邊 B′C′, C′A′, A′B′ ノ中點ナリ.

故ニ △ABC ノ各頂點ヨリ其對邊ニ引ケル三垂線 AD, BE, CF ハ夫々 △A′B′C′ ノ三邊 B′C′, C′A′, A′B′ ノ垂直二等分線ナリ.

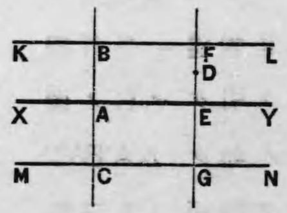
故ニ此三垂線ハ同一ノ點ヲ通ル. (前節)

定義 三角形ノ各頂點ヨリ其對邊ヘ引ケル三垂線ノ交點ヲ三角形ノ**垂心**トイフ.

138. 軌跡題

定直線(XY)ヨリノ距離ガ,與ヘラレタル線分ノ長サ(l)ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求ムルコト.

【軌跡】 XY 上ノ任意ノ點Aヨリ之ニ垂線ヲ引キ,其上ニAノ兩方ニ於テ l ニ等シキ線分



AB, AC ヲ取レ. B, C ノ各ヲ通リ XY ニ平行線 KL, MN ヲ引ケハ,此二直線ガ所要ノ軌跡ナリ.

【證明】 此二直線中ノ一ツノ上ニアル任意ノ點ヨリ XY ニ下シタル垂線ノ長サハ AB 又ハ AC ノ長サ卽チ l ニ等シ.

次ニ KL 上ニモ,MN 上ニモアラザル任意ノ一點ヲ D トシ,之ヨリ XY ヘ垂線 DE ヲ引キ,其垂線或ハ其延長ガ KL, MN ニ交ル點ヲ夫々 F, G トセヨ.

サスレバ E ハ F, G トハ異ナル點ナリ.

$\therefore$ DE ≠ FE

又 DE ≠ EG

$\therefore$ DE ≠ l

故ニ二直線 KL, MN ガ所要ノ軌跡ナリ.

問題

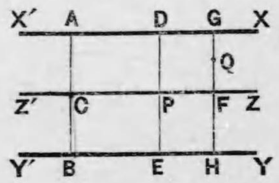
定直線ニ切シ,半徑ガ與ヘラレタル線分ニ等シキ圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ムルコト.

139. 軌跡題

平行二定直線(XX′, YY′)ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ムルコト.

【軌跡】　XX′上ノ任意ノ一點AヨリYY′ニ垂線ABヲ下シ,其中點Cヲ通リXX′, YY′ノ各ニ平行ナル直線ZZ′ヲ引ケバ之ガ所要ノ軌跡ナリ.

【證明】　ZZ′上ノ任意ノ點PトXX′及ビYY′ノ各トノ距離ハ何レモABノ半分ニ等シキガ故ニ,互ニ相等シ.



ZZ′上ニアラザル任意ノ點QトXX′及ビYY′ノ各トノ距離ハ相等シカラズ.

因テZZ′ガ所要ノ軌跡ナリ.

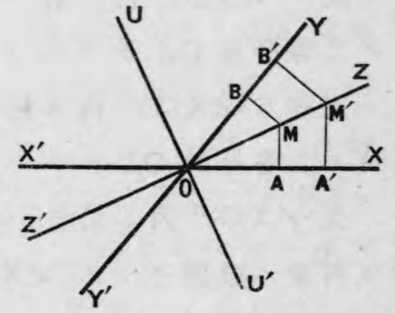
問題

平行二直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡如何.

140. 軌跡題

相交ル二定直線(XX′, YY′)ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ムルコト.

【解】　XX′, YY′ノ交點ヲOトシ,∠XOY內ニアリテXX′, YY′ヨリ等距離ナル任意ノ一點ヲMトシ,MヨリXX′, YY′ニ夫々垂線MA, MBヲ引キ, MトOトヲ結ビ付ケヨ.



サスレバ

$$\triangle OAM \equiv \triangle OBM \quad (第49節)$$

從テ　　$\angle AOM = \angle BOM$

故ニOMハ∠XOYノ二等分線ナリ.

卽チMハ∠XOYノ二等分線上ニ在リ.

次ニ∠XOYノ二等分線ヲOZトシ,OZ上ノ任意ノ點M′ヨリXX′, YY′ニ夫々垂線M′A′, M′B′ヲ引ケバ

$$\triangle OA'M' \equiv \triangle OB'M' \quad (\text{第 50 節})$$

從テ　　$M'A' = M'B'$

卽チ ∠XOY ノ二等分線上ノ總テノ點ハ XX′ 及ビ YY′ ヨリ等距離ニアリ.

故ニ ∠XOY 內ニ於ケル所要ノ軌跡ハ此角ノ二等分線 OZ ナリ.

同樣ニ ∠X′OY′ 內ニ於ケル所要ノ軌跡ハ此角ノ二等分線 OZ′ナリ.

又 ∠X′OY 內ニ於テハ此角ノ二等分線 OU ガ所要ノ軌跡ニシテ, ∠XOY′ 內ニ於テハ此角ノ二等分線 OU′ナリ.

然ルニ OZ 及ビ OZ′ハ一直線ヲナシ, OU 及ビ OU′ハ又他ノ一直線ヲナス,而シテ此等ノ二直線ハ互ニ垂直ナリ.

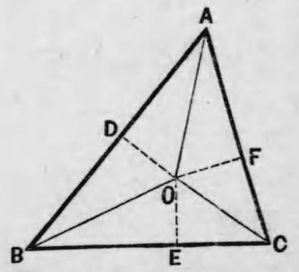
因テ相交ル二定直線ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,其交點チ頂點トスル二組ノ對頂角ノ二等分線ニシテ互ニ垂直ナル二直線ナリ.

問題

1. 相交ル二定直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡如何.
2. 二定直線ニ切シ且ツ中心ガ他ノ定直線上ニアル圓ヲ畫クコト.
3. 定マレル角ノ二邊ニ切シ且ツ半徑ガ與ヘラレタル線分ニ等シキ圓周ヲ畫クコト.

141. 定理

三角形ノ各角ノ二等分線ハ同一ノ點チ通ル.



【證明】 △ABC ニ於テ,先ヅ ∠A 及ビ ∠B ノ二等分線ハ三角形內ニテ相交ル. 今其交點ヲ O トシ, O ヨリ三邊 AB, BC, CA ニ夫々垂線 OD, OE, OF ヲ引ク. サスレバ

$$OD = OF \quad (\text{前節})$$

$$OD = OE \quad (\text{同上})$$

$$\therefore \quad OE = OF$$

故ニ點Oハ∠Cノ二等分線上ニアリ(前節),即チ∠Cノ二等分線ハ點Oヲ通ル.

因テ三角形ノ三ツノ角ノ二等分線ハ同一ノ點ヲ通ル.

定義 三角形ノ各角ノ二等分線ノ交點ヲ三角形ノ**內心**トイフ.

【注意】 $OD = OE = OF$ ナルニヨリ,Oヲ中心トシ,ODヲ半徑トシテ圓ヲ畫ケバ△ABCノ各邊ニ切ス,卽チ圓Oハ△ABCノ內接圓ナリ,從テ三角形ノ內心ハ其內接圓ノ中心ニ外ナラズ.

問題

1.* 三角形ノ一ツノ內角及ビ其他ノ二ツノ頂點ニ於ケル外角ノ各ノ二等分線ハ同一點ヲ通ル.

定義 此點ヲ三角形ノ**傍心**トイフ.

2.* 三角形ノ三邊又ハ其延長ニ切スル圓ハ四ツアリ,而シテ唯四ツニ限ル.

定義 三角形ノ一邊ト他ノ二邊ノ延長トニ切スル圓ヲ三角形ノ**傍接圓**トイフ.

傍心トハ傍接圓ノ中心ノ意ナリ.

3. △ABCノ∠A內ニアル傍接圓ガ二邊AB, ACノ延長ニ切スル點ヲ夫々D, Eトスレバ,線分AD若クハAEハ此三角形ノ周ノ半分ニ等シ.

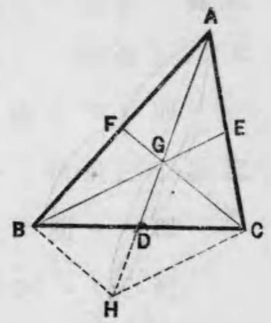
4. 三角形ノ內心ハ三ツノ傍心ヲ頂點トスル三角形ノ垂心ナリ.

142. 定理

三角形ノ三ツノ中線ハ同一ノ點ヲ通ル,而シテ其交點ヨリ頂點マデノ距離ハ夫々其頂點ヨリ引ケル中線ノ三分ノ二ニ等シ.

【證明】　△ABC ニ於テ AD, BE, CF ヲ三ツノ中線トセヨ.

BE ト CF トノ交點ヲ G トセヨ. A ト G トヲ結ビ付ケ之ヲ G ノ方ヘ延長シテ AG ニ等シク GH ヲ取リ, B 及ビ C ノ各ト H トヲ結ビ付ケヨ. サスレバ △ABH ニ於テ



AF = FB　(假　設)

AG = GH　(作　圖)

∴　FG // BH　(第 79 節)

卽チ　GC // BH

次ニ　△AHC ヨリ, 同理ニテ

GB // CH

故ニ四邊形 BGCH ハ平行四邊形ナリ.

故ニ GH ト BC トノ交點ハ BC ノ中點 D ニ合ス.

故ニ AD, BE, CF ハ同一ノ點 G ヲ通ル.

次ニ　GD = HD　(第 75 節)

∴　GH = 2·GD

然ルニ　AG = GH　(作　圖)

∴　AG = 2·GD

然ルニ　AD = AG+GD = 3·GD

∴　$AG = 2\cdot(\frac{1}{3}\cdot AD) = \frac{2}{3}\cdot AD$

又　BG = HC　(第 73 節)

然ルニ　HC = 2·GE　(第 79 節)

∴　BG = 2·GE

∴　BE = BG+GE = 3·GE

∴　$BG = \frac{2}{3}\cdot BE$

同樣ニ　$CG = \frac{2}{3}\cdot CF$

定義　三角形ノ三ツノ中線ノ交點ヲ三角形ノ**重心**トイフ.

問題

1. 上ノ圖ニ於テ △BGH ノ三邊ハ夫々 △ABC ノ中線ノ $\frac{2}{3}$ ニ等シ.

2. BE, CF ハ△ABCノ二ツノ中線ニシテ, EK ハEヲ通リCF ト同方向ニシテ且ツ之ニ等シキ線分ナリトスレバ,△BEKノ三邊ハ夫々 △ABC ノ三ツノ中線ニ等シ.

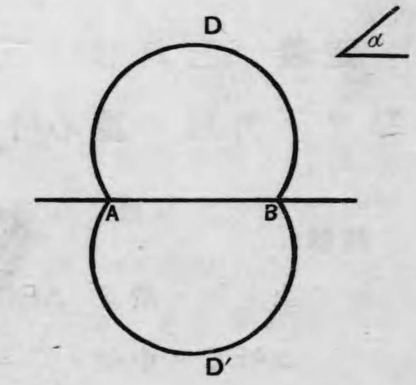
3. 三角形ノ重心ヲ各頂點ニ結ビ付ケテ出來ル三ツノ三角形ハ皆等積ナリ.

143. 軌跡題

定線分(AB)ヲ與ヘラレタル角(α)ニテ見込ム點ノ軌跡ハ,其線分ヲ弦トスル或圓弧ナリ.

【證明】 AB ヲ雙方ヘ延長スレバ此直線ハ平面ヲ二ツノ部分ニ分ツ.

ソコデ先ヅ其中ノ一ツノ部分ダケニ於ケル所要ノ軌



跡ヲ求メントス.

AB ヲ弦トシα ニ等シキ角ヲ含ム弓形ノ弧ADB ヲ畫ケバ,其上ノ點ニ於テ AB ヲ見込ム角ハ α ニ等シ. (第120節系1)

又此弧ノ上ニアラザル點ニ於テ AB ヲ見込ム角ハ α ニ等シカラズ. (第122節)

平面ノ他ノ部分ニアリテハ,AB ニ付テ弧ADB ノ對稱ナル弧 AD′B 上ノ點ニ限リ此性質ヲ有ス.

故ニ AB ヲ見込ム角ガ α ニ等シキ點ノ軌跡ハ弧 ADB ト弧 AD′B トナリ.

系 定線分ヲ直角ニ見込ム點ノ軌跡ハ,此線分ヲ直徑トスル圓周ナリ.

問題

1.* 定線分ヲ底邊トシ,頂角ノ大サガ與ヘラレタル三角形ノ頂點ノ軌跡如何.

2. 一定點ヲ通ル定圓ノ弦ノ中點ノ軌跡如

何.

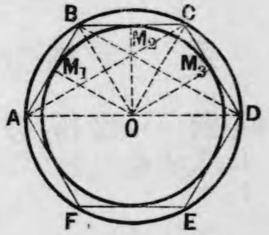
3. 定線分ヲ底邊トシ,定マレル大サノ角ヲ頂角トスル三角形ノ內心ノ軌跡如何.

4. 前問題ニ於テ垂心ノ軌跡如何.

144. 定理

正多角形ニハ外接圓及ビ內接圓ヲ畫クコトヲ得.

【證明】　例ヘバ ABCDEF ヲ正六邊形トセヨ.



マヅ相隣レル三ツノ頂點 A, B, C ヲ通ル圓周ヲ畫キ,AトCトヲ結ビ付ケ,且ツCニ隣レル頂點DヲBニ結ビ付クレバ

$$\triangle ABC \equiv \triangle BCD$$

$$\therefore \quad \angle BAC = \angle BDC$$

且ツ原形ハ凸多角形ナルユヱ,AトDトハBCノ一方ニアリ. 故ニ點Dハ今畫キタル圓周上ニアリ. (前節)

同理ニヨリDニ隣レル頂點EモB, C, Dヲ通ル圓周,卽チ前ト同ジ圓周上ニアリ.

箇樣ニシテ總テノ頂點ガ皆同一ノ圓周上ニアルコトヲ知ル.

因テ此正多角形ニ外接圓ヲ畫クコトヲ得.

次ニ此圓ノ中心Oヨリ正多角形ノ各邊ニ垂線 OM_1, OM_2, …… ヲ下セバ,各邊ガ相等シキユヱ,此等ノ垂線ハ相等シ. (第110節)

因テOヲ中心トシ,OM_1ヲ半徑トシテ圓周ヲ畫ケバ此多角形ニ內接ス.

