Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Analysis II

Arbeitsblatt 31

Übungsaufgaben

Aufgabe 31.1. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine wachsende Funktion und $b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Folge $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, genau dann gegen b konvergiert, wenn

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

gilt, wenn also die Funktion für $x \to +\infty$ den Grenzwert b besitzt.

Aufgabe 31.2. Es sei $[a, +\infty[$ ein rechtsseitig unbeschränktes Intervall und $f, g\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ seien Funktionen derart, dass die Grenzwerte $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ und $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ existieren. Zeige, dass folgende Beziehungen gelten.

(1) Die Summe $f + g$ besitzt einen Grenzwert für $x \to +\infty$, und zwar ist

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to +\infty} f(x) + \lim_{x \to +\infty} g(x) .$$

(2) Das Produkt $f \cdot g$ besitzt einen Grenzwert für $x \to +\infty$, und zwar ist

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} g(x) .$$

(3) Es sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, +\infty[$ und $\lim_{x \to +\infty} g(x) \neq 0$. Dann besitzt der Quotient f/g einen Grenzwert für $x \to +\infty$, und zwar ist

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to +\infty} f(x)}{\lim_{x \to +\infty} g(x)} .$$

Aufgabe 31.3. Sei I ein Intervall, r ein (uneigentlicher) Randpunkt von I und

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_a^r f(t)\, dt$$

nicht vom gewählten Startpunkt $a \in I$ abhängt.

Aufgabe 31.4. Sei $I =]r,s[$ ein beschränktes offenes Intervall und

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die sich auf $[r,s]$ stetig fortsetzen lässt. Zeige, dass dann das uneigentliche Integral

$$\int_r^s f(t)\,dt$$

existiert und mit dem bestimmten Integral

$$\int_r^s f(t)\,dt$$

übereinstimmt.

Aufgabe 31.5. Formuliere und beweise Rechenregeln für uneigentliche Integrale (analog zu Lemma 23.16.)

Aufgabe 31.6.*

Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{x^2-3x+5}{x^4+2x^3+5x+8}\,dx$$

existiert.

Aufgabe 31.7. Bestimme das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-t}\,dt\,.$$

Aufgabe 31.8. Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

existiert und berechne es im Falle der Existenz.

Aufgabe 31.9. Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx$$

existiert und berechne es im Falle der Existenz.

Aufgabe 31.10.*

a) Sei

$$f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine monoton fallende stetige Funktion. Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty f(t)\, dt$$

existiert. Zeige, dass

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$

ist.

b) Man zeige durch ein Beispiel, dass die Aussage in a) für eine stetige, nicht monoton fallende Funktion nicht gelten muss.

Aufgabe 31.11.*

Es sei

$$f\colon\ ]0,1] \longrightarrow [0,\infty[$$

eine stetige, streng fallende, bijektive Funktion mit der ebenfalls stetigen Umkehrfunktion

$$f^{-1}\colon\ [0,\infty[\longrightarrow]0,1].$$

Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 f(t)\, dt$ existiert. Zeige, dass dann auch das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f^{-1}(y)\, dy$ existiert und dass der Wert dieser beiden Integrale übereinstimmt.

Aufgabe 31.12. Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

existiert.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 31.13. (2 Punkte)

Berechne die Energie, die nötig wäre, um die Erde, ausgehend von der jetzigen Lage relativ zur Sonne, unendlich weit von der Sonne zu entfernen.

Aufgabe 31.14. (4 Punkte)

Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{x^3 - 3x + 5}{x^4 + 2x^3 + 5x + 8}\, dx$$

existiert.

Aufgabe 31.15. (8 Punkte)

Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

existiert.

(Versuche nicht, eine Stammfunktion für den Integranden zu finden.)

Aufgabe 31.16. Man gebe ein Beispiel für eine unbeschränkte, stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

derart, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(t)\, dt$ existiert.

Aufgabe 31.17. (5 Punkte)

Es sei $I = [a, b]$ ein beschränktes Intervall und es sei

$$f\colon\ ]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge in I mit dem Grenzwert a und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge in I mit dem Grenzwert b. Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)\, dt$ existiert. Zeige, dass die Folge

$$w_n = \int_{x_n}^{y_n} f(t)\, dt$$

gegen das uneigentliche Integral konvergiert.

Aufgaben zum Hochladen[1]

Aufgabe 31.18. (5 Punkte)

Man fertige eine Skizze an, die die eulersche Konstante als einen Flächeninhalt darstellt.

[1]Bei einer Aufgabe zum Hochladen geht es darum, ein Bild (Animation etc.) mit einem Programm zu erstellen, über Commons hochzuladen (genau kategorisieren) und es in den Kurs einzubinden (siehe Materialseite des Kurses). Die Arbeit muss in einem auf Commons erlaubten Format erstellt und unter die CC-by-sa 3.0-Lizenz gestellt werden. Unbedingt das Urheberrecht beachten! Es gibt keinen genauen Abgabetermin, Nachbesserungen sind möglich und erwünscht. Bewertung letztlich durch den Dozenten. Die Gutschrift auf das Punktekonto erfolgt am Ende des Semesters vor der Klausur.