7.7 Esercizi

7.7.1 Esercizi dei singoli paragrafi

7.1 - Proposizioni e predicati

7.1. Completa la tabella come suggerito nella prima riga, individuando, per ciascuna proposizione, il predicato e gli argomenti a cui esso si riferisce:

Proposizioni	Predicato	Argomenti
7 è divisore di 14	essere divisore di	7, 14
11 è maggiore di 10	essere maggiore di	
5 è numero primo		
Andrea frequenta la stessa palestra di Marco		
Marta è moglie di Piero		
Paolo è padre di Marco		

7.2 - Relazioni in un insieme

7.2. Nell'insieme $A = \{3, 5, 6, 9, 30\}$ considera il predicato "essere minore di"; con esso forma proposizioni vere aventi come soggetto e come complemento due elementi di A.

Esempio: p_1: 9 è minore di 30.

7.3. Nell'insieme A rappresentato con il diagramma di Eulero-Venn di figura 7.10 introduciamo il predicato $\mathfrak{R}$: "avere una sola lettera diversa". Costruisci l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$.

Traccia di soluzione: Per costruire l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$ devo formare le coppie ordinate ricordando che per qualunque a e b appartenenti ad A, $a \,\mathfrak{R}\, b$ se e solo se "a ha una sola lettera diversa da b", ad esempio prete $\mathfrak{R}$ prese.

7.4. Nell'insieme $C =$ {Como, Milano, Venezia, Parma, Brescia, Aosta, Torino, Genova, Imperia, Arezzo, Firenze, Grosseto, Napoli, Campobasso, Catanzaro, Bologna, Vercelli, Salerno} è definita la relazione $\mathfrak{R}$: "essere nella stessa regione". Costruisci l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$.

7.5. Nell'insieme $S = \{x \mid x \text{ è il nome di un giorno della settimana}\}$ è definita la relazione $\mathfrak{R}$: $x \in S, y \in S$, $x \,\mathfrak{R}\, y$ se e solo se "x ha lo stesso numero di sillabe di y". Costruisci l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$.

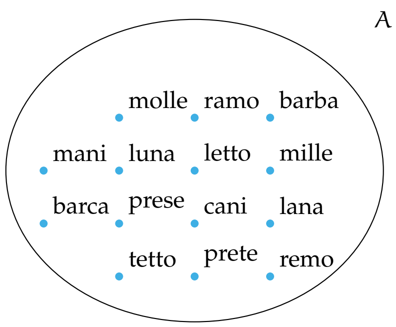


Figura 7.10

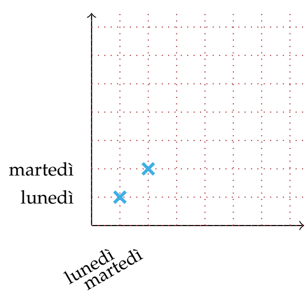


Figura 7.11

7.6. Nell'insieme $F = \{1, 3, 4, 6, 5, 9, 0, 2\}$ è definita la relazione $\mathfrak{R}$: "essere consecutivi". Costruisci l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$.

7.7. Considera l'insieme $S = \{x \mid x$ è il nome di un giorno della settimana$\}$, completa la rappresentazione grafica di figura 7.11 a pagina 202, dell'insieme $S \times S$, evidenzia poi con una crocetta gli elementi dell'insieme $G_{\mathfrak{R}}$ determinato dalla relazione "x ha lo stesso numero di sillabe di y".

7.8. Considera l'insieme $F = \{1, 3, 4, 6, 5, 9, 0, 2\}$; fai la rappresentazione grafica dell'insieme $F \times F$ e metti in evidenza con una crocetta gli elementi dell'insieme $G_{\mathfrak{R}}$ determinato dalla relazione "essere consecutivi".

7.9. Considera nell'insieme $A = \{-1, +3, -7, +5, -2, +4, +10\}$ la relazione $\mathfrak{R}$: $x \in A$, $y \in A$, $x\mathfrak{R}y$ se e solo se "x è concorde con y". Costruiamo una tabella a doppia entrata (figura 7.12) riportando in orizzontale e in verticale gli elementi dell'insieme A. Fissa l'attenzione su una cella e segui le istruzioni:

- se $a \, \mathfrak{R} \, b$ metti 1 nella cella $(a; b)$;
- altrimenti metti 0 nella cella $(a; b)$.