定義　一ツノ正多角形ノ外接圓(若クハ內接圓)ノ中心ヲ此**正多角形ノ中心**ト名ヅク.

問題

1.* 多角形ノ各ノ角ノ二等分線ガ同一ノ點ヲ通ルトキハ,此多角形ニ內接圓ヲ畫クコトヲ得.

2. 一邊ガ a 寸ナル正三角形ノ內接圓及ビ

外接圓ノ半徑ヲ求メヨ.

3.* 正多角形ノ面積ハ,其周ト其內接圓ノ半徑トノ積ノ半分ニ等シ.

第七章 作圖題ノ解法

145. 軌跡交截法

作圖題中ニハ結局或條件ニ適スル點ヲ求ムルコトニ歸着スル者多シ. 例ヘバ三點ヲ通ル圓周ヲ畫クコトハ其中心ヲ求ムルコトニ歸シ,又圓外ノ點ヨリ此圓ニ切線ヲ引クコトハ圓周上ニ其切線ノ切點ヲ求ムルコトニ歸スルガ如シ.

此ノ如キ場合ニ,若シ與ヘラレタル條件中ノ一ツヲ取リ去ルトキハ殘リノ條件ノミニ適スル點ハ通例無數ニ存在シ,其點ノ軌跡トシテ或線ヲ得ベシ. ソコデ先ニ省略シタル條件ヲ回復シ他ノ一ツノ條件ヲ省略スルトキハ又新タナル軌跡ヲ得ベシ. 此二ツノ軌跡ノ交リガ所要ノ條件ニ適スル點ナリ. 而シテ若シ此二ツノ軌跡ガ出會ハザレバ其問題ハ不可能ナリ.

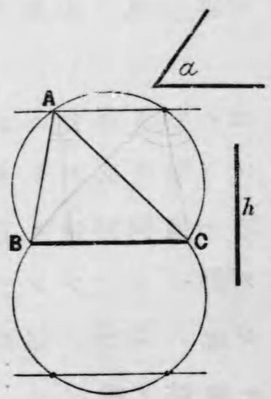
スベテ要求セラレタル圖形ヲ作圖シ得ルヤ又作圖シ得ル場合ニハ幾通リノ相異ナル圖形

ヲ作リ得ベキカ等ヲ講究スルコト作圖題ノ吟味トイフ.

146. 作圖題

底邊(BC),頂角(α)及ビ高サ(h)ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

解　底邊 BC ハ定マレルヲ以テ,所要ノ三角形ヲ畫クニハ其頂點ノ位置ヲ決定スレバヨシ. ソコデ先ヅ底邊ト高サトダケガ與ヘラレタリトスレバ,頂點ノ軌跡ハ BC ヨリ h ノ距離ニアル一雙ノ平行線ナリ.(第138節)



次ニ底邊ト頂角トダケガ與ヘラレタリトスレバ,頂點ノ軌跡ハ BC ヲ弦トシ $\angle\alpha$ ニ等シキ角ヲ含ム弓形ノ弧ナリ. (第143節)

故ニ此二ツノ軌跡ノ交點ノ一ツヲ A トスレバ △ABC ハ所要ノ三角形ナリ.

【吟味】　他ノ交點ヲ B, C ノ各ニ結ビ付クルトキモ所要ノ三角形ヲ得,サレドモ夫ト前ノ三角形トハ相等シキガユヱニ結局所要ノ三角形ハ唯一ツヨリナシ.

若シ此二ツノ軌跡ガ出會ハザレバ問題ハ不可能ナリ.

問題

1. 底邊,頂角及ビ頂點ヨリノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.
2. 底邊,高サ及ビ底邊ノ一端ヨリノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

147. 逐次代用法

作圖題ヲ解カントスルニ當リ容易ニ其解法ヲ案出シ得ザルトキハ,先ヅ所要ノ作圖題ガ或方法ニヨリテ解カレタル者ト假定シテ適宜ニ其圖ヲ畫キ,然ル後此圖ニ就テ圖形中ノ既知ノ部分,卽チ初メニ與ヘラレタル線,角等ト未知ノ

部分トノ間ニ如何ナル關係アルカヲ考ヘ,其關係ニヨリ元ノ作圖題ヲ他ノ比較的容易ナル作圖題ニ代ヘ,逐次此ノ如クシテ終ニ既知ノ作圖題ニ歸セシムベシ. 之ヲ作圖題ノ**解析**トイフ.

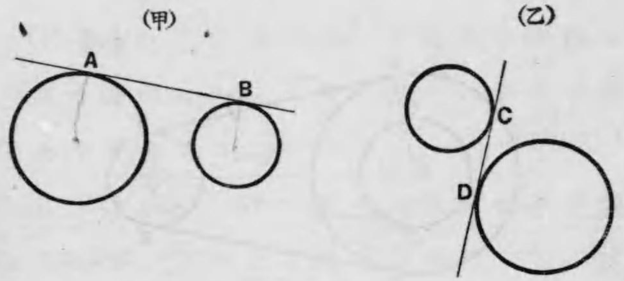
次ニ解析ニヨリテ得タル結果ヲ基トシ,之ヨリ其順序ヲ逆ニ辿リテ所要ノ作圖法ヲ得ベシ. 之ヲ作圖題ノ**綜合**トイフ.

次ニ此作圖法ノ正シキコトヲ證明シ,終リニ之ヲ吟味スベシ.

148. 定義

二ツノ圓ニ共通ナル切線ヲ其**公切線**トイフ. 而シテ二ツノ圓ガ公切線ノ一方ニアルトキハ,之ヲ**外公切線**トイヒ,二ツノ圓ガ公切線ノ兩側ニ一ツ宛アルトキハ,之ヲ**內公切線**トイフ.

例ヘバ(甲圖)ノ直線 AB ハ二ツノ圓ノ外公切線ニシテ,(乙圖)ノ直線 CD ハ二ツノ圓ノ內公切線ナリ.



149. 作圖題

二定圓(O, O′)ニ外公切線ヲ引クコト.

解析 圓O′ハ圓Oヨリ大ナリトセヨ.

AB ヲ外公切線ノ一ツナリト假定シ,切點A, B ヲ夫々中心 O, O′ ニ結ビ付クレバ

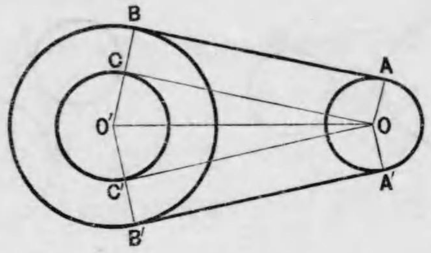
$$OA \perp AB$$

$$O'B \perp AB$$

今Oヨリ AB ニ平行線ヲ引キ O′B トC ニテ交ラシムレバ,四邊形OABC ハ矩形ニシテ O′C

ハ兩圓ノ半徑ノ差ニ等シ,而シテ OC ハ O′ヲ中心トシ O′C ヲ半徑トスル圓ニ切ス.

因テ次ノ作圖ヲ得.



【作圖】　圓 O′ノ中心ヲ中心トシ,二ツノ圓 O, O′ノ半徑ノ差ニ等シキ半徑ニテ圓ヲ畫ケ.

次ニ此圓ニ他ノ圓ノ中心 O ヨリ引キタル切線ノ切點(卽チ此圓ト線分 OO′ヲ直徑トスル圓トノ交點)ヲ求メヨ.(第131節)　此切點ヲ C, C′トシ,之ヲ通ル定圓 O′ノ半徑 O′B, O′B′ヲ引ケ.

ソコデ O′B, O′B′ト夫々同方向ニ定圓 O ノ半徑 OA, OA′ヲ引キ,直線 AB, A′B′ヲ作レバ是ガ所要ノ外公切線ナリ.

【證明】　OABC ハ矩形ナリ.

∴　　AB ⊥ OA

又　　AB ⊥ O′B

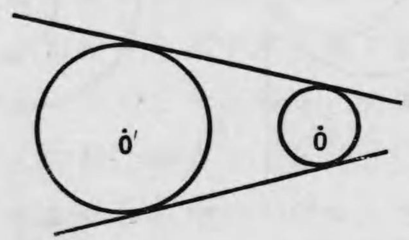
故ニ AB ハ二ツノ圓 O, O′ノ外公切線ナリ.

同樣ニ A′B′モ亦此二ツノ圓ノ外公切線ナリ.

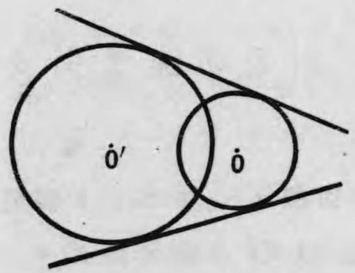
【吟味】　二定圓 O, O′ノ位置ノ關係ニヨリテ,其外公切線ノ數ハ次ノ如シ{r, r'ヲ夫々圓 O, O′ノ半徑トセヨ}.

(1)　$OO' > r' - r$　ナルトキニハ,外公切線ハ二ツアリ.　卽チ次ノ圖ノ如シ.

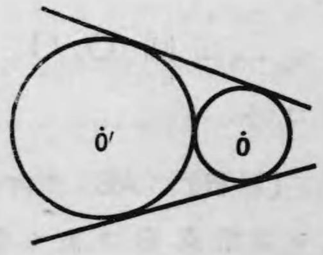
(甲)



(乙)



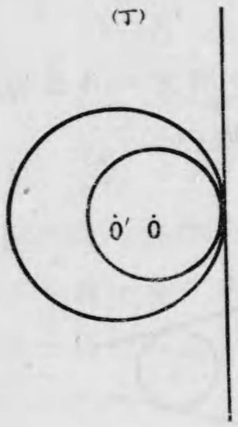
(丙)



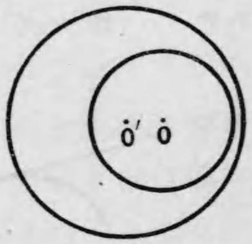
(2)　$OO'=r'-r$　ナルトキニハ,外公切線ハ唯一ツアリ. 卽チ(丁圖)ノ如シ.

(3)　$OO'<r'-r$　ナルトキニハ,外公切線ハナシ. 卽チ(戊圖)ノ如シ.

(丁)



(戊)



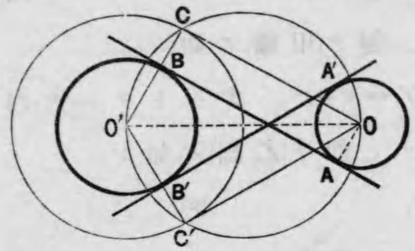
150. 作圖題

二定圓(O, O')ニ內公切線ヲ引クコト.

【解析】　AB ヲ內公切線ノ一ツナリト假定シ,切點 A, B ヲ夫々中心O, O'ニ結ビ付ケヨ.

サスレバ　$OA \perp AB$

$O'B \perp AB$



今Oヨリ AB ニ平行線ヲ引キO'Bノ延長トCニ於テ交ラシムレバ,四邊形OABCハ矩形ニシテ O'C ハ兩圓ノ半徑ノ和ニ等シ,而シテ OC ハO'ヲ中心トシO'C ヲ半徑トスル圓ニ切ス.

因テ次ノ作圖ヲ得.

【作圖】　定圓O'ノ中心ヲ中心トシ,二ツノ圓ノ半徑ノ和ニ等シキ半徑ニテ圓ヲ畫キ,次ニ此圓ニ他ノ圓ノ中心Oヨリ引キタル切線ノ切點C, C' ノ各ト中心O'トヲ結ビ付ケ,圓O'ノ周ト夫々 B, B' ニ於テ交ラシメヨ. B 及ビB'ヨリ夫々直線 CO, C'O' ニ平行線ヲ引ケバ是ガ所要ノ內公切線ナリ.

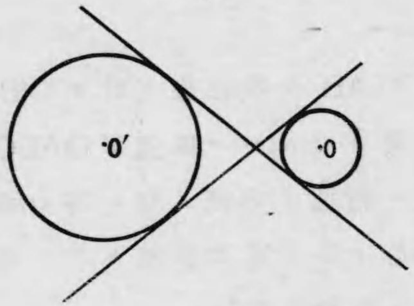
【證明】 略ス.

【吟味】 r, r' ヲ夫々圓 O, O′ ノ半徑トセヨ.

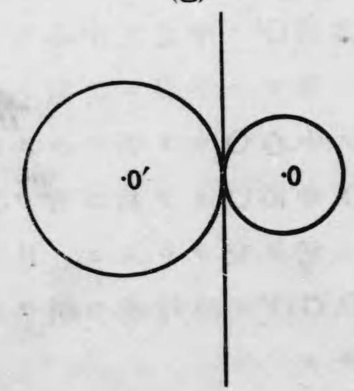
(1) $OO' > r+r'$ ナルトキニハ,內公切線ハ二ツアリ. 卽チ(甲圖)ノ如シ.

(2) $OO' = r+r'$ ナルトキニハ,內公切線ハ唯一ツアリ. 卽チ(乙圖)ノ如シ.

(甲)

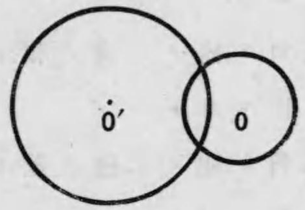


(乙)

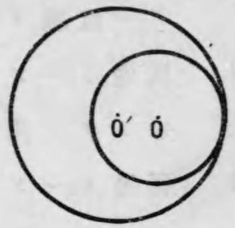


(3) $OO' < r+r'$ ナルトキニハ,內公切線ハナシ. 卽チ下ノ圖ノ如シ.

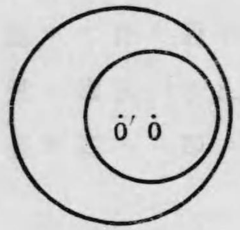
(丙)



(丁)



(戊)



問題

1. 定圓ニ於テ與ヘラレタル長サノ弦ヲ引キ,其延長ガ他ノ定圓ニ切スル樣ニスルコト.
2. 頂角,高サ及ビ內接圓ノ半徑ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

問　題

1. 一定點ヲ通リ,他ノ二定點ヨリ等距離ニアル直線ヲ引クコト.
2. 底邊ト,一ツノ底角ト,他ノ二邊ノ和トヲ知リテ三角形ヲ作ルコト.
3. 底邊ト,一ツノ底角ト,他ノ二邊ノ差トヲ知リテ三角形ヲ作ルコト.
4. 定直線ト定圓周トニ切シ,與ヘラレタル長サノ半徑ヲ有スル圓周ヲ畫クコト.
5. 定直線上ノ一定點ニ於テ之ニ切シ,且ツ定圓周ニ切スル圓ヲ畫クコト.

