大學叢書

現代邏輯

汪奠基著

商務印書館發行

大學叢書

現代邏輯

大學叢書委員會

委員

大學叢書

現代邏輯

汪奠基著

商務印書館發行

目　　　錄

自序

邏輯一科，吾國譯述者，明有李之藻之“名理探”清有嚴幾道之“穆勒名學”。三世積來，不敢謂研討者寡；若論創獲，則實無可數之作！爰李氏書舊，亦𥨊𢑥失眞，彼嚴譯精到，何竟乏諳究？豈徒讀人書而無爲人學者耶？或曰否否。自嚴著梓行，國人深識邏輯大義，如新譯新著，洋溢乎中國；學校開研究教授之門，圖書編邏輯專書之類，口舌言動，簡策梨行，無處不重思想形式之美與邏輯名詞之用。予曰吁！是豈惟邏輯一科而已哉。子不觀夫哲學科學一般亘製乎？新書踵出，名目穎異，中體西例，遠邁古初。獨惜眞金鍍假，具晦衍而譌沿；本旨斷壞，雜斑駁與闒茸。或逞臆自蔽，不咨其實；或釣奇傅會，濫陟枉黜。盜竊文章，割裂眞理，弇陋不通，竟稱獨闢之論；童昏罔覺，偏幟濫惡之言。顧西學發展爲一事，國人執例御變又爲一事；問塗取法爲一事，而能否執徼會通則又復爲一事。若淺嘗偏至，不辨是非，嚴氏早戒於前，吾儕竟倒施於今，怪矣！夫學問深湛，探究咨諆之在人，而獎掖提倡者在國；個己或無緣長日專攻，政府則不宜用失常次。不然，必致士狥利祿，假名欺世，科學偸兒，皮毛殘闕。斯謂失教養之道，奚索學問之極耶？

今之國事千舉萬變，步驟傴匽；學校雜流，哲學顚破，邏輯實科，形式脫謬。中學旣幾斥絕思想方法與行爲規範之學，而大學何又强設哲學教育與心理研究各系？前後隔閡，北轍南轅，其弊一也。政府吹求

"職教",空倡實用,不利器以善事,是揠苗而助長。 試觀歐洲大陸,驗教育進度者,必準"哲學"與"數學"爲表率,(參考一九三六年五月號科學雜誌 Scientia。) 未有如我之窮鼠齧貓,突梯滑稽之行也。 故躁進覆轍,亂道悞人,古訓有文,今置不顧,徒慕科學之名,弗曉基本之義;其弊二也。

藉曰工商急需,醫農急用,與創果宜,事實有效。 然問誰敢以某科有用,某學無用目之耶? 蓋學術相承,往往發端甚微,經歷時日,而事效特鉅者;若謂有用者興,無用者廢,則如宗教爲道德社會之亟用,而吾人豈宜與創之歟? 又如宗教之神無用,矧科學與宗教爭論綦繁,即今科學世秩,猶未聞有築宗教墳墓之工程師也! 總之以學爲學,用不用別爲一事。 學校建工廠而非工廠,學生預工人而非工人,教者昧達斯恉,科學絕種於國土。 彼淺略之計,竟作國教之本,其弊將更不知屬於何變!

然而專以科學哲學爲業者又將何以自任耶? 曰此尤不堪一言。 爰哲學科學,非國故之流,而學者每逐奇失正,如斷港絕潢,惡望至海? 眞理未明,派別已樹。 果有爲學立言或敷教之目標,顧亦足稱豪;惜所謂派別云云,光狃隘私曲之播弄:不以留學域分,即以語言國異,析省別縣,誼辨親疏,號曰哲學派,科學派,社會派,某某派,理論俱無獨立之見,種類淬漂新學之銳;攷其基本,則唯物者可不解物理,唯心者可不辨理性;數學懸隔,符號强用,科學不習,論著元學。 虛誕獲譽,白黑菲菲。 下焉者更樂咋唶而恠詔護,事嘲誚而非器業。 不是師法而好自用,不取拙誠而倘巧僞,是皆今學之弊也。

然則立何法以拯斯弊? 一曰崇基本學術研究,奬專門思想發現。

吾言"崇"者非口頭文字,或條例故事之宣揚,乃切實施行之具體哲學科學教育;吾言"獎"者非零星金錢或榮譽鼓勵之偏黨,(敎無偏黨,)乃絕對普汎之專門學問人材培養。蓋一國民族,必於任何時間有其精湛獨創之基本學問,以表現其生存與認識之科學價值,立其不可侮之人格意識與國家體範。若模擬竄竊,取青媲白,匪失學問之重,尤見囊脞之病,非"研究""發現"之道也。二曰厲行廣大之科學教育,嚴核教本之科學著述。所謂科學教育一詞,通人皆知其要,然攷學校實施之例,决未獲實是之證。且往往直視科學狹義,摒哲學爲空談,毫釐差錯,弊不勝舉。至科學教本,亟宜系統調整,內容尤須嚴經專家平議,近有以一技之長,竟任全部科學編審之責者,兒戲眞理,貽笑中外。三曰遂譯參考用書之系統化,國家聘譯家與教授之平行化。研究西學,須直讀原著,祇以中外文字之隔遠與學校供給之力弱,故難通西著,更難解中譯。及論系統,尤無線索;因難而濫,終至糊塗。國家對此,宜速與根本計畫,勿恃目錄虛張。必也聘譯家與聘教授平行爲用。蓋教書與譯著爲兩涂,以講義充著作,絕非持久論學之道,其故非謂講義皆無善本,實因難及精湛探討之學也。倘兩者由國家專聘,則顯長著效,雙得其利;聚才敘次,政府獲人。四曰設國立譯學院科學院。延攬歐西專家編課講授,輪收國內教授入院研究,斆學相半之益俱到,而楚材晉用之譏無矣。五曰政府提編通俗應用之科學哲學分類著述。通俗科學哲學專在普通知識碻實之教導,而應用者則注重適用機械條件之必要指示與實習方式。前者在給與一般原則之瞭解,期達科學化之社會認識,後者在分給工具之把握,俾人有動作之基本規範。此類工作,須有嚴

整之預備，若任商賈式之"學會"招攬，則簡髮而櫛，數米而炊，所得不償所失，何足濟世？ 故必政府鄭重籌辦，期其有成。

總之是類待興之科學文化建設事業，有舉不勝數之要，吾今臚列五者，非謂僅此而已。 原人情於旣知者，易處靜觀審美之態；於求知者，每流淹緩違失之過。 何緣而至是耶？ 曰無科學精神與邏輯認識，爲之會立意志，持續創造故爾！ 蓋理有繁簡，事有難易，避繁難趨簡易，顧恆情之常；避失之者衆，趨獲之者寡，此亦必然之例也。 科學與哲學精神兩稱無畏，旣無所避忌，復有趨義之勇敢，故曰惟試驗無懈，惟觀察無敵，惟邏輯能服眞以征僞，能釐僞以逼眞。 或驅神祕，或立信仰，精覈簡序，量決一揆。 破壞修造，驚失戒備。 其對眞理熱忱，如愛情勃勃不亂，怒髮冲冠不躁。 堅忍靜謐，抵制自然者科學也；循規蹈矩，嚴革妄誕者邏輯也。 代嘉德曰"科學眞理，自勝戰獲來"。 牛頓曰"科學眞理，堅忍不拔爲其首功"。 吾人求知，必本此精勇不撓之志，遠博入微之義，活潑銳利，假定豫測，如幾何想像，如機械試驗。 擒萬物而控之法，復縱而之理性之方；發現眞理，卽生活於眞理。 於是理智實在，互創互用。 先儒有言：愼思，明辨，篤行；科學邏輯精神，正在：深思，明見，力行。

民國第一丙子夏七月汪奠基自序於北平

導言

昔亞里斯侗(Ariston de chios)謂"沉於辯證者,如嗜食螃蟹,因縷膾之欲而失無限時間於幾片甲殼上"。哈密圖(W. Hamilton)亦宣言謂"今之學邏輯者於時間雖有耗散,肉味則終難嚼咽"。

歐洲形式邏輯,衍溢廿餘世秩,新陳會萃,支移輪用,延禍流祚,罔離宗派。即今數學邏輯新原理發現,說者仍謂"襲數學方法,展亞里士多德邏輯演繹"。顧思想申輾無窮,而邏輯永代有法,然形式機械,方術空簿;糟粕糅雜,無庸於科學眞際;糾紛交錯,忘形乎知識規範。爰所謂亞里士多德派邏輯解釋與補輯者,不歸元學,則歸心理學,枝節無謂,述作狹陋。近五十年來,數理孟晉,純正科學悉反官守式之哲學形構,彰新數學認識之理性原理,或樹邏輯"實在"之分析方法,或揭邏輯"關係"之眞理價值;使哲學科學,趨自然合理之發展,理智研究,握思想系統之嫥符。如此,旣昌數學邏輯新創認識,復昭數理(數學物理科學兩播,)哲學深澈精神,破亞里士多德及康德兩大形式系統,直徵賴本尼支與坡萊數學發現之意像眞實性。

無疑,此謂數學邏輯新體,鎔鑄科學原理,型切數學演算,用式常識語言以範常識意義者有之,逸常識科學而入純理象徵者尤稱獨特。故論溥汎或一般化,匪惟哲學家未獲僉同之議,卽數學家亦難盡同情之愛。或更謂新象徵邏輯者旣否認邏輯所已是,則弗知其所不是。是

與不是莫有，奚云邏輯形式發現耶？凡此辯證，淵源於哲學家與邏輯家之兩溝未通，勢有偏側，義難持正，欲矯斯弊，宜修正心理學，社會學，倫理學及唯用論諸說之謬。茲略申析於次。

一曰心理派邏輯之謬。近一世秖，心理學漸由內觀與敘述之意識觀察法浸入物理自然之試驗實證科學。棄元學絕對實體問題研究，探神經系統與感覺機能之生理認識。願論事實，儼稱獨立自治之科學；進論範圍，直併邏輯與倫理而噬呑焉。其言曰智能與意志兩端，皆自心理觀察之者；邏輯乃智慧心理學，倫理即意志心理學。蓋心理派學者視邏輯與認識論，絕對意識事實，一概念，一判斷，一推理形式，無一非此事實之"原因""本始"。如經驗認識之感覺說，稱原因證明；進化論者之遺傳習慣，即本始事實。一言以蔽之曰，心理派認邏輯爲經驗敘述科學，智慧爲意識情境活動。邏輯方法，悉化入心理研究。

如此謬見，混邏輯律與心理律而不分，是謂事實之錯。夫心理定律，明現象同聯之"自然，"而邏輯定律，在審思想規範之"意像"。心理學罔析眞僞，亦莫辨價值；凡定律之用，在精確理性與粗率詭辯爲同然，其解釋對智愚賢不肖，兩極精神，同稱適合，是乃抽象"觀念"之眞理値，視之爲意識之事實可也。邏輯則不然，彼不論思維之常，而在知"應"思之正軌。其定律爲一規範與意像元素，具一價値意念。此價値判斷在心理現象則未之見也。蓋心理徒有觀念之聯瑣而無眞僞之是非，且此聯瑣意識，多屬偶然虛相，無認識元素之觀念的邏輯關係。吾人宜知眞理爲邏輯之是，非心理之信，如謂眞理歸主觀意識與轉移之條件判斷，則矛盾稱爲信仰，眞理例同反覆。

法儒黑博 (Ribot) 曾創"感情邏輯" (La logique des sentiments) 以別理智邏輯， 謂理性邏輯為抽象，其形式空設，概念即文字，實在即意識。 若感情邏輯，則為具體，活動，充實，應用，健全，有效者。 此說若立，邏輯舊著，焚擲略盡！ 夫理性邏輯之用，在搜前提如何應獲之結論，與夫自假言結論所應證之已知前提。 若感情邏輯判斷，其結論概屬先決，質言之，自結論以期可能之證驗。 前者謂之客觀實在，後者專取主觀認識，兩論相衡，吾人不敢是感情邏輯之用矣。

或更曰形式邏輯不究"發覺"之功，不解方法之實。 故欲求眞理證明，宜與"發覺邏輯" (La logique de l'invention)。 按所謂發覺式之邏輯，以直覺為方法，以探獲觀念之新組織為目的，天才儘用，自由為其條件。 果邏輯原理本此，則範疇形式之於思想，不啻詩韻合璧之於詩詞。 吾人如誠欲解發覺之事實，捨心理學無能知之，明言之，發覺者，心理之事實也。 此事實眞僞同立，其推證無限，其解釋如游克立派公律可能。 若欲知"眞"發覺與"僞"組織之有別，必須自"邏輯"檢討推證，從茲確斷實在，標示眞價。 有意無意，摸索審定，使發覺證明，兩兩互攝。 倘獨取直覺矛盾原理，必難通邏輯形式原理。 至於陷入心理錯誤之偏側，圖型認識之狹見，更不足論矣。

二曰社會派邏輯之謬。 近社會學亦如心理學發展，欲盡哲學邏輯而網絡之。 析其說，蓋謂人類不離社會生活，遺傳教育，習慣智慧，及爾思想意志，幾莫非社會所與；科學事業，哲學研究，皆稱社會事件，或社會本有之功能；甚而理性原理，標辭原始，觀念適合，眞理產生，悉屬社會契約之用。 顧必有普通承諾，斯見眞辭之値，必有一致共承，斯信

眞理之則。 語言形於社會生活，邏輯端自語言出斷，謂邏輯爲一社會科學，證據於此。

按社會派學者偏持此類謬見，同源於心理派獨認意識情境之非。彼輩欲使倫理學邏輯學變而爲歷史與叙述式之科學，不謂倫理爲風俗學，則謂邏輯爲實用論，織精神於行爲，牽思想入效能；認人類無社會以外之邏輯形式，或遵其所當信，卽指其所應爲，所謂形式正如習俗之律智慧，衣冠之章人身。 邏輯社會，眞理藉主觀現實。 凡此種種，皆墮遁辭與僻語，忘思想之個體存在，亦不知此存在表現之關係價值。 語言雖稱社會產生，用語言以表示之觀念則非也。 蓋精神獨立不倚，最顯者如嬰兒能受教字音，而决無能接受通曉或交互之觀念，有之必自其智慧漸申，思想創設之後始。 語言出諸口入諸耳，如兩電台收發器之接應，觀察者只見記號或電流變化，而不識觀念之是也。 謂語言爲思想之傳導，宜勿忘思想形式建設之理智規範。 人類社會往來與夫羣策羣力之認識，純恃觀念同逮，關係同指之建設。 故以知與行言，研覈觀念間之關係必先於語言，而探索人類間之關係，庶稱近理。 質言之，邏輯先於語言學與社會學，斷非語言形式或文法之擬也。

總之邏輯於語言惟作判斷批評之知，非工具粗率之表，其用“無定徵號”組織，厥功在觀念關係之美善眞知，縱謂此亦一語言價值，然必認此語言之產生迺形諸理性，而非創於社會，若假亞里士多德理性動物說衍之，知惟有理性可創設；理性者國家之母，非國家之摩登處女也！

三曰倫理派邏輯之謬。 此派始自康德批評論，强納思辨哲學於倫理，立實踐理性之宗極，雖其說本認識論，其實則虛控疑文。 謂邏輯推

理，紬繹於唯一定律：或齊一或矛盾，由同之同，由溥汎之特殊，所獲標辭結論，光屬前提隱括者也。析而言之，此派有㩁恃肯定全分與否定全分 (dictum de omni et nullo) 之三段原理者，亦有認唯一矛盾或齊一律皆不足證三段推理，而創所謂"純邏輯"以自限於齊一矛盾與排中之三律者。其衍式終不外援齊一定律以託喩分析判斷與組合判斷。更從而優分組合，殺減分析，認詮釋概念，莫善分析判斷，若知識結構，則只有組合判斷。論邏輯方法，僅教授與教育之用，凡眞理創獲，須由直覺特殊運用。睹茲傾向，批評論者雖曾反對心理之謬，結果實趨心理論斷矣。

夫徧視邏輯，重樹元學於倫理，顧鐲思辨矛盾兩反者多，而優奬本務絕對者亦獨斷太過。所謂道德原則之公律，實無異感情邏輯所持結論眞理之主觀認識，此眞理證驗，旣不遠元學思辨之前提，尤不免理性邏輯所設結論實在之或然性，是道德公律實踐云者，厥惟元學辯辭之利用爾。昔黑寇萊 (Herculé) 威言示敵曰"今吾語汝：善惡兩端，順逆自取：汝果誠順耶？若然，汝必應承一切，此道德之必然條件也。若不然，是汝不忠人之汝辯也"。如此尊重道德律，誰敢應之以否辭？謂之"道德强制" (Contrainte morale) 自由，亦無不宜。

倫理派認識，毀理性邏輯以建非理性信仰之道德元學，棄知識設信仰，(康德語)視理智弱於情感需要與道德利益。直謂人類意志選擇，在對生活行爲之盡善與有用，而不在眞實或類於眞實之證。思辨理性之兩反性，在意志行爲之決取中可獲一定斷。按此類意志信仰，確認道德律與社會爲思想判斷之威權；殊不知信仰非必然，亦非自意志始；吾

信其所能，非信其所欲。 智慧雖弱，若無理智認識，決尠信仰可能。理性信仰，比例增進，藉曰理性亦有不足，然必由是以見效果與眞實價值。 若意志信仰，則難袪偏情之蔽。 緣邏輯與倫理，端在挽救斯蔽，今竟賺兩者於心理，誠忘人類有擺脫思想臆測與抑勒狹隘之要也。 柏拉圖有言：人不能統所有精靈齊入眞實，然必統所有智慧一齊趨進。意志情感盪於眞理中，倘無理智之懷柔指示，所謂意志信仰，直變爲愚妄頑朴。 古第哈 (Couturat) 謂：赴實踐理性而拒思辨理性，康德派適値倫理之反。 夫康德薄理性於意志之本願，在揭意志自由之可能，剏此願之反映，適違科學斷定之規律，彼純理批評所謂連科學與道德兩端於一標準自然之說，將亦無邏輯實在可能。 理性惟一，知行同膺，强持無上命令，誣衊道德定律，非邏輯眞理之所得證也。

四曰唯用派邏輯之謬。 唯用派取希臘坡達哥哈 (Protagoras)"人爲萬物法度"說標人本主義哲學，謂一標辭眞理，在實用之結果，眞卽用，一標辭眞，卽此標辭於人於我，有利有益，能供實際需要，亦能供滿意要求。 標辭之眞非眞於實，乃眞於德用之利；非眞於利，乃眞於信仰之是。一朝不信，信仰實用，俱歸烏有。 又謂信仰非智慧原因而爲情感活動，眞理爲信仰之主觀現象，而非客觀自然。 此與倫理派同一觀點，皆心理引申之謬也。

按唯用論者襲生物學以法經驗與進化論之心理認識，陷人於自然狹義，羈生命於純粹實用，教育活動之目的在此，求知試驗之方法亦以此。 環境機構，習慣層創，雖欲如經驗批評 (Empirico-Criticisme) 論者之超脫舊元學理論而入新實證類之生活哲學，實則始終未離新式古

代思想，反爾逼近黑格爾派認識論最抽象最元學式之邏輯原理矣。實用論者批評系統派，力反純邏輯理論，謂實證科學因應用以趨行動，其原則如生活機能，結果自與外界適應。果斯言之足恃，試思若無精選之智能，如何使斷片經驗，形認識總和？如何使繁複生活，標單純意識或人格？所謂"思想經濟，"豈非約試驗以型抽象概念與溥汎方式之原理乎？實用論者襲此原理而又撥棄理智眞理，使科學工具，立於意志之自然現象下不求所以，亦罔識爲何。顧工具作用之必有其成效，此成效實用，夠惟無知識價值，且無客觀意義。

古第哈云唯用論迺經驗派最後之化身，其邏輯終局爲不可知論與懷疑論。然而同中有異者，卽進化論之經驗主義認意識之外有外界自然先在，故精神必因自然，教學必由實際。彼唯用論者則不然，株守意識，獨法心理之個人觀念，謂自我爲所有實在。是湮滅客觀眞理，使意識空懸無着。藉曰眞理實用，在倫理界社會界有同然之要，然不知此實用偏見，迺虛無之倫理說與夫利己之社會功利論耳！爰唯用論者欲"眞"信仰以合意志與行爲，試問此行爲主宗之價値意義究如何適？曰"生活卽標準，""行爲爲行爲之宰，"如此類言，是謂行爲卽知之本，眞之型。吾人殊不謂然。蓋行爲本身無義，亦尠自身目的，必有智慧啓示理性行爲，按索實在目的。觀念或意像，俱行爲之必須者，觀念如有謬誤，行爲必歸失敗。故曰行爲之價値，乃據觀念之眞理指導與昭顯者也。若以技能之行爲論，尤須恃智慧規劃完成，卽道德所重之抽象，亦必自明白觀念斯展弘毅之行。故又曰智慧之方法，乃激勵精神能力之偉大作用。唯用論者鄙視觀念明白與智慧作用，正與理性派所謂"探

求眞理，勿狹取理論實用之結果"相反，是唯用派徒法工具而不知"行"之邏輯眞理，吾未見其科學認識之能確分眞僞而不及於亂也。

總之邏輯改造，勢所必然，理性派舊說，無眥眞之理，超絕邏輯形式，尤無充足之是。所謂範疇判斷，經現世邏輯衍釋之後，始見是非曲直。若學院派形式，則偏枯無義者，在在皆是。現世邏輯顧非精神科學之唯一結構已也，其範圍攝科學方法，科學原理批評，認識論，及元學或所有思辨哲學而有。科學家哲學家之理性發現與批評，必自新形式邏輯指示方法始。或謂理性有其極限，不然，則抽象空言，雖切無益。果此極限之有也，匪邏輯不足以釐定或發覺之，威權信仰，神秘論斷，决難先理性邏輯而自樹界限，確證認識。

吾人承認心理學有其邏輯，社會學倫理學亦各有其邏輯，甚而哲學科學，亦無不各展其邏輯以自用；然而不承認或以心理學研究之邏輯爲"邏輯"學，(Logique) 或以倫理社會等局部之認識爲邏輯學。夫規矩，方圓之至也；若某規某矩，則非規矩之至；方丘圓丘亦非方圓之至也。思想"型式，"如規矩方圓，心理社會倫理科學，皆某規矩之型式，所方者固終方之型，是圓者亦具圓之式，然若以此型此式，强是型式之邏輯，則猶方底而圓蓋，必有所不合也。邏輯爲思想型式科學，或證思想與自身之一致，或驗思想與實在之一律；任何科學搜討之視此一致或一律之型式，皆如方圓之視規矩；任何科學襲型式思想爲用，然而無一相同之絕對科學，正如宇宙有方圓必用之規矩，而無絕對同一之兩方圓物。型式之至極，妙在此無限思想產生之異，與無窮事實可能之變，此無窮無限變異存在，矛盾者，排斥者，愛情者，殘酷者，種種色色，如方

圓，長短，大小，重輕，皆自規矩權度之型式生之有之變之異之也。

謂邏輯爲思想型式一致科學，此型式旣適思想自身，復適實在與思想，然則此兩大適合如何連逮耶？　換言之，如何使型式觀念和洽實在所有？　欲答斯問，舊邏輯家曾析如次述：

其一曰精神元素之觀念，必表於語言名詞；各名詞關係之認識，又必藉標辭（卽舊譯命題也）與推理明白之，邏輯型式研究之第一步，卽在探索各標辭與推理，宜取若何"定律，"以訂名詞觀念間關係連逮之實在。

其二曰思想觀念之自適，必洽生活環境中心之情感印象所是之實在；質言之，觀念所有連逮關係，必通於實在所有性質。　邏輯實用研究之第二步，卽在檢證思想與實在連逮之"方法"爲何。

按此爲舊說之一般意義，現代邏輯型式研究者固未新立解釋，然發覺困難之尖銳處，則日見其沈疑之莫決也。　蓋人類語言，隨種族變異，卽同種同文，亦有時代轉化，彼名詞與觀念間，如何分別偶然與必然之關係？　且所謂觀念旣因試驗範圍活動，則非精神不變之實體，然則如何確認其能適實在？　而又如何能示其間之矛盾與否耶？　古代幾何謂空間有窮，今之無窮說證其僞矣，然而應用幾何學，則未聞有否認游克立之要也。　此其故何謂耶？　曰是在分立邏輯形式實在之過也。　今之科學邏輯型式，立"關係常式"　(relations constantes) 以徵現象之羣類，形式實在，統於邏輯演算之一理，邏輯唯一，眞理亦唯一。　所謂邏輯演算，無不可約之元素，尤無不可析之理性，型式普汎，變異之特性化於關係常式之一致矣。　臍此型式連逮關係之完全邏輯，惟現代數學邏輯唯一可能。

附釋　本導言前採古第哈之批評，後列個人之卑淺。中間翦㯶侵越之言，亦正示私見之在也。

例言

一、本書著者非所謂哲學家或認識論家，尤不善作數學邏輯者之邏輯文章；自身對哲學與科學，惟局部麤知，故亦不能有系統敘述之獨見，尤不敢妄鑿垣牆而殖蓬蒿也。

一、本書純在介紹現代邏輯之科學思想，非一家一派之專論。且同一數學邏輯派，如英美德法意奧實各具特異理論，本書皆參攷取益。珩璜琚瑀，駢羅雜佩。

一、本書內容第一編概論邏輯諸家要旨及定義變化，說明新型式思想及對舊者之批評；第二編專述新型式論之原理要點，并詳釋象徵價值；第三編述公理證明之各式，同時示新型式論之展望；第四編綜核演繹型式之構造原理及新與問題之關物理數學與夫對數學邏輯批評之說。

一、本書內有數章（第三編以下者）係著者幾年來短篇論文草稿，各章彼此關連處或不甚一貫，祇以意在引起研究者之動機與分別介紹性質，故錄作證明；若讀者以"不倫不類"見責，則余惟認："自我得之，自我失之"無所怨。

一、本書名詞與習用不同者頗多，如"標辭"爲舊命題，"型式"爲名詞；"形式"爲形容詞，與代表舊形式邏輯對實質者之詞等類，非欲立異，略示嚴格語言符號之便耳。

一、 本書以"象徵"或"符號邏輯"爲新型式邏輯之總稱，分而有代數邏輯派，數學邏輯派，數理邏輯派。 前者指十九世秖末坡萊石扣德，次則包廿世秖羅素班洛諸家，斯二者有時混稱一名；後者則爲近十年來新與數學物理學之理論批評中所創之邏輯問題。國人往往以"數理邏輯"包前三者，名旣不正，義亦混淆。 故余願保"數理"二字之實義以俟將來之成功。

一、 本書著者係一"理性實在"主張者，書中雖未明言此主張之邏輯意義，讀者於第七章及第九章以後各處可略窺一二私見。 又對直覺與邏輯之爭，不主絕對拒斥直觀，亦不認徒直觀之先天說；邏輯型式最普汎，然直覺之用，亦有其襲普汎者在，祇以狹隘心理意識，爲不及邏輯價値之無上理性實在；本書第十章及十一章，皆在立法救此偏失之過，使直觀認識，終底於數學邏輯之成功。

現代邏輯

第一篇　概論諸家要指

第一章　邏輯沿革及諸家定義比觀

甲　史象覈要

邏輯史籍，與哲學齊列；原理認識，則塼學立派。　始亞里士多德(Aristote) 著論“分析”，思想科學，術成刑名。　迄今廿三世稘，論理趣固終一型式，析法義則竟乏連持。　故一部邏輯史象，儼然陳示思想之各有自由變化也。　其間準實用科學思想術與理論科學思想律爲邏輯說者，厥功迺同視邏輯爲證驗科學或數學之關係科學者相埒。　史衍斯義，將代永承變歟？　抑思想進展之徵象宜如是耶？　吾詳述以證。

邏輯肇於溥汎思想之實體研究。　此古希臘辯證認識時代宗戴之說。　考吾華經術文教，體構亦連逮斯誼。　曰洪範九疇，(五行，五事，八政，五紀，皇極，三德，稽疑，庶徵，五福六極。)立概念類別，析現象科學；推衍思想，序端時空；揭宇宙變異之範，標觀察經驗之本。　貫攝自然天文倫理諸學科而爲理性假定；直若希臘大流士(Thales)畢達哥(Pythagore)擬物理，釋數象，一萬有，化無窮者之殊途同趣也。　蓋僉認範疇概念，爲入眞理之門耳。　周易論象變，生生類推，循數理，明人事自然，推小驗大，幾於

無限。彼米勒派(Ecole Milet)窮物析變之思想科學,亦有同指之邏輯觀矣。知識相對,眞理稱衡,豈其然乎。

始希臘學派而言,主範疇之知者咸赴感覺之說。然而埃利亞派(Eléatisme)則認"絕對"實在,判斷惟肯定之"是";若夫感覺變異,矛盾立現。哲士派(Sophists)更直以邏輯辯證,釋"運動"之非是,"致知"之無能。謂之"有"也,無知;知也,無言;言也,無斷。藉曰主思之觀念眞,難必客知之所是同證。且個體單複概念,各涉數學矛盾,是"知名"不若"無名"之愈也。我道家無爲無名之論,對此爲不刊註脚。

邏輯消極論證,至蘇格拉第(Socrate)"德卽知"之說創,始入思想坦途。昔云概念知識之端也,蘇氏論知,遂據爲邏輯形式之始,所謂希臘哲學認識,迺於是剏其統系。按蘇氏主析特殊事實以探公性觀念,使單純概念,聿適多體現象。緣種反類,舉一貫萬;或組合定義,接生知識;或分析剌詰,歸納眞斷,邏輯思想運動,創爲觀念間之生命價値矣。

栢拉圖(Platon)深紬理性認識,本智析物,因數形實;明眞理辯證之思想與情感作用,滙自然、道德、心理、科學爲邏輯智慧形式之總持,立觀念認識,定思維型範。

亞里士多德更集科學方法,著科學工具,授科學分類,推概念理論;從而發普汎推理之歸納分析與衍繹證論,謂科學立於種類性之普遍,而知夫概念感覺之形式觀念。縱覽範疇篇與分析篇言,雖未名邏輯專書,然墑示其原理証明之型式方法則無疑矣。若論科學法器,則又早爲之巧定樞機焉。故曰機關論出,科學之科學方法定。彼遊克立(Euclide)幾何原理之分公律、公理、定義三證,實不過亞氏原理証明之應用科學

事耳。所謂因邏輯眞理論，樹科學純思想之說，從爾了無疑義。

邏輯學理具在，科名則未固定也。斯多伊克派 (Stoicisme) 興，始定今稱。惜經典法理之說副，致辯證認識之術誣也。夫棊重哲學理性方法，必有方法型式科學在；不然，徒增無謂推斷，鮮克眞理獨見。故衍釋分析論理，曲解範疇精蘊者，歷十數世秩，益使邏輯科學，沉淪形式之末。雖亞伯拉 (Abelard) 力闡機關論爲智慧工具與發現眞理方法及支配思想活動之官能諸說，然未能豁錮無謂之傳統義焉。洎法儒哈苗斯 (Ramus) 著哲學工具之邏輯新論，中世繁文，粗成頭緒。其言曰：文法、修辭、數學、物理、道德、政治，與夫一般人類科學，皆邏輯權力，分析認識者。繼而名目論派因之發展，邏輯新生命遂再創矣。

邏輯衡科學立，失科學敗；此本存不易之事實也。故欲復興科學思想，必先立邏輯認識；此英儒培根 (F. Bacon) 改造之新機關論所由作也。培根立歸納法之科學意義，使邏輯攬思想認識權；舉抽象形式，置試驗感覺以代；遇自然現象，首析原素，繼用試驗；實有者是，經證者知。昔種類差異諸概念，不知事物實在形構，衍繹知識直等虛設。若以之擬形構自然，則凡形式分合，適如冶金學者之鑄鼎象物，因物造物，析理有理；知行兩證，邏輯萬能矣。是故邏輯思想，不專演繹工具，尤不廑形式概念，乃以學兼術，導智斷眞；或自試驗觀察，接厲証明；或藉數學發展，推求理性；俾理想事實，並增眞理之價值。古機關論次之幾何原本，近機械物理(如開普奈加利奈諸家之數理發現。)既創後之新機關論，治一面邏輯，一番科學；一段理論，一層認識。謂培根之功建於科學方法，正邏輯型式立於科學哲學之鐵證也。或曰邏輯永稱亞里士多德式，新機

闢論未出形式窠臼之改造也，誼亦在於斯據。

然則改造之眞際果絕跡耶？是又不然。如理性派溥徧數學觀實發新端。按舊習方法，先失形式構設。概念旣不明白，理性尤乏實在。德儒賴本尼支(Leibniz)特樹新旗，謂邏輯迺溥汎數學原理；吾人對理性科學，必盡遵邏輯溥汎形式原理改造，使複念析居純理。行其法如算學劈整數爲素因數然。果邏輯原理統若數學存在之溥汎，則推證之規範，悉屬標辭(卽通稱之命題是也。)演算配合矣。推理如算式，標辭爲兩式間各連誼之肯斷式；凡無定意義，變爲約定之關係；而無窮觀念，瞭於記號抽象中矣。當時意大利沙克塞黑(Saccheri)卽因是創記號幾何學，爲"意象邏輯"發展認識。又英之牛頓(Newton)亦浸染邏輯原理與數學共色。若法之朗白(Lambert)更從而闡述新邏輯與數學哲學認識問題。貢底牙克(Condillac)尤不惜毀部分感覺論，著代數語言之術。雖方法較差，然具徵形式邏輯新與精神之數學價值也。

思想改造之門雖啓，而邏輯進展之路忽斷；其蔽蓋因康德(Kant)先天理性批評論重樹範疇概念說，以組合判斷論，界分邏輯於科學。氏謂數學科學乃文字記號之必然非如試驗能力之肆應也。彼數量云云，惟在時間空間直覺，形式假設與試驗定律各不相同。所謂形式思想與理性爲一，而實在認識與批評則又爲一；兩兩相應，各涉一範。從是截同指之精神爲二，混知識於新元學(métaphysique)，使僻論孳生，問題趣複雜矣。

黑格爾(Hegel)更申純理批評論，謂邏輯爲思想之眞學問，亦元學之眞知識。其說立於二端：以矛盾律言，一物不能是其固有，而同時又

爲非是;此智能抽象之相對知識也。以相反恆等言,理性與實在相當;此絕對實有之認識發展也。前者稱矛盾邏輯,後者名絕對邏輯。世界進化,正矛盾實現;其理如光之射暗,生之具死。若以絕對言,光與生永象無窮;謂光則拒暗,謂生則拒死,因其矛盾故也。然而世界萬有,光決非無暗,生絕非無死,反之亦然。光暗生死,互反相成,爲同進化之兩時間象。是知絕對者永趨矛盾之變,相毀相生,各得其最高意識,脫矛盾而入理性與自由。故純自然存在,非此非彼,一無是是,所謂恆等相反,有亦本無之證也。黑格爾邏輯思想備陳斯義;乃循古埃利亞派與栢拉圖辯證術,直認思想與生存進化,立同一節調之"正"(Thése)"反"(Antithèse)"合"(Synthèse)首命斷曰"有",如光在;次反斷曰"無",如暗存;復次光而無暗弗現,暗而無光不明;是光照暗應而有"合"之象,如"色"顯。此色乃可見之眞實,純光純暗,兩無實在;必也中合,始獲理性眞存。故曰惟調和具生命理性之知。(按黑格爾後之唯物史觀者,援引斯說,創唯物辯證法以釋社會經濟說,是忘黑格爾矛盾實在之邏輯元學觀,邏輯淪於斯義,是形式之宜獘。)

康德範疇論因哈密圖(Hamilton)而有英國形式之發展。其說謂推理研究,無方法活動足稱,所謂邏輯作用,惟形式可能,論其對象,無與於知識內含,而惟具認識眞理之思想定律耳。按斯說旣創,演繹概念,益形無謂。幸穆勒(Stuart Mill)直以證驗科學否認形式知識,毅然導邏輯於事實與有效知識之研究,重申方法,釐定原理。惜其對數學演繹未能體賴本尼支普偏數學之眞價,致徒有救正形式之功,而無邏輯科學發展之實見。