Prosegui tu seguendo l'esempio.

❑ **Osservazione** Alla fine tutte le celle sono riempite: compare zero se gli elementi della coppia ordinata non sono in relazione, compare 1 al contrario. La relazione $\mathfrak{R}$ è completamente rappresentata.

La tabella costruita si chiama *matrice della relazione*. Una relazione può sempre essere rappresentata attraverso una matrice.

7.10. Nell'insieme $S = \{x \mid x$ è il nome di un giorno della settimana$\}$ è introdotta la relazione $\mathfrak{R}$: $x \in S$, $y \in S$, $x \, \mathfrak{R} \, y$ se e solo se "x ha lo stesso numero di sillabe di y". Rappresenta la relazione con una matrice.

7.11. Assegnato il predicato $\mathfrak{R}$: "essere divisibile per" introdotto nell'insieme $A = \{12, 4, 2, 8, 3, 21, 5, 60\}$, rappresenta con una matrice la relazione $\mathfrak{R}$.

	-1	$+3$	-7	$+5$	-2	$+4$	$+10$
-1	1						
$+3$							
-7							
$+5$			0				
-2							
$+4$							
$+10$							

Figura 7.12

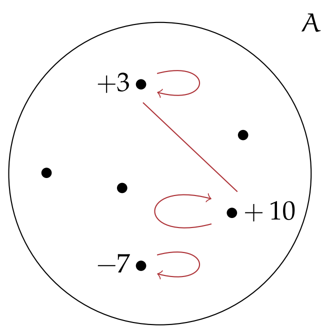


Figura 7.13

7.12. Completa la rappresentazione di figura 7.13 a pagina 203 con le frecce relative alla relazione $\mathfrak{R}$: $x \in A$, $y \in A$, $x\mathfrak{R}y$ se e solo se "x è concorde con y" nell'insieme $A = \{-1, +3, -7, +5, -2, +4, +10\}$.

7.13. Nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ è introdotto il predicato $\mathfrak{R}$: "essere il doppio di"; costruisci l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$, rappresenta la relazione nei tre modi descritti sopra: con un grafico cartesiano, con una matrice e con un grafo.

7.14. Sono assegnati i grafi di tre relazioni $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ definite in altrettanti insiemi A, B, C (figura 7.14); deduci da essi gli elementi di ciascun insieme e costruisci, per ciascuna relazione, l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$.

7.15. Rappresenta nei tre modi che sono stati descritti (con un grafico cartesiano, con una matrice, con un grafo) la relazione $\mathfrak{R}$: "essere nati nello stesso mese" introdotta nell'insieme C degli alunni della tua classe.

7.16. Nell'insieme $H = \{x \in \mathbb{N} \mid 21 < x < 40\}$, $x\,\mathfrak{R}\,y$ se e solo se "la somma delle cifre di x è uguale alla somma delle cifre di y". Costruisci $G_{\mathfrak{R}}$ e rappresenta la relazione con una matrice.

7.17. Rappresenta con un grafo la relazione $\mathfrak{R}$ indicata dal grafico cartesiano riportato nella figura 7.15.

7.3 - Proprietà delle relazioni

7.18. Quali relazioni sono riflessive?

Insieme	Relazione	È riflessiva?
Numeri naturali	essere divisibile per	Sì No
Libri che hai in cartella	avere lo stesso numero di pagine di	Sì No
Rette del piano	essere perpendicolare a	Sì No
Rette del piano	essere parallela a	Sì No
Poligoni	avere lo stesso numero di lati di	Sì No
Città della Lombardia	terminare con la stessa vocale	Sì No
Parole italiane	essere il plurale di	Sì No

