百科小叢書

中國算學小史

李儼著

王雲五主編

商務印書館發行

百科小叢書

中國算學小史

李儼著

王雲五主編

商務印書館發行

中國算學小史

目　錄

中國算學小史

緒言

歷史學爲研究人羣進化之學，算學史爲研究算學進化之學。公元十七，八世紀以降，歐美論述算史，代爲專家。其在國中，則宋景德二年(1005)敕撰册府元龜卷八六九，明算條，說述國算事實，爲中算史之嚆矢。清阮元(1764-1849)撰疇人傳(1795-1799)，羅士琳，諸可寶，黃鍾峻，華世芳各有續補，算家事蹟，稍告完備。民國以來，研此者益多，此學正方興未艾也。

國中算學，就其盛衰倚伏之大勢，可區爲五期：一曰上古期，自黃帝至周秦，約當公元前二七〇〇，迄公元前二〇〇；二曰中古期，自漢至隋，約當公元前二〇〇，迄公元後六〇〇；三曰近古期，自唐至宋，元，約當公元六〇〇，迄一三六七；四曰近世

期，自明至清初，約當公元一三六七，迄一七五〇；五曰最近世期，自清中葉迄清末，約當公元一七五〇，迄一九〇〇。

第一編　上古期

第一章　太古之算學

邃古之事，史書間缺，西人論此者，以爲公元前一萬七千年，華人已具天文知識。吾國古物學尙未發達，史前事實，尙有待於證明。惟算學之應用必遠在伏羲(公元前 2852-2738)以前。易繫辭云：「上古結繩而治，後世聖人易之以書契」，老子，莊子幷言結繩，疑事在史前。其次則爲八卦，班固漢書律歷志稱：「自伏羲畫八卦，由數起，至黃帝，堯，舜，而大備，三代稽古，法度章焉」，太古算學事實之可考者，如是而已。

第二章　黃帝，堯，舜時代之算學

班固以爲算數之事，大備於黃帝，堯，舜，史記稱：「黃帝考定量歷，建立五行，起消息，正閏餘」，是爲歷算學之鼻祖。後此傳說，如：

史記索隱引系本及律歷志，稱：黃帝使羲和占日

日，常儀占月，臾區占星氣，伶倫造律呂，大撓作甲子，隸首作算數」；

唐釋法琳，辨正論註稱：「隸首造算數」；

宋范曄，後漢書稱：「隸首作數」；

梁劉昭補註後漢書稱：「博物記曰：隸首黃帝之臣，一說隸首善算者也」；

徐岳數術記述稱：「隸首注術，乃有多種；....黃帝爲法，數有十等，及其用也，乃有三焉」。

故「世本作篇幷言叛造，羲和，常儀之倫，乃占天之原始，算學之厥初也」。共和以前紀年，各書推算互異，據皇極經世及通鑑輯覽幷稱：黃帝紀元在公元前二六九七。是中國算學，在公元前二六九七，已經成科；至堯，舜時代（公元前 2357－2204）天算發展之跡，事具尚書。

第三章 周，秦時代之算學

周代教育制度，漸臻完備，以算數爲必修學科。周官保氏：「教國子以六藝；一曰禮，二曰樂，三曰

射，四曰御，五曰書，六曰數」；內則云：「六年教之數與方名，十年出就外傅，居宿於外，學書計」。此種教授算數之制，至漢尙沿用之，前漢書食貨志稱：「八歲入小學，學六甲，五方，書計之事」，是也。

周髀算經托爲周公商高問答之辭，宋書云：「蓋天之術，云出周公旦，訪之殷商．蓋假托之說也。其書號曰周髀，髀者表也，周天之數也」。

漢鄭玄（康成）釋周官保氏稱：「九數：方田，粟米，差分，少廣，商功，均輸，方程，贏不足，旁要；今有重差，夕桀，句股」。唐賈公彥疏鄭註云：「方田以下，皆依九章算術而言，今有重差，句股也者，此漢法增之，....」，後人遂以爲九數卽九章算術，實則西漢典籍，初不題及九章算術。其方田，衰分，商功，均輸各章，幷箸漢法，是九章算術亦非周代作品也。

周秦之際，爲哲學思想發達時期。與此相伴而生者，則有算學。其時箸作，如墨子，莊子，呂氏春秋，管子，幷雜言算數。

第四章　九九

古代之有九九，事當在周髀算經及九章算術前。管子輕重戊篇曰：「宓戲作九九之數」，韓詩外傳及戰國策幷稱：「齊桓公設庭燎，東野人有以九九見者」。至周髀算經乃稱：「數之法，出於圓方，圓出於方，方出於矩，矩出於九九八十一」，趙君卿注曰：「九九乘除之原也」，魏劉徽九章注曰：「包犧始畫八卦，作九九之術」，蓋幷以乘法表之「九九八十一」，至「一一如一」，爲數之始也。而孔子家語，淮南子，唐張守節史記正義幷雜言及此。

第五章　周髀算經

宋鮑澣之周髀算經跋 (1213) 稱：「周髀算經二卷，古蓋天之學也」。考周髀旣爲蓋天之學，而蓋天之名，最初見於楊子雲法言重黎篇，且晉志稱：「漢靈帝時蔡邕於朔方上書言，周髀術文具存」。周髀本文又引呂氏春秋，倘此非後人羼入，則周髀之成書，至早不能在戰國前。清姚際恆且以「漢志無，

隋志始有，周髀之義未詳」，認爲僞書；其謂爲周公所作，則久已不成定論矣。

或因周髀算經卷上周公商高問答之語，歸納爲下之八事：(一)割圓說引源，(二)平面量法，(三)正三角形有 3:4:5 之比，卽 $3^2+4^2=5^2$，(四)二正三角形爲矩形，(五)全量爲各部之和，(六)句羃股羃爲弦羃，(七)三角量法應用於量地，(八)圓爲正三角形所轉成。周髀算經又屢言等差級數，如七衡之直徑，以 2(19833 里 200 步)遞進，二十四氣以 9 寸 9 寸 $\frac{1}{6}$ 分，遞爲加減是也。

第六章 九數及九章算術

九數之名，自來註家，各異其辭：

漢鄭玄註作：方田，粟米，差分，少廣，商功，均輸，方程，贏不足，旁要；今有重差，夕桀，句股；

廣韻卷四，數條，作：方田，粟米，差分，少廣，商功，均輸，方程，贏不足，旁要；

宋史律曆志，作：方田，粟米，差分，少廣，商功，均輸，方程，盈朒，旁要；

唐李賢註後漢書鄭玄傳,作：方田,粟米,差分,少廣,均輸,方程,傍要,盈不足,鈎股;

宋李石,續博物誌及册府元龜同,此一說也。

魏劉徽九章注,作：方田,粟米,衰分,少廣,商功,均輸,盈不足,方程,句股;

唐李賢註後漢書馬援傳,作：方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,盈不足,方程,句股;

宋楊輝,詳解九章算法,作：方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,盈朒,方程,句股;

宋秦九韶,數書九章作：方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,盈朒,方程,句股,(重差及夕桀,附);此又一說也。後說蓋出於劉徽,九章注。據劉徽,九章注,則謂：

方田：以御田疇界域,

粟米：以御交質變易,

衰分：以御貴賤稟稅,

少廣：以御積羃方圓,

商功：以御功程積實,

均輸：以御遠近勞費，

盈不足：以御隱雜互見，

方程：以御錯糅正負，

句股：以御高深廣遠。

就中方田章：畝法二百四十步爲秦，漢田制。衰分章：公士，上造，簪裊，不更，大夫，爲秦，漢爵名，說見前漢書百官公卿表，及續漢志百官志。均輸章：算，傜，爲漢代賦稅名義，說見史記平準書，及前漢書食貨志。而長安爲漢惠帝都，上林爲漢武苑名。唐李賢註後漢書鄭玄傳不箸商功，疑商功亦爲漢法。前漢書食貨志，稱：「(耿)壽昌習於商功，分銖之事」，似商功爲漢時一種算法，後乃納入九章算術。

第二編　中古期

第一章　西漢之算學

西漢算學之可記者，爲：張蒼，耿壽昌之删定九章，陳農訪求遺書，尹咸校數術，及劉歆始定圓率値。

劉徽九章算術註序稱：「往昔暴秦焚書，經術散壞，自時厥後，漢北平侯張蒼，大司農中丞耿壽昌，皆以善算命世，蒼等因舊文之遺殘，各稱删補，故校其目，則與古或異，而所論者，多近語也」。

張蒼，秦時爲柱下御史，明習天下圖書計籍，又善用算律歷。漢高六年（公元前 202）封北平侯，孝景五年（公元前 152）卒，年百餘歲。耿壽昌，漢宣帝時爲大司農中丞，習於商功，分銖之事。五鳳五年（公元前 54）奏設常平倉，賜爵關內侯。

漢成帝河平三年（公元前 26）謁者陳農使使求遺書於天下，太史令尹咸校數術，得許商算術二十六卷，杜忠算術十六卷。許商善爲算，能商功利，

建始元年(公元前 32)以博士治河工。綏和元年(公元前 8)爲大司農,歷官事蹟,具見前漢書溝洫志,及百官公卿表。

劉歆,河平中(公元前 28—25)與父向領校祕書,王莽持政,以歆爲國師,嘉新公。更始元年(23)被誅,年七十餘。劉歆圓率值爲 $\pi=3.1547$。祖冲之以 $\pi=3.14159265$ 校之,知其值不精,然已視古代 $\pi=3$ 爲善矣。

第二章 東漢之算學

東漢初葉張衡(78—139)以 $\pi=\sqrt{10}$, $\pi=\frac{92}{29}$, 視印度婆羅門加塔 (Brahmagupta, 約 628) 所說爲先。蔡邕 (133—192) 以 $\pi>3.125$。此時九章算術已經成立,故後漢書卷六十五,稱馬續善九章算術,又卷九十下,稱鄭玄 (172—200) 通九章算術也。馬續順帝時(約 130)爲護羌校尉,遷度遼將軍。鄭玄少學書數,八九歲能下算乘除,年二十一博極羣書,兼精算術。受三統歷,九章算術於第五

元。建安元年(196)受乾象歷於劉洪，爲加註釋。

第三章　徐岳數術記遺

徐岳字公河，東萊人，生於漢末，受歷學於漢靈帝(168—189)時會稽東部尉劉洪，會稽因述天目先生之語，岳爲成數術記遺一卷。三國吳中書令闞澤受劉洪乾象法於東萊徐岳，著有乾象歷注。隋書唐書并記徐岳撰九章，今已亡失。

數術記遺，稱:「黃帝爲法，數有十等，及其用也，乃有三焉。十等者：億，兆，京，垓，秭，壤，溝，澗，正，載。三等者，謂上中下也。下數者，十十變之，若言十萬曰億，十億曰兆，十兆曰京也。中數者，萬萬變之，若言萬萬曰億，萬萬億曰兆，萬萬兆曰京也。上數者，數窮則變，若言萬萬曰億，億億曰兆，兆兆曰京也」。又記天目先生之言曰:「隸首注術，乃有多種，及余遺忘，記憶數事而已。其一積算，其一太乙，其一兩儀，其一三才，其一五行，其一八卦，其一九宮，其一運算，其一了知，其一成

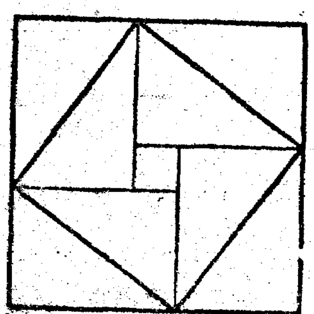
數，其一把頭，其一龜算，其一珠算，其一計算」，甄鸞注謂：「九宮者，卽二四爲肩，六八爲足，左三右七，戴九履一，五居中央」，如圖是也。

2	9	4
7	5	3
6	1	8

第四章　趙君卿句股方圓圖注

趙爽字君卿，一曰名嬰。宋李籍謂不詳何代人。宋鮑澣之疑爲魏晉之間人。淸阮元因今本周髀算經題云漢趙君卿注，故系於漢代。

「趙君卿曰，句股各自乘，倂之爲弦實，開方除之，卽弦也」。令 $a=$句，$b=$股，$c=$弦。則 $a^2+b^2=c^2$，或 $c=\sqrt{a^2+b^2}$..............................(1).



（弦圖）

「案弦圖，又可以句股相乘爲朱實二，倍之爲朱實四，以句股之差自乘爲中黃實，加差實，亦成弦實」。如弦圖，$2ab+(b-a)^2=c^2$.........(2) 此

與印度巴斯卡剌阿刻雅(Bhaskara Acarya)在一一五〇年所證明者相類。

「以差實減弦實,半其餘。以差爲從法,開方除之,復得句矣,加差於句卽股」。

從(2)得 $\dfrac{c^2-(b-a)^2}{2}=ab=A$ ....(3)

令 $b-a=p,\ a=x$

則 $x^2+px-A=0$ ....(4)

$x+p=b$ (註一)

第五章 三國時代之算學

三國時從事圓率者,有:王蕃,劉徽;從事九章者有:陳熾,王粲,劉徽。隋書律歷志,稱:「圓周率三,圓徑率一,其術疏舛。自劉歆,張衡,劉徽,王蕃,皮延宗之徒,各設新率,未臻折衷」。劉歆,張衡,率具見前章。吳人王蕃(219－259)以 $\pi=\dfrac{142}{45}=3.15\dot{5}$;魏人劉徽九章注(263)以 $\pi=\dfrac{157}{50}=3.14$。

(註一) 參觀李儼,中算家之 Pythagoras 定理研究,學藝雜誌,第八卷,第二號,十五年十月.

廣韻稱:「九章術,漢許商,杜忠;吳陳熾;魏王粲(177－219) 并善之」。其後魏陳留王景元四年(263)劉徽注九章算術,最爲完善。唐李淳風又加註釋,宋代學校採爲教科書,自此遂成定本,流傳至今。

第六章 劉徽九章注

劉徽九章注次序爲:方田,粟米,差分(卽衰分),少廣,商功,均輸,盈不足,方程,句股。設問二百四十。方田第一,詳分數及田畝算法,以弧矢形之面積,爲: $A=\frac{1}{2}(bc+b^2)$, 而 $b=$矢, $c=$弦。粟米第二,詳百分比例之誼。衰分第三,說明比例之用。少廣第四,詳單分數 (unit fraction), 直田求從,開平立方,復以 $\pi=3$, 得 (圓球之全徑)$=\left(\frac{16}{9}\text{圓球之體積}\right)^{\frac{1}{3}}$, 或 $D=\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$。商功第五,詳各色體積之計算。均輸第六,詳比例均輸。盈不足第七,言盈不足,并及推解,而第十一問蒲莞并生,第十二問兩鼠對穿,須用指數函數解,第十三問良馬與駑

馬俱發長安題，宜用二次式解答，盈不足本術所解，祇得其近似值。方程第八，以正負損益術，計聯立方程，或疑爲行列式及大衍求一術之先河，其第十三問五家共井題，答數爲整寸數，似不定方程。句股第九，詳句股互求，句股和較，句股容方圓，相似句股形比例各術，其第二十問爲$x^2+(14+20)x=2(1775\times 20)$之二次方程式。其$A=\frac{1}{2}(bc+b^2)$，$\pi=3$，$D=\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$三式，爲九章舊術，劉徽頗以爲非，因有割圓術之作。

第七章　劉徽割圓術

劉徽割圓術以內容六邊形起算，以 l 爲有法 n 邊形一邊之長，r 爲圓半徑，令 r 爲弦，$\frac{l}{2}$ 爲句，求得 $\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}$ 爲股，以半徑減股得 $r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}$ 爲小句，前之 $\frac{l}{2}$ 爲小股，求得小弦 L，即爲有法 $2n$ 邊形一邊之長。如 $n=6$，$r=1.000000$，求至 96 邊形之一邊。因得 $\pi_{96}=3.14104=3.14\frac{64}{625}$ 或

$\pi=3.14$。如:

邊數	每邊長	圓率值
6	1.000000,	$\pi_6=3$
12	0.517638,	$\pi_{12}=3.105828$
24	0.261052^3,	$\pi_{24}=3.132624$
48	0.130806,	$\pi_{48}=3.139344=3.13\frac{584}{625}$
96	0.065438,	$\pi_{96}=3.141024=3.14\frac{64}{625}$
192	…………	………………

劉徽衹以 $\pi=3.14$ 入算,隋書謂;「劉徽注九章商功曰,當今大司農斛,圓徑一尺三寸五分五釐,深一尺,積一千四百四十一寸十分之三」,

蓋 $\frac{1}{2}\times 13.55$ 寸 $=6.775$ 寸 (半徑)

$(6.775)^2=45.900625$ (半徑羃)

$\pi=3.14$ (徽率)

$10\pi\cdot(6.775)^2=1441\frac{3}{10}$ (容積)

第八章 劉徽重差術

劉徽九章序,謂:「九數有重差之名,....,以重

差爲率，故曰重差也，…… 輒造重差，幷爲注解，以究古人之意，綴於句股之下。度高者重表，測深者累矩，孤離者三望，離而又旁求者四望」。隋志於九章增作十卷，下題劉徽撰，蓋重差列於九章終篇也。隋志唐志又皆有九章重差圖一卷，今其圖已亡。唐以後稱重差爲海島算，宋史有海島算經一卷，夏翰［一作翺］新重演議海島算經一卷。清戴震於永樂大典中輯出一卷，有李淳風注釋，李潢幷爲補圖。(註一)

第九章　籌制

古代計算用籌，長短互異，說文，漢書幷稱算長六寸，隋書謂長三寸，數術記遺謂長四寸。其制用竹，亦有用牙，用鐵，用玉者。其數亦多寡不一，大約以一把，盈握爲度。幷以赤黑別正負。其置籌之具，唐時有稱爲算牗，算袋者，爲便佩帶。宋時有算子筒者，則不爲佩帶之用矣。

(註一)　參觀李儼，重差術源流及其新註，學藝雜誌，第七卷第八號，十五年四月。

其制以縱者爲單，百，萬，百萬，……，位；橫者爲十，千，十萬，千萬，……，位。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
縱者，	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
橫者，	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨

故 6728 則作𝍥𝍯𝍡𝍰，又 6708 則作𝍥𝍯　𝍰是也。

秦時貨貝錢中有一錢，第三字「𝍥」爲六之省，新莽泉布則作「𝍮」爲六，更作「𝍯，𝍰，𝍱」，爲七，八，九，亦從一橫爲五，以「𝍪，𝍫，𝍬」遞增其數，此爲秦，漢籌制之可考者。

第十章　兩晉，南北朝之算學

兩晉南北朝算家多言圓率，何承天 (370－447) 以 $\pi=3.1428$，與 $\pi=\dfrac{22}{7}$ 之率相近，同時皮延宗亦言圓率，其率不傳。稍後則有祖冲之 (429－500)，祖暅之父子。冲之以圓率正數 $\pi=3.14159265$，密

率 $\pi=\frac{355}{113}$, 約率 $\pi=\frac{22}{7}$, 其子謂 $\pi=\frac{22}{7}$, 術幷不傳。

祖冲之字文遠,范陽薊人也,宋孝武使直學林省,賜宅宇車服,解褐南徐州從事,公府參軍。大明六年(462)上書論歷,又與戴法興論歷,上愛奇慕古,欲用冲之新法,尋薨事寢。冲之特善算,注九章,造綴述數十篇,永元二年 (500) 卒,年七十二,(429-500)。冲之 $\pi=\frac{355}{113}$ 率,一五七三年德人 Valentinus Otto (或 Valentin Otto) 始論及之。

祖暅之一作祖暅,字景爍,冲之子,少傳家業,究極精微,亦有巧思入神之妙。梁天監 (502-519) 初,修乃父所改何承天歷,位至太府卿。北史稱:「江南人祖暅者,先於邊境被獲,在(魏安豐王)延明家,舊明算歷,而不爲王所待。芳(卽信都芳)諫王禮遇之。暅後還,留諸法授芳」,按祖暅被獲,當在徐州(525),以延明討徐州在孝昌元年 (525) 也。暅之子皓,亦善算歷。