夫演繹科學進，邏輯型式與之俱進，此有史之徵也。十九世秋末，幾何改觀，分析新創，思想形式，隨時空間問題而有劇變。如高斯(Gauss)意像量之分析，使邏輯對數量之不解者釋爲可解；慕比佀(Möbius)之重心力論；栢拉斐狄(Bellavitis)之均重比算；卡斯芒(Grassmann)之幾何算法；哈米頓(J. Hamilton)之四元數論；斯多德(Staudt)之投射幾何原理；與夫新與之羣論(Théorie des Groups)集合論(Théorie des ensembles)換置論諸數理思想，相繼發覺，遂緣生邏輯形式改造之演算的"數學邏輯"(La logique mathématique)，而以英之坡萊(Boole)所著邏輯代數爲最新標幟。氏創革命之言，謂數學無一專諸數量本質之研究者，斯言旣出，數學觀念咸棄質量問題而是型式邏輯矣。同時更有非游克立派幾何(Geometrie non-Euclidienne)發現，將康德超驗美學(Esthétique transcendantale)之空間直覺形式摧毀無餘。復益以戡托(Cantor)集合論所證數學無窮性超空間量或列數性之說，使無窮數學觀，皆入邏輯方法演算。而邏輯與數學關係，因成極端精嚴之事實。石扣德(Schröder)之邏輯代數，正匯各家思想，新創之認識型式也。

由是觀之謂十九世秋末葉爲數學邏輯世秋也宜。如意大利派，特出尤多。或自數學判論舊型，或自方法評斷亞氏。本數學習演，與證明，創演繹獨立形式。數學化之邏輯旣立，而數學與邏輯分辨之規律仍有各當之分野。廿世秋之英國羅素(B. Rusell)懷提海(W. Whitehead)及法國古第哈(L. Couturat)更爲新說趨晉，反乎舊以立名。澈古澈今，創爲"新關係論"見。意大利之不主悉數學以還邏輯者，羅素則視爲皆邏輯之意念與方法有也。質言之，數學所是，無一非邏輯可分。

更先概念而言標辭，邏輯數學化，數學俱入邏輯之理益彰彰矣。

匪數學與邏輯相合已也。近如機械學，物理學，與夫一般科學方法，幾無不以數學型式用；其漸傾之勢，有如數學趨邏輯情形而亦爲之浸型式邏輯化矣。由此觀之，型式與實用，兩無縣差，謂人類科學只一型式邏輯，而眞理只一實在認識，正無不宜。

乙　定義比觀

何謂邏輯？名出而義在。學者果欲循科學定義之方，明邏輯精博奧衍之蘊，徵諸史實，雖不曰絕對未可，要亦事實難能！彼邏輯學家，各臧科學哲學主意，論是非曲直，推本已然先在之理；示原理認識，通持衡於試驗之是。故邏輯定義，量與專著所刊者齊。即有差異，亦不過形諸言文詞誼，實則了無至識之別也。如取形式言，栢拉圖觀念辯證，異乎亞里士多德範疇分析；培根歸納試驗，反乎古之演繹推理；英國經驗哲學，明明非大陸理性認識；或進而取形式相似者言，以同辯證論觀，而各辯證法異；以同演繹歸納法較，而各演繹歸納殊；以同感覺論列，而各感覺派立；以同理性派比，而各理性論亦無不分。此無它，異者以形式邏輯定義故，異而同具理性之眞者，以邏輯思想型式之法在故。代嘉德(Descartes)謂：邏輯爲善入理性與能就科學尋眞之方法；閣院派(Part-Royal)謂：邏輯迺導思想對事物認識之術；赫巴特(Herbart)復稱邏輯在揆序與聯貫各概念之溥汎規範；迮蕩達萊 (Tandal) 則又簡認爲研究認識之眞理的科學。統同派各說，異載語言，同名事實；謂之同理之形複單簡趣異可耳。

康德定邏輯爲智能理性必須之"定律科學"即言之，視論理形式，乃

溥通思想之純型式科學也。 黑格爾申其義曰:邏輯爲純觀念科學,即思想抽象元素間之"觀念科學"也。 呂栢威 (Ueberweg) 更釋之爲能使精神活動之知,發生實體性之形,乃人類知識規律或"觀念定律"之科學也。 一曰定律,一曰觀念,一曰觀念定律;量牆數磚,計磚圍牆,手續行動不見其異,而目的成功之事畢同。 十九世秩中類同是說者極夥,如巴俉,耿俉,羅芷,華臬,栢勒克,滂特……Baader, Gunder, Lotze, Wagner, Beneker, Prantl……諸家皆認邏輯爲集合規律,達於思想目的之知。 故定義形式雖繁,比觀結果不外拉捨利邪 (Lachelier) 析舊形式邏輯三大宗派之說。 三宗者何? 曰客觀眞理派,曰主觀眞理派,曰假定眞理派是也。 茲譯其義於次:

「客觀眞理,爲物之內在,以邏輯爲求眞知之學也。 由自然律觀,一現象必斷自它一始眞;反之,如無自然聯貫,勢必近於虛構。 故必有一邏輯作萬物客觀眞理之學或存在之先天條件之學, 然後思想有濟。 康德派超絕邏輯專釋是理。」

主觀眞理,爲人類思想對事物本存之符應。 因人有知物之欲,故必有主觀眞見。 邏輯集合方法,使吾人能用表事物所是之眞實,進而知其所是, 行其所證。 穆勒派名邏輯爲證驗科學者正力解是義。」

假定眞理,爲思想活動之條件必要。 按知本相對,探物之知,必由假定眞假以確斷是非。 如幾何推證,逼形像以近實有,因公律以統可能。 此認識式之邏輯,如舊三段式推理論派之思想僉主斯說。

綜觀三派,主"客觀""假定"者,力掀演繹精神;是"主觀"者,在揭求

眞之術。論形式系統性，當以假定眞理派爲宗傳。英耿斯(Keynes)著形式邏輯，適得是宗之成。其言曰：「邏輯爲研究精確有效思想之溥徧原理之科學，其對象在探論非心理現象之判斷特質，作"知"與"信"之判斷；尤注意如何能使若干有定判斷，轉諸其它待求之可能件之結論……故邏輯亦名規範或法式科學；此中性質，有與倫理美學相通者。」（耿斯形式邏輯導言節一。）」

耿斯定義頗重稱於世，蓋其說攝所謂形式與實質邏輯兩誼。原夫形實二字，本無當於邏輯之名，在昔康德，主之最切，兩誼旣幟，而邏輯一貫之理性斯裂，思想聯繫之技藝遂破。譬以形實分者對自然科學分類之對象卽不得解。蓋謂自然科學爲實質而非形式，不可也；謂數學科學爲形式而非實質，尤不可也。今之物理科學必待數學原理發展，其它科學亦無不皆然；形實容何以別哉？故凡認邏輯爲形式與實質之分者往往不偏抽象，則偏方法，反科學於哲學，毀哲學於科學，卽此類邏輯認識之褊見使然也。吾人今玆所論，意在比觀，故仍再舉兩說以明派別思想。

(甲)所謂形式邏輯研究，其內含約分概念類別，標辭判斷及演繹推理三事。論方法與數學根據之抽象原則同指。質言之，卽脫去思想對象包攝之實體，而聯合其間互有之形式關係。杜莫剛(De Morgan)之形式邏輯定義足徵是說。氏言曰：邏輯推理，惟於推測式之形構中求實在，故除注視前提實有之眞確結論外，對事實眞理，則無所用其心也。

(乙)至於實質邏輯，名義涕涵，有以普通邏輯(Logique générale)

名者。按其對象，以試驗所眞為用。而於精神推論法，則惟限取眞免僞之方式，其範圍超軼概念連累關係之外，對歸納假定與科學方法研究，皆本試驗價値，立搜討功夫。

旣知形式與實質定義異趣，則不能循此分畫以誤一貫之科學邏輯事實。「吾於此謹為申證之曰：邏輯為一切科學抽象形式原理之科學，其研覈在諸智慧眞理相維之律。果宇宙實在屬精神者，則邏輯所建之型式實在律必適所用；果實在屬物質者，則亦無逃科學自然律之肆應。故邏輯以學兼術，以型存實者也。邏輯本思想作思想律以定物象，本定律適用以分別眞僞，（屬思想方面者。）援精神，究眞理，握抽象理論科學，達證驗實際科學。依系統方法論，集科學作用，立安正之法則思想。」故有以心理學之思想律渾視邏輯方法者，根本陷於邏輯錯誤；以倫理規範之本務律概括邏輯範疇者，尤陷於不識思想認識之邏輯原理。此兩大謬戾，流於今之認識界者，倘數見不尠。如黑博(Ribot)有感情邏輯(logique des sentiments)，鮑爾文(Baldwin)有發生邏輯 (Genetic logic)，達爾德(Tarde)有社會邏輯(La logique sociale)；諸家用心雖只在建實質邏輯基磐，然無形墜入舊形式邏輯之病。此外有以認識論或現象論立邏輯新直覺義者如虎塞爾 (Hurssel) 輩，雖說出心理，又不宜渾前派一譚也。吾當別為析解。（參看第十三章附錄之虎氏邏輯研究。）

所謂邏輯比觀之定義，如此已極限其認識之功耶？是又不然。蓋眞正定義之深澈，猶有待數學邏輯派之新型式論。昔人對科學如何可能？如何探及眞理所在？又如何證科學眞理？之數問題，皆逕邏輯解答；而獨忽所恃之方法工具不足。據數學邏輯論者言，舊邏輯迺

無謂機械形構，於任何理性，惟恃概念演繹。且此演繹尤乏純正型式。充其能爲亦僅襲用通俗不當之語言，循環錯誤，重言枉斷，雖曰思想定律，徒具負正之價值評耳。果工具如斯之陋，方法又如是之貧，邏輯科學之用，早淹無聞問矣。處今日科學急進時代，宜直斷前非，澈改舊形，定邏輯爲理性抽象之形體，使其範圍涉各科學之自然而爲科學哲學中心。雷柯(Nicod)謂數學邏輯以自然哲學爲實用，以理性接物界，俾任何適合可能，晉接新可能界，此正導邏輯超因果時空極限，而入無窮新實在界與所謂微界物理之歸矣。數學邏輯之型式象徵，方法演算，去科學物質價值之戥秤功用，而爲原始觀念之探索，與標辭關係之分析；化數學於理性溥徧，正語言於象徵實在，誠理想眞在之型式科學也。

第二章　新型式論概述

甲　邏輯型式新趣

衡邏輯爲思想型式科學，此古今學者同稱；訂認識之型式意義，則又前後立說互異。　近半世秩，科學衍繹，浸浸發展；邏輯方法，匪盡陳言。　昔視連珠式爲演繹論，視演繹爲邏輯必然觀念之推論者，大都於近數十年科學思想與邏輯型式新創中，宜騰失敗。　原舊形式邏輯，對通俗語言，律例證判，頗稱適用；論其形類，尤以語言文法，析解最宜。如表詞性類與內包概念之量性研究，允爲翔實。　獨惜式繁用雜，法蔽義疏，泥科學之型遠，失種類之誼巍。　彼"主表"兩諧辭比，固未足昭關係眞誼；而分析一言兩相，猶強截連誼標辭。　若以構設表詞言判斷，則更難乎稱認識論矣。　是故襲種類觀念以釐語言形式或可，幟種類原理以定知識範疇則不可。　試觀現數學思想，與近物理研究，對空間量之習用解釋，幾無一應種類先後之型式者；其演繹型式之深賾精微，尤非舊邏輯所能掘發。　倘論方法之溥汎有爲，實超尋常而入無所不能之公型矣。　所謂數學邏輯，躍爲型式科學之科學者，緣出斯道也。　哲學家或以"性質"與"數量"各不相通之說反證此道，要亦昧於關係兩績，而忘數理近見之眞理焉。

夫力事舊型式邏輯改造者吾知有二：依純理性新義，創新型式科學之數學邏輯派，與本科學認識，棄絕對形式邏輯可能之科學邏輯派是也。　兩說於推理演繹論異，於標辭分析誼同；質言之，兩皆認概念邏輯，不足襲思想科學用；論主張則一持演繹宜純正數學原理化；一持演

繹宜擴爲實在認識說。各反所見之差，卽各創所思之路。要其本相，悉遵數理原則而爲之界限自定耳。

乙　數學邏輯思想

數學邏輯，始賴本尼支邏輯演算之記號發現；盛班洛(Peano)羅素數學原理之認識時代。賴氏認惟記號象徵，能表思想複念。邏輯演繹，必自直覺漸趨關係演算；思想型式，宜依理性嫥用記號配合。如代數分析，如幾何形類，事實理性，方程式樣。邏輯數學，原理相衔；思想科學，認識齊列。羅素有言曰："衞葉斯塔斯(Weierstrass)及其門徒，曾將數學算術化，——使分析論導入整數論，——……不知整數論實無自給之能，而尤以持有窮與無窮數相較爲最難。故必使算術尤其數之定義化而爲邏輯。所謂數學邏輯者，乃用法乎邏輯概念，使分析與算術演繹，盡如幾何之邏輯研究也"。斯說於數學思想爲新進改革，於邏輯形構爲革命創造，於整個科學爲立溥汎原理之方法認識。雖然瓦佛(Rolin Wavre)取純數學反證邏輯律之無關算術推演；邦加赫濮威與衞珥(Poincare, Brouwer et Weyle)襲經驗直覺以覆數學邏輯可證之理性存在。若吾人以新邏輯型式分析說辯之，則悉度越亞里士多德派概念思想，別立理智之溥徧原理與關係焉。且此原理，絕非彊置，統數學演繹，而尤無妨數學事實本義。故藉純數學批評者，其言行絕無損邏輯象徵之型式研究事也。

按數學邏輯，原有一部"邏輯型念學"(Idéographie logique)，後歷新創，統爲一說。夫型念學所論，迺標示象徵特幟，與言詞必臻改善諸說。彼舊形式論者，固不皆無徵號以代語言，然無不皆失語言習慣之便

佞性。 類詭辯家辭，旣蔽人以辭，自詘者復自限於辭；繁文綴法，徒衍無謂。 論思想不越字句交替，析辭義無非空投迎合。 絕未計直象觀念之認識，能脫語言廻謎與無謂俗累之過也。 昔法古第哈 (Couturat) 與意巴多瓦 (Podoa) 論邏輯代數學與型念學功用，力斥舊概念名字非眞。 吾人就世界言文字，尤無統釋之文法也；就國家定語言，難謀同通之字典也；就學術析字性，益可見無窮辭性之涵引無限也。 試思百科專書作，便佞之口能杜塞乎? 此無它，科學事備，而邏輯型念之徵信未立故耳。 夫象徵之型式，具直接觀念之表現。 而邏輯象徵，匪無語言隔閡，且爲擴大觀念與事實兩斷之眞。 或謂衍辭抽象，實不知演式昭爲具體。 舉名詞定義，亦各顯觀念之明晰與理智性。 總之或指邏輯義，或偏數學言，渾然總符，指焉深到。 去質量箧念，存型式通理；匯觀念，譯記號，如代數學者之對數量，幾何學者之用空間；忘獨縛語言之本性，入眞實普汎之自然。 此概念舊型不可之論，而今數學邏輯得獨尊之矣。

丙　概念評述

舊型式論者，往視邏輯原理，爲形上之元學研究；邏輯概念，爲元學之實體認識。 栢拉圖派及亞里士多德派邏輯結論，僉如是證。 按此派立說，在種類觀念之語言思想與實體個性關係間。「語言表思想，思想必觀念，觀念本實體，實體形種類而續個體。」 是故舊形式邏輯之本體論，尤主深進實在性之知，使精神連逮眞念，依實在闡揭眞理。 思想方法，矢概念判斷推理爲言，立名詞標辭推論爲用；由是任一標辭判斷，必張兩名詞概念之肯定與否定，所謂思想研求者，亦無外此兩概念間關

係認識耳；即擴而言之，以標辭集聚之推理認識爲法者，亦不過概念關係之重疊證明耳。概念生自精神，攝實在不變性而爲思想對象焉；或計外延，統以數量；或析內包，洽以性質。綜所論列，厥唯名唯實兩家言。或曰取個體與溥汎，爲概念之通釋焉願皆無不宜。今世新多馬派(Néo-Thomisme)移斯說以趨判斷論，故猶未脫實在性之元學理解。其蔽也蓋因概念分類之固封未啓；普徧、特殊、具體、抽象、集合、區分、相對、絕對諸念之極限不明；而尤昧數理科學原理對時空物質存在新倡之見也。夫概念形式，異自內包外延之關係，譬造房屋者之必以磚，而各屋宇之形狀則難必以同。惜乎概念論者忽磚之於屋與屋之有磚爲無定件。屋而無磚世有之矣，磚而非屋，世亦既有之矣；若內包外延之種類概念，豈足徵無定之思想於有定判斷耶？吾知無能也。故匪藉數理改造後，證之非是，即論思想律貫，亦早自破其範疇。若邏輯代數，端言標辭判斷，條皆思想活動，自然趨走，摹擬曲盡。羅素謂思想有效值，不因主詞，而在所言之形式。概念罔知獨立，必有標辭因變值(即函數值也。)爲之率，從而衍籌制勝，推及無窮之用焉。

然則概念之有效率將如何定之耶？曰概念迺數學因變式之不變率(Invariant fonctionel)。舊邏輯所示者，耑指定性，弗計變量。殊不知如言"人"之概念，必副它概念之"質量"函數。如謂人對動物生物等上屬之類爲函數不變，對中國人歐洲人等下從者亦爲不變之原函。此函數或因變之不變率表之如次：

動物$=f(a, b, c, \cdots\cdots)$式中 a b ……諸元表人，馬，……

人類$=f(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots)$式中$x_1 x_2$ …諸元表中國人，歐洲人，……

黃種$=f(y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots)$式中 $y_1 y_2 \cdots\cdots$諸元表漢族,蒙古族,……如此列式,概念內包性之不變態,咸用函數性定極,如因動物而有人之一元是也。且復示不變率中所從之次元同性率,如因人而有中國人歐洲人等分是也。夫內包既爲不變之函數矣,若外延,則亦緣定性而爲次冪之函數定量焉。質言之,量之不變率蓋因質約飭,其函數式表單複性或無定之多數性。(如單位,總和,多數,及許多等類是也。)是知內包外延,乃純一函數不變率也明矣。

主心理概念說者如此釋量,主科學不變性者則更謂量幾無一不定。如機械學之能力與運動諸概念,其函數率紐爲機械不變,而各元之概念性,亦極綱貫昭昭。惟是科學意義之關係在數,其不變之率乃量而非質。近年相對論之物理學所創時間空間各關係方程式論固顯質之要,無如綜成關係之量仍縣居中心,此又新邏輯改造宜稱之一證也。

定概念爲不變之函數,則必斷其內包外延屬一質量關係之主從性。然由前證壒知屬於絕對"質性元"者無關科學語言,則宜直譯概念爲數學語言之"類別"或"類分" (Classe)。(類分者,即有定物類之集羣也,此羣之各分,包一般與多少或唯一之公性。)以類分釋概念,如依數定量。數有單、複、和、三律,概念則有個位、類分、關係、三率。複具單與和之用,類分連個位與關係之誼。無複位則弗稱數,無類分則罔知概念之實。故欲知概念函數不變之因,宜述個位類分與關係之三率。

1.個位者何? 曰種類概念中之最小級次元也。旣無邏輯區分性,亦無溥汎概念在,謂不變率之中心或邏輯因變之本始可也。如謂:"一車載一石";"杜甫爲一大詩家"。

2.類分者何? 曰個位有限或無限公性之集羣也。 謂不變率之公性集合或同類不變之羣亦可也。 如云:"車皆載物";"杜甫詩今無能者"。

3.關係者何? 曰連誼之判斷也。 連一元不變率於各個位或各類分以示關係之標辭性也。 如云:"中國雖大而小全世界之和";"曹植爲曹操之子"。

前述三率,各有一不同性,卽各顯一關係是。 貫三率關係之各有性,在個位者曰"屬聯性" (Appartenance),在類分者曰"同聯性" (Inclusion),在關係者曰關係或名"連誼性" (Relation)。 各性之義,簡如次解。

a.屬聯性,表個位一元,屬於類分之關係。 型式演算者以徵號"ε"識之;如謂 x 屬聯於類分 a ,則書爲:"xεa"讀曰 x 屬聯 a 。

b.同聯性,表類分與類分間之關係。 如類之於種屬也。 以徵號"⊃"識之;如謂類分之人同聯於類分之死。 書爲:"cl. 人⊃cl. 死" 式中"cl."表類分之簡號,或書爲"a⊃b"亦可。 讀曰 a 同聯 b 。

c.連誼性,表個位或類分之唯一連絡,卽各個位或類分間之單純關係也。 以徵號 R 或 X 之類識之;如謂 x 爲 y 之兄弟,書之爲:"xRy"讀曰 x 關係 y 。

準前三性之連韻接合,形成類分演算之各式規律。 如屬聯之關係爲"非聯轉性" (Intransitive),同聯者爲"聯轉性" (Transitive);其式列如:

北平人⊃河北人, 河北人⊃中國人; ∴北平人⊃中國人。

至於屬聯性之：

劉伶 ε 竹林賢士也， 竹林賢士 ε 七人；

劉伶爲竹林賢士之一，竹林賢士爲數共七人，然不能抽繹爲：

∴ 劉伶 ε 七人也。

此固舊概念論者所熟知，然非概念名詞之所得分。 以 ε 連三名詞，與尋常具存在性之"是"燗異。 式中第二名詞之爲類分，乃因第一而有；再轉而因第三詞更變爲個位矣。 且第三名詞非簡單類分，實類分之類分也。 故第一名詞絕不爲第三名詞之一個位，其理彰彰。 總之非聯轉性之"中詞"時而爲個位又時而爲類分；若以概念名詞辨之，終不免失諸機械錯誤。 蓋因語言名字，未能直表觀念；判斷以形式出，錯誤亦襲形式見。 惟數學邏輯者，藉演算徵號之確著，庶乎直革斯蔽。 其先決卽以 p q r 之類示標辭；x y z 之類示個位；a b c 之類表類分；R X Y 之類表關係，一經列式，了無形式渾涵之誤。

依"聯性"(卽屬聯與同聯。)論標辭，邏輯原理遂成絕對新創，所謂概念認識，浸爲關係之同聯分析矣。 夫舊概念標辭，篋於主格存在之某屬性肯定，實則此存在決非形上之實在性。 謂"甲存在"者，庫示甲類至少有一元在； 此一元乃類分中同聯表現之一關係主格也。 卽整個邏輯，亦一關係連誼之科學耳。 標辭也者，無異連誼中之特殊型式耳。吾人設以同聯關係主格，表舊標辭全稱特稱之肯定與否定四形，卽瞭然以證。 如：

A.(凡 s 爲 p)表 x 全値爲：x 爲一 s，同聯於 x 爲 p；

E.(無 s 爲 p)表 x 全値爲：x 爲一 s，同聯於 x 非一 p；

I.(有 s 爲 p)表 x 至少有一値爲: x 爲一 s 與 x 爲一 p 兩皆眞;

O.(有 s 非 p)表 x 至少有一値爲: x 爲一 s 與 x 非一 p 兩皆眞.

此之謂以類分同聯性表關係連誼之主格判斷;從而知概念類分發出之主表兩格無關眞僞矣。質言之,邏輯固不在心理直覺概念,而在標辭所示之名詞概念的"可能"問題。吾人求知之對象,悉視關係性質之條件研究。彼概念實在與否,自有其肯斷與否之關係在,此關係絕非概念直設,其或繫或雜之誼,概循標辭主從之是。如"p ⊃ q"之一式,既不嫥前提判斷,亦弗託結論肯定,實只一同聯之"連累性"耳。此連累性衍繹,以"邏輯常式"(Constants logique)爲序列,故逸乎概念實在論者之思想方法矣。

且也,昔學院派之概念實在,不解於類分實在而尤不釋"無有"之類分。夫類分必有其元之是,謂之無有,安知類分?此又非按倍乘與增益之關係量所可述也。或曰量性之誼,不皆通於概念之本者亦在此。然則數學邏輯不此之解耶?曰非也。概念眞義,不臧於列數函數,其所攝元素之數量範圍,亦非其定義之本質。論理言之,概念惟通所是之情境眞否,其本性廑能肯定或否定之。倍乘增益,即"會聚""離衍"(Conjonctement, disjonctive)之斷,非眞若數學乘法加法意指也。羅素派力張型念邏輯,使數學與邏輯相用更連逮於無窮可能者,正豁然貫乎斯道。是故視邏輯爲純正思想律之規範科學者,其說亦大通於各派正誼之辭,而數學邏輯家當亦弗能行遠而不自邇也。

第二篇　邏輯演算原理

吾人旣知概念類分之評述矣，今宜揭數學邏輯家所取演算形式，以立新邏輯之重要事實。　緣舊邏輯之演繹推理，無眞理探討之工具，無形式索觀之圖引。　舉樣式繫辭，廑於前提關係中，攫有效形式結論；變關係連誼，惟就判斷轉換間，獲無謂重複意義。　一言以蔽之曰：移前提代結論，立名詞判斷之"位置更替法"耳。　故謂舊演繹邏輯爲一交替原理，而此交替互用之基本事件，惟恃結論與前提之形構也。　二千年來，所謂理性原則，精華在是。　按前提與結論兩聯，義盡標辭一揆；而衍繹與證明相得，理越概念形式。　故欲知推理原則眞實否，宜與標辭命題事實研覈。　蓋標辭必因之事實，乃判斷所有之根據；判斷肯定與否者事實，抽象推理可能者亦事實。　今若擴而論之，謂凡標辭肯斷與否稱，皆爲事實之知，則尤屬稱衡之說。

邏輯家析眞假爲判斷之値，單複爲判斷之量，正負爲判斷之性。此雖種類正名，實不外標辭事實之塙定耳。　事實於標辭，不限量亦不定質，或單稱辭有定，或主表格無定，兩具可能。　如次述二說，將略示梗概。

a. 主格有定，表格無定抑無限者，其式概括之爲"無論表格如何皆能適甲與乙之事實"。　如云"孔子具有聖人之德"。　此聖德兩詞皆無定一，其義蓋謂：孔子稱德之事實，與老子釋迦蘇格拉第悉有同性"。

此事實之德，含多數"從變"之函數意義，在舊邏輯忽視而在數學邏輯則爲極關重要之搜討。

b.主格無定，廑一表格或多數爲有定者，其式概括之爲"凡運動有能力"，"有哲學家稱詩人"；若以事實言之，則爲"事實有一甲運動則必此甲有能力之事實"，"事實對任何甲爲哲學家，則能有稱詩人之可能事實。"

誠然者邏輯事實所示，非物理化學或其它自然科學所同。一石一木，異象同恉，礦植之分雖有，而眞理實在之性離殊。故所求事實純爲："果有甲之此一表格，則亦有它一表格在"。此之謂事實眞理，數學邏輯家析辭演算，類分連誼，其證驗咸爲事實證明之構造，與夫居此構造間眞理活動之認識耳。

夫曰新型式邏輯，旣如斯其重標辭構造，然則標辭構造之種類爲何如耶？各構造之眞理或邏輯定律又爲何屬耶？所謂標辭演算，其方法意義抑又何若耶？是不可以不釋。

命題

第三章　標辭演算論

甲　概論標辭及其基本原理

標辭何謂耶？論者極盛。有定語言判斷之說，有主能知眞僞之辭，亦有稱凡推理前提與結論皆屬之者。按此悉未足明標辭變性之實指。惟數學邏輯家分之最詳，析其自然之性亦最精。吾人未述此類剖析之辭義前，暫抽其大者而爲之定義曰：標辭者，事實眞僞肯定與否之語言說辭也。其結構必具兩大元素：一曰思想智慧有法之"命辭"(Énonciation)；一曰意識有法取得之"承諾"(Prise de position)。如"以今日言之昨夜稱今昔"；又如"年光除日又元日，心事今吾非故吾"；皆稱標辭也。論其組織，顯示今日後於今昔，元日次於除日，今吾異於故吾；且各辭之精神意識的承諾，亦極朗然。夫標辭必待承諾，乃極關重要之首件，邏輯家謂精神取得命辭，豫設態度有三：疑而無斷，諾而肯定，及拒而否定是也。睽疑無利於邏輯辭，即無與於推理同也。惟承諾，作肯定辭斷；拒斥，有否定語結也。定標辭爲肯定與否之說詞者正據是理。

標辭單稱肯定，必屬已知事實，在試驗證明，亦無抽象概括或方式變異。論肯斷範圍，或亦多形複雜，然立意有條，非理無能羼入，如云："某也賢"，"此之謂無愁天子"，"彼一人也"，"此一物也"。若無邏輯畸形事實，則凡視概括肯定之辭，必皆稱特殊合理之斷。蓋因單稱主格，無分表詞義蘊，肯斷或否認爲有存在耶，抑有關係耶，抑又分割耶；一言旣決，了無餘意；直於空間範圍，時間久暫，各取其一，無所用其

推演。

然而微而顯者文見於此，而取義在彼。單稱肯定，顯標辭之易直，而由此結構因生之否定或負定辭，(Négation) 連接或聯立辭 (Conjonction)，選言或離衍辭 (Disjonction)；則趨重繁複，具演算之關係，賊未知之奥衍，非若單稱事實比也。蓋標辭之邏輯價值，必自此類判斷既定關係之後見之，而推理之演算可能，亦必自此類關係既經結構之後知之。

數學邏輯家於辭之研究，必表"否定"以揭首要。其故因無負斯無以證正之有；無無，亦無以濟有之知。故曰負辭爲標辭關係構造之始。原演算之義，於標辭惟限索"眞僞"兩鍵；如負辭弗見，演算之值惡在耶？負辭揭僞性特徵，定連累 (Implication) 紬繹。如謂"中人者不賢不愚，不可語上亦不可語下者也"。除中之一詞外，無限形容，皆中人之僞性或負辭。又如謂"八卦列數，非一非二，非五非六，非任何它數也"。(惟八爲眞) 是負辭之僞性無限，而眞則限一；此惟一之眞，有無限僞性連累持綴；而無限之僞，則又惟逮一元可眞之能。是故欲知標辭構造實在，宜辨價值眞僞性質；欲求眞理邏輯認識，必申眞僞連累關係也。

眞僞之標辭果有定乎？曰未也。藉曰有之，將惟限於"邏輯實在"與標辭之連累可能耳。謂"人爲鵬"，"孟嘗君爲鷄鳴狗盜之徒"。主此類標辭眞者，爲自覺其邏輯實在之滿足，故徵其名以名人，象其聲與行以稱人。反之，主此類標辭僞者，則必謂標辭有實在性罔適實在，人與鵬與鷄犬各不相涉，以鵬自號者非鵬，稱鷄鳴狗盜行者非鷄狗，眞僞之去遠矣，豈足定是非耶？何云邏輯實在與標辭連累能別眞僞之

分？此屬眞理問題，容"形上"之元學解諸可也。夫宇宙本一邏輯實在，現象統爲邏輯認識；曰自然，曰物理，有其存在之實有事實，成其事實之"眞標辭"；亦有其虛無之假定事實，構其事實之"僞標辭"。僞者連於眞而累及所有，眞者則往往反爲僞所累焉。此解既創，眞僞之關係通釋無間矣。

乙　標辭連累性

既知眞僞之關係，宜再益標辭連累之說以明之。如有一標辭 p 表任何一事實，更有一 q 表任何它一事實；即斯二者，必眞僞互見。其結果襲連累關係，證明僞者絕非了無所謂，且有無僞不成眞之事實在焉。蓋僞辭所是，僉實在之假借故耳。如言"人爲牛馬"之一辭，各元素皆具事實；非然者，則標辭無法立也。僞辭屬思想所知者，眞僞事實，則因連累而及。曰："人爲牛馬"，p 也；連於"人爲脊椎動物哺乳類"，q 也。p 之僞稱實在，而 q 之眞爲事實。果 q 爲眞也，則連累於 p 之事反而亦成眞矣。蓋牛馬爲脊椎動物哺乳類，亦事實兩同者也。若以牛馬爲四足獸，人爲兩手類之觀念衡之，則僞辭之連累固仍僞，而眞之連累反躋於僞也。因吾人精神觀念，不能有人爲四足獸之比證。明乎此，斯僞之連累無分乎眞假，而眞者反累於僞之事實，匪用說而明辨之矣。由是知僞爲眞之負辭，與夫既知其僞而爲眞之誼，(如言人爲牛馬乃一眞僞辭也。)尤無待證也。(參閱拙著邏輯與數學邏輯論論眞僞之演算。)

邏輯家論演繹問題時，往往以概念之類分性或判斷之標辭性考之，羅素懷提海則不然。蓋演繹實非類分性所表，即就類分理論言，或理論間標辭之推證言，必有超標辭理論而上之原理爲之先引，然後得由此

紬彼,或類甲推乙。 故曰演繹匪類分亦匪標辭之理論,若謂爲方法論或由一標辭得演證它一標辭之方法也則宜。 明言之,演繹者求知一標辭爲它一標辭之結果之關係研究者也。 此關係爲何? 曰"連累性"。

彼連累性之關係,原定爲"p 連累 q"之形。 數學邏輯論者,認是類關係,非眞不可限之觀念,其義實同攝若干原始觀念而有。 質言之,演繹論之組織顧在連累性,其間包攝乃有下列六原始觀念存在。

1. 初級標辭(Proposition élémentaire),如云"此是紅的";(注意,後邊邏輯演算中,將見標辭不在特稱形式之是而在眞或僞之"眞理價值"者。)

2. 初級標辭因變觀念 (Fonction propositionnelle élémentaire),即一辭句攝一變値,如以變値易定値或定名時,則此辭表一初級標辭;

3. 肯斷觀念(Idée d'assertion),象徵記號爲"⊢",用以分劃肯定標辭與簡用標辭之差,如定言判斷之"p 爲眞"列爲"⊢ p";其義烱異假言判斷"p 連累 q"之"⊢ p·⊃·q"。 蓋此連累之肯定,旣非 p 亦非 q,惟有 q 爲 p 之結論一義而已;

4. 一標辭因變之肯斷觀念 (Assertion d'une fonction propositionnelle),如 ⊢ x;表明一因變兩可値之肯定,如齊一律甲爲甲,此甲乃無定者;

5. 負定觀念 (Idée de négation),表明 p 爲僞,如" – p";

6. 選言 Idée de disjonction)或邏輯和之"p·⌣·q"或 p 眞或 q 眞,兩者只取其一而不能兼。

綜此六初級觀念,形演繹初級理論,合之得定連累性爲:

$$p \supset q \cdot = \cdot -p \smile q. \quad Df$$

式義謂由定義知“p連累q”者“或p僞或q眞”。欲知此定義造作之原，須知羅素述連累關係所示基本性質之“凡由眞標辭所連累者爲眞”之說。旣有此眞者連累眞，而僞者所連累爲何尙不知焉。故欲定p連累q之正義，必須否認q之僞與p之眞爲同時可能，從而易位，斷曰“或p僞或q眞”。若申其誼之可能而言，得析下列諸解：

或p僞，不然，或q眞；

如p不僞則q眞；

p肯定之事實非有q肯定者不爲功；

如p眞q眞；如p僞q僞；

如p不能眞而q僞。

按所云p連累q，實非謂q之必衍自p，此乃就事實可能者言，數學邏輯家悉據此可能，推獲關係之同聯四型。如：

1. p眞連及q眞；　2. p眞連及q僞；

3. p僞連及q眞；　4. p僞連及q僞。

若以象徵之1與0表眞僞二値，更可表如次之關係：

$1 \supset 1$；　$1 \supset 0$；　$0 \supset 1$；　$0 \supset 0$。

若以語言事實例證之，各關係幾達無限可能式。玆舉一二如下：

曰：“牛馬皆非人類”而與“孟荀悉爲儒家”皆眞也；

曰：“三角爲圓形”僞也，而“孟荀悉爲儒家”仍爲眞在；

曰：“牛馬皆非人類”眞也，而“白狗黑也”仍僞；

曰：“三角爲圓形”僞也而“白狗黑也”亦同稱僞也。

按此例純本諸事實比證，闡示非直接關係之演繹類推。然以p與q之標辭連累說出之，各辭分立者，猶未始卽一無同聯之棣達也。試以"牛馬爲人類"之僞辭轉而爲眞者觀之，則"孟荀爲儒家"之眞辭連累而爲牛馬（孟荀）乃動物之又一派（儒家）；"三角爲圓形"之僞若亦轉而爲眞，則連累於孟荀與儒家，白狗與黑色之q標辭均無所定也。蓋是辭若立，則世界不遏大謬不然之理，必入不可知之新生物界。是故連累之標辭，直衍者固爲關係所在，異實者亦無在而非關係之連誼也。數學邏輯家原視此類觀念爲認識之原始意念，因其與舊邏輯所謂齊一原理矛盾原理及排中原理諸說相埒。又如第二式之"p眞累及q僞"一聯，就前眞僞關係之定義考之，絕不能立，因眞者只能逮眞。若所眞之p有僞，而所有之q，則不必因之以入於僞。如謂"人行則動"之眞，而"運動永存"亦眞。前者之動必在人行，但人不行時，運動亦不能無。故眞僞屬相對兩實；換言之，至少須有其連累辭之一或正或負者在。如p爲僞，則連累q眞抑q僞皆可。故第三第四式之連累無不可也。蓋p如屬僞，則眞理爲交互兩能，且不及推證q之是非，故必p眞始有連累之證。再如q眞（例第三式）則交互兩能之變無用，因q旣稱眞，事實無須推證也。簡言之四型連累，理論可能，惟第二者不容於定義，故只第一式爲有用之推證式也。