7.19. Quali delle seguenti relazioni sono antiriflessive?

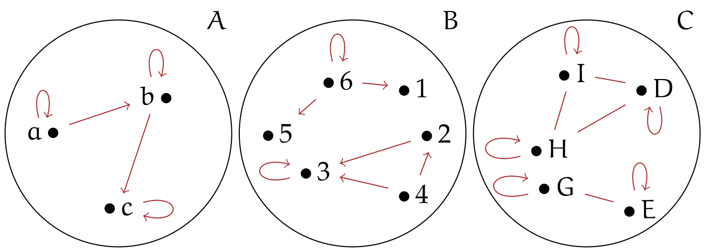


Figura 7.14

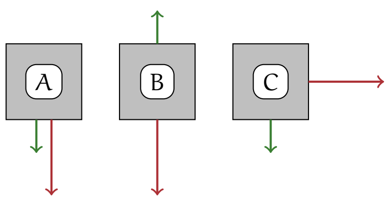


Figura 7.15

Insieme	Relazione	È antiriflessiva?
Numeri naturali	essere multiplo di	Sì No
Rette del piano	essere perpendicolare a	Sì No
Poligoni	avere lo stesso perimetro	Sì No
Città del Piemonte	avere più abitanti di	Sì No
Parole italiane	essere il femminile di	Sì No
Fiumi italiani	essere affluente di	Sì No
Persone	essere figlio di	Sì No

7.20. Riconosci le relazioni simmetriche:

Insieme	Relazione	È simmetrica?
Città d'Italia	appartenere alla stessa regione	Sì No
Rette del piano	essere perpendicolare a	Sì No
Solidi	avere lo stesso volume di	Sì No
Persone	essere il padre di	Sì No
Persone	essere fratello o sorella di	Sì No
Numeri naturali	avere lo stesso numero di cifre di	Sì No
Fiumi d'Europa	essere affluente di	Sì No
Numeri interi	essere il quadrato di	Sì No
Persone	abitare nello stesso comune	Sì No

Le relazioni degli ultimi due casi non godono della proprietà simmetrica. Infatti:

- la proposizione "Il Ticino è un affluente del Po" è vera, ma non lo è la proposizione che da essa si ottiene scambiando il soggetto con il complemento;
- se un numero intero è il quadrato di un altro (ad esempio $+25$ è il quadrato di $+5$), non è vero il contrario (infatti $+5$ non è il quadrato di $+25$).

7.21. Riconosci le relazioni antisimmetriche:

Insieme	Relazione	È antisimmetrica?
Numeri naturali	essere divisibile per	Sì No
Rette del piano	essere perpendicolare a	Sì No
Poligoni	avere lo stesso perimetro di	Sì No
Angoli	essere complementare a	Sì No
Città del Lazio	essere nella stessa provincia di	Sì No

7.22. Verifica se, nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, la relazione $\mathfrak{R}$: "avere lo stesso numero di cifre" gode della proprietà transitiva. Completa le proposizioni e rappresenta $\mathfrak{R}$ con un grafo:

a) da $18\,\mathfrak{R}\,50$ e $50\,\mathfrak{R}\,\ldots$ segue $\ldots\,\mathfrak{R}\,\ldots$;
b) da $\ldots\,\mathfrak{R}\,555$ e $\ldots\,\mathfrak{R}\,267$ segue $\ldots\,\mathfrak{R}\,\ldots$

7.23. Indica quale tra le seguenti relazioni è transitiva:

Insieme	Relazione	È transitiva?
Numeri naturali	essere multiplo di	Sì No
Regioni d'Italia	essere più a nord di	Sì No
Numeri interi	essere minore di	Sì No
Rette del piano	essere perpendicolare a	Sì No
Persone	essere padre di	Sì No
Stati d'Europa	confinare con	Sì No

7.24. Dai una rappresentazione tabulare dell'insieme $H = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x \leqslant 12\}$; determina il resto della divisione di ciascun numero di H con 4, compila la tabella come suggerito nell'esempio:

operazione	$0:4$	$1:4$	$2:4$	...	$11:4$	$12:4$
resto	0	1	...		3	0

Introduciamo in H la relazione $x \mathfrak{R} y$ se e solo se "x e y hanno lo stesso resto nella divisione per 4". Costruisci il grafo della relazione e stabilisci se gode della proprietà transitiva.