同時則梁庾曼倩曾疏注算經;後魏高允 (390-

487) 撰算術三卷；元延明撰五經要略二十三卷，--作四十卷；信都芳注重差句股，周髀四術；董泉撰三等數一卷，今幷不傳。後周甄鸞所註周髀二卷，張丘建算經三卷，幷自撰五經算術二卷（?）今倘有傳者。鸞於梁大同元年（535）校解法，入周校玉斗，玉斗以周保定五年（565）頒行，又造甲寅元歷，卽天和（566）年歷。鸞曾舉示不定方程數例，如：

$$\left.\begin{aligned} 5x+4y+\tfrac{1}{4}z&=100,\\ x+y+z\quad&=100,\end{aligned}\right\}\begin{aligned} x&=15,\\ y&=1,\\ z&=84;\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y+\tfrac{1}{3}z&=100,\\ x+y+z\quad&=100,\end{aligned}\right\}\begin{aligned} x&=8,\\ y&=14,\\ z&=78.\end{aligned}$$

現傳之孫子算經，張丘建算經，夏侯陽算經，五曹算經，五經算術，其作者事蹟，與箸書年代，幷未確定，疑幷爲兩晉南北朝之著作，玆於下章分別論述之。

第十一章　孫子算經

孫子著孫子算經三卷，隋書經籍志作二卷，未詳何代人。清戴震以書中有長安，洛陽相去，及佛書二十九章語，斷爲漢明帝以後人，阮元以書中有棊局十九道，亦擬爲漢以後人。其言籌位，詳縱橫布算之義，九九則始九九，終一一，下卷記物不知數題，爲大衍求一術之起原，幷爲他書所未及。夏侯陽算經序謂：「五曹孫子述作滋多」，張丘建算經序，有：「夏侯陽之方倉，孫子之蕩杯」，之語，則其人至遲在夏侯陽張丘建前矣。

第十二章　張丘建算經

張丘建清河人，宋傳本張丘建算經三卷，甄鸞注，李淳風注釋，劉孝孫細草。其雞翁母雛題一問三答，如：

$$\left.\begin{aligned}5x+3y+\tfrac{1}{3}z&=100,\\ x+y+z&=100,\end{aligned}\right\}\begin{array}{lll}x=4, & x=8, & x=12,\\ y=18, & y=11, & y=4,\\ z=78; & z=81; & z=84.\end{array}$$

實不等式方程一問數答之制。其分數除法，及平面形與高線爲比例，亦爲前人所未論。球積計算尙憑古法。書中又示二次方程式題二問：

$$x^2+68\frac{3}{5}x=2\times514\frac{31}{45},\ x=12\frac{2}{3};$$

$$x^2+15x=594,\ x=18$$

惜今本前題卷末殘缺，後題亦僅言開方除之卽得，古代帶從開平方之法，因不得其詳。

第十三章　夏侯陽算經

夏侯陽著夏侯陽算經二卷，今本乃韓延所傳，而以己說纂入之，序亦當爲延所作。淸戴震擬韓延爲隋初人，玆擬夏侯陽爲後魏時人。因書中「定脚價」條，有「從納洛州」之語，魏書地形志，稱：洛州［太宗置，太和十七年改爲司州，天平初復］，又「分祿科」有「太守十分，別駕七分」之語，與魏書食貨志所稱：「公田太守十頃，治中別駕八頃」之制，約略相合。

書中所記，視古略有更革；定位之法，以本位爲身，他位爲外；相乘之辨，謂單位爲因，多位爲乘；

又以倍折代乘除；以添，減之誼，致用於身外，隔位，故有隔位加幾，身外減幾之說，其後元李冶，益古演段，宋楊輝乘除通變算寶多宗其說。其引時務云；十乘加一等，百乘加二等，$(10=10^1,\ 100=10^2, \cdots\cdots)$，十除退一等，百除退二等，$\left(\frac{1}{10}=10^{-1},\ \frac{1}{100}=10^{-2},\ \cdots\cdots\right)$，則具有指數之義，唐李淳風所注海島算經稱退位一等，退位二等，說亦本於此。又以中半 $(\frac{1}{2})$，太半 $(\frac{2}{3})$，少半 $(\frac{1}{3})$，弱半 $(\frac{1}{4})$，謂爲漏刻之數，自來歷家并應用之以誌十二辰之分數，爲吾國引用十二進位法之一證。又謂四不等田面積，$A=\frac{a+b}{2}\times\frac{c+d}{2}$，乃與埃及，希臘相同。

第十四章　五曹算經

淸四庫提要，稱：「隋書經籍志有九章六曹算經一卷，而無五曹之目，其六曹篇題亦不傳，(新)唐書藝文志有甄鸞五曹算經五卷，韓延五曹算經五卷，李淳風注五曹孫子等算經二十卷，魯靖新集五曹時要術三卷，甄，韓二家皆注是書者也。其作者則不知爲誰。考漢書，梅福上書言，臣聞齊桓之

時，有以九九見者，(唐)顏師古注云：九九算術若今九章，五曹之輩，……，唐書選舉志，稱孫子，五曹共限一歲，……，姑斷以甄鸞之注，則其書確在北齊前耳。……，夏侯陽算經引田曹，倉曹者二，引金曹者一，而此(永樂大典本五曹算經)書，皆無其文」。

至後來之演其說者，宋史題有：甄鸞，五曹算經二卷，李淳風注；甄鸞，五曹算法二卷；程柔，五曹算經求一法三卷，魯靖五曹時要算術三卷，五曹乘除見一捷例算法一卷；五曹算經五卷，李淳風注。今考夏侯陽算經所題四不等田之計算，與五曹算經同術，其書或在後魏北周間矣。

第十五章 五經算術

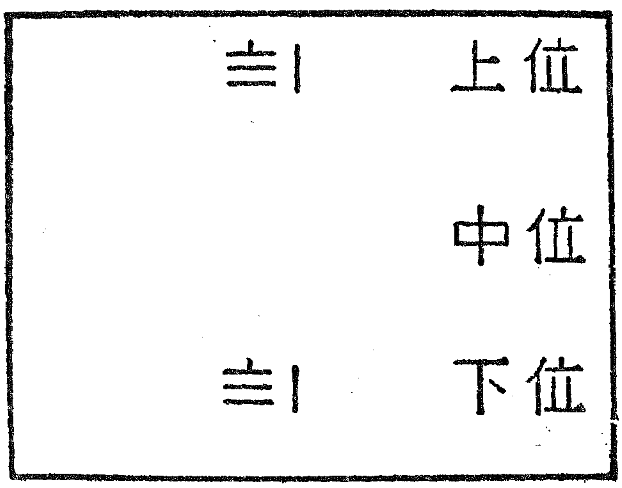
清四庫提要云：「隋書經籍志，有：五經算術一卷，五經算術錄遺一卷，皆不著撰人姓名，唐藝文志則有李淳風注五經算術二卷，亦不言爲誰所撰，今考是書…… 悉加甄鸞按三字於上，則是書當卽鸞所撰」。

按元延明鈔集五經算事爲五經宗在甄鸞之前，事見魏書。魏書，隋書，新唐書且箸錄其卷數，今所傳者既不箸撰人，而四庫提要乃因甄鸞按三字，斷爲甄鸞所作，實屬未妥。

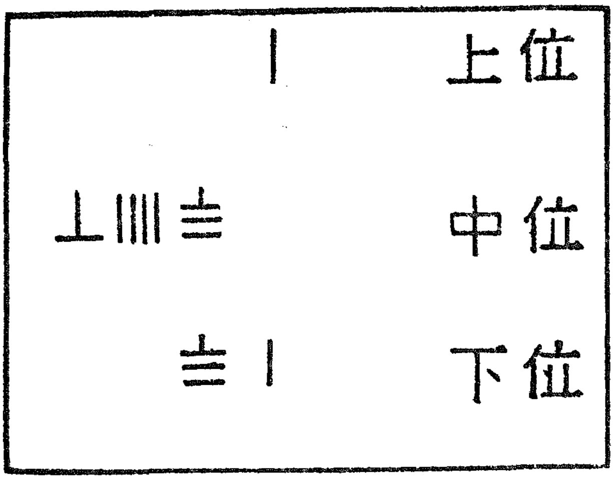
第十六章　籌算之應用

第一節　乘除

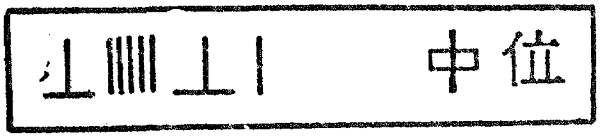
孫子算經言乘法，謂：「凡乘之法，重置其位，上下相觀，上位有十步至十，有百步至百，有千步至千。以上命下，所得之數，列於中位，……，上位乘訖者去之，下位乘訖者，則俱退之，…………」。如 81×81，列式爲：



先以 80 乘 81，即 $80 \times 81 = 80 \times 80 + 80 \times 1 = 6480$，去 80 位爲



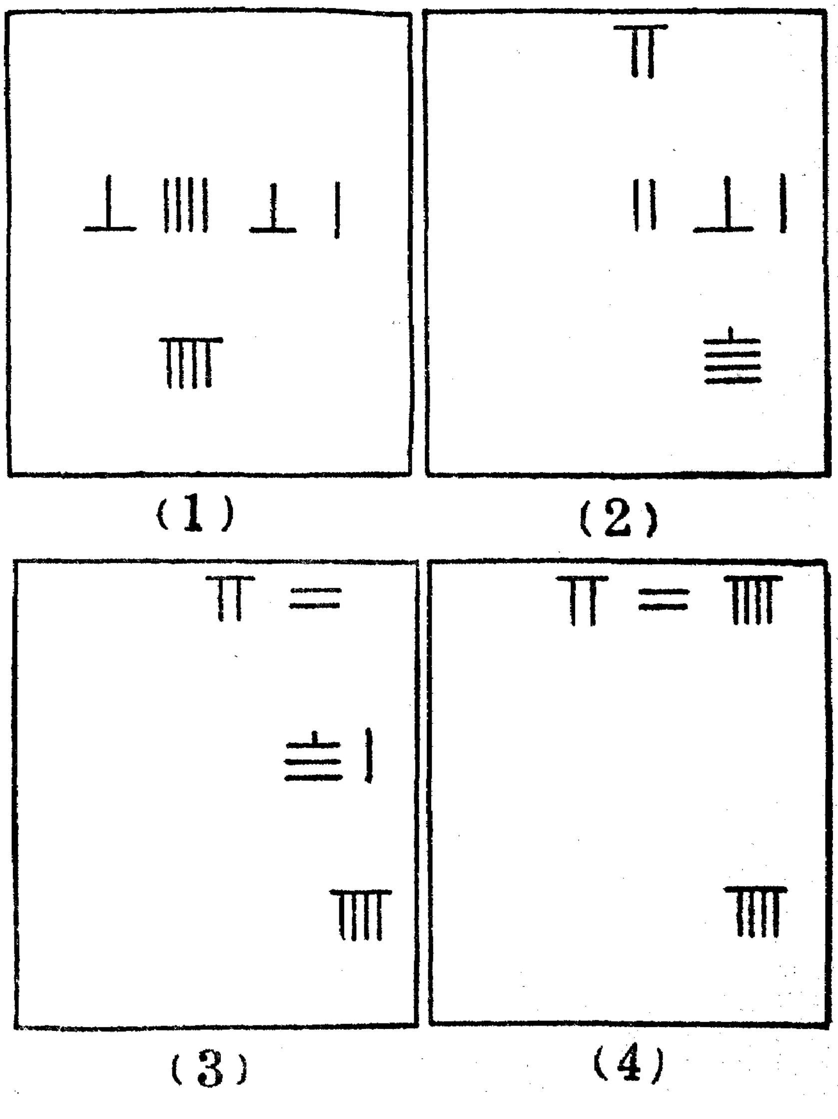
又以 1 乘 81，即 $1 \times 81 = 81$，加入前所得，上下位俱去爲



此與印度乘法相似。惟印度係中下位重置，得數列上位耳。

孫子算經言除法，謂：「凡除之法，與乘相異，乘得在中央，除得在上方，……，實有餘者，以法命之，以法爲母，實爲子」；夏侯陽算經曰：「實居中央，……，以法除之，宜得上商，從算相似，橫算相

當，以次右行，極於左方，言法之上，見十步至十，見百步至百，見千步至千，見萬步至萬，悉觀上數，以安下位，上不滿十，下不滿一，隨步多少，以爲楷式」，故 6561÷9，演算之序，如：

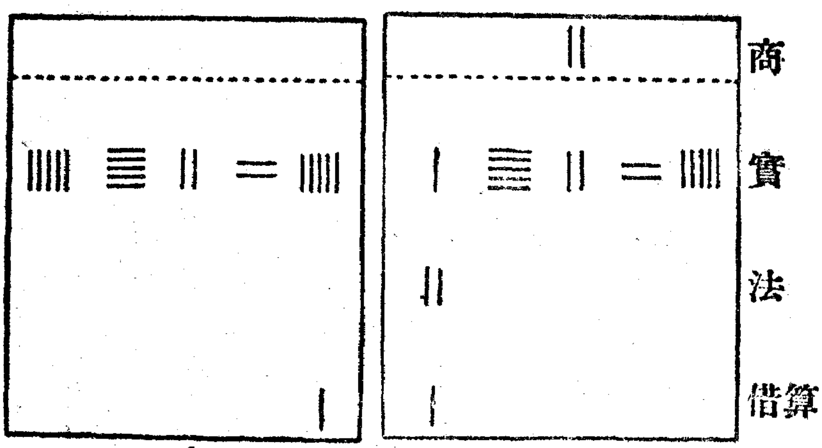


(1) (2) (3) (4)

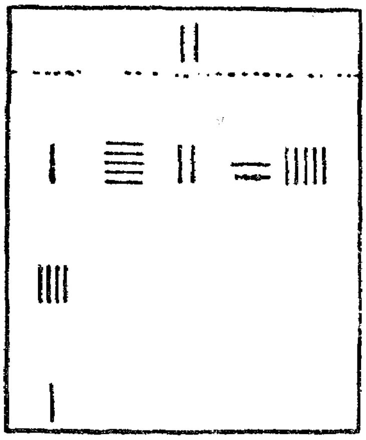
不盡之數，以分數記之，如：$6562 \div 9 = 729\frac{1}{9}$ 是也。

第二節　開方

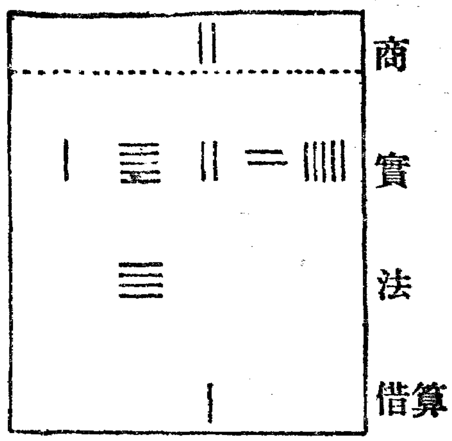
開方可分爲開平方，開立方之二種。開平方說之見於九章算術者，謂：(1)「置積爲實，借一算步之，超一等」，(2)「議所得，以一乘所借一算爲法，而以除」，(3)「除已，倍法，爲定法」，(4)「其復除折法而下」，(5)「復置借算步之如初，以復議一乘之，所得，副，以加定法，以除」，(6)「以所得副從定法」，(7)「復除折下」，(8)「如前開之，(議所得，以一乘所借一算爲法，而以除，適盡)」。如 $\sqrt{55225} = 235$，列式爲：



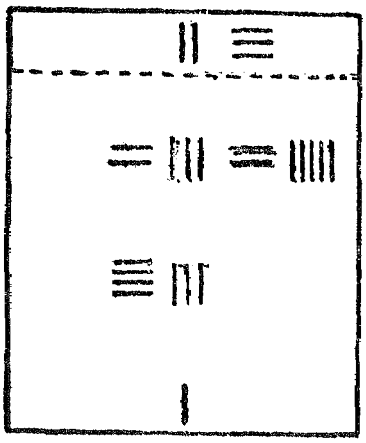
(1)　(2)



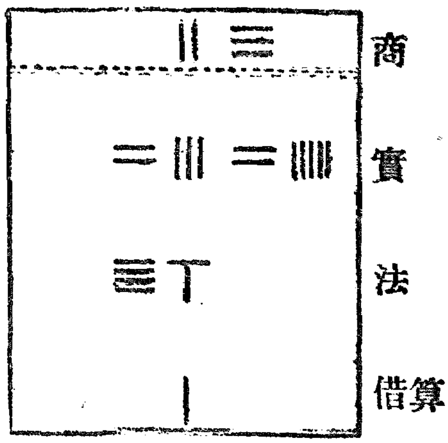
(3)



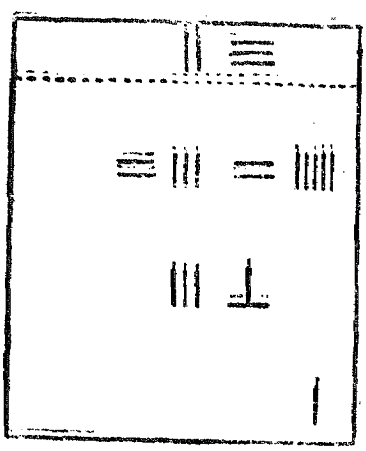
(4)



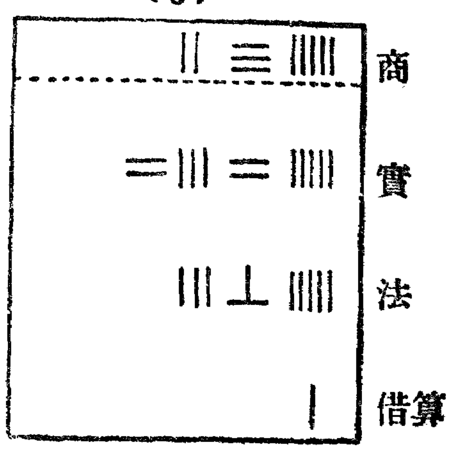
(5)



(6)



(7)



(8)

以後孫子算經，張丘建算經，夏侯陽算經，五經算術，舊唐書歷志內開元大衍歷經，宋賈憲立成釋鎖平方法并言開平方。惟孫子等書稱法曰方法，借算曰下法，其第五，六段與九章稍異。孫子等書稱：(5)「復置上商，以次前商；(上商單位乘上商首位，如爲百乘百，爲十乘十，爲一乘一)，副置於方法之下，下法之上，名爲廉法；方法，廉法，各命上商，以除實」；(6)「除訖倍廉法，從方法」；其後開元大衍歷經開方除，及宋賈憲立成釋鎖平方法，亦與此同。宋劉益帶從開方，「益積及益隅法」，布置應列五級，亦憑此說。

按開方初商以後，求次，三商已爲帶從開方式，故九章，張丘建常言及此，而唐王孝通則擴爲四次式。

開方不盡，在周髀則僅題「有奇」，此外又有下之三式：

(一)　不加借算，　$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a}$，

如：孫子算經，　$\sqrt{234567}=484\frac{311}{968}$；

（二）加借算，　$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a+1}$，

如：張丘建算經，　$\sqrt{175692}=419\frac{131}{839}$，

$$\sqrt{13068}=114\frac{72}{229};$$

五經算術，　$\sqrt{9000000000}=94868\frac{62576}{189737}$；

甄鸞註周髀算經，

$$\sqrt{14208000000}=119197\frac{75191}{238395};$$

（三）以奇而之，

如：夏侯陽算經，　$\sqrt{522900}=723$ 奇 171.

劉徽注九章，則謂：求其微數，

如　$\sqrt{\frac{314}{50}\times1518\frac{3}{4}}=138.1=138\frac{1}{10}$，

又　$\sqrt{\frac{314}{50}\times300}=61.38=61\frac{38}{100}=61\frac{19}{50}$.