準眞僞與連累諸說，齊一原理之"p連累p"爲可證之事。蓋p連累p之意爲"除非p僞，否則p眞"，卽"p之眞僞不能同時"。

邏輯家謂兩標辭或多數者之肯定，至少有一爲眞在者。其式洽與算術加法之義蘊同，故名"邏輯和"（La somme logique）；表爲；

$$p \smile q \text{ 或 } p+q$$

讀曰"p 標辭或 q 標辭眞"(按加號之假借爲或字。)原式兩俱眞者亦可,反之若兩僞則不可。依齊一律衡之,知"p 與 q 兩僞者僞"。如云"黃金滿屋,富貴之象也","一窮如洗貧賤之象也"。二者不可得而兼僞,然得而俱眞。蓋因和之算術意義,異實者無加而亦無和之有,兩加者須有其各眞之項斯得總和之實。例以多數標辭言"有脊椎者爲動物,無脊椎者亦爲動物,故動物有爲脊椎者有爲無脊椎者"。以 x 代動物,a 代脊椎者,b 代無脊椎者,得式如:

$$(x\varepsilon a)(x\varepsilon b)=x\varepsilon(a\smile b)$$

邏輯家復謂兩標辭或多數者之肯斷有"同時"皆可者,其式洽如算術乘法義合,故名"邏輯積"(La produit loqigue);表爲:

$$p \frown q \text{ 或 } p\times q \text{ 或簡書爲 } p\cdot q \text{ 或 } pq.$$

讀曰"p 標辭與 q 標辭俱眞"。(按乘號之假借爲與字。)如云"犬守夜","犬家畜也"。積之爲"犬守夜之家畜也"。其理與算術之"九九相乘等八十一,四十比八等五"之義相通。此之同時肯斷,正別於前理之選言分解。蓋積之義如一乘項爲零(卽僞是也。)則全積之因數無有也。故必有"同時"始證。非若和之項,雖有一居零,而所餘之實仍眞者比也。例以多數標辭列式言"李白唐人也,李白詩人也,故李白乃唐詩人也",以 x 代李白,a 代唐人,b 代詩人,則得下式:

$$(x\varepsilon a)(x\varepsilon b)=x\varepsilon(ab)。$$

然則兩標辭之同義者抑又何說焉? 曰惟相等式 (l'égalité) 之可釋也。如有同義語言文字,相助爲理,義形諧暢時,卽有口頭詞差,實則仍等。

如"割鷄焉用牛刀","小題無庸大做";"蘇洵爲蘇軾之父","蘇軾乃蘇洵之子";徵號表爲:

$$p=q$$

其特性之含義有如:

$$p=q \text{ 或 } (p=q)=(q=p).$$

一標辭相當於本身,即兩相等標辭皆等。更可依兩連累式之邏輯積表明之,如:

$$(p=q)=(p\supset q)(q\supset p).$$

旣知相等之邏輯肯定無關標辭本義之齊一性,則同理之否定相當式,亦易檢證矣。按否定之徵號以負 p 記之,如:

$$-p=-q.$$

否認 p 與否認 q 乃同一否認也。從此復益肯定之相當辭,別生兩相等之同聯式:

$$(p=q)=(-p=-q).$$

同辭肯定之同一肯定等於其否定之同一否定。此式若以連累式列之,則變爲換位法矣。再者因否定之可能,矛盾原理亦遂本邏輯積而得證:

$$p(-p)=0.$$

p 與非 p 不能同時眞;排中之理迺更因邏輯和而得證,如:

$$p\smile(-p)=1$$

或 p 眞或非 p 眞,無不當也。由是知舊思想三律,除齊一律須無負辭之連累外,餘皆以負辭之積與和爲用。若依連累證明之基本意義言,

斯三律實有未足。 其故因各律悉未盡演繹之能。 邏輯家欲補此憾，遂創三段律與演繹律之用。 三段律者證明三單稱標辭同時連累有限個體事實之結論式也。 其型如：

$$(p\supset q)(q\supset r)\supset(p\supset r)$$

此 p q r 爲單稱，所連累之事實必爲個體有限者。 如云："地面樓房高於平房，平房高於地穴；故樓房高於地穴"。 否則以標辭爲連累之結論，或全稱抑單稱，皆不免蹈入錯誤。 舊三段論式之蔽，卽不識此之有辨也。 吾人前章述概念評述之聯性時已詳見之，玆不再論。 演繹律乃反證前提事實之原理，合三段律求結論之方，通稱推理之完全法。

數學邏輯演算，純在原始標辭之假定；演繹證明，光屬基本定義之組織。(或云連累關係。) 是故定律發現，在象徵原理，實最繁且重。 如因加乘之關係性，引申左列各律，皆前證之用也。

曰序換律(Loi commutative)列式如：

$$pq=qp,\quad p\smile q=q\smile p.$$

曰聯項律 (Loi associative) 列式如：

$$(pq)r=p(qr),\quad (p\smile q)\smile r=p\smile(q\smile r).$$

曰配分律 (Loi distributive) 列式如：

$$(p\smile q)r=pr\smile qr,\quad pq\smile r=(p\smile r)(q\smile r).$$

曰重複律(Loi tautologie) 列式如：

$$pp=p\qquad p\smile p=p.$$

以上四律，爰表加乘二法之邏輯二元性。 因重複律之發現，使邏輯演算，忘係數與方次之代數演算，申而有下式之各律焉。

曰單定律 (Loi simplificative) 列式如：

$$pq \supset p, \quad p \supset p \smile q.$$

曰集綴律 (Loi d'absorption) 列式如：

$$p \smile pq = p, \quad p(p \smile q) = p.$$

曰雙置律 (Los d'importation) 列式如：

$$p \supset (q \supset r) \supset pq \supset r.$$

曰單置律 (Loi d'exportation) 列式如：

$$(pq \supset r) \supset p \supset (q \supset r).$$

曰配合律(Loi de composition)列式如：

$$(p \supset q)(p \supset r) \supset (p \supset qr), \quad (p \supset r)(q \supset r) \supset (p \smile q) \supset r.$$

前列各律除雙置與單置兩律爲由肯斷原理而出者，不適概念類分演算外，餘皆對類分與標辭同時可能，合謂之邏輯構造原理。　吾人試本諸律以紬繹之，則昔之形式推測與複合三段式，幾無不稱各演算律之引申證明。　此類演算引申，早成數學邏輯通俗例證，此處不再重贅。

吾今更進而檢論單稱標辭問題。　按前證各律，不外負定辭聯立辭離衍辭(選言)三大配合。　演算者果以之推諸人間事實，勢將衍及無限可能。　此顧理性觀念之常，要在吾人有知斷卽斷之經濟認識耳。　或謂標辭構造無限，其型構認識，亦將有無限重要之方乎？　果爾，則標辭演算，幾於無能，抑惡用此演繹法爲耶？　問題壁壘如是，而事實則又有說焉。　彼無窮可能之構造，事實僅在三辭配合。　且構造所具之法雖繁，事實仍不外"連累性"與"不二性"或"不容性" (incompatibilité) 之主要存在。　若以各辭之因變或連涵性論之，則各律或原理之連涵可能，

惟立負正二辭之一眞僞肯定"値"耳。 玆更就"値"之函數性重申其理於后。

(甲)負定辭之主率 (Argument) 爲"非 p"者,如言"非人"。 其因變或連涵之眞僞値爲非 p 者乃 p 之反,如關係之:

負辭爲 p 之函數肯定或否定之眞者,必 p 之辭稱僞始立;如云"牛與馬是人",或"牛與馬非動物"。 負辭爲 p 之僞者,必 p 之肯定或否定稱眞;如云"牛與馬非人",或"牛與馬無非動物"。

(乙)聯立辭之主率爲"p 與 q",其合法"正値",祇在 p 與 q 兩皆眞時始眞。 若二者皆稱僞或有一爲僞者,則其合法"正値"爲僞。如因"人"而言"此兩手動物也"與"此反芻動物也"。

(丙)離衍辭之主率爲"p 或 q",其因變之正値必 p 或 q 眞時爲眞;若 p 與 q 兩僞,則正値必歸僞矣。 如云"孔子與少正卯皆魯之聞人也;孔子誅少正卯"。

(丁)不二性或不兩立辭之主率爲"p 與 q 不能合而爲眞"。 此卽聯立辭之負定辭,亦卽非 p 或非 q 式否定之分辭也。 其函數正値之眞者,必曰"p 或 q 爲僞";否則反是矣。 質言之,必以僞爲其正値也。 如史記"孟軻乃述唐虞三代之德,……與萬章之徒序詩書,述仲尼之意,作孟子七篇"。 韓愈云"軻之書非自著"。

(戊)連累性,其型如"除非 p 僞,或者 q 眞,"列式如:

$$p\supset q=-p\smile q=-p(-q)=-p\supset -q$$

其說已見前述,可不重贅。玆略舉例言:如云"x 是一魚"連累"x 是脊椎動物"其義實爲:"x 不是一魚"或者"x 是一脊椎動物"。

按此五大標辭因變之基本型式，爲眞僞連涵之主要觀點。然各辭性所具眞理，非眞獨立不相能者。若舉一爲主，則餘者必爲互聯互證之事實。故數學邏輯家(如羅素與懷提海。)竟約爲負定辭與離衍辭兩類；將連累性釐爲“非 p 或 q”。不二性則以“非 p 或非 q”表之，至聯立辭則直視爲不二性之負辭。雪佛(Sheffer)曾論五大原始觀念，謂實祇一範而已。雷柯(Nicod)復進而謂原始標辭於演繹論中稱型式者惟有一原理，稱非型式者亦不過二耳。此一原理有以不二性爲證者，亦有以“p 與 q 皆僞”之連繫僞辭(Fausseté connexe)爲證者。——例如(Wittgenstein)之說——設有任取其一以備演算，則必對其它四連涵因變皆爲可證。是邏輯律之必然如此，顧非必俟原始標辭多設，而後有演繹推論可能，要亦直接明白之邏輯事實有以墙定之耳。如 p q 之相等式，除認兩標辭有正或負者各稱其相當外，自有連帶否認其有“正與負”或“負與正”之能稱其相當之權。此相當之誼雖衍爲四辭，實厪一式之相似或然。彼此眞僞事實，相間幾希，然而邏輯家必探此幾希之正值與眞理。彼心理學者對感覺事實個體意義之爭，惟知甲乙或上下之記號，而忘邏輯家加乘負辭，與夫連累相等，諸象徵之正值，誠不知眞理價值也。栢拉圖曾謂思維與判斷無必重於意象是非；其要在對相當者，明晰者，序列者，及諸比較者之實行認識時，有思想肯斷之眞知。果知此之有別，庶知邏輯與心理事實之有辨也。心理認識活動，决無逃主觀性之時空極限。若邏輯律之方法演算，了無物我內外之主從限制，而入於事實之客觀認識矣。(客觀一詞吾用以釋主客爲一，既有主復有客，既非主亦非客之事實眞値標辭，即以客觀事實爲主而亦有心之知在也。)

第四章　標辭因變論

"因變"爲數學之函數性。　按所謂函數者，通常言之，爲一對多之義。　如 y 爲 x 之函數式：

$$y = ax^2 + bx.$$

若 x 値定，則 y 亦得相當之値；x 爲主變，y 爲因變。　此言變之有定者也。　但二者究孰主孰因，誠無一定固守，彼函數之名亦稱"因變數"者，厥故在是。　如火車所行"路程"，在一定"速率"時，則爲其所歷時間之函數；反之，若問火車經過之"時間"，則時間又變而爲所歷"路程"之函數。　是 x 轉爲 y 之函數矣。　如此主從，斯謂因變。　數學邏輯家移以用之，名曰"兩可性"(Ambiquïté)，或稱"待然性"(Eventualité)。　如齊一原理之"甲爲甲"，在心理判斷者極稱明確，然事實果誰如此判斷？彼孔子爲孔子，人爲人之辭，不惟無見稱於知者，且亦不得稱之謂知，然而謂判斷所在之範圍無逃齊一律者，其義又奚如耶？　曰此標辭因變之兩可性臧之故耳。　思想原無定物，有之者羌若"甲爲甲"之未定因變値也。　待然之眞在，則連涵因變之構造繁衍無窮，而標辭判斷之値，遂亦載生無限矣。　是故思想之動也動於無所是而無所不是；標辭之稱也稱於無所定而無所不定。　當吾人述"甲之性質，而此甲無定也"。　若以徽號示之，書如"φx"，φ 表屬性，x 表無定件。　是明示表詞性有値(甲)而又曰無定値之有也。　曰示表詞性之有値，卽謂甲之屬性，有指陳各類如子丑寅……諸屬性之待然性也。　此子丑寅……之各屬性，卽甲之因變性質所有値。　質言之，甲之屬性乃表子丑寅……諸件之一，

此一非定件而爲未然之定也。 若期甲之屬性定，(按所謂定卽指兩義之在。)必子丑寅……諸件皆定而後有義。 故曰因變或函數無限者，實其值之所示皆未曾有限也。 果爾，則知因變式無能藉其值之若干件以豫計因變數也。 誠如是言，則凡因變性無定者，卽視爲有定因變之待然性所陳之件，亦將底於無謂。 彼因變值能依同一函數以豫立之，而所謂因變，則不能以同一因變值先爲假定。 一因變之值無庸假設函數形式，如云"孔子爲儒家之祖"，標辭塙立，無待證其爲函數式之"甲爲儒家之祖"；明乎此，斯瞭然因變式亦能反視而爲無用個別與分值之知也。 此一關奧之義，若有不釋，前因變或函數云云，萬難逮其眞解。 蓋一因變數值之眞僞必居無窮，而吾人亦必有不析不瞭之自變可能。 個體因變之分值，乃事實之不可計者也。 所計者非已知個體與外延之值，而爲各值裏含之總體，由是概言以定曰：某某爲因變之一值或否也。

事有必辨者，厥爲因變本身異於函數式之具一無定值也。 因變本身所持爲待然之兩義性，而因變之具一無定值者，則爲此待然性之所表陳者也。 以徵號別之；如：

φx 表因變之無定值；

$\varphi\hat{x}$ 表因變之本身。

由是"φx 爲一標辭"，而"$\varphi\hat{x}$ 爲一標辭之因變"矣。 謂"φx 爲一標辭"，其說雖未肯定 x 之值居於何有，然已昭示其可能值之幾於眞也。 故無論因變何值，皆爲是類待然之兩可。 謂"$\varphi\hat{x}$ 爲一因變"，則無此待然疑性之肯斷，而惟表其待有各值之一義耳。 從是知一因變之值，若無語言名詞定項，其可知性，將祇限此因變式之有爲也。

準是推也，宜知一因變 $\varphi\hat{x}$ 統有之値，必皆如 φx 之所有標辭。而 φx 標辭之 x 如塵一値，則無 $\varphi\hat{x}$ 意義之有也。按此謂因變本身無定，因變値亦不能悉定。如 x 表所示之定値，φx 之標辭因變爲一標辭。就因變本身言，則爲所示之兩義性質；故因變不能於各値所限之中預爲設辭。從此足證對 $\varphi\hat{x}$ 之統有値間，無能塵知其一也。蓋 $\varphi\hat{x}$ 專指因變，而 φx 則爲其統有値之某一故也。象徵言之，

$$\varphi(\varphi\hat{x}),$$

列式爲無義，換言之，不能表標辭之謂也。因變之本身爲因變，無以因變式爲"人"或"樹"之理，謂：$\varphi(\varphi\hat{x})$ 爲眞理認識之一重要原理可也，然此說抑更有解。因變本身云者，迺標辭各性無屬時之所有事實集合；旣非指一事，則必有"有"一値而亦有"無"一値者，質言之，$\varphi\hat{x}$ 可有一値爲"x 主率之可能値"，卽 $\varphi\hat{x}$ 之値"有一 x 主率之意義"。夫 $\varphi\hat{x}$ 有其主率之能合者，亦有其不能合者，能合者眞，不能者僞。故不得謂因變式之"x 乃一人"爲一人爲眞；果認其爲人，則無論眞與否，其辭必皆僞也。所僞者僞其忽主率意義之因變式以爲一事之本値也。(反之若以"x"爲"x 爲一人"卽主率無定而標辭因變爲眞，亦僞。)

設有因變式爲：

$$f(\hat{\varphi})$$

其主率：$\varphi(\hat{z})$ 之値爲

$$f(\varphi\hat{z})$$

式中 f 爲因變。若欲求：

$$f(f\hat{\varphi})$$

之眞抑僞，則有矛盾之兩可性在。如始而言其眞，則定義之

$$\varphi(\varphi\hat{x})$$

爲無義之說必徵其僞；如繼而言其僞，則因變定義轉爲"僞其爲僞"或"乃僞 $f(f\hat{\varphi})$ 之爲僞"；是又證 $f(f\hat{\varphi})$ 之爲眞矣。如曰"吾言謊也"爲僞，則"吾謂吾言謊也"爲眞。由此遞衍，遂入矛盾之連環。昔艾比墨立(Epiménide)之名辯，近數學羣集論之難題，皆因此叢錯引申。羅素之邏輯級型論 (Théorie des types logiques) 解曰："因變所引之屬性，不能爲其所定者之因變主宰"。故論者若以 $\varphi(\varphi\hat{x})$ 爲無義，則矛盾屬階盡失之矣。

按前各說若以習語證之，益見其瞭然之意義焉。夫事物之屬性與標辭，各具多元性之肆應與相適，且彼此皆臧可能之關係。故吾人研究，必求證此屬性之屬性或類分之類分，而入數之羣集論也。所謂不可解之超窮(Transfini) 原理，卽因以發端。今欲去其凡具同羣相適之各異屬性之難解，勢須分述"物體""性質""關係"諸差德，析用"個體""標辭""因變""因變之因變"爲遞及性之形解。如言個體，其級型(Type)之初元爲0，性質集合表型爲1；性質之性質則爲2。如此推之，級晉無窮。論第一級之性質或類分，則通第一級之標辭因變。蓋此因變之主宰乃個體故也。更論第二級(卽類分之類分。)之性質，則又通第二級之標辭因變。蓋此因變之主宰乃第一級之標辭因變。如是類引，亦級晉無窮也。茲以"身"爲個體，"直與黃"爲第一級性質，"空間顏色"爲第二級性質；從此有標辭可見者爲"此身是黃"與"此身是直"具眞或僞之意義。而"此直是空間"與"此黃是顏色"亦有其可能値。至

於"某身爲一空間性",與"直爲黃"旣無義亦無眞僞可言。標辭因變之 $\varphi\hat{x}$ 中如 φ 爲第一級(黃)則只能以個體如有形物之棹椅樹木爲其主牽;如 φ 所指之性屬第二級,則惟第一級(黃)可稱主牽,而不能以個體代也。否則必爲無義之 $\varphi(\varphi\hat{x})$ 矣。

雖然,同一級中,難免僻性之論;因類分標辭因變,有其同稱之包攝性在故也。如云"凡標辭皆有其眞或僞"。吾人不知有多少標辭可舉,亦不知眞僞之何屬,然不能以此判斷爲非是,亦不能絕對信主辭之確限於斯二值也。此類疑難出於"凡""某"或"凡有""某有"之二詞性。故宜續論此說之詳。

習語表"凡有"如邏輯謂"處處眞";表"某有"如謂"有處眞"。茲析二者之 φx 態如次。

邏輯家表" φx 之處處眞"者以徽號記爲:

$$(x)\cdot\varphi x$$

如舊邏輯之全稱標辭,卽肯定對 $\varphi\hat{x}$ 統有値之標辭也。按此辭含 $\varphi\hat{x}$ 因變之本身,而斷於" φx 之 x 統有値"。因 φx 之 x 無定而且兩可;再 x 各値,時有使 φx 爲無義者。是故 $(x)\cdot\varphi x$ 之所定,迺 $\varphi\hat{x}$ 統有値之所有標辭,對 φx 之有義,厪在 x 主牽"可能處"也。故曰釋 $(x)\cdot\varphi x$ 之適當語,宜以" φx 之眞乃對 x 統有之可能値"。然此語實未足盡 φx 處處眞之辭義。(注意處處眞,非時時眞之謂也。)

邏輯家復創" φx 之有處眞"一辭,以徽號記爲:

$$(\exists x)\cdot\varphi x$$

如舊邏輯之特稱標辭,卽謂" φx 有 x 之若干値"或對 x 有某値也。

如言"φ具善之德"也,則徵號表"有一或多數 x 爲善"之謂也。 明言之,迺直視 φx 爲不皆僞云爾。

"有處眞"與"處處眞"具眞僞値重要原理,或曰標辭因變之兩大範疇,誠無不當。 蓋標辭因變所涉眞僞値,光無逃"所皆然"與夫"有所然"之二說。 吾人對宇宙因變之知,亦無外以"凡有,所有,皆有……""某也,此也,一也……"諸辭爲斷;如以 φx 言,若其主牽爲 a,則 φa 必眞。 因 a 代人,則 a 有死; a 代動物則 a 有生命; 無論 a 爲何屬,處處皆眞。 卽因變之負定辭,亦適應是證。 且也,$(x)\cdot\varphi x$ 之標辭連涵 φx 因變,而匪惟徒涉待然之兩可,旣能眞其一,而亦有異於它一之眞之秩序焉。 所謂眞僞觀念之"系統待然性"(l'ambiguité systématique)實已反證舊邏輯單稱與一致觀念諸說之誤。 吾人對眞僞二値,宜各本標辭所在之性屬(Genre)以區其秩序。 設以 φx 之一基本標辭所眞爲第一次之眞者,則各標辭所設 $\varphi\hat{x}$ 意之眞爲 $(x)\cdot\varphi x$ 時必表爲" $\varphi\hat{x}$ 統有値皆有一第一次之眞"。 但此眞之本身必爲第二次者。 如是遞推,系統之秩序成焉。

同理若推而轉論夫"僞"之義蘊,則其說將進爲邏輯因變之又一解也。 如謂 $(x)\cdot\varphi x$ 有其二次性之僞,則知對 $\varphi\hat{x}$ 所有若干値皆具第一次之僞;質言之,x 有眞處時,φx 有其第一次之僞。 反之,表 $(\exists x)\cdot\varphi x$ 有第二次之僞時,則 $\varphi\hat{x}$ 統有値皆爲第一次之僞;質言之 $(x)\cdot\varphi x$ 有第一次之僞。 如斯言諸,足知僞之種類級次,對普通標辭認爲適有者,而於特殊間則有所適之差。 此而不辨,眞僞値之秩序無有,實在亦無分矣。 何耶? 宇宙萬象各異其存(性質),各形物類,復互連其誼(關係)。萬象之

現，現其複象若干，而若干之某一，又無不有其充實組織之部分，以昭其存在之意義。（此意義卽關係之實有。）吾人稱知此某一之物也，絕非限於惟有此一物而已。故必也既知其關係判斷，復分別其"場合"(Champs)所與，計慮其先後秩第，重輕轉變。試以某一最初之基本判斷言，必有其所與"場合"複生之相通關係始眞。否則必僞矣。若更以一場合相通多數關係言，如云"凡鳥皆飛"標辭固不顯立於"鷹飛"之一詞，然吾人知"x飛"者實斷自x爲鳥。故無論斷者合理與否，其關係必爲"物之有其定性可知者，從此有其它性可知之能"。此謂標辭因變之通稱判斷。如$\varphi\hat{x}$與$\psi\hat{x}$之任何標辭因變，必有一判斷肯定ψx之x有φx者在也。演繹之逮達，眞僞之本値，悉於是解；而眞理之在通稱判斷者，勢必別初有之基本判斷，亦正緣於斯道也。謂凡鳥皆飛，則x爲鳥時，"x飛"者，賴乎基本眞理故耳。此基本眞理，實已處於第二次眞理之列。若依型式表之，有如下列：

"當x爲鳥時，處處x眞飛"；或

"$(x)\cdot\varphi x$爲鳥，$(x)\cdot x$皆飛"

名此判斷爲p，則"p之眞"必在"p有第二次之一眞"時爲有義。是其說本於認：

"當x爲鳥時，處處x眞飛有一基本眞理"（如鷹飛）。

由此證φx處處眞時之通稱判斷乃表φx式之所有判斷；而"凡鳥皆飛"之標辭相當於：

"處處之x爲一鳥，連累於x爲一飛者"。

換言之，亦相當於標辭之：

"處處 x 非一鳥,或 x 爲一飛者"。

此一標辭之處處眞者,與"x 爲一鳥"或"x 爲一飛者"之眞異也。 蓋謂 $(x)\cdot\varphi x$ 判斷意義之眞與夫"能眞",實異於僅言 φx 之眞與夫能眞也。如 φx 爲一基本判斷,則在指陳"場合"有一複生之相通關係時,卽已釐定。 至於 $(x)\cdot\varphi x$ 指陳之多數場合,必通於 x 凡有可能之所是關係。

明乎眞之程度說,斯吾人前述循環矛盾之辭與所謂 $\varphi(\varphi\hat{x})$ 之必爲無義諸證,亦得重釋其蘊。 設有標辭謂"艾比墨立之判斷所持皆眞",斯言惟於判斷塙乎同次者爲有義。 如不同次或以第 n 次爲最高次,則有 n 次之"艾比墨立所持 m 次判斷皆眞"。 此 m 爲其至 n 次之所有値。 然而各判斷無一能縛恃自身作解者,因其處處皆須通所有判斷之最高次故也。

玆進論"演繹因變之發展及變通公理之解决" (La génération de déduction et l'axiome de réductibilité)。

吾人旣知 φx 處處眞之型式肯定,玆宜述其對標辭"否定"之可能認識。 按處處眞與有處眞本屬同原。 如言"φx 有眞者",則必此 x 之一或多數値爲處處眞也。 謂 x 之存在必有若 φx 者,實乃直譯所謂 $(\exists x)\cdot\varphi x$ 之辭義也。 故數學邏輯論者兩皆取作原本觀念之表徵,是進而取作基本標辭之"否定辭"論亦無不適也。 質言之,處處眞與有處眞之負辭可定矣。

凡標辭之負者,曾知以"$-p$"或"$\sim p$"表明,是處處眞之負辭必表爲:

$$(\exists x)\cdot -\varphi x \text{ 或 } (\exists x)\cdot \sim\varphi x.$$

故定負定辭之義如：

$$-\{(x)\cdot\varphi x\}\cdot=\cdot(\exists x)\cdot-\varphi x,$$

$$-\{(\exists x)\cdot-\varphi x\}\cdot=\cdot(x)\cdot-\varphi x.$$

通常邏輯形式，視全稱肯定之負如特稱否定；視特稱肯定之負如全稱否定。是此類標辭之負稱本義，異於基本標辭之負稱所示矣。

由前理推證選言之離衍辭"或 p 眞或 φx 處處眞"之定義，亦屬易易。如視"或 p 或 φx"，兩皆爲基本標辭，則在離衍辭間，兩如原本觀念之是；如果或 p 眞或 φx 處處眞，則必"p 或 φx 是處處眞"。其式列如：

$$\{((x)\cdot\varphi x)\smile p\}=\{(x)\cdot\varphi x\smile p\}.$$

推而論之，得下列五式之定義：(括弧原可以點記之，如過大括弧則以兩點記之，吾人今茲所列有限，故仍以括弧用。)

1. $\{p\smile((x)\cdot\varphi x)\}=\{(x)\cdot p\smile\varphi x\}$
2. $\{((\exists x)\cdot\varphi x)\smile p\}=\{(\exists x)\cdot\varphi x\smile p\}$
3. $\{p\smile((\exists x)\cdot\varphi x)\}=\{(\exists x)\cdot p\smile\varphi x\}$
4. $\{((x)\cdot\varphi x)\smile((\exists y)\cdot\varphi y)\}=\{(x)\cdot((\exists y)\cdot\varphi x\smile\varphi y)\}$
5. $\{((\exists y)\cdot\psi y)\smile((x)\cdot\varphi x)\}=\{(x)\cdot(\exists y)\cdot\psi y\smile\varphi x)\}$

末二式所表者，卽所謂兩全稱離衍辭。讀者從是知連累關係及邏輯積與相等式之定義，悉如是引證，而標辭各級型之形式，亦無須重援負定辭與離衍辭之新原本觀念爲證也。(參閱羅素懷提海合著之數學原理大著第一三四頁及其後。)　負定與離衍之兩邏輯因變，咸號兩義性；而對於級次層變型(Hiérachie des types)或稱"型次變型"間，則各具同然性。彼推證

者視此不變之變爲同主辜之級型標辭然有不可不辨者爲標辭本身(非一標辭因變之變項者。)所涉之"形變項" (Variable apparente) 之問題是也。蓋基本標辭,絕無形變項涉入,從此拾級而上者,則不免有變項之眞僞因變,載生無定;思想繁衍,演繹發展,此固然之理,故析論形變項,幟稱有義。

眞理有形式與實質連累之異,而因變亦有形變與實變之別。某物因變項之可能値肯定或否定,抑因此變項無定之若干可能値所肯定或否定者,名此變項曰"形變項"。反之,如各類可能値必皆使標辭因變之眞僞各有其實質連累之眞者名曰"實變項"例如數學之:

$$\int_0^z fx\,dx$$

式中 x 爲形變, z 則爲實變。又如:

$$\int_0^1 x^m dx$$

x 爲形變,而 m 爲實變矣。形變者在習用標辭爲"凡有""若干"之字類。語言辭句,時未達思想之眞,而形變必有,乃能充其形意之是。如謂"甲有死,"表明"甲有一時間將死"。一時間之變項卽爲形變項。惟直接知覺判斷所具之標辭則無形變也。如曰"斯人也而有斯疾也","此謂知足","以是爲政"。諸辭之"斯""此""以是"直接表已知件者。若如"太白爲詩仙"之一辭,表若無形變項,而實則內含一形變也。彼斯語若爲太白自謂,是稱直知;"太白爲詩仙"無形變可言。然語旣出諸後人,所知之太白迺傳授者,是弗同太白自知之太白,而爲表其人之有某某性質,謂之'唐人稱酒仙者"亦可。故凡"物有某某性質"之標辭,果由"吾人"代述,必屬形變者多。玆更舉例以明形變與實變之眞。

設有 a b c d 之實數,如 a 大於 b ,與 c 大於 d ,則有連累之:

$$\{(a>b)(c>d)\}\supset\{(ac+bd)>(ad+bc)\}$$

此 a b c d 既皆爲變數,則對各變數可能值宜有其形式之連累。 若使 a 等 c 等二, b 等 d 等一, 則得二大於一, 與夫二大於一連累而爲五大於四;是謂實質眞之連累式也。 因假定 (Hypothése)眞而正定(Thése)亦與之俱眞。 復次使 a 等 c 等一, b 等 d 等二, 則得一大於二,與夫一大於二而連累於五大於四。 此亦實質變項之連累式也。 假定者雖僞,而正定則仍不失其眞。 再次使 a 等 d 等一, b 等 c 等二,則得一大於二與二大於一,連累而爲四大於五。 此則正定僞而假定亦有其僞。是僞僞亦稱實變。 惟假定眞而正定僞者,(與第二證相反者。)則不能謂之實變項矣。 是知形式連累,迺本實質連累之性質而申證者也。 彼標辭不具形變項,標辭因變之値亦無形變者,實卽爲攝形變項之標辭所本者也。 例因變式 $\varphi\hat{x}$ 爲標辭" φx 處處眞"之原因是也。 因變中之實變連累性,於標辭間則轉其變項之實而爲形。 此之一轉,決非偶然或單換之易,必也有一定級型, 依層轉項, 次第入無形變之因變値。 如"$\varphi\hat{x}$ 所可能之値"非偶然或任意者, 因有矛盾無義之可能,故必依型次以實 $\varphi\hat{x}$ 値。 所謂完成演繹之功,正視能否"分"因變與標辭差異之型次爲定。

級型原無定斷,絕對劃別,尤屬不易。 然則如何分因變與標辭之義? 曰惟就抽象者指設"型次變型"之如何可能耳。 試自基本標辭始,(卽各辭之名詞項皆表個體者。)組成第一級型;隨卽注意以個體爲主率之因變式, 以之視爲基本標辭之"母型" (Matrice)。(參看下面附注之說明。)

是爲第一級之母型。次將此母型之首級個體轉若干項爲形變項，則得第一級之因變式。 此級因變，惟限個體性質而無它變項雜陳其間。 如再將所有變項(主率)轉而爲形變項，則得第一級之標辭。 例如由母型之 φ(x,y) 引得第一級因變之 (x)·φ(x,y) 與第一級標辭之(x,y)·φ(x,y) 而 φ(x,y)値之母型因變，必申而有：

(y)·φ(x,y)爲 x 之一因變式；

(x)·φ(x,y)爲 y 之一因變式。

始知第一標辭所表者爲"φ(x,y)對 x 與 y 之所有可能値爲眞"。 故第一級標辭所攝爲形變項而非實變之轉也。 是標辭與因變之可能値，必自母型轉變之形變主率得之也明矣。 而吾人之必自母型以析標辭與因變之級型亦無疑焉。

附注：按前述之：

(x)·φx,ψx…… (∃x)·φx,ψx……

在括弧內之部分，稱爲"公型"(Préfixe)，後之 φx ψx 等待然性稱"母型"(matrice)。第一級母型所表者，必其値有下列形式之一：

φx, ψ(x,y), χ(x,y,z)……

無論主率數目多寡皆屬個體。 自因變之 ψ χ ……起，可得 x 之其它因變式如：

(y)·ψ(x,y), (∃x)·ψ(x,y),

(∃z)·χ(x,y,z), (y):(∃z)·χ(x,y,z).……

此類因變與前者同，無豫設個體以外之全稱集合性，且皆爲 x

之因變初級性也。

玆更就"第一級之任何無定標辭因變" (N'importe quelle fonction du premier ordre) 言之。按是類因變徵號象爲:

$$\varphi!\hat{x}$$

原式中之嘆詞號,係稱 φ 之性質爲表詞性或屬性者 (Prédicative)。全式標辭含一"無定値"之:

$$\varphi!x$$

表明無定因變之任何値,只攝個體變項。但 $\varphi!x$ 自身則含有:

$$\varphi!\hat{z} \text{ 與 } x$$

之二値因變。質言之,卽 $\varphi!\hat{z}$ 攝一非個體之 $\varphi!\hat{z}$ 爲變項矣。由是知:

$$(x)\cdot\varphi!x$$

迺含 $\varphi!\hat{z}$ 變項之因變式,亦攝非個體之一變項也。設有 a 爲一已知個體,則有式" $\varphi!x$ 連累 $\varphi!a$ 於 φ 之凡値皆能"爲 x 之一因變式,而非 $\varphi!x$ 之式也。此無它,蓋 $\varphi!x$ 包一非個體之形變 φ 故耳。若以 $x!\hat{z}$ 之第一級無定因變名爲表詞性,則前式能讀曰" x 之所有屬性皆 a 之屬性也"。然此種肯斷,顧 x 之所可者,蓋就特義言,非以一表詞歸諸 x 耳。