La stessa relazione $\mathfrak{R}$, introdotta nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ è una relazione transitiva?

7.25. Indica le proprietà che verificano le seguenti relazioni.

(R=riflessiva, S=simmetrica, T=transitiva, AS=antisimmetrica, AR=antiriflessiva)

Insieme	Relazione	Proprietà
Poligoni del piano	avere lo stesso numero di lati	[R] [S] [T] [AS] [AR]
Numeri naturali	avere lo stesso numero di cifre	[R] [S] [T] [AS] [AR]
Numeri naturali	essere minore di	[R] [S] [T] [AS] [AR]
Numeri naturali	essere divisibile per	[R] [S] [T] [AS] [AR]
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$	essere multiplo di	[R] [S] [T] [AS] [AR]
Auto	essere della stessa marca costruttrice	[R] [S] [T] [AS] [AR]

7.4 - Relazioni di equivalenza

7.26. Quali delle seguenti sono relazioni di equivalenza?

Relazione	Insieme	È d'equivalenza?
Essere multiplo	numeri naturali	V F
Avere lo stesso numero di sillabe	parole italiane	V F
Essere minore	interi relativi	V F
Vincere	squadre di calcio	V F
Avere lo stesso numero di angoli	poligoni	V F
Essere il plurale	parole italiane	V F
Essere il cubo	numeri italiani	V F

7.27. Fissa l'attenzione sulla relazione $\mathfrak{R}$: "frequentare la stessa classe" introdotta nell'insieme S degli alunni iscritti nella tua scuola. Verifica che $\mathfrak{R}$ è una relazione d'equivalenza. Costruisci le classi d'equivalenza. Quante ne hai potute formare? Come sono indicate nella realtà che vivi quotidianamente? Determina la partizione $P(S)$ in classi d'equivalenza e infine l'insieme quoziente $S/\mathfrak{R}$.

7.28. Studia in $\mathbb{N}$ la relazione $\mathfrak{R}$: "avere la stessa cifra delle unità". Verifica se è una relazione d'equivalenza, costruisci l'insieme quoziente dopo aver risposto alle seguenti domande:

- ➡ quanti numeri naturali sono tra loro equivalenti?
- ➡ da quanti elementi è costituito l'insieme $\mathbb{N}/\mathfrak{R}$?
- ➡ qual è l'elemento che sceglieresti come rappresentante di ciascuna classe?

7.29. Considera la relazione $\mathfrak{R}$: "avere lo stesso resto nella divisione per due" introdotta nell'insieme $\mathbb{N}$ e studiane le proprietà.

- ➡ è una relazione d'equivalenza? Se la risposta è affermativa, costruisci l'insieme quoziente $\mathbb{N}/\mathfrak{R}$.
- ➡ quante classi d'equivalenza hai formato?
- ➡ puoi sfruttare quanto ottenuto per enunciare le definizioni di numero pari e di numero dispari?
- ➡ giustifica, in base allo svolgimento dell'esercizio, l'affermazione: "L'insieme dei numeri pari è il complementare in $\mathbb{N}$ dell'insieme dei numeri dispari".

7.30. Considera l'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 20\}$ e i suoi sottoinsiemi: $A_1 = \{1, 5, 9, 13, 17\}$, $A_2 = \{2, 6, 10, 14, 18\}$, $A_3 = \{3, 7, 11, 15, 19\}$, $A_4 = \{4, 8, 12, 16, 20\}$.

a) Rappresenta gli insiemi con un diagramma di Eulero-Venn;
b) si può affermare che quei sottoinsiemi costituiscono una partizione dell'insieme A?
c) è vero che a ciascuno dei suddetti sottoinsiemi appartengono i numeri di A aventi lo stesso resto nella divisione per 4?
d) quei sottoinsiemi sono dunque classi d'equivalenza? Qual è il predicato della relazione che le determina?

7.31. Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali stabilisci se è d'equivalenza la relazione $\mathfrak{R}$: "$x \,\mathfrak{R}\, y$ se e solo se x ha le stesse cifre di y".

7.32. Nell'insieme C degli alunni della tua classe, verifica se la relazione $\mathfrak{R}$: "$x \,\mathfrak{R}\, y$ se e solo se il cognome di x ha la stessa lettera iniziale del cognome di y" è d'equivalenza; determina in caso affermativo la partizione dell'insieme C e l'insieme quoziente $C/\mathfrak{R}$.

7.33. Nell'insieme delle parole della lingua italiana verifica se la relazione "$x \,\mathfrak{R}\, y$ se e solo se x ha lo stesso numero di lettere di y" è una relazione di equivalenza. In caso affermativo individua alcune classi di equivalenza.

7.34. Nell'insieme dei nomi dei giorni della settimana considera la relazione "$x \,\mathfrak{R}\, y$ se e solo se x e y scritti in lettere, hanno almeno tre lettere in comune". Verifica se è una relazione di equivalenza e in caso affermativo individua le classi di equivalenza.

7.35. Nell'insieme dei numeri naturali da 1 a 100, verifica se la relazione "$x \,\mathfrak{R}\, y$ se e solo se x e y hanno lo stesso numero di lettere" è una relazione di equivalenza. Individua quante sono le classi di equivalenza. Scrivi tutti gli elementi delle classi di equivalenza [1] e [10].

7.36. Nell'insieme dei numeri naturali da 1 a 100, verifica se la relazione "$x \,\mathfrak{R}\, y$ se e solo se $x + y$ è dispari" è una relazione di equivalenza.

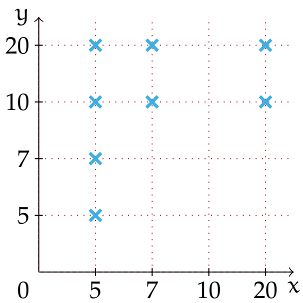
7.37. Nell'insieme dei nomi dei mesi dell'anno verifica se la relazione "$x \,\mathfrak{R}\, y$ se e solo se x e y hanno lo stesso numero di giorni" è una relazione di equivalenza. Eventualmente individua le classi di equivalenza.

7.5 - Relazioni di ordine

7.38. Nell'insieme $M = \{1, 8, 3, 4, 10, 2, 7, 0, 5, 9, 6\}$ viene introdotta la relazione $\mathfrak{R}$ così definita: "$x \,\mathfrak{R}\, y$ se e solo se $y - x$ appartiene a $\mathbb{N}$". La relazione è riflessiva? La relazione è antisimmetrica? La relazione è transitiva? È vero che due elementi distinti sono sempre confrontabili?

7.39. Verifica che la relazione $\mathfrak{R}$: "essere divisore" introdotta nell'insieme $J = \{3, 6, 10, 15, 21\}$ è una relazione d'ordine parziale in senso largo.

7.40. Perché la relazione $\mathfrak{R}$ rappresentata dal grafico cartesiano riportato nella figura, pur essendo una relazione d'ordine non può essere classificata in nessuna delle tipologie studiate? Dai una breve motivazione indicando quali proprietà non sono soddisfatte dalla relazione rappresentata.



7.41. Nell'insieme degli studenti della tua classe determina le proprietà della relazione $\mathfrak{R}$: "$x \,\mathfrak{R}\, y$ se e solo se l'altezza di x non supera l'altezza di y". È una relazione d'ordine? Di quale tipo?

7.42. Nell'insieme $A = \{12, 4, 2, 8, 3, 21, 5, 60\}$ la relazione $\mathfrak{R}$: "essere divisibile" è una relazione d'ordine? Se lo è, di che tipo di relazione si tratta? Totale, parziale, in senso largo, in senso stretto?

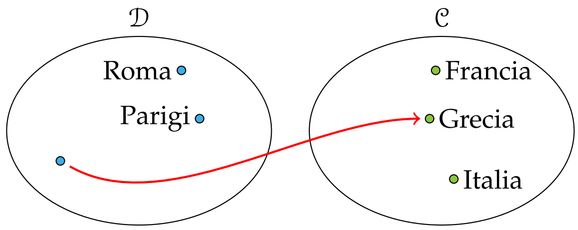
7.43. Nell'insieme $\mathbb{N} - \{0\}$ la relazione "essere divisibile" è d'ordine totale in senso largo?

7.6 - Relazioni tra due insiemi diversi

7.44. Rappresenta con un grafico cartesiano la relazione $\mathfrak{R}$: "essere nato nell'anno" di dominio l'insieme $A = \{$Galileo, Napoleone, Einstein, Fermi, Obama$\}$ e codominio l'insieme $B = \{1901, 1564, 1961, 1879, 1769, 1920, 1768\}$. Rappresenta per elencazione il sottoinsieme $G_{\mathfrak{R}}$ del prodotto cartesiano $A \times B$. Stabilisci infine gli elementi dell'immagine IM..

7.45. L'insieme $S = \{$casa, volume, strada, ufficio, clavicembalo, cantautore, assicurazione$\}$ è il codominio della relazione $\mathfrak{R}$: "essere il numero di sillabe di" il cui dominio è $X = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x < 10\}$. Rappresenta con un grafico cartesiano la relazione assegnata, evidenzia come nel primo esempio di questo paragrafo l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$, scrivi per elencazione l'insieme IM..

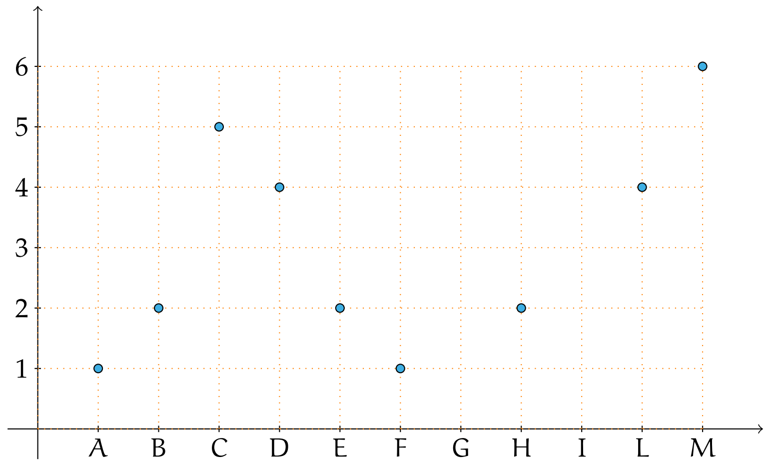
7.46. Completa la rappresentazione con grafico sagittale della relazione "essere capitale di". La freccia che collega gli elementi del dominio con quelli del codominio rappresenta il predicato $\mathfrak{R}$: "essere la capitale di".



7.47. È univoca la relazione $\mathfrak{R}$ definita tra l'insieme $P = \{$parola del proverbio "rosso di sera, bel tempo si spera"$\}$ e l'insieme $A = \{$lettere dell'alfabeto italiano$\}$ che associa ad ogni parola la sua iniziale? Ti sembra corretto affermare che dominio e insieme di definizione coincidono? Completa con il simbolo corretto la relazione tra insieme immagine e codominio: IM.... $\mathcal{C}$. Fai il grafico sagittale della relazione.

7.48. $\mathfrak{R}$ è la relazione tra l'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali e l'insieme degli interi relativi $\mathbb{Z}$ espressa dal predicato "essere il quadrato di". Ti sembra corretto affermare che dominio e insieme di definizione coincidono? Perché IM. $= \mathcal{C}$? La relazione è univoca?

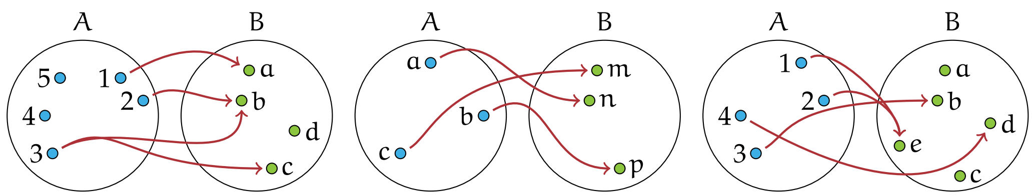
7.49. Una relazione $\mathfrak{R}$ è assegnata con il suo grafico cartesiano.



Completa e rispondi alle domande:

a) $\mathcal{D}$ ={ . . . . };
b) $\mathcal{C}$ ={ . . . . };
c) I. D. ={ . . . . };
d) IM. ={ . . . . };
e) la relazione è biunivoca?
f) 2 è l'immagine di quali elementi dell'insieme di definizione?
g) quale elemento del codominio è l'immagine di M?

7.50. I tre grafici sagittali rappresentano altrettante corrispondenze, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$. Completa per ciascuna di esse la descrizione schematizzata nel riquadro sottostante:



$\mathcal{D}$ = . . .	$\mathcal{D}$ = . . .	$\mathcal{D}$ = . . .
$\mathcal{C}$ = . . .	$\mathcal{C}$ = . . .	$\mathcal{C}$ = . . .
I. D. = . . .	I. D. = . . .	I. D. = . . .
IM. = . . .	IM. = . . .	IM. = . . .
Tipo= . . .	Tipo= . . .	Tipo= . . .

7.7.2 Esercizi riepilogativi

7.51. L'insieme $G_{\mathfrak{R}}$ di una relazione introdotta nell'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$ è $G_{\mathfrak{R}} = \{(a; a), (a; b), (b; b), (d; d), (c; d), (d; e), (e; e)\}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera

a) $\mathfrak{R}$ è una relazione antiriflessiva;
b) $\mathfrak{R}$ è una relazione solo antisimmetrica;
c) $\mathfrak{R}$ è una relazione riflessiva;
d) $\mathfrak{R}$ è una relazione transitiva e antisimmetrica;

7.52. La relazione $\mathfrak{R}$: "essere vicini di banco" inserita nell'insieme degli alunni della tua classe è una relazione d'equivalenza? È una relazione d'ordine?

7.53. I tre sottoinsiemi $A_1 = \{36, 135, 432\}$, $A_2 = \{65\}$ e $A_3 = \{66, 3\,522, 93, 435\}$ dell'insieme $A = \{36, 65, 66, 93, 135, 432, 435, 3\,522\}$ costituiscono una partizione dell'insieme A? Sapresti trovare una caratteristica per gli elementi di ciascun sottoinsieme? A_1, A_2, A_3 sono classi d'equivalenza?

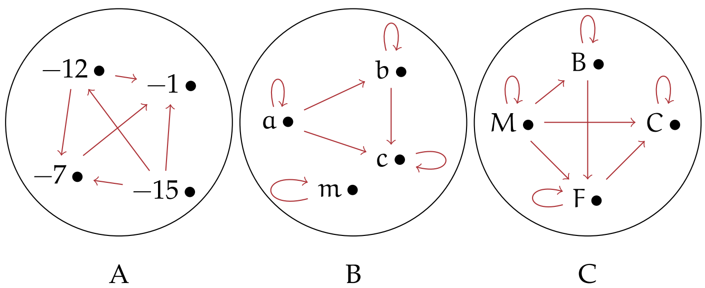
7.54. La relazione $\mathfrak{R}$: "$x \,\mathfrak{R}\, y$ se e solo se x sta nella stessa nazione di y" nell'insieme $K = \{$Parigi, Madrid, Milano, Siviglia, Bari, Granada, Venezia, Lione$\}$ è d'equivalenza? Costruisci $A/\mathfrak{R}$.

7.55. Verifica se la relazione $\mathfrak{R}$ assegnata con la matrice rappresentata sotto è d'equivalenza. In caso positivo determina la partizione dell'insieme $A = \{\square, \lozenge, \infty, \nabla\}$ e l'insieme quoziente $A/\mathfrak{R}$.

