

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 33

Übungsaufgaben

AUFGABE 33.1. Bestimme die konstanten Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \frac{\sin(\cos t) - e^{t^5}}{(t^{14} + 8)e^{-t^2} + \sqrt{t^2 + \pi}}(y^2 + 3y - 5)$$

AUFGABE 33.2. Welche Substitution wird im Beweis zu Satz 33.2 durchgeführt?

AUFGABE 33.3. Skizziere die zugrunde liegenden Vektorfelder der Differentialgleichungen

$$y' = \frac{1}{y}, y' = ty^3 \text{ und } y' = -ty^3$$

sowie die in Beispiel 33.4, Beispiel 33.7 und Beispiel 33.8 angegebenen Lösungskurven.

AUFGABE 33.4. Bestätige die in Beispiel 33.4, Beispiel 33.7 und Beispiel 33.8 gefundenen Lösungskurven der Differentialgleichungen

$$y' = \frac{1}{y}, y' = ty^3 \text{ und } y' = -ty^3$$

durch Ableiten.

AUFGABE 33.5. Interpretiere eine ortsunabhängige Differentialgleichung als eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen anhand des Lösungsansatzes für getrennte Variablen.

AUFGABE 33.6. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = y$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

AUFGABE 33.7. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = y^n$$

mit $n \geq 1$ mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

AUFGABE 33.8. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = y^n$$

mit $n \leq -1$ mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

AUFGABE 33.9. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = e^y,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

AUFGABE 33.10. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{\sin y},$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

AUFGABE 33.11. Löse die Differentialgleichung

$$y' = ty$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

AUFGABE 33.12.*

Finde eine Lösung für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{t}{t^2 - 1}y^2$$

mit $t > 1$ und $y < 0$.

AUFGABE 33.13.*

Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung ($y > 0$)

$$y' = t^2y^3$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen. Was ist der Definitionsbereich der Lösungen?

AUFGABE 33.14.*

a) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{t^3}{y^2}, \quad y > 0, \quad t > 0,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

b) Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{t^3}{y^2} \quad \text{mit} \quad y(1) = 1.$$

AUFGABE 33.15. Betrachte die in Beispiel 33.9 gefundenen Lösungen

$$y(t) = \frac{g}{1 + \exp(-st)}$$

der logistischen Differentialgleichung.

a) Skizziere diese Funktion (für geeignete s und g).

b) Bestimme die Grenzwerte für $t \rightarrow \infty$ und $t \rightarrow -\infty$.

- c) Studiere das Monotonieverhalten dieser Funktionen.
- d) Für welche t besitzt die Ableitung von $y(t)$ ein Maximum (für die Funktion selbst bedeutet dies einen Wendepunkt, man spricht auch von einem *Vitalitätsknick*).
- e) Über welche Symmetrien verfügen diese Funktionen?

AUFGABE 33.16. Bestimme das Taylor-Polynom vierten Grades im Nullpunkt zur logistischen Funktion

$$y(t) = \frac{2}{1 + e^{-t}}.$$

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 33.17. (3 Punkte)

Zeige, dass eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t) \cdot y^2$$

mit einer stetigen Funktion

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto g(t),$$

auf einem Intervall I' die Lösungen

$$y(t) = -\frac{1}{G(t)}$$

besitzt, wobei G eine Stammfunktion zu g mit $G(I') \subseteq \mathbb{R}_+$ sei.

AUFGABE 33.18. (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = ty^2, y > 0,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

AUFGABE 33.19. (4 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = t^3 y^3, y > 0,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

AUFGABE 33.20. (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = (\sin t - 2t)(y^2 + 1), y > 0,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen. Welche Lösung hat das Anfangswertproblem $y(0) = \pi$?

4

AUFGABE 33.21. (5 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = ty + t$$

mit

- a) dem Lösungsansatz für inhomogene lineare Differentialgleichungen,
- b) dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5