彼 $\varphi!\hat{z}$ 之變項生,斯新母型亦與之俱生。厥故因其値之一有 $\varphi!x$ 爲 $\varphi!\hat{z}$ 與 x 兩實變項之因變式而無涉形變項者,故必爲母型也。但因有一非個體項之 $\varphi!\hat{z}$ 在,故此型又不稱第一級而必爲第二級之母型焉。其型歸之如次:

$$f(\varphi!\hat{z}),\quad g(\varphi!\hat{z},\psi!\hat{z}),\quad F(\varphi!\hat{z},x)\cdots\cdots$$

按此母型所有，皆非形變項，乃以第一級因變與個體爲主牽者。　此類母型若有屬一變項以上者則其主牽中除一不計外，餘轉換爲形變項，即得一變項之新因變，如下列因變之：

$(\varphi)\cdot g(\varphi!\hat{z},\psi!\hat{z})$ 爲 $\psi!\hat{z}$ 之一因變；

$(x)\cdot F\ (\varphi!\hat{z},x)$ 爲 $\varphi!\hat{z}$ 之一因變；

$(\varphi)\cdot F(\varphi!\hat{z},\ x)$ 爲 x 之一因變。

由是知母型之稱第二級者，必其各主牽皆爲第一級之因變，且惟限於此因變與夫個體所是者。——但無須必爲主牽間之個體也——若因變之稱第二級者，必其爲第二級之母型，或由此型引申轉換變項(主牽)之若干爲形變項。　故第二級因變之主牽，(變項)或爲個體，或爲第一級之因變俱無不可。　同理將主牽盡轉爲形變項，則獲第二級之標辭矣。

因變之第二級，有三類可能式：

(甲)只攝第一級因變之惟一主牽者，其式如：

$f!(\hat{\varphi}!\hat{z})$

其無定值則表爲：

$f!(\varphi!\hat{z})$

依前述 $\varphi!x$ 式此無定值之因變必包 $f!(\hat{\varphi}!\hat{z})$ 與 $\varphi!\hat{z}$ 兩值，其可能值中必具不變之 a 如 $\varphi!a$ 及

$(x)\cdot\varphi!x,\quad(\exists x)\cdot\varphi!x\cdots\cdots$

各值對 f 言使之有一定値，對 φ 言則仍趨於無定。　凡此類因變名曰“第一級因變之屬因變”。

(乙)一主牽攝第一級因變而又爲個體之二主牽者。　其無定值徵之

列爲：

$$f!(\varphi!\hat{z},x)$$

如式中 x 爲定值，則有 $\varphi!\hat{z}$ 之屬因變，如式中不攝第一級因變爲形變項者，則 x 之屬因變，得與 $\varphi!\hat{z}$ 以一值：反之，如包第一級形變項，則 $\varphi!\hat{z}$ 之一値所示，必得 x 之第二級因變。

(丙)攝第二級因變之個體者，按此類因變，殆如前乙項之因變類，轉而視 φ 爲形變項之引申式耳。故無新徵號可表。從此增進二級因變之有兩一級因變也可，或因變外復益以一個體亦無不可。

旣知第二級母型之有也，斯第三級亦易爲同理之推焉。質言之，依 $f!\varphi!z$ 式增設卽得。夫此類因變，以第二級爲主率，而無第一與第二因變之形變項，亦無其個體以外之主率。故有無定次級之可能。(但非無窮者。)如變項之高次爲 n 次(無論主率或形變項。)之因變，則其所涉將爲 n 加一次。但此級數不能有集合論之 ω 次因變，因爲一因變式中主率與形變項之數應屬有限；故因變式亦宜爲有限次也。因變之級旣爲遞次所限，斯"界限之界"具，而無窮級不得有也。

曰因變之一元變項爲屬性者，必此因變之級次大於主率之級而小於其對此主率所應有之級。曰一因變具多數主率其所涉主率之因變，使其最高次爲 n 者，則 n 加一次時必爲屬性因變。換言之，其所是之級次小於"所有"之主率。曰具多數主率之一因變式稱爲屬性者，必各主率有能於吾人指其爲它因變之一値時，可得一無定主率之屬性因變也。

明乎此則知前云級型因變，亦能自屬性因變與形變項之方法求得。

例如一 x 個體之第二級因變有如:

$\varphi\cdot f!(\varphi!\hat{z}\cdot x)$ 或 $(\exists\varphi)\cdot f!(\varphi!\hat{z},x)$ 或 $(\varphi,\psi)f!(\varphi!\hat{z},\psi!\hat{z},x)\cdots\cdots$

式中 f 卽第二級之屬性因變也。若自 n 次級之一屬性因變起,將 n 負一次級之主率易爲形變項,而其它主率亦皆可易者,則得 n 次級之非屬性因變。故吾人無須於屬性因變外別引因變之變項也。且旣得一 x 變項之任何一因變,卽無須求兩變項之各屬性因變。蓋

$$(\psi)\cdot f!(\varphi!\hat{z},\psi!\hat{z},x)$$

之因變爲有 $\varphi!\hat{z}$ 與 x 之一因變,(式中 f 爲已知)且爲屬性者;故其形屬:

$$F!(\varphi!\hat{z},x)$$

而: $(\varphi,\psi)\cdot f!(\varphi!\hat{z},\psi!\hat{z},x)$

則屬: $(\varphi)\cdot F!(\varphi!\hat{z},x)$

之因變。若據此推而之層變型,則高次屬性因變之非屬性主率所有塥定因變亦必可知。如曰 $\varphi!\hat{u}$ 爲一高次屬性因變,其 x 主率所定之非屬性因變不外下列二式之一:

$$(\varphi)\cdot F!(\varphi!\hat{u},x),\quad (\exists\varphi)\cdot F!(\varphi!\hat{u},x)$$

此處 F 卽爲 $\varphi!\hat{u}$ 與 x 之屬性因變。

總而言之,因變本誼,原攝諸所可之完全值;質言之,含主率可能之一切集合意義也。一因變之各主率,或爲因變,或稱標辭,抑或爲個體,則未之能定焉。吾人試將因變主率屬標辭者暫置勿論,取其屬"個體"性者觀之,必知此因變豫設個體集合式,而不能攝一形式項之因變在也。不然,將不識因變之總和性矣。果旣具形變項之因變,則其總和必爲無定者,其個體主率之因變亦必不能定。故宜首立以個體爲主率

而不攝形變項之因變性之因變總和,使之成爲個體屬性因變也。概而言之,一主率變項之屬性因變,只包主率可能値,及可能之主率間任何一値所設之總和率。是此因變,必有其定率肯斷;但除主率變項所需外,不能重累新變項以雜其變性範圍也。

關於"標辭"問題,迺同理之推衍。

凡標辭非因變亦無形變項者,曰"基本標辭"(Propositions élémentaires)凡非因變亦無形變項而獨具個體者曰"第一級標辭"(Propositions du Premierr odre)。凡"變項"(Variable)惟有"形變"者可入標辭,若有"實變"者則稱因變式而非標辭矣。基本標辭與第一級標辭皆第一級因變之値,而一因變則不能爲其値之一元。如因變之"x爲人"不能視爲"孔子爲人"之一元也。故基本與第一級之兩類辭俱無豫設個體總和以外之和也。其形不外:

$$\varphi!a;\quad (x)\cdot\varphi!x;\quad (\exists x)\cdot\varphi!x.$$

三者之一。此處 $\varphi!x$ 爲個體一屬性因變,如以 p 表基本或第一級之標辭,則 fp 因變之項,必爲下列三者之一:

$$f(\varphi!a);\quad f\{(x)\cdot\varphi!x\};\quad f\{(\exists x)\cdot\varphi!x\}.$$

是知一基本或第一級標辭之因變,終必入第一級因變之一因變也。故曰一標辭之詞句攝第一級各標辭之總和者,此標辭必能引爲包攝第一級各因變總和之詞句也。若推之高次,亦無不然。謂標辭級型爲因變級型之推引者亦正在是。而視 n 次級之標辭爲含因變級型中 n 負一次之形變項之標辭者,亦趣洽斯旨。顧此類級型標辭,實屬無用;然若以之消去矛盾,則又轉爲必要之解析焉。

數學邏輯者,用屬性因變,探無定之屬性標辭,復及非屬性因變之形相,力闡無定屬性之標辭性,確示定而無定,然而不然之理,闢數學歸納新徑,釋循環演繹謬證,檢論實事,厥功甚偉。昔邏輯辯證者,徒事普通標辭之設,而不計數學因變範圍之限,明暗性分,尤忘級型關係之無與於已知某主率所眞之"凡有"性也。如言"a之所有性"(類分)之一辭,邏輯言之,實有不當。蓋"a主率所有可眞之凡因變"皆在原辭內蘊中。就級型論言之,必析而正曰"a之所有屬性性質","a之第二級所有性質"等等。然時有判斷表為"a之n次級所有性質"者,姑無論n為何屬,視之為"a之所有性"之判斷,非不當也。其故因此乃判斷之多次,非若一主率之判斷比也。多次者能於所有性質外,定a之一新性質,由一以及它,類推待然,系立兩可,使眞理釋諸不限之級,而為不限之限,不變之型。吾人於單純判斷,若無力析其所攝之差異兩可性,則忘差異級次之重大而反墜入矛盾之可能。果級次有分,遁辭必解;若混命辭與所設為一,則是合兩標辭因變為一判斷,安見眞理在哉。故欲使"a之所有性質"或"凡因變a之所有"為多數推衍之證明,而又尠重大錯誤可慮,羅素設一法創曰"變通公理" (Axiome de Réductibilité) 之用。據此公理推,凡"x之所有性質"能導任何級次之標辭因變於第一級屬性因變。換言之,肯定 ψx 任何級次因變之x所有值時,亦正肯定"x屬於某類之固有"。是卽謂 ψx 因變終有一相當之屬性因變通之也。如云:

"拿破崙具大將之所有性";

標辭重在有定件,——大將——此件之屬性,對所言各性之公有者無

定。　其義蓋謂"某 x 之屬性(爲大將)連於無定之屬性，拿破崙終有此屬性之無定者在"。　是知"各屬性之有此無定屬性者惟有 a (拿破崙)之一性質，但此決非 a 之屬性"，何也？　無定之屬性，邏輯上不直屬拿破崙而爲其性質之公有表格；事實上某某件與其屬性之分爲相對者；如普通標辭之"有多少 x 皆具大將之屬性"，此判斷之辭，實亦通於拿破崙。試以徵號述之，益爲明確。　謂"拿破崙具大將之所有性"，卽有一形變項在，設 $f(\varphi!\hat{z})$ 對" $\varphi!\hat{z}$ 爲大將所有之一屬性"，則標辭列爲：

$$\varphi: f(\varphi!\hat{z}) \cdot \supset \cdot \varphi!(\text{拿破崙})$$

因此式注意屬性之總和，故不得視爲拿破崙之一屬性。　是類屬性所表性質高於拿破崙，而攝所有具此性之各體焉。　變通公理者卽證明如斯之一屬性爲處處存在。　果一物之任何性適於各物之集體性，則有一可知屬性必適於此集合體也。

按變通公理爲類分存在之"簡證原理"。　若以恆等或齊一觀念實證之，尤爲清晰易解。　羅素認爲與賴本尼支不可析之恆等性原理，說頗相似。　如云 x 與 y 兩兩相當，果 φx 眞則 φy 亦俱眞，此不證之知也。　但依" φ 之所有值"言，不能謂 "φx 連累 φy，故 x 與 y 皆相當"；因" φ 之所有值"一辭，不能對之承認。　如必言" φ 之所有值"，則惟限於廑有一次級之因變始可。　卽推諸二級或其它任何級，皆限以一次爲止。　故恆等之級，限於各次，而有其程序之言，曰" x 之凡有屬性逮於 y"也可，曰" x 之第二次所有性逮於 y "也亦可，由是衍之，無不適眞。凡肯定之一必連逮其前有之存在，此種存在證明，必有一公理爲之助其合理，否則級次無關，卽知 x 與 y 之相當，將亦不識其有無同類屬性。

羅素定此類恆等性之定義爲：

$$x=y\cdot=\cdot(\varphi):\varphi!x\cdot\supset\cdot\varphi!y.$$

如屬性因變在 x 能合者，y 亦能合之，則 x 與 y 堪稱相當。若無變通公理之機緣，所謂恆等性將永淪於不可限性，且勢必認兩物之屬性俱合者，不能有相等在也。如此判斷，常識不許，此變通公理之所以必要也。若自純數學思想推論之，則此必要之程度更爲可觀也。

第五章　類分適用論

前章論標辭因變時,曾知處處眞與有處眞之兩大重要觀念。質言之,詳釋習語之"凡有"與"能有",或"一切"及"一些"諸詞應用。今更爲語言文法之辯證,索常識與舊形式邏輯所弗解之"敍述"與"類分"(Les descriptions et les classes)詞,別"此"之"單""複"關係,析"類"之"內""外"範存。此羅素派邏輯數論之基本觀念問題發端,亦卽哲學認識新闢理論證明之方法也。茲先究判斷之文法主詞所在之敍述語,試求其邏輯價值所示之"某某"性質,如何別其"彼此"之"專定"與"泛稱"諸差德。

創"敍述語"之研究者,析敍述爲專定式之"此某某"(Le tel)與泛稱式之"一某某"(un tel)兩大類。前者表有定,(défini)後者示無定(indéfini)與疑而不審之詞。言無定之敍述曰:"吾遇一某",標辭形構,必有一概念誼在也。否則,無定之義,將失諸無謂無意;而標辭亦幾於一無存在之有。雖形具判斷,實如曰"吾遇一魔"。義之所在,虛名無證。敍述以詞,難乎獲實也。

今校二辭如此,曰:"吾遇趙生",曰:"吾遇一人";兩標辭形頗相似,而實則差甚。前爲單稱,可眞可僞;後爲標辭因變,釋之宜如"吾遇 x 而 x 爲人"。若以"吾遇一魔"譯此形式,亦得"吾遇 x 而 x 爲一魔"。然此雖具因變之形,實乏義理之眞。其說當辨述如次。

按標辭分析中,不能假定虛構或幻象之事物;如"一魔""烏有先生"類之實在或不實在,不得立於判斷辭內。彼虛構之實有,僅在創此意

像思想者心目中爲眞，而虛構之本身，絕非實在。故除主思者所孕育之意見外，幻想事件一無存在。其得虛構之條件，乃藉眞實可能値之標辭因變式，以幟相反之僞形耳。如前命辭謂"吾遇 x 而 x 爲人"；此 x 在吾所遇者固能爲非人；若眞非人，則"肯定"斷於不實。但如此肯定，雖有睽疑，而亦可告爲眞，且能有事實在。若 x 虛指一魔之標辭因變，則 x 値以任何代替皆屬虛僞。蓋因魔之爲物，世無形體，無論敘述之專定抑泛稱，皆非是也。

斯義旣釋，則凡辭宜推。若引而納用前述因變，將益廣衍可鑑。如以象徵 φ 表某物彼此之性，以 ψ 表吾所遇之性質，而以實在對不實在；則有"肯定一物有 φ 性具 ψ 性者，卽斷定 φ 與 ψ 之聯立式爲"非處處僞"之能矣。

茲再論"此"之單性敘述。前謂"一某某"能用代"此一某某"之專定式而無須界說。若論"此一某某"之標辭，則有界說必要。如云：孔子是一人，孟子是一人，墨子是一人，固無不可也。然反之以"一人"之誼同於孔子，又同於孟子，復同於墨子，則必不可。蓋孔孟墨三名各自固有，其誼絕不相渾。果欲如是立界說，必先盡世界人類而一數之，然後此之"一人"各有其實體在。惜乎人旣無斯用，亦無庸是數。且世界事物固繁，而確定之"一人"决無反諸人或此一人之他人；換言之，無一非一人之人。故曰"一人"本身無界說，其標辭則有諸。

顧就"此一某某"之標辭論之。例曰"黃宗羲爲宋元學案著者"。標辭中有一名詞——黃宗羲——立名字意義之外而爲個體意義之記號表現；更有一敘述詞——宋元學案著者——合多數文字，確定意義。

若以恆等律言,兩詞弗有一致更代;曰"黃宗羲爲黃宗羲"也可,同理曰宋元學案著者爲宋元學案著者"則不可。蓋標辭之"此某某爲此某某"非處處眞故也。譬謂"今之法王爲今之法王",正此一某某之敍述語;然句中所述,毫未及眞,今日法國並無王在也。如是解釋,知處處眞之恆等律,非一本推衍,永無疑難者也。若標辭因變不言名詞而言敍述式,則所述之中,凡有不及名詞之"此某某"者卽無存在;質言之,非標辭因變之眞值故惟僞可稱也。

準是說焉,"此一某某"異"一某某"者爲有獨一之專指,旣不得謂"此一位中國學生",亦不能謂"此一人今之漢王"。前者僞在中國學生非"獨一"而亦非"專指";後者僞在專指之不存在。此一某某有一某某之標辭敍述,且必"此某某唯一也"。唯一之於敍述語,固有不同形式者,然必居兩標辭因變之變項間,其眞僞值亦必隨層變型之條件,始有邏輯意義。(按個體之一,區分極重,參考商務印書館拙著邏輯與數學邏輯論二〇六頁後各節。)試以徵號語言概括敍述之通式"此 x 適 φx"列之如:

$$(\iota x)\ (\varphi x)$$

其邏輯意義,包下式所具定義:

$$[(\iota x)(\varphi x)]\cdot\psi(\iota x)(\varphi x)\cdot=:(\exists b):\varphi x\equiv_x\cdot x=b:\psi b.$$

一般敍述語皆不出"此 x 適 φx"式,而其義理亦不外此定義之所攝。

(參看數學原理導言第七十頁及第一百八十一頁各式(第一版))

前式理論,適用於類分演算而亦允洽乎關係演算式。吾人詳考敍述辭句,各類分悉有"不及物"(Ne correspondent pas à des choses)之通義,是所謂"不全象徵"(Symboles incompletes)之存在。蓋標辭判

斷之多元物類，非限"一實"之有，而象徵形式，本身又屬無義，但用之者則必藉此不全象徵以冀得其全。然則如之何其冀得耶？曰以變通公理爲法焉可也。明言之，自任何級次型之標辭因變演算中代以相當之一次屬性因變，然後消去多型級次之複變式，卽得之矣。茲申類分習用演算以證是說。

類分觀念建於"外範"(Extension)觀念之有。凡外範本身皆非事物。故欲界定"範存"或名"外存"(Exsistence de l'extension)之誼，實不可能。其有可證者，惟在外範之演算或其因變之認識耳。邏輯家認兩因變具同一外範者必歸形式相當，卽認其對x所有値爲等價之謂也。一因變之因變名外範者，則其眞値如爲任何主率時，對其形式相當之主率不變。設有 $\psi\hat{z}$ 形式相當於 $\varphi\hat{z}$ 果 $f(\varphi\hat{z})$ 相當於 $f(\psi\hat{z})$ 則 $f(\varphi\hat{z})$ 爲 $\varphi\hat{z}$ 之一外範因變。但此定義中之 $\varphi\hat{z}$ 與 $\psi\hat{z}$ 皆形變項，故必限爲一型，强視爲屬性因變，如 $\psi!\hat{z}$ 形式相當於 $\psi!\hat{z}$ 則 $f(\varphi!\hat{z})$ 爲一外範因變也。

反之，如兩因變代用時，產生一眞値之改變，則所謂因變之因變，必俟因變主率之特殊形式爲定。如是者謂之"內存"(Intension)。例如"x是一人連累x有死"爲x是一人之外範因變，厥故因"x是一人"代以任何因變皆屬形式相當。如云"x是一兩足無羽毛者"眞値不變；反之，如謂"甲以爲x是一人連累x有死"，則爲一內存者。蓋"甲以爲x是一兩足無羽毛連及x有死"之標辭因變得爲僞故也。甲旣可不注意所謂兩足無羽毛者是否有死，亦可誤信兩足無羽毛者爲不死。至於"x是一人"其形相當於"x是一兩足無羽毛者"，此時無人思及凡人有

死者必因而信凡兩足無羽毛者有死”。無思及兩足無羽毛之必要，且亦無假定兩足無羽毛者皆非人之必要。推而證之，有標辭謂“主率數之合於 $\varphi!\hat{z}$ 因變者爲 n”，乃 $\varphi!\hat{z}$ 之外範因變；其故以任何因變代 $\varphi!\hat{z}$ 而眞僞性不變，卽 $\varphi!\hat{z}$ 眞則與之眞，僞亦與之俱僞。然標辭之“甲肯定主率數之合於 $\varphi!\hat{z}$ 因變者爲 n”，則爲 $\varphi!\hat{z}$ 之一內存因變；其故以甲肯定 $\varphi!\hat{z}$ 之此性而不能及所有相當於 $\varphi!\hat{z}$ 之屬性因變肯定。人生有涯，變之性無涯也。復自標辭之“世界有兩大民族同時創見三角數”觀之，原標辭有“兩主率合於：x 爲世界一民族同時創見三角數”。如以兩主率之一或二別成一辭，代入“x 爲世界一民族同時創見三角數”之標辭，則値之眞抑僞必不變。故曰此一辭爲外範因變。再以標辭之“此一意外偶合，世界竟有兩大民族同時創見三角數”觀之，則表爲“此一意外偶合，世界竟有兩主率合於因變之 x 爲一民族創見三角數”；此則不相當於“此一意外偶合，世界竟有兩主率合於因變之 x 爲中國或埃及”。故“此一意外偶合謂 $\varphi!\hat{z}$ 有兩主率能合”爲一內存因變也。外範因變之因變乃數學之邏輯本性，內存因變之因變，則爲數學所忽視者也。

兩因變之形式相當者名“同次”外範，一因變之外範因變，迺藉外範主率以定眞僞之因變也。是故視肯定辭爲外範之關係辭，實無不當。論外範因變，旣繁且重，故宜以類分(一物)作解，而假定爲形式相當之因變所關各肯定相當之主格。例云“有十二律焉”。對此肯定視如“律”之一集合性爲十二。凡爲“律”者以因變“$\hat{x}$ 爲一律”之十二主率洽合其性。此誼卽本兩因變有“同次因變”相等之說而來者也。試取若干

單簡問題如“n 件物中有幾何可能配合”之類比證之。則吾人首要之象爲每件“配合”,乃一單簡對象之個位。

一因變之外範因變得視爲主率因變有定類分之因變;而內在因變則不能以同理推。今欲分別此兩因變,羅素更進創屬性因變之任何因變有一引申外範因變說,認此因變所賦性質衹須引申者屬於外範,則必相當於從出之因變。如有因變式爲 $f(\psi!\hat{z})$ 其引申因變形式將界定於“有一屬性因變與 $\varphi\hat{z}$ 爲形式相當,且合於 f 性質”之辭。果 $\varphi\hat{z}$ 爲一屬性因變,彼引申者必居實在,而每次 $f(\varphi\hat{z})$ 亦均實在。若 $f(\varphi\hat{z})$ 爲一外範因變,且有屬性因變 $\varphi\hat{z}$ 在者,則必視 f 性質眞否,以斷引申之眞僞。蓋此時引申者相當於 $f(\varphi\hat{z})$ 故耳。此 f 性質如非外範,而 $\varphi\hat{z}$ 復爲一屬性因變者,則引申者於基本因變僞時,亦得可眞之處。總之無論如何,引申終屬外範,且必以屬性因變爲其級型。倘引申因變僞而 f 性質爲外範者,則依變通公理檢證之,其結果必獲屬性因變 $\psi!\hat{z}$“形式相當” $\varphi\hat{z}$ 之值也。

今欲使引申因變對 $\varphi\hat{z}$ 之任何次主率皆通於一型者爲合理,必 $\varphi!\hat{z}$ 任何屬性因變式之 $f(\psi!\hat{z})$ 爲有義;此先決之必要條件也。蓋 $\varphi\hat{z}$ 主率必要件爲假定其形式相當於任何屬性因變式之 $\psi!\hat{z}$ 若本諸級型論言,形式相當之系統兩可性與眞僞觀念之待然性爲同類,故形式肯定之兩因變,卽各具級次之差,復有同型之率,爲因變之有定類分也。如原因變爲 $f(\psi!\hat{z})$ 其引申式爲:

$$f\{\hat{z}(\varphi z)\}$$

此 $\hat{z}(\varphi z)$ 卽“主率合於 φz 之類分”,簡讀爲“由 $\varphi\hat{z}$ 所定之類分”。從

是知前引申式之義為"有一屬性因變 $\psi!\hat{z}$ 其形式相當於 $\varphi\hat{z}$，且其 $f(\psi!\hat{z})$ 亦為眞實"。若依徵號記之，則如：

$$f\{\hat{z}(\varphi z)\}\cdot=:(\exists\psi):\varphi x\cdot\equiv_x\cdot\psi!x:f(\psi!\hat{z}).\quad Df.(定義)$$

藉變通公理之便，(因其塙定於 $\varphi\hat{z}$ 因變中者能達相當之屬性因變 $\psi!\hat{z}$ 故也。) 吾人得知外範因變之因變由此定義隨入屬性之型。所謂 $\hat{z}(\varphi z)$ 之一式直膺類分之一切形式性矣。故兩形式相當之因變，僉定同一類分之式也。而此類兩因變，亦必互有形式相當之值焉。謂 x 為 $\hat{z}(\varphi x)$ 之一元，即謂其由 $\varphi\hat{z}$ 所定之類分。如 φx 眞則與之眞，僞亦與之俱僞。通常數學中習見之類分觀念，若以變通公理之假定為用，斯一切可能悉在此徵號 $\hat{z}(\varphi z)$ 之創意中。彼代數邏輯之建設，無往而非此類分演算之應用。

若同理應用於兩變項 x 與 y 之因變，則有標辭關係之連誼式出焉。何謂連誼？即 (xy) 對繫之類分，其因變所知者為：$\psi(xy)$ 之眞值。就此兩變項，訂次第之新約，則得類分定義之平行式，從而展開類分論理之型式。

$$f\{\hat{x}\hat{y}[\varphi(x,y)]\}\cdot=:\exists(\psi):\varphi!(x,y)\cdot\equiv_{x,y}\cdot\psi!(x,y):f\{\psi!(\hat{x},\hat{y})\}\cdot Df.$$

如 x 為 y 之父母或親屬，則 $\hat{x}\hat{y}[\psi(xy)]$ 為"父母之"或"親屬之"之義，以 $\varphi!(\hat{x}\hat{y})$ 為因變值之對置，以 $\hat{x}\hat{y}\varphi(x,y)$ 為由 $\varphi(xy)$ 所定之外範關係，故得前定義式。若 $f\{\psi!(\hat{x}\hat{y})\}$ 非 ψ 之外範因變，則知 $f\{\hat{x},\hat{y}\varphi(x,y)\}$ 亦非 φ 之外範因變。此正同類分情形相似，推演之得式如：

$$\hat{x},\hat{y}\varphi(x,y)=\hat{x}\hat{y}\psi(x,y)\cdot=:\varphi(x,y)\equiv_{x,y}\cdot\psi(x,y)$$

即證連誼乃由外範因變而定也。反之，外範因變亦必有其連誼之確證

在焉。

類分與連誼，羅素派以同一基本觀念界說之，其法如下列相類之二式：

$$\mathrm{Cls} = \hat{\alpha}\{(\exists\varphi)\cdot\alpha = \hat{z}(\varphi ! z)\} \quad \mathrm{Df.}$$

$$\mathrm{Rel} = \hat{R}\{(\exists\varphi)\cdot R = \hat{x},\hat{y}\,\varphi !(x,y)\} \quad \mathrm{Df.}$$

類分代數式與連誼代數式迺同原之互存式。 均依層變型與變通公理導入標辭因變之解釋。 然此類研究，仍屬普通邏輯範圍，必更求其對數學思想之特殊形式，藉明數學邏輯之科學最後改造，是在連誼論之新演算。

第六章　連誼象數論

舊習邏輯對判斷研究，頗著問題解答之功，而於連誼之關係問題，亦納諸範疇形式。雖曰原則衍於無疵，惜其篋限標辭一義，徒識主表兩格之部分關係耳。十九世紀末，班斯 (Peirce) 石扣德 (Schröder) 諸家，發現連誼 (Relation) 眞值，創演算之邏輯形式。羅素繼起，促連誼演算完成。攷其眞義，直入算學數之"序數"觀念。析數論之不解，立因變之新敍述式焉。謂爲邏輯創論，實當而無疑。茲略舉其要以證於后。

物於天地間必有"與立"，人於家庭中必有"親屬"，此謂與立親屬卽連誼之關係存在也。曰宇宙萬有，皆一關係表現；層累曲折，無非關係轉換。數之"比"，量之"衡"，形之"規矩"，質之"類分"，無一非連誼所生；及而人情世態，是非善惡，個人之於社會，戰爭之於生存，又何所逃於關係之數。學者以R象關係，吾申其象以徵於無違之算。曰連誼者，無誼不連，無詞不達，或雙或複，或聯或齊，屬之者可也，反之者亦可也。R永象，惟辭之異。如R爲"子屬"(filialité)之連誼性，合x與y之二元爲：

$$xRy$$

則x表子輩之集合，名連誼之前圍；y表父輩之集合，名連誼之後圍；總集合兩誼，構關係之"場圍"(Champ)。

子屬之R所表x與y之關係，爲不可錯置之連誼性。若欲使兩項換位，則須別假P爲"父屬"之連誼象，迺得表爲：

$$yPx$$

形式，讀曰 y 爲 x 之父也。 卽此簡述，知連誼例凡不一，而"定則"終不外關係之性質與數量二形耳。 以性質言，有"對稱" (Symétrie) 之"甲爲乙，乙爲丙"，如相等性；無對稱之"甲大於乙，乙小於甲"，如不等性；類分同聯性之"甲類同聯於乙類"，如轉換性；與屬聯性之"某某屬聯於甲類"，如非轉換性是也。（參閱前第二章丙節）以數量言，有"多數前件只一後件"，或"一前件具多數後件"，及"一前件一後件"之三類。 玆探此象數連誼精說，以釋各類眞義之本。

學者謂連誼之溥汎觀念，僉數學基本之敍述因變 (fonction descriptive) 所引申者，對所謂標辭因變，宜有特要之分。 蓋標辭因變，爲一完全標辭之無定式，而敍述因變，則歸諸標辭組織之無定式也。 徵其象則爲"x 項有 R 連誼於 y"；依嚴正方式記之：

$$R‘y = (\iota x)(xRy). \quad Df.$$

式中 R‘y 讀爲"R之 y"，如標辭因變之 fy 故得列：

$$f(R‘y) \cdot = \cdot f\{(\iota x)(xRy)\}. \quad Df.$$

此卽數學之 $x^3\sin x$, $\log x$, fx 類是也。 如是象徵，記號本身，决無所定，而所用以爲界說或限定者厥爲標辭之表現耳。 所謂"不全象徵"，亦在於斯。 通常釋"R之 y"之邏輯演算時，直用 (ιx) (φx) 之不全象徵號代之，其理在是。

準前式推 R 前後件，或左右形，或反換置，可獲"級數"眞誼。 同時對多元敍述因變之定義，亦可獲一界說如次：

$$R“\beta = \hat{x}\{(\exists y) \cdot y \varepsilon \beta \cdot xRy\}. \quad Df.$$

原式表明"各項多元性對一已知類分之各元有R之連誼"。式中 $R``\beta$ 意爲各項有R連誼於$\beta$之各屬者也。如$\beta$表"大人"之類，R爲子對父之關係，則前 $R``\beta$ 爲"大人之子"。其義深藏兩類分各邊之關係的連誼性。如戡托派 (Cantorien) 基數定義，悉如斯衍。若就β極限下之若干集合數言，此連誼性對實在數之理論亦稱妥適。

羅素派數之邏輯認識，更自連誼論縱衍類分與連誼兩積之外範因變。其說將邏輯通稱敍述語者概括殆盡，據"數"言"類"之關係，復本"類"徵"數"之存在。試舉積與和之定義，以示其推"類"若"數"之說。

設有K類分之一類分，K之積表明由k所有類分之各元形成之類分；如：

$$P`k = \hat{x}\{\alpha \varepsilon k \cdot \supset_\alpha \cdot x \varepsilon \alpha\}. \quad Df.$$

式中 $P`k$ 表k之積，k之眞性祇限α與β兩元，依通常兩類分積之演算言必爲可求。而同理對K類分之一類分和以存在之"有者"定之，如：

$$S`k = \hat{x}\{(\exists \alpha) \cdot \alpha \varepsilon k \cdot x \varepsilon \alpha\}. \quad Df.$$

如x屬於K類分和，則屬於k之和者有如算學基數所謂類分之類分和。

彼連誼之類分積 $P`\lambda$ 與和 $S`\lambda$ 亦爲同理界說。"數學原理" (Principia mathematica) 首卷述之綦詳，吾於徵號方程，略而弗論，特譯象徵定義，重爲語言之解釋，俾瞭然此類思想對"數"與"類分"之根本意義。

按羅素直認純數學與邏輯毫無差異。謂數學爲邏輯之發展，顧若輩絕對承認者。因數學結構中所具基本觀念，不外邏輯常數名辭與方

法。 吾人必先去舊哲學所持之算學概念，援用新數學所採之邏輯定義。 如伏黑基 (Frege) 與戡托諸家謂"數非若形容物性之物理表詞，如黃色之屬於黃金也"。 數亦非純粹主觀而爲客體之歸憑，故决無可感知之對象，而尤異精神自由之創造。 所謂數之定義，惟限邏輯界可能。 羅素以數學爲敍述因變者，實賴斯說之眞理表現。 彼認數之可能，惟用於通稱或全稱辭項或敍述式中，如云"人，地球之衞星，金星之衞星"等類語言之表現是也。 何也? 如"一"之數無一非表通稱辭之單個性"一人"或其它之一，卽以有定言，不外"一李白"。 此一之存在爲示詩人中有一李白其人；所謂屬於類分之個體，實爲同類之基數所有也。 再推是證，所謂通稱辭旣"有一"物之數，亦將有"無一"物之數，如"零"之存在，乃"金星之衞星"之通稱辭所有性。 蓋金星本無衞星也。 準是言之，數也者，實一般通稱辭或溥通敍述辭之性質；若以之言物質物或精神心理之"事故"，則皆失之矣。

通稱辭屬尋常語言之應用，其所限者乃完全事物之類分或集合性。(Collection) 且旣謂通稱必各有其同一集合之適應。 如通稱之"人，動物，政治，"等等同屬"生存"之一類分；以生存言數，則數爲類分所有，决非通稱所示某某範圍也。 故以類分釋通稱，似於無定中選取定數。卽有列舉敍述辭者，如云"此一，彼一，……其它"諸義，亦爲通稱性組織之集合式，表明其所以"是此，是彼，……是其它"之類分；質言之，"單個性"實如"一集合"之有。 若以列數觀念求集合，則不惟所舉者爲類分，且祇限於有窮類分。 實際集合者非皆有可列之數，故不如視類分包有之性質爲基數單在之便。 無窮類分之列數旣不可能，是卽應襲類

分各元之共同與特殊通稱法而言敍述，始見敍述式之惟一可能。（參看法譯羅素哲學中之科學方法第一六二頁。）由是知兩集合僻有同數者，必其間各元素之關係爲交互一致之相稱，或項與項爲一對一之連誼。如英國成婚男子數目吾人不之知也，然必知其與成婚女子相當，因其爲一夫一妻制。若中國者則有一對多之類，而多夫之制者則又有多對一之類。至於栢拉圖理想國家制，則更多對多之有矣。所謂數之邏輯定義，就恆等言之，從而衍爲"一已知類分之各項數爲其各同類類分之類分"。算學所謂"一"之基數定義，乃因於是界說者也。其式如：

$$1=\hat{\alpha}\{(\exists x)\cdot\alpha=\iota`x\}.\quad \mathrm{Df}.$$

數之"一"爲單稱類分所有相似類分之類分。此單稱者非無，卽非"零"之謂也。如有兩個體屬此類分，則必彼此相當。例以時間之分鐘言，此一分必等彼一分；而彼此之分鐘更可析爲秒，無論所析爲若干個體位，其各羣集合皆等於分鐘或等於"一時"，故此"一"之類分，依所分言，具集合之數性；依時間言，終爲一特稱類分也。是基數之存在，就內包論，迺各類分有此同數之公性者也。若就外延論，依類分集合揭示之亦無不可也。

旣知夫"一"者類分之類分說也。然則"二"之數類又何歸焉？曰"二"者"對偶"之類分也。其式列如：

$$2=\hat{\alpha}\{(\exists x,y)\cdot x\neq y\cdot\alpha=\iota`x\smile\iota`y\}.\quad \mathrm{Df}.$$