	$\square$	$\lozenge$	∞	∇
$\square$	1	1	0	0
$\lozenge$	1	1	0	0
∞	0	0	1	1
∇	0	0	1	1

7.56. Associa a ciascun grafo della figura la corretta relazione d'ordine:

a) ordine totale in senso largo;
b) ordine totale in senso stretto;
c) ordine parziale in senso largo;
d) ordine parziale in senso stretto.



7.57. In un torneo di pallavolo gareggiano quattro squadre A, B, C, D; rappresenta con un grafo a frecce le seguenti informazioni, relative alle prime tre giornate:

- 1ª giornata: A vince contro B; C vince contro D;
- 2ª giornata: D vince contro A; B vince contro C;
- 3ª giornata: A vince contro C; B vince contro D;

Il 4º giorno si gioca la semifinale tra le prime due classificate e le altre due. Se per ogni vittoria si ottiene un punteggio di 10 punti e per ogni sconfitta un punteggio di 2 punti, quale squadra gioca la semifinale con B? Il torneo è vinto dalla squadra C. Rappresenta con un grafo a frecce la situazione della semifinale e quella della finale. È unica la risposta a quest'ultimo quesito?

7.58. Analizza le proprietà delle seguenti relazione e stabilisci se sono relazioni di equivalenza o di ordine e in questo caso di che tipo sono.

Insieme	Relazione
$\mathbb{N}$	$x \,\Re\, y \Leftrightarrow x$ è la metà di y
$\mathbb{Z}$	$x \,\Re\, y \Leftrightarrow x$ è il quadrato di y
$\mathbb{N}$	$x \,\Re\, y \Leftrightarrow x + y \leqslant x \cdot y$
Persone	$a \,\Re\, b \Leftrightarrow a$ è più giovane di b
Persone	$a \,\Re\, b \Leftrightarrow a$ non è più vecchio di b
Cittadini italiani	$a \,\Re\, b \Leftrightarrow a$ risiede in una regione che confina con quella di b
Rette del piano	$r \,\Re\, s \Leftrightarrow r$ interseca s
Alunni della classe	$a \,\Re\, b \Leftrightarrow a$ ha il nome con lo stesso numero di lettere di quello di b
$\mathbb{Z}$	$a \,\Re\, b \Leftrightarrow a^2 = b^2$
Parole italiane	$p \,\Re\, q \Leftrightarrow p = q$ oppure p precede q in uno specifico vocabolario
$\mathbb{N}$	$n \,\Re\, m \Leftrightarrow n \cdot m$ è dispari
$\mathbb{N}$	$n \,\Re\, m \Leftrightarrow n + m$ è dispari
Iscritti a Facebook	$a \,\Re\, b \Leftrightarrow a$ ha più amici di b
Parole italiane	$p \,\Re\, q \Leftrightarrow p$ ha meno lettere di q
$\mathbb{N}$	$n \,\Re\, m \Leftrightarrow n$ ha lo stesso numero di cifre di m
Persone	$a \,\Re\, b \Leftrightarrow a$ abita nella stessa via di b
Persone	$a \,\Re\, b \Leftrightarrow a$ parla la stessa lingua di b
Persone	$a \,\Re\, b \Leftrightarrow a$ ha lo stesso cognome di b
$\mathbb{N}$	$n \,\Re\, m \Leftrightarrow n$ ha un divisore diverso da 1 in comune con m
$\mathbb{Z}$	$x \,\Re\, y \Leftrightarrow x \cdot y$ è negativo

7.59. Andrea, insegnante di grafica, ha chiesto ai suoi alunni di usare il minimo numero di colori per colorare il modello della figura sottostante in modo che poligoni confinanti non risultino con lo stesso colore. Come si può risolvere il problema? [Risposta: 3 colori]

Traccia di soluzione: Nell'insieme $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ studia la relazione $\mathfrak{R}$: "confinare con", rappresentandola con un grafico cartesiano e sfrutta i risultati trovati per risolvere il problema. La soluzione può essere trovata fissando un punto interno a ciascuna regione: due punti sono uniti se e solo se le regioni confinano, il segmento che li congiunge deve attraversare solo il loro confine comune; i punti che non sono congiunti indicano regioni che avranno lo stesso colore.