加借算之法，夏侯陽算經，唐劉孝孫細草則應用於開立方，即 $\sqrt[3]{A}=\sqrt[3]{a^3+r}=a+\frac{r}{3a^2+1}$，

如　$\sqrt[3]{1572864}=116\frac{11964}{40369}$，

$$\sqrt[3]{1293732}=108\frac{34020}{34993}.$$

第三節 方程

九章方程術以一行爲主,徧乘諸行,作一度或幾度減之,以頭位減盡爲度,謂之直除,如:

$$-2x+5y-13z=1000,$$

$$3x-9y+3z=0,$$

$$-5x+6y+8z=-600,$$

列式爲:

$$\begin{vmatrix} 2, & 5, & -13 \\ 3, & -9, & 3 \\ -5, & 6, & 8 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1000 \\ 0 \\ -600 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2, & 5, & -13 \\ 6, & -18, & 6 \\ -10, & 12, & 16 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1000 \\ 0 \\ -1200 \end{vmatrix}=$$

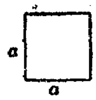
$$\begin{vmatrix} 2, & 5, & -13 \\ 0, & -33, & 45 \\ 0, & 37, & -49 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1000 \\ -3000 \\ 3800 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2, & 5, & -13 \\ 0, & -33, & 45 \\ 0, & 1221, & -1617 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1000 \\ -3000 \\ 12540 \end{vmatrix}=$$

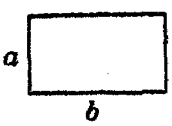
$$\begin{vmatrix} 2, & 5, & -13 \\ 0, & -33, & 45 \\ 0, & 0, & 48 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1000 \\ -3000 \\ 14400 \end{vmatrix} \qquad \therefore\quad z=300.$$

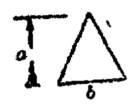
第十七章 幾何形之計算

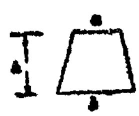
平面形立體形計算之見於 (1) 九章算術, (2) 孫

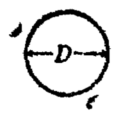
子算經,(3) 張丘建算經,(4) 五曹算經,(5) 夏侯陽算經者,有下列各種:

(一) 平方形。Square,  (1) 方田, $S=a^2$, (3) 方田, $S=a^2$, (4) 方田, $S=a^2$, (5) 方田, $S=a^2$.

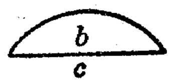
(二) 矩形。Rectangle,  (1) 廣田, $S=ab$, (4) 直田, $S=ab$, (5) 直田, $S=ab$.

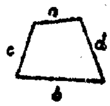
(三) 三角形。Triangle,  (1) 圭田, $S=\frac{ab}{2}$, (4) 圭田, $S=\frac{a+0}{2}\times b$, (5) 圭田, $S=\frac{ab}{2}$.

(四) 梯形。Trapezium,  (1) 斜田, 箕田, $S=\frac{a+b}{2}\times h$, (4) 簫田,箕田, $S=\frac{a+b}{2}\times h$, (5) 箕田, $S=\frac{a+b}{2}\times h$.

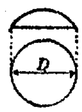
(五) 圓。Circle,  (1) 圓田, $S=\frac{P}{2}\times\frac{D}{2}$, (2) 圓田, $S=\frac{P}{2}\times\frac{D}{2}$, (3)圓田, $S=\frac{P}{2}\times\frac{D}{2}$, (4) 圓

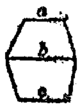
田, $S=\frac{P}{2}\times\frac{D}{2}$, (5) 圓田, $S=\frac{P}{2}\times\frac{D}{2}$. 而 $P=\pi D$.

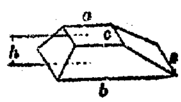
(六) 弓形。Segment of Circle,  (1) 弧田, $S=\frac{bc+b^2}{2}$, (3) 弧田, $S=\frac{bc+b^2}{2}$, (5) 弓田, $S=\frac{bc+b^2}{2}$.

(七) 四邊形。Trapezoid,  (4) 四不等田,

$P=\pi D$

(八) 球缺。Spherical Segment,  (1) 宛田, $S=\frac{PD}{4}$, (2) 丘田, $S=\frac{P}{2}\times\frac{D}{2}$, (4) 邱田, $S=\frac{P}{2}\times\frac{D}{2}$, (5) 丸田, $S=\frac{PD}{4}$.

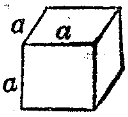
(九) 鼓形。 (4) 鼓田, 腰鼓田, 蛇田, $S=\frac{a+b+c}{3}\times h$, (5) 腰鼓田, $S=\frac{a+b+c}{3}\times h$.

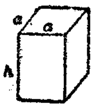
(十) 楔之平截體。Frustum of Wedge, 

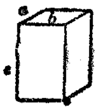
(1) 城, 垣, 隄, 溝,, 塹, 渠, $V=\frac{a+b}{2}\times c\times h$,

(2) 城, 隄, 溝, $V=\frac{a+b}{2}\times c\times h$, (3) 城, $V=$

$\frac{a+b}{2}\times c\times h$, (5) 城, $V=\frac{a+b}{2}\times c\times h$.

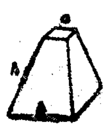
(十一) 立方。Cube,  (1) 立方, $V=a^3$, (2) 立方, $V=a^3$, (3) 立方, $V=a^3$.

(十二) 平行六面體。Parallelopiped,  (1) 方堡壔, $V=a^2h$.

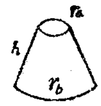
(十三) 平行六面體。Parallelopiped,  (1)倉, $V=abc$, (2) 方窖, $V=abc$, (4) 倉,方窖, $V=abc$, (5) 方窖, $V=abc$.

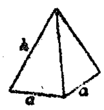
(十四) 球。Sphere,  (1) 立圓, $V=\frac{9}{16}D^3$, (3) 立圓, $V=\frac{9}{16}D^3$.

(十五) 圓柱。Cylinder,  (1) 圓堡壔,圓囷, $V=(\pi r^2)h$, (2) 圓窖, $V=(\pi r^2)h$, (3) 圓堡壔, $V=(\pi r^2)h$, (4) 圓倉, $V=(\pi r^2)h$.

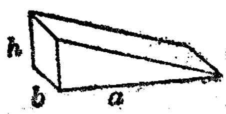
(十六) 角臺。Frustum of Pyramid,  (1) 方

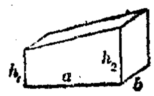
亭, $V=(a^2+b^2+ab)\times\frac{h}{3}$, (3) 方亭, 窖, $V=(a^2+b^2+ab)\times\frac{h}{3}$.

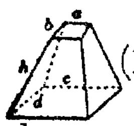
(十七) 圓臺。Frustum of Cone,  (1) 圓亭, $V=\pi(r_a{}^2+r_b{}^2+r_ar_b)\times\frac{h}{3}$, (3) 圓囷, $V=\pi(r_a{}^2+r_b{}^2+r_ar_b)\times\frac{h}{3}$, (5) 圓窌, $V=\pi(r_a{}^2+r_b{}^2+r_ar_b)\times\frac{h}{3}$.

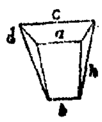
(十八) 角錐。Pyramid,  (1) 方錐, 陽馬, $V=a^2\times\frac{h}{3}$.

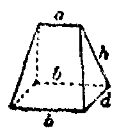
(十九) 錐。Cone,  (1) 圓錐, $V=(\pi r^2)\times\frac{h}{3}$, (2) 聚粟, $V=(\pi r^2)\times\frac{h}{3}$, (3) 委粟, $V=(\pi r^2)\times\frac{h}{3}$, (4) 聚粟, $V=(\pi r^2)\times\frac{h}{3}$.

(二十) 角錐。Prism,  (1) 塹堵, $V=ab\times\frac{h}{2}$.

(二十一) 平行六面體截體。Frustum of Parallelopiped,  (3) 倉, $V=ab\times\frac{h_1+h_2}{2}$.

(二十二) 角錐平截體。Frustum of Pyramid,  (1) 芻童,曲池,盤池,冥谷, $V=\frac{h}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]$, (3) 窖, $V=\frac{h}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]$.

(二十三) 楔。Wedge,  (1) 羨除, $V=\frac{h}{6}d(a+b+c)$.

(二十四) 楔。Wedge,  (1) 芻甍, $V=\frac{h}{6}d(a+b+c)$.

(二十五) 楔。Wedge,  (1) 鱉臑, $V=\frac{h}{6}da$.

第十八章　隋代之算學

隋代算學,雖無顯著之進步,而唐代算學選舉之制,實始於隋。隋始置算學博士於國庠,其制則:算博士二人,算助教二人,算學生八十人,幷隸於

國子寺。當時言算者，有：劉焯(544－610)，劉炫。焯通九章算術，炫自撰算術一卷。其見於隋書經籍志，具撰人姓氏者，有：李遵義疏九章算術一卷，楊椒撰九九算術二卷，張峻撰九章推圖經法一卷，張去斤算疏一卷；不具撰人姓氏者，有：九章術義序一卷，九章別術二卷，九章六曹算經一卷，五經算術錄遺一卷，五經算術一卷，算法一卷，黃鍾算法三十八卷，算律呂法一卷，衆家算陰陽法一卷。其爲海外輸入者，又有：婆羅門算法三卷，婆羅門陰陽算歷一卷，婆羅門算經三卷。

新唐書有韓延夏侯陽算經一卷，韓延五曹算經五卷。清戴震斷韓延爲隋代人。

第三編 近古期

第一章 唐代之算學

唐代算學，上承漢魏，下接宋元，爲中國算學史最重要之時期。前此九章算術諸書，傳註至爲庬雜，至李淳風與梁述，王眞儒受詔注算經十書，顯慶丙辰(656)付國學行用後，流傳始廣。唐初幷以算學取士，其制因隋。王孝通，武德時(619—626)人，箸緝古算經，亦列入學科。其書因九章商功求積諸法而推廣之，應用方程式，有：$x^2=A$, $x^2+px=A$, $x^3+px^2=A$, $x^3+px^2+qx=A$, $x^4+qx^2=A$. 雖其解法未詳，而宋元高次方程式之討論，已始於此。同時婆羅門，天竺數學輸入中國，中國數學亦輸入百濟，日本。故唐代算學，爲中算始盛時期。

第二章 唐代算學制度

唐廢算學，顯慶丙辰(656)左僕射于思志甯等奏以十部算經付國學行用。顯慶元年(656)復置算學，其制因隋，有算學博士二人，[從九品下]，學生

三十人。博士掌教文武八品以下，及庶人子爲生者，二分其經，以爲之業。習九章，海島，孫子，五曹，張丘建，夏侯陽，周髀十五人。習綴術，緝古十五人。其記遺，三等亦兼習之。顯慶二年(657)廢書算律學，龍朔二年 (662) 二月復置律及書算學，三年(663)以書隸蘭臺，算隸祕閣局，律隸詳刑寺。學制各爲七歲；第一組孫子，五曹共限一歲，九章，海島共三歲，張丘建，夏侯陽各一歲，周髀，五經算共一歲；第二組綴術四歲，緝古三歲，記遺，三等數皆兼習之。其考試之法；第一組凡算學錄大義本條爲問答。明數，造術，詳明術理然後爲通。試九章三條，海島，孫子，五曹，張丘建，夏侯陽，周髀，五經算各一條，十通六；記遺，三等數，帖讀十得九爲第。第二組試綴術，緝古，錄大義爲問答者，明數，造術，詳明術理，無注者合數，造術，不失義理，然後爲通。綴術七條(志云七條，六典云六條)，緝古三條 (志云三條，六典云四條)，十通六；記遺，三等數，帖讀十得九爲第，落經者雖通六不第。自

天寶(742-755)後學校益廢，生徒流散。元和二年(807)始定員額，西京書算館各十人，東都算館二人而已。

第三章　唐代算學書志

新唐書藝文志，稱:「李淳風注周髀算經二卷，又注九章算術九卷，注九章算經要略一卷，注五經算術二卷，注張丘建算經三卷，注海島算經一卷，注五曹孫子等算經二十卷(?)，注甄鸞孫子算經三卷，釋祖冲之綴術五卷，又王孝通輯古算術四卷，亦題太史丞李淳風注」。宋本張丘建算經三卷，題唐算學博士劉孝孫細草。李，劉并皆注疏舊算籍者也。其自撰述者，有：陳從運，得一算經七卷，貞元(785-804)人龍受算法三卷；其時代無考，而見於舊唐書者，有：宋泉之，九章術疏九卷，陰景愉，七經算術通義七卷；見於新唐書者，有：魯靖新集五曹時要術三卷，謝察微算經三卷。

第四章　婆羅門天竺數學輸入中國

印度數學由佛教連帶輸入者，以近古爲最顯著。

唐于闐國三藏沙門實叉難陀譯大方廣佛華嚴經卷四，阿僧祇品第三十，言:「一百洛叉(此云萬)爲一俱胝，俱胝俱低爲一阿庾多，……爲一不可說不可說轉」，此卽數術記遺所謂:「上數者數窮則變，若言萬萬曰億，億億曰兆，兆兆曰京也」。唐人作隋志，所記者，有：婆羅門捨仙人所說婆羅門天文經二十一卷，婆羅門竭伽仙人天文說三十卷，婆羅門天文一卷，婆羅門算法三卷，婆羅門陰陽算歷一卷，婆羅門算經三卷。唐書，稱:「天竺國卽漢之身毒，或云婆羅門地也，……其中分五天竺，……有文字，善天文算歷之術」，開元六年(718)瞿曇悉達譯九執曆，卽出於西域，舊唐書西戎傳，稱:「罽賓國於開元七年(719)遣使來朝，進天文經一夾。册府元龜稱:「吐火羅國於開元七年(719)表進解天文人大慕闍，謂智慧幽深，問無不知」，其後貞元中(785-804)都利術士李彌乾自西天竺得聿斯經，有璩公者譯其文，成都利聿斯經二卷，新唐書以此經，與陳輔聿斯四門經一卷，幷列歷算類。(新)五

代史(卷五八)司天考云:初唐建中(780—783)時,術士曹士蔿作七曜符天憲謂之小憲,止行於民間。焦竑經籍志云:有曹公小憲一卷,李思議重注,本天竺憲法。以上所舉,爲婆羅門天竺數學輸入中國之可考者。現今國外學者,且有謂印度歷算,後漢時已輸入中國者,則未論定之問題也。

第五章 中國數學輸入百濟,日本

有唐拓境,遠極安西,四方來朝,史不絕書,百濟歲時伏臘,同於中國,其書籍有五經,子,史。欽明十五年(554)百濟易博士王道良,歷博士王保孫始以中國歷法輸入日本。於是改良度量衡制,置漏刻器,立天文臺,行元嘉歷及儀鳳歷,一惟中土之法是遵。大寶二年(702)立學校,授算術,所採算經,爲:周髀,孫子,六章,三開,重差,五曹,海島九司,九章,綴術,并置歷士,算生等名稱。(註一)

(註一) 參觀李儼,中算輸入日本之經過,東方雜誌第二十二卷,第十八號,十四年九月.

第六章　宋，金，元之算學

宋元豐七年(1084)刻算經十書入祕書省，同年試算學，上等爲博士。崇甯，大觀，宣和之間(1104—1120)算學置廢無常，而在野之研此者，日益隆盛。宋金之際，天元之用，大見發達，其學始於河北，河東。祖頤四元玉鑑後序，稱：「平陽蔣周撰益古，博陸李文一撰照膽，鹿泉石信道撰鈐經，平水劉汝諧撰如積釋鎖，絳人元裕細草之，後人始知有天元也。平陽李德載因撰兩儀羣英集臻，兼有地元，霍山邢先生頌不高弟劉大鑑潤夫撰乾坤括囊末有人元二問」，今其書盡不傳，而平陽，博陸，平水，絳，霍山，并在大河東北。一代算學之盛，已可見一般。其間成就最大者，有：秦九韶，李冶，楊輝，郭守敬，朱世傑。

第七章　劉益帶從開方術

劉益中山人，以句股之術，治演段，鎖方，作議古根源，撰成直田演段百問，其書引用帶從開方，正方損益之法，帶益隅開方，爲前古所未聞。程大位，

算法統宗列其書於元豐(1078—85)，紹興(1131—26)，淳熙(1174—89)以來刊刻算書之首。議古根源(約 1080)所舉帶從開方，雖僅及二次式，已與和涅法(Horner's Method, 1819)相似。後此賈憲，黃帝九章細草(約 1200)，秦九韶，數書九章，(1247)，李冶測圓海鏡(1248)，益古演段(1259)，郭守敬，授時歷(1280)，朱世傑算學啓蒙(1299)，四元玉鑑(1303)所引正負開方術幷本於此。

楊輝田畝比類乘除捷法卷下，引有：劉益議古根源帶從開方中益隅法。如 $-x^2+60x=864$ 列式爲：

(偶),	(從方),	(方法),	(實),	(上商)
-100	$+600$		-864	$\lfloor 20$ $x_1=20.$
		-200	-400	(益隅)
-100	$+600$	-200	-1264	
		$\times 2$	$+1200$	
-100	$+600$	-400	-64	

「二因方法，一退名廉」，得變式：

$$-x_2^2+60x_2-40x_2=64,\quad x_2=4.\quad \therefore\quad x=24.$$

第八章　賈憲開平立方法

賈憲爲楚衍(1022–1053 時人)弟子，有算法斅古集二卷。宋楊輝，稱：「黄帝九章……聖宋右班(殿)值賈憲撰草」，宋史，稱：黄帝九章細草九卷是也。鮑澣之稱：「近世民間之本，題曰黄帝九章……雖有細草，類皆簡捷殘闕，懵於本原」亦指此也。楊輝詳解九章算法(1261)引有：賈憲立成釋鎖平方法，及立方法。永樂大典本楊輝詳解九章算法，引有：「開方作法本源」，言增乘方求廉草，自註稱：[出釋鎖算書，賈憲用此術]，蓋卽巴斯噶三角形(Pascal, 1623–1662, Triangle)也。其圖如下：

左積　右隅
本積 1
商除 1 1
平方 1 2 1
立方 1 3 3 1
三乘 1 4 6 4 1
四乘 1 5 10 10 5 1
五乘 1 6 15 20 15 6 1

左衺乃積數，

右衺乃隅算。

中藏者皆廉，

以廉乘商方，

命實而除之。

第九章 秦九韶學說

第一節 秦九韶傳

秦九韶字道古，自題魯郡人，或稱蜀人，或稱秦，鳳間人，而清焦循天元一釋謂秦鳳間，乃指階，成，岷，鳳四州。年十八，在鄉里爲義兵首，旣出東南，多交豪富，性極機巧，星象音律算術，以至營造等事，無不精究。早歲侍親中都，因得訪習於太史，又嘗從隱君子受數學。父季槱，寶慶中（1225–1228）官潼川，九韶隨侍。又嘗從李劉學駢儷詩詞。李梅亭集有回秦縣尉九韶謝差校正啓云：善繼人志，當爲黃素之校讎；肯從吾游，小試丹鉛之點勘；李劉嘗爲成都漕，九韶差校正，當在其時。或以歷學薦於朝，得對。淳祐四年（1244）八月以

通直郎通判建康府，十一月丁母憂，解官。寶祐間(1253－1258) 九韶爲沿江制置司參議官。七年(1247) 九月成數學九章十八卷。嘗知瓊州數月，與吳潛交尤稔，景定元年(1260) 四月吳潛罷相，十月竄吳潛於湖州，三年(1262) 詔吳潛黨人，永不錄用。九韶竄之梅州，亦當在此時。九韶在梅治政不輟，竟殂於梅。

第二節　秦九韶正負開方術

淸羅士琳謂：「秦氏箸數學九章，而古正負開方術顯」，其言籌位，分別縱橫，無異於古，而其應用〇號，及簡號 ×，ㄊ 或 ㄋ，ㄨ或 ㄨ，則爲後世暗碼之起源。其論方程式也，如：

$$-x^4+763200x^2-40642560000=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

令 $100\,y=x$，則變式

$$-(100y)^4+763200(100y)^2=40642560000=0 \quad (2)$$

可約商 8，亦即 (1) 式可約商 800 也。秦氏正負三乘方圖，并可以和涅相類之法記之，如：

$$
\begin{array}{lr}
-1\times(100)^4+\quad +163200\times(100)^2 \quad -40642560000 & \underline{|8} \\
\quad -800\times(100)^3-640000\times(100)^2+98560000\times(100)+78848000000 & \\
\hline
-1\times(100)^4-800\times(100)^3+123200\times(100)^2+98560000\times(100)+38205440000 & 一變 \\
\quad -800\times(100)^3-1280000\times(100)^2-925440000\times(100) & \\
\hline
-1\times(100)^4-1600\times(100)^3-1156800\times(100)^2-826880000\times(100)+38205440000 & 二變 \\
\quad -800\times(100)^3-1920000\times(100)^2 & \\
\hline
-1\times(100)^4-2400\times(100)^3-3076800\times(100)^2-826880000\times(100)+38205440000 & 三變 \\
\quad -800\times(100)^3 & \\
\hline
-1\times(100)^4-3200\times(100)^3-3076800\times(100)^2-826880000\times(100)+38205440000 & 四變
\end{array}
$$

故 (2) 式約商 8 後, 卽原式 (1), 約商 800 後, 四變爲

$$
\begin{aligned}
-1\times(100y)^4 -3200\times(100y)^3 &-3076800 \\
\times(100y)^2-826880000\times(100y)&+ \\
+38205440000=0 &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)
\end{aligned}
$$