式中 x 與 y 無級次之分，乃兩不等之和。從而三爲三元，四爲四元，各順其獨立之數以爲證。故以類分限數者其誼不及夫整數之自然秩序，惟有獨立表所含集合之因變數。如以"三"言，有"三時，三星，三農，三

國等"集合可示三之數。然此數决無與"前位"之"二,"亦無關"後位"之"四"也。明乎是誼,斯知"零"之類分以"無有"爲其界說之故焉。零之定義,如:

$$0 = \iota ` \Lambda. \quad \text{Df.}$$

此類所示,揭 φ(x) 標辭因變中,x 終處於僞也。

本各界說之義,知兩物之類分有同數者可證,而不同者如一較大亦爲可證。如以"十二律"證"八音"。兩類分元素經對稱列舉後,知類分之十二律,大於八音之類分元素。故以類分之類分言數,能於無窮觀念之外得數之意念。古初民之列數認識,悉據此法衍申,野人無小數之知,困純數之理,欲其瞭舉數四或五而不得也。然於大羣牲畜,則又數之昭昭,若有人於其千數百頭牛羊羣中竊取一二頭,則彼反知之甚易。蓋其類數相稱之一致觀念,使對數具體化,而有事實記憶故耳。

據類分之類分,界數之定義,爲說徒便"零"與"一"等類基數量可證。所謂數之"序數"觀念 (Nombres ordinals) 正連誼之存在,數學邏輯家寧有忽視之理耶? 二十世紀初,班洛派即有序數基本標辭與觀念研究,然未獲溥汎數學之功,羅素派推而益進,完成全部數之邏輯定義。玆迻述如次。

班洛派視序數論如連整數 (nombre consécutif) 之觀念。換言之,以承續性定整數,以有窮數别無窮之謂也。按此派方法,取公律式之定義,先設不可界說之三大基本觀念爲"零""整數"及"繼數"。此三者各不相同,零爲一個體,整數爲一類分,繼數爲因變,由是組成五大基本標辭,或謂之公理:

(1.)零爲一整數；

(2.)零非任何數之繼數；

(3.)任何數之繼數爲一整數；

(4.)兩數不能有同一繼數；

(5.)設 S 爲一類分具零數者，如彼包整數 x 則必具 x 之繼數，而凡整數亦將如是具有焉。

謹按第五公理亦名完全歸納原理，(Principe d' induction complete)其說證明對一標辭可證之事實，必等於一類分所屬之事實，"如一標辭對零爲眞，則其對n眞時，對 n 加一亦眞，即對凡有整數皆眞也"。班洛認此五公理足證算學所有存在。吾人以有窮數論攷之，一無疑難。然就邏輯觀點推驗，則未免貽爲缺憾。蓋三大基本觀念所示，既鮮整數相隨之有定存在，亦乏所定之單體個位性 (unicité)。彼單位性之不明，則自三基本觀念將衍無窮異類數同適公理之條件。設以1代0，不論數之級進如何，以任何數代之將亦無所見其不可者，是整數之起自1而非0矣。(即公理2之得證也。) 若再以0,2,4,6……之級進數言，0 爲習見之零而各項之整數爲"二"之連續相加，儼然零居實在之列矣。因公理(1)指爲"二"公理(3)指爲"四"，餘數悉於是推證。若更以0代1，繼數代半數，則亦可證。總之班洛公理，於任何級串數之有限項數無不得由首項依次相及，因繁冗之方面得證，即不證者亦可瞭然。故於自然級進整數定義，未獲眞肯之界說，質言之，乏邏輯簡明之用。(參考羅素數學哲學導言第一章。)

欲解此自然級進之無窮不可析性，同時免去五公理無限差異存在

與三基本觀念之無窮可能，宜將零，整數，繼數，三詮界說定爲一致，使自然級進數亦歸於一致，其定義將如次之：

1°."0爲類分無有之基數"；

2°."1爲各類分單稱之基數"；

3°.一數n之繼數爲n加一，卽n與一之算學和。(算學加法爲邏輯加法之因變。)

4°.N表有限整數之類分，卽此數具0而爲S類分，如具n則含n加一。

由是觀之，三大基本觀念悉遵邏輯名詞確定，而整數定義，亦從是轉爲邏輯常式之名目矣。所謂由算學入邏輯之連詮，無用新增假設，獨於"類分之類分"說，理直可解。

按謂"屬於n之性質必屬於n加一"之自然級進數，羅素名爲連級關係之數，其數性曰"遺襲性"(Hérédité)。若以類分言，爲"遺襲類"。遺襲性屬於零者爲歸納性；遺襲類之含零者爲歸納類。凡零之繼承數皆爲各歸納類之數。如有一數之繼數之關係爲S，則任何數n對n加一有S關係，是n所具之性，n加一亦具之，此具之之性，卽藉"S關係遺襲"而來者也。是謂S遺襲性。就n而言，謂之S後裔也可。且此S關係之連詮推諸任何R之連詮固無不合。羅素名此類R性爲"R遺襲性"，其界說爲：

"有x項對y爲R連詮者，則x得具之性，y亦同具之"。

此x乃對它項而有者，或它項對之而有R連詮之項也。若其所具之各"R遺襲性"y皆具之，則稱之爲y之"R先宗；若言x之"R後裔"，則指

其對之爲"R 先宗"之項也。 如 R 爲父母之連誼，先宗後裔證之瞭然。以徵號定之如：

$$R_* = \hat{x}\hat{y}\{x\varepsilon C\,`R : \breve{R}``\mu \subset \mu \cdot x\varepsilon\cdot\mu \supset_\mu \cdot y\varepsilon\mu\}. \quad \mathrm{Df.}$$

R_* 爲祖先或先宗之關係，與尋常 R 連誼性同。 式中 μ 爲關於 R 之遺襲類。 如果 μ 關於 R 連誼之後裔—— $\breve{R}``\mu\subset\mu$ ——皆爲 μ 之子女，則必爲父而子之遺襲性。 如果 x 爲 y 之先宗，而 μ 爲屬於 x 之遺襲類，則 y 亦屬之，反之亦然。

若以數之連誼而論，其說雖仍爲類分所有，但較普通數之觀念略稱複雜。 蓋連誼有"次第"之觀念 (L idée d'orde)。 次第分二：一曰"一次" (ordre linéaire)，一曰"輪次" (ordre circulaire)。 前者指一項或先或後於它一，或介或不介於它二者之間，如直線之點是也；後者則尠此類關係可言。 如 acbda……或 adbca……之四項次，祇能謂 a b 兩次由 c d 兩項所間。 凡一次類分爲"通級" (suite ouverte)；輪次類分爲"封級" (suite fermée)。 定通級者須具三項，定封級者須具四項。故界立次第，法持有六：

(一)有類分焉，限不限弗問也。 其連誼之 S 關係（按 s 乃表明"是因於" (est le suivant de) 非對稱 (asymetrique) 非一致。（即無轉遞）如類分之每項爲此連誼之一前項（除第一項可不計）亦必爲其後項。（除最末次項不計）例如 aSb 與 bSc 但不能有 cSa 亦不能有 aSc 是介於 a 與 c 之間也。

(二)類分之任何兩項間有非對稱之轉遞關係 P。（按 P 表明"前於"或"先" (précéde) 如 x, y, z, 爲類分之三項，則有 xPy，yPx 兩誼之一。

如 xPy 而 yPz 則必有 xPz 此法所示無"封級"之能，因 P 爲轉遞性而 xPx 爲不可能故也。

(三)將類分各項順同一 x 項之差度列之，則各差度距離爲不等之大小量（或依差度之遞增次或遞減次列之均可）若 x 非第一項或最末項者，則有小於零之負距離，（按距離之零爲其本身者。）卽小於各正距離之差度也。此爰屬非對稱性者。如 xz 小於 xw 則 yz 必小於 yw。此理準前關係之 xRy 有連誼之：

$$xy>o$$

謂 x 先於 y，卽謂 xy 之差度距離大於零。得一公理式之："若 xz 等於 yw 而 xy 復等於 zw 則 w 與次 w 兩項相當"。

(四)有三項之連誼爲：

$$yR(x,z)$$

表明 y 介 x 與 z 間而爲對稱性者也。換言之，前連誼式等於：

$$yR(z,x)$$

直書爲 (xyz) 亦可。推衍之"如有 (xyz) 與 (yzw) 則有 (xyw) 與 (xzw)；如有 (xyw) 與 (yzw)，則有 (xzw) 與 (xyz)。

(五)於 x, y, z,……之非對稱連誼間介以非對稱之 R 連誼，構成一類分；此 R 連誼如介任何兩關係 x 與 y 間，則必 y 非 x 之反。換言之，如在 x 與 y 間，亦必居 y 與 $\breve{x}$ 間。（記號之 $\breve{x}$ 爲 x 之反換形。）由是得"封級"之界說。因 xRy 連累 $yR\breve{x}$ 連累於 $\breve{x}R\breve{y}$ 更連累於 $\breve{y}Rx$，此類級進，非若一項介乎兩者之間，迺兩對偶項互爲分隔之象也。

(六)封級有時於四項連誼之類分中,表兩對偶互分者。 其式如:

ab ‖ cd

衍之得(甲)兩對偶之對稱連誼: ab ‖ cd＝cd ‖ ab;

(乙)兩項各對之對稱連誼: ab ‖ cd＝ab ‖ dc;

(丙)兩項對稱排斥其它: ab ‖ cd 并 ac ‖ bd;

(丁)若四項有 ab ‖ cd 亦有 ac ‖ bd 必更有 ad ‖ bc;

(戊)如有 ab ‖ cd 與 ac ‖ be 則亦有 ac ‖ de。

是謂界說次第觀念之六法。 析次第方範,捨此無它。 然次第之本性究為何屬? 是又宜重述。

次第觀念之連誼發生者,由前述各方,固可概括之矣。 若更索其"公性"之所以然,則又不外兩大關係之引申性:一曰三項間"介於"之連誼;二曰四項間"分隔"之連誼。 前者稱"三元介聯" (Ternaire),後者名"四元分聯" (quaternaire)。 此兩連誼可約為一致同稱之"二進連誼",換言之,以一非對稱之轉遞關係解之可也。 爰次第之本性,洽證於斯。 即任何次第,獲膺此一致之單稱。 彼封級者劑為通級,困難因之亦易解焉。

由次第論而滋序數論,迺自然循理之證。 然此之謂序數,非若尋常級次之次第數,如第一第二……等,而為戩托所謂有序類分之"次序型" (Les types d'ordre),因抽象界說之者也。 論序數者宜首定相似級次。 蓋相似性之於有序類分,與類分之相當性厥為同理。 相當性對基數言,相似性則為序數者。 但兩皆稱曰"連誼之相似性,"依"關聯" (Correlation) 之觀念可盡釋諸誼矣。

"關聯"之連誼，證明兩項間如共存一關係者，則必有它一關係藉存於其間。 如地圖以南北分上下，東西別左右；其所示地位形狀，適應各行省位置眞在；所表圖形空間，與原地面積相彷，是之謂連誼關係。 此關係各具範圍，有同疇同性之場合，將連誼與所關係者織成一類。 所謂相似之連誼，非介於類間，乃介自以類爲場合之次第關係間。 次第因連誼生，連誼不同，故同類中有弗齊之次第。 設有PQ兩連誼相似，其場合中必有互爲應對之P關係所連兩元，通於Q關係之兩元。 如以象徵記之，以S爲一對一之雙通連誼，得型如次：

$$
\begin{array}{llll}
a_1 & Pb_1 & Pc_1 & Pd_1 \cdots\cdots \\
S & S & S & S \\
a_2 & Qb_2 & Qc_2 & Qd_2 \cdots\cdots
\end{array}
$$

型中一方示連誼之 $a_1\ Pb_1$，$a_2\ Qb_2$ 又一方示 $a_1\ Sa_2$，$b_1 Sb_2$ 從是知用P與S連誼之關係界Q之連誼，或反之界P或S亦可。 質言之，如：

$$a_2\ Qb_2 \cdot = \cdot a_2 \breve{S} a_1 \cdot a_1 P b_1 \cdot b_1 S b_2$$

$\breve{S}$ 表反聯者，由此知：

$$Q = \breve{S}PS$$

是PQ兩連誼之相似，必S雙通連誼爲P之場合，而所關係者乃爲Q之場合。 連誼演算，因而推及級進序數，分別有窮與無窮，更見"連誼數"(nombre-relation) 之存在。 此連誼數卽數性表現，屬連誼之算學問題，玆不具論。

第七章　象徵詮論

本篇各章，簡釋"數學原理"(Principia mathematica)巨著要義。揭全部分析之數學問題，顧不敢曰盡；昭哲學認識之邏輯定義，爰無不稱說。標辭關重，敍述綦繁；類分連誼，兼洽數術；貫求證譬，連逮變通；持一應萬，撮要舉凡；故象徵之演例未譯，而論理之擬型畢眞。學者體舉反之訓，發援推之用，瞭然足算，有本有文。若據虛搏影，碎辭舛駁，或詘象徵，或詆算式，妄標直覺，玩失朱程，(近人有以朱程爲直覺大師，鄙視象徵邏輯爲玩物。)斯匪所思之過，厥故迺愚而誣者也。吾於此不能無象徵詮論，載釋諸誼。

夫直覺具型，僉抽象原本；數學觀念，因以立式，邏輯概念，亦庸以正名。是故依直覺樹數理，襲對象皪認識者，無一非經驗事實之常。然而此一表之見，難竭彼一裏之蘊。數學所謂直覺形，睽闕乎本眞之式(forme essensielle)；卽一形直覺，捨理智，則固結不解；條件構造，非理性，則盤錯紛拏。故科學肇數學之端，銳胥抽象形式，而數學逐思想之勝，遽超時空物累。推直覺明白者入概然通象之則，援意像習慣者章溥汎表現之理。譬游克立幾何公理所持，無妨非游克立之矛盾對立；算術整數所是，尤不畏無窮數論之非直覺羣。所謂事有必至，理有固然。或以兒童記數指物，依類圖繪者爲知識；果以此難理性認識，是無異戕智賊學，視代數分析幾何爲無用科學而毀之也。吁，是豈可得耶？偏量性之關係，軼列數之連誼，其亦不知戡托後之超無窮集合論歟！吾人知"易象"二元，"河圖"定數，單簡自然，擬形象物，道器變通，

原始要終。 是故易者象也，象也者像也，曰取諸身，曰取諸物，通德類情，窮則變，變則通，極深研幾，精義入神，更窮神知化。 此何謂耶？曰數之變，象在其中矣，理之推，變在其中矣。 直覺會觀，唯變所適，雜物撰德，辨是與非。 吾故曰八卦不列，易之道息；列數不變，知之道窮。乾坤，貴賤，剛柔，吉凶，變化之公律也，此公律无方无體，仁者見仁，知者見知，百姓日用而不知，曲成萬物而不遺。 古希臘"物數"之推證，幾何"象數"之演繹，正同乎是。

是故探科學之公律，齊公理於溥徧，或移直覺趣邏輯，或驗具體通抽象，其功匪利於哲學，其要實需諸科學。 數學邏輯象徵主義，絕對肆應此功利需要產生者。 彼初立原始觀念之初級標辭，從而溥汎演繹之因變連誼，對"數"則概括應用，對"理"則展舒有次。 疎擲量性之數學概念，曰個體，曰具形，類以科學通玄達妙之理智直覺徵之，而弗拘獨斷定義也。 及其界說出焉，判於"標辭"，名於"類分"，顯於"連誼"，稱於"數目"；而此判名顯稱者，厥爲"不全"之象徵，非單簡對象或某一物情比也。 所謂眞理認識，依邏輯言，顧惟限標辭所表之型，與夫推理所具之實可得而定也。 若夫具體直覺元素，則皆化而易爲變項，雖有物驗，羌屬數學證明之純推理論。 取象應物，準型權變，或謂獨斷，實本經驗生之者也。

數學邏輯固未能"不脛而走"，不翼而飛，與抽象公理，立原始觀念，未嘗離哲學科學原則，而偏趨形上。 試析思想抽象定律觀之，數學邏輯精神，咸屬實證歸納，應用科學激切整峻之指。 其深遠特徵，於十七世紀間，卽代狹隘之科學，闢廣博之語言。 舉其例如代嘉德賴本尼支

溥汎數學論，早視理智關係之重，本體形上之要，决不亞於科學認識。康德昧守兩重，嬖組合判斷以裂科學與邏輯，强立形式，更別實質。而實證論者復不解先天理論，力斥思辨哲學，綴邏輯關係，結經驗連逮之物物關係，其蔽也甚而犧牲形式科學之幾何算數發展，徒取機械物理眞型。如此壁壘，應對森嚴，象徵論者如羅素諸家則取理智先天法式，述數學與邏輯關係；用經驗事實眞理，證數學邏輯公律，從而衍關係之本存，推公理之抽象，於哲學認識外，重幟一實證科學，使理性論之溥汎數學與溥汎語言邏輯，底於成功。

舊邏輯類攝哲學科學，故擬範疇概念者，未嘗別思辨之形式。象徵論創，理性新型；演算標辭，衡稱實證；邏輯科學，爲知識論別開門面矣。舊哲學故態，不復稱於今之世矣。彼唯心論者謬視邏輯爲思想實在之最高觀念性，斷眞理存在於恆一，納基本各立之標辭於已知一元，妄度意像眞元之先天論，而忘乎由已所證之眞理。雖曰直覺試驗，可告進無窮，實不知眞理，爰居連誼。唯用論者創理智主義之反，出眞理於自然情愛，定曰滿足行爲需要之信仰；自心理程序，釋眞理價值，斯不啻純謀功利，"欲"從速"思"眞，是豈眞之性耶？（參看羅素著哲學論文集(Philosophical essays)一九一〇年版。）一元唯心論者失於元學問題，多元唯用論者，復失於心理認識；兩毀邏輯特徵，同褫認識論諦。羅素評之曰：吾人斷一信仰之眞，其時精神無論如何不析眞之自身明白。今欲及眞而不先證實其理，則必使眞之意念立於原始與單純，視察觀與直接之"眞"現等若"僞"在。故曰"僞者連累所有者也。眞者乃爲所有連累者也"。眞僞之差，別於知覺之境，其分也如紅玫瑰之異白玫瑰。

世界構自概念與其連誼，物身之變，惟晰於概念組織，其異也惟鑑於關係公有之它念 (autres conceptes)。僞之存在，膺同眞理，其對精神觀察，具同一邏輯思想。如曰"君昔日之往，非智也"，以象徵記之，即 p 連累於 p 連累 q。此 p 固不定眞 (指昔之往言)，然以既用爲推理之件，則宜視爲"眞往矣"，雖 p 有邏輯實在 (entité logique) 之眞僞兩聯，必以其客觀之現實定之。譬云"蹈難者賞"，必先曰"遁北者刑"；以"退辱"爲眞，必戰士有"不退"之言。所謂僞性，直見於標辭矣。蓋判斷所示，皆精神認識之複元連比 (Rapport de plusieurs constituants)，肯定 a 與 b 間之 R 關係，非徒藉精神肯斷與"aRb"間之兩合耳。必也精神有合 b，合 a，與合 R 之多項關係，所謂判斷爲"一對多"之關係是也。故判斷之眞，必 a，b，R 關係間連誼共達完全肯定；否則謂之僞。同時 a，b，R 之客觀性存於秩序外者尙有其連誼之獨立價值。彼眞僞本性，如是新創，認識方法，悉操實證。哲學科學象徵，脫"形式" (forme) 而爲數學形構之級型解剖。拒純精神構造式，排純感覺觀察式，起關係之連誼於精神事物存在之外，襲關係純象，以覈連誼眞値，超康德所謂先天形式，別成其正直之"抽象界"。

然則數學邏輯論者之象徵，果欲使邏輯與數學邏輯統於絕對一致性歟？曰是尙不皆然。吾觀"數學原理"著者之論外範因變之因變與內存因變之因變，知其誼之別矣。按前章述外範因變，知此類連涵性，如以形式相當之因變"x 爲人，連累有死"代一"主率因變" (fonction-argument) 其眞値不變。而內存因變則不然，如"甲信以爲 x 爲人連累 x 有死"，代替之後眞値無定。蓋此類連涵性非主率之類分，乃主率

因變之特殊形式。凡因變之形，具一信仰希望，或心理生理傾向者，皆內存因變之因變式，非眞數學邏輯範圍而爲內包性之邏輯認識(Logique intensive)。然而思想進步，日新月異，以外內相別，僉程度之分耳。外內範存，非因變實差，謂之兩式可也，謂內存雜於外範亦可也。若以是劃邏輯與數學邏輯，未免失之過細，今日數理猛晉，"生理心理"之數學化，尤有驚人發覺，它日分析有成，內存因變，解如習用因變之實在必無疑矣。"數學原理"著者或亦早見其可能歟!

昔古第哈論代數邏輯，曾謂邏輯演算，惟限於概念外範關係。實則既標邏輯於演算，使異元表本性之抽象，而又使所異者於同聯或相等觀念之下相當，則必先視邏輯有量之相關性。且外範意義，連累"元素多元"或"類分量性"之意念，實已具數量因變之相對連誼，謂兩異性相當，雖無塙定限制，爰屬量之可能。數學所限之値固稱準量，然於精計之中，必析量之關係性，藉通數算之實。此卽證"量"與"質"聯，兩兩相攸，彼此儷偕。凡量之概論發展，卽質之組合所是；反之，性質抽象分析，悉趣量之關係演算，邏輯與數學，符契一持，了無間然矣。所謂"必然型式之推理科學"者，義證如是。古第哈謂數學爲"秩序連誼之型式科學"，更破散一切難題。學者試讀其數學原理(Les principes mathématiques)齊數量與連續不連續之關係論，知至理昭然，訖無毀玷。

第三篇　棣通證明之公理論

第八章　邏輯與算術之公理證明

數學邏輯論者援連誼演算，棣通幾何與算術之理論，既貫形體性質於秩序之誼，復通數量級型於關係之變。原理昭示，事實明辨。然而各科基本對象，歷史猶挾爭持，標幾何原理者，顧易擲純算術所難，析算學認識者迺難於再擲所困而不解。此數學家所以更與公理研究，畢證邏輯價值之新估計也。

算學之邏輯眞義，究如何定？各家持見，顯有進展之別。柯奈克(L. Krönecker) 視整數概念爲算學邏輯基礎。整數類分，卽普通概念(如通徑之值。)之直接已知者，凡非整數概念皆非邏輯。如此立斷，迹近違反邏輯原理。哀萊姆霍支 (Helmholtz) 樹經驗批評，除引申整數有窮無窮極限理論外，益增邏輯篋小意義。蓋吾人試驗可能，决無任意達相當大數之物類存在認識。哀氏所謂試驗數，雖曰"大多"，實居有窮極之小者也。克斯多斐 (E.-B. Christoffel) 起而反柯奈克思想，張無理數分析概念，雖其說近自由主義之理解，要亦不失算學基本問題之邏輯建樹。

然而整數本性論理化，實肇自伏黑基 (Frège)。氏立算學定律於普通邏輯，認整數概念之基性，如"整歸納原理" (Principe de l'induction complete) 之意旨。 謂一概念集合,必顯於任何對象中之有此集合性者。(此之謂任何實卽有定之概念。) 雖然,此集合云云,或未曾脫超所謂集合論之僻論批評,若論邏輯演繹原理,則發覺抽象價値者亦正足述。 狄荳戡(R. Dedekind) 徵知是難,端元學存在,建數論邏輯,惜其無窮論列,蹈矛盾概念之萬象集合論,邏輯之算學成就有限;算學之邏輯概念猶懸。 戡托集合論創,分“一致”(consistants)集合與“非一致”(non-consistants) 集合爲二。 問題紛爭者固可释,而眞理主觀者則過甚。 謂之不盡及邏輯也宜。 易栢 (Hilbert) 之“公理論” (Axiomatique) 出,始一掃前蔽,軏發新辭。 其初也,同歸算學基於邏輯之衆議;其繼也,檢論邏輯內賊算學之湛因。(如集合觀念及有限數念。) 兩端齊執,如環轉樞。 故其終也,認邏輯與算學原理,必同時發展,尤必同時研其精湛公理,以見形數眞値。 氏之“算理邏輯,”與公理證明之說,迺嚴立於數學邏輯之中,而有峻徹之風焉。 玆簡撮以釋於后。(或謂易栢之公理方法,純屬直覺論之主張,非邏輯形式論。 吾意此不知氏所云公理之眞義也。 若謂之智仁各見似無不可焉。)

人類思想,匪不及物。 此物之辨,曰知之有。 故知必辨物。 詩曰“有物有則,”明概之方,宜揭公理。 易栢表所思之物爲“象”(objet),以一徵號記之。 初象單純,故始象一“1”,襲此象而成之羣,有二,三或多次重複之羣象,如:

11, 111, 1111,

斯卽 1 象本身“配合”由是而之焉之配合,謂之配合之配合。 纍纍珠貫,終於 1 象之本身配合也。 如:

$$(1)(11),\ (11)(11)(11),\ \{(11)(11)\}(11),\ \{(111)(1)\}(1).$$

既曰配合矣,則配合之自稱,亦將視爲象焉。不過原象1爲"單象",此則單之疊耳。單者非一,設有次象之單爲等式"="象。以此兩象構配合式,則有似:

$$1=,\ 11=,\ (1)(=1)(===),\ \{(11)(1)(=)\}(==),$$

$$1=1,\ (11)=(1)(1).$$

設使各配合式有不相當之差,或因各項序列之異,或緣象1與象=所感之境殊,則名單1象與=之配合a異於或差於配合b。設此兩象及其配合,任飾爲兩類分:*存在*類與無*存在*類。則任一象屬*存在*類者異於它一之屬無*存在*類者,而象1象=之兩單象所有"配合"則屬兩類之此或彼皆是也。設象1象=兩基本物之配合爲a,同時視a爲肯定辭,認其屬於*存在*類;更以$\bar{a}$爲肯定a屬於無*存在*類者。則知a之洽諸*存在*類時爲a之正準辭 (Proposition exacte) 而a之洽諸無*存在*類者,爲$\bar{a}$之正準辭。兩正辭a與$\bar{a}$間乃"矛盾"之是。

從是而之標辭集合之說,易栢邏輯益徵新義。設有AB兩標辭集合,記爲:

$$A \mid B$$

表形之義曰:"A聯B"或"如A眞,B亦眞"爲一標辭。此A名前提,B名結論。前提與結論,兩身能具多數標辭,如A_1A_2……或$B_1B_2B_3$……之類,列之可如:

$$A_1\text{與}A_2 \mid B_1\text{或}B_2\text{或}B_3$$

讀曰"A_1與A_2聯於B_1或B_2或B_3"。既已徵用負辭,此處亦可習用

“或辭”象如“o”(ou)以轉牽連之辭。因$A_1,A_2,\cdots\cdots$諸辭轉代以“無定辭”(Indeterminée)之“x”而於A(x)同一辭中，象1象=及其各配合皆代入矣。標辭之A_1或A_2或$A_3\cdots\cdots$及A_1與A_2與$A_3\cdots\cdots$亦將表之如：

$A(x^{(o)})$ 原式即謂“至少爲一 x”；

$A(x^{(u)})$ 原式即謂“爲一任何 x”。

兩式旣形，從是有經濟之複代式出矣。譬自已知1=兩象得構下列標辭兩式：

(1) $x=x$,

(2) $\{x=y$與$w(x)\} \mid w(y)$.

各標辭中x爲一任何者($x^{(u)}$)表明兩基本象之一或其配合之任何一也。第二式中y爲一任何者，($y^{(u)}$)表明之象亦同前義。而其間w(x)項爲無定x任何一自由形構之配合，全式各項宣示“如果有x等於y與w之任何 x，則有 w之任何y”。

此(1)與(2)之兩辭，各組“等號概念之定義”，故名曰“公理”(Axiomes).於兩公理中將x與y易以兩象之1與=或其它配合，則得所謂“公理之演繹標辭”(Propositions déduites des axiomes)。設有一般秩序標辭，其最後一辭之前提相當於前列各辭前提之結論：如以原有序首之標辭之各前提爲前提，以最後一標辭結論爲結論，則所得新標辭適等於公理之演繹標辭。如是遞衍，可獲多數新與標辭矣。

試自諸辭中擇一無前提之單稱辭a言之，將諸辭所表悉置生類，若屬無生類者，則暫勿論列。於是由兩公理衍得諸標辭之形式爲：

$\alpha=\alpha$，此處 α 即象 1 與象 = 兩者之一配合式。因而證明兩公理分用於存在類與無存在類間皆爲眞實；即言之，兩公理咸屬"正準辭"。公理之限定相等性概念，適迺捐棄矛盾概念之法。

前述公理(1)與(2)最好視爲無象標辭 $\bar{a}$ 之式，即無標辭肯斷屬於無存在類之某某配合，則象 1 象 = 之各配合中，空去無存在類，適可於公理之是。上述例比，極爲相當，蓋如彼代用，倘將來遇有難題，即易知肆應之方。

易栢旣揭前公理，迺進其數學思想之邏輯建設如次：

設有三新象如：u 表"無窮"或"無窮集合；"次 f 表"後率"(Conséquant) 再次 f′ 表"演算之棣通者"(opération correspondante)。斯三象悉接諸象 1 與 = 而有，因是更衍三大公理形式如：

$$(3)\quad f(ux)=u(f'x),$$

$$(4)\quad f(ux)=f(uy)\mid ux=uy$$

$$(5)\quad \overline{f(ux)=u1}$$

各公理之 x 爲一任何無定者，表明五基本象之任何一或其配合之任何一。名 u 爲無窮集合，此集合之"元素"配合爲 ux。(例如 u1 或 u(=) 或 uf) 公理 (3) 之誼表 ux 元素有一 f (ux) 定象之後率。此率自身爲集合 u 之一元素，揭定：u(f′x)，公理(4)表明若 u 集合之兩元素具同一後率，則兩者互等。至公理(5)所示，表 u1 無後率；質言之，u1 元素，將視同 u 之第一元素。

前新公理可依(1)與(2)公理之法檢證，而(1)與(2)兩公理亦可因此類新公理重爲新證其實在。厥故因已由二象中而爲五象配合，且 x

與 y 之外延亦增加。

然則總觀(1)至(5)之公理演繹標辭間，其能無矛盾耶？ 若以五基象及其配合分而置於存在類與無存在類間，是否能使五公理之演繹辭成爲所取之正準辭？ 欲答此問，惟須公理(5)之 ā 形表明有配合屬於無存在類。 依此公理獲一反證標辭形式，應爲：

$$(6)\quad f(ux^{(o)})=u1$$

它如(1)至(4)之各公理則無是辭之推獲也。 何也？ 易柘之證，更涉新理。 氏謂"相等性"爰屬"a 等於 b"式之配合，故凡相等式兩邊之 a 與 b 必爲單象之同數組織(或二，三，四，單象，或多數單象。) 其等式有若：

$$(11)=f(u),\ (ff)=(uf'),\ (f11)=(u1=),$$

$$(f1)(f1)=(1111),\ \{f(ff'u)\}=(1uu1).$$

如此之等式皆曰"同次等" (L'égalités homogènes) 吾人於公理(1)與(2)所引之$\alpha=\alpha$形式，洽爲"同次等"例。 公理(3)如將 x 代一任何象亦得同次式，至於公理(4)祇須前提自身爲同次，故亦無問題。 若等式之(6)則反證公理(5)爲非同次等。(對前公理(1)至(4)則不能反證矣。)必於式中以一配合代 x，旣代矣，而仍不得其同焉；蓋式之左端爲至少三單象配合，右端則祇限 u 與 1 兩單象故爾。

準前方法之要，得證(1)至(5)各公理之眞。 若欲得完整證明，須取有窮序數概念，並設數之等式概念辭，吾人旣有前例，不難更獲此概念辭之理也。 茲先論關係之所以，再及此理之誼。

若使 a 之所有象列諸存在類，(按a所有象爲公理(1)至(4)之演繹標辭)使其它象，尤其 f (ux)=u1 式之象，置諸無存在類，則分配之法皆適於條

件。五公理性質，悉證而無矛盾矣。是故"有定象"(objets définis)之出諸是理者，必稱捐棄矛盾之概念，光得視而為"存在"者也。彼"無窮存在"之 u，亦已得其有限或有定之意義與內含。

按前釋各例皆直證公理無矛盾。此謂"直證"非幾何通用者，蓋習用證明，必先事適當選擇，特構比證之例，斯為有效。公理直證，則屬普偏有效者也。

此外有肯定屬無存在類配合辭之 a 標辭，大概須有特別選證情形，是在公理(5)之標辭須知者也。

循組合法推焉，公理之無矛盾固也，適"整歸納"亦證也；以之聯絡前有，建成"最小無窮存在"(如1,2,3……諸序數之有定序型。)亦無矛盾性見焉。若更以之組織有窮序數概念，尤無困難問題。故知下列公理，實自前有公理根據來者：

"有集合數焉，如攝一任何元素，其第一元素含序數者，必包所隨之元素；此集合數亦必整包序數之最後元素"。

以此公理連前者為證，絕無矛盾可尋，(例如以數之"二"或它數證之，即檢得公理之眞。)從是排列有窮序數之元素，知由各元素形成之各集合皆具一"第一"與"第末"元素。以新徵號<象之，得公理式之：

$$(x<y \text{ 與 } y<z) \mid x<z,$$

此公理與前有者連逮而生；x,y,z,均表有窮序數之任何元素。果吾人襲最小無窮存在，則獲檢任何有窮序數之一，攝一"大於"或"上位"之序數存在之證。

易栢公理之棣通證明既立，其原理說明，更簡撮如次：

I.凡理論變化達於定準時,必要之充足條件,須新標辭之正準辭,適公理正準而無矛盾。換言之,新標辭所棣,必與配分於存在類與無存在類物象集合之辭無矛盾。

II.尋常邏輯之"凡有"或"任何"類的"無定性"之見於公理間者,絕對只限於前述配合式與諸象集合以內之表徵。故公理所注之標辭推衍,祇限此配合與物象得有之無定替代。如果增益基本象之數目,則公理同時亦增新外延,然須重證,尤宜通變。

III.普通"集合性"定義,視集合如思想一象m。其元素爲mx之配合式;是則元素觀念,後集合觀念而有也。(按此正易栢主張中之有以異乎習見集合論者。)演算集合意義,往往以"關係","轉換","聯瑣","因變"之諸誼應用。祇須不遇配分存在類與無存在類時之矛盾,則棣通關係,可謂"無矛盾存在"。

由是觀之,原理I所定者,意在於無矛盾之條件下,任何創造之新概念皆爲自由可能。此最普汎與最活動之原理也。原理II與III,易栢認爲解除前述整數論之困難與戰勝視集合本身不含元素之集合組織說。氏更另建定理,以證原理III之棣通一般集合論 其說如次:

設有1,……,α,……,k之諸象,而a (ξ)爲各象之一配合,式中ξ爲無定性。又設a (α)爲一正準辭,換言之a (α)屬於存在類分。由是必有一象m爲a (mx)式,無論x如何,原式爲屬於存在類分之正準辭。更轉而證a (ξ)標辭之ξ象爲正準或等於配合式之mx(o)。蓋a (ξ)之正準,依定義言凡ξ象皆m集合之元素故也。

證此定理之存在,首獲如下之新公理:

"m 象有下列兩標辭之正準辭：

(7)　$a(\xi) \mid m\xi = \xi$

(8)　$\overline{a(\xi)} \mid m\xi = \alpha$

質言之，如 $a(\xi)$ 屬於存在類，依新公理 $m\xi = \xi$，反之，則有 $m\xi = \alpha$ 之結果"將此公理連於前認之 $1, \cdots\cdots \alpha, \cdots\cdots k$ 諸公理象，若先"暫"視此連逮爲矛盾者，則無異假定能衍申各公理有如下之兩標辭：

$p(m)$ 與 $\overline{p(m)}$。

式之 $p(m)$ 爲 $1, \cdots\cdots \alpha, \cdots\cdots k, m$ 諸象之一配合。在 $p(m)$ 中，凡 m 象配同 ξ 象。故用(7)或(8)公理，則計及公理(2)。若代 $m\xi$ 以一 ξ 或 α，則 $p(m)$ 自轉爲 $q(m)$，而此 $q(m)$ 中將無 $m\xi$ 形之配合矣。從是 $q(m)$ 標辭，得推算自公理及於(7)與(8)兩辭前所定諸象 $1, \cdots\cdots \alpha, \cdots\cdots k$ 之認識。如在 m 中代此諸象任何之一，標辭仍爲正準。(譬以首象之 1 代之卽可證。) 同理用於 $\overline{p(m)}$ 亦無不適焉。緣此暫時假定，意謂理論之導入 m 以前，必有矛盾形式之：

$q(1)$ 與 $\overline{q(1)}$；

實際先既認 $1, \cdots\cdots k$ 諸象存在無矛盾，則弗有前式矣。故暫時假定宜消去，直認 m 象爲無矛盾存在。

IV. 旣證公理之有效，更認其適於存在類與無存在類棣通之配分。然則此配分兩適之可能是否無問題正宜討論，或曰：彼推自公理之標辭，如依前面所述方法特殊化之或配分之，是否導入一矛盾耶？斯言也若以舊邏輯法則連於公理，如：

$\{(a \mid b)$ 與 $(\bar{a} \mid b)\} \mid b$

$\{(a$ 或 $b)$ 與 $(a$ 或 $c)\} \mid \{a$ 或 $(b$ 與 $c)\}$

則有兩種情境,證明公理固有式,實捐棄矛盾概念者。 第一如謂其有矛盾之是也,是必假定未經成立"理論"之前暫有者;第二如謂演繹乃得自公理始推及矛盾,是必此演繹自身牽及矛盾也,吾人可去而不納諸用焉。 彼無窮存在之非矛盾說,聿修厥證之眞。 前述公理 (1),(4) 絕不衍等式(6)者,其亦斯說之要也。

V.總之吾人所采"諸"象,"凡"無定,"各"配合,等等字樣,皆用於有限數之物也。 既定"有窮數",復益以溥汎之誼焉爾。 謂斯誼同於整歸納法實無不當。 證標辭(6)之異諸公理(1)……(4)者厥故在有窮數之可采,且從而標辭(6)始得以證。 是故"證明"之自身無玼,爰同類之連累矛盾者,概屬相似證明,方條件尊嚴,否認其存在可也。 易栢建"整系之公理"(L'axiome des systemes complets) 證實數集合之適乎公理者,其義悉持是解。 戡托集合論,阿來夫 (Alef) 矛盾論,皆循是而無矛盾焉。

附注: 以上各節譯自一九〇四年第三次萬國數學家會議易栢論文大意。 讀者參閱氏著之邏輯與算學原理 (Ueber die grundlagen de logik und der arithmetik) 及幾何原理(Grundlagen der geometrie) 可也。

結論:公理證明之系統,乃演繹論之經濟法,雖其軔設也無定,然此無定非自由所配。 蓋演繹論原始觀念顧不許具體、心理、直覺、等類意義牽涉,而"約定俗成",則亦非偶然。 原始觀念厥爲無定象徵,襲邏輯演算以轉移前提,其轉之者罔知所是。 昔羅素曰"數學科學中,罔識因

何爲辭，尤不知言之眞否，”直覺一辭，無忝於演繹類用也。演繹公理純檢型式性，離實質用；旣獲型式之邏輯，斯棼泯之物象，得藉手爲證。是故異類物元，於同型演繹中，膺多數解釋；譬幾何一科，差戾固若參星；合理則統一厥中。邦加赫 (Poincaré) 曰“數學家弗覈物象，惟計物物間關係耳。故以此物易彼象，如連誼不更，無以異也。物質無謂，形式有道”。(科學與假設一著第三二頁。)

易栢派之算學公理，羌一數學邏輯原始標辭之蒐討證明。其法首訂原始標辭與觀念相續之塙實理論，次求襲此理論所可釋之新象無定或無限理論。改造羅素變通公理之型級區分說，專持個體與屬性之總和與存在，使新個體屬性不得混入已視爲原始總和性之限定關係中。如此之形式及推理，本身完全一致構造，因而推證之一切新形式，雖各有構設之不同，實則與原始關係根本無矛盾可能。如投影幾何或習用幾何之公律一旦認爲無矛盾，由是而之非游克立度量之標辭演算無難矣。彼游克立命題相續之證，旣保於分析原理，復證於座標方程者，厥故亦昭昭諦如斯誼也。算學原理申而使數學算學化，轉爾分析連誼，直接載生；更通爾數學邏輯獲解，連環棣達，謂之數學科學膠固範型，闡繹相因，其理奚待論而後曉然耶！

第九章 構造證明新論縷解

立原始觀念,與原始標辭,然後循定義,建溥汎新象認識;更因證明,展演繹新標辭論,此數學邏輯之首要也。推理愈繁衍,物象溥徧之定理益增翔實;構造趨公理,邏輯型式之證驗畢究眞僞。是故學者探型覈式,悉秉幾何絜矩,構設機械定律,棄直覺假設,蒐論理象徵,邏輯配合,不期然而貫串乎萬有之形類矣。研此法者代不乏人,要以易栢公理方法爲能集大成也。玆爲縷解,比校前述。

幾何構造,形自"點""直""面"之三元。今象此三者曰:A.B.C.……,a,b,c,……,α,β,γ,……。聚 A.B.C. 名曰空間,視 a, b, c……α,β,γ……則爲點之類分。世界物形,罔非是象之有,而三元關係,則表於"位其上","之間","齊於","平行於"諸四誼。吾人對此關係,無感覺實有之精神表揭,惟形式性質之檢證可能。處處認識,先容邏輯,方程譜算,逼進象徵。如"位其上"之一誼,正邏輯概念之"屬聯性"也。援是推類,度量幾何之點、直、面、互爲可證而亦互爲不待證之公律定義矣 (Definitions par postulats)。易栢擴此意義,謂前四關係第一爲"位置",第二爲"序列",第三爲"相當",第四爲"平行"。斯四者適通連續性公理,故得立四原始標辭公理。尤其第一關係之屬聯性公理,揭幾何所有,章邏輯演算,宜詳舉其要。

易栢列屬聯性公理爲六:

一曰:如有 A 與 B 兩分點在;則有,且祇有 a 一直在;斯謂兩點屬聯或同聯於一直;

二曰：如有ＡＢＣ三分點不聯於同直；則有，且衹有 α 一面在；斯謂三點屬聯於一面；

三曰：如果一直 a 之 ＡＢ二點聯屬於 α 面，則 α 直同屬此面；

四曰：如一點 A 同時屬於 α 與 β 兩面，則必別有一點 B，同時屬此兩面；

五曰：如有一直 a，至少有 A 與 B 兩分點屬聯此直；如有一面 α，至少有 A．B．C 三點不屬聯於同一直 a，或曰非共線性 (non-collinéaires)；

六曰：至少須有四分點 A,B,C,D，不屬聯於同一面 α，或曰非共面性 (non-coplanaires)。

公理既舉，吾人試回至本書第二章論屬聯同聯諸關係及演算之形構，瞭然各公理之棣通於邏輯關係矣。所謂幾何不證之觀念，譜諸邏輯象徵，斯豁然可證。何也？按演繹論之原始觀念，依數學邏輯家言，建自下列兩相：

(甲)因存在公律或形構律所建之物象類分或物象觀念；

(乙)因連誼公理所建於類分與物象間之特別觀念。

從此申而有原始標辭之：

(上)形式邏輯觀念之辭；

(下)由邏輯先科學引申觀念之辭，如幾何中之算學觀念。

依是言演繹"法構"者，則幾何公理證明之內含必有三大程序，於條件之始也，訂"幾何"不限之觀念，或指物象抑物象類分，或揭物與類分間之特別關係；於條件之繼也，昭"算術"之數之觀念；於條件之終也，明

"邏輯"集合,相等,相屬或屬聯之觀念。幾何的,算術的,邏輯的,之斯三者之條件備,原始標辭羌無不證之誼矣。彼易栢之公理構造,與夫算術幾何原理之邏輯創設,羌在是說之根本可能也。

公理旣立,定理得而推循。質言之,證明之構造,斯締結端整矣。是故持前六公理以建定理,易如也;以證定理,適如也。設有定理焉:"由一直與直外一點,必得成一面,且祇有此一"。意謂如有一直 a 與不屬此直之一點 A 則有,且祇有一面 α 得屬聯此 a 直與 A 點。欲證此定理,請自易栢公理推衍。

先察六公理通性,依易栢言,前一二四五之四者稱"形構原理"(Principes formateurs) 卽宜示旣認有存在之物象爲眞,則隨其邏輯關係之它象亦必眞。換言之,一標辭判斷含三類結構。如云"兩分點定一直線,且祇能定一"。原辭內含一"存在判斷"之假言,(如有兩分點在,則有一直線存。)一"屬聯判斷",(此兩分點屬聯於此直線。)一"單體判斷"。(此直線乃唯一者。)四者之中一二兩公理又稱單性律。(Postulat d'unicité) 第三公理名關係公理 (Axiome de Relation) 第六公理則稱"存在律" (Postulat d'existence) 蓋必有無限分點在,分直線在,分平面在,然後始得存在公律之六也。

上類旣析,再證定理。依邏輯言,任何標辭由一"假定"與一"正定"構成。如此,是宜先察定理之假定是否矛盾。遵存在律與形構原理觀之,一直 a 與一點 A 之在直外者有合理之是;換言之,無矛盾。由是宜假定中之條件如次:

(子) a 是一直,

(丑) C是一點,

(寅) C不聯於a直,

"正定"之待證者爲:"有一面 α 在,且祇此面屬聯a直與 A點"。

襲三段式之型,將假定之已知條件連於待設之條件。以公理五爲大前提:如有一直a至少有 A與 B兩分點屬聯此直。以假定(子)爲小前提:a是一直。結論有構設之兩新條件爲:

(卯)有兩分點爲 A與 B,

(辰) A與 B屬聯一直a,

如公理二視爲大前提,(丑),(寅),(卯),(辰),各條件視爲小前提;則新演爲:

(巳)有一平面 α 且祇此一,

(午) ABC三非共線屬聯 α 平面,

如以公理三同(卯),(辰),(巳),(午),各條件證之,則得結論:

(未)直線a屬聯於平面 α。

由是正定待證之"有一 α 面,且祇此一面屬聯a直與A點"迺將自(巳)(午)(未)三者所有邏輯積之標辭,再用"單定律"之法(第二篇第三章)消去(午)辭 A與 B點屬聯 α 面。

此構造證明法,乃創自原始標辭對定理無矛盾之可能。是此條件確立,始得認一任何直,與一不屬於直之點之邏輯存在。因之形構原理(一)得於兩點與一直存在可能性間立一相等性,且因相等替換律之可能,更引得蓋然判斷辭之"三點非共線之邏輯存在是否可能"?至是"存在律"(六)遂將蓋然者,易爲實然判斷(assertorique)。論存在律

之轉換邏輯判斷,正所謂邏輯因變可能之一詮爾。

立證雖至此時,彼問題正定尚未之决。 故必援三段演繹,形構證明。 凡證明之大前提,皆關係公理或形構原理,質言之,關係者或存在者之假言判斷;小前提皆由定理假定之條件,或邏輯積建立之條件所組織之關係者或存在者之定言判斷;結論卽關係或存在之定言標辭。 以式明之:

I, 子:⊃: 卯辰,

II, 丑寅卯辰:⊃: 巳午, III, 卯辰巳午:⊃: 未.

式中子丑之類,表關係或存在之定言標辭;結論卽連累式之所解; I II 之類,表大前提之假言標辭。 三段式之秩序遂證得第一式結論,屬第二之小前提;而第二之結論,則爲第三之小前提矣。

公理證明之構造說,準前述各例,學者當易瞭然。 吾今更於此處推用易栢算術與幾何雙方,重檢公理整嚴之象徵結構式,說如次詮。

設有象曰 P. 表幾何"點" (Point) 之存在數,由斯象類構之"羣"爲"線" (Line),"面"(Surface),"體" (Volume),徵象爲:

P, PL, PLS, PLSV.

或類羣及於 n 度次,皆單象本身移動配合之連接集合。 第一次必然連接之位置表現爲線,再次移而接爲面,復次重而爲體。 謂 P 象屬幾何發生之數或元,名它物象之因數可也,其作用同算術之"1"數性。

幾何公理與定義之配合,皆得襲物物間關係之連詮,使任何類分聯成複合類。 由各象單純關係間 (如 P 之後率爲 L 而 PL 則爲 S.) 建連詮之載生定義,證明配合之標辭,悉屬公理公律直接所有。 或謂一部幾何

元素，洽如算術邏輯結構之單純配合的公理羣集者以此。今依公式列明前象關係：

(公式) P, $(P)\mid L$, $(P\mid L)\mid S$, $(P\mid L\mid S)\mid V$.

各關係間 P 爲原象或曰基象，它如 L,S,V 爲次生象或因生象。如以序列言，L 爲 P 之因生，S 爲 L 之因生，餘類推。象象間定義，由基象存在類分限定之。其變化意義之可能，依因變連誼得限示如：

$$(1)\quad P=(x^{(0)}),\ L=f(P),\ S=f(L)\mid P,\ V=f(S)\mid P\mid S.$$

P 乃不可限之形量，然至少須具一任何意念如 x 之存在。依集合論推之，前各等式得簡列如：

$$(2)\quad P=\{x\},\quad L=\{P\},\quad S=\{L\},\quad V=\{S\}$$

按游克立幾何公理，凡幾何象，可析爲小分象，是知有：

$$(a)\quad \{P\}=(p_0\ p_1\ p_2\cdots\cdots p_n)$$

$$(b)\quad \{L\}=(l_1\ l_2\ l_3\cdots\cdots l_n)$$

$$(c)\quad \{S\}=(s_1\ s_2\ s_3\cdots\cdots s_n)$$

$$(d)\quad \{V\}=(v_1\ v_3\ v_2\cdots\cdots v_n)$$

前式 p_0 表點爲形分可能而又無"度次"存在。游克立之空間存在性，更表明同次或同度空間之各部分相當，是 (a)(b)(c)(d) 等式之小分象得列爲：

$$(e)\quad p_0=p_1\cdots\cdots l_1=l_2\cdots\cdots s_1=s_2\cdots\cdots v_1=v_2\cdots\cdots$$

空間爲元素不變性之運動，其集合表現，雖達最大轉換，亦無矛盾存乎其間。質言之，線面體各殊象之各屬元素相當(Congruent)，即"象之本身等於元素集合而爲自身相當"之誼也。列式明之，如：

(3) $P=\{x\}^{(o)}\frown\!\supset P$, $L=\{p\}\frown\!\supset L$

$S=\{L\}\frown\!\supset S$, $V=\{S\}\frown\!\supset V$

式中$\frown\!\supset$表相續性，即謂 P 至少有 x 集合始續而爲 P 象，L 之集合 P 當續而爲 L。餘類推。準是知基象原始意念必爲理性相當之恆等式：

(4) $P\equiv p$

由是證衞葉斯堦斯 (Weierstrass) 戡托狄豈戡諸家所謂直接連續律與空間連續存在之說矣。且證下列標僻之眞理，亦爲自然明確之定義：

(上)凡具同一基象之幾何象，彼此必互爲連續性之有，

(下)線面體皆具同一 p 有也，其集合元可析爲等諸 p 之有窮或無限小分，形爲 p 集合元之等集合式。

兩標僻之定理證明，揭幾何"相當"之誼，洽如算術集合之因變義，邏輯理論亦確證無疑。象徵列式，舉如下型：

(5) $L=\left[\int_n^\infty f(p)\,dp\frown\!\supset\{P\}\right]\mid P.$

即謂"L 象之集合，等於相當元素之積分和而連於基象 p"。此式可表標僻(上)(下)兩說之證明。若標僻(下)則亦同證如：

(6) $S=\left[\int_n^\infty f(p)\,dp\frown\!\supset\{P\}\right]\mid L$

(7) $V=\left[\int_n^\infty f(p)\,dp\frown\!\supset\{P\}\right]\mid S$

連於線之面謂之連於基象因生之 L，連於面之體謂之連於因生象之再次或再生之 S。此三式可能之關係，基於一連誼標僻之是：

(8) $R=R_3\ni\left[\int_n^\infty f(p)\,dp\frown\!\supset\{P\}\right]$

式中R 爲線面體連合之共有關係。依(5)(6)(7)三式，則此式解爲："R 爲

LSV之集合元素的每一基象連續關係,且祇此 R 關係"。從此得證:

(9)　$P \mid L,\ L \mid S,\ S \mid V : \frown R \ni \left[\int_n^\infty f(p)\,dp \subset\supset \{P\}\right].$

能直接證得:

(10)　$L, S, V \varepsilon R_P : = R \ni \left[pR_L, pR_S, pR_V : \supset_{L,S,V,} P \varepsilon R : \equiv \right.$

$$\left.\left[\int_n^\infty f(p)\,dp \subset\supset \{P\}\right]\right].$$

"所謂共有關係爲一關係,其共有象爲共有關係之相等關係"。若準前(3)式中之第二式及(5)(6)(7)(9)各式,則推得(8)之連誼式爲:

(11)　$R \equiv R \ni \{P\}$, 或 $R \equiv \{P\}$.

"共有關係相當於共有元素",是知:

(12)　$(P) = \{P\}$,

換言之,"純單位攝一複數性"之存念。故檢證爲:

(13)　$P \to V : = : R \ni \{P\}$.

C. Q. F. D.

此標辭結論,證明公律之"凡包攝之包攝象,納諸所包攝之中"。卽言之,"同一關係之關係物,彼此互爲關係"。按自點至體之同誼爲同元性{ p },合點線面體之關係,表各小分"適一"之公律性。凡幾何算術證明,應截除物質現象粗現之體,以型式演繹推之,俾任何物質得適於用,無庸直覺感觀分辨,自有公理連貫證明。是乃捐棄矛盾之基本方法。

由(12)與(13)兩式可揭幾何空間關係之假定公式如:

(14)　$G = \int dG = \int\left[\int_0^\infty f(p)\,dp \subset\supset \{P\}\right] \equiv \{P\}_0^{n=\infty}$

G表幾何空間,意謂"幾何空間 G 爲同元單純而之複象之無窮小分之

和"。吾人循"重複律"或"整歸納"可證此"假定"式。設有式如:

(15) $\{P\}+p_1\equiv\{P\}$.

因{p}之第一元素包攝一切，而又不能等於任何數量性,從此加一新元P_1之和,實不過如(11)(12)所證之"不同元集合仍相當"。是加號廑一配合表現耳。若更推之:

(16) $\{p\}+\cdots\cdots+p_n\equiv\{P\}$.

仍爲不變,依重複律得證:

(17) $\{P\}+\{P\}\equiv\{P\}$.

(18) $\{P\}\{P\}\equiv\{P\}$

是證:"兩集合或多數之和,爲各點集合包有之存在；其積,爲各點集合共有之存在"。斯知齊一律之:

(19) $\{P\}\supset\{P\}$, $\{P\}=\{P\}$.

如果有任何幾何象 X 爲:

(20) $X=\{P\}_{\circ}^{\infty}\equiv\{P\}$.

則知

(21) $\{P\}\equiv X$

前各證明式之邏輯構造,使幾何算術之相當，棣通於邏輯之齊一。此巴栖(Pasch),范和勒斯(Veronese),與易栢諸家勳績貢献者也。巴栖視幾何象間,凡點之配合關係相當:

$$M\equiv M'$$

此相當式爲"兩通"之完全棣通式。即證:

$$M+A\equiv M'+A'$$

確定形體配合間,元素與元素相當,衍之對直線與面之類所有本性無不相適。

若范和勒斯方法,則以兩圜分代兩形,因之一切公律皆連累於直線之原始觀念或基象。

易栢更視圜分與角爲原始觀念。是所謂相當,即圜分與角之間所具之齊一對稱關係。如 m 爲圜分,p q 爲一點;又 m′ 爲圜分 p′ q′ 爲一點時,如使:

$$pm \equiv pm, \qquad mq \equiv m'q'$$

則有:

$$pq \equiv p'q'.$$

如 p m q 與 p′m′ q′皆爲不同一直線之三點,又如果:

$$pm \equiv p'm', \qquad pq \equiv p'q',$$

$$\measuredangle mpq \equiv \measuredangle m'p'q'$$

則有:

$$\measuredangle pmq \equiv \measuredangle p'm'q' \text{ 及 } \measuredangle pqm \equiv \measuredangle p'q'm'$$

由此得:

$$mq \equiv m'q'.$$

栢黑 (Pieri) 輩更於限定圜分時益以"點"與"運動"之兩念,力證算學幾何之無矛盾性,去盡直覺無謂爭端。

結論　前各推論公式,唯一原則,即凡標定之各概念,皆得建邏輯之若干其它概念。從邏輯演算原理,知集合性之論理證明,能表揭連續事物之變易形式;同時對變易關係之假定可能者,更得限次第可能

之後來關係。是故邏輯推理,非惟原理配合之形式方法,實屬配合徵象與應用原理於配合之演算方法。各原理遵旣定事物,締衍新象表現,復循此表現之配合,無限構造新興象。所謂科學創設,正如是發展,分析數學之展衍,數學邏輯之因變,及幾何 n 度之變易性,僉屬如此形構進步者也。

科學家往往反證肯斷原理,謂:"凡結論之肯定卽原理之肯斷者"。蓋因邏輯方法,早認:"先立標準象之假設,徐覈中間關係,然後證發展之必然條件"爲思想認識原則。質言之,邏輯科學,始名目論式之定義,軔建新象,推證所求;更自已知象與所建象求其關係,而邏輯式之新關係從之出矣,認識如是翻新矣。然則謂邏輯方法爲知識無限發展之思想活動法,誰曰不宜。此孳生不絕之創造型式,以演式推之,立見無限可能。

設有 $m\,n\,\xi$ 三標準象,今建兩新象如:

$$p\equiv(m\xi),\qquad q\equiv(n\xi);$$

兩式名三象集合之聯項性;從是類推,得:

$$U\equiv(p\xi),\qquad V\equiv(q\xi);$$

$$X\equiv(u\xi),\qquad Y\equiv(v\xi),$$

……………………………………

此處 $m,p,u,x,\cdots\cdots n,q,v,y\cdots\cdots$ 之級數申而爲算術列數方式之有,如此遞衍,及於無限,若以數學歸納證之,了無不合。

第十章　載衍與聯瑣之邏輯表現

時間空間表現之邏輯現象價值與眞理，具感覺差異與客觀理性之同一性。蓋人類精神內觀，以個人殊異行爲心理之眞實爲便，同時亦以自然科學現象之事實爲其中間。譬諸直接認識或公理證明者，無論情境單複，只須觀察或推證一同點現存，卽有外象類似之適應發生，或類似關係之某部分新關係的事實象徵表現。此其中厥故有二：一曰"載衍"(Reproduction)，二曰"聯瑣"(Association)。

載衍者，同類象某性相續之變似也。如：

Abc ∽ Amn，或黃橙橘∽橙黃紙，

徵號∽表"相續類似於"之義。

聯瑣者，同時意識現象之任何心理或形式接續表現之配合也。如：

$(A\circ b)\circ c=A\circ(b\circ c)$，

徵號 ∘ 表任何配合。

夫色曰黃，匪限橘紙二象，花、鳥、木、石、水、土、各類，皆有同屬性關係之變形差異。故無論分析也，配合也，載衍現象，悉獲聯瑣事實。設 A 爲橘或玫瑰現形，則 m 爲載衍橘之味，玫瑰之香，n 爲味載衍之甜，香載衍之馥。從茲聯聯相繫，新現實生，衍爲相續變異，形如試驗檢證之理。

載衍與聯瑣之邏輯表象，極似分析數學無窮連續之函數式，能推演各數或現象之連累值，如標辭之連誼存在：

或甲事實關係乙事實；

或甲意識之事實關係乙意識之事實;

或單甲關係乙。

各相似聯瑣之載衍象,全屬試驗基本對象。吾人觀察之經驗事實,無論演繹抑歸納,皆能定因陳連類之正確觀念;卽㩀自意識主觀標定迄事實客觀表現,亦無逃數學邏輯證明。如謂"吾適遇之張某,極貌似李某"蓋張李有多數相似之 A B C D,而異有者亦大可分別。列式如:

$$張某 = (A, B, C, D) + (a, b, c, d)$$

$$李某 = (A, B, C, D) + (m, n, p, q)$$

所加者爲其異相。則張李之關係聯瑣爲:

$$A, B, C, D \text{ 同時接於} \left\{ \begin{matrix} a, b, c, d \\ m, n, p, q \end{matrix} \right\}$$

從張某所具之 A B C D 引至異類相接之 m n p q 而爲李某全身表現,是聯瑣載衍關係,根本連諸因陳接似之變遷關係,如依數學組合意義觀之,則有:

$$a + b \text{ 與 } a + d$$

前者稱"相續"之兩不同項,後者 a + d 則爲兩"相似"情境。由意識觀之,可將 a 事實易爲非感覺之新項。但當易置時,a 事實漸離表現之空間時間,而將來未來之"b + d"事實,必漸向吾人表現中參進,及至意識情境,始見:

$$b + d$$

之事實,更於相似中剔去 d 象,重見新事實之

$$a + b.$$

是由 a 而有:

$$a+(b+d)$$

而又有 a + b 之載衍聯瑣,此正"相接律"之推理關係。昔心理學家認聯瑣迺合溥通行動之表現,實則屬諸邏輯載衍聯瑣之"發生"關係。今有演繹聯瑣標辭爲"凡 a 是 b,凡 b 是 c,故凡 a 是 c";欲證斯辭,必假定所設辭爲眞;換言之,有 X 現象載衍連續關係:

如 X 現象是 a,必是 b;

如 X 現象是 b,必是 c.

斯類組合相生之推論,不能弁三段式形式混爲一譚。蓋如完全肯定:

X 現象在一類分 K 中,

則不啻認:

X 現象與 a 有同一 R 關係,

或者:

X 有一現象屬 a 類分現象之 R 關係。

如將標辭肯斷者,易而爲:

X 現象屬於一類分,

則在類分觀念中者,更揭起難題無算。厥故因意識現象之心理事實,僉屬極端繁複,宇宙現象秩序與物體個別類分,若譜諸意識界之類分性,罔能卽別自然,隨時分類。其始也,惟有邏輯區畫之曰:類分 K,關係 R。故謂肯斷形式,舍邏輯外,別尠固定名實之義方也。

時空間攝無數載衍聯瑣之"轉換"關係,能使思想活動創造,趨眞僞同聯之決斷,捐矛盾存在之可能。設語詞之"先於"關係,以徽號→記爲:

$a \to b$

論是類關係之連誼，知 a 象與 b 象有其同聯特性之：

(I)凡 $a \to a$ 之標辭必非眞；

(II)如 $a \to b$ 之標辭眞，則 $b \to a$ 者必僞；

(III)如 a 不相當 b 而 $a \to b$ 者爲僞，$b \to a$ 者反爲眞；

(IV)如 $a \to b$ 與 $b \to c$ 則得 $a \to c$.

此 a b c 皆屬類分 K 之現象也。 若使之表明"量"，而徵號→表明"小於"之詞，各標辭所示亦對之屬眞。 再使之表"水平線之點"，→號表"下級於"，結果各辭亦仍屬眞。 是知→關係適諸四辭者，非偶然一致，乃限定宇宙相當秩序同元之觀念者也。

再如以 a 與 b 之"兩不相當"類分 K 現象觀之，據第三標辭則有下列：

$a \to b$ 或 $b \to a$

如欲固定各觀念實在性，假定 $a \to b$ 之事象；使 d 爲：

$a \to b$ 與 $d \to b$

之現象；則 a b 間只此一象，謂之 a b 間所有在此亦可。 曰"間"，曰"間所有"，其聯瑣限定爲：

如 d 居 m 與 n 之間，m 與 n 又居 a 與 d 之間；則 d 居 b 與 c 之間。

標辭證明之假設爲：

1. d 居 m 與 n 之間，卽：$m \to d$, $d \to n$；

2. m 居 b 與 c 之間，卽：$b \to m$, $m \to c$；

3. n 居 b 與 c 之間,即:$b \to n$, $n \to c$;

即證 4. d 居 b 與 c 之間,即:$b \to d$, $d \to c$.

由 $b \to m$ 與 $m \to d$ 兩事實衍而 $b \to d$;由 $d \to m$ 與 $m \to d$ 兩事實,衍而 $d \to c$。是證 $b \to d$ 及 $d \to c$ 即 d 居 b 與 c 之間。故即所求。C. Q. F. D.

循"先於"現象之聯瑣,反推"後於"之←象亦易證明。設有:

$$P \to Q \text{ 則 } P \to a,\ a \to Q$$

P Q 兩意識象如載衍於同一意識象 a,則有先於之"轉換性",其連續現象可表如:

$$(\alpha)\quad P \to a \to Q, \text{ 或 } P \leftarrow a \leftarrow Q$$

$$(\beta)\quad Q \to a \to P \text{ 或 } Q \leftarrow a \leftarrow P.$$

此二關係名現象之"間接",表意識中 a 象間於 P 與 Q 之間。因:

$$P \to Q \text{ 與 } P \leftarrow Q$$

如 a 間 P 與 Q 之間,則斯二象相接,否則不續。

按邏輯載衍與聯瑣原理之證明,於語言中獲重要關係。例一人連述兩語,不能逃先後與相同意識事實。但能知此先於彼之意念,只在其人述說時有定,如兩人同時述者又不一致也。因兩語皆屬兩差異之意識動作,甲不能同時知乙之行動如何。倘更欲使甲行動與乙行動達丙之認識,必須知覺間,兩行動先具丙之認識或意識表現,然後自各知覺之一轉知先於它一之表現。按是類行動知覺之"先於"觀念,惟限適當條件推衍。否則,離於逼眞矣。

例如一人連述 a 與 b 兩語,同時知彼此先後;若 P 意識聽及 a 先

於 b 兩語之"陳述知覺"爲 α 與 β，則先於之關係聯爲：

$$\alpha \to \beta$$

如 a b 兩語由二人演述，則在同一 P 意識之陳述知覺爲 α 與 β，若此知覺爲 α 先於 β，則 a 與 b 之"口傳知覺" α' 與 β' 於它一次 P' 意識聯瑣載衍爲；

$$\alpha' \to \beta'.$$

從此限定 a 與 b 之關係性：

（1）$a \to b,\ b \leftarrow a$

a 先 b 則 b 後 a。而在 P 意識之 a b 兩語之陳述知覺亦有先後關係，如：

（2）$\alpha \to \beta,\ \beta \leftarrow \alpha$

從是獲聯瑣互換性之：

（1）$a \to b\ ,\ b \to c,$

由此三語關係連累於兩語關係之：

（2）$a \to c.$

如同一 P 意識中斯三語之陳述知覺爲：

（3）$\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma,$

連累兩事實先於之：

（4）$\alpha \to \gamma,$

在同一 P 意識由 a 與 b 兩語關係衍 a 與 b 兩陳述知覺，則（4）之關係證明 a 與 b 之連接乃由（2）之關係獲得者也。

基心理言，吾人於適意選擇中，能續某項意識現象之回憶於它一適

意選擇者之回憶。 各回憶載衍聯瑣,復成回憶之新象; 如是彼此關節回憶,謂之意識現象結構。 其原則獨立保證,必爲邏輯"中間"所在。故自部分科學證明者,必有同聯關係之:

(V)如類分K中有獨一現象a,而無b現象之$b\rightarrow a$時,則此a名爲"首象";

(VI)標類分K之任何象m,同時有一n象終爲$m\rightarrow n$,而在m與n間必無其它現象發生。 準是, 如m非首象, 別一Q象成爲$Q\rightarrow m$者,則Q與m間亦必無其它現象;謂此Q先於m,而n後於m,或名爲首象與因象。

(VII)如類分k包於類分K中, 其包有之現象, 如同時攝首象因象而有,則必相當於類分K。

此全屬算學整數現象,第一第二以至載衍無窮,始終爲邏輯表現之聯瑣眞理。 然則載衍聯瑣之公理,豈無時間空間之絕對相或物理自然科學之誼耶? 欲解此問,別詳下章。

第十一章　時間空間之邏輯詮釋

甲　詮釋時空與數學之連誼

邏輯與數學有其不可限之觀念，此類不可限性，在方法與事實兩涂，幾成科學不可去之基源，舉數學而論，雖學者力建邏輯常式之基礎，然終難立於時間與空間之科學意義以外，重展數量之關係或連誼性也。故論時間空間觀念之不可限，實卽自邏輯常式以釋其連誼，决非感覺直觀之是也。

何謂時間？ 詮析之曰：時間爲各個性存在不相入之關係界 (univers des relations)；其相關之可能性，乃表同一個性之形自多數完全型式者也。

何謂空間？ 與時間相反而言曰：空間爲各個性分别相依之關係界；於同一個性不能覺到多數完全型式在也。

按此兩定義之觀念認識，出自邏輯標辭之"兼容性"與"不容性" 及"型式"與"個性"諸義，使時空離直覺而爲數量性質之數學關係相。 數學邏輯論者僉主斯說。 如古第哈襲純幾何對象以定空間謂"空間爲一序次性，有若連誼之一系統然"。 宇宙系統紛繁，此空間系統，乃多元發端之級次，其間各元又復自成級次，每級關係一度 (une dimension)。至於時間，實卽列數之可能性。 列數也，級次也，皆數學範型之兩類；質言之，時空觀念，俱邏輯構造之數學認識耳。

或曰依純數學言，時間非邏輯結果，空間亦非邏輯限定者。 余曰是正吾人所採定義之本意。 蓋前定義構造，純自個性存在關係言，此

個性存在接於"集合觀念,"從此斷定各集合間所有可能關係之本，同時卽證此關係悉屬數學對象。邏輯納於數學，而時空亦具於數學之中。

時間空間稱數學對象之純形式知識;其實在性,决非一簡單方法或範疇,謂之一明白型式之科學可也。內容攝"普汎元素"研究,獨惜此普汎自然,不得如個性之有,致數學精湛探討,亦惟限於空虛型式。厥故因時空爲普徧基源,而非精神個性,任何抽象不及限其定義;曰普汎者,實包單體性之存在而有也。

然則,時間空間非邏輯建設之演繹,而爲演繹條件之元學基本常式歟?曰此又宜檢證者也。所謂個性觀念有其邏輯基礎，同時更具類分意義。元學之時空,乃關係個性存在之普通範圍，由此獲證各個體多元性之同類數及一個體不皆具之容積量。因個體有摶一之限,故其存在只居有限之一。而時間空間存在,則爲使此摶一性兼容多元與總和之條件。時空與個性型式，咸稱宇宙熱烈衝突中之調和與理智要素。古第哈之序次性,義釋如此。

個性爲認識之範圍，表明思想所能搜討之極限物。人類智慧搜討,惟有及於時空連誼之解釋;若以極限言，元學思想以物質爲精神之極限;物理思想,以物質爲能力之極限;心理思想，以物質爲行動之極限。故物質存在,實以智能爲其界段,而所謂個體也者,實存於相對之是也。個象標不可入之界線，而斷片物質則由智慧或能力滲透其間。智慧動於極限之內,由關係以揭其能力範圍。(所入者及所攝者)故曰凡物相攝，决於關係之系統,是何言耶?曰是謂物理科學與精神科學齊進

於型式科學之謂也。物理科學直趨數學，精神者直趨邏輯；物理科學攝入物體，脫解感覺形式，將感覺性質納於最小元，如幾何機械元素，使各性質歧異者概歸數量之關係。反之精神科學則使各元素初具之性質關係，擴而爲差異之表現，質言之使最小性質與數量引申而爲最大型類之可能。從是數學與邏輯合爲認識之表裏，而立其原始不限之連誼價値焉。代嘉德之形數幾何，栢拉圖之抽象觀念幾何，兩兩俱證此連誼之眞。

夫以時空直覺之形數言，有形"感"之變，亦有數"序"之差，形與形具連誼之幾何，數與形復具連誼之範疇。若自覺知與空間觀之，歷史紛爭，問題不解。如康德先天直覺空間說，旣不見信於非游克立派，復反證於純算術論者及數學邏輯家，雖邦加赫曾以條件便利說曲庇直覺，實則未盡感覺幾何與物理幾何兩眞之連誼認識及問題而解決之。余意自認識論觀之必如雷柯思想，使物理家幾何家構造時空之邏輯連誼，明定形數表現之普汎認識；同時更使心理家碻立時空感覺之邏輯認識，俾感覺界直接物理界，則幾何物理與心理之兩大過橋貫通成功，斯認識有完全眞理可能，而理性有無限自由價値矣。

乙　感覺幾何之時空同聯關係

一飛鳥過予眼界，霎時予之視覺卽有一束狀態。此狀態形自鳥翼一動，此一動之事變結果卽與予以廣汎之"鳥飛"認識，是謂兩聯同致。或謂前束行動，納諸後束一般知覺之內，如一字之聲與一句中所具之聲；畫圖一角與全畫所現之景，皆爲同然之關係。每關係有其明白表現，躍過眼簾，而歸於全關係之聯相。此何然而致耶？曰感覺相之時

間內在與空間內在之同聯關係有以使之耳。 任何覺知象攝於它象中時，必同時有時間與空間統攝。 但時間所攝之關係，異諸空間所含之變化。 如以甲乙兩覺象言，謂甲時含於乙時之內與謂甲之直接空間含於乙之直接空間不同。 譬云深秋月夜予能見流星出沒，移時天空各處有現者。 此流星之閃射，時間上(非空間上者)聯於彼流星之閃光。 若目擊燃燒物時。 由濃烟迄而淡白，由重體轉而灰燼，則爲空間上(非時間上者)之聯合。

時空同聯之內在性，乃自"覺象"之甲時空內聯於乙時空中者言。反之若以時空本身言，是否同義？ 依雷柯所證，時間統攝與空間統攝，正內在性組織之必然與充足條件。 故吾人覺象之內在，實非單簡思維關係，必也既同値於時與空之連接，復洽合於連接之內在。 如"等邊三角形"與"等角三角形"，兩念不離，兩形無異，然而精神永有甲乙同聯之分辨。 此連接不分之內在豈眞不變耶？ 曰非也。 吾人視所對爲靜一，則內在同聯；若覺象動變，則一束之時空同聯無關內在性矣。

夫動靜兩覺，直見其反；何云乎動，何限乎靜，捨說辭外幾無復可證。 曰靜者，必物於感覺範圍所有時久爲同容積同位置；曰動者必物之容積於其直接變更之時間過程中有其轉移或變形。 此情此境如分割動體爲部分感覺，則無有焉。 蓋邏輯認識，不釋變遷與固定，運動與靜止之獨居，而亦不解無關之顏色。 其理如運動部分爲綠而靜止時爲藍，則動覺所有性質與靜態所持者同屬單純。 例若動靜固有之內在性，亦無異是述。 翼之一舉，在諸飛翔，兵之一鎗在諸戰鬥，字之一聲在諸詞句。 此謂翼，舉，飛，兵，鎗，戰，字，聲，句，非指"事物"乃感覺所

對,於一定機緣中"表現"於予者,故有連接認識。凡時間所攝無動靜兩差,依時久言,有所攝亦有被攝之者,然而永持同相。若空間所攝,則有運動相之差,因一動體乃變之體積,在變中如何能謂一體包於動體內? 故論空間同聯關係,乃因精神能於覺象之此一直謂之爲彼一者言,其情如云"汝昔所未在者吾是時亦無在焉;汝之佔有處曾屬我有,是汝將不出吾所指容積之形影以外也"。由此證知動體限界之覺境所在原自此界存在之歷境相逐而生。每一範圍所示之性質,所歷之環境,有其支配之信物存焉,如流星飛躍卽有其線狀歷吾之視域。此信物之存,得證動界所有空間包攝,實與靜界者有同然之用。但其配合乃自時間統攝,而無決於內在性也。如吾見牕外斷片雲飛,其容積團團逐隨,其境界則概無固定狀態之充塞,然而又能漸爲縮散短促焉。此謂雲之時空所有,實則時空顧在雲外也。

然則感覺境界之內在性的時空關係,非一簡單直覺事實而爲理性價值之邏輯組合關係耶? 此問題屬最重之時空組合問題。如以內在性爲由所組合而至組合者之邏輯同聯,則覺境之逐替相,攝一由分而全之理性關係;質言之,覺境愈複雜,所攝內界愈多,愈單純則愈少。是故試驗之實在,無在而不突進各時各點之最小分,蓋複合者乃自原素之眞實組之者也。原素限界單純,觀念所是明白,"邏輯項亦必有其確實之根據。如 x 爲 X 之項或包於 X 之端,則思及 X 件時決不能不及 x;反之若思及或肯斷 X 時無有它項或它件,是 X 項或件爲一單純者。尋常語言所示單項不皆具單名,如云單純內含之"此一",謂之有一事或一物也可,謂之指一類事一類物也亦無不可。若云"總之"則益無名

是,因所指之"和"在而"全"則不在也。 單純主辭,往往攝單簡而又統複雜,其用專恃精神時間所攝者。 譬以"行路"言,謂爲予生活之一部分,然而此同一名詞,一方可認爲多數經過相隨之事變,一方又可認爲惟一之事件。 如精神追索無已,則"行路"爲最繁複;如精神怠忽,則此名詞無此一彼一或它一種種記事。 再此類記事非文字表現,亦非心理條件之斷定,乃事件單複之邏輯時空性質。 卽言之,精神所示 X 事件之 x 性及其 R 關係之同聯聚合也。

所謂同聯聚合之邏輯關係是否攝時空之內在性的感覺? 非也。 例如棋盤之與棋格,各鐘鳴之與點數,斷棋盤與各鐘鳴不必及於棋格與點數之分是。 所謂內在性之關係,罔及由所組合而至組合者之邏輯關係。 感覺廣攝之繁複性得視爲單簡事端之理性。 蓋複者具於單之所有性,猶棋盤具於格線之固定數;廣泛者決於限制之固有性, 如音樂之決自音律。 然而此決定云云, 非謂組織之事也。 音樂組織乃自時空轉換限制之固有性得之,音樂與音律,爲非對稱性之轉換性, 其邏輯配合之形式性亦然。 襲"時空"(Spatio-temporelles) 關係言,離容積與時久之圖型而獨立。 若以幾何之經系言,則所謂時間關係,全體相類,部分相似,性質相仿,感覺物之位置相關等等又形而爲精神試驗之單純觀念,其理不外雷柯所謂"連續配合與一團相類性,位置或情境關係性,及同時與局部與性質之相似性"三大幾何表現。

丙　分析數學之時空邏輯涵衍

人類思想連續,賴標辭眞實之內在力。 倘一事變或事實——時空表現者——之關係配合見諸語言者無普遍著實意義, 及明白指示轉換

之秩序位置等情，則在思想實際根據時，必移而爲錯誤或失眞之判斷，且忘"反正""先後""適中""同時"之思想連帶關係。甚而疑信無辨，是非兩淆。如習慣謂：

昨日先於今日，是昨日爲今日之"前日"；

明日後於今日，是明日爲今日之"後日"。

然而習慣又視：

前日爲昨日之昨，是前日爲今日之"前二日"；

後日爲明日之後，是後日爲今日之"後二日"。

日之前者逆指爲二，後者順數爲二，衍而爲：

前日指今日前之"多日"……過去；

後日指今日後之"多日"……未來。

如將數性關係更普汎之，則相差之數，實稱無限。其式表明可能性之：

$1 \leqslant 2 \leqslant n \leqslant \infty$

以今日爲主率，先一日謂之前，先二日亦謂之前，至先若干日 n 謂之前，至無限亦謂之前；故以"先於""後於"兩徵號$\leqslant$並列，同時示等號內在，明前一與前之無數皆前也，而後一與後之無窮亦皆後也。此何故耶？果一等而二而 n 而無窮之非矛盾耶？曰邏輯先存之同聯關係的認識有以致之，時空個體單純性與非重疊性有以解釋之故爾。如"甲爲甲"之重言價値，惟在邏輯時空關係有義，若忘此邏輯象徵性，矛盾事實立見。時空兩相中，原無矛盾實現之必然，例如社會政治道德之成敗利鈍善惡順逆或死生皆非絕對相斥；自然科學之相反律相反物，除倘未悉知之調和者外，更非矛盾現象。然如斯言認識，必先知時空邏輯廣衍

之義也。(按此處"先於後於"兩記號爲同時合等號爲用之形,若分開則仍用前章→←兩形。)

邏輯時間具數理之連續而無長度與等速運動之計算。其連續變換,適自然理性現象,而異於純算術之:

$$\sqrt{2}-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots\cdots}}}}\qquad\text{或}\quad \pi=3.1415926535\cdots\cdots$$

蓋無此類細分表現與先後長短大小之絕對現形;然而有經驗連續之認識。如甲爲十斤乙爲十一斤丙爲十二斤,甲乙間有相似之覺力,乙丙間亦有之,至甲丙間則易爲不同之分辨。故得:

甲＝乙;乙＝丙;甲＜丙。

邏輯時間認連續變換,係大同時久 (Durée universelle) 中所有化合各"同一異時"運動爲普徧事變之性質。如"現時"喜怒哀樂,行止動靜等,在同一時久內,無個別變換之計算,若在特殊生活經歷中或現象內,則有同一現時個性變異之經驗表現。因邏輯時間性屬同一異時,故其連續現象只局部相關之個性,而無時間現象之衝突也。其調和關係有如過去,未來,現在,或春夏秋冬之更替。每一時間具無限"中間"特殊象,衍而爲函數同一式之:

$$T=f(t)$$

或概衍爲:

$$T=\int_x^{\infty}f(t)dt$$

式中 T 表大同時久,t 爲數理上之時間,x 爲任何特殊現實時間量。

從是知 t 函數之引伸皆思想事實判斷所能，無論 x 為何量，終屬一有限表現。 若依或然判斷言，其眞僞同屬單稱主格之是。 設云：

x 時間甲開門

x 時間乙開工

x 時間丙開船

………………

述變性之單稱或然，不能定必眞必僞之標辭。 蓋時間邏輯對任何"開"之行動為眞，而於任何"開"之事實，不能必其事變為眞。 故於 x 時間肯斷中，只宜謂：

$$x = \frac{a}{f(t)} + c$$

質言之，x 時間眞僞判斷，以確定某事變 a 之時數 c 為定時，否則無標準理性也。 若論過去，現在，未來，悉無直覺之連續判斷。 過去迄現在趨未來，純屬自然新生事實，對諸邏輯時間本身，稱獨立標準。 故尋常之時間標辭肯斷之現象，皆忽眞僞之當然。 蓋邏輯時間觀念未具之前，思想認識僉為連續之未知式。 無論 x 時現象如何，或事變運動如何，終為：

$$x = 0$$

此零之現象為不可以現實之事實，如緊急時，戰爭或政潮之事相，在報紙排印者被檢查新聞者抽去，結果餘一空白，使讀者不知所以，而又有現情估計之空測。

次邏輯空間懷提海氏粗析為"外現空間"與"物理空間"兩類。外現空間乃客象外觀之空間，內分"直接"外現與"純全"外現。 直接者稱甲乙

之連涵關係，如甲之所現，關乙之所覺。純全者稱覺知界之統攝空間，如冶金家化合雜質爲一體，或文藝表形，搜衆象於一圖。物理空間乃假設界之空間，物象關係，洽通感覺之是。一瞥之見，形於多元之物理關係，如目之視象，形自腦，神經，眼膜，光刺等等。此外有"抽象"空間爲抽象幾何科學之空間與物理者相對應。

空間直現者無限，抽象與物理者亦無限。此無限之協致，則在"關係"之邏輯空間限定。關係之者有其物理複雜函數，而關係連涵，則爲一致之統攝型式。如物理空間電子與原子彼此活動，而"以太"之中間性迺爲其連誼。此連誼空間，證物體位置運動之相對存在，或物界之"關係率"。空間物體，悉自此關係率確定。關係率爲邏輯概念之現在理性，攝自然、物體、事變、運動、形質、秩序種種勢力創造；單純、複雜、矛盾、齊一、眞僞種種關係連累，使現實界所有現形，通於理性抽象之記號，不可見之實在，立於理性測量之方程，直視空間感覺，爲一邏輯演算之代替式。譬以栢拉圖之"烏托邦"言，烏托邦之學術、思想、政治、道德等烏有事實或事變，在語言形容之空間，始終難證其眞實判斷之絕對象，或以事論事，仍有不識之謎。此其故依邏輯空間概念析之，有明白確切之義存焉。

據前第九章公理分析之"14"所表空間形式，則烏托邦之學術、政治、道德等烏有事實爲：

$$U=\int du=\int_{-1}^{-\infty} f(x,y)dx+dy=\int_{0}^{-D\pi}\{f(x,y)dx+dy\}+C$$

式中 U 表烏托邦學術、政治、道德界 $\int du$ 爲積其無數小知識（如關於政治者、學術者、道德者之類）元素之和。x 代學術界，y 代政治道德界。

依數學原則，演算之前宜限定常數C，質言之，宜限定烏托邦學術界政治道德界產品爲固有者，由是演算函數爲：

$$x,y=0,\quad 而\ C=-F(0)$$

結果基本式變爲：

$$U=1=\int_{0}^{-D\pi} f(x,y)dx+dy=F(x,y)-F(0),$$

$$F(0)=-1$$

式中1與0爲坡萊演算中眞僞二值。間隔之負一至負無窮與零至負 $D\pi$ 取數學意義而非絕對數值，例如由負一至負無窮之間隔表明：

"由無一獨立學術與政治道德界之實在以至任何知識無限缺乏"之義；

而零與負 $D\pi$ 或負 π 之間隔表明：

"由了無學術與政治道德界實在者迄無眞理規範表現"。整個基本式解釋爲：

"烏托邦學術政治道德各界之所謂實在現象，無論完整的局部的大小事實（$f(x,y)dx+dy$）皆屬虛僞與無眞理規範之型式（$0,D\pi$）；換言之，所謂烏托邦根本代表 $F(x,y)$ 非眞在之事實也。（$-F(0)=-1$）

如依純數學觀點推之，更可將 $f(x,y)$ 代以 $F'(x,y)$ 表明學術政治道德各界事實引申結果；於是：

$$F(x,y)-F(0)=\int_{0}^{-\pi} F'(x,y)\,dx+dy$$

或 $F(x,y)-F(0)=\{(x-0)(y-0)\}F'(\xi)$

ξ 爲0與1間之數，表明：

"烏托邦學術政治道德界根本虛設，謂之有者爲虛無與非眞理規範間引申之極小變數元之和，故其存在之眞僞 (y,0,x,0) 統限於眞僞引申之負變數。 $\{(x-0)(y-0)\}F'(\xi)$

所謂邏輯空間爲客觀分析之是，對任何精神有效，於任何時爲連續保證。 柏拉圖所云精神以外之存在，亞里士多德所云眞精神創造之普偏存在兩皆用之。

邏輯空間之分析，卽一切眞實元素本身集合，謂關係之類分性可也。 其形如戡托之：

$$M=\{m\}$$

換言之，空間實在集合之表現與其元素經驗集合等，或云"分實"之元素等於其"現實"者。 若以前式解之，烏托邦學術政治道德界非 M 而爲負 M。 蓋各界所有之分子非 $\{m\}$ 元素集合。 科學部分無有，文哲實在虛構，政治事變不眞，道德假設自亦無庸矣，總和實際，乃自負數迄於零位，結果爲；

$$-m_0+(-m_1)+(-m_2)+\cdots\cdots+(-m_n)+(-m_{n+1})+\cdots\cdots$$
$$=\{-m\}$$

而 $\{-m\}=\{-M\}$ $\therefore M\fallingdotseq\{-m\}$ C. Q. F. D.

眞實集合之表現 (M) 决不等諸非實在元素集合 $\{-m\}$ 之形式，故謂非實在之象徵，卽不成其爲實在也。 世人若徒以"象徵"爲抽象空間記號之義，觀此可證其不識空間邏輯之實在理性價値矣。

第四篇　綜核演繹型式及新興問題

第十二章　推理型式之經紀條貫

甲　演繹推理之結構及其化法

綜核前述各編，新型式邏輯綱領具備。今欲爲一"概覽"之認識，吾故重申演繹推理型式，經紀條貫之道。

人皆謂數學邏輯演算，爲一演繹論之經濟組織，或曰形成最深湛精確之演繹理論，尤爲公認。然則此演繹理論立於何義？讀者旣研前有各說，似宜直答。吾於玆復爲定義式之補述以明其結構焉。

定義：一演繹推理，始立於少數不可定之對象與若干不可證之標辭上，藉邏輯方法，建適可之新對象；更襲邏輯演算條件，推證必眞之新標辭；同時卽證其假立之原始對象與原始標辭爲無矛盾者也。

本此定義，知演繹結構迺自兩重化法 (Reductions) 形成：一則用"定義方法"使甲念化而爲乙念；一則用"證明方法"使甲辭化而爲乙辭。蓋限定一觀念，必據邏輯手段，導入一單純組織之概念；證明一標辭，必藉邏輯有法連誼所可代用之辭，以入它一形式組合之辭。如此化法，理宜固定原始極限，質言之，無定之觀念與不證之標辭，非可任意假設者。一演繹論範圍或條件，非自"原始"與"引申"之兩極以外限定與證明者

也。謂原始觀念爲無定，從而引申者爲有定；原始標辭爲無證——如公律公理——因而引申者爲可證，——如定理——是演繹基本法式，肇自不可限之第一觀念與不可證之第一標辭也明矣。

然則此原始觀念與標辭依何法而選之耶？曰"約定"；曰"毋固"；曰"連理"。斯三者示無條件之條件，自由之不自由，正所謂原始自然非任意使然之誼也。茲分舉如次。

一曰約定者，義謂無定無證與第一觀念第一標辭所具性質皆無絕對意義之說也。其無定無證乃對若干定義方式與若干標辭級次之連帶關係所因而藉手者言。例如游克立度量幾何之演繹式，論第一觀念與標辭之方式，實有無數可能，然其間任何體系，又皆有相當同價。游克立以點爲原始觀念班洛則以點與圜分爲第一；比邪黑 (Pieri) 以點與運動爲原始觀念，而衞卜倫 (Veblen) 則以點與級次爲第一；巴多瓦認點與兩點距離爲原始觀念，而易栢則更謂點，直，面，位於其上，位於其間，及平行等念爲第一。所謂原始標辭之變亦因而逐無定觀念爲準。質言之，從任何方式得衍同構之不變結果。向使原始觀念無有，而徒言某觀念爲可限者，或某標辭爲不可證者，則無異不明座標式或關係式，而直謂某物體爲運動或靜止之非義也。人有以原始觀念是否可證爲辭者，實則是類問題，謂之有義固可，謂之無義亦可。其有義也必曰游克立之原始觀念或公律是否可證？聖多馬 (Saint Thomas) 之神在是否可證？其無義也如純謂"公準是否可證"？蓋原始觀念與標辭，在幾何學中無絕對第一之是，猶神在之可證於聖多馬而不證於康德批評認識。物理科學有襲能力觀念以證質量，亦有因質量以定能力

者,更有定質量爲加速度與能力之商數或速度與衝力之商數者。原始無定,證明之結果同稱,要在觀其條件約定之"是"以爲斷耳。

二曰毋固者,意謂演繹論所有原始觀念無特稱義,亦鮮直覺觀,具體弗顧也,精神亦弗知也,其意念如無定象徵,其轉變迺邏輯演算所推,內蘊則非所問也。彼直覺圖型狹誼,亦從此消釋殆盡。按觀念取毋固之原始,洽證標辭眞理之獨立推衍可能;演繹理論雖有"實質"應用,實則純屬"型式"性質。所謂"邏輯型"(Schéme logique)旣用諸有形之象,復釋諸無限之義。昔邦加赫論演繹式之幾何價值,極稱毋固觀念,認數學家不究物象,只索物物間關係之是;果關係不變,雖物象更變無不可也。數學方式,適邏輯常式之型,物理自然,咸於此型中解得物質認識,串獲理性結構之化。故曰毋固雖有失斷定精神,然而賺得溥汎概括之原理,抑又足多矣。況獨斷式之必然性,未始勝於公律式之明白性;實質分析之狹義科學,又豈得而無型式邏輯之演繹哉?

三曰連理者,證約定與毋固兩誼之非自由者也。約定顧出自選擇之自主,毋固亦誠屬有定之否稱,然兩者必膺條件充足與理性妥帖之至則,質言之,由約定與毋固者必能定"待限"之觀念與可證"待明"之標辭,同時無因而衍申矛盾之可能。更明言之,一演繹論式必具直覺與邏輯之連理,使直覺者漸爲邏輯一致發展,樹整嚴之推理方式。

無定象徵,始於經驗直覺之具體相;原始觀念,證於有定關係之空間物。游克立公律援於測量,而復爲度量幾何所援用,非游克立思想超於度量平面機械而復歸平面認識之解析。(如栢萊塔米派(Beltrami)之解釋法是也。)此類方法,吾人於直觀中易爲發覺。蓋凡實在者卽爲可能者,

實在者卽存於經驗直覺者。 然此直覺一入理智認識,則實在轉爲邏輯方程式之推理矣。 如游克立之轉而非游克立,幾何標辭之變而座標方程,算術一般原理之析而數理邏輯,或整個數學科學之導而數學邏輯。連理一貫,矛盾盡殲。 所謂原始觀念與標辭之邏輯獨立與必然性,實演繹成功之最大經濟方法。 一則破形上思想之元學無定抽象,而立公律式之關係明白理性;一則彰科學斷定之物質無限理論,而爲毋固式之邏輯演繹化法。 科學研究,悉趨單純普汎,欲達此目的,捨推理之型式化法蓋無可由之道矣。

乙　科學邏輯通理與公念

公理與公律雖具科學之可分性,然在邏輯則統稱爲通理 (Principes communs) 之作用。 按通理析類有三:

1.律定若干物類——個體或類分——存在, 實行列舉其所是之可能者曰"存在公律",如特表類分單性元素者名"單致公律" (Postulats d'unicité)。

2.如若干物類存在確定,從而與之發生它類存在之關係確定者,則證其間有所謂循環"結構或型構原理" (Principes de construction ou formation) 爲無限之新創。

3.若干存在間旣有確定關係, 則各存在必有邏輯同聯或屬聯性與科學所謂位置,序列或相適,平行等性,是卽" 關係之公理 " (Axiomes de relation)。

公理也,公律也,皆指任何類之原始標辭言,邏輯統名爲通理,或簡稱曰原理。 數學邏輯基本方法,賴是以立。 如第二篇標辭因變原理乃純

自型構原理與關係之公理組織者也。　標辭因變為眞假兩斷之"標辭型",其理正獲自"型構"與"關係"兩原理之因變證明。公理公律雖稱不證而明,然非如標辭確指,而為標辭因變之非眞非僞也。公理本身,如變數可能,其無定象徵,必適乎可解之對象後,始變而為標辭判斷。故謂演繹之公理,或為標辭因變式之無定,或為事實眞理之肯斷。

"存在公律"專示演繹對象之是,型構原理在表示由確定對象所生之推理,必獲新對象之是。例如由個體,類分,標辭,關係等所生之演繹,代替,加乘,換置,循環等推理,必得構假言三段式,相當代替式,加乘式,換置式與整歸納式等原理。　至關係之公理,則在昭示已知或構造之對象間所有邏輯演算與關係性質。　如序換性聯項性,配分性,重複性,單定性,集綴性等等,使邏輯連誼間形成包攝與恆等相當之單純關係。

次論公念 (Notions communes) 其產生有兩源如次:

1.因存在公律或型構原理所斷之物象觀念或物象類分觀念所生者;

2.因科學所有之特殊關係所生之觀念來者。

兩者有自演繹論以外,由經驗直覺模擬之無定對象轉而為邏輯象徵之公念者,有自形式邏輯直接發生者。　前者如幾何形類公念,算術數目公念,邏輯集合性,相等性,隸屬性等公念。　後者即前各公念之特殊象徵關係表現時,全限指邏輯形式關係,而無個別之內質存在。且形式性之羣集,祇標關係類分而不及特有連誼。　設有甲類之任何無定象 a , b , c ,三級次關係,其表現為特殊關係之"先於"形式,如:

(一) a 先於 a 爲僞;

(二) a 先於 b 同時 b 先於 a 爲僞;

(三) a 不相當 b,故或 a 先 b,或 b 先 a;

(四) a 先 b,b 先 c 故 a 先於 c 爲眞。

此形式性表自然變異間特殊關係之一類分性,所謂甲類如指同質量,則先於爲"大於與小於";如甲類指物之行列,則先於爲"左於與右於";如甲類指時久分差或基數級次,則先於爲"先與後";如指血統關係,則先於爲"……之父……之子""……之兄……之弟"……其它同類之可能,皆證前四形式之級次關係爲公念存在。緣是類特殊關係,始創於某特殊科學,(如先於之念,本屬幾何學一線之各點位置關係說。)及至特殊性衍而爲邏輯認識時,則私念變而爲公念之形式性矣。凡經驗直覺所具關係,必趨型構原理與關係公理之邏輯關係象徵,質言之,必歸演繹之公念認識。

丙 徵言式之定義

邏輯象徵何由而有此溥汎無定之觀念與標辭因變? 曰來自關係公理與型構原理。所謂關係與型構,又何獨有此自由解釋之無定象徵? 曰集象徵大成之徵言式定義 (définitions implicites ou déguisées) 有以保證之。蓋公理與原理,在任何科學所有者皆爲隱謎無限性,或曰原公律而生之定義。其性質溥徧化,有具而不皆攝之不完全性,若使之媾一或單稱某物,則非其範疇之眞是矣。依"種類"概念言,此種定義謂之"類概念之定義"也可。游克立幾何,純因此種公律性構之者,故其公律象徵式,即其定義之部分組織。如直線定義之必因第一二及第六公律以別於非游克立派,是也。

幾何演繹同於邏輯推證，皆襲公律之微言定義，作契約式之毋固標辭，卽曰定義，亦非確定眞僞之標辭。謂爲語言條訂，精神自決，有其方便自治，適應理性則可，若對智能活動言，絕無强迫命令之義也。邏輯價值，正有賴此契約兼攝之實在標辭，旣可取眞，亦得釋僞。由是觀之，微言式定義似指非指，其將與存在公律爲矛盾兩立耶？曰不然。存在公律專定關係公理與型構原理所示物類存在之關係，微言定義則指二者所示之無定觀念。蓋定義決無能及諸所限定者之存在。此宜分別認識者也。按微言式定義，不專用於一觀念，而在貼附各觀念之方式，列舉所可證之關係，並及其它待證之性質。此謂關係，實卽理論所具之原始標辭，藉公律爲之限定者也。故微言式或公律式之定義，非普通命名式定義之明白性，因彼之所謂觀念乃不可限者，徒欲藉公律以限原始觀念，使定義萬能耳。古第哈謂觀念之可定者爲名目所指，無可定者爲公律所可。是微言式乃定義之邏輯結果，非欲本公律以塞未知也。讀者參閱第六章連誼象數論之五公律式定義可也。

此外如邏輯因變論所取之定義，則爲抽象式定義。其說理專恃條件逮達之解釋，非稱名指實之單純意義也。例如方徑示線或向量(Vecteur)不能以名目式限定，只宜謂之曰“兩向量相等時爲同長，同向，且同面。又“方向”亦只能謂之曰“兩直線平行有同一方向”。再如物理之質量，溫度，潛能，均不能稱名定義，惟循用條件假設，說明兩物體有同質量，同溫度，同位等等，蓋一類分之兩物象間，終有一對稱與轉換關係，——如直線之平行性，天秤上物體之平衡——此關係可視若相等性，以訂兩者間抽象性之恆等。

第十三章 排中原理之問題及數學檢證

甲 排中原理在數學邏輯之意義

吾人於第三章述標辭演算時，曾將數學邏輯應用公理式確定標辭連累及相等性齊一性三段性說明，並自加乘演算證知單定原理配合原理等等，因而立限標辭之眞僞，確解類分之論域。（如零之無類及一之全類是也。）由是依零與一而訂負辭，更由此以定矛盾原理與排中原理。明言之，因一連累性之演算，獲限定齊一原理之認識，因負辭及乘法之推演，獲解釋矛盾原理之方式，更因負辭及加法之方法獲證明排中原理之存在。

舊邏輯概念，通常只注意邏輯關係之量性概念，或概念之外延性，而不知無有類分之零類或僞的存在，數學邏輯者藉諸代數邏輯公理，揭眞僞可能之標辭組合，明概念基本性質之是或非，使思想定律，融和一致，眞僞連累，悉約守齊一矛盾排中之三原理。精神雖有錯誤可能，而錯誤者必因三律以達於眞理。羅素派從是展負定性與不兩立性，定連累之 p q 爲非 p 或 q，所謂思想三律，遂無失調之弊矣。

繼而標辭因變，精進眞理問題，明辯僞性可能，由不眞不僞，迄而時眞時僞；若標辭 p 連累於 p 則永遠眞，反之則永遠僞。永遠眞者，表思想於各情境中（肯定或否定之類也。）與其自身相接；不眞不僞者，表因變元素暫定性，或思想無定性，或超因變所限以外之實在性；時眞時僞者，指錯誤可能，與無定象中思想能錯之事實。從此引申所謂形式連累與實質連累之眞理的標辭因變關係，及夫因變值之或然性論。

歷史不解之眞理問題，胥於前各說有其法則之處置，與思想化合之根據。然而問題之與，亦自此法則根據者創。蓋"永遠眞"之一辭，在數學邏輯者視之，對一切邏輯法則（排中原理亦在其內。）皆形式無違，而新直覺數學派者，則謂經驗上大有不然，尤其排中原理非由

$$p \smile (-p) = 1$$

之標辭因變表明永遠眞，乃因

$$p \smile (-p) = x$$

之標辭因變導而使之眞，且必此 p 爲"有限"物類之集合始可能。如此 p 爲無窮，則不兩立性之"p 或非 p"爲無義，而標辭因變只有無定之 x 式，卽不眞不僞，非永遠眞之說也。排中原理之形式値旣有如斯限制，是邏輯舊原理之基本定律，有非普汎價値之反一致性焉。所謂邏輯律將發生矛盾問題矣。主此派者爲濮威 (Brouwer) 之新直覺數學論。問題至此，宜詳述其理以明其義。

乙　邏輯僻論之原及濮威之論證。

前類矛盾發生於數學問題者以戡托派集合論所生之兩反律爲最著。戡托謂：

> 任一集合，爲若干有定物之聯結；或感覺者，或思想者，由種種不同元素，形成一全體。

按此集合定義，無論合理與否，吾人姑與戡托同一接受。先問"凡集合自身，是否控其爲元素之是"？依現有數學觀念之總和性 (Totalité) 言，凡集合必控制自身爲其元素。

設有不自控其爲元素之多數集合 e 爲 E 集合，試問此 E "是""否"

自控爲元素？ 此問題如先認爲"否，"則E爲一e。 但以其爲多數e之集合言，是由假定上必自控爲元素。 回答"否"又爲不可能，是謂矛盾之一。

然則回答"是"耶？ 換言之，E爲自控其爲元素耶？ 果爾，則E仍爲一e。 但E爲各e之特殊指標數，是又不能自控也。 回答"是，"復爲不可能！(依羅素之言述之，則曰：含所有事物之類分，必自身攝爲各項中之一，因類分包所有事物。)然則如何結論？ 簡單言之，謂E集合爲非可截爲"是""否"之對象問題可也。 若然，世界果有此類對象與如是之問題在耶？ 曰有諸，人皆知有適用於主辭與不適用於主辭之表性字 (Prédicables) 與非表性字 (Imprédicables) 如云"中國人"爲一表性詞，凡形容字能表明一觀念之適用者屬之，若形容字之無此特性者則爲非表性字。 準是，則又能謂凡形容字，有爲表性者，有爲非表性者，結果"表性"與"非表性"亦稱兩矛盾之表辭矣。

既如此證，試本前定兩型，察"非表性"之屬如何是。

曰非表性者非非也，因既指其所有之一性，則卽爲表性矣。

曰是表性耶？ 因既稱非表性，則不能表性矣。

無疑，兩說與定義所謂：凡不是表性者，卽爲非表性，亦爲矛盾。此矛盾果爲不解歟？ 說者又不謂然。 蓋持原始定義，絕難免攝一矛盾之有，故定義之變更，必有副設條件之：凡此定義只適諸文字之用，其間無定義之矛盾。 質言之定義不含矛盾。

既又如此證矣，是問題所示者不惟容"是""否"之兩應，抑更攝"既不是亦不否"之未定性也。 此說雖初不之信，因定義不認文字集合爲

兩斷之型，故必有字為"一無意義"之又一型矣。

準前各事實之關係以與排中原理較，知標辭肯斷者不眞則僞，或是眞或是僞，僞則不眞，眞則不僞。若以此原理類比推之，是否膺有錯誤之嫌？按標辭謂：非表性字為表性者是僞也；而謂：非表性字為非表性者亦是僞也。故惟反斷之曰：非表性字旣不是表性者亦不是非表性者之辭為眞。蓋吾人對肯斷辭之眞僞性不能有所懷疑，而混含之弊乃出於逐字逐句之過。謂之非邏輯範圍可也。

戡托派超窮論之集合問題所生兩反性，在濮威如何解之耶？應曰：濮威認集合論之矛盾，乃自排中原理出者，若無排中原理，則矛盾無有。設濮威視排中原理只限於有窮與有定之數學範圍，舊邏輯之有效性與正確性，亦惟用於有窮集合界，其價値僅及有窮數學系統所示之局部自然科學。

濮威謂兩反之矛盾，因數學內附有語言之形式與構造，結果定有非邏輯之眞實判斷。此語言結構之邏輯律，雖能使思想通於客觀，然而危險在其絕非數學實在之是；質言之，數學實在為自身者，其因思想發展時，决非語言之構造或人為實在也。故以數學言，謂邏輯規律為無限威權，可謂不通之論。若以構造實在之可能言，惟數學獲保眞實。彼集合論所有集合之僻論，不能任意構造；所有文字連貫，亦有必邏輯律之基理，雖涉未知與神秘範圍，决不許矛盾存在。縱使有構造之集合，攝概念之性質；必只用適應之構造性質，以免與排中原理所發生"有或無此性質"之元素再生問題。

濮威謂數學構設有消極積極兩要：一則放棄存在之證，因存在實無

能構設何物。 一則採取自然數(1,2,3,……)概念之原始與直覺根據,襲單位之區分,迺獲無限方法之可能。 果爾,則排中原理得自明於試驗之域,而非純邏輯之思考也。 設有一堆零碎粉筆於此,在濮威可下一選言判斷如"此堆內,無一塊白粉筆,或至少有一塊"。 濮威認此判斷非先天所有之排中律(Tertium non datur)乃自存在之事實證明。其可能性在偏愛一塊白粉筆,(顏色之故也。)故於試驗中求選言判斷之有效。 殊不知實際前標辭之"至少有一塊白粉筆"正相當於所謂"邏輯和";如"此塊爲白;或卽此;或卽彼;或卽其它之類"是也。 無疑,濮威推理方法,原則非常正確,實用於演算時,如論太陽系各原子之集合謂爲有一公性者則不可用;但在理論者,對思想仍爲可能,且足自證。 是故求證思想之"可能性",終爲基本必要,所謂邏輯原理,無能負此責任。蓋無窮總和性間,元素次第結構,終屬無定性,卽在思想界,亦莫之獲證也。 設以十進數之:

$$\pi=3.14159\cdots\cdots$$

爲例,求證此數遞進至某時,其次第發生有如 0123……9 之級數者。問題回答雖尙未知,然似可謂此級數"或終不得有,或至少可有一次"。但依濮威觀之,此存在式之選言決不能提出;因在級數 0123……9 未經實構之前,標辭謂"0123……9級數在π之十進發展中至少有一次得見"爲無義,亦卽無理。 由是普汎標辭之"凡 0123……9 級次無見於……之中"亦不能有負辭或否定,蓋旣否認其特稱之合理,則此一亦爲無理。

設更反證此結論,復揭一特稱標辭曰:"級次之 0123……9 實在得見於第 n 次十進之演算時"。 選言判斷至此乃對已算得之數字構成

者。在濮威觀之，當不能再否認排中原理之合理矣！但此標辭別爲一問題，與前述意義兩不同解。濮威似早見及此，故力持反對，謂否認普汎或全稱標辭爲合理，因有此"否認"之負定，斯有特稱存在之肯定。例兀數十進發展之選言判斷視爲有效者，或因其間無一級次數字適於所設，或因先天自含至少有一次是；且此一次存在，事實無須由某一日或它日演算發覺之也。然而據濮威言，同類再推，則又不能自證，蓋以科學現勢觀，無法證知前級數之不能遇獲，或能於第 n 次十進見之也。結果輪選（Alternative）之辭，無用於數學，蓋口頭意義之選言，對兀之認識毫無增加故也。

自然數之原始直覺根據，在數學自由或自主之純思想結構。此薄弱虛靈論據，使人皆托之以文字形容，導之以邏輯規範，結果各規律自不免有相對性與經驗或後天性之存在。所謂無窮集合，特自然數意外之專有級次元，能及於無窮列數之上，形成不可列計之無窮"連續性"。濮威認此連續性中，有"自由變化之中庸"，其本性存在之元素非若事實所有之部份與無限區分者同。連續者卽所有部分之一關係，非不可分之元素集合也。按斯說與戡托相反，而與衞瑘（Weyl）視連續爲原子形構元素與無限列數總和之說亦異其趣。

問題至是，認思想活動與其直覺構造之"所對"爲直接關係，吾人不欲評述其僻見，其有特別意義者，惟在問題之：

"凡標辭之兩矛盾者不能證明特稱之眞，亦不能定全稱之是，因爲有無窮情境須待檢討也"。濮威證此矛盾爲無理，且無邏輯意義；蓋推理"所對"之根據不能證明有效，斯排中原理無從應用之也明

矣。

綜濮威派之問題，如欲免數學兩反之矛盾，惟有棄舊邏輯與眞理概念，尤其關於排中原理之應用。按此說在數學方面者已有博黑(Borel)與魯栢格 (Lebergue) 輩經驗證明於前，而濮威與衞珥輩不過從是張集合變化之新經驗直覺說。前者問題，實無外數學邏輯標辭因變之批評；後者問題，亦已解於易栢與攄墨羅 (Zermlo) 公律之演算中。讀者細索第八章及九章公理證明式所述滅除矛盾之論，瞭然邏輯與直覺之分矣。

丙　對濮威派數學事實之批評

夫濮威之見，認"實在"匪獨無我人所指意義之眞僞，且無判斷眞或僞之條件。"實在"之對標辭，在理性與事實，皆非眞非僞，而亦無標辭因變之關係。然而舊邏輯中證明者與此絕不相類。所謂僞同樣連累眞，在思想所有之實在必含："眞與僞"兩辭，而新邏輯所有者又必含："眞僞與眞僞無分之可能"之三辭。(參考第十三章。) 此可能在濮威則稱無理或曰矛盾兩可，其不眞不僞之說，乃重疊於眞與僞之眞理範圍中者也。

濮威派對眞實與謬誤兩可之觀念，型式上極爲混亂。黑蒙 (A. Reymond) 曾再三分析，謂兩型之義，或表"事實上"已確證而將來永遠是者，或表事實上尙未確證而將來有一朝能是者。前者之義，似無討論之要，因爲數學範圍所用之眞理事實永有可證，無須再作同一演算之否定。但後者之義，型式轉爲曖昧；因所謂眞實尙未證得，卽已宜示其可證。此時必發生問題：試問將來由誰證明？抑"現存"之數學家"將

來”證之耶？　抑亦“將來”數學家或才子於將來證之耶？　致濮威所論，似欲就“前者之義”構一新邏輯，以反舊形式邏輯與數學邏輯，同時立數學與邏輯新關係，以陷羅素之理論。依黑崇言，濮威新邏輯實不能達此目的，蓋因其“謬誤”或所謂無理之定義，終不免連累於排中原理之用。貢塞夫 (Gönseth) 曾證明此謬誤性之 R 直揭“或謂不知 A 者僞，或謂事實不知肯定所不知肯定者”。(參看貢塞夫著數學之基礎第二二五頁各例。)　是明爲排中之說也。　如濮威不認此數學事實，則所謂謬誤性之兩可等於無義。　昔羅素與邦加赫曾精析表性與非表性之分類，合兩家所異，亦得排中之有。　即以吾人前舉“表性者”與“非表性者”之形容字言，在分類中決不見“非表性者”之兩可。　謂之表性者因其爲形容字，謂之非表性者，因其只有非表性之觀念。　論者混形容詞與實字之用，而不知一形容詞只指一性質實際上所有者，非實字之是也。　此而不分，則如“所有”“完全有”“無窮”等詞尤爲難定其無限之形容矣。　按濮威定兩可性爲已證之眞實者之矛盾說，即欲分別此類困難也。　故謂無限或無定總和性之全稱標辭，(肯定或否定者。)有其合法之無理兩可性，且能由可眞性之特稱辭得證實在，所謂排中原理亦於此時變爲合法矣。　是濮威與數學邏輯論者實爲同然之見。　全稱辭有一存在之條件價值，不能用作特稱辭肯斷事實之眞理，故在數學邏輯論者仍保持“無不是…若干是…”“所有是……若干不是……”諸形式價值之對立，而濮威因證明特稱辭眞理之根據非已知者，乃認此分別爲無義，即形式之義亦無之。　故謂數學邏輯者之分取選言，謬在不知標辭“對當表”之矛盾，對當，大反，小反，爲無用。　殊不知濮威所謂眞實之有效，正假定證明；假定如無證，

是眞者爲非眞非僞。眞者表一判斷之固定關係，此固定或所對往往極端繁複，判斷所能，往往卽僞，雖有所眞，亦有僞之連累；故單簡標辭無眞僞外之中間値，而對當表，形式上決爲有效。

論排中原理應用於純數學之問題，吾人採黑豪與哈達馬（Hadamard）之態度，先分數學事實與智慧活動所求之事實爲二。如果數學事實，完全數學家用定義與演算創造者，又如果創造活動，完全遵自由發覺與自願承認之法則進行，則在此構造範圍中無所肯定或否定；因爲思想不能宣言不存在者，亦不能對無定者定其將來之可能存在。如此情況，排中原理不能用，卽形式亦不必要；然而任何其它推理式，同樣亦不能有代用之價值！故濮威欲以直覺毀象徵邏輯，而不知公理式之科學證明，已確立各原理選擇之眞理矣。

謂數學有一固定實在而非純粹精神者。然則此實在如何知之？類如數與連續之關係如何明白？濮威謂循直覺知自然數；因直覺原有自然數之級次象，而此原始直覺之活動，完全“非”排中之形式定律所示者。故以吾人所知，每建連續 f 之知，必有定律 g 之在；是 g 律乃 f 律之所生，而所生之生之再生，完全自由智能十進之發展。然而此自由變化，果數學事實存在？抑某十進時之偶然發生？此問題不可不辨！

濮威之意：數學變化，無論自人類精神創造或由萬物自然結果者皆絕對不可預測，質言之，爲純然無定，而不見知於思想之明白；因將來者俱屬偶倖，不能有“甲或是，甲或不是”之說也。果爾，是濮威固有自主之試驗精神，惜其陷於同一數學存在判斷之無定而又有限之錯誤，反毀排中以自拔，是謂自入陷阱！吾於此益信惟“標辭因變”論足以排難解

紛也。

附錄　虎塞爾 (Edmund Husserl) 之"邏輯研究"

民國二十一年，予曾有介紹虎塞爾之"邏輯研究"一文，載於"鞭策週刊"，今因本章談"直覺派"之濮威，特將此文錄出，俾讀者知最近邏輯認識問題中，更有此一大派直覺之新與認識。余目的在引人注意有一直覺新思想在，讀者若以"不類"責之，則余惟曰自我得之自我失之，無不可也。

虎塞爾哲學思想，於一九〇〇年"邏輯研究" (Loigsche untersuchungen) 卷首初版問世時，卽已震撼世界哲學運動中心。所謂"現象學"思想，現完全統治德國哲學生命。欲知此派精神奇偉與邏輯認識之要，先略述"邏輯研究"前之思想問題。

當十九世紀末，自然與歷史科學極盛，所謂黑格爾派系統勢力，幾全失效；人人深信科學絕對能窮竟萬有存在之知，彼哲學研討，實一無所獲。因旣祇科學知萬物，亦必祇科學自身有其可知之象。若專對存在之認識言，惟有認識之認識，與所謂認識論之哲學處置。斯時德國哲學界，因此類科學與哲學解釋之異，發生兩大辯難原因與傾向。一方自然論與心理論哲學家，主張齊哲學於試驗心理之列；一方新康德派及邏輯實在論派主復與康德批評主義，疏解認識論之可能，或齊哲學於認識論。前者認科學深思反省之結果在科學本身，質言之，卽一自然科學而已。如物理化學之類，其方法決不能變爲哲學。蓋心理論者欲明定試驗心理學爲認識論與邏輯之基礎也。後者除所謂新康德派外，更有形式邏輯派如黑

巴特 (Herbart) 等之非心理論者，皆謂科學只於認識論與超絕哲學上顯特殊之價值，哲學認識仍爲哲學認識，决無自然論之"心理本體論"。虎塞爾邏輯哲學洽自此類認識論發出新目的與問題，明示方法，確定科學眞實。魯斐拉 (Levinas) 云：虎塞爾之邏輯研究的哲學不外一認識論問題，然而有超認識論之觀點。一方立於理性派之新科學立場，反休謨 (Hume) 以下之心理認識論，唯用論之抽象假設，及圖型主義 (Schematisme) 邏輯；它方從純正科學之新創原理，探獲"存在"之眞概念，立新邏輯與新哲學。茲論其邏輯研究之要義如后。

按邏輯研究一著，代表虎塞爾哲學認識變遷之兩大時期。因原書未梓行前，虎塞爾係完全栢大落 (Brentano) 派之心理論者，例一八九一年之"算學哲學"一書卽爲此派之代表作。一九〇〇年之邏輯，則一躍而爲非心理論者。及至第二卷與再版時發表之"Ideen" 出，虎塞爾又轉標新直覺意識之新心理論。故試讀邏輯研究者，如不知貫此兩大時期眞理而通之，必不免有海恆 (Hering) 所謂"虎氏哲學，如自局部研究，實難能而又矛盾"之言。明乎此，再析邏輯研究。

邏輯研究總論中虎塞爾首揭邏輯對象，性質，方法等類之辯論問題：邏輯是否誠屬一理論規律或實用方術？ 又是否獨立成爲科學，尤其離心理學或元學獨立存在？ 其方法是否專作認識形式而無顧慮於實質所在？ 最後是否有一先天證明之規範抑或完全經驗與歸納可能者？ 各問題解决，形式不同，實際只須邏輯認識論

者抉取一問題態度，餘皆一串通釋。虎塞爾態度，先自科學系統性質發動，研究獨立知識之範圍，認科學所創之眞理認識，必有理性結構之單純理論，旣不逃乎規律之外，亦不明示其特殊價值之對象；此性質存在，卽組織科學之條件，解釋科學可能性之特殊科學；迺一科學之學理，一科學之科學。是類科學學理，可謂爲規範者，所謂邏輯對象，大部分卽由此構成科學觀念。然而"規範"一詞，不能明完全邏輯意義。邏輯定律謂爲意像亦可，但仍能於事物應用外，獨表一實在性與一價值。

所謂規範科學，應否由心理學指導？此邏輯研究重要之第一答復。虎氏力反心理論者以邏輯律同化於心理律。謂若認心理學爲事實科學與試驗科學，則必不知心理律之"逼近性"在也。吾人試思歸納結果，心理方法，完全偶然，經驗，純或然性者，若以之直擬邏輯，是忘形於邏輯對象之思想律的專門認識。徒執自然論之惡劣思想，而不顧心理學惟在求思想之"是"，邏輯則在窮思想之"所以是"也。欲救此蔽，虎氏努力由自然論之心理學以外碻定邏輯獨立點。謂"邏輯定律旣無關事實之物質，亦無表象或判斷之"存在，"厪有認識之現象耳。若依固有意義言，邏輯定律，並非關係心理生命之事實律，旣無表象之意識情境關係，亦鮮判斷之意識情境連帶，對任何心理意識情境無負擔"。邏輯定律無論已知未知，皆相當於"所能值"之值，決非心理意義之假定。（按此處在下章論劉卡西威克之可能值時可對讀一過。）

由是虎氏第二步卽明自事實認自然派心理學之混視邏輯與心理

定律相當者爲"錯誤"與"懷疑"之結果。邏輯意像性及意像之存在,皆與眞理同一條件,如將邏輯定律概括爲邏輯試驗,(如自然科學之試驗。)則不啻否認必然性而入絕對懷疑矣。

第三步更試行宣示心理論包含之錯誤原理,謂若輩不知意識之"意向性質",妄定邏輯對象之超絕性,誤取心理活動上所思之意像物。如能毀除此類臆說,正好自意識新認識,立獨到之邏輯對象。

邏輯研究第二卷猛擊英經驗派邏輯論。謂概念論與名目論者欲併觀念於事實,是不識觀念與事實之分。第三與四卷,用新邏輯思想,重建意像定律之"本質"(Essence)原理,析分純邏輯之觀念,與純本質之科學,恢復意象界之存在,因邏輯關係組織純形式界,發現形式化之普汎數學對象。昔之邏輯舊形與所謂代數學,皆屬是類形式化之部分思想。然而形式界之外,决非如形式論者之絕對形式存在,質言之,有物質之本質界的擴張性,如紅之本質,顏色之本質,人之本質,等類表現。各類本質皆爲組織必然眞理之基礎。吾人須由栢拉圖派之冥想通釋之。如研究空間本質之幾何眞理,與謂"顏色有容積""聲音有强度"之類的眞理皆屬之。必然眞理之範圍,包無限本質之宇宙,大有一般哲學推測不及之理想容積。是"邏輯研究"之思想,乃從意識關係,持有形事物之超絕性與意像界之超絕性爲同一方法,卽觀念之實在論合普通實在論爲一矣。(按虎塞爾自身不信其爲栢拉圖派之實在論,督斐拉氏言之頗詳,讀者可參看:(La Théoric de l'intuition dans la phenomenologie de Husserl P.174.)

邏輯研究第五六兩卷,虎氏復回顧意識之路,碻定表象,眞理,對

象，自明之類之本質，無形中似乎爲返歸第一卷嚴厲反對之心理論，遂產生氏"純現象學與現象學哲學之 (Ideen)" 的超絕唯理論。此非矛盾思想也。蓋第一卷否認從邏輯至意識之關係，只對心理論者所假定之"若干關係"而言。第一卷否認自然論心理學，第二卷建新心理學。所謂自然派心理者，視生命意識爲心靈內包，將"本質"心理化，是不惟有誤本質之義，實深誤心理科學也。第一卷舍解除此類錯誤外，不獨未曾分離生命之邏輯，且益信萬有之本原於生命；所謂萬有存在，乃生命意識之固有意義。此即虎塞爾邏輯研究，前後隱貫之認識主張。

總之，虎氏邏輯研究由批評自然論之心理論入邏輯論主張，由否認同化邏輯於心理之心理本體論入現象論之新心理學。主復與賴本尼支派之"數學爲普通邏輯原動"說，反康德派經驗派之組合的數學判斷論；謂數學判斷爲分析者。對十八世紀數學家之不可證明公理公律，悉用直接之直覺意識，導入邏輯價值，使數學分析觀念之單純元素，變爲演繹獨立之關係存在。是直與易栢擻托及羅素諸家相爲運動，或謂之同調，亦無不宜。

第十四章　邏輯問題新解釋及其對現代物理之應用

甲　劉卡西威支之三値判斷論

前述各章，無論關邏輯或數學，雖說有參差，皆示新邏輯發展之要端，據此足知其超越舊形式演繹之特徵。新型式論者能同執數學與邏輯之型式基理，建演繹公理之原則，對舊者與以最大之改造，對科學與以健全之構造，實廿世积來，偉大之創獲也。

亞里士多德式邏輯自復興時代以後，批評否認，不一而足，專家所見，悉集中研討"理智動力之思想原理是否實用亞氏形式"而無貧乏或妨礙之結果？依近數十年傾向言，雖不敢謂答稱肯定者無，然究主新形式改造者多。卽以"判斷論"言，舊元學絕對眞理之條件論與夫存在之實體主辭性，皆不足解决科學近見。眞理價値之連累性，有自判斷者之思想得之，更有是於思想以外之任何非眞性。我思之是，同時關係我思之不是與不思之是非。故肯斷或否定，全屬邏輯標辭自身之相對價値，而無關存在絕對。因判斷聯絡，示標辭眞僞。所謂眞理本性，原屬人類心理結構與宇宙物理構造之交蓋認識。在思想方面，一切基本原理有其相反價値，亦有其恆等或齊一定律，眞僞，善惡，美醜，無逃於任何人之意識，其相反之變亦無定於任何時代之標幟。曰齊一性所是之辭，同時卽見其連帶它辭之複雜關係；此齊一性之空間，更時及特異或超越空間。新形式論者視此類思想動力之科學齊一律爲因變連涵之齊一性，其可能轉換或聯瑣關係，乃各別之性質情境所示之變量價値也。欲表此因變可能式，惟象徵"等號"諸演算足以當之，舊齊

一式實無能概括也。(參閱本章末附錄辨頁說。)

一九二零年波蘭哲學會發表劉卡西威支 (Lukasiewicz) "邏輯三效判斷值" 論文，頗引哲學界注意。次十年原著者復與門徒達斯基 (Tarski) 詳述是說，爲之引發現代科學應用與實證問題。使吾人益信此新與邏輯眞理認識，具無限數學物理之適用原則與理性也。

劉卡西威支原理，始自"樣式判斷"之改造，解除康德派對此類判斷意義，重詁亞里士多德與學院派判斷之新價。認判斷標辭，不能直限"必然""或然"及"能否"之比較。蓋標辭價値，非"眞僞"二値所可指，顧必先明超此二値之可能性如何，然後獲定所是之眞。例若以甲表一任何標辭，則謂：

甲是可能；　即亞里士多德之可能判斷式；

甲不是可能；　即亞里士多德之不可能判斷式；

非甲是可能；　即亞里士多德之或然判斷式；

非甲不是可能，(甲是必然)　即亞里士多德之必然判斷式。

科學進展，判斷之知，屢有新價重詁。有謂必然爲可能之反者，其視或然概念無分於可能，必然概念無異於不可能，實理之常。按或然乃明示"能不是；"必然專指"不能不是"。依舊邏輯原理言，兩兩相斥。然深考亞里士多德分析論，曾見其已認"兩相"可能性。如謂"甲是可能"與"非甲是可能"之兩辭——病人能安，病人亦能不安——爲兩可適眞或同眞判斷。劉卡西威支謂若以樣式標辭各原理所示爲準。則對邏輯範圍內者言不能同時眞，否則必犯矛盾律之謬。今欲免此困難，須於眞僞二値外，確認一"可能性"爲有效値，斯各原理同眞之矛盾息

矣。昔坡萊代數邏輯，取"零"與"一"代眞僞之演算値，劉卡西威支從是更益以分數式之"分半"或"二分一"代可能値。（按坡萊曾用分數式代無定値，但與此絕異）所謂邏輯三效判斷値論，即本此三徵號，根據"邏輯常式"之負定性，連累性，邏輯和與積配合爲用。設以邏輯和與積言，則兩標辭相併或至少有一眞或同時兩俱眞。眞之負爲僞；僞之負爲眞；若可能値之負，則仍爲可能値也。試依表檢負定値爲：

甲眞——僞——可能

則

非甲僞——眞——可能

更自甲與非甲兩標辭連累性觀之，如前率等於後率則連累關係爲眞；否則前率小於後率必爲僞。如前率之邏輯値大，則原式爲可能値。舊邏輯所證，認後率之僞乃僞其含値之非，至前率則終不失其爲眞。合新舊兩論，除四格外，倘有五格豫存。玆以ＰＱ二辭及其連累式列表如次：

舊四格之值

P⊃Q 之 眞—眞—眞—僞—眞………眞——可能—可能—眞

Q 之 眞—僞—眞—僞—可能……可能—可能—僞——眞

P 之 眞—僞—僞—眞—僞………可能—眞——可能—眞

新五格之值

試將前表負定値取而與此連累値對檢，則和積之理，瞭然易證。惟眞僞二絕對値之和有兩値相當，此相當性在劉卡西威支認爲不眞，且不得有二。其理如謂：

"有或無等於非有連累於無"；

"亦等於有連累於無者無"。

劉卡西威支只執後者爲和之定義。從而推證舊邏輯各律所指者徒有局部之眞或可能耳。卽矛盾排中二律，亦僅可能之一義。按可能値之發現，對數學家如格拉斐侶 (Clavius) 第一二律所示之演式能與以簡單證明；尤其對畢哈利佛第 (Burali-Forti) 及羅素之兩反論所持兩矛盾僻相當說，解釋通徹。蓋新邏輯認"甲相當於非甲"之可能値爲眞故也。此外對集合論之錯覺觀念，亦直間接供給可能之"理則。"其助益誠非偶然功利也。

標僻演算，决非代數機械方程。論未知量之變數値，任取眞僞，悉具可能値在。格拉斐侶證明"非甲連於甲者則連累於甲"。若襲負定値推證，使甲表眞則非甲亦眞。其式有如下列推證之關係結論：

非眞連於眞者則連累於眞；	是則：非眞等於僞；
僞連於眞者則連累於眞；	僞連眞等於眞；
眞連累眞；故眞。	故眞連眞等於眞。

反之若使甲之變數値表僞，其結果式亦爲眞。如：

非僞連於僞者則連累於僞；	是則：非僞等於眞；
眞連於僞者則連累於僞；	眞連僞等於僞；
僞連累僞；故眞。	故僞連僞等於眞。

倘更以可能値表甲之變數，則亦見可能之値存焉。且此謂可能値决非僞者。茲舉以明於次：

不可能連於可能則連累可能；	是則：不可能等於可能；
可能連於可能則連累可能；	可能連於可能等於眞；

眞連累可能;故可能。 ‖ 眞連累可能等於可能。

自是邏輯定律之存在,咸稱眞實存在。但此眞實性,必因邏輯三效値既見之後,始獲明證。

三值判斷之發現,乃自心理學無定式探之者也,一九二零年劉卡氏更確定邏輯無定論之三值必要性。如云:

"民國二十六年中國之强將由我;

若我而仍未行强之道;則中國之將强不眞亦不僞。"

民二十六年之强爲"可能"而非"必然"。由此條件,則標辭判斷之:

"二十六年之日我將稱雄於世界"

不能眞亦不能僞。因爲眞,則須稱雄於世界,是又與假定辭意相反;如爲僞,則我之稱雄於世界爲不可能,是亦與假定辭相反。此即證邏輯第三値之必要性也。從而無定式之宜重於邏輯與物理界也亦可概見矣。

吾人前章述荷蘭數學家濮威 (Brouwer) 派別創之新直覺論時,知濮威曾謂非列數性之集合論,對邏輯建設實一無可能,其證論亦毫無價值。因此類證明必藉間接或排中律之保證始爲有效,而濮氏則極力否認此律。近年濮威派之艾挺 (Heyting) 更系統研覈直覺邏輯,新獲十二公理,較劉卡西威支無定論之四公理尤爲完整。彼認邏輯常式値亦有三値,不過第三値之負定爲僞,與劉卡氏謂可能之負爲可能値,大相逕庭。至連累性所表之差相則又屬微微。如艾挺視連累値之僞,必其前率攝第三値,而後率復具錯誤,此在劉卡氏則視爲可能。至論和與積兩値,幾完全一致矣。

吾人試本邏輯通常意義言,濮威艾挺之否認排中原理,乃不免側重

眞僞二値論。故對:

"甲等於非甲爲僞"

之僞式終認爲僞,而劉卡氏則直斷之爲眞。所謂"無理"或間接證明法,艾挺輩不能盡棄,而劉卡氏以無定論式證其無存在之理。此類無定邏輯論之數學事實,在現代物理應用中顯見實證之功。茲略陳如后。

乙　現代物理之無定論

現代物理科學有三大嚴重改造問題,其"理則"與"事實"純屬邏輯元學之棣達。質言之,現代物理科學之發現,非陳列眞僞直觀價値之肯定判斷,乃無定論之新幟。所謂黑孫堡 (Heisenbery) 無定式論,李博爾 (Niels Bohr) 補足概念說,與夫統計律之或然論三大發現,微無定邏輯論之無限價値論,實難解得是類眞理之有於人間世矣。補足概念說視兩矛盾論爲相當,時空現象爲因果性,所謂波動與分子之反相,爲結局之象徵性,依黑孫堡之無定律,悉可解除。然而事實則認物理之無定律與邏輯常理齟齬不適,因舊邏輯只限二値判斷,若以第三値可能性應之,則了無疑難。波動之形與分子之象,對吾人皆屬稱標辭式,旣非眞亦非僞,惟有可能性之或然値。李博爾謂分子波動,乃試驗可能與定義可能之意像徵符原理。黑孫堡亦云物質自然,不能同時由波動與分子組成;二者實乃類推之形構,謂爲同一物理實在性之兩異相,正無不宜。

無定論之邏輯爭端極盛,昔日否認排中律適於普通對象者皆抗此說,經驗認識論者亦毀棄普汎存在之理。邁龍 (Meinong) 析思想對象爲完全與缺差兩性,明定眞僞標辭,視抽象普汎之創於精神者,僉與

邏輯定律相觸，如言"花"，非桃非李，抑白抑紅？ 無定眞僞，無有實現，旣違排中律，亦犯矛盾性。 然若以此二律繩諸一切認識，邏輯判斷，將淪爲"法則"之誤。 譬矛盾二辭之"老嫗惠且慈，老嫗悍而戾"如斷其皆非，則亂排中律；如謂其非眞非僞，則旣反矛盾復墮排中之兩難。 濮威派評排中律之義在此而劉卡西威支派建無定論之可能性亦以此。 或謂邁龍派亦主無定對象存在，黑森堡之微界物理 (Microphysique) 無定律，宜與之不謀而合。 余曰是又不然。 蓋黑森堡原理惟有定量無定性，非普汎尤非抽象，謂之個體實有定式，若以定性無定說推之，有其然而無其眞。 故謂電子决難具尋常試驗物所具之直接實在性。 且其不適實之程度，更隨位置，速度而生變化；此變化値及於無窮。 世有以絕對二値認識科學原理者，吾不知其對此無窮値之邏輯可能作何蜚語！新邏輯或然演算，試使標辭判斷連於時空座標函數之可能現象，其誼洽救此無窮隱眞之事實統計可能也。

關於微界物理之或然論發展，已促機械律漸入統計律矣。 按是類學說，如純襲或然演算推論，則在負定式之邏輯値，顧無一不適。 若論連累性則殊多異議。 雖曰邏輯常式爲有定，而和積之演式則異諸數學普通等式。 謂此普通性難期實際應用固也，然究無非理之證。 如尋常或然演算之數學結論，必其等式具完全算術意義，若邏輯或然之負正，則去此算術徵號之量性實在，取其"是"以攝標辭與類分兩誼，(算術惟有類分演算。) 較疇昔代數邏輯之零與一兩値亦大有差異。 吾人深思代數邏輯或然之理則，即明此無窮値之或然演算；其同理更可衡諸羅素派數學原理推闡之算術定律論。

論或然性之歷史，有主客觀與先驗經驗之別。　主觀或然，無異斷定論說；客觀或然乃相對無定，其理適於現代物理之邏輯價值，而反諸元學絕對無定之實在性；論原理性質，則立於新邏輯演算之用。　近二十年來，數學家有以公理式移用於或然式者，其法將或然本性所及之若干概念，藉公理方法釐定意義。　其利在免主客觀之混淆，同時更便邏輯無窮值之推證。（參閱第八章所述。）至先驗與經驗之說，辯者多自方法立足，其理論純用數學與統計演算，故略而不述。

附錄　辨負褫兩誼

民國二十年春，瀋陽民報"思想之園"載章行嚴先生對"有無"實相問題之"邏輯解答"一文，以負褫(Negation, Privation)兩詞直解當時"有無"問題紛說，惜章氏所釋邏輯名詞本相，多有失實。　按邏輯析辭，類分"負名，"有之，與數學負量異義同理；爲"無"之範疇之一，定義絕儔。　因負名觀念，從心理包攝言，既不宜表形，更難形無實。　如欲甲爲負名，首念必先及甲，是甲已先入精神，雖負猶未也。　以吾人否認一物，不能隨否認之思想俱無存在。　故負名之邏輯眞理，章訓"凡本來無有"之絕對意義實非是。　知識連誼，正負互存，認有無兩實，乃原理之連逮如此也。

邏輯析"褫名"亦有之，褫名章訓"昔有而今無"。　片辭狹陋，偏政法辭典之義。　邏輯舊義詳瓦爾夫(Wolff)本體論二二四節及穆勒名學一卷二章六節。　褫名攝兩件：以有應無，因無期有；乃一主辭之"同時"屬性。　故有釐爲主辭表現時所"注意"之缺性名詞者，如以目論人而有"盲目，"論樹而有"無目，"論胎而有目"不見"。

負名與褫名在康德四範疇中悉歸"無"類,負名爲第三範疇,如"空"空間,"空"時間之空;褫名列第二範疇,如冷,暗,死,疑,與亞里士多德所謂"負因"同,即無"現因"之影響也。它如第一範疇無現實概念之"質體,"第四範疇矛盾概念之"圓的方""兩直線多角形"之類,合稱"無"之四範。

疑負褫之規律而辯有無之實相者,說軼於證。原"有"之定義爲有,爲實,爲存在;"無"之定義爲無,爲虛,爲非有。形上之論如此,形下之證亦驗如此。有本非無,然宇宙人類,偏存"無"念,無實非有,何出"有無"之說? 曰有無相生,生死死生,無有有無,(哀哈格立派之說。)二者同義;如異範同疇,則異無同有矣。是矛盾律之分晝,乃習慣因果之現象律也。宇宙旣無空時間與空空間,則"絕無"之本身非空"空"而亦不能空。若某一之空截"無有在"而又續具實相之"實有存",於邏輯不倫,於數理亦不類。謂無爲無有,而忘時間之眞性,則不知孔子"無"於現實之現有,而"有"於現實之過去;謂零爲無有,則凡一以下之級次,九以上之整數,皆不能表而出之。所謂相生之義,擬若是說而精於此理。

常識之有無與科學無絕對差異性。如謂富人有錢,窮士無米,正與科學之空間有三度,時間無斷片,哲學之物無虛相,理有眞僞同誼。有無之明白觀念,僉時空直觀與理智"範疇判斷"共有之象徵認識;兩稱無限"未知""未始"之多元關係。宇宙不能獨持"兩相"絕對元素。今之相對論排除齊一矛盾諸律,正宜準作"實有無緣生,無有分自體"之謬解立斷。

舊式邏輯之範疇過狹,而有無之爭解難免遁辭或重言。 吾人精神思想,兩互有用,曰假辭,思想自由創立,精神亦自由選擇;若範疇所限,義不及化。 曰實辭,負負同正,不無釋有,辯證無窮,邏輯技巧如幻。 舊邏輯對之有似無鎗戰卒,死亦難以克敵。

負補與有無之精義,惟數學邏輯或"邏輯範"或名"論域"(L'univers de discours)得爲證之,蓋任何概念集聚,必視判斷或推理之"邏輯範"以正其誼。 如云"犬無言",有眞僞兩值,在動物學論域示眞,在物語則示僞;"禽獸無父"以名言爲眞,以實喩爲僞;"墨翟無父"以兼言爲眞,以愛言爲僞,若以兼愛言,則眞僞同爲可能。彼數學邏輯正負或眞僞二値,具能兼一名,昔賴本尼支以名詞"通性數"釋之,質言之,一名具互爲素數之正負二指數者,乃所以示名之相對也,如"人"名必因"非人"名在,以人與非人互爲素數性,即矛盾根性也。故邏輯類分之判斷推理,必據邏輯範以行之,辯者惑術,牢入圈套,無謂之爭,將囿於此。 若能自無定論之通性出發,則如證方程,更稱上上。

附本書參攷用書一覽

A. 第一二章用書

1. F. Enriques: L'évolution de la logique.
   (Trad. Par Monod-Herzen, Paris Chiron, 1926)
2. A. Franck: Esquisse d'une histoire de la logique.
3. L. Liard: Les logiciens anglais contemporains.
4. A. Reymond: Les principes de la logique et la critique contemporaine. (Paris Boivin 1932)
5, E. Bréhier: Histoire de la philosophic, T. I.
6. L. Brunschvicg: Les étapes de la philosophie mathématique I. ed.
7. G. Boole: Collected logical works (réedité en 1916)
8. B. Russell: Introduction to mathmatical philosophy,.
9. F. Gonseth: Les fondements des mathématiques.
10. J. Pacotte: La pensée mathématique contemporaine.

第三章至第七章用書

1. B. Russell et Whitehead: Principia mathematica.
2. L. Couturat: Les principes des mathématiques
3. G. Schröder: Vorlesungen über die algebra der logik.
4. A. Padoa: La logique déductive.
5. R. Feys: Le Raisonnement en termes de faits dans la logistique Russellienne.
6. C. I. Lewis: A survey of symbolic logique.
7. G. Peano: Formulaire de mathématique, 5 vol.
8. A. Spaier: La pensée et la quantité.
9. R. Carnap: Abriss der logistik.
10. C. H. Luquet: Logique formelle (Alean. 1925)

第八章至第十一章用書

1. D. Hilbert: Grundlagen der geometrie.
2. D. Hilbert: Sur les fondements de la logique et de l'arithmétique.
3. L. Conturat: Les Definitions mathématiques. (L'enseiguement mathématique 7e année 1905)
4. O. Hölder: Die mathématische methode.
5. H. Poincaré: Les fondements de la géométrie.
6. A. Einstein: La géométrie et l'experience.
7. D. Hilbert: Pensée axiomatique (L'enseig. math. xx. 1918-19)
8. D. Hilbert: La Connaissance de la nature et la logique (L'enseig. math. 1931)
9. L. Rougier: La philosophic géométrique de H. Poincaré (1920)
10. J. Herbrand: Recherches sur la théorie de la démonstration. (Dziewulski, Varsovie 1930)
11. J. Herbrand: Les bases de la logique hilbetienne. (R. M. M. 1930. P. 243-255)
12. J. Nicod: La géometrie dans le monde sensible.
13. R. Poirier: Essai sur quelques caractéres des notions d'espace et de temps.
14. Ch. Henry: Psyco-Biologique et energétique.
15. A. Jakubisiak: Essai sur les limites de l'espace et du temps.

第十二章至第十四章用書

1. L. Rougier: Les paralogismes du rationalisme.
2. L. Rougier: La structure des théories déductives.
3. Burali-Forti: Logica mathématica.
4. J. Jörgensen: A treatise of formal logic. etc. (3. Vol., Copenhague et Londres 1931)
5. G. Cantor: Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis (Trad. Marotte)

6. D. Hilbert und W. Ackermann: Grundzüge der theorietischen logik. (Berlin 1928)

7. St. Zaranba: La logique des mathématiques.

8. A. Spaier: La pensée concrète.

9. H. Dufumier: La logique des classes et la théorie des ensembles. (R. M M. 1916)

10. L. Stebbing: Modern introduction to logic.

11. R. Carnap: Le probleme de la logique de la science (Trad. Vouillemin Paris Hermann)

12. Centre de synthèse—quatrième semaine l'internat.: Evolution de la physique et la philosophie. (Alcan 1935)

13. J. Pacotte: La logique. et l'empirisme integral. (Paris Hermann)

14. Le général Vouillemin: La logique de la science et l'École de Vienne.

15. O. Neurath: Le Developpement du cercle de Vienne et l'avenir de l'empirisme logique (Trad. Vouillemin)

16. W. V. Orman Quine: A system of logistic. (Harvard univ. Pren 1934)

17. E. Hussert: Philosophic der Arithmetik.

18. E. Hussert: Logische untersuchungen.

19. E. Hussert: Ideen zu einer reinen phönomenologic und phänomenalogischen philosophie (Halle 1913)

20. E. Levinas: La théorie de l'intuition dans la phénoménologie de Hussert.

21. P. Langevin, etc: L'orientation actuelle des sciences. (Alcan 1930)

22. G. Gurvitch: Les tendances de la philosophie allemande.

附釋：本書批評反對之用書，此處均未列入．而一般舊形式邏輯之基本著作，亦未舉述於此．讀者參閱拙著邏輯與數學邏輯論用書一覽可也．再英美最近出版關於數學邏輯參考書頗多，希讀者自取參用．

廿五年菊月三輔識於平寓．