雜　題

1. 圓Oノ周上ノ一點Aヲ通ル直徑ヲABトシ一ツノ弦ヲACトスレバ,Oヨリ AC ニ平行ニ引ケル直線ハ弧BCヲ二等分ス.
2. 一ツノ圓ノ二ツノ弦AB, CDガ相等シケレバ,二ツノ弦AC, BDハ相等シキカ若クハ互ニ平行ナリ.
3. 圓ノ二ツノ弦AB, CDガ圓内ニ於テ互ニ垂直ニ交レバ $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}$ ハ半圓周ニ等シ.
4. 圓ノ二ツノ弦AB, CDガ互ニ垂直ニ交レバ,其交點ヨリA, B, C, Dニ至ル四ツノ線分ノ平方ノ和ハ直徑ノ平方ニ等シ.
5. 二等邊三角形ノ各頂點ニ於テ,其外接圓ニ引ケル三ツノ切線ハ亦二等邊三角形ヲナス.
6. ABヲ一ツノ圓ノ直徑,BCハABノ延

長ニシテ半徑ニ等シトス,Cヨリノ一ツノ切線ノ切點ヲDトスレバ △ACD ハ二等邊三角形ナリ.

7. 正三角形 ABC ノ外接圓ノ弧 BC 上ノ任意ノ一點ヲPトスレバ,PA ハ PB トPC トノ和ニ等シ.

8. 三角形 ABC ノ內心Oト頂點Aトヲ通ル直線ガ,此三角形ノ外接圓ノ周ト交ル點ヲDトスレバ,三ツノ線分 DB, DO, DC ハ互ニ相等シ.

9. 三角形ノ外接圓周上ノ任意ノ點ヨリ三邊又ハ其延長ニ下セル三ツノ垂線ノ足ハ同一直線上ニアリ.

10. 三角形ノ三ツノ中線ノ和ハ,三角形ノ周ヨリ小ニシテ周ノ $\frac{3}{4}$ ヨリ大ナリ.

11. 三角形ノ各邊ノ平方ノ和ノ三倍ハ各中線ノ平方ノ和ノ四倍ニ等シ.

12. A, Bハ二ツノ圓周ノ交點ナリ,其一ツノ圓周上ノ任意ノ一點Cヨリ二ツノ直線CA, CB ヲ引キ,他ノ圓周ト夫々點D, Eニ於テ交ラシムルトキハ,弧 DE ノ長サハ不易ナリ.

13. 定直線ニ常ニ平行ニシテ,且ツ其一端ガ定圓周上ヲ離レヌ樣ニ,與ヘラレタル長サノ線分ヲ動カストキ,此線分ノ他ノ端ノ軌跡如何.

14. 二定點ノ各ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ハ,一般ニハ或一ツノ圓周ナリ.

15. 二ツノ圓周ノ一交點Aヲ通リテ直線ヲ引キ,各圓周ト夫々, B, Cニ於テ交ラシメ,又Aヲ通ル任意ノ直線ヲ引キ,圓周トP, Q ニ於テ交ラシムレバ,二ツノ弦BP, CQ ノ延長ノ交點Rノ軌跡ハ BCヲ弦トスル或一ツノ圓周ナリ.

16. 弧 APB 上ノ任意ノ點PトAトヲ結ビ付ケ,之ヲPノ方へ BP ニ等シキダケ延長シ其端ヲQトスレバ,Qノ軌跡如何.

17. 定直線上ニ於テ,其上ニ在ラザル二定點ヨリノ距離ノ和ガ最小ナルベキ點ヲ求

ムルコト.

18. 定直線上ニ於テ其上ニ在ラザル二定點ヨリノ距離ノ差ガ最大ナルベキ點ヲ求ムルコト.

19. 二ツノ圓周ノ一交點ヲ通リ,其兩端ガ各圓周上ニ一ツ宛アルベキ線分ノ中最モ長キ者ヲ引クコト.

20. 頂角,周及ビ高サヲ知リテ三角形ヲ作ルコト.

21. 同一點ヲ通ラザル三ツノ定直線ノ各ヨリ,同一ノ與ヘラレタル線分ニ等シキ長サノ弦ヲ截リ取ル圓周ヲ畫クコト.

22. 定圓周上ノ一定點ニ於テ之ニ切シ,且ツ定直線ニ切スル圓ヲ畫クコト.

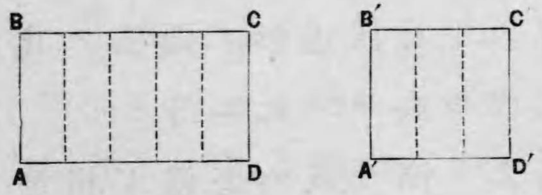
第五編　比及ビ比例

第一章　比例線

151. 定理

高サ(或ハ底邊)ガ相等シキ二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ,其邊(或ハ高サ)ノ比ニ等シ.

【證明】



二ツノ矩形 ABCD, A′B′C′D′ ニ於テ

$$AB = A'B'$$

トシ, AD, A′D′ ガ夫々或同ジ長サノ單位ノ m 倍, n 倍ニ等シトセヨ.

サスレバ

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{m}{n}$$

ソコデ AD ヲ m 個ニ, A′D′ ヲ n 個ニ等分シ, 其各分點ヨリ夫々 AB, A′B′ ニ平行線ヲ引ケバ此等ノ直線ハ矩形 ABCD 及ビ矩形 A′B′C′D′ ヲ夫々 m 個及ビ n 個ノ相等シキ矩形ニ分ツ.

$$\therefore \quad \frac{AB\cdot AD}{A'B'\cdot A'D'}=\frac{m}{n}$$

$$\therefore \quad \frac{AB\cdot AD}{A'B'\cdot A'D'}=\frac{AD}{A'D'}$$

系 1. 高サ(或ハ底邊)ガ相等シキ二ツノ平行四邊形ノ面積ノ比ハ,其底邊(或ハ高サ)ノ比ニ等シ.

系 2. 高サ(或ハ底邊)ガ相等シキ二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ,其底邊(或ハ高サ)ノ比ニ等シ.

問題

1. △ABC ノ内心 O ヲ各頂點ニ結ビ付クルトキ出來ル三ツノ三角形 AOB, BOC, COA ノ面積ハ三邊 AB, BC, CA ノ長サニ比例ス.

2. △ABC 内ノ一點 O ト各頂點トヲ通ル線分 AO, BO, CO ヲ引キ, AO ノ延長ト邊 BC トノ交點ヲ D トスレバ,二ツノ三角形 AOB, AOC ノ面積ノ比ハ BD, CD ノ比ニ等シ.

152. 定理

同種類ノ三ツノ量アリテ,第一量ト第二量トノ比及ビ第二量ト第三量トノ比ノ積ハ,第一量ト第三量トノ比ニ等シ.

【證明】 同種類ノ三ツノ量 A, B, C ヲ同ジ單位ニテ測リテ得ル數ヲ夫々 a, b, c トセヨ.

サスレバ

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$$

$$\frac{B}{C}=\frac{b}{c}$$

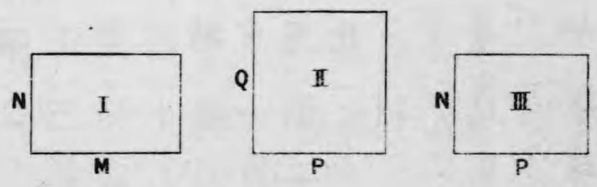
$$\frac{A}{C}=\frac{a}{c}$$

然ルニ　$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{c}$$

∴　$$\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}=\frac{A}{C}$$

153. 定理

三ツノ矩形ノ面積ノ比ハ,其底邊ノ比ト其高サノ比トノ積ニ等シ.



【證明】　矩形Iノ相隣レル二邊ヲM, Nトシ,矩形IIノ相隣レル二邊ヲP, Qトセヨ.

ソコデ其相隣レル二邊ガ夫々P, Nニ等シキ矩形IIIヲ作レ.

サスレバ

$$\frac{M\cdot N}{P\cdot N}=\frac{M}{P}$$　(第151節)

$$\frac{P\cdot N}{P\cdot Q}=\frac{N}{Q}$$　(第151節)

然ルニ　$$\frac{M\cdot N}{P\cdot N}\times\frac{P\cdot N}{P\cdot Q}=\frac{M\cdot N}{P\cdot Q}$$　(第152節)

∴　$$\frac{M\cdot N}{P\cdot Q}=\frac{M}{P}\times\frac{N}{Q}$$

系 1.　二ツノ正方形ノ面積ノ比ハ其邊ノ比ノ平方ニ等シ.

系 2.　二ツノ平行四邊形ノ面積ノ比ハ,其高サノ比ト其底邊ノ比トノ積ニ等シ.

系 3.　二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ,其高サノ比ト其底邊ノ比トノ積ニ等シ.

問題

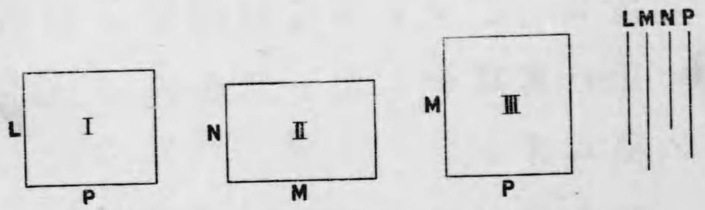
1.* 四ツノ線分ガ比例ヲナストキハ其各ノ平方モ亦比例ヲナス.

2.* 四ツノ線分ノ各ノ平方ガ比例ヲナストキハ此等ノ線分モ亦比例ヲナス.

154. 定理

四ツノ線分ガ比例ヲナストキハ,其外項ノ積ハ其内項ノ積ニ等シ.

【證明】 L, M, N, P ガ四ツノ線分ニシテ $\frac{L}{M}=\frac{N}{P}$ ナリトセヨ.



矩形Ⅰノ相隣レル二邊ガ夫々L,Pニ等シク,矩形Ⅱノ相隣レル二邊ガ夫々M,Nニ等シトセヨ. ソコデ其相隣レル二邊ガ夫々M,Pニ

等シキ矩形Ⅲヲ作レ. サスレバ

$$\frac{L.P}{M.P}=\frac{L}{M}$$ (第151節)

又 $$\frac{M.N}{M.P}=\frac{N}{P}$$ (第151節)

然ルニ $$\frac{L}{M}=\frac{N}{P}$$ (假　設)

$$\therefore \frac{L.P}{M.P}=\frac{M.N}{M.P}$$

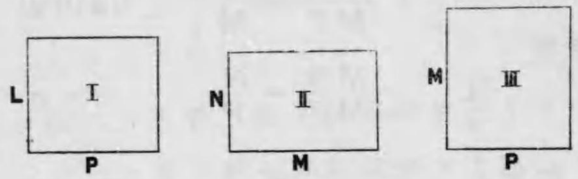
$$\therefore L.P=M.N$$

系　一ツノ線分ガ他ノ二ツノ線分ノ比例中項ナルトキハ,第一ノ線分ノ平方ハ他ノ二ツノ線分ノ積ニ等シ.

155. 定理

二ツノ矩形ガ等積ナルトキハ,一ツノ矩形ノ相隣レル二邊ガ外項ニシテ,他ノ矩形ノ相隣レル二邊ガ内項ナル比例ガ成リ立ツ.

【證明】



矩形Ⅰノ相隣レル二邊ヲL, Pトシ,矩形IIノ相隣レル二邊ヲM, Nトセヨ.

ソコデ其相隣レル二邊ガ夫々M, Pニ等シキ矩形IIIヲ作レ. サスレバ

$$L.P = M.N \qquad (\text{假　設})$$

$$\therefore \quad \frac{L.P}{M.P} = \frac{M.N}{M.P}$$

然ルニ

$$\frac{L.P}{M.P} = \frac{L}{M} \qquad (\text{第151節})$$

$$\frac{M.N}{M.P} = \frac{N}{P} \qquad (\text{同　上})$$

$$\therefore \quad \frac{L}{M} = \frac{N}{P}$$

系　一ツノ正方形ト一ツノ矩形トガ等積ナレバ,正方形ノ一邊ハ矩形ノ相隣レル二邊ノ比例中項ナリ.

問題

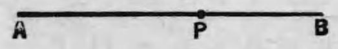
一ツノ三角形ニ於テ其二邊ノ比ハ之ニ對應スル高サノ反比ニ等シ.

156. 定義

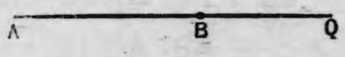
線分ABノ上ニ任意ノ一點Pヲ取レバ,點Pハ線分ABヲ二ツノ分AP, PBニ**内分シタリ**トイフ. (甲圖)

線分ABノ延長上ニ任意ノ一點Qヲ取レバ,點Qハ線分ABヲ二ツノ分AQ, QBニ**外分シタリ**トイフ. (乙圖)

(甲)



(乙)



【注意】　内分ノ場合ニハ,與ヘラレタル線分ハ其二ツノ分ノ和ニ等シク,外分ノ場合ニハ其差ニ等シ.

157. 定義

線分 AB 又ハ其延長上ニ一點 C ヲ取リタルトキ,$\frac{AC}{CB}$ ガ與ヘラレタル比$\frac{H}{K}$ニ等シケレバ,**此線分 AB ハ其比ニ内分若クハ外分サレタリトイフ.**

158. 定理

三角形ノ一邊ニ平行ナル直線ハ,他ノ二邊ヲ同ジ比ニ内分若クハ外分ス.

【證明】　△ABC ノ邊 BC ニ平行線ヲ引キ,他ノ二邊 AB, AC (若クハ其延長)ト夫々 D, E ニ於テ交ラシメヨ. B ト E ト;C ト D トヲ結ビ付

ケヨ　サスレバ

$$\frac{\triangle ADE}{\triangle BDE} = \frac{AD}{DB} \quad \text{(第151節系1)}$$

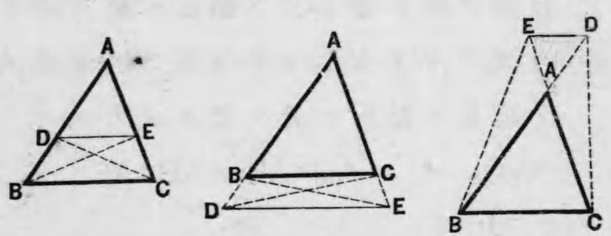
又　$$\frac{\triangle ADE}{\triangle CDE} = \frac{AE}{EC} \quad \text{(同　上)}$$

然ルニ　$DE \parallel BC$　(假　設)

∴　$\triangle BDE = \triangle CDE$　(第89節系2)

∴　$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

(甲)　(乙)　(丙)



系 1.　$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$,　$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

系 2.　三ツ以上ノ平行直線ガ一直線上ニ生ズル線分ハ,此等ノ平行直線ガ他ノ一直線上ニ生ズル線分ニ比例ス.

