Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2023/24**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 11

Übungsaufgaben

Aufgabe 11.1. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die genau zwei Werte annimmt.

Aufgabe 11.2. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt. Zeige, dass f konstant ist.

Aufgabe 11.3.*

Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer dritten Potenz, vermindert um das Vierfache ihrer zweiten Potenz, gleich der Quadratwurzel von 42 ist?

Aufgabe 11.4. Finde für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^2 + x - 1,$$

eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal $1/100$.

Aufgabe 11.5. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^3 + 4x^2 - x + 3.$$

Bestimme, ausgehend vom Intervall $[-5, -4]$, mit der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Länge $1/8$, in dem eine Nullstelle von f liegen muss.

Aufgabe 11.6.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^3 - 4x + 2.$$

Bestimme, ausgehend vom Intervall $[1, 2]$, mit der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Länge $1/8$, in dem eine Nullstelle von f liegen muss.

Aufgabe 11.7. Gegeben sei die Abbildung $f\colon\ \mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x) \;=\; \frac{1}{x^3}+\frac{1}{(x-1)^3}.$$

Zeige mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f jeden Wert $c\neq 0$ an mindestens zwei Stellen annimmt.

Aufgabe 11.8. Es sei $f\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es sei x „nahe“ an einer Nullstelle von f. Ist dann $f(x)$ nahe bei 0?

Aufgabe 11.9.*

Fridolin sagt:

„Irgendwas kann am Zwischenwertsatz nicht stimmen. Für die stetige Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto\frac{1}{x},$$

gilt $f(-1)\,=\,-1$ und $f(1)\,=\,1$. Nach dem Zwischenwertsatz müsste es also eine Nullstelle zwischen -1 und 1 geben, also eine Zahl $x\in[-1,1]$ mit $f(x)\,=\,0$. Es ist doch aber stets $\frac{1}{x}\neq 0$.“

Wo liegt der Fehler in dieser Argumentation?

Aufgabe 11.10.*

Es sei $z\in\mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) Es gibt ein Polynom $P\in\mathbb{R}[X]$, $P\neq 0$, mit ganzzahligen Koeffizienten und mit $P(z)\,=\,0$.
(2) Es gibt ein Polynom $Q\in\mathbb{Q}[X]$, $Q\neq 0$, mit $Q(z)\,=\,0$.
(3) Es gibt ein normiertes Polynom $R\in\mathbb{Q}[X]$ mit $R(z)\,=\,0$.

Aufgabe 11.11.*

Es seien

$$f,g\colon\ [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit $f(a)\,\geq\,g(a)$ und $f(b)\,\leq\,g(b)$. Zeige, dass es einen Punkt $c\in[a,b]$ mit $f(c)\,=\,g(c)$ gibt.

Die nächsten Aufgaben verwenden den folgenden Begriff.

Es sei M eine Menge und

$$f\colon\ M\longrightarrow M$$

eine Abbildung. Ein Element $x\in M$ mit $f(x)\,=\,x$ heißt *Fixpunkt* der Abbildung.

Aufgabe 11.12. Bestimme die Fixpunkte der Abbildung

$$f\colon\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto x^2.$$

Aufgabe 11.13. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom vom Grad $d \geq 1$, $P \neq X$. Zeige, dass P maximal d Fixpunkte besitzt.

Aufgabe 11.14. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gebe $x, y \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \leq x$$

und

$$f(y) \geq y.$$

Zeige, dass f einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 11.15. Zeige, dass das Bild eines abgeschlossenen Intervalls unter einer stetigen Funktion nicht abgeschlossen sein muss.

Aufgabe 11.16. Zeige, dass das Bild eines offenen Intervalls unter einer stetigen Funktion nicht offen sein muss.

Aufgabe 11.17. Zeige, dass das Bild eines beschränkten Intervalls unter einer stetigen Funktion nicht beschränkt sein muss.

Aufgabe 11.18. Es sei I ein reelles Intervall und

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R},$$

eine stetige, injektive Funktion. Zeige, dass f streng wachsend oder streng fallend ist.

Aufgabe 11.19. Zeige, dass durch

$$f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$$

eine stetige, streng wachsende, bijektive Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \,]-1, 1[$$

gegeben wird, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 11.20.*

(1) Skizziere die Graphen der Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x - 1,$$

und

$$g\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{x},$$

(2) Bestimme die Schnittpunkte der beiden Graphen.

Aufgabe 11.21. Zeige, dass es zu jeder reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ eine stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart gibt, dass a die einzige Nullstelle von f ist.

Aufgabe 11.22. Zeige, dass es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart gibt, dass x die einzige Nullstelle von f ist und dass für jede rationale Zahl q auch $f(q)$ rational ist.

Aufgabe 11.23. Zeige, dass es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine streng wachsende stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart gibt, dass x die einzige Nullstelle von f ist und dass für jede rationale Zahl q auch $f(q)$ rational ist.

Aufgabe 11.24. Es sei

$$f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1[$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass f nicht surjektiv ist.

Aufgabe 11.25. Man gebe ein Beispiel eines beschränkten Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ und einer stetigen Funktion

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass das Bild von f beschränkt ist, die Funktion aber kein Maximum annimmt.

Aufgabe 11.26. Es sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion auf einem reellen Intervall. Die Funktion habe in den Punkten $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, lokale Maxima. Zeige, dass die Funktion zwischen x_1 und x_2 mindestens ein lokales Minimum besitzt.

Aufgabe 11.27. Bestimme direkt, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Potenzfunktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^n,$$

ein Extremum im Nullpunkt besitzen.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 11.28. (5 Punkte)

Finde für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^3 - 3x + 1,$$

eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$ mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal $1/200$.

Aufgabe 11.29. (3 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass das Bild von f sowohl nach oben als auch nach unten unbeschränkt ist. Zeige, dass f surjektiv ist.

Aufgabe 11.30. (4 Punkte)

Zeige, dass ein reelles Polynom von ungeradem Grad mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

Aufgabe 11.31. (5 Punkte)

Man entwerfe ein Computer-Programm (Pseudocode), das eine reelle Nullstelle zu einem Polynom $dX^3 + cX^2 + bX + a$ vom Grad 3 bis auf eine vorgegebene Genauigkeit von $e > 0$ berechnet.

- Der Computer besitzt beliebig viele Speicher, die nichtnegative reelle Zahlen enthalten können.
- Er kann einen Speicherinhalt in einen weiteren Speicher schreiben.
- Er kann einen Speicherinhalt halbieren und in einen weiteren Speicher schreiben.
- Er kann die Summe von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen weiteren Speicher schreiben.
- Er kann das Produkt von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen weiteren Speicher schreiben.
- Er kann Speicherinhalte der Größe nach vergleichen und davon abhängig zu Programmzeilen springen.
- Er kann Speicherinhalte und vorgegebene Texte ausdrucken.
- Es gibt einen Haltebefehl.

Die Anfangskonfiguration sei

$$(a, b, c, d, e, 1, 0, 0, \ldots)$$

mit $a, b, c \geq 0$ und $d, e > 0$ (die Koeffizienten des Polynoms, die gewünschte Genauigkeit e und die 1 stehen also in den ersten Speichern). Das Programm soll die Intervallgrenzen für eine Nullstelle mit der gewünschten Genauigkeit in einem Antwortsatz ausdrucken und anschließend anhalten.

Achtung: Die Hauptschwierigkeit liegt darin, dass das Polynom auf $\mathbb{R}_+$ wegen der Bedingung an die Koeffizienten keine Nullstelle besitzt, es muss also eine Nullstelle im negativen Bereich gefunden werden. Die Speicher erlauben aber keine negativen Zahlen. Man muss also negative Zahlen durch nichtnegative Zahlen emulieren/simulieren.

Aufgabe 11.32. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow [a,b]$$

eine stetige Funktion des Intervalls $[a,b]$ in sich. Zeige, dass f einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 11.33. (2 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$x_n = \sqrt[3]{\frac{27n^3 + 13n^2 + n}{8n^3 - 7n + 10}},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Warum wurde diese Aufgabe nicht schon auf Blatt 10 gestellt?

Aufgabe 11.34. (2 Punkte)

Bestimme das Minimum der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2 + 3x - 5.$$

Abbildungsverzeichnis