Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück SS 2018

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 14

Übungsaufgaben

Aufgabe 14.1. Es seien $S \subseteq S'$ Symbolalphabete und seien $L^S \subseteq L^{S'}$ die zugehörigen Sprachen Es sei $\Gamma \subseteq L^S$ eine Ausdrucksmenge.

(1) Γ sei widerspruchsfrei. Ist dann auch Γ, aufgefasst in $L^{S'}$, widerspruchsfrei?
(2) Γ sei maximal widerspruchsfrei. Ist dann auch Γ, aufgefasst in $L^{S'}$, maximal widerspruchsfrei?

Aufgabe 14.2. Zeige durch ein Beispiel, dass Lemma 14.5 ohne die Voraussetzung, dass eine surjektive Terminterpretation vorliegt, nicht gelten muss.

Aufgabe 14.3. Es sei S ein Symbolalphabet und I eine S-Interpretation auf einer Menge M mit der zugehörigen Terminterpretation. Zeige, dass man diese Terminterpretationsabbildung durch die Hinzunahme von Variablen (oder durch die Hinzunahme von Konstanten) surjektiv machen kann.

Aufgabe 14.4. Das Symbolalphabet S bestehe aus einer einzigen Variablen x und einem einzigen einstelligen Relationssymbol P. Zeige, dass zu einer Interpretation I die Gültigkeitsmenge $I^{\vDash} \subseteq L^S$ keine Beispiele enthalten muss.

Aufgabe 14.5.*

Es sei S ein Symbolalphabet und L^S die zugehörige Sprache und T die zugehörige Termmenge. Es sei $\Gamma \subseteq L^S$ eine Ausdrucksmenge.

(1) Zeige, dass durch

$$s \cong_\Gamma t \text{ genau dann, wenn } I(s) = I(t) \text{ für jede Interpretation } I \text{ mit } I \vDash \Gamma$$

eine Äquivalenzrelation auf T definiert wird.
(2) Wenn man Γ vergrößert, werden dann die Äquivalenzklassen größer oder kleiner?

Aufgabe 14.6. Es sei S ein Symbolalphabet, T die zugehörige Termmenge und L^S die zugehörige Sprache. Es sei $\Gamma \subseteq L^S$ eine Ausdrucksmenge. Zeige, dass die Äquivalenzrelation $\sim_\Gamma$ aus Konstruktion 14.7 die semantische Äquivalenz $\cong_\Gamma$ aus Aufgabe 14.5 impliziert.

Aufgabe 14.7. Das Symbolalphabet S bestehe neben Variablen $x, y, z, \ldots$ aus einer Konstanten 0 und einem einstelligen Funktionssymbol f. Wir betrachten die Teilmengen

$$\Gamma_i \subseteq L^S$$

mit

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{fff0 = 0\}^{\vdash},\\ \Gamma_2 &= \{fffx = x\}^{\vdash},\\ \Gamma_3 &= \{\forall x\,(fffx = x)\}^{\vdash}.\end{aligned}$$

Es seien $\sim_i$ die zugehörigen Äquivalenzrelationen gemäß Konstruktion 14.7 auf der Termmenge.

(1) Gelten die Äquivalenzen

$$ffff0 \sim_1 f0,\ ffffff0 \sim_1 fff0,\ fffffffff0 \sim_1 fffffff0,\ ffffx \sim_1 fx?$$

(2) Gelten die Äquivalenzen

$$ffffx \sim_2 fx,\ ffffy \sim_2 fy,\ fffx \sim_2 y,\ ffffy \sim_3 fy\,?$$

(3) Welche Inklusionsbeziehungen bestehen zwischen $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$?

(4) Wie viele Termklassen gibt es zu $\sim_1, \sim_2, \sim_3$, wenn die Variablenmenge nur aus x besteht?

Aufgabe 14.8. Das Symbolalphabet S bestehe neben Variablen $x, y, z, \ldots$ aus einer Konstanten 0 und einem zweistelligen Funktionssymbol $+$. Es sei $\Gamma \subseteq L^S$ die Menge aller Ableitungen aus dem Axiomensystem

$$\forall x(x{+}0 = x),\ \forall x(0{+}x = x),\ \forall x\forall y\forall z((x{+}y){+}z) = x{+}(y{+}z)),\ \forall x(x{+}x = 0)\,.$$

Es sei $\sim$ die zugehörige Äquivalenzrelation gemäß Konstruktion 14.7. Zeige $x + y \sim y + x$ für jedes Variablenpaar x, y.

Aufgabe 14.9. Es sei S ein Symbolalphabet und L^S die zugehörige Sprache. Zeige, dass zu

$$\Gamma = \emptyset$$

die in Konstruktion 14.7 eingeführte Äquivalenzrelation die Identität ist.

