Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Maß- und Integrationstheorie

Arbeitsblatt 11

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 11.1. Es sei

$$f(x,y) \,=\, x^3 - yx^2 + 7\sin y.$$

Berechne die Integrale zum Parameter $y \in [0,\pi]$ über $x \in [0,1]$ und zum Parameter $x \in [0,1]$ über $y \in [0,\pi]$. Bestimme jeweils die extremalen Integrale.

Mit Aufgabe 10.19 ist jetzt die folgende Aufgabe einfach zu lösen.

Aufgabe 11.2.*

Es sei

$$f\colon\,]0,1] \longrightarrow [0,\infty[$$

eine stetige, streng fallende, bijektive Funktion mit der ebenfalls stetigen Umkehrfunktion

$$f^{-1}\colon\, [0,\infty[\longrightarrow]0,1].$$

Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 f(t)\,dt$ existiert. Zeige, dass dann auch das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f^{-1}(y)\,dy$ existiert und dass der Wert dieser beiden Integrale übereinstimmt.

Zur folgenden Aufgabe vergleiche Aufgabe 12.22 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) und Beispiel 35.5 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)).

Aufgabe 11.3. Es sei

$$E \,=\, \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{0\},$$

(mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik) und es seien ($n \in \mathbb{N}_+$)

$$g, f_n\colon\, M \longrightarrow \mathbb{R}$$

messbare Funktionen auf einem σ-endlichen Maßraum M. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon\, E \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(\frac{1}{n}, x) \,=\, f_n(x)$$

und

$$f(0,x) \;=\; g(x).$$

Diskutiere den Satz von der majorisierten Konvergenz und Satz 11.1 in dieser Situation.

Aufgabe 11.4.*

Es sei $(M,\mathcal{A},\mu)$ ein endlicher Maßraum und A_t, $t \in \mathbb{R}$, eine Familie von messbaren Mengen mit den zugehörigen Indikatorfunktionen e_{A_t}. Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}\times M \longrightarrow \mathbb{R},\, (t,x) \longmapsto f(t,x) = e_{A_t}(x).$$

Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto \varphi(t) = \int_M f(t,x)\, d\mu(x),$$

nicht stetig sein muss. Welche Voraussetzungen aus Satz 11.1 sind erfüllt, welche nicht?

Aufgabe 11.5. Beweise Satz 58.2 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)), Satz 58.3 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) und Korollar 58.4 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) aus Satz 11.1, Satz 11.2 und Korollar 11.3.

Aufgabe 11.6. Formuliere Satz 11.1, Satz 11.2 und Korollar 11.3 für die Situation, wo der Maßraum M die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit dem Zählmaß sind.

Aufgabe 11.7. Es seien $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Bestätige Satz 11.2 für

a) $f(x,y) = g(x) + h(y)$,

b) $f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$.

Aufgabe 11.8. Zeige, dass die dritte Bedingung in Korollar 11.3 äquivalent zur Existenz von nichtnegativen, integrierbaren Funktionen

$$h_i\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\|\frac{\partial f}{\partial z_i}(z,x)\| \;\leq\; h_i(x)$$

ist.

Aufgabe 11.9. Es sei
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
definiert durch
$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^4 + x^2t^2 + 1} dt.$$
Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Falls f differenzierbar ist, was ist die Ableitung?

Aufgabe 11.10. Wir interpretieren eine Potenzreihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ als eine Funktion auf $U(0,r) \times \mathbb{N}$, wobei der offene Ball $E = U(0,r) \subseteq \mathbb{C}$ mit der induzierten Metrik und $\mathbb{N}$ mit dem Zählmaß versehen sei. Welche Eigenschaften von Satz 11.1 und von (einer komplexen Version von) Satz 11.2 sind (in Abhängigkeit von r) erfüllt? Wie kann man daraus Korollar 16.9 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) und Satz 20.9 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) erhalten?

Aufgabe 11.11. Begründe die Additivität des Integrals mit Hilfe von Satz 11.5.

