	10	15	20	25
49	1·5243	5273	5304	5335	5366	5398	5429	5461	5493	5525	5557	40	5	10	16	21	26
50	1·5557	5590	5622	5655	5688	5721	5755	5788	5822	5856	5890	39	6	11	17	22	28
51	1·5890	5925	5959	5994	6029	6064	6099	6135	6171	6207	6243	38	6	12	18	23	29
52	1·6243	6279	6316	6353	6390	6427	6464	6502	6540	6578	6616	37	6	12	19	25	31
53	1·6616	6655	6694	6733	6772	6812	6852	6892	6932	6972	7013	36	7	13	20	26	33
54	1·7013	7054	7095	7137	7179	7221	7263	7305	7348	7391	[illegible]	35	7	14	21	28	35
55	1·7434	7478	7522	7566	7610	7655	7700	7745	7791	7837	7883	34	7	15	22	30	37
56	1·7883	7929	7976	8023	8070	8118	8166	8214	8263	8312	8361	33	8	16	24	32	40
57	1·8361	8410	8460	8510	8561	8612	8663	8714	8766	8818	8871	32	8	17	25	34	42
58	1·8871	8924	8977	9031	9084	9139	9194	9249	9304	9360	9416	31	9	18	27	36	45
59	1·9416	9473	9530	9587	9645	9703	9762	9821	9880	9940	$\bar{0}000$	30	10	19	29	39	49
60	2·0000	0061	0122	0183	0245	0308	0371	0434	0498	0562	0627	29	10	21	31	42	52
61	2·0627	0692	0757	0824	0890	0957	1025	1093	1162	1231	1301	28	11	22	34	45	56
62	2·1301	1371	1441	1513	1584	1657	1730	1803	1877	1952	2027	27	12	24	36	48	61
63	2·2027	2103	2179	2256	2333	2412	2490	2570	2650	2730	2812	26	13	26	39	52	65
64	2·2812	2894	2976	3060	3144	3228	3314	3400	3486	3574	3662	25	14	28	43	57	71
65	2·3662	3751	3841	3931	4022	4114	4207	4300	4395	4490	4586	24	15	31	46	62	77
66	2·4586	4683	4780	4879	4978	5078	5180	5282	5384	5488	5593	23	17	34	50	67	84
67	2·5593	5699	5805	5913	6022	6131	6242	6354	6466	6580	6695	22	18	37	55	73	92
68	2·6695	6811	6927	7046	7165	7285	7407	7529	7653	7778	7904	21	20	40	60	81	101
69	2·7904	8032	8161	8291	8422	8555	8688	8824	8960	9099	9238	20	22	44	67	89	111
70	2·9238	9379	9521	9665	9811	9957	$\bar{0}106$	$\bar{0}256$	$\bar{0}407$	$\bar{0}561$	$\bar{0}716$	19	25	49	74	98	123
71	3·0716	0872	1030	1190	1352	1515	1681	1848	2017	2188	2361	18	27	55	82	110	137
72	3·2361	2535	2712	2891	3072	3255	3440	3628	3817	4009	4203	17	31	61	92	123	153
73	3·4203	4399	4598	4799	5003	5209	5418	5629	5843	6060	6280	16	35	69	104	138	173
74	3·6280	6502	6727	6955	7186	7420	7657	7897	8140	8387	8637	15	39	79	118	157	196
75	3·8637	8890	9147	9408	9672	9939	$\bar{0}211$	$\bar{0}486$	$\bar{0}765$	$\bar{1}048$	$\bar{1}336$	14	45	90	135	180	225
76	4·1336	1627	1923	2223	2527	2837	3150	3469	3792	4121	4454	13	52	104	156	207	260
77	4·4454	4793	5137	5486	5841	6202	6569	6942	7321	7706	8097	12	61	121	182	242	303
78	4·8097	8496	8901	9313	9732	$\bar{0}159$	$\bar{0}593$	$\bar{1}034$	$\bar{1}484$	$\bar{1}942$	$\bar{2}408$	11	72	143	215	287	359
79	5·2408	2883	3367	3860	4362	4874	5396	5928	6470	7023	7588	10	86	172	258	344	431
80	5·7588	8164	8751	9351	9963	0589	$\bar{1}227$	$\bar{1}880$	$\bar{2}546$	$\bar{3}228$	$\bar{3}925$	9					
81	6·3925	4637	5366	6111	6874	7655	8454	9273	$\bar{0}112$	$\bar{0}972$	$\bar{1}853$	8					
82	7·1853	2757	3684	4635	5611	6613	7642	8700	9787	$\bar{0}905$	$\bar{2}055$	7					
83	8·2055	3238	4457	5711	7004	8337	9711	$\bar{1}129$	$\bar{2}593$	$\bar{4}105$	5668	6					
84	9·5668	7283	8955	$\bar{0}685$	$\bar{2}477$	$\bar{4}334$	6261	$\bar{8}260$	11·03	11·25	11·47	5					
85	11·47	11·71	11·95	12·20	12·47	12·75	13·03	13·34	13·65	13·99	14·34	4					
86	14·34	14·70	15·09	15·50	15·93	16·38	16·86	17·37	17·91	18·49	19·11	3					
87	19·11	19·77	20·47	21·23	22·04	22·93	23·88	24·92	26·05	27·29	28·65	2					
88	28·65	30·16	31·84	33·71	35·81	38·20	40·93	44·08	47·75	52·09	57·30	1					
89	57·30	63·66	71·62	81·85	95·49	114·6	143·2	191·0	286·5	573·0	∞	0°					
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′		1′	2′	3′	4′	5′
													減分				

正割餘割的值,至此增加很快,故此公差欄不能用。

餘割眞數表

中英名詞對照表

Tangent 切線, § 254.

Point of contact, 切點 § 254.

Secant 割線, § 254.

Diametre 直徑, § 254.

Chord 弦, § 254.

Arc 弧, § 255.

Major arc 優弧, § 255.

Minor arc 劣弧, § 255.

Central angle 圓心角, § 256.

Inscribed angle 圓周角, § 256.

Segment of a circle 弓形, § 270.

Circumscribed circle 外接圓, § 272.

Circumcenter 外心, § 272.

Inscribed polygon 內接多角形, § 272.

Circumsribed polygon 外切多角形, § 272.

Inscribed circle 內切圓, § 272.

Incenter 內心, § 272.

Externally tangent circle 外切圓, § 282.

Concentric circle 同心圓, § 282.

Line of center 連心線, § 283.

Common chord 公弦, § 284.

Common tangent 公切線, § 286

Internat common tangent 內公切線, § 286.

External common tangent 外公切線, § 286.

Escribed circle 傍切圓, § 293.

Excenter 傍心, § 293.

Measure 度量, § 298.

Ratio 比, § 299.

Antecedent 前項, § 299.

Consequent 後項, § 299.

Commensurable quantities 可通約量, § 300.

Incommensurable quantities 不可通約量, § 300.

Common measure 公度量, § 300.

Proportion 比例, § 301.

Term 項, § 301.

Extremes 外項, § 301.

Means 中項, § 301.

Fourth proportional 第四比例項, § 301.

Mean proportion 中項比例, § 301.

Mean proportional 比例中項, § 101.

Third proportional 第三比例項, § 301.

Divided externally 外分, § 313.

Divided internally 內分, § 313.

Proportional segments 比例線段, § 314.

Similar polygon 相似多角形, § 321.

Similar figure 相似形, § 321.

Praportional compasses 比例規, § 327.

Pantagraph 畫圖縮放儀器, § 328.

Diagonal scale 對角線尺, § 329

Projection 射影, § 337.

Pythagorean theorem 畢氏定理, § 341.

Equivalent 等積形, § 347.

Kite 風箏形, 總習題

Angle trisector 三分角器, 總習題

Trigonometry 三角法, § 379.

Numerical trigonometry 數值三角, § 379.

Trigonometric function 三角函數, § 380.

Sine 正弦, § 380.

Cosine 餘弦, § 380.

Tangent 正切, § 380.

Cotangent 餘切, § 380.

Secant 正割, § 380.

Cosecant 餘割, § 380.

Trigonometric identity 三角恆等式 § 391.

Table of natural values of the trigonometric function 三角函數眞數表, § 397.

Trigonometric equation 三角方程式 § 400.

Solution of right-angled triangle 直角三角形解法, § 401.

Surveying 測量術, § 409.

Tape-line 捲尺, § 410.

Vertical line 直立線, § 411.

Vertical plane 直立面, § 411.

Vevtical angle 直立角, § 411.

Horizontal line 水平線, § 412.

Horizontal plane 水平面, § 4 2.

Horizontal angle 水平角, § 412.

Augle of elevation 仰角, § 413.

Angle of depression 俯角, § 413.

Compass 羅盤, § 414.

Transit 經緯儀, § 416.

Quadrant 象限儀, § 418.

開明