Aufgabe 14.10. Es sei $\Gamma \subseteq L^S$ eine widersprüchliche, unter Ableitungen abgeschlossene Teilmenge. Zeige, dass es nur eine Termklasse im Sinne von Konstruktion 14.7 gibt.

Aufgabe 14.11. Es sei $\Gamma \subseteq L^S$ eine unter Ableitungen abgeschlossene Teilmenge, die zu je zwei Termen s, t die Gleichheit $s = t$ enthalte. Wie viele Termklassen im Sinne von Konstruktion 14.7 gibt es? Ist Γ widersprüchlich?

Aufgabe 14.12. Es sei S ein Symbolalphabet und L^S die zugehörige Sprache. Die Ausdrucksmenge Γ bestehe aus $x = y$, wobei x, y veschiedene Variablen seien. Zeige, dass zwei Terme s, t genau dann äquivalent im Sinne von Konstruktion 14.7 sind, wenn es eine Kette von Termen

$$t_0 = s, t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k = t$$

derart gibt, dass beim Übergang von t_i nach t_{i+1} genau ein Vorkommen von x (bzw. y) in t_i durch y (bzw. x) ersetzt wird.

Aufgabe 14.13. Es sei V eine Variablenmenge und $\simeq$ eine Äquivalenzrelation auf V mit der Quotientenmenge $W = V/\simeq$. Es sei S ein erststufiges Symbolalphabet mit V als Variablenmenge und

$$\Gamma := \{x = y | \, x \simeq y\}^{\vdash} .$$

Es sei $\sim$ die zugehörige Äquivalenzrelation auf der Termmenge gemäß Konstruktion 14.7. Zeige, dass die Termklassenmenge zu Γ in kanonischer Weise mit der Termmenge zum Symbolalphabet S' in Bijektion steht, wobei S' aus S entsteht, indem man die Variablenmenge V durch W ersetzt.

In der folgenden Aufgabe sollen die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ verschieden sein. Dennoch gibt es zwei Interpretationen für Teil (2), die aber inhaltlich äquivalent sind.

Aufgabe 14.14. Es sei S ein Symbolalphabet und L^S die zugehörige Sprache. Es sei $\Gamma \subseteq L^S$ eine Ausdrucksmenge. Zu fixiertem $n \in \mathbb{N}_+$ sei F_n die Menge der n-stelligen Funktionssymbole. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Durch

$$f \cong g \, , \text{ falls } I(f) = I(g) \text{ für alle Interpretationen } I \text{ mit } I \vDash \Gamma$$

wird eine Äquivalenzrelation auf F_n definiert.

(2) Durch

$$f \sim g \, , \text{ falls } \Gamma \vdash \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n f x_1 \ldots x_n = g x_1 \ldots x_n$$

wird eine Äquivalenzrelation auf F_n definiert.

(3) Die Äquivalenzrelation $\sim$ impliziert die Äquivalenzrelation $\cong$.

(4) Es sei $\sim$ die zu Γ gehörende formale Äquivalenzrelation auf der Termmenge im Sinne von Konstruktion 14.7. Dann gilt für Terme $s_1 \sim t_1, \ldots, s_n \sim t_n$ und Funktionssymbole $f, g \in F_n$ mit $f \sim g$ die Beziehung
$$fs_1 \ldots s_n \sim gt_1 \ldots t_n.$$

Aufgabe 14.15. Es sei $\alpha \in L^S$ ein atomarer Ausdruck, der zugleich eine Tautologie ist, also $\vdash \alpha$. Zeige, dass α gleich $s = s$ mit einem S-Term s ist.

Aufgabe 14.16. Bestimme den Rang der folgenden Ausdrücke.

(1) $a = fx$,
(2) $\exists xa = fx$,
(3) $(\neg Rxy \wedge ffx = c) \rightarrow (\exists xa = fx)$,
(4) $(\forall yRxy) \rightarrow (\exists xa = fx)$.

Aufgabe 14.17. Zeige durch Induktion über den Aufbau der Ausdrücke, dass sich bei einer Termsubstitution der Rang eines Ausdrucks nicht ändert.

Aufgabe 14.18. Warum führt man im Beweis zum Satz von Henkin nicht Induktion über den Aufbau der Ausdrücke?

Aufgabe 14.19. Es sei M ein kommutativer Halbring. Zeige, dass es eine eindeutig bestimmte (kanonische) Abbildung
$$\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow M$$
gibt, die sowohl die Addition als auch die Multiplikation respektiert.

Aufgabe 14.20. Es sei M ein Peano-Halbring und
$$\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow M$$
die kanonische Abbildung. Zeige, dass φ injektiv ist.

Aufgabe 14.21. Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und betrachte $M = \mathbb{Z}/(n)$ mit den natürlichen Operationen. Welche der Peano-Axiome gelten, welche nicht?

Aufgabe 14.22.*

Es sei M ein kommutativer Halbring und $x, y \in M$. Es sei
$$I := \{u \in M \mid \exists a \exists b \exists c \exists d \text{ mit } u + ax + by = cx + dy\}.$$

(1) Zeige, dass I die folgenden drei Eigenschaften erfüllt.
   (a) $0 \in I$.
   (b) Wenn $u, v \in I$ sind, so ist auch $u + v \in I$.
   (c) Wenn $u \in I$ und $r \in M$ ist, so ist auch $ru \in I$.
(2) M erfülle nun die Abziehregel. Zeige, dass aus $u, v \in I$ mit $u = v+z$ auch $z \in I$ folgt.

Die folgende Aufgabe gibt eine Version des Lemmas von Bezout für Peano-Halbringe.

Aufgabe 14.23. Es sei M ein Peano-Halbring und $x, y \in M$. Es sei

$$I := \{u \in M \mid \exists a \exists b \exists c \exists d \text{ mit } u + ax + by = cx + dy\} .$$

Zeige, dass es ein eindeutig bestimmtes $v \in M$ derart gibt, dass I aus sämtlichen Vielfachen von v besteht. Zeige, dass v der größte gemeinsame Teiler von x und y ist.

Aufgabe 14.24. Zeige, dass in einem Peano-Halbring M die Begriffe irreduzibel und prim zusammenfallen.

Aufgabe 14.25. Zeige, dass in $M \subseteq \mathbb{Z}[V]$ aus Beispiel 13.9 durch $x \geq y$, falls es ein $z \in M$ mit $x = y + z$ gibt, eine totale Ordnung gegeben ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.26. (3 Punkte)

Es sei Γ eine Menge an S-Ausdrücken (über einem Symbolalphabet S), die folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) Für jeden Ausdruck α ist $\alpha \in \Gamma$ oder $\neg\alpha \in \Gamma$.
(2) Aus $\Gamma \vdash \alpha$ folgt $\alpha \in \Gamma$, d.h. Γ ist abgeschlossen unter Ableitungen.
(3) Γ ist widerspruchsfrei.

Zeige, dass Γ maximal widerspruchsfrei ist.

Aufgabe 14.27. (4 Punkte)

Es sei S ein Symbolalphabet und L^S die zugehörige Sprache. Es seien s, t verschiedene Terme. Zeige, dass es eine S-Interpretation I mit

$$I(s) \neq I(t)$$

gibt.

Aufgabe 14.28. (5 Punkte)

Es sei $\Gamma \subseteq L^{\mathrm{Ar}}$ die Peano-Arithmetik, also die Menge aller aus den erststufigen Peano-Axiomen ableitbaren Ausdrücke. Zeige, dass jeder variablenfreie Term im Sinne von Konstruktion 14.7 äquivalent zu einem Term ist, bei dem das Multiplikationszeichen nicht mehr vorkommt.

Aufgabe 14.29. (8 (1+3+1+3) Punkte)

Es sei S ein Symbolalphabet und L^S die zugehörige Sprache. Es sei $\Gamma \subseteq L^S$ eine Ausdrucksmenge. Zu fixiertem $n \in \mathbb{N}_+$ sei R_n die Menge der n-stelligen Relationssymbole in S. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Durch
$$P \cong Q\,, \text{ falls } I(P) = I(Q) \text{ für alle Interpretationen } I \text{ mit } I \vDash \Gamma$$
wird eine Äquivalenzrelation auf R_n definiert.

(2) Durch
$$P \simeq Q\,, \text{ falls } \Gamma \vdash \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \, (P x_1 \ldots x_n \leftrightarrow Q x_1 \ldots x_n)$$
wird eine Äquivalenzrelation auf R_n definiert.

(3) Die Äquivalenzrelation $\simeq$ impliziert die Äquivalenzrelation $\cong$.

(4) Es sei $\sim$ die zu Γ gehörende Äquivalenzrelation auf der Termmenge im Sinne von Konstruktion 14.7. Dann gilt für Terme mit $s_1 \sim t_1, \ldots, s_n \sim t_n$ und Relationsssymbole $P, Q \in R_n$ mit $P \simeq Q$ die Beziehung
$$\Gamma \vdash P s_1 \ldots s_n \leftrightarrow Q t_1 \ldots t_n \,.$$

Aufgabe 14.30. (2 Punkte)

Bestimme den Rang der folgenden Ausdrücke.

(1) $gxy = c$,
(2) $\forall x gcx = gxx$,
(3) $(\neg Pz \vee ggxyy = gcc) \rightarrow (\exists x Px)$,
(4) $(\forall y Py) \rightarrow (\neg \exists x gcx = gcgcx \wedge c = c)$.