Aufgabe 11.12. Diskutiere den Wikipediaartikel „Prinzip von Cavalieri“, insbesondere in Hinblick auf die Formulierung:

„Aus dem Prinzip von Cavalieri lässt sich herleiten, dass das Volumen eines 'höhengedehnten' Körpers (bei gleichbleibender Grundfläche) proportional zu seiner Höhe ist. Als Beispiel: Ein Körper, dessen Höhe auf diese Weise verdoppelt wird, kann durch 2 gleiche Ausgangskörper konstruiert werden, indem zuerst alle äquivalenten Schnittflächen zusammengelegt werden und diese in der entsprechenden Reihenfolge des Ausgangskörpers aufgeschichtet werden (beide Ausgangskörper werden quasi ineinandergeschoben) “. (Version vom 16. November 2015).

Aufgabe 11.13. Bestimme den Flächeninhalt eines Dreiecks mit dem Cavalieri-Prinzip.

Aufgabe 11.14.*

Die rechteckige Grundseite (Unterseite) eines Bootes (unter Wasser) habe die Breite 2m und die Länge 10m, die (ebenfalls rechteckige) Deckseite (Oberseite) habe die Breite 3m und die Länge 12m, wobei die Seiten parallel zueinander seien und den Abstand 2m besitzen. Die vier übrigen Seiten seien ebene Verbindungen zwischen Ober- und Unterseite. Das Boot wiegt mit Besatzung, aber ohne Ladung 12.000kg. Der Tiefgang des Bootes soll maximal $1,5$m betragen. Mit welcher Masse kann das Boot maximal beladen werden?

Aufgabe 11.15.*

Es sei Z der Zylinder um die x-Achse und W der Zylinder um die z-Achse, beide zum Radius 1. Bestimme das Volumen des Durchschnitts $Z \cap W$.

Aufgabe 11.16. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und

$$h_1, h_2 \colon M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

messbare Funktionen. Zeige

$$\int_M h_1 h_2 d\mu = \int_{S(h_1)} h_2 d\mu \otimes \lambda^1,$$

wobei h_2 in natürlicher Weise als Funktion auf dem Subgraphen $S(h_1)$ zu h_1 aufgefasst wird.

Aufgabe 11.17. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine messbare Teilmenge und es sei

$$\varphi \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

eine surjektive lineare Abbildung derart, dass für alle $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ die Menge $T \cap \varphi^{-1}(x)$ abzählbar sei. Zeige

$$\lambda^n(T) = 0.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 11.18. (3 Punkte)

Es seien $[a, b]$ und $[c, d]$ kompakte Intervalle und es sei

$$f \colon [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto f(x, y),$$

eine stetige Funktion. Zeige mit Hilfe von Satz 11.1, dass auch die Funktion

$$[a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \int_c^d f(x, y)\, dy,$$

stetig ist.

Aufgabe 11.19. (4 Punkte)

Zeige, dass die Fakultätsfunktion $\operatorname{Fak}(x)$ beliebig oft differenzierbar ist mit den Ableitungen

$$\operatorname{Fak}^{(n)}(x) = \int_0^\infty (\ln t)^n t^x e^{-t}\, dt\,.$$

Aufgabe 11.20. (4 Punkte)

Berechne das Volumen des Kegels, dessen Spitze in $(2, 3, 5)$ liegt und dessen Grundfläche die durch

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 2y^2 \leq 4\right\}$$

gegebene Ellipse ist.

Aufgabe 11.21. (6 Punkte)

Es sei $\mu = \varphi_* \lambda^2$ das Bildmaß unter der Multiplikation

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto xy.$$

Zeige, dass für jede Borelmenge $T \subseteq \mathbb{R}$

$$\mu(T) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \lambda^1(T) = 0\,, \\ \infty, & \text{falls } \lambda^1(T) > 0\,, \end{cases}$$

gilt.

Aufgabe 11.22. (5 Punkte)

Es sei $F \neq 0$ ein Polynom in n Variablen über $\mathbb{R}$ und es sei

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$$

die Nullstellenmenge des Polynoms. Zeige

$$\lambda^n(T) = 0.$$

Abbildungsverzeichnis