令 $10y=z$, 或 $10z=x$, 則變式可書爲

$$
\begin{aligned}
-1\times(10z)^4-3200\times(10z)^3-3076800\times(10z)^2 \\
-826880000\times(10z)+38205440000=0\ldots \quad (4)
\end{aligned}
$$

可約商 4,

$$
\begin{array}{lr}
-1\times(10)^4-3200\times(10)^3-3076800\times(10)^2-826880000\times(10)+38205440000 & \underline{|4} \\
\quad -40\times(10)^3-129600\times(10)^2-128256000\times(10)-38205440000 & \\
\hline
-1\times(10)^4-3240\times(10)^3-3206400\times(10)^2-955136000\times(10)+0 & 一變
\end{array}
$$

卽原式 (1) 約商 40 後, 一變爲

$$
-1\times(10z)^4-3240\times(10z)^3-3206400\times(10z)^2
$$

$$-955136000\times(10x)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

或 $-x^4-3240x^3-3206400x^2-955136000x$

$$=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

而 $x=840$ 爲一根。(6) 式即方程論所稱之降乘式 (depressed equation)。

其開方不盡者，或(一)進一位，如：$\sqrt{8000}=89+1=90$，或(二)退商進求小數，如：$16x^2+192x-1863.2=0$，$x=6.35$. 又 $36x^2+360x-13068.8=0$，$x=14.7$. 或(三)加借算，如 $\sqrt{640}=25\frac{15}{2\times15+1}=25\frac{5}{17}$，此加借算之法，自古已有，祇及於開平立方，秦氏則擴充而應用於多乘方，如方程式 $-x^4+15245x^2-6262506.25=0$，初商 $x=20$ 後，變原式爲 $-x^4-80x^3+14045x^2+577800x-324506.25=0$，假定此變式根數爲 1，即「以方，廉，隅，各數正負相併爲分母，餘實爲分子」，故 $x=20\frac{324506.25}{590564}$ 或 $x=20\frac{1289025}{2362256}$。如所得分數爲負數時，則當棄此分數不用。如 $16x^2+19x-1863.2=0$，$x=6.35$

$-\frac{1.06}{3.9456}=6.35=6.4.$ 又 $36x^2+360x-13068.8=0$, $x=14.7\frac{2.44}{139.68}=14.7$ 是也。

第三節 秦九韶數理雜說

秦九韶數學九章(1247)於古九章外,有大衍,(註一)率變,堆積,招法。數學九章卷十三,「計造石壩」題,謂:「以招法入之」,卽:

$$a+(a+1\cdot b)+(a+2\cdot b)+(a+3\cdot b)+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot b)=na+\frac{n(n-1)}{2}b.$$

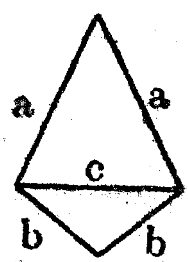
而 $a=$上積,或初積,$b=$次積。

此與朱世傑四元玉鑑(1303),「如像招數」首問同術,而「如像招數」之招,與此「招法」之招,有同源之勢。此外尖田求積中兩尖田形之面積 x,

由 $$-(B-A)^2+2(A+B)x^2-x^4=0$$

$$A=\left[b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]\times\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$B=\left[a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]\times\left(\frac{c}{2}\right)^2$$



(註一) 參觀李儼,大衍求一術之過去與未來,學藝雜誌第七卷,第二號,十四年九月.

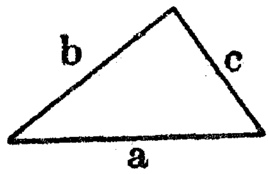
而得。

三斜求積之面積 x,

由 $x^2-\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]=0$

即 $x=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

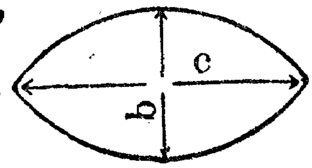
及 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$



而得。

蕉田求積中,蕉田之面積 y,

由 $-10(c+b)^3+\left[\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]\times 2y^2+4y^4=0$



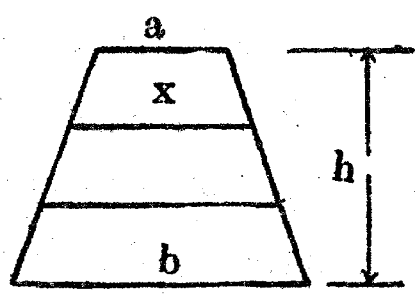
而得。由是知弧矢形之面積 x,

由 $-10(c+2b)^3+4[c^2-(2b)^2]x+16x^2=0$

而得。

均分梯田,作爲三分,已知 a, b, h, 則 x 之値,

由 $-\frac{k}{2}\cdot h+ahx+\frac{b-a}{2}x^2=0$



而得。

在數學九章卷十四,「積木計餘」題,謂尖垜,「以堆積入之」,即 $1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{(2m-1)2m}{2}$,而 $m=\frac{n+1}{2}$ 爲中面數。又稱 3, 2, 1 爲反錐差;1, 3, 6 爲蒺藜差;1, 4, 9 爲方錐差。

其論小數之類,一之下,有:分,釐,毫,絲,忽,微,塵,沙,渺,莽,輕,清,煙;分數之類,有:中半 $\left(\frac{1}{2}\right)$,少半 $\left(\frac{1}{3}\right)$,太半 $\left(\frac{2}{3}\right)$,弱半 $\left(\frac{1}{4}\right)$,強半 $\left(\frac{3}{4}\right)$ 之別。

第十章　李治學說

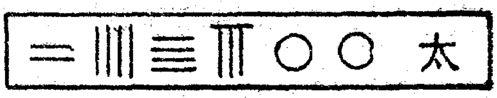
第一節　李治傳

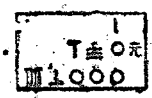
李治字仁卿號敬齋,李遹次子。金眞定府欒城縣人。自幼善算數。正大七年(1230)登詞賦進士第。調高陵簿,未上,辟權知(河南)鈞州事。壬辰(1232)正月城潰,微服北渡。又二年(1234)金亡。遂流落忻崞間。先隱於崞山(在代州崞縣)之桐川。聚書環堵。戊申(1248)成測圓海鏡二十卷,謂得洞淵九容之說,日夕玩繹,遂成此書。後由崞

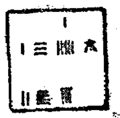
而之太原，居太原藩府，之平定居聶珪帥府。晚家眞定府元氏縣之封龍山，學徒益衆。元世祖居潛邸聞其賢，歲丁巳(1257)遣使召之，問對稱旨。己未(1259)成益古演段三卷。謂近世有某者，以方圓移補成編，號益古集，再爲移補條段，細繙圖式，遂成此書。至元元年(1264)元世祖始立翰林院，王鶚薦李治爲學士。至元二年(1265)召拜翰林學士，同修國史。明年以疾辭，歸封龍山。十六年(1279)卒，年八十八。(1192－1279)，子克修。

第二節　李治立天元一術

李治測圓海鏡，益古演段於「天元一」法，言之獨詳。法以常數(constant)爲「太極」，旁記「太」字，未知數一次者(x)爲「天元」，旁記「元」字。測圓海鏡中太在元下，即「元下必太，太上必元，故有元字，不記太字，有太字，不記元字。元上一層則元自乘數，又上一層則元再乘數，凡上一層，則增一乘。太下一層則元除太數，又下一層則元再除太數，凡下一層則增一除」。

如 $244800 = \cdots$ 

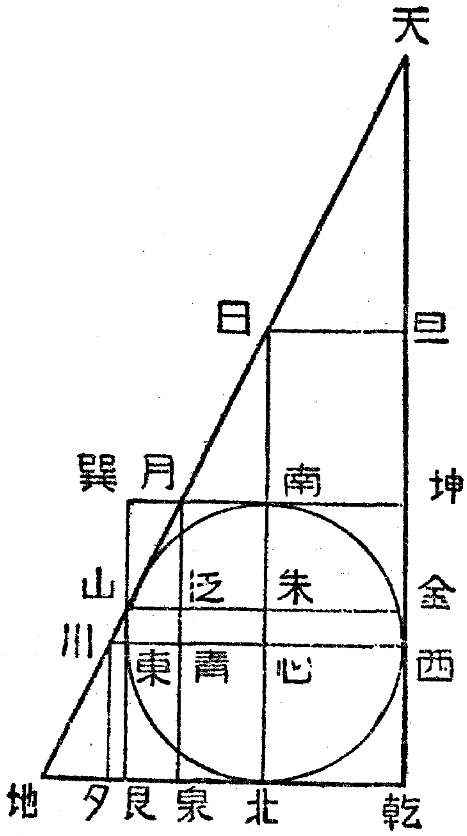
$x^2+680x+96000=\cdots\cdots$  或 

$x+135+248x^{-2}=\cdots\cdots\cdots$  或 

第三節　李治圓城圖式，名義

測圓海鏡十二卷，「以句股容圓爲題，自圓心圓外縱橫取之，得大小十五形，皆無奇零」，如通Δ天地乾，天地爲通弦，天乾爲通股，乾地爲通句，而所取之句股弦，幷爲 $8^2+15^2=17^2$ 之倍數。如通弦 $=40\times17$，通股 $=40\times15$，通句 $=40\times8$ 是也。所得十五形正數，爲：

	弦 c,	句 a,	股 b,
天或通 Δ 天地乾,	680,	320,	600,
邊 Δ 天川西,	544,	256,	480,
底 Δ 日地北,	425,	200,	375,
黄廣 Δ 天山金,	510,	240,	450,
黄長 Δ 月地泉,	272,	128,	240,



	弦 c,	句 a,	股 b,
上高 Δ 天日旦,	255,	120,	225,
下高 Δ 日山朱,	255,	120,	225,
上平 Δ 月川青,	136,	64,	120,
下平 Δ 川地夕,	136,	64,	120,
大差 Δ 天月坤,	408,	192,	360,
小差 Δ 山地艮,	170,	80,	150,

	弦 c,	句 a,	股 b,
(皇)極 Δ 日川心,	289,	136,	255,
(太)虛 Δ 月山泛,	102,	48,	90,
明 Δ 日月南,	153,	72,	135,
叀 Δ 山川東,	34,	16,	30,

釋名. 句$=a$, 股$=b$, 弦$=c$.

黃$=$黃方$=$内容圓徑$=$圓$=2r$.

句股和$=$和$=a+b=$弦黃和$=(a+b-c)+c$,

句股較$=$較$=$差$=$中差$=b-a=$雙差較

$=(c-a)-(c-b)$,

句弦和$=a+c$,

句弦較$=$大差$=c-a=$股黃較$=$股黃差

$=b-(a+b-c)$.

股弦和$=b+c$.

股弦較$=$小差$=c-b=$句黃較$=$句黃差

$=a-(a+b-c)$.

雙差$=$大差$+$小差.

弦較和$=c+(b-a)=$股較和$=b+(c-a)$

$=$句和較$=(b+c)-a$,

弦較較$=c-(b-a)=$股和較$=(c-a)-b$

$=$句較和$=(c-b)+a$,

弦和和$=$總和$=$三事和$=a+b+c$,

$=$句和和$=(b+c)+a=$股和和$=(a+c)+b$,

弦和較$=$黃$=$黃方$=$圓徑$=a+b-c$,

$=$句較較$=a-(c-b)=$股較較$=b-(c-a)$.

第十一章 楊輝學說

第一節 楊輝傳

楊輝字謙光，錢塘人。宋景定辛酉(1261)作詳解九章算法，後附纂類，總十二卷，今所傳者，非其全帙。詳解算法若干卷，盡乘除，九歸，飛歸之蘊。景定壬戌(1262)作日用算法二卷，以明乘除，爲初學用，編詩括十有三首，立圖草六十六問，永嘉，陳幾先爲之題跋。咸淳甲戌(1274)作乘除通變本末三卷；上中卷乘除通變算寶爲輝自撰，下卷法算取用本末則與史仲榮合撰。德祐乙亥(1275)作田畝比類乘除捷法二卷。是年冬因劉碧澗，丘虛谷及舊刊遺忘之文，而作續古摘奇算法二卷，以上七卷

稱為楊輝算法，洪武戊午（1378）古杭勤德書堂新刋行世。

第二節　楊輝數理雜說

楊輝於級數，謂：

三角垛，$1+(1+2)+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+n)$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

四隅垛，$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+(n-1)^2+n^2$

$$\doteq\frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1).$$

方垛，$a^2+(a+1)^2+\cdots\cdots+(c-1)^2+c^2$

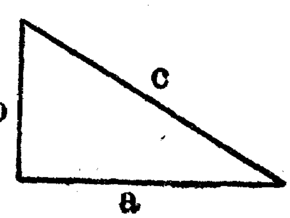
$$=\frac{1}{3}(c-a+1)\left(c^2+a^2+ca+\frac{c-a}{2}\right).$$

詳解九章算法句股章，今有戶高題，因句股形已知 c 及 $d=a-b$，則 $c^2=2a^2+4\left(\frac{d}{2}\right)^2+4\left(\frac{d}{2}\times a\right)$.

兩邊各減 $2\times\left(\frac{d}{2}\right)^2$，得：

$$c^2-2\times\left(\frac{d}{2}\right)^2=2a^2+4\left(\frac{d}{2}\times a\right)+2\times\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$=2\left(a+\frac{d}{2}\right)^2$$



故　$a=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{c^2-2\times\left(\frac{d}{2}\right)^2\right\}}-\frac{d}{2}$，卽為二次式之根。

論弧矢形，則謂 $-(2A)^2+4Ab^2+4db^3-5b^4=0$，$c=\dfrac{2A}{b}-b$，$d=\dfrac{\left(\dfrac{c}{2}\right)^2}{b}+b$，前二式疑出自劉益，末式爲輝所自發。續古摘奇算法上卷，載有縱橫圖。其洛書數：「九子斜排，上下對易，左右相更，四維挺出」，四語，爲奇行縱橫圖作法之根源。又有百子圖如下：

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

（百子圖）

第十二章　郭守敬學說

第一節　郭守敬傳

郭守敬字若思，順德邢臺人，大父榮，通五經，精於算數水利。時劉秉忠（1216－1274），張文謙（1216－1283），張易，王恂（1235－1281）同學於（磁）州西紫金山。榮使守敬從秉忠學。元中統三年（1263）文謙薦守敬習水利，巧思絕人。……十三年平宋，遂詔前中書左丞許衡，太子贊善王恂，都水少監郭守敬改治新曆。衡等率南北日官陳鼎臣，鄧元麟，毛鵬翼，劉巨淵，王素，岳鉉，高敬等分掌測驗，推步於下，而命張文謙，與樞密張易爲之主領。至元十七年（1280）曆成，賜名授時曆。所創法凡五事，元史曆志僅錄李謙曆議。清梅文鼎因授時曆草，及大統曆通軌爲成大統曆法，載於明史，說較詳盡。守敬卒於延祐三年（1316），年八十六（1231－1316）。

第二節　郭守敬弧矢割圓術

郭守敬割圓不僅割平圓，且割渾圓爲分圖。清

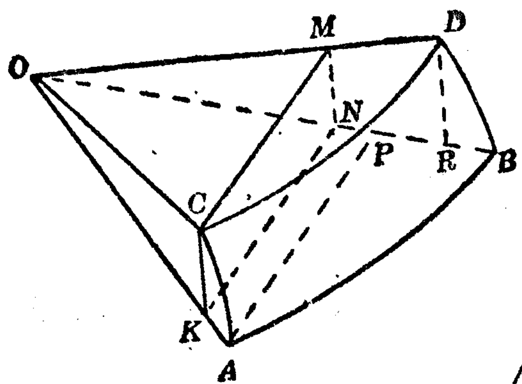
梅文鼎以其黃道面，赤道面在分圖中僅成直線，乃於塹堵測量中補作合形（如圖 1)，較見明晰。郭守敬因周天，$\pi d=365\frac{1}{4}$，$\pi=3$，故全徑 $d=121.75$，一象限$=91.31$．法先由沈括 (1030－1094) 公式 $a=\frac{2b^2}{d}+c$，及楊輝公式 $d=\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{b}+b$，消去 c，合成弧矢形求矢之四乘方式：

$$b^4+d^2b^2-adb^2-d^3b+\frac{a^2d^2}{4}=0$$

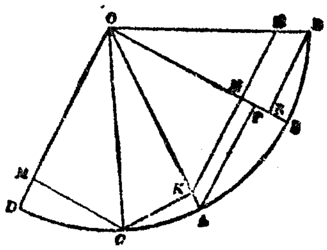
先由此公式算得矢度，b．

先求到矢度，以爲黃赤相求，及其內外度之根。

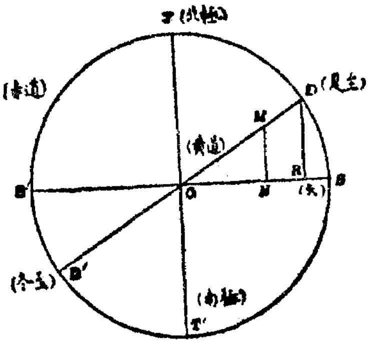
「黃赤道差。



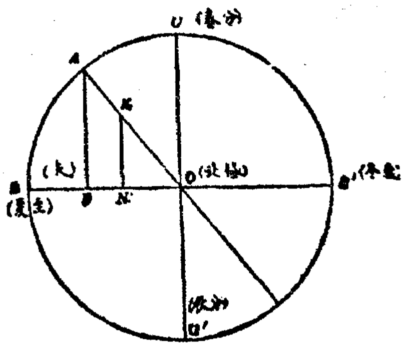
(1)



(2)



(3) 側立之圖



(4) 平視之圖

「求黃道各度下赤道積度術：

「置周天半徑，內減去黃道矢度，餘爲黃赤道小弦」。

如圖 (1), $OM=OD-MD$.

「置黃赤道小弦，以黃赤道大股乘之。[大股見割圓]，爲實，黃赤道大弦，[半徑] 爲法，實如法而一，爲黃赤道小股 [又爲赤道小句]。

$$ON=\frac{OM\cdot OR}{OD}.$$

「置黃道矢自乘爲實，以周天全徑爲法。實如法而一，爲黃道半背弦差」。

$$\frac{1}{2}(2CD-2CM)=\frac{a_{ec}-c_{ec}}{2}=\frac{MD^2}{D}.$$

「以差去減黃道積度，[即黃道半弧背]，餘爲黃道半弧弦」。

$$CM=CD-\frac{1}{2}(2CD-2CM).$$

「置黃道半弧弦自之爲股冪，黃赤道小股自之爲句冪。并之，以開平方法除之，爲赤道小弦」。

$$CM=KN.\quad OK=\sqrt{\overline{KN}^2+\overline{ON}^2}$$

「置黃道半弧弦，以周天半徑，[亦爲赤道大弦]，乘之，爲實，以赤道小弦爲法而一，爲赤道半弧弦」。

$$AP=\frac{CM(=KN)\cdot OB}{OK}$$

「置黃赤道小股，[亦爲赤道橫小句]，以赤道大弦[即半徑]乘之，爲實，以赤道小弦爲法，而一，爲赤道橫大句，以減半徑，餘爲赤道橫弧矢」。

$$OP=\frac{ON\cdot OA}{OK},$$

$$PB=OB-OP.$$

「橫弧矢自之爲實，以全徑爲法，而一，爲赤道半背弦差」。

$$\frac{1}{2}(2AB-2AP)=\frac{a_{eq}-c_{eq}}{2}=\frac{\overline{PB}^2}{D}.$$

「以差加赤道半弧弦爲赤道積度」。

$$AB=AP+\frac{1}{2}(2AB-2AP).$$

郭守敬割渾圓卽算弧三角法，其術在國中，此爲首創。又有「黃赤道相求弧矢諸率立成」，等之計算，所謂立成卽數表也。

第三節　授時平立定三差法

郭守敬言：「太陽盈縮平立定三差之源」。

命積(日)爲：　n,　$2n$,　$3n$,　$4n$,　$5n$,　$6n$;

積差爲：　S_n,　S_{2n},　S_{3n},　S_{4n},　S_{5n},　S_{6n};

(日)平差爲：　$(u_0=u_1+v_1-w_1)$, $u_1=\frac{S_n}{n}$, $v_2=\frac{S_{2n}}{2n}$,

$$u_3=\frac{S_{3n}}{3n},\ u_4=\frac{S_{4n}}{4n},\ u_5=\frac{S_{5n}}{5n},\ u_6=\frac{S_{6n}}{6n}.$$

以逐差之法 (Finite differences) 求得一差，二差，列表如下：

	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
一差，或汎平差，	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
二差，或汎立差，	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4		

此時 w_0, w_1, w_2, w_3, w_4 已全相等。

令　汎平積$=u_1$，汎平積差$=v_1-w_1=u_0-u_1$，

汎立積差$=\frac{w_2}{2}$.

又令　汎平積差$=v_1-w_1=u_0-u_1=nq+n^2c$.

就中　定差，$d=u_0$，平差，

$$q=\frac{v_1-w_1-\frac{w_1}{2}}{n}，\text{立差，}c=\frac{\frac{w_1}{2}}{n^2}.$$

則代入得　$u_1=d-nq-n^2\cdot c$,

$u_2=d-2nq-\overline{2n}^2\cdot c$,

$u_3=d-3nq-\overline{3n}^2\cdot c$;

……………………

或　$S_n=nd-n^2q-n^3c$,………………(1)

$S_{2n}=(2n)d-(2n)^2q-(2n)^3c$,

$S_{3n}=(3n)d-(3n)^2q-(3n)^3c$,

…………………………

爲 n 日末，$2n$ 日末，$3n$ 日末，……盈縮積，或限積。

又可知　$S_1=d-q-c$,

$S_2=2d-2^2\cdot q-2^3\cdot c$,

$S_3=3d-3^2\cdot q-3^3\cdot c$,

……………………

$$S_n = nd - n^2\cdot q - n^3\cdot c.$$

爲 1 日末，2 日末，3 日末，……盈縮積，或限積。

再以逐差之法，求得加分，a，平立合差，b，加分立差，K，如：

(加分)，(平立合差)，(加分立差)

$$S_1 - S_0 = d - q - c = a$$

$$-2q - 6c = b$$

$$S_2 - S_1 = d - 3q - 7c \qquad -6c = K$$

$$\overline{-2q-6c} - 6c$$

$$S_3 - S_2 = d - 5q - 19c \qquad -6c$$

$$\overline{-2q-6c} - 2\times 6c$$

$$S_4 - S_3 = d - 7q - 37c \qquad -6c$$

$$\overline{-2q-6c} - 3\times 6c$$

……………………………………………

$$\overline{-2q-6c} - (n-3)6c$$

$$S_{n-1} - S_{n-2} = d - (2n-3)q - (3n^2 - 9n + 7)c \qquad -6c$$

$$\overline{-2q-6c} - (n-2)6c$$

$$S_n-S_{n-1}=d-(2n-1)q-(3n^2+3n-1)c$$

而 初日加分 $=d-q-c=a$,

次日加分 $=(d-q-c)+(-2q-6c)$,

初日平立合差 $=-2q-6c=b$,

次日平立合差 $=(-2q-6c)-6c$,

n 日平立合差 $=(-2q-6c)-(n-2)6c$,

加分立差 $=-6c=K$.

初日末盈縮積 $=(d-q-c)$

次日末盈縮積 $=2(d-q-c)+(-2q-6c)$

三日末盈縮積 $=3(d-q-c)+3(-2q-6c)+(-6c)$

四日末盈縮積 $=4(d-q-c)+6(-2q-6c)+4(-6c)$

五日末盈縮積 $=5(d-q-c)+10(-2q-6c)+10(-6c)$

n 日末盈縮積 $S_n=n(d-q-c)+\frac{(n-1)n}{2}(-2q-6c)+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}(-6c)$,

$$=na+\frac{(n-1)n}{2}b+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}K$$

$$=nd-n^2q-n^3c.$$

換言之，即 n 日末盈縮積：

$$S_n=a+(a+b)+(a+2b+K)+(a+3b+3K)$$
$$+(a+4b+6K)+\cdots\cdots+$$
$$+\left(a+\overline{n-1}\ b+\frac{(n-2)(n-1)}{2}K\right)$$

$$S_n=na+\frac{(n-1)n}{2}b+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}K\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$=nd-n^2q-n^3c.$$

故既知 a, b, K，則冬至後按日盈縮，及每日盈行度，可依次加減，而造立成。按朱世傑招差之術，其義未詳，似即本於授時平立定三差法，因授時曆之加分，平立合差，加分立差，即朱氏之上差，二差，下差也。

第十三章 朱世傑學說

第一節 朱世傑傳

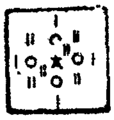
朱世傑字漢卿號松庭，寓居燕山，周流四方二十餘年，復遊廣陵，踵門而學者雲集。撰算學啓蒙三

卷，分二十問，立二百五十九問，首總括無卷數，大德己亥 (1299) 趙城序而梓傳焉。又因宋元之間，蔣周，李文一，石信道，劉汝諧，元裕，僅言天元，李德載僅言地元，劉大鑑僅言人元，乃按天地人物立成四元，以元氣居中，立天元一於下，地元一於左，人元一於右，物元一於上，上升下降，左右進退，互通變化，乘除往來，用假象眞，以虛問實，錯綜正負，分成四式，必以寄之，剔之，餘籌易位，橫衝直撞，精而不雜，自然而然，消而和會，以成開方之式也。書成名曰四元玉鑑，釐爲三卷，分門二十四，立問二百八十八，大德癸卯 (1303) 臨川莫若序而傳焉。

第二節 朱世傑四元術

四元者天地人物元也。天元術前已具言，至四元列式則天元，$\boxed{\begin{array}{c}\text{太}\\ \mid\end{array}}=x$，地元，$\boxed{\mid \quad \text{太}}=y$，人元，$\boxed{\text{太} \quad \mid}=z$，物元，$\boxed{\begin{array}{c}\mid\\ \text{太}\end{array}}=w$；併之，得 $\boxed{\begin{array}{ccc} & \mid & \\ \mid & \text{太} & \mid \\ & \mid & \end{array}}$

$=x+y+z+w$. 自乘爲冪得:

 $=x^2+y^2+z^2+w^2+2xy+2xz+2xw$

$$+2yz+2yw+2zw.$$

如令 $x=$句, $y=$股, $z=$弦, $w=$黃方,

則 $(x+y+z+w)^2$ 自相乘,得「四元自乘演段之圖」,「致圖認之,其理顯然」。

第三節　朱世傑級數論

朱世傑於發明四元之外，更善言級數。所舉有

(1)　落一形(三角形)。

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+n)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

(2)　撒星形(三角落一形)。

$$1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots\cdots+\left\{1+3+6+\cdots\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

(3)　四角落一形。

$$1+(1+4)+(1+4+9)+\cdots\cdots+(1+4+9+\cdots\cdots+n^2)=\frac{1}{12}n(n+1)(n+1)(n+2).$$

(4) 嵐峯形。

$$1+(1+5)+(1+5+12)+\cdots\cdots+\left\{1+5+12+\cdots+\frac{1}{2}n(3n-1)\right\}=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1).$$

$$1\cdot1+2(1+2)+3(1+2+3)+\cdots\cdots+n(1+2+3+\cdots\cdots+n)=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1).$$

(5) 三角嵐峯形(一稱嵐峯更落一形)。

$$1\cdot1+2(1+3)+3(1+3+6)+\cdots\cdots+n\left\{1+3+6+\cdots\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1).$$

(6) 四角嵐峯形。

$$1\cdot1+2(1+4)+3(1+4+9)+\cdots\cdots+n(1+4+9+\cdots\cdots+n^2)=\frac{1}{60}n(n+1)(n+2)\left\{n\left(4n+1\frac{1}{2}\right)+\left(4n+\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

(7) 撒星更落一形。

$$1+\{1+(1+3)\}+\{1+(1+3)+(1+3+6)\}+\cdots\cdots+\left\{1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

(8)　三角撒星更落一形。

$$1+\{1+(1+4)\}+\{1+(1+4)+(1+4+10)\}$$
$$+\cdots\cdots+\Big\{1+(1+4)+(1+4+10)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\Big\}=\frac{1}{720}n(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$(n+4)(n+5).$$

(9)　圜錐垜積。

如 r_1 爲奇數，r_2 爲偶數，則

$$1+3+7+12+19+27+37+48+61+\cdots\cdots$$

中奇項　$u_{r_1}=\frac{(d_1+3)^2+3}{12}$，而 $d_1=6\left(\frac{n-1}{2}\right)$.

偶項　$u_{r_2}=\frac{(d_2+3)^2}{12}$，而 $d_2=6\left(\frac{n}{2}-1\right)+3$.

如　n 爲奇，則 $S_{u_{r_1}}$

$$1+3+7+12+19+27+37+48+61+\cdots\cdots+u_n$$
$$=\frac{d_1\{(d_1+6)^2+(d_1+3)^2\}+3^2\{(d_1+6)(d+3)+6\}}{216}.$$

如　n 爲偶，則 $S_{u_{r_2}}$

$$1+3+7+12+19+27+37+48+61+\cdots\cdots+u_n$$
$$=\frac{d_2\{(d_2+6)^2+(d_2+3)^2\}+3^2\{(d_2+6)(d_2+3)+3\}}{216}.$$

四元玉鑑「如像招數」門，最後一問自註，曾說明招差之義；故

(1) 築堤差夫。上差 $d_1=a$，下差 $d_2=b$.

$$a+(a+1\cdot b)+(a+2\cdot b)+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot b)=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)n\cdot d_2.$$

差夫給米。

$$na+(n-1)(a+1\cdot b)+(n-2)(a+2\cdot b)+\cdots\cdots+1\cdot(a+\overline{n-1}\cdot b)=\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2.$$

(2) 圓箭束招兵。 $d_1=u_1$, $d_2=u_2-u_1$, $d_3=u_3-(2d_2+d_1)$.

$$\{1+K(1+2+3+\cdots\cdots+b)\}+\{1+K(1+2+3+\cdots\cdots+\overline{b+1})\}+\cdots\cdots+\{1+K(1+2+3+\cdots\cdots+\overline{b+n-1})\}=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3.$$

招兵給米。

$$n\{1+K(1+2+3+\cdots\cdots+b)\}+(n-1)\{1+K(1+2+3+\cdots\cdots+\overline{b+1})\}+\cdots\cdots+1\{1+K(1+2$$

$$+3+\cdots\cdots+\overline{b+n-1})\} = \frac{1}{2}n(n+1)d_1$$

$$+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3.$$

(3) 平方招兵。$d_1=u_1$, $d_2=u_2-u_1$,

$$d_3=u_3-(2d_2+d_1)$$

$$a^2+(a+1\cdot b)^2+(a+2\cdot b)^2+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot b)^2$$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3.$$

招兵支銀

$$na^2+(n-1)(a+1\cdot b)^2+(n-2)(a+2\cdot b)^2+\cdots\cdots$$

$$+1\cdot(a+\overline{n-1}\cdot b)^2=\frac{1}{2}n(n+1)d_1$$

$$+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3.$$

招兵給米。

$$a^2+\{a^2+(a+1\cdot b)^2\}2+\{a^2+(a+1\cdot b)^2+$$

$$(a+2\cdot b)^2\}3+\cdots\cdots+\{a^2+(a+1\cdot b)^2+(a+2\cdot b)^2$$

$$+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot b)^2\}n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)d_1$$

$$+\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)d_2$$

$$+\frac{1}{120}(n-2)(n-1)n(n+1)(4n+3)d_3.$$

(4) 立方招兵。$d_1=u_1$, $d_2=u_2-u_1$,

$d_3=u_3-(2d_2+d_1)$, $d_4=u_4-[3(d_3+d_2)+d_1]$,

$$a^3+(a+1\cdot b)^3+(a+2\cdot b)^3+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot b)^3$$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3$$

$$+\frac{1}{24}(n-3)(n-2)(n-1)nd_4.$$

招兵支錢。

$$na^3+(n-1)(a+1\cdot b)^3+(n-2)(a+2\cdot b)^3+\cdots\cdots$$

$$+1(a+\overline{n-1}\cdot b)^3=\frac{1}{2}n(n+1)d_1$$

$$+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3$$

$$+\frac{1}{120}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)d_4.$$

第十四章 宋金元算學書志

宋世司天算者，以楚衍為首，衍於九章，輯古，綴術，海島諸算經，尤得其妙。有弟子二人，賈憲，朱吉最著名，有女亦善算學。一時算學著述之見於載籍者：

宋史藝文志，有：李紹穀求一指蒙玄要一卷，夏翰（一作翱）新重演議海島算經一卷，徐仁美增成玄一算經一卷（宋史律曆志作增成玄一法），任弘濟，一位算法問答一卷，楊鍇明微算經一卷，法算

機要賦一卷，法算口訣一卷，算法祕訣一卷，算術玄要一卷。

宋紹興中(1131－1162)官撰祕書省續編到四庫書目於求一指蒙玄要一卷外，復有應時算法一卷，算法序說一卷，算法一卷，乘除算例一卷，里田要例算法一卷。

明程大位算法統宗謂：元豐(1078－1085)，紹興(1131－1162)，淳熙(1174－1189)以來刋刻者，有：議古根源(劉益撰)，益古算法(蔣周撰)，證古算法，明古算法，辯古算法，明源算法，金科算法，指南算法，應用算法，(一卷，1080，蔣舜元撰)，曹唐算法，賈憲九章，(宋史作賈憲黃帝九章細草九卷)，通微集，通機集，盤珠集，元盤集，三元化零歌，(宋史藝文志有張祚注法算三平化零歌一卷)，鈐經，(石信道撰)，鈐釋，諸書。

宋鄭樵通志又載靑陽人中山子著算學通元九章一卷。

祖頤四元玉鑑後序，稱：「平陽蔣周撰益古，博陸

(卽平陽)李文一撰照膽,鹿泉石信道撰鈐經,平水劉汝諧撰如積釋鎖,絳人元裕細草之,後人始知有天元也。

秦九韶得力於宋初諸家,因有數學九章(1247)之作。李治得力於洞淵,彭澤及金代諸家,因有測圓海鏡(1248),益古演段(1259)之作。南渡以後,楊輝作詳解九章算法十二卷(1261),日用算法二卷(1262),乘除通變本末三卷(1274),田畝比類乘除捷法二卷(1275),續古摘奇算法二卷(1275)。入元則朱世傑撰四元玉鑑三卷(1303)論天地人物四元。其前則平陽人李德載撰兩儀羣英集臻兼有地元,李治於東平得一算經亦有地元,劉大鑑撰乾坤括囊末有人元二問。元之末期,丁巨撰丁巨算法八卷(1355),趙友欽撰革象新書五卷,賈亨撰算法全能集,陳尙德撰石塘算書四卷,彭絲撰算經圖釋九卷,安止齋,何平子撰詳明算法二卷。其不著撰人姓名,時代者,有透簾細草,及錦囊啓源二書。

第十五章　趙友欽割圓術

趙友欽一曰名敬，一曰名友某，字子恭，一曰字子公，一曰敬夫，鄱陽人；一曰饒之，德興人，弗能詳也。箸革象新書五卷，明王煒刪定者凡二卷。其「乾象周髀」篇言割圓術，以內容四邊形起算。計算次序與劉徽相似。逐次由四邊求八邊，由八邊求十六邊，求至 16384 邊，知 $\pi=3.1415926+$，以證 $\pi=\frac{355}{113}$ 之密。而入算則用 $\pi=3.1416$，故赤道周天與其中徑之比，爲：$\pi=\frac{365.2575}{116.2561}$.

第十六章　撞歸法

除法古有商除，宋時有歸除，楊輝又另立歌括，其後乃有撞歸之法，卽：

二歸爲九十二　三歸爲九十三　四歸爲九十四

五歸爲九十五　六歸爲九十六　七歸爲九十七

八歸爲九十八　九歸爲九十九

任丁巨算法(1355)「今有子粒折收輕賫」題。其

歸除次序，與珠算次序完全一致。如 4898.85165 ÷35＝139.96719 可列式如下：

4898.85165	35
118	
139	
349	
348	
968	
338	
968	
235	
655	
251	
671	
741	
66	
136	
315	
945	
900	

清錢大昕且據陶宗儀輟耕錄有走盤珠，算盤珠，之喻，謂元代已有算盤。

第四編　近世期

第一章　明代之算學

明承宋,元餘緒,故在國初,古算尙有流傳。洪武戊午(1378)刋刻楊輝算法;永樂大典(1407)彙收古今算籍。其後因無專家繼起,此學稍稍頹廢。官家修史,於算數事實,絕不載記;私人撰著,亦僅述淺近之談。元史李冶傳,不言其天元一之學,且誤海鏡爲鏡海,益古演段爲益古演疑。明刊本周髀算經,至以鮑澣之數術記遺序爲周髀後序。然此時有二大事:一爲算盤之發明,一爲西算之輸入。算盤之發明,其著作之可攷者,實始於柯尙遷之數學通軌。柯尙遷明長樂人,字喬可,自號陽石山人,嘉靖中由貢生官邢臺縣丞。所著數學通軌(1578)論述算盤,事在程大位算法統宗(1593)前。至西算之輸入,則始於明之末葉,是時古籌算天元一之應用,已無人或曉,而算盤又不足以算高等算學,西算乘時而入,亦有由也。

第二章 明代算學書志

明代算學書已知撰人姓氏及其時代者，有：嚴恭通原算法一卷(1372)嚴恭撰，九章通明算法(1424)劉仕隆撰，指明算法二卷(1439)夏源澤撰，九章比類算法十卷(1450)吳信民撰，算學通衍(1472)劉洪撰，九章詳註算法九卷(1478)許榮撰，九章詳通算法(1483)余進撰，啓蒙算法(1526)鄭高昇撰，改正算法(1526)，馬傑撰，句股算術二卷(1533)顧應祥(1483－1565)撰，正明算法(1539)張爵撰，算理明解(1540)陳必智撰，重明算法(1540)林高撰，訂正算法(1540)林高撰，測圓海鏡分類釋術十卷(1550)顧應祥撰，弧矢算術(1552)顧應祥撰，測圓算術四卷(1553)顧應祥撰，神道大編歷宗算會十五卷(1558)周述學撰，算林拔萃(1572)楊溥撰，數學通軌(1578)柯尙遷撰，一鴻算法(1584)余楷撰，算法統宗十三卷(1593)程大位撰；幾何原本前六卷(1607)，利瑪竇(Matteo Ricci, 1529－1610)徐光啓(1562－1634)共譯，圜容較義(1609)利瑪竇

李之藻(—1631)演，同文算指前編二卷，通編八卷利瑪竇授，李之藻譯，測量法義利瑪竇譯，徐光啓受，測量異同徐光啓撰，幾何體論一卷，幾何用法一卷，泰西算要一卷，孫元化撰，句股義徐光啓撰，度測三卷，附開方號一卷，度算解一卷，陳藎謨撰，中西數學說圖說十卷(1631?)李篤培(1575—1621)撰，算集廣西全州宋卿陳邦備撰。

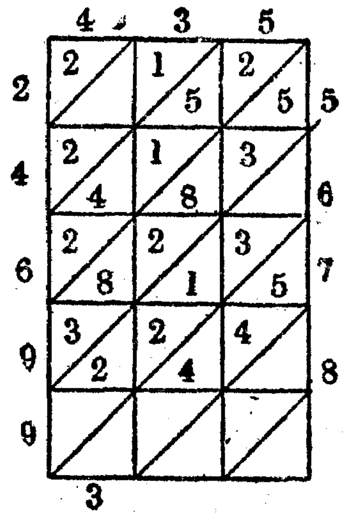
其未記時代或撰人姓氏者，有：算法大全都察院刻，算法南京國子監刻，九章算法南京國子監刻，算法二卷，金蟬脫殼，縱橫算法一卷，算法通纂一本，百家纂證一本，九章詳註比類均輸算法大全六本，開平方訣一本。

此外之見於叢書者，明初有永樂大典，明末有崇禎曆書幷附載算書。其見於個人集部者，則唐順之(1507—1560)撰句股測望論，句股容方圓論，弧矢論，分法論，六分論，見於荊川文集；朱載堉(1536—?)撰算學新說二卷附周徑獢見於樂律全書。(註一)

(註一) 參觀李儼，明代算學書志，圖書館學季刊第一卷，第四期，十五年十二月.

第三章　程大位學說

程大位字汝思，號賓渠，新安人。少遊吳楚，老憩丘園，舉平生師友之所講求，咨詢之所獨得者，著算法統宗十三卷，其中有先進言之未備，備矣，而或未精者，汝思悉爲闡明之。其書以九章爲目，後附難題。萬歷癸巳(1593)漸江(浙江)吳繼授爲之序。卷二列算盤式幷撞歸起一之法。算盤之用，在前雖有人道及，至算法統宗出，始見普及。縱橫圖之說，宋楊輝雖亦道及，必待程大位重述，始爲世所共曉。同書卷十二，「寫算」歌稱：「寫算鋪地錦爲奇，不用算盤數可知，……，照式畫圖代乘法，釐毫絲忽不須疑」，故 435×56780＝24699300 列式如右：



是爲寫乘 (Gelosia, or grating method)，其說始於十二世紀之印度算書，或疑其由西域傳入中國。

第四章　明清之際西算之輸入

第一節　明清之際西算輸入始末

明初因授時歷而作大統歷，行之二百年，違天失時，其事漸著。邢雲路，魏文魁，朱仲福，朱載堉之徒，類能言之。顧其時算數之術，亦不昌明，宋元諸子所遺之「天元一」術，已無人通曉，以是雖屬有志，而改作無由。利瑪竇 (Metteo Ricci, 1552–1610)，則適於萬歷辛巳 (1581) 來華。初亦不人重，及舉示世人以歷算學說，始爲世崇，并獲入都覲見。在野與徐光啓 (1562–1634)，譯幾何原本前六卷 (1606) 是爲西算輸入中國之初步。前後并授李之藻 (–1631)，徐光啓以算術，計有：同文算指，圜容較義，測量法義。而徐光啟因亦有測量異同，句股義之作，此外傳其法者，亦大有人。至利瑪竇萬歷庚戌 (1610) 卒後，西士來者漸衆，如：艾儒略 (Jules Aleni, 1613 來華, 1582–1646)，龐迪我 (Diego de Pantoja, –1618)，熊三拔 (Sabtthinus de Ursis, –1620)，陽瑪諾 (Emmanuel Jenne

Diaz, 1610 來華, -1659), 等，并通歷算，且各有譯述。迄萬歷壬子(1612)以降，周子愚，李之藻輩，并以舊歷不合，議請設局修改，未果，直至崇禎己巳(1629)始實行，以徐光啓督修歷法。西洋人入局者，有：龍華民(Nicolò Longobardi, 1597 來華, 1565-1655)。鄧玉函(Jean Terenz, 1621 來華, -1630)，翌年(1630)鄧玉函卒，繼入者爲湯若望(Schall von Bell, 1622 來華, 1591-1666)，羅雅谷(Giacomo Rho, 1618 來華, 1593-1638)。於是辛未(1631)進歷書二次，第一次二十四卷，第二次二十卷并一摺，壬申(1632)三次進書三十卷。翌年徐光啓逝世，遺摺以李天經自代，時則歷書大體已具，而算學中之筆算，籌算，幾何，三角術，三角函數表，及割圓術并從曆書中連帶輸入矣。惟新法迄明亡(1644)終未實行。

明亡後湯若望即與清廷接洽修歷，頗爲清世祖所重，逕以湯若望掌管欽天監印信，順治乙酉(1645)修補歷書得一百零四卷，是爲西洋新法歷

書。其時待遇之隆，爲前此所未有。如是者十有五年。同時穆尼閣 (John Nicolas Smogolenski, 1611–1656) 居南京，以對數之說，授薛鳳祚，是爲對數輸入中國之始。

至順治末年(1659–1661)楊光先肆力反對新法，清聖祖初卽位，便興大獄，廢新法，囚教徒，殺官生五人，以楊光先繼湯若望。康熙丙午(1666)湯若望卒。南懷仁 (Ferdinard Verbiest, 1659 來華，1623–1688) 起劾舊法之誤，如是復行新法。繼起反對，若楊燝者，幷得罪而去，而南懷仁新法，由監局官生肄習，永遠遵行。此時朝野幷知算數之宜重，王錫闡(1628–1682)，杜知耕，李子金，梅文鼎(1633–1721)，陳訏(1650–1732)，黃百家，梅瑴成(1681–1763)輩，均以整理西算爲志。聖祖亦留心歷算，其先後入宮教授算學者，有：南懷仁，張誠(Gerbillon, 1654–1707)，湯瑪(?,Thomas, 1644–1706)，白晉 (Joachim Bouvet, 1650–1730)，巴多明 (Parrenin, 1655–1741)，杜德美 (Pierre

Jartoux, 1670—1720.11.30)等。幷有將算書譯成滿文者。故聖祖深明算數，有律歷淵源(1723刻)之作，主其事者爲何國宗，梅瑴成；而明安圖顧陳垿(1678—1747)亦在攷測之列。此時代數學及割圓術中解析法幷連帶輸入。算學且變爲通俗化，惟以挾有御製頭銜，至無人敢更其隻字，明末以來西算輸入遂於此時告一段落。(註一)

第二節 筆算

在唐天竺寫算亦曾一度輸入中土，其用不著。同文算指前編(1613—14)卷上，稱：「茲以書代珠，始於一，究於九，隨其所得，而書識之」，是爲西洋筆算輸入之始。其論加減乘除，分數，開方，似引 Clavius, Epitome Arithemeticae Practicae, Rome, 1593 之說。因 $\frac{13946007693}{30800000}=46\frac{109207693}{30800000}$，$\sqrt{20}=4\frac{5473}{11592}$ 幷出於 Clavius, Epitome 也。除法及開方幷用帆船法(galley method)，如：同文算指

(註一) 參觀李儼，明清之際西算輸入中國年表，圖書館學季刊.

前編卷上，除法第五，1832487÷469，列式如下：

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & \\
 & & 6 & 3 & 1 & & \\
 & 4 & 2 & 1 & 5 & 0 & \\
 & 6 & 5 & 5 & 3 & 6 & 4 \\
1 & 8 & 3 & 2 & 4 & 8 & 7 \\
 & 4 & 6 & 9 & 9 & 9 & 9 \\
 & & 4 & 6 & 6 & 6 & \\
 & & & 4 & 4 & &
\end{array}
\left(3907\frac{104}{469} \right.
$$

是稱帆船法，以其形似帆船也。十六世紀以前，歐洲最通行之法也。其計算次序如下：

(1)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & 8 & 3 & 2 & 4 & 8 & 7 & (3 \\
 & 4 & 6 & 9 & & & &
\end{array}
$$

(2)

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 6 & & & & & & \\
1 & 8 & 3 & 2 & 4 & 8 & 7 & (3 \\
 & 4 & 6 & 9 & & & &
\end{array}
$$

(3)

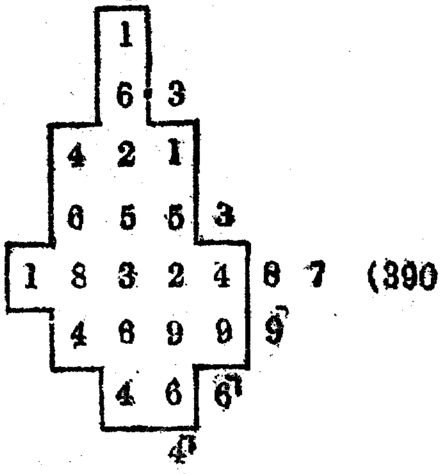
$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 4 & & & & & & \\
 & 6 & 5 & & & & & \\
1 & 8 & 3 & 2 & 4 & 8 & 7 & (3 \\
 & 4 & 6 & 9 & & & &
\end{array}
$$

(4)

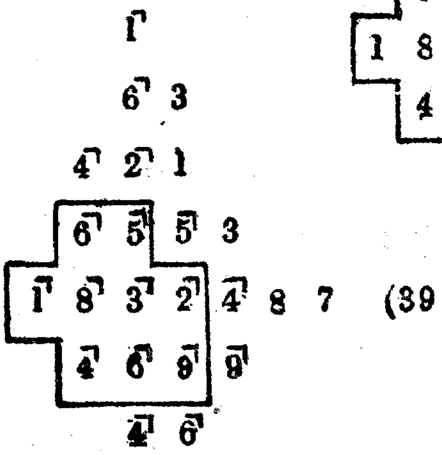
$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 4 & 2 & & & & & \\
 & 6 & 5 & 5 & & & & \\
1 & 8 & 3 & 2 & 4 & 8 & 7 & (3 \\
 & 4 & 6 & 9 & & & &
\end{array}
$$

同理：

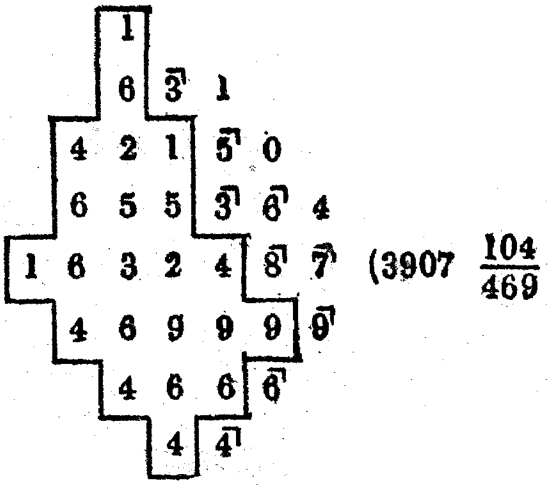
(6)



(5)



(7)



即 $1832487 \div 469 = 3907$ 餘 104 也

其詳可參觀同文算指前編卷上，除法第五，或卡

約利算史 (F. Cajori, A History of Elementary Mathematics, pp. 148–149. 註三 1917)。又 $\frac{13946007693}{300800000}=46\frac{109207693}{300800000}$ 見於 Clavius, Epitome Arithematiae Practicae, Rome, 1583, 利瑪竇之說,似本於此。

同文算指通編卷六,開平方法第十二。

$\sqrt{456789012}$, 列式如下:

			2						
			1	3	6				
			2	1	8	6			
		3	0	5	2	7	2		
	1	5	1	9	7	1	3	8	
4	5	6	7	8	9	0	1	2	(21372
2	4	1	2	3	6	7	4	2	
		4	4	2	2	7			
				4					

是亦帆船法 (galley method) 也,其計算次序如下:

(1)

4 5 6 7 8 9 0 1 2 (2

2

(2)

1 5

4 5 6 7 8 9 0 1 2 (21

2 4 1

(3)

3 0

1 5 1 9

4 5 6 7 8 9 0 1 2 (213

2 4 1 2 3

4

(4)

1

2 1

3 0 5 2

1 5 1 9 7 1

4 5 6 7 8 9 0 1 2 (2137

2 4 1 2 3 6 7

4 4 2

```
(5)
        2
      1 3 6
    2 1 8 6
  3 0 5 2 7 2
1 5 1 9 7 1 3 8
4 5 6 7 8 9 0 1 2   (21372
2 4 1 2 3 6 7 4 2
  4 4 2 2 7
    4
```

即 $\sqrt{456789012}=21372$ 餘 26628 也

同文算指通編卷六,開平方奇零法第十三,謂:

$$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a},\ 或\ \sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a+1}.$$

由此二式所得之根,或太大,或太少。令太大之根爲 x, 太少之根爲 y; 而所大之値爲 s, 所小之値爲 t. 可以下二式續得較密之數;

$$\sqrt{a^2+r}=x-\frac{s}{2x},\ \sqrt{a^2+x}=y+\frac{t}{t+y}.$$

通編稱: $\sqrt{20}=4\frac{5473}{11592}$, 蓋因 $\sqrt{20}$

$$=4\frac{1}{2}, \left(4\frac{1}{2}\right)^2=20\frac{1}{4}.$$

$$\sqrt{a_1^{\ 2}+r_1}=x_1=4\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{4}}{2\left(4\frac{1}{2}\right)}=4\frac{17}{36},$$

$$\left(4\frac{17}{36}\right)^2=20\frac{1}{1296}>20;$$

$$\sqrt{a_2^{\ 2}+r_2}=x_2=4\frac{17}{36}-\frac{\frac{1}{1296}}{2\left(4\frac{17}{36}\right)}=4\frac{5473}{11592},$$

$$\left(4\frac{5473}{11592}\right)^2=20\frac{1}{134374464}\doteqdot 20,$$

故 $\sqrt{20}=4\frac{5473}{11592}$.

說見 Clavius, Epitome Arithmetiae Practicae, Rome, 1583, 利瑪竇之說, 似本於此.

至數理精蘊 (1723), 則除法, 開方與前稍異, 如: 卷一, $57\div45.6=1.25$, 列式爲:

$$\begin{array}{r}
\overline{125}\\
\underline{456}\\
570\\
\underline{456}\\
1140\\
\underline{912}\\
02280\\
\underline{2280}\\
0000
\end{array}$$

卷十一，$\sqrt{14928}=122.18$ 餘 0.0476，列式爲：

$$\begin{array}{rl}
 & \underbrace{1}\,\underbrace{2}\,\underbrace{2}.\underbrace{1}\,\underbrace{8} \\
 & 14928.0000 \\
 & 1 \\
\underline{22} & |\overline{049} \\
 & \;\;44 \\
\underline{242} & \;|\overline{0528} \\
 & \;\;\;484 \\
\underline{244.1} & \;\;|\overline{044.00} \\
 & \;\;\;\;24.41 \\
\underline{244.28} & \;\;\;|\overline{19.5900} \\
 & \;\;\;\;\underline{19.5424} \\
 & \;\;\;\;00.0476
\end{array}$$

卷三十二，$\sqrt{15129}=123$，列式爲：

$$\begin{array}{l}
\underbrace{1}\,\underbrace{2}\,\underbrace{3} \\
15129 \\
\underline{1} \\
051 \\
\underline{144} \\
00729 \\
\underline{15129} \\
00000
\end{array}$$

卷二十三，$\sqrt[3]{14734}=24.51$ 餘 9.860149，列式爲：

```
              2  4 .5  1

              14734.000000
               8
1456         |06734
               5824
176425       |0910000
                882125
18014851     |027875000
                 18014851
                 ---------
                 09860149
```

卷三十二，$\sqrt[3]{41063625}=345$, 列式爲：

```
 3  4  5

41063625
27
--
14063
39304
-----
01759625
41063625
--------
00000000
```

第三節 籌算

英人訥白爾 (Napier, 1550–1617) 於其卒年著有一書，名 Rabdologiae, Sev Numerationis Per

Virgulas Libri Dvo, Edinburgh, 1617. 原則似本於印度之寫乘 (gelosia method), 此書在歐流傳至廣。西洋新法曆書 (1643) 內,有: 籌算一卷,題羅雅谷 (1159－1638) 撰,湯若望 (1591－1666) 訂,又籌算指一卷,題湯若望撰,所謂籌算卽訥白爾籌 (Napier's Bond)。此說輸入中國後,以其便利,多習用之。清梅文鼎幷改爲橫籌,戴震且命爲古策算,直至清末,尙有人津津樂道此事者。

第四節 幾何學

利瑪竇於萬曆間 (1603－1607) 與徐光啓共譯幾何原本前六卷,利瑪竇萬曆丁未 (1607) 序稱:

「至今世又復崛起一名士,爲竇所從學幾何之本師,曰丁先生。開廓此道,益多著述。竇昔游西海,所過名邦,每遘顓門名家,輒言: 後世不可知,若今世則丁先生之於幾何,無兩也。先生於此書覃精已久,旣爲之集解,又復推求續補凡二卷,與原書都爲十五卷。」

陳寅恪以爲利瑪竇所譯丁先生十五卷本幾何原本

卽 Clavius (1537–1612), Euclidis Elementorum Libri XV, 1517, 以 Clavius 拉丁文爲 Clavus, 意爲丁 (nail) 也。同文算指言 $\frac{13946007693}{30800000}=46\frac{109207693}{30800000}$, $\sqrt{20}=4\frac{5473}{11592}$ 亦引據 Clavius, Epitome 之說也。

第五節 三角術及三角函數表

明末平面三角術，球面三角術同時輸入。其論平面三角術者，測量全義第一卷 (1631), 五緯曆指三卷，引有：

$$\text{I.}\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

$$\text{II.}\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

$$\text{III.}\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}.$$

三公式，其後薛鳳祚三角算法，梅文鼎平三角舉要五卷，年希堯三角法摘要一卷 (1718) 幷因此立算。其論球面三角術者，測量全義第七卷 (1631) 引有：

I. 1. $\cos c=\cos a\cos b.$

2. $\cos c=\cot A\cot B.$

3. $\cos A=\cos a\sin B.$

4. $\cos A=\tan b\cot c.$

5. $\sin b=\sin c\sin B.$

6. $\sin b=\tan a\cot A.$

II. $$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}.$$

III. $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.$

而穆尼閣，薛鳳祚三角算法則於上列外，又引有下式：

I. 1. $$\tan\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\frac{1}{2}C.$$

2. $$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\frac{1}{2}C.$$

3. $$\tan\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\tan\frac{1}{2}c.$$

4. $$\tan\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\tan\frac{1}{2}c;$$

(訥白爾)

$$\text{II.}\quad 1.\ \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}},$$

$$2.\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}},$$

$$3.\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin b}};$$

$$\text{III.}\quad \cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin(B-E)\sin(C-E)}{\sin B\sin C}},$$

而 $2E=A+B+C-\pi$.

此後梅文鼎著弧三角舉要五卷(1684),環中黍尺五卷(1700),塹堵測量二卷;梅瑴成著弧三角三邊求角用開方得半角正弦解,明安圖著弧線三角形邊角相求幷論弧三角,且以幾何法爲證焉。

元郭守敬有三角函數表而不完全,且以乘方取度,所得不精。至明末耶穌會士始輸入三角函數表。崇禎四年(1631)呈進割圜八線表六卷(?),及測量全義十卷。而測圜八線小表在測量全義卷三之內,爲正弦,正切線,割線,及其餘線之函數表。小數四位,每十五分有數。如下圖:

		正弦	正切線	正割線
0°	0′			
	15′ 30′ 45′	.0043 .0087 .0130	.0043 .0087 .0130	1.0000 1.0000 1.0001
1°	0′	.0174	.0174	1.0001
	15′ 30′ 45′	.0218 .0261 .0305	.0218 .0262 .0305	1.0002 1.0003 1.0005
2°	0′	.0349	.0349	1.0006
	15′ 30′ 45′	.0392 .0436 .0480	.0393 .0437 .0480	1.0007 1.0009 1.0011
3°	0′	.0523	.0524	1.0013
		餘弦	餘切線	餘割線

割圓八線表爲半象限之三角函數表。小數五位，每分有數，如下圖：

0°	正弦	正切線	正割線	餘弦	餘切線	餘割線	
0′	.00000	.00000	1.00000	1.00000	0000.00000	0000.00000	60′
1′	.00029	.00029	1.00000	.99999	3437.74667	3437.74682	59′
2′	.00058	.00058	1.00000	.99999	1718.87319	1718.87348	58′
3′	.00087	.00087	1.00000	.99999	1145.91530	1145.91574	57′
4′	.00116	.00116	1.00000	.99999	859.43630	859.43689	56′
5′	.00145	.00145	1.00000	.99999	687.54887	687.54960	55′
6′	.00175	.00175	1.00000	.99999	572.95721	572.95809	54′
7′	.00204	.00204	1.00000	.99999	491.10600	491.10702	53′
8′	.00233	.00233	1.00000	.99999	429.71757	429.71873	52′
9′	.00262	.00262	1.00000	.99999	381.97099	381.97230	51′
	餘弦	餘切線	餘割線	正弦	正切線	正割線	89°

其後數理精蘊(1723)刻表較詳，其前則薛鳳祚有比例四線新表一卷，四線對數表(?)，此外李子金，年希堯，陳訏(1650—1732)并作小表。(註一)

第六節　對數

對數爲訥白爾(Napier, 1550—1617)所發明。訥白爾以一六一四年六月在愛丁堡發表所著對數表(Mirifici logarithmorum Canonis descriptio)。其後巴理知(Henry Briggs, 1556—1630)以一六二四年成巴理知對數表(Arithmetica Logarithmorum)數由一萬至二萬，佛拉哥(Adrian Vlacq, 1600?—1655)以一六二八成佛拉哥對數表(Eerste Deel Van de Nieuwe Telkonst)數由一萬至十萬。

對數輸入中國則始於一六五三年。穆尼閣以授薛鳳祚。薛鳳祚比例對數表(1653)序，稱：

「穆(尼閣)先生出，而改爲對數，今有對數表以

(註一)　參觀李儼，三角術及三角函數表之東來，科學雜誌第十二卷第十期.

省乘除，而況開方，立方，三四方等法，皆比原法工力，十省六七，且無舛錯之患，此實為穆先生改歷立法第一功」，

梅文鼎勿菴歷算書目 (1702) 稱:「比例數表者，西算之別傳也。其法自一萬至十萬，并設有他數相當，謂之對數。穆先生曰: 表有十萬，西來不戒於途，僅存一萬，萬以上以法通之；嘗見薛刻別本，數有二萬」。數理精蘊 (1723)「對數比例」中，稱:「又有恩利格巴理知斯 (Henry Briggs) 者，復加增修，行之數十年，始至中國」，數理精蘊中所刻對數表，數至十萬，似出於佛拉哥也。同書并說明對數之作法。(註一)

第七節 代數學

代數學之初輸入也，稱為「西洋借根法」，譯作「阿爾熱巴拉」，東華錄作「阿爾朱巴爾」，赤水遺珍

(註一) 參觀李儼對數之發明及其東來，科學雜誌第十二卷第二期，第三期，第六期，十六年，二月，三月，六月.

作「阿爾熱八達」，幷異譯也。又有「東來法」之稱，蓋此學傳自亞拉伯。

亞拉伯王亞魯嗎蒙 (Caliph Al-Mâmûn, 813—833) 朝時，有一算學家亞魯科瓦利米 (Mohammed ibn Mûsâ Al-Khowârizmi, 或 Alchwarizmî, 約卒於 835,845 年間)，著書論代數學，書名 Al-jabr W'al-Muqâbalah，其後流傳歐洲，爲代數學之祖，故有東來法之稱。至「阿爾熱巴拉」似爲 Al-jabr 之譯音。數理精蘊 (1723) 卷三十一至三十六論借根方比例，其稱借根方也，謂假借根數，方數，以求實數之法也。

如： $x^3+x^2-20x=33152$，則書爲

一立方 ┷ 一平方 ─ 二〇根 ═ 三三一五二

其論帶縱立方，分爲九類，即：

$$x^3 \pm bx = c. \qquad x^3 \pm ax^2 = c,$$

$$x^3 \pm ax^2 \pm bx = c, \qquad -x^3 + ax^2 = c,$$

其解法，則有益實歸除法，及益實兼減實歸除法。

第八節 割圜術

明末算家論圓率值者,有朱載堉 $\pi=3.1426968$, 邢雲路,三才率, $\pi=3.12132034$ 又 $\pi=3.126$, 陳藎謨太極率 $\pi=3.1525$, 方以智 $\pi=\frac{22}{7}$, 不知名之桐陵法 $\pi=\frac{63}{20}$, 智術 $\pi=\frac{25}{8}$, 幷於義無當。至西算輸入時,測量全義 (1631) 乃引亞奇默德圜書之計算,謂 $3\frac{1}{7}>\pi>3\frac{10}{71}$, 幷謂今士之法, $\pi=3.\ 14159\ 26535\ 89793\ 2384\frac{7}{6}$ 世稱利瑪竇率。數理精蘊卷十五,則以割圜屢求句股,證此率之由來,中算家多受其影響,而同時楊作枚 $\pi=3.1428555384<\frac{22}{7}$, 孔興泰 $\pi=3.14159265$, 李子金 $\pi=3.14128742$ 及 $\pi=3.1416$, 顧長發 $\pi=3.125$, 錢塘 (1735－1790), $\pi=3.14$, $\pi=\frac{355}{113}$, $\pi=\frac{810}{258}$, 許桂林 (1778－1821) $\pi=3.151907$, 諸家所記,尙參差不齊。

距利瑪竇來華之期,恰及一稘,法人杜德美 (Pierre Jartoux, 1670－1720. 11. 30) 亦浮海東來,時爲十七世紀之末年 (1700)。是時國中適有測地

之舉，遂于役其間。杜又嘗與來布尼茲 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646－1716) 通訊，世稱杜氏九術爲杜德美所傳。

圓徑求周，

$$\pi d = 3d \sum_{1}^{\infty} \frac{1^2 1^2 3^2 5^2 \cdots (2n-5)^2 (2n-3)^2}{4^{n-1}(2n-1)!} \cdots\cdots(\mathrm{I})$$

弧背求正弦，

$$\sin a = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a^{2n-1}}{r^{2(n-1)}(2n-1)!} \cdots\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

弧背求正矢，

$$vers\,a = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a^{2n}}{r^{2n-1}(2n)!} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{III})$$

弧背求通弦，

$$c = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2a)^{2n-1}}{4^{n-1}\, r^{2(n-1)}(2n-1)!} \cdots(\mathrm{IV})$$

弧背求矢，

$$vers\,a = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2a)^{2n}}{4^{n}\, r^{2n-1}(2n)!} \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{V})$$

通弦求弧背，

$$2a = \sum_{1}^{\infty} \frac{1^2 1^2 3^2 \cdots\cdots (2n-5)^2 (2n-3)^2}{4^{n-1}\, r^{2(n-1)}(2n-1)!} \cdots\cdots(\mathrm{VI})$$

正弦求弧背，

$$a=\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2 1^2 3^2\cdots\cdots(2n-5)^2(2n-3)^2}{r^{2(n-1)}(2n-1)!}sin^{2n-1}a \quad \text{(VII)}$$

正矢求弧背，

$$a^2=2r\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2 1^2 2^2\cdots\cdots(n-2)^2(n-1)^2}{r^{n-1}(2n)!}(2versa)^n \quad \text{(VIII)}$$

矢求弧背，

$$(2a)^2=2r\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2 1^2 2^2\cdots\cdots(n-2)^2(n-1)^2}{4^{n-1}\ r^{n-1}(2n)!}(8versa)^n \quad \text{(IX)}$$

其爲梅瑴成赤水遺珍所引者，僅有 (I), (II), (III) 式，或疑杜氏僅輸入前三式。其法有術無草，明安圖曾爲之證，未成而卒，其子明新與門人張肱，陳際新續成之。於乾隆三十九年 (1774) 卒業。(註一)

第五章　清初中算家之努力

第一節　總說

明末西方教士，乘國算衰廢之餘，輸入西算，華人耳目爲之一新。但其所輸入者，有僅成斷片，有

(註一) 參觀李儼明清算學之割圓術研究，科學雜誌

理義不明者；且爲歷書之一部，流傳民間，爲數尙稀。入清則因帝王之好尙，新舊之爭執，因以引起中算家之努力。最著者爲梅文鼎(1633－1721)之整理西算，陳世仁(1676－1722)之研究尖錐，與張潮之排列縱橫圖。至明安圖之研究割圜解析法，亦作始於此期。

清初習歷算者，有黃宗羲(1610－1695)，王錫闡(1628－1682)，其著述流傳不廣。至在梅文鼎前後，著述之可記者，有：孔興泰大測精義，方中通數度衍二十四卷(1661)；李子金算法通義五卷(1676)，幾何易簡集四卷(1679)，天弧象限表二卷(1683)；杜知耕數學鑰六卷(1681)，幾何論約七卷(1700)，李長茂算海說詳；年希堯測算刀圭三卷(1718)；陳厚耀(1648－1722)續增新法比例四十卷；毛宗旦九章蠡測十卷，句股蠡測一卷；陳訏(1650－1732)句股述二卷(1683)，句股引蒙五卷；屠文漪九章錄要十二卷；何夢瑤算廸十二卷；陳鶴齡算法正宗；江永(1681－1762)數學八卷；莊亨陽(1686－

1746)莊氏算學八卷；王元啓(1714—1786)句股衍，角度衍，九章雜論；談泰明算津梁四卷，天元釋例四卷，平方立方表六卷，周徑說一卷，疇人傳三卷，程祿西洋算法大全四卷(1733刻)；譚文數學尋源十卷(1750)則皆牽合西算陳義，鮮有發明。

第二節 梅文鼎之整理西算

梅文鼎(1633—1721)字定九，號勿菴，宣城人。兒時侍父士昌及塾師羅王賓仰觀星象，知其大畧。歲壬寅(1662)始師事同縣倪正學歷算。文鼎爲學甚勤，自言廢寢食者四十年。居京師時，嘗午夜篝燈夜讀，昧爽則興，頻年手鈔雜帙不下數萬卷。李光地(1642—1718)嘗爲薦於朝，與修明史歷志。弟文鼐，文鼏，子以燕，孫瑴成，玕成，曾孫鈖，鈺，鉁，鈁，鏐，鋮幷通數學。而以瑴成爲尤著。文鼎著書七十餘種。今所傳者，以承學堂所刻梅氏叢書輯要三十九種爲最完備。其關於算數者，大抵皆整理西算之作。計有籌算三卷，平三角舉要五卷，弧三角舉要五卷(1684)，方程論六卷(1690)，

句股舉隅一卷，幾何通解一卷，幾何補編四卷，少廣拾遺一卷 (1692)，筆算五卷 (1693)，環中黍尺五卷 (1700)，塹堵測量二卷，方圓冪積一卷。

瑴成字玉汝，號循齋，又號柳下居士。康熙乙未 (1715) 進士，官至左都御史。讀書內廷，多見祕籍；益以家學所傳，故其造詣甚深。嘗與修律歷淵源一百卷 (1723)，增删算法統宗十一卷 (1760)，重編梅氏叢書輯要六十二卷，以別於兼濟堂纂刻梅氏歷算全書。輯要末附錄瑴成自著赤水遺珍，操縵卮言各一卷 (1761)，又著柳下舊聞十六卷，卒謚文穆。

第三節　陳世仁之研究尖錐

陳世仁 (1676－1722) 字元之，號煥吾，海寧人，好學工爲文，精曉算學。康熙乙未 (1715) 以進士入翰林，辭官養母。著有少廣補遺一卷。共分七節，第一節言三角及諸尖十二法。

1. 平尖　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

2\. 立尖 $1+3+6+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+\overline{m-1})=\dfrac{m^3-m}{6}$, 而 $m=n+1$.

3\. 倍尖 $1+2+4+\cdots\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

4\. 方尖 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n}{3}\left(n^2+\dfrac{3}{2}n+\dfrac{1}{2}\right)$.

5\. 再乘尖 $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{2^2}$.

6\. 抽奇平尖 $2+4+6+\cdots\cdots+2n=n(n+1)$.

7\. 抽偶平尖 $1+3+5+\cdots\cdots+\overline{2n-1}=n^2$.

8\. 抽偶立尖 $(1)+(1+3)+(1+3+5)+\cdots\cdots+(1+3+5+\cdots\cdots+\overline{2n-1})=\dfrac{n}{3}\left(n^2+\dfrac{3}{2}n+\dfrac{1}{2}\right)$.

9\. 抽奇立尖 $2(1)+2(1+2)+2(1+2+3)+\cdots\cdots+2(1+2+3+\cdots\cdots+\overline{m-1})=\dfrac{m^3-m}{3}$.

10\. 抽奇偶方尖 $1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+\overline{2n-1}^2=\dfrac{(2n)^3-(2n)}{6}$.

11\. 抽偶再乘尖 $1^3+3^3+5^3+\cdots\cdots+\overline{2n-1}^3=n^2(2n^2-1)$.

12. 抽奇再乘尖 $2^3+4^3+6^3+\cdots\cdots+\overline{2n}^3$

$$=2n^2(n+1)^2.$$

至第五節開抽偶立尖半積，則謂：

1. $(1+3+5)_1+(1+3+5)_2+(1+3+5+7)_3+(1+3+5+7)_4+(1+3+5+7+9)_5+(1+3+5+7+9)_6+\cdots\cdots+(1+3+5+\cdots\cdots+m)_{n-1}+(1+3+5+\cdots\cdots+m)_n=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-4}{2}\right)+\frac{n^3-6n^2+11n}{12}=S$, $n=$偶數。

2. $(1+3+5)_1+(1+3+5+7)_2+(1+3+5+7)_3+(1+3+5+7+9)_4+(1+3+5+7+9)_5+(1+3+5+7+9+11)_6+\cdots\cdots+(1+3+5+\cdots\cdots+m-2)_{n-1}+(1+3+5+\cdots\cdots+m)_n=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)+\frac{n^3-3n^2+5n}{12}=S$, $n=$偶數。

3. $(1+3+5)_1+(1+3+5+7)_2+(1+3+5+7)_3+(1+3+5+7+9)_4+(1+3+5+7+9)_5$

$$+(1+3+5+7+9+11)_6+\cdots\cdots+(1+3+5+\cdots\cdots+m)_{n-1}+(1+3+5+\cdots\cdots+m)_n=\frac{m^2n}{4}-\frac{m}{2}\left(\frac{n^2-4n+1}{2}\right)+\frac{n^3-6n^2+4n-6}{12}=S,\ n=\text{奇數}。$$

4. $$(1+3+5)_1+(1+3+5)_2+(1+3+5+7)_3+(1+3+5+7)_4+(1+3+5+7+9)_5+(1+3+5+7+9)_6+\cdots\cdots+(1+3+5+\cdots\cdots+\overline{m-2})_{n-1}+(1+3+5+\cdots\cdots+m)_n=\frac{m^2n}{4}-\frac{m}{2}\left(\frac{n^2-2n-1}{2}\right)+\frac{n^3-3n^2+2n+3}{12}=S,\ n=\text{奇數}。$$

就中 1 稱爲尖，m 稱爲底，n 稱爲徑，S 稱爲原實。其他類此者，尙有若干條。

第四節 張潮之排列縱橫圖

張潮字山來，一字心齋，歙縣人。以歲貢官翰林孔目。所著心齋雜組卷下，算法圖補，謂：

「算法統宗所載十有四圖，縱橫斜正，無不妙合自然，有非人力所能爲者。大抵皆從洛書悟而得之。內惟百子圖，於隅徑不能合，因重加改定。復以意增布雜圖，亦皆有自然之妙」。(註一)

60	5	96	70	82	19	30	97	4	42
66	43	1	74	11	90	54	89	69	8
46	18	56	29	87	68	21	34	62	84
32	75	100	47	63	14	53	27	77	17
22	61	38	39	52	51	57	15	91	79
31	95	13	64	50	49	67	86	10	40
83	35	44	45	2	36	71	24	72	93
16	99	59	23	33	85	9	28	55	98
73	26	6	94	88	12	65	80	58	3
76	48	92	20	37	81	78	25	7	41

(更定百子圖)

(註一) 參觀李儼中算家之縱橫圖研究，學藝雜誌

第五編　最近世期

第一章　最近世復古初期

(1750－1800)

公元千七百五十年前後，中國政治史上，雖無顯著之鴻溝，而算學史則進入一新時代。此時中國學者捨棄前此西算之崇仰，而代以國算之鑽研也。並以餘力探討西算之難題，如：割圜術之證明，對數法之考求是也。至其末葉，乃復有西算輸入之舉。

清初古書未大發見，以梅氏祖孫之宏博，且未能多見古書。圖書集成關於中算，僅及程大位算法統宗，而譌字尙未校正。徒有一二嗜古之士，若常熟毛氏之流，抱殘守闕，彌此墜緒，爲難能矣。毛晉(1598－1652)累世富於收藏。晉父虛吾，且精九九之學。晉子扆(1640－?)從太倉王氏得孫子，五曹，張丘建，夏侯陽四種；從章邱李氏得周髀，緝古二種；從黃虞稷(1629－1691)處得九章；皆元豐

七年(1084)祕書省刋本。康熙甲子(1684)毛氏作算經跋記錄其事，其後書幷入官。天祿琳瑯書目有御題算經十册，蓋毛藏本也。乾隆三十七年(1772)下詔求書，各省幷有進獻；乾隆癸巳(1773)開四庫全書館，四庫全書天文算法類所收古算書，有：

周髀算經二卷，音義一卷	永樂大典本
九章算術九卷	永樂大典本
孫子算經二卷	永樂大典本
數術記遺一卷	兩江總督採進本
海島算經一卷	永樂大典本
五曹算經五卷	永樂大典本
夏侯陽算經三卷	永樂大典本
五經算術二卷	永樂大典本
張丘建算經三卷	王杰家藏本
輯古算經一卷	王杰家藏本
數學九章十八卷	永樂大典本
測圓海鏡十二卷	李潢家藏本

益古演段三卷　　　　永樂大典本

四庫全書中由永樂大典中輯出算書，曾以小部分付刻，如：周髀算經，九章算術，孫子算經，海島算經，五曹算經，夏侯陽算經，五經算術，幷有武英殿聚珍版刻本。休寧戴震(1724－1777)於四庫館分校天文算法書，所作提要，語多精當。震又撰策算一卷(1744)，句股割圜記三卷(1758)。曲阜孔繼涵(1739－1783)因永樂大典本海島，五經；宋元豐本周髀，九章，輯古，孫子，五曹，張丘建，夏侯陽，幷戴箸二種合刻之，號爲算經十書。

自算經十書出，研求古算之風亦盛。吳烺有周髀算經注(1766)；馮經(乾隆庚寅，1770 舉人)有周髀算經註；李潢(?－1811)箸九章算術細草圖說九卷，附海島算經一卷，共爲十卷；又箸輯古算經考註二卷。程瑤田(1725－1814)箸周髀矩數圖註，周髀用矩述言。古算昌明，佚書大顯，是爲最近復古之初期。

惟古書如：數學九章，測圓海鏡，益古演段，尚未

嘗有人校刻與研討也。且永樂大典中有至重要中算史料，都由當時見不及此，未經輯出。而該書幾經世變，亦卽散亡。(註一)

第二章 最近世復古次期

(1800－1820)

自四庫全書收錄數學九章，測圓海鏡，益古演段，學者始稍稍留意及此。有孔廣森(1752－1786)者，少曾師事戴震，及官翰林，與窺中祕，見王氏緝古，秦氏數書，李氏演段，海鏡諸書。著有少廣正負術內外篇，凡六篇。同時又有李銳(1768－1817)，焦循(1763－1820)，張敦仁(1754－1834)，阮元(1764－1849)共研天元學說。

李銳校測圓海鏡，推算立天元一細草，又校益古演段三卷(1797)，自著方程新術草一卷，句股算術細草一卷(1806)，弧矢算術細草一卷，校楊輝算法若干卷，又校四庫館本數學九章。銳復因秦九韶之法，作開方說三卷，甫及上中二卷而卒，其徒黎

(註一) 參觀李儼永樂大典算書，圖書館學季刊．

應南續成下卷。四元玉鑑晚出，李銳雖亦見及，時已疾作，校讎數段，僅及天元。

焦循著有加減乘除釋八卷(1794－1798)天元一釋二卷(1800)，釋弧三卷(1798)，釋輪二卷(1796)，釋橢一卷(1796)，補衡齋算學第三册一卷，開方通釋一册(1801)。

張敦仁著輯古算經細草三卷(1803)，求一算術三卷(1803)，開方補記八卷附通論一卷(1805)。

阮元於傅刻錢塘(1735－1790)溉亭述古錄，孔廣森少廣正負術內外篇，焦循里堂學算記，李銳李氏遺書外，又發見四元玉鑑，算學啓蒙二書。乾隆乙卯(1795)又與李銳周治平共著疇人傳四十六卷，至嘉慶己未(1799)畢業。

繼於李銳(1768－1817)，焦循(1763－1820)，張敦仁(1754－1834)，阮元者，有：汪萊(1768－1813)，陳杰，沈欽裴，劉衡(1776－1841)，安清翹(1759－1830)，許桂林(1778－1821)，駱騰鳳(1770－1841)，張作楠。

汪萊著衡齋算學七卷；陳杰著輯古算經細草一卷，圖解三卷，音義一卷(1815)，算法大成上編十一卷(1823刻)；沈欽裴校正李潢九章算術細草九卷，補演海島算經一卷，又校數學九章，補四元玉鑑；劉衡著六九軒算書(1807)；安清翹著數學五書(1811－1819)；許桂林著立天元一導竅三卷，算牖四卷(1811)；駱騰鳳著開方釋例四卷(1815)，藝游錄二卷(1815)，又校刊李潢海島算經細草圖說；張作楠著翠微山房算學十五種(1816－1822)，是皆致力於古代算說，爲最近世復古之次期。

第三章　最近世中算發達時期

(1820－1900)

清自道光以後，四元玉鑑已經傳世，同時中外互市，西算又復輸入。故最著者，有：羅士琳，戴煦之註釋四元，李善蘭華蘅芳之譯述西算。

幷時箸作，則朱駿聲有天算瑣記四卷，數度衍約四卷；易之瀚有四元釋例一卷，增例一卷；董祐誠

(1791—1823) 有割圜連比例圖解三卷 (1819), 橢圜求周術一卷, 斜弧三邊求角補術一卷, 堆垜求積術一卷 (1821); 徐有壬 (1800—1860) 有四元算式一卷, 割圜密率三卷, 橢圜正術一卷, 弧三角拾遺一卷, 造各表簡法一卷 (錢國寶刊本作造表簡法, 續刋本作垜積招差), 截球解義一卷, 橢圜求周術一卷, 割圜八線綴術四卷 (原作三卷), 堆垜測圜三卷, 圜率通考一卷; 項名達 (1789—1850) 有句股六術一卷 (1825) 後附弧三角和較算例, 三角和較術一卷 (1843), 開諸乘方捷術一卷, 象數一原六卷 (卽象數原始) 附算律營新術; 謝家禾有衍元要義一卷, 弧田問率一卷, 直積回求一卷; 顧觀光 (1799—1862) 有九數存古九卷, 九數外錄一卷, 周髀算經校勘記一卷, 算賸初編 (1827—50), 續編 (1842—54), 餘稿 (1827—60) 若干卷; 夏鸞翔 (1823—1864) 有少廣縋鑿一卷, 洞方術圖解一卷 (1857), 致曲術一卷, 致曲術圖解一卷, 萬象一原九卷 (1862); 宋景昌有開方之分還原術一卷 (1841), 楊輝算法札

記一卷(1840),數學九章札記四卷(1842),詳解九章算法札記一卷(1842);馮桂芬(1809—1874)有弧矢算術細草圖解一卷(1839),西算新法直解八卷(1862);汪曰楨(1813—1881)有如積引蒙八卷(1859);鄒伯奇(1819—1869)有粟布演草(1886),對數尺記一卷,乘方捷術三卷,存稿一卷;保其壽有遊戲算術一卷。

同治初元長沙老儒丁取忠於長沙荷花池館集當日算士,共研算學。同治壬戌(1862)刻白芙堂算學十七種,甲戌(1874)刻成二十三種,最近世設社研算,此爲最著。此時叢書中附刻算學書者,亦數見不鮮。新舊學說,均多研討,是爲最近世中算發達時期。

第四章 羅士琳戴煦之註釋四元

四元玉鑑三卷(1303),元朱世傑撰。其書在明無人研究。入清則錢大昕補元史藝文志誤作二卷,梅瑴成赤水遺珍有釋四元玉鑑中「或問歌彖」二

則，然又疑爲術士祕其機緘。嘉慶間(1796－1819)阮元撫浙時，購得舊鈔本四元玉鑑。以其爲四庫未收古書，錄副進呈內府。有提要一篇，刻於揅經堂外集，稱其菱草形段，如像招數，果積疊藏各問爲自來算家所未及。錢塘何元錫(1766－1804)則曾據鈔本刊布焉。李銳(1768－1817)已校測圓海鏡，益古演段，數學九章；阮元又以四元玉鑑屬李銳校算，時李銳已疾作，校讎數段，僅及天元。稍後則戴煦(1805－1860)箸四元玉鑑細草若干卷(1826)圖解明暢。溆浦陳棠請業於新化鄒伯宗，曾於其處見戴氏玉鑑細草鈔本。沈欽裴(嘉慶丁卯，1807舉人)亦箸四元玉鑑細草，至癸未(1823)夏中止，僅及中卷，而欽裴已補荊溪教官，此事遂擱，計共成四册，張文虎尙見及之。其後李善蘭(1810－1882)亦箸四元解二卷。

羅士琳(1800－1860)於道光壬午(1822)試京兆，始於漢陽葉繼雯處見四元玉鑑原書，癸未(1823)假得黎應南所藏鈔本，同時龔自珍又以何刻本見

贈，乃着手爲之補草。研究一紀（1823－1835），補成全草。共爲四元玉鑑細草二十四卷，前有道光甲午（1835）校勘記一篇。羅草於甲午（1835）畢業，丁酉（1837）增訂。由同邑易之瀚校算，一時知算如徐有壬，黎應南并與商榷。羅有補增開方，天元，四元釋例共一卷（1838），易有開方，天元，四元釋例三則共一卷，附於細草。

羅於細草四元外，又校正朝鮮重刋本算學啓蒙三卷（1839），自箸句股容三事拾遺三卷，附例一卷（1826），演元九式一卷（1827），臺錐演積一卷（1837），三角和較算例一卷（1840），續疇人傳六卷（1840），弧矢算術補一卷（1843）。以上各書，刋入觀我生室彙稿。又句股截積和較算例二卷，刋入連筠簃叢書。

第五章　李善蘭，華蘅芳譯述西算

李善蘭（1810－1882）字壬叔，號秋級，海寧人。十齡通九章，十五通幾何。應試武林，得測圓海

鏡，句股割圜記以歸，其學始進。道光乙巳(1845)館嘉興陸費家數年。館蘇撫徐有壬幕，獲交戴煦，汪曰楨，張福禧，張文虎，顧觀光，暇輒箸書。咸豐壬子(1852)五月至滬，居大境傑閣。與西士偉烈亞力(Alexander Wylie)共譯幾何原本後九卷，以六月朔爲始，凡四歷寒暑，至咸豐丙辰(1856)而畢，丁巳(1857)二月松江韓應陛爲之刋刻。善蘭在滬十年，續譯幾何原本九卷之外，又與偉烈共譯侯失勒談天十八卷(Herschel, 1792–1871, Outline of Astronomy)，棣麼甘(Augustus De Morgan, 1806–71)代數學十三卷(1859)，羅密士(Elias Loomis, 1811–99)代微積拾級十八卷(1859)，胡威立(William Whewell, 1794–1866)重學十八卷，曲線說一卷(1866)，奈端數理(Isaac Newton, 1642–1727, Principia)若干卷。其自箸方圓闡幽一卷，弧矢啓祕二卷，對數探源二卷，垜積比類四卷，四元解二卷，麟德術解三卷，橢圜正術解二卷，橢圜新術一卷，橢圜拾遺三卷，火器

真訣一卷，尖錐變法解一卷，級數回求一卷，天算或問一卷，共二十四卷，凡十三種，號則古昔齋算學，同治乙卯(1867)彙刻行世。歲戊辰(1868)入北京同文館爲算學總教習。在館時傳刻李冶測圓海鏡十二卷(1876)，又著測圓海鏡解一卷，考數根法三卷，造整數句股級數法二卷。善蘭卒無子，遺稿多散佚。墓在海鹽縣，秀譽橋，東北。

華蘅芳(1833－1902)字若汀，江蘇金匱人。年十四便通程大位統宗之說。繼復探索數理精蘊及九章算術，學乃益進。又從無錫鄒安鬯受秦九韶，李冶，朱世傑學說。蘅芳曾遊曾國藩幕府，因與李善蘭相善。上海江南製造局成立，蘅芳與西士傅蘭雅(Dr. John Fryer)共譯英華里司(John Wallis, 1616－1703)代數術二十五卷(1873)，及微積溯源八卷，英海麻士三角數理十二卷；英倫德代數難題十六卷，棣麼甘(A. De Morgan)決疑數學十卷。又英白爾尼合數術十一卷(未刊)。自著有開方別術一卷，數根術解一卷，開方古義二卷，

積較演術三卷，學算筆談十二卷，算草叢存四卷，號行素軒算稿，光緒壬午(1882)自刊行世。刋入藝經齋算學叢書者，有：算學須知一卷，西算初階一卷。算草叢存八卷本(1893 刻於武昌)，附刋有求乘數法，數根演古，循環小數考，算齋瑣語四種。弟世芳(1853－1904)字若溪，亦善數學。自著恆河沙館算草二種，尙有專術舉隅，今有術，雙套句股，三角新理等稿，存於家。

第六章　最近世中算家學算之總成績

最近世中算家學算之成績，除四元之註釋，西算之譯述外，於幾何學，割圓術，曲線論，方程式，級數論，對數術，縱橫圖，三角術，幷有詳細之研究。其論幾何學也，則李潢，安淸翹，項名達輩之證明畢氏(Pythagoras)定理；項名達之平三角和較術，及孔廣森，董祐誠，項名達，戴煦，丁取忠，李善蘭，徐有壬，夏鸞翔等圓率解析法之證明，安淸翹，左潛等三角術公式之證明，皆有藉於幾何學之證明

也。其論割圓術也，則於割圓術，分爲弧矢論，割圓舊法及圓率算法，圓率解析法，三角函數表計算法等四門。論弧矢論者，有：孔廣森，李子金，李銳，駱騰鳳，謝家禾，馮桂芬，羅士琳。論割圓舊法及周率算法者，則李潢解劉徽割圓術外，孔廣森謂：$\pi=3.141592$，朱鴻謂：$\pi=3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26431\ 86367\ 47227\ 9514$，顧觀光謂：$\pi=3.14159\ 26535\ 89792\ 5$.

夏鸞翔謂：

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1+\frac{1^2}{2\lfloor\underline{3}}+\frac{1^2\cdot3^2}{2^2\cdot\lfloor\underline{5}}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{2^3\cdot\lfloor\underline{7}}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2}{2^4\cdot\lfloor\underline{9}}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1^2}{\lfloor\underline{3}}+\frac{1^2\cdot3^2}{\lfloor\underline{5}}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{\lfloor\underline{7}}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2}{\lfloor\underline{9}}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{\lfloor\underline{3}}-\frac{(2^2-1)}{\lfloor\underline{5}}-\frac{(2^2-1)(4^2-1)}{\lfloor\underline{7}}-\frac{(2^2-1)(4^2-1)(6^2-1)}{\lfloor\underline{9}}-\cdots\cdots$$

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{3}\left\{1+\frac{(2^2-1)}{(2)(5)}+\frac{(2^2-1)(4^2-1)}{(2\cdot4)(5\cdot7)}\right.$$

$$+\frac{(2^2-1)(4^2-1)(6^2-1)}{(2\cdot4\cdot6)(5\cdot7\cdot9)}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots,\quad \text{(Leibniz, 1673)}.$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=1-\frac{1}{3\cdot3}+\frac{1}{5\cdot3^2}-\frac{1}{7\cdot3^3}+\frac{1}{9\cdot3^4}-\cdots\cdots,$$

(Abraham Sharp, 約 1717).

劉彝程謂:

$$\pi=3\left\{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{4\cdot3}-\frac{1\cdot3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1\cdot3^2\cdot5}{4^3\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}-\frac{1\cdot3^2\cdot5^2\cdot7}{4^4\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}-\cdots\cdots\right)\right\}$$

$$\pi=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1\cdot3}{4(2)(5)}+\frac{1\cdot3^2\cdot5}{4^2\cdot(2\cdot4)(5\cdot7)}\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot3^2\cdot5^2\cdot7}{4^3\cdot(2\cdot4\cdot6)(5\cdot7\cdot9)}+\cdots\cdots)\right\}$$

論圓率解析法者,有:

董祐誠割圜連比例術圖解(1819)證:

$$C_m=mc-\frac{m(m^2-1^2)c^3}{4\lfloor 3\, r^2}+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{4^2\lfloor 5\, r^4}$$

$$-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{4^3\lfloor 7\, r^6}+\cdots\cdots,$$

$$versma=m^2(versa)-\frac{m^2(4m^2-4)2(versa)^2}{4\cdot3\cdot4\cdot r}$$

$$+\frac{m^2(4m^2-4)(4m^2-16)2^2(versa)^3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}-\cdots\cdots,$$

$$C_{\frac{1}{m}}=\frac{c}{m}+\frac{(m^2-1^2)c^3}{4\lfloor 3\cdot m^3\cdot r^2}+\frac{(m^2-1^2)(9m^2-1^2)c^5}{4^2\lfloor 5\, m^5\cdot r^4}$$

$$+\frac{(m^2-1^2)(9m^2-1^2)(25m^2-1^2)c^7}{4^3\lfloor 7\cdot m^7\cdot r^6}+\cdots\cdots,$$

$$vers\frac{1}{m}\cdot a=\frac{(versa)}{m^2}+\frac{(4m^2-4)2(versa)^2}{4\cdot3\cdot4m^4\cdot r}$$

$$+\frac{(4m^2-4)(16m^2-4)2^2(versa)^3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot m^6\cdot r^2}+\cdots\cdots.$$

項名達象數一原(1846)證:

$$C_{\frac{n}{m}}=\frac{n}{m}c_m-\frac{n(n^2-m^2)(c_m)^3}{4\lfloor 3\cdot m^3\cdot r^2}$$

$$+\frac{n(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot3^2)(c_m)^5}{4^2\lfloor 5\cdot m^5\cdot r^4}$$

$$-\frac{n(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot3^2)(n^2-m^2\cdot5^2)(c_m)^7}{4^3\cdot\lfloor 7\cdot m^7\cdot r^6}+\cdots\cdots,$$

$$vers\frac{n}{m}\cdot a=\frac{n^2(2versa)}{\lfloor 2\, m^2}-\frac{n^2(n^2-m^2)(2versa)^2}{\lfloor 4\cdot m^4\cdot r}$$

$$+\frac{n^2(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot2^2)(2versa)^3}{\lfloor 6\, m^6\cdot r^2}$$

$$-\frac{n^2(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot2^2)(n^2-m^2\cdot3^2)(2versa)^4}{\lfloor 8\, m^8\cdot r^3}+\cdots\cdots$$

戴煦外切密率(1852)證：

$$\tan a = a + \frac{2a^3}{\lfloor 3 \cdot r^2} + \frac{16a^5}{\lfloor 5 \cdot r^4} + \frac{272a^7}{\lfloor 7 \cdot r^6} + \frac{7936a^9}{\lfloor 9 \cdot r^8} + \cdots\cdots,$$

(Gregory 1671),

$$\sec a - r = \frac{a^2}{\lfloor 2 \cdot r} + \frac{5a^4}{\lfloor 4 \cdot r^3} + \frac{61a^6}{\lfloor 6 \cdot r^5} + \frac{1385a^8}{\lfloor 8 \cdot r^7} + \frac{50521a^{10}}{\lfloor 10 \cdot r^9} + \cdots\cdots,$$

(Gregory 1671),

$$a = \tan a - \frac{\tan^3 a}{3 \cdot r^2} + \frac{\tan^5 a}{5 \cdot r^4} - \frac{\tan^7 a}{7 \cdot r^6} + \cdots\cdots,$$

(Gregory 1671),

其後李善蘭，徐有壬，亦有說述。此外論曲線者，則有朱鴻，董祐誠，項名達，戴煦，徐有壬，夏鸞翔；論方程式者有鄒伯奇，夏鸞翔；論級數者，有：汪(萊)，董，項，戴，羅；論對數者，有：李，鄒，顧，戴，徐；論縱橫圖有保其壽；論弧三角術者，有：汪，安(清翹)，董，項，等；此其大較也。(註一)

(註一) 參觀李儼，中算家之 Pythagoras 定理研究，學藝雜誌；李儼，中算家之縱橫圖 (Magic squares) 研究，學藝雜誌，李儼對數之發明及其東來，科學雜誌；李儼，三角術及三角函數表之東來，科學雜誌；李儼，明清算家之割圓術研究，科學雜誌。

第七章　中算史之工作

吾國向乏中算專史。而大部材料，往往於通史中尋其斷片。即清阮元所作疇人傳亦大半取材於二十四史。在前則宋册府元龜(1005)卷八百六十九，總錄部一百一十九，明算條，著錄算家小傳，爲中算史之嚆矢。此後元祖頤松庭先生四元玉鑑後序，明程大位算法統宗算經源流條，并說述算學源流之一部事實。直至清阮元始有疇人傳四十六卷之作。乾隆乙卯(1795)阮元與李銳，周治平共著疇人傳四十六卷，至嘉慶己未(1799)畢業。甄錄自黃帝以來二百八十人，匯萃羣籍，篇帙浩繁，溯古今沿革之原，究中西異同之故。學友錢大昕(1728－1804)，凌廷堪(1755－1809)談泰，焦循(1763－1820)并爲印正。阮元親加朱墨，改訂甚多。與同時滿得剌(Jean Étienne Montucla, 1725－1799)算學傳(Histoire des Mathematiques, 1 ed. 1758, 2 ed. 1799－1802, 4 Vols.)有相類之功效。道光二十年(1840)羅士琳續疇人傳

由卷四十七至卷五十二，凡六卷。時則阮元在家食俸，尙爲製序。由道咸至同光又數十年，此期疇人輩出，宜當續傳，而李善蘭，張文虎，吳嘉善，均熟知中算家掌故，皆驚於李銳，羅士琳之名，未能續成。張之洞書目答問(1875)稱：五十年來爲此學者甚多，疇人傳，續疇人傳未及者，補錄於後。計

中法：萬光泰[拓坡，秀水]，沈欽裴[狎鷗，元和]，顧廣圻[1766—1835，千里，元和]，戴煦[1805—1860，諤士錢塘]，紀大奎[1746—1825，愼齋，臨川]，陳璨[小蓮，嘉定]，張豸冠[神羊，海寧]，楊寶臣[驤雲福建]；

西法：董化星[即達存，字華星，常州]，齊彥槐[梅麓，婺源]，江臨泰[雲樵，全椒]；

兼用中西法：沈大成[1710—1781，學子，金山]，阮元[1764—1849，諡文達，儀徵]，許宗彥[1758—1825，積卿，德淸]，安淸翹[1759—1830，翼聖垣曲]，項名達[1789—1850，梅侶，錢塘]，羅士琳[—1853，茗香，甘泉]，俞正燮[理初，黟縣]，徐

有壬[1800－1860，謚莊愍，烏程]，夏鸞翔[1823－1850，紫笙，錢塘]，馮桂芬[1810－1882，敬亭，吳縣]，鄒伯奇[1819－1869，特夫，南海]，周澄[志甫，績溪]，李錫蕃[1823－1850，晉初長沙]，李善蘭[1810－1882，壬叔海寧]。以上所記，除周澄外，并收入疇人傳三編。

華蘅芳曾於學算筆談中論疇人傳必須再續，乃附其弟世芳所著近代疇人著述記(1884)。此記所列凡二十八人，附見者五人。其後則光緒十二年(1886)錢塘諸可寶作疇人傳三編七卷，補清代各疇人。光緒戊戌(1898)澧州黃鍾駿作疇人傳四編十一卷，補記上古至清代各疇人。

合阮，羅，華，諸，黃各疇人傳記，引用書籍多至四百餘種，前後六十餘萬言，宜可無憾矣。而各傳記天文算家合以爲一，各家之生卒年月，著書時代，多全不顧及。往往序文凡例連篇記入，製作此序之年代，反漏而不記。各書之精華，學派之流傳，與社會之背影，亦無法記及。讀者雖熟誦此數十

萬言之大著，而於中算源流，仍無所得。且輓近數十年續著之書，與乎新發見之史實，亦將如諸黄之例，勉強續貂乎？或將翻却昔日之成案，而爲重編一算史乎？近十餘年有志於後說者，大有其人，深願研者漸衆，舊算精華，不至墮失，則幸甚矣。

商務印書館出版

中國數學大綱（中國科學社叢書）　李儼著　定價一元五角

吾國算學，向無有系統之專史；而古算書籍，又多東零西落，蒐集甚難，故研究國算者，每苦無從入手。著者於吾國古算，向有研究，其從事於算史材料之收聚及整理者，十有餘年，始得編成此內容豐富而極有系統之著作，實可為吾國算學界放一異彩。全書共分三大編：第一編為上古算學，第二編為中古算學，第三編近古算學；關於各時代算學之源流派別，以及算學家之小傳，均敘述頗詳；凡研究算學者，皆應人手一編。

中算史論叢（學藝彙刊）第一編　李儼著　定價一元四角

年來關於中算史之論文，發表於各雜誌者，時有所見，但各文刻非一時，收集甚難，且初稿遺謬及印刷錯誤之處，亦往往而有；研治中算史者，每覺困難。編者特將在各雜誌上所發表關於中算之論文，彙集整理，輯成此書，以供世之研究中算者用作參考。全書共四百餘頁，論文凡九篇，皆係名著，實為研究算學者所必備之書。

百科小叢書
中國算學小史

中華民國二十年十月初版
每册定價大洋肆角
外埠酌加運費滙費

著作者　李　儼
編輯主幹　王雲五
發行人　王雲五　上海寶山路五〇一號
印刷所　商務印書館　上海寶山路
發行所　商務印書館　上海及各埠

Universal Library
A BRIEF HISTORY OF CHINESE MATHEMATICS
BY LI YEN
EDITED BY Y. W. WONG
PUBLISHED BY Y. W. WONG
1st ed., Oct., 1931
Price: $0.40, postage extra
THE COMMERCIAL PRESS, LTD., SHANGHAI

四〇二七符