問題

1. 定點Oヨリ引ケル任意ノ直線ガ互ニ平行ナル二定直線ト夫々 P, Q ニ於テ交ルトキ OP:OQ ハ不易ナリ.

2. 二ツノ圓ガ互ニ内切スルトキハ,切點ヲ通ル大圓ノ弦ハ皆小圓周ニテ同ジ比ニ分タル.

3. △ABCノ邊 AB 上ノ點Dヨリ BC ニ平行線ヲ引キ邊 AC ト點E ニ於テ交ラシメ,又Cヨリ EB ニ平行線ヲ引キ邊 ABノ延長ト點F ニ於テ交ラシメヨ.

   サスレバ　AD:AB = AB:AF

   ナリ.

4. △ABCノ邊 AB 上ノ點Dヨリ BC ニ平行線ヲ引キ邊 AC ト點E ニ於テ交ラシメ,又點Eヨリ AB ニ平行線ヲ引キ邊 BC ト點F ニ於テ交ラシメヨ.

   サスレバ　AD:DB = BF:FC

   ナリ.

159. 定理

三角形ノ二邊ヲ同ジ比ニ内分(若クハ外分)スル直線ハ第三邊ニ平行ナリ.

【證明】　一ツノ直線ガ △ABC ノ二邊 AB, AC (若クハ其延長)ト夫々D, E ニ於テ交リ

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

ナリトセヨ.

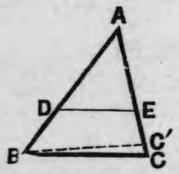
Bヲ通リテ DE ニ平行線ヲ引キ AC ト C′ ニ於テ交ラシムレバ

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC'} \quad \text{(前節)}$$

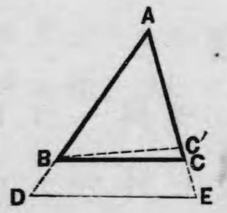
$$\therefore \quad \frac{AE}{EC} = \frac{AE}{EC'}$$

$$\therefore \quad EC = EC'$$

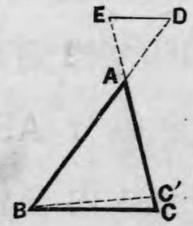
(甲)



(乙)



(丙)



故ニC′トCトハ同一ノ點ナリ,卽チBC′ハBCニ合ス.

∴　　DE ∥ BC

系　一直線ガ△ABCノ二邊AB, AC(若クハ其延長)ト夫々D, Eニ於テ交リ,且ツ $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ ナレバ DE ∥ BC ナリ.

問題

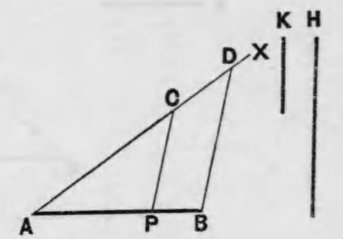
同ジ底邊ヲ有スル二ツノ三角形ABC, ABDアリ,其底邊AB上ノ任意ノ一點Eヨリ AC, ADニ平行ナル二直線ヲ引キBC, BDト夫夫F, Gニ於テ交ラシムレバ, CD, FGハ互ニ平行ナリ.

160. 作圖題

定線分(AB)ヲ與ヘラレタル比 $\left(\frac{H}{K}\right)$ ニ內分及ビ外分スルコト.

(1)　內分ノ場合.

【作圖】　Aヨリ ABト同一直線ヲナサザル任意ノ直線AXヲ引キ,其上ニHニ等シキ線分ACヲ取リ,倘引キ續キKニ等シキ線分CDヲ取リ,BトDトヲ結ビ付ケ,Cヨリ DBニ平行線ヲ引キ ABトPニ於テ交ラシメヨ. サスレバPガ所要ノ內分點ナリ.



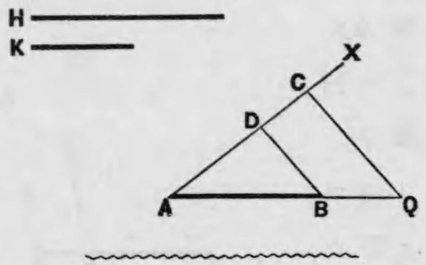
【證明】　略ス.

(2)　外分ノ場合.

【作圖】　內分ノ場合ト同樣ニ(次頁ニ示ス如ク),先ヅ半直線AXヲ引キ,其上ニ於テHニ等シキ線分ACヲ取リ,次ニ半直線CA上ニKニ等シク,CDヲ取リ,DトBトヲ結ビ付ケ,CヨリBDニ平行線ヲ引キテ ABノ延長トQニ於テ交ラシメヨ. サスレバQガ所要ノ外分點ナリ.

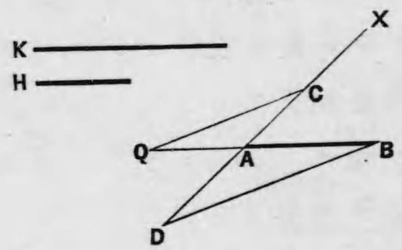
H＞K ナル場合

(甲)



H＜K ナル場合

(乙)



【證明】 略ス.

【注意】 H＝K ナルトキハ,DハAニ合シ,從テ直線DBハ直線ABニ合スルヲ以テ,點Qヲ求ムルコト能ハズ,而シテ之ハ一ツノ線分ヲ如何ナル點ニテ外分スルモ其二ツノ分ハ決シテ相等シカラザルコトニヨリテモ明カナリ.

故ニ一ツノ線分ヲバ,之ヲ兩項ガ相等シキ比ニ外分スルコト能ハズ.

系 定線分ヲ任意ノ與ヘラレタル比ニ内分スル點及ビ1ニアラザル任意ノ與ヘラレタル比ニ外分スル點ハ,何レモ唯一ツニ限ル.

問題

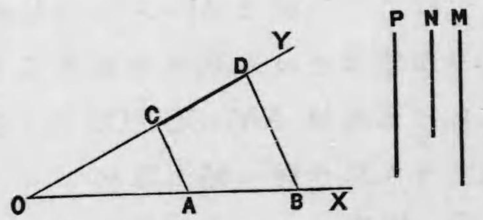
1. 梯形 ABCD ノ互ニ平行ナラザル二邊 AD, BC 上ニ夫々二點 P, Q ヲ取リ $\frac{AP}{PD}=\frac{BQ}{QC}$ ナラシムルトキハ, PQ ハ AB 及ビ CD ノ各ニ平行ナリ.
2. 平行ナル二線分 AB, A′B′ ヲ夫々同ジ比ニ内分(若クハ外分)スル點ヲ C, C′ トスレバ三直線 AA′, BB′, CC′ ハ互ニ平行ナルカ又ハ同一點ヲ通ル.
3. Oハ定點ニシテ,PハOヲ通ラザル一定直線上ヲ動ク點ナリ,線分 OP ヲ與ヘラ

レタル比ニ内分(若クハ外分)スル點Qノ軌跡如何.

161. 作圖題

與ヘラレタル三ツノ線分(M, N, P)ノ第四比例項ヲ求ムルコト.

【作圖】　同一點Oヨリ同一直線ヲナサザル二ツノ半直線OX, OYヲ引キ, OX上ニ於テ夫々M, Nニ等シキ線分OA, ABヲ同ジ向キニ取リ,又OY上ニ於テPニ等シキ線分OCヲ取リ,AトCトヲ結ビ付ケ,Bヨリ ACニ平行線ヲ引キテOYトDニ於テ交ラシメヨ. サスレバCDガ所要ノ第四比例項ナリ.



【證明】　略ス.

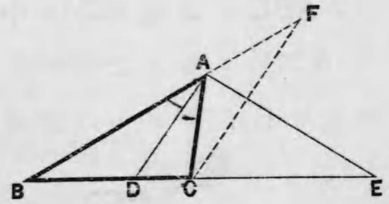
問題

與ヘラレタル正方形ト等積ニシテ且ツ與ヘラレタル線分ニ等シキ一邊ヲ有スル矩形ヲ作ルコト.

162. 定理

三角形ノ頂角及ビ其頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ハ,底邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ内分及ビ外分ス.

【證明】　△ABCノ頂角A及ビ其頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ガ底邊BC及ビ其延長ニ交ル點ヲ夫々D, Eトセヨ.



Cヨリ ADニ平行線ヲ引キBA ノ延長トFニ於テ交ラシメヨ. サスレバ

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AF}$$　(第158節)

$$\angle BAD = \angle F$$

又　$\angle DAC = \angle ACF$

然ルニ　$\angle BAD = \angle DAC$　(假設)

$\therefore$　$\angle F = \angle ACF$

$\therefore$　$AC = AF$

$\therefore$　$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

同樣ニCヨリAEニ平行線ヲ引キテ

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

ナルコトヲ證明スルヲ得.

問題

△ABCノ底邊BCノ中點ヲDトシ,角ADC, 角ADBノ各ノ二等分線ガ夫々AC, ABト交ル點ヲE,Fトスレバ直線EFハBCニ平行ナリ.

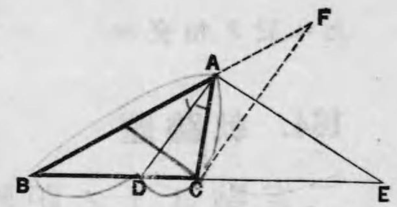
163. 定理

三角形ノ底邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ

內分,若クハ外分スル點ト頂點トヲ結ビ付クル線分ハ,夫々頂角及ビ其頂點ニ於ケル外角ヲ二等分ス.

【證明】　△ABCノ底邊BCヲ$\frac{AB}{AC}$ニ等シク內分及ビ外分スル點ヲ夫々D, Eトセヨ.

BAノAノ方ヘノ延長上ニACニ等シクAFヲ取リ,FトCトヲ結ビ付ケヨ.



サスレバ　$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$　(假設)

$\therefore$　$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AF}$

$\therefore$　$CF \parallel AD$　(第159節)

從テ　$\angle F = \angle BAD$

$\angle ACF = \angle CAD$

然ルニ　$\angle F = \angle ACF$

$\therefore$　$\angle BAD = \angle CAD$

卽チADハ∠Aノ二等分線ナリ.

同樣ニシテ, AE ハ頂點A ニ於ケル外角CAF ノ二等分線ナルコトヲ證明スルヲ得.

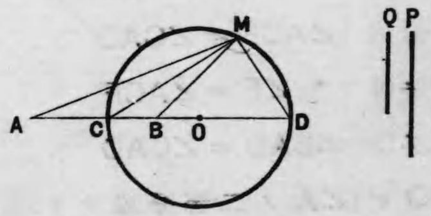
問題

四邊形 ABCD ノ二ツノ角A 及ビC ノ二等分線ガ對角線 BD ノ上ニ於テ相交レバ,他ノ二ツノ角B 及ビD ノ二等分線モ對角線 AC ノ上ニ於テ相交ル.

164. 軌跡題

二定點ヨリノ距離ノ比ガ,與ヘラレタル比ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求ムルコト.

【解】　A, B ヲ二定點トシ, P, Q ヲ與ヘラレタル二ツノ線分トセヨ(但シP≠Qトス).



先ヅ線分 AB ヲ $\frac{P}{Q}$ ニ內分及ビ外分シタル點ヲ夫々C 及ビDトスレバ,此二點ハ與ヘラレタル條件ニ適スル點ナリ.

今與ヘラレタル條件ニ適スル任意ノ一點ヲMトシ,之トA, B, C, D ノ各トヲ結ビ付ケヨ.

サスレバ

$$\frac{MA}{MB}=\frac{P}{Q}=\frac{CA}{CB}$$

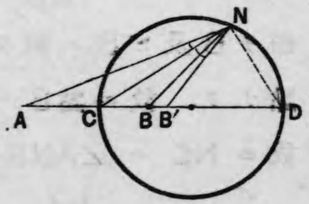
$$\frac{MA}{MB}=\frac{P}{Q}=\frac{DA}{DB}$$

故ニ MC ハ △AMB ノ ∠M ノ二等分線ニシテ, MD ハ ∠M ノ頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ナリ. (前節)

$$\therefore \quad \angle CMD=\angle R$$

故ニ與ヘラレタル條件ニ適スル點ハ CD ヲ直徑トスル圓周上ニアリ.

逆ニ此圓周上ニ任意ノ一點N ヲ取リ, A, B, C, D ノ各トN トヲ結ビ付ケ,



NC ト ∠ANC ニ等シキ角ヲナス直線ヲ N ヨリ引キ CD トノ交點ヲ B′ トセヨ. サスレバ

$$\frac{NA}{NB'}=\frac{CA}{CB'} \qquad (第162節)$$

$$\angle CND=\angle R$$

ナルヲ以テ, ND ハ △NAB′ ノ頂點 N ニ於ケル外角ヲ二等分ス.

$$\therefore \quad \frac{NA}{NB'}=\frac{DA}{DB'} \qquad (第162節)$$

$$\text{從テ} \quad \frac{CA}{CB'}=\frac{DA}{DB'}$$

$$\therefore \quad \frac{CA}{DA}=\frac{CB'}{DB'}$$

$$\text{然ルニ} \quad \frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB} \qquad (作圖)$$

$$\therefore \quad \frac{CA}{DA}=\frac{CB}{DB}$$

$$\therefore \quad \frac{CB}{DB}=\frac{CB'}{DB'}$$

卽チ B 及ビ B′ ハ線分 CD ヲ同ジ比ニ內分スル點ナリ. 故ニ點 B′ ハ點 B ニ合ス. (第160節系)

故ニ NC ハ ∠ANB ノ二等分線ナリ.

$$\text{從テ} \quad \frac{NA}{NB}=\frac{CA}{CB}=\frac{P}{Q} \qquad (第162節)$$

故ニ N ハ與ヘラレタル條件ニ適ス.

因テ二定點ヨリノ距離ノ比ガ, (1ニ等シカラザル)與ヘラレタル比ニ等シキ點ノ軌跡ハ, 此二定點ヲ結ビ付クル線分ヲ此比ニ內分及ビ外分スル二點ヲ直徑ノ兩端トスル圓周ナリ.

【注意】 P＝Q ナレバ, A, B ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求ムルコトトナル, 而シテ之ハ已ニ第135節ニ於テ述ベオキタリ.

問題

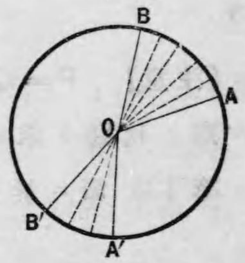
1. 三點 A, B, C ガ同一直線上ニ此順ニ並ブトキ, 二ツノ線分 AB ト BC トヲ相等シキ角ニ見込ム點ノ軌跡ヲ求ムルコト.
2. 底邊, 頂角及ビ他ノ二邊ノ比ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト.

165. 定理

同一ノ圓(或ハ相等シキ圓)ニ於テ中心角ノ大サハ之ニ對スル弧ノ長サニ比例ス.

【證明】　相等シキ二ツノ圓O及ビO′ニ於ケル弧ヲ夫々AB, A′B′トセヨ.

今中心角 AOB 及ビ A′O′B′ ガ夫々或單位ノ m 倍及ビ n 倍ニ等シトセヨ. ソコデ∠AOBヲ m 個ニ等分シ, ∠A′OB′ ヲ n 個ニ等分スレバ,此等ノ各部分ノ大サハ相等シ,卽チ今取リタル角ノ單位ニ等シ.



$$\therefore \quad \frac{\angle AOB}{\angle A'OB'} = \frac{m}{n}$$

又今引キタル角ノ等分線ガ夫々 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{A'B'}$ ニ交ル點ハ $\overset{\frown}{AB}$ ヲ m 個ニ, $\overset{\frown}{A'B'}$ ヲ n 個ニ等分ス.

(第23節)

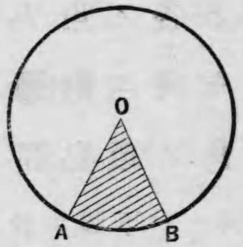
$$\therefore \quad \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore \quad \frac{\angle AOB}{\angle A'OB'} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}}$$

166. 定義

圓ノ弧ト其兩端ヲ通ル二ツノ半徑トニテ圍マルル圓ノ一部分ヲ扇形トイヒ,其弧ニ對スル中心角ヲ扇形ノ角トイフ.

例ヘバ右ノ圖ニ於ケル圖形 AOB ハ扇形ニシテ,∠AOBハ扇形ノ角ナリ.



167. 定理

同一ノ圓(若クハ相等シキ圓)ノ扇形ノ面積ハ,扇形ノ角(或ハ扇形ノ弧)ニ比例ス.

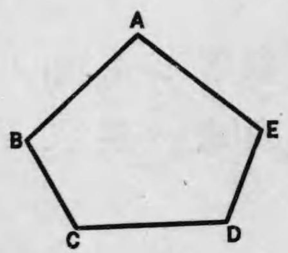
【證明】　畧ス.

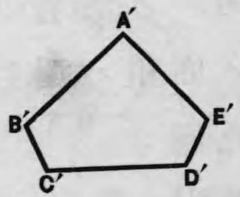
第二章　相似多角形

168. 定義

一ツノ多角形ノ(順ニ取リタル)角ガ夫々他ノ多角形ノ(順ニ取リタル)角ニ等シキトキ,此兩多角形ハ**互ニ等角ナリ**トイフ,而シテ一ツノ多角形ノ各ノ角ヲ,他ノ多角形ノ之ニ等シキ角ニ**對應スル**トイヒ,相對應スル角ノ頂點間ノ邊ヲ**對應邊**トイフ.

例ヘバ下圖ニ於テ





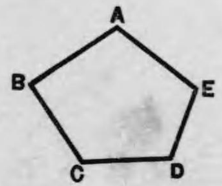
$$\angle A = \angle A',\ \angle B = \angle B',\ \angle C = \angle C',$$
$$\angle D = \angle D',\ \angle E = \angle E'$$

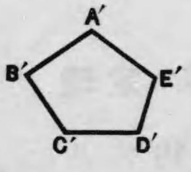
ナルトキハ,二ツノ多角形 ABCDE, A′B′C′D′E′ ハ互ニ等角ニシテ, AB, BC, CD, DE, EA ハ夫々 A′B′, B′C′, C′D′, D′E′, E′A′ ノ對應邊ナリ.

169. 定義

二ツノ多角形ガ等角ニシテ對應邊ガ比例ヲナストキハ,此二ツノ多角形ハ**互ニ相似ナリ**トイヒ,其對應邊ノ比ヲ名ヅケテ**相似比**トイフ.

例ヘバ二ツノ多角形 ABCDE, A′B′C′D′E′ ニ於テ





$$\angle A = \angle A',\ \angle B = \angle B',\ \angle C = \angle C',$$
$$\angle D = \angle D',\ \angle E = \angle E'$$
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

ナルトキハ,此二ツノ多角形ハ互ニ相似ナリ.

二ツノ多角形 ABCDE, A′B′C′D′E′ ガ互ニ相似ナルコトヲ

$$ABCDE \backsim A'B'C'D'E'$$

ト記ス.

【注意1】 同ジ多角形ニ相似ナル二ツノ多角形ハ亦互ニ相似ナリ.

【注意2】 邊數ガ同ジキ二ツノ正多角形ハ互ニ相似ナリ.

【注意3】 相等シキ多角形ハ相似多角形ノ特別ナル場合ニシテ,其相似比ガ1ニ等シキ者ナリ.

170. 定理

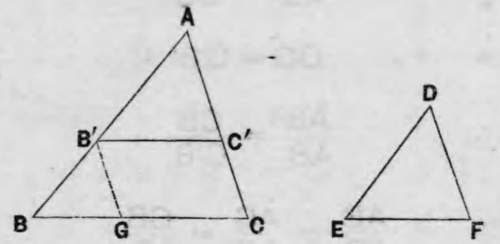
等角ナル二ツノ三角形ハ互ニ相似ナリ.

【證明】 △ABC ト △DEF トニ於テ

$$\angle A = \angle D$$
$$\angle B = \angle E$$

從テ $$\angle C = \angle F$$

ナリトセヨ.



邊 AB 上ニ於テ DE ニ等シキ線分 AB′ ヲ取リ,又邊 AC 上ニ於テ DF ニ等シキ線分 AC′ ヲ取リ,B′ト C′トヲ結ビ付ケヨ.

サスレバ △AB′C′ ト △DEF トニ於テ

$$AB' = DE$$
$$AC' = DF$$
$$\angle A = \angle D$$

$$\therefore \quad \triangle AB'C' \equiv \triangle DEF$$

從テ $$\angle AB'C' = \angle E = \angle B$$

$$\therefore \quad B'C' \parallel BC$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AC'}$$

次ニB′ヨリACニ平行線ヲ引キBCトGニ於テ交ラシメヨ. サスレバ

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{CB}{CG}$$

然ルニ $$CG = C'B'$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AB'} = \frac{CB}{C'B'}$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{CB}{C'B'}$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle AB'C' \quad \text{(前節)}$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle DEF$$

系 1. 一ツノ直角三角形ノ一銳角ガ他ノ直角三角形ノ一銳角ニ等シケレバ,此二ツノ直角三角形ハ互ニ相似ナリ.

系 2. 二ツノ相似三角形ノ相似比ハ,相對應スル頂點ヨリ引ケル兩三角形ノ高サノ比ニ等シ.

問題

1. 一點Aヨリ一ツノ圓ニ切線ト割線トヲ引キ,此切線ノ切點ヲBトシ,割線ト圓周トノ交點ヲC及ビDトスレバ,△ABCト△ABDトハ互ニ相似ナリ.
2.* 三邊ガ夫々互ニ平行ナルカ若クハ互ニ垂直ナル二ツノ三角形ハ互ニ相似ナリ.

171. 定理

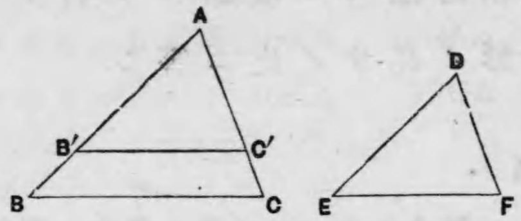
二邊ノ比及ビ其夾角ガ夫々相等シキ二ツノ三角形ハ互ニ相似ナリ.

【證明】 △ABCト△DEFトニ於テ

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$$

及ビ $$\angle A = \angle D$$

トセヨ.



邊 AB 上ニ於テ DE ニ等シキ線分 AB′ ヲ取リ，又邊 AC 上ニ於テ DF ニ等シキ線分 AC′ ヲ取リ，B′ ト C′ トヲ結ビ付ケヨ．

サスレバ △AB′C′ ト △DEF トニ於テ

$AB' = DE$　（作　圖）

$AC' = DF$　（作　圖）

$\angle A = \angle D$　（假　設）

$\therefore \quad \triangle AB'C' \equiv \triangle DEF$

然ルニ　$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DE}{DF}$　（假　設）

$\therefore \quad \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB'}{AC'}$

$\therefore \quad \dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{AC}{AC'}$

$\therefore \quad B'C' \parallel BC$　（第 159 節）

$\therefore \quad \angle B' = \angle B, \quad \angle C' = \angle C$

故ニ △AB′C′ ト △ABC トハ互ニ等角ナリ．

從テ △DEF ト △ABC トハ互ニ等角ナリ．

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle DEF$　（第 170 節）

問題

三角形ノ一頂點ヨリ底邊ヘ引キタル垂線ガ三角形ノ內ニアリテ且ツ其足ニテ生ズル底邊ノ二ツノ分ノ比例中項ナルトキハ，此三角形ハ直角三角形ナリ．

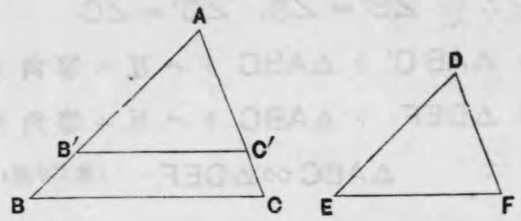
172. 定理

一ツノ三角形ノ三邊ガ他ノ三角形ノ三邊ニ比例スルトキ，此二ツノ三角形ハ互ニ相似ナリ．

【證明】　△ABC ト △DEF トニ於テ

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

ナリトセヨ．



邊 AB 上ニ於テ DE ニ等シキ線分 AB′ ヲ取リ,B′ヨリ BC ニ平行線ヲ引キ,AC ト C′ニ於テ交ラシメヨ. サスレバ

$$\triangle ABC \backsim \triangle AB'C' \qquad (\text{第 170 節})$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

然ルニ　$AB' = DE$　(作　圖)

$$\therefore \quad \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{AC'}$$

而シテ　$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$　(假　設)

$$\therefore \quad \frac{AC}{AC'} = \frac{AC}{DF}$$

$$\therefore \quad AC' = DF$$

同樣ニ　$B'C' = EF$

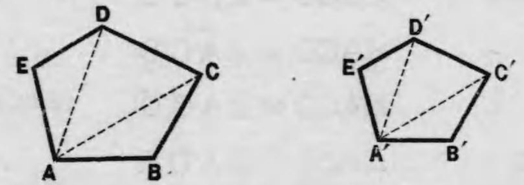
$$\therefore \quad \triangle AB'C' \equiv \triangle DEF$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle DEF$$

173. 定理

互ニ相似ナル二ツノ多角形ハ,之ヲ同數ノ互ニ相似ナル三角形ニ分ツコトヲ得.

【證明】　例ヘバ ABCDE, A′B′C′D′E′ ヲ互ニ相似ナル二ツノ五邊形トセヨ.



マヅ ABCDE ノ一ツノ頂點 A ヨリ對角線 AC, AD ヲ引キ,次ニ A′B′C′D′E′ ノ A ニ對應スル頂點 A′ヨリ對角線 A′C′, A′D′ ヲ引ケ. サスレバ ABCDE ハ三ツノ三角形 ABC, ACD, ADE ニ分タレ, A′B′C′D′E′ ハ同數ノ三角形 A′B′C′, A′C′D′, A′D′E′ ニ分タル.

サテ　$\angle B = \angle B'$　(假　設)

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \qquad (\text{假　設})$$

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ (第171節)

$\therefore \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$

然ルニ $\quad \frac{CD}{BC} = \frac{C'D'}{B'C'}$ (假　設)

$\therefore \quad \frac{CD}{AC} = \frac{C'D'}{A'C'}$ (第152節)

又 $\quad \angle BCA = \angle B'C'A'$

然ルニ $\quad \angle BCD = \angle B'C'D'$ (假　設)

$\therefore \quad \angle ACD = \angle A'C'D'$

$\therefore \quad \triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$ (第171節)

同樣ニ $\quad \triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'$

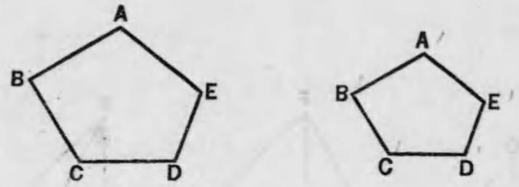
問題

與ヘラレタル多角形ニ相似ナル多角形ヲ畫キ,原多角形ノ一邊ニ對應スル新多角形ノ邊ヲ與ヘラレタル長サニ等シカラシムルコト.

174. 定理

互ニ相似ナル二ツノ多角形ノ周ノ比ハ其相似比ニ等シ.

【證明】 ABCDE, A′B′C′D′E′ ヲ互ニ相似ナル二ツノ多角形トセヨ.



サスレバ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} \quad \text{(假設)}$$

$$= \frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A'}$$

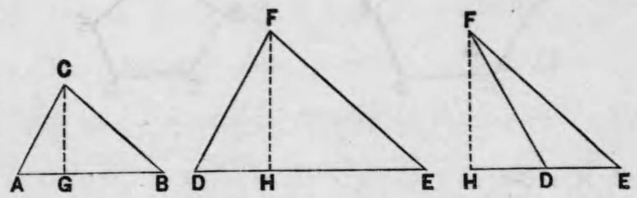
175. 定理

一ツノ三角形ノ一ツノ角ト,他ノ三角形ノ一ツノ角トガ相等シキカ,或ハ互ニ補角ヲナストキハ,此二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ此角ノ二邊ノ積ノ比ニ等シ.

【證明】 △ABC ト △DEF トニ於テ

∠A＝∠D 若クハ ∠A+∠D＝2∠R

ナリトセヨ.



△ABC ノ邊 AB ヲ底邊トスルトキノ高サヲ CG トシ, △DEF ノ邊 DE ヲ底邊トスルトキノ高サヲ FH トセヨ. サスレバ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{AB}{DE}\times\frac{CG}{FH}$$ (第153節系3)

然ルニ $\triangle ACG \backsim \triangle DFH$ (第170節系1)

$$\therefore \quad \frac{CG}{FH}=\frac{AC}{DF}$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{AB}{DE}\times\frac{AC}{DF}$$

$$=\frac{AB\cdot AC}{DE\cdot DF}$$ (第153節)

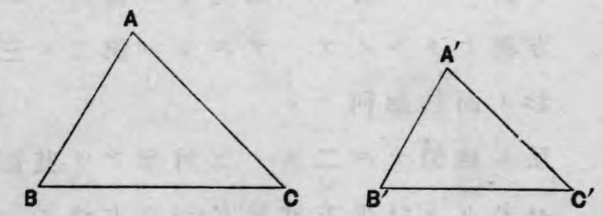
問題

1. 相等シキ一ツノ角ヲ有スル二ツノ平行四邊形ノ面積ノ比ハ,其相隣レル二邊ノ積ノ比ニ等シ.
2. △ABC ノ二邊 AB, BC ノ上ニ於テ夫々點 D, E ヲ取リ, $AD=\frac{1}{4}AB$, $BE=\frac{2}{3}BC$ ナラシムルトキハ, △BDE ノ面積ハ △ABC ノ面積ノ幾分ノ幾ツナルカ.

176. 定理

互ニ相似ナル二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ其對應邊ノ平方ノ比ニ等シ.

【證明】



$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

ナリトセヨ. サスレバ

$$\angle A = \angle A'$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{AC}{A'C'} \qquad \text{(前節)}$$

然ルニ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \qquad \text{(假設)}$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$

$$= \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

問題

1. 互ニ相似ナル二ツノ三角形アリ,其相對應スル一組ノ邊ノ長サハ夫々12糎及ビ9糎ニシテ,第一ノ三角形ノ面積ハ60平方糎ナリトイフ. サスレバ第二ノ三角形ノ面積如何.

2. 互ニ相似ナル二ツノ三角形アリ,其面積ハ夫々100平方寸及ビ64平方寸ニシテ第一ノ三角形ノ一邊ノ長サハ7寸ナリ,第二ノ三角形ニ於ケル其對應邊ノ長サ如何.

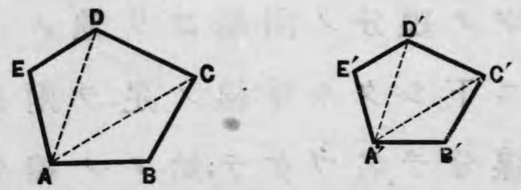
177. 定理

相似多角形ノ面積ハ其對應邊ノ平方ニ比例ス.

【證明】 ABCDE, A′B′C′D′E′ ヲ二ツノ相似多角形トシ, A, A′ ヨリ各頂點ヘ對角線ヲ引ケ.

サスレバ

$$\left.\begin{aligned} &\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C' \\ &\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D' \\ &\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E' \end{aligned}\right\} \quad \text{(第173節)}$$



$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB^2}{A'B'^2} \qquad (\text{前節})$$

$$\frac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'} = \frac{CD^2}{C'D'^2} = \frac{AB^2}{A'B'^2} \qquad (\text{同上})$$

$$\frac{\triangle ADE}{\triangle A'D'E'} = \frac{DE^2}{D'E'^2} = \frac{AB^2}{A'B'^2} \qquad (\text{同上})$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADE}{\triangle A'B'C'+\triangle A'C'D'+\triangle A'D'E'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

$$\text{卽チ} \quad \frac{\text{多角形 ABCDE}}{\text{多角形 A'B'C'D'E'}} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

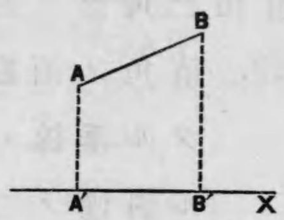
問題

縮尺二萬分ノ一ノ地圖上ニ於テ20平方寸ナル地面ノ實際ノ面積ハ大約幾方里ナルカ.

178. 定義

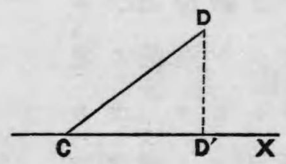
一ツノ線分ノ兩端ヨリ他ノ一直線上ニ下シタル垂線ノ足ヲ兩端トスル線分ヲ名ヅケテ,始メノ線分ノ此直線上ニ於ケル**直射影**(或ハ**正射影**)トイヒ,此直線ヲ射影ノ**軸**トイフ.

例ヘバ右ノ圖ニ於ケル線分A'B'ハ直線Xヲ軸トスル線分ABノ直射影ナリ.



若シ線分ノ一端ガ射影ノ軸上ニ在ルトキハ,其端ト他ノ端ヨリ下シタル垂線ノ足トヲ兩端トスル線分ガ其直射影ナリ.

例ヘバ右ノ圖ニ於ケル線分CD'ハ線分CDノ直線X上ニ於ケル直射影ナリ.



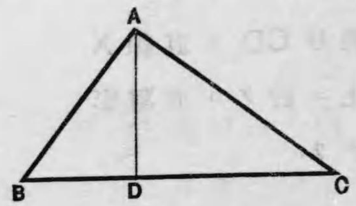
179. 定理

直角三角形ニ於テ

(1) 直角ノ頂點ヨリ斜邊ヘ引キタル垂線ハ,其足ニテ分タル斜邊ノ二ツノ分ノ比例中項ナリ.

(2) 直角ノ各邊ハ,斜邊ノ上ニ於ケル其直射影ト斜邊トノ比例中項ナリ.

(1)ノ證明 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A ヨリ斜邊 BC ニ下シタル垂線ノ足ヲ D トセヨ. サスレバ二ツノ直角三角形 ABD 及ビ CAD ニ於テ



$$\angle B = \angle CAD$$

$$\therefore \quad \triangle ABD \backsim \triangle CAD$$

$$\therefore \quad \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$$

從テ $AD^2 = BD \cdot CD$

(2)ノ證明 二ツノ直角三角形 ABC 及ビ DBA ハ ∠B ヲ共有ス.

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle DBA$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}$$

從テ $AB^2 = BC \cdot BD$

同樣ニシテ $AC^2 = BC \cdot CD$

系 直角三角形ノ直角ノ各邊ノ平方ノ比ハ,斜邊上ニ於ケル其二邊ノ直射影ノ比ニ等シ.

問題

1.* 圓周上ノ一點ヨリ一ツノ直徑ヘ下シタル垂線ノ平方ハ,其足ニテ分タルル此直徑ノ二ツノ分ノ積ニ等シ.

2.* 圓ノ弦ノ平方ハ,其一端ヲ通ル直徑ノ上ニ於ケル其弦ノ直射影ト直徑トノ積ニ

等シ.

3. 圓ノ互ニ平行ナル二ツノ切線ガ,點Aニ於テ切スル第三ノ切線ト夫々P, Qニ於テ交ルトキ,此圓ノ半徑ハAPトAQトノ比例中項ナリ.

4. 直角三角形ABCノ直角ノ頂點Aヨリ斜邊BCニ垂線ADヲ引キ,次ニ角Bノ二等分線ヲ引キAC, ADト夫々E, Fニテ交ラシムレバ

$$\frac{DF}{AF}=\frac{AE}{CE}$$

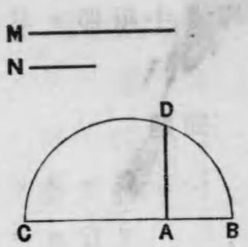
ナリ.

180. 作圖題

與ヘラレタル二ツノ線分(M, N)ノ比例中項ヲ求ムルコト.

【作圖第一】 任意ノ直線ヲ引キ,其上ニ於テ一點Aヨリ其兩側ニ,ABヲNニ等シク,ACヲMニ等シク取リ,線分BCヲ直徑トシテ半圓周ヲ畫ケ.

次ニAヨリBCニ垂線ヲ引キ此半圓周トDニ於テ交ラシメヨ.

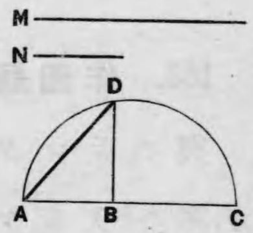


サスレバ線分ADガMトNトノ比例中項ナリ.

【證明】 畧ス.

【作圖第二】 M>N ナリト假定セン.

點Aヨリ任意ノ半直線ヲ引キ,其上ニ於テABヲNニ等シク,ACヲMニ等シク取リ,ACヲ直徑トシテ半圓周ヲ畫ケ.



次ニBヨリACニ垂線ヲ引キ半圓周トDニ於テ交ラシメ,AトDトヲ結ビ付ケヨ. サスレバ線分ADガMトNトノ比例中項ナリ.

【證明】 略ス.

【注意】 作圖第一ニヨリテ次ノ事柄ノ眞ナルコトヲ知ル.

相等シカラザル二ツノ線分ノ比例中項ハ,其

等差中項卽チ其和ノ半分ヨリ小ナリ.

問題

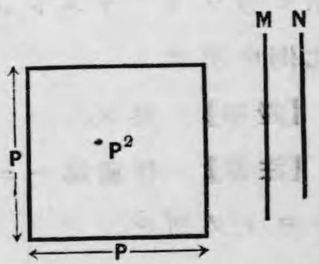
1. 與ヘラレタル三角形ト等積ナル正方形ヲ作ルコト.
2. 與ヘラレタル三角形ト等積ニシテ且ツ同ジ頂角ヲ有スル二等邊三角形ヲ作ルコト.

○181. 作圖題

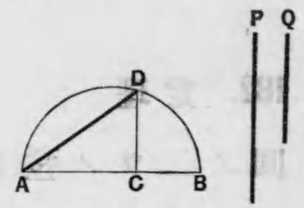
與ヘラレタル正方形 (P^2) トノ比ガ,與ヘラレタル二ツノ線分 (M, N) ノ比ニ等シキ正方形ヲ求ムルコト.

【作圖】 先ヅ三ツノ線分 M, N, P ノ第四比例項 Q ヲ求メヨ. (第161節)

次ニ P, Q ノ中ノ大ナル方例ヘバ P ニ等シキ線分 AB ヲ直徑トシテ半圓周ヲ畫キ,



AB 上ニ於テ Q ニ等シキ線分 AC ヲ取リ, C ヨリ AB ニ垂線ヲ引キ半圓周ト點 D ニ於テ交ラシメ, A ト D トヲ結ビ付ケヨ. サスレバ AD ガ所要ノ正方形ノ一邊ナリ.



【證明】 $AD^2 = AB \cdot AC$ (第267頁問題2)

$= P \cdot Q$

$\therefore \quad \frac{AD^2}{P^2} = \frac{P \cdot Q}{P^2} = \frac{Q}{P}$ (第151節)

然ルニ $\frac{M}{N} = \frac{P}{Q}$ (作圖)

$\therefore \quad \frac{AD^2}{P^2} = \frac{N}{M}$

問題

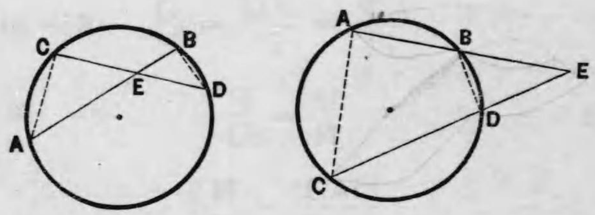
1. 與ヘラレタル多角形ト相似ニシテ面積ガ其半分ナル多角形ヲ作ルコト.

2. 三角形ノ邊ニ平行ナル直線ヲ引キテ其面積ヲ二等分スルコト.

182. 定理

圓ノ二ツノ弦若クハ其延長ガ相交ルトキハ,其交點ニテ分タレタル各弦ノ分ノ積ハ相等シ.

【證明】 圓Oノ二ツノ弦AB, CD若クハ其延長ノ交點ヲEトセヨ.



AトCト;BトDトヲ結ビ付ケヨ.

サスレバ二ツノ三角形ACEトDBEトニ於テ

$$\angle AEC = \angle DEB$$

$$\angle ACE = \angle DBE$$

$$\therefore \quad \triangle ACE \backsim \triangle DBE$$

$$\therefore \quad \frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$$

$$\therefore \quad AE \cdot BE = CE \cdot DE$$

系 二ツノ線分若クハ其延長ガ相交リ,其交點ニテ生ズル各線分ノ二ツノ分ノ積ガ相等シケレバ,此二ツノ線分ノ端ハ同一圓周上ニ在リ.

問題

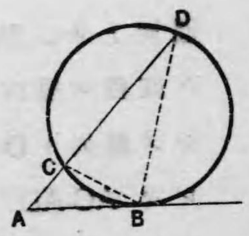
1. 三角形ノ各頂點ヨリ其對邊ヘ引ケル垂線ガ垂心ニ於テ內分又ハ外分サルル二ツノ分ノ積ハ皆相等シ.
2. 圓周上ノ一點AヨリAヲ通ル直徑ニ垂直ナル直徑トCニ於テ交ラシメ,圓周トDニ於テ交ラシメヨ. サスレバ AC.AD ハ此圓ノ半徑ノ平方ノ二倍ニ等シ.
3. 相交ルニツノ圓ノ共通弦又ハ其延長ノ

上ノ一點Pヲ通リテ二直線ヲ引クトキ,第一直線ガ一ツノ圓トC,Dニ於テ,第二直線ガ他ノ圓トE,Fニ於テ交ルトスレバ,C, D, E, Fハ同一圓周上ニ在リ.

183. 定理

圓外ノ一點ヨリ引キタル切線ノ長サノ平方ハ,同ジ點ヨリ引キタル割線上ノ弦ガ此點ニテ分タレタル二ツノ分ノ積ニ等シ.

【證明】 圓外ノ一點Aヨリ引キタル切線ノ切點ヲBトシ,Aヨリ引キタル割線ガ圓周ニ交ル點ヲC,Dトセヨ.



C及ビDノ各トBトヲ結ビ付ケヨ.

サスレバ二ツノ三角形 ABD, ACB ニ於テ

∠Aハ共通

$$\angle ADB = \angle ABC \quad (\text{第126節})$$

$$\therefore \quad \triangle ABD \backsim \triangle ACB$$

$$\therefore \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \quad AB^2 = AC \cdot AD$$

系 弦ヲ任意ノ點ニテ外分シタルトキ,其二ツノ分ノ積ガ,同ジ點ト圓周上ノ或點トヲ結ビ付クル線分ノ平方ニ等シケレバ,此線分ハ其點ニ於テ圓ニ切ス.

問題

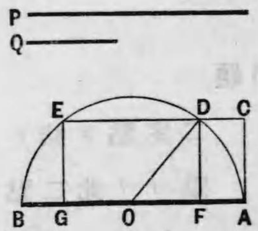
1. 二定點ヲ結ビ付クル線分ノ延長上ノ一點ヨリ,此二點ヲ通ル數多ノ圓ヘ引キタル切線ノ長サハ相等シ.
2. 圓O外ノ一點Aヨリ此圓ニ割線ヲ引キ,圓周トB及ビCニ於テ交ラシメ,次ニAヨリ任意ノ方向ニ直線ヲ引キ,其上ニAヨリ引キタル切線ト等長ナル線分 AD

ヲ取リ, DB, DC 又ハ其延長ト圓周トノ他ノ交點ヲ夫々E, Fトスレバ EF // AD ナリ.

184. 作圖題

二ツノ線分ノ和 (P) ト積 (Q^2) トヲ知リテ各線分ヲ求ムルコト.

【作圖】 Pニ等シキ線分 ABヲ直徑トシテ半圓周ヲ畫キ, Aニ於ケル切線上ニ, ABニ對シ半圓周ト同ジ側ニQニ等シク ACヲ取リ, CヨリABニ平行線ヲ引キ, 半圓周トノ一交點Dヲ求メ, DヨリABヘ垂線 DFヲ引クトキニ生ズルABノ二ツノ分 AF, BF ガ所要ノ二ツノ線分ナリ.



【證明】 $AF+BF=AB=P$

$AF\cdot BF=DF^2$ (第267頁問題1)

$=Q^2$

【吟味】 本問題ガ成リ立ツタメニハ, CヨリABニ平行ニ引キタル直線ト半圓周トガ出會ハザルベカラズ. 夫ガタメニハ

$$Q\leqq\frac{1}{2}P$$

ナラザルベカラズ. ソコデ

(1) $Q<\frac{1}{2}P$ ナルトキハ, 上圖ノ如クニツノ交點D, Eヲ得. サレドモEニヨリテ得ルニツノ線分 AG, BG ハ夫々 BF, AF ニ等シキヲ以テ, 此場合ニハ唯一ツノ解アリ.

(2) $Q=\frac{1}{2}P$ ナルトキハ所要ノ線分ハ OA, OB ニシテ何レモ $\frac{1}{2}P$ ニ等シ.

(3) $Q>\frac{1}{2}P$ ナルトキハ問題ハ不可能ナリ.

【注意】 次ノ如クニシテ AF, BF ノ長サヲ計算スルコトヲ得.

$$AF=OA-OF$$

$$BF=OB+OF=OA+OF$$

而シテ $OA=\frac{1}{2}P=OD$

又直角三角形 OFD ヨリ

$$OF^2 = OD^2 - DF^2 = \frac{1}{4}P^2 - Q^2$$

$$\therefore \quad OF = \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q^2}$$

$$\therefore \quad AF = \frac{1}{2}P - \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q^2}$$

$$BF = \frac{1}{2}P + \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q^2}$$

ツマリ本問題ハ代數學ニ於ケル

$$x+y = P$$

$$xy = Q^2$$

ナル聯立方程式從テ

$$z^2 - Pz + Q^2 = 0$$

ナル一元二次方程式ノ根ヲ求ムルコトニ對應スル者ナリ.

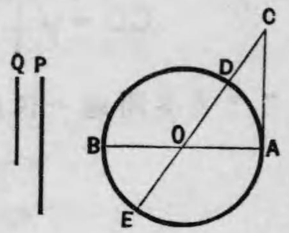
問題*

其和ガ不易ナル二ツノ線分ノ積ハ,各ガ相等シキトキ最大ナリ.

185. 作圖題

二ツノ線分ノ差(P)ト積(Q^2)トヲ知リテ各線分ヲ求ムルコト.

【作圖】 Pニ等シキ線分ABヲ直徑トシテ圓Oヲ畫キ,Aニ於ケル切線上ニ,Qニ等シクACヲ取リCトOトヲ通ル直線ヲ引キ,圓Oノ周トD, Eニ於テ交ラシメヨ.



CEトCDトガ所要ノ二ツノ線分ナリ.

【證明】 $CE - CD = DE$

$$= AB = P$$

$$CD \cdot CE = AC^2 = Q^2$$

而シテ本問題ハ常ニ成リ立ツ.

【注意】 次ノ如クニシテCD, CEノ長サヲ計算スルコトヲ得.

$$CE = CO + OA$$

$$CD = CO - OA$$

$$OA = \frac{1}{2}P$$

直角三角形OACヨリ

$$OC^2 = OA^2 + AC^2$$

$$\therefore \quad OC = \sqrt{\frac{1}{4}P^2 + Q^2}$$

$$\therefore \quad CE = \sqrt{\frac{1}{4}P^2 + Q^2} + \frac{1}{2}P$$

$$\therefore \quad CD = \sqrt{\frac{1}{4}P^2 + Q^2} - \frac{1}{2}P$$

ツマリ本問題ハ代數學ニ於ケル

$$x - y = P$$

$$xy = Q^2$$

ナル聯立方程式ノ正根,從テ

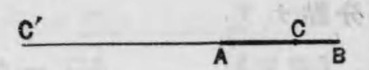
$$z^2 - Pz - Q^2 = 0$$

ナル一元二次方程式ノ根ノ絕對値ヲ求ムル問題ニ對應スル者ナリ.

186. 定義

定線分ヲ內分或ハ外分シテ,其一ツノ分ガ他ノ分ト全線分トノ比例中項トナル樣ニナスコトヲ,此線分ヲ**中末比ニ分ツ**トイフ.

例ヘバ右ノ圖ニ於テ



$$AC^2 = BC \cdot AB$$

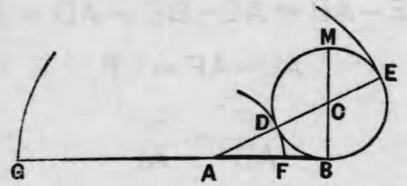
$$AC'^2 = BC' \cdot AB$$

ナルトキハ,Cハ線分ABヲ中末比ニ內分スル點ニシテC′ハABヲ中末比ニ外分スル點ナリ.

187. 作圖題

定線分(AB)ヲ中末比ニ分ツコト.

【作圖】



Bヨリ ABニ垂線ヲ引キ,其上ニ於テ ABノ半分ニ等シク BCヲ取リ,Cヲ中心トシ,BCヲ半徑トシテ圓ヲ畫ケ. AトCトヲ通ル直線ヲ引キ圓Cノ周トD,Eニ於テ交ラシメヨ.

線分AB上ニ於テ ADニ等シク AFヲ取リ,BAノ延長上ニ於テ AEニ等シク AGヲ取レ

ハ,點F ガ所要ノ內分點ニシテ,點G ハ所要ノ外分點ナリ.

【證明】　$AB^2 = AD \cdot AE$

$$\therefore \quad \frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AD}$$

然ルニ　$AD = AF$　(作圖)

$$\therefore \quad \frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF}$$

$$\therefore \quad \frac{AE-AB}{AB} = \frac{AB-AF}{AF}$$

然ルニ　$AB = 2 \cdot BC = DE$

$$\therefore \quad AE-AB = AE-DE = AD = AF$$

$$AB-AF = BF$$

$$\therefore \quad \frac{AF}{AB} = \frac{BF}{AF}$$

$$\therefore \quad AF^2 = BF \cdot AB$$

同樣ニ　$AG^2 = BG \cdot AB$

問題

$AF = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB$,　$AG = \frac{\sqrt{5}+1}{2} AB$　ナリ.

188. 圓(O)ニ內接スル正十邊形ヲ畫クコト.

【解析】　マヅ問題ハ解カレタル者ト假定シ,AB ヲ圓O ノ內接正十邊形ノ一邊ナリトセヨ.

A 及ビB ノ各トO トヲ結ビ付ケヨ. サスレバ ∠AOB ハ 360° ノ $\frac{1}{10}$ 卽チ 36° ナリ.

$$\therefore \quad \angle OBA = \angle OAB = \frac{1}{2}(180^\circ - 36^\circ) = 72^\circ$$

$$\therefore \quad \angle OBA = \angle OAB = 2 \cdot \angle AOB$$

ソコデ ∠OBA ノ二等分線ヲ引キ,OA トN ニ於テ交ラシメヨ. サスレバ

$$\angle ABN = \angle AOB$$

$$\therefore \quad \triangle ABN \backsim \triangle AOB$$

$$\therefore \quad \frac{AN}{AB} = \frac{AB}{AO}$$

$$\therefore \quad AB^2 = AN \cdot AO$$

然ルニ　$\angle OBN = \angle AOB$

$$\therefore \quad \angle BNA = 2.\angle AOB$$

$$\therefore \quad \angle BNA = \angle NAB$$

$$\therefore \quad AB = BN = NO$$

$$\therefore \quad NO^2 = AN.AO$$

因テ點Nハ OA ヲ中末比ニ分ツ内分點ナリ.

因テONヲ求メ(前節),之ヲ一邊トシテ内接正多角形ヲ作レバ之ガ所要ノ正十邊形ナリ.

問題

1. 圓ニ内接スル正五邊形ヲ畫クコト.
2. 直角ヲ五等分スルコト.
3. 圓ニ内接スル正十五邊形ヲ畫クコト.

問　題

1. 頂角又ハ一底角ガ相等シキ二ツノ二等邊三角形ハ互ニ相似ナリ.
2.* 一ツノ直角三角形ノ斜邊ト他ノ一邊トノ比ガ,他ノ一ツノ直角三角形ノ斜邊ト他ノ一邊トノ比ニ等シケレバ,此二ツノ直角三角形ハ互ニ相似ナリ.

3.* 二ツノ相似三角形ノ相似比ハ其外接圓又ハ内接圓ノ半徑ノ比ニ等シ.
4. 相似三角形ノ面積ハ,其内接圓若クハ其外接圓ノ半徑ノ平方ニ比例ス.
5. 邊數ガ同ジキ二ツノ正多角形ノ相似比ハ,其各ノ外接圓若クハ内接圓ノ半徑ノ比ニ等シ.
6* 邊數ガ同ジキ二ツノ正多角形ノ周ノ比ハ,其各ノ外接圓若クハ内接圓ノ半徑ノ比ニ等シ.
7. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ノ一端 Bヨリ AC ニ垂線 BD ヲ下ストキハ

$$BC^2 = 2.AC.CD$$

ナリ.

8. 梯形 ABCD ノ互ニ平行ナル二邊 AD, BC ニ平行ナル任意ノ直線ガ邊AB, CD 及ビ兩對角線 AC, BD ト交ル點ヲ夫々 E, F, G, H トスレバ, EH = FG ナリ.
9. 等角ナル二ツノ四邊形ニ於テ,其一組ノ

對應角ヲ夾ム二邊(對應スル二邊)ガ比例ヲナセバ,此二ツノ四邊形ハ互ニ相似ナリ.

10. 與ヘラレタル三角形ト等積ニシテ,頂角ガ與ヘラレタル角ニ等シキ二等邊三角形ヲ作ルコト. 特ニ與ヘラレタル三角形ト等積ナル正三角形ヲ作ルコト.

11.* 二ツノ相似多角形ヲ,其各對應邊ガ平行ナル樣ニ置クコトヲ得,而シテ此場合ニ其對應スル頂點ヲ通ル總テノ直線ハ皆平行ナルカ又ハ同一ノ點ニ會ス.

12. 相交ル二ツノ圓ノ共通弦上ノ一點Cヲ通リテ一ツノ直線ヲ引キ,一ツノ圓周トノ交點ヲA及ビDトシ,他ノ圓周トノ交點ヲB及ビEトスレバ $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{CD}$ ナリ.

13. △ABCノ底邊BCヲ之ニ等シク延長シテCDトシ,DトACノ中點Eトヲ結ビ付クル線分ノ延長トABトノ交點ヲFトスレバ, EF, EDノ比如何.

14. 三角形ノ外接圓ノ直徑ハ一ツノ頂點ヨ

リ之ニ對スル邊ヘ引ケル垂線及ビ其頂點ニ於テ出會フ二邊ノ第四比例項ナリ.

15. 互ニ外切スル二ツノ圓ノ外公切線ノ切點間ノ距離ハ,此二ツノ圓ノ直徑ノ比例中項ナリ.

16. 直角三角形ノ各邊ノ上ニ,夫等ノ邊ヲ對應邊トスル互ニ相似ナル圖形ヲ畫クトキハ,斜邊ノ上ニ畫キタル者ノ面積ハ其他ノ二邊ノ上ニ畫キタル者ノ面積ノ和ニ等シ.

17. 定點Oヨリ定圓周トPニ於テ交ル任意ノ直線ヲ引キ,其上ニ OP:OQ ガ與ヘラレタル比ニ等シキ點Qヲ取レバ,Qノ軌跡如何.

18. 二定點ヲ通リ定直線ニ切スル圓ヲ畫クコト.

第三章　圓周及ビ圓ノ面積

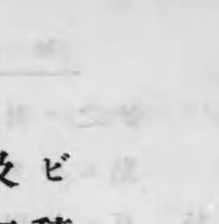
189. 定理

半徑 r ナル圓ニ内接スル正 n 邊形ノ一邊ノ長サノ半分ヲ l, 外接正 n 邊形ノ一邊ノ長サノ半分ヲ l' トスレバ

$$l' = \frac{r.l}{\sqrt{r^2-l^2}}$$

ナリ.

【證明】　AB ヲ圓O ノ内接正 n 邊形ノ一邊トシ, C ヲ其中點トセヨ. 弧 A′B′ ノ中點 D ニ於テ圓O ニ切線ヲ引キ, OA, OB ノ延長ト夫々A′, B′ ニ於テ交ラシムレバ A′B′ ハ圓O ノ外接正 n 邊



形ノ一邊ナリ.

サテ　$$\frac{A'D}{AC} = \frac{OD}{OC}$$

即チ　$$\frac{l'}{l} = \frac{r}{\sqrt{r^2-l^2}}$$

$$\therefore \quad l' = \frac{r.l}{\sqrt{r^2-l^2}}$$

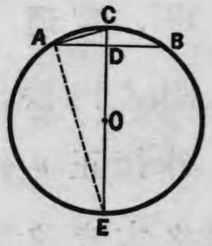
190. 定理

半徑 r ナル圓ノ内接正 n 邊形ノ一邊ノ長サノ半分ヲ l, 同ジ圓ノ内接正 $2n$ 邊形ノ一邊ノ長サノ半分ヲ l_1 トスレバ

$$l_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2r.(r-\sqrt{r^2-l^2})}$$

ナリ.

【證明】　AB ヲ圓O ノ内接正 n 邊形ノ一邊トセヨ. 弧 AB ノ中點 C トA トヲ結ビ付クル



線分 AC ハ圓 O ノ內接正 $2n$ 邊形ノ一邊ナリ.

ソコデ直徑 CE ヲ引キ,ソレト AB トノ交點即チ AB ノ中點ヲ D トスレバ

$$CA^2 = CE \cdot CD \quad (\text{第 267 頁問題 2})$$

$$\therefore \quad CA^2 = CE \cdot (CO - DO)$$

$$\therefore \quad CA^2 = 2r \cdot (r - \sqrt{r^2 - l^2})$$

然ルニ

$$CA = 2l_1$$

$$\therefore \quad l_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2r \cdot (r - \sqrt{r^2 - l^2})}$$

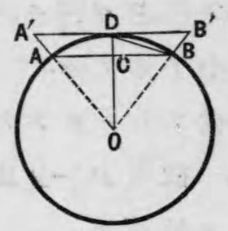
191. 公理

圓周ハ其圓ノ內接多角形ノ周ヨリハ大キク,其圓ノ外接多角形ノ周ヨリハ小ナリ.

192. 定理

圓ノ內接正 n 邊形ノ周ト,同ジ圓ノ外接正 n 邊形ノ周トハ,n ガ限リナク大キクナルトキ,何レモ限リナク圓周ニ近ヅク.

【證明】　右ノ圖(即チ第 189 節ノト同圖)ニ於テ AB, A′B′ ヲ夫々圓 O ノ內接正 n 邊形及ビ外接正 n 邊形ノ一邊トシ,又其周ヲ夫々 p_n 及ビ p_n' トシ,圓周ヲ p トセヨ.



サスレバ　　$p_n' > p > p_n$　　(前　節)

故ニ $p_n' - p$ 及ビ $p - p_n$ ハ何レモ $p_n' - p_n$ ヨリ小ナリ.

サテ

$$\frac{p_n'}{p_n} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OA'}{OD} \quad (\text{第 174 節})$$

$$\therefore \quad \frac{p_n' - p_n}{p_n} = \frac{OA' - OD}{OD}$$

$$\therefore \quad OD \cdot (p_n' - p_n) = p_n(OA' - OD)$$

$$\therefore \quad p_n' - p_n = \frac{p_n}{OD}(OA' - OD) \cdots\cdots (1)$$

然ルニ

$$OA' < OD + A'D$$

從テ

$$OA' - OD < A'D \cdots\cdots (2)$$

サテ n ガ限リナク大キクナルトキハ, AB,

A′B′ ハ何レモ限リナク小サクナリ,從テ A′B′ ノ半分ナル A′D モ限リナク小サクナル.

サスレバ(2)ニヨリテ OA′−OD モ亦限リナク小サクナル.

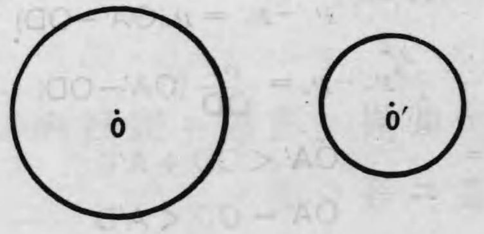
從テ(1)ニヨリテ $p_n'-p_n$ モ限リナク0ニ近ヅク. 故ニ $p_n'-p$ 及ビ $p-p_n$ ハ何レモ限リナク0ニ近ヅク.

故ニ p_n' 及ビ p_n ハ何レモ限リナク p ニ近ヅク. 卽チ p_n' 及ビ p_n ノ極限ハ何レモ p ナリ.

193. 定理

圓周ハ其半徑ニ比例ス.

【證明】



二ツノ圓 O, O′ ノ半徑ノ長サヲ夫々 r, r' トシ,其圓周ノ長サヲ夫々 p, p' トセヨ.

今此二ツノ圓ニ邊數ガ同ジキ外接正多角形ヲ畫ケバ,其邊數ノ如何ニ拘ハラズ,此等ノ多角形ノ周ノ比ハ $\frac{r}{r'}$ ニ等シ. (第174節)

故ニ多角形ノ邊數ガ限リナク多クナリタルトキノ極限卽チ二ツノ圓周ニ付テモ亦然リ.

$$\therefore \quad \frac{p}{p'}=\frac{r}{r'}$$

系 圓周ノ圓ノ直徑ニ對スル比ハ總テノ圓ニ付テ同一ナリ.

定義 圓周ノ圓ノ直徑ニ對スル比ヲ**圓周率**ト名ヅケ,之ヲ π ナル文字ニテ表ス.

從テ $p=2r.\pi=2\pi r$

卽チ圓周ハ直徑ニ圓周率ヲ掛ケタル者ニ等シ.

194. π ノ近似値ノ求メ方

圓ノ半徑ヲ長サノ單位トシタルトキ,半圓周ヲ表ス數ガ卽チ π ナリ.

サテ第189節及ビ第190節ノ公式ニ於テ, $r=1$ トオケバ

$$(1)\qquad l'=\frac{l}{\sqrt{1-l^2}}$$

$$(2)\qquad l_1=\frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-l^2}}$$

ヲ得. ソコデ邊ノ長サガ分カリ居ルカ,若クハ容易ニ求メラルル內接正 n 邊形ノ一邊ノ長サノ半分 l ヲ直接ニ計算スレバ,(1)ニヨリテ l' ヲ求メ得ベク,又(2)ニヨリテ l_1(卽チ邊數ガ $2n$ ナルトキノ l)ヲ求メ得ベキガユエニ,更ニ(1)ニヨリテ邊數ガ $2n$ ナルトキノ l' ヲ求メ得ベシ.

此ノ如ク此二式ヲ繰リ返シ適用シテ其邊數ガ次第ニ多キ內接及ビ外接正多角形ノ一邊ノ長サノ半分ヲ求ムルコトヲ得,從テ其周ノ半分ヲモ求ムルコトヲ得. 箇樣ニシテ得ル所ノ二組ノ數ガ π ヲ夾ム所ノ者,卽チ π ノ不足ナル近似値ト其過剩ナル近似値トナリ.

サテ圓ノ內接正六邊形ノ一邊ハ半徑ニ等シキガユエニ, $n=6$ ヨリ始メテ(1)及ビ(2)ニヨリ l 及ビ l' ノ値ヲ小數第六位マデ計算スレバ次ノ如シ.

$n=6$ ナルトキ $l=0.5$, $l'=0.577351$

$n=12$ ナルトキ $l=0.258819$, $l'=0.267949$

……　……

ソコデ次ノ如キ π ノ近似値ノ表ヲ得.

n	nl	nl'
6	3.00000	3.46410
12	3.10583	3.21539
24	3.13263	3.15966
48	3.13935	3.14609
96	3.14103	3.14271
192	3.14145	3.14187
384	3.14156	3.14166
768	3.14158	3.14161
1536	3.14159	3.14160

此表ニヨレバ,π ハ 3.14159 ト 3.1416 トノ間ニアルコトヲ知ル. 從テ上ノ二ツノ値ノ中何レヲπト看做スモ其誤差ハ小數第五位ノ1ニ及バズ.

今別ニπノ値ヲ小數第十六位迄求メタル者ヲ示セバ次ノ如シ.

$$\pi = 3.1415926535897932\cdots\cdots$$

實用上ニ於テハ通例πノ値トシテ

3.1416 又ハ $\frac{355}{113}$ $(=3.1415929\cdots\cdots)$

ヲ用フ.

極メテ大略ノ計算ヲナストキニハ,πヲ

3.14　又ハ　$\frac{22}{7}$ $(=3.142\cdots\cdots)$

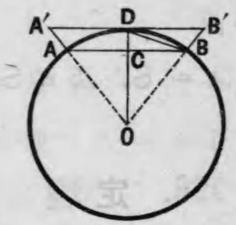
トシテ可ナリ.

195. 定理

圓ノ内接正 n 邊形ノ面積ト,同ジ圓ノ外接正 n 邊形ノ面積トハ,n ガ

限リナク大キクナルトキ,何レモ限リナク圓ノ面積ニ近寄ル.

【證明】　内接正 n 邊形ノ面積ト外接正 n 邊形ノ面積トヲ夫々 S_n, S_n' トシ,圓ノ面積ヲ S トセヨ. サスレバ



$$S_n < S < S_n'$$

從テ $S-S_n$ 及ビ $S_n'-S$ ハ何レモ $S_n'-S_n$ ヨリ小ナリ.

サテ上ノ圖(卽チ第189節ノト同圖)ニ於テ

$$\frac{S_n'}{S_n} = \frac{OA'^2}{OA^2} = \frac{OA'^2}{OD^2} \qquad (\text{第177節})$$

$$\therefore \quad \frac{S_n'-S_n}{S_n} = \frac{OA'^2-OD^2}{OD^2}$$

然ルニ　$OA'^2-OD^2 = A'D^2$

$$\therefore \quad \frac{S_n'-S_n}{S_n} = \frac{A'D^2}{OD^2}$$

$$\therefore \quad S_n'-S_n = S_n \times \frac{A'D^2}{OD^2}$$

サテ n ガ限リナク大キクナルトキハ A′D ノ

極限ハ0ナルヲ以テ，$S_n'-S_n$ ノ極限モ亦0ナリ．

從テ $S-S_n$ 及ビ $S_n'-S$ ノ極限ハ何レモ0ナリ．

故ニ S_n' 及ビ S_n ノ極限ハ何レモSナリ．

196. 定理

圓ノ面積ハ，其半徑ノ平方ニ圓周率ヲ掛ケタル者ニ等シ．

【證明】 圓ノ半徑ヲ r，其面積ヲ S，圓ノ外接正 n 邊形ノ周ヲ p_n'，其面積ヲ S_n' トセヨ．

サスレバ邊數 n ノ如何ニ拘ハラズ

$$S_n' = \frac{1}{2} p_n' . r \qquad \text{(第204頁問題3)}$$

然ルニ n ガ限リナク大キクナリタルトキノ p_n' ノ極限ハ圓周即チ $2\pi r$ ニシテ(第192節)，其時ノ S_n' ノ極限ハ圓ノ面積Sナリ(前節)．

$$\therefore \quad S = \frac{1}{2}(2\pi r) . r$$

$$= \pi r^2$$

系 1. 圓ノ面積ハ其半徑ノ平方ニ比例ス．

系 2. 扇形ノ面積ハ，其弧ノ長サト半徑トノ積ノ半分ニ等シ．

問題

1. 半徑3尺ナル圓ノ周及ビ面積ヲ計算セヨ．

   但シ $\pi = 3.1416$ トス．

2. 圓周ガ2尺ナル圓ノ面積ヲ計算セヨ．

   但シ $\pi = \frac{355}{113}$ トス．

3. 扇形ノ角ノ度數ヲ k，其半徑ヲ r トスレバ，其弧ノ長サハ $\frac{k\pi r}{180}$ ニシテ，其面積ハ $\frac{k\pi r^2}{360}$ ナリ．

問題

1. 半徑2尺ナル圓ニ於テ 60° ノ中心角ニ對スル弧ト，ソレヲ張ル弦トニテ生ズル

弓形ノ面積ヲ計算セヨ. 但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トス.

2. 二ツノ同心圓ノ周ノ間ニアル部分ノ面積ハ內圓ニ切スル外圓ノ弦ヲ直徑トスル圓ノ面積ニ等シ.

3. 一邊ガ a 寸ナル正八邊形ニ內接スル圓ノ半徑,外接スル圓ノ半徑及ビ其等ノ圓ノ各ノ面積ヲ求メヨ.

4. 半徑 r 尺ナル圓ニ內接スル正八邊形及ビ正十二邊形ノ一邊及ビ其等ノ多角形ノ各ノ面積ヲ計算セヨ.

5. 與ヘラレタル二ツノ圓ノ面積ノ和ニ等シキ面積ヲ有スル圓ヲ畫クコト.

6. 一ツノ圓ヲ,之ト同心ナル圓周ニテ等積ナル n 箇ノ部分ニ分ツコト.

雜題

1.* 二ツノ圓ノ公切線ハ此兩圓ノ中心ヲ結ビ付クル線分ヲ其半徑ノ比ニ內分又ハ外分ス.

定義 此內分點及ビ外分點ヲ夫々兩圓ノ相似ノ內心及ビ外心トイヒ,之ヲ通稱シテ相似ノ中心トイフ.

2. 二ツノ圓ノ相似ノ中心ヲ通ル直線ヨリ各圓周ガ截リ取ル弦ノ比ハ半徑ノ比ニ等シ.

3. △ABC ノ邊 BC, CA, AB ノ上ニ夫々 BD, CE, AF ヲ其邊ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シク取レバ, △DEF ト △ABC トノ面積ノ比如何.

4. 三角形ノ三中線ヲ邊トスル三角形ノ面積ノ原三角形ノ面積ニ對スル比如何.

5. 同ジ圓ニ內接スル正六邊形ノ一邊ト正三角形ノ一邊トノ上ニ畫キタル二ツノ正方形ノ面積ノ比如何.

6. △ABCノ角Aノ二等分線ガ邊BC及ビ此三角形ノ外接圓周ニ交ル點ヲ夫々D, Eトスレバ AD·AE＝AB·AC　ナリ.

若シ∠Aガ直角ナレバAD·AEハ△ABCノ面積ノ二倍ニ等シ.

7. Oヲ△ABC内ノ點トシ, ∠BOC, ∠COA, ∠AOBノ二等分線ガ夫々BC, CA, ABニ交ル點ヲP, Q, Rトスレバ

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=1 \quad ナリ.$$

8. △ABCノ角Aノ二等分線ガ底邊BCトDニ於テ交レバ

$$AB\cdot AC=AD^2+BD\cdot CD \quad ナリ.$$

9. 正三角形ABCノ外接圓ノ弧BCノ上ニ任意ノ一點Pヲ取レバ

$$PA^2=PB\cdot PC+BC^2 \quad ナリ.$$

10. △ABCノ底邊BC上ニ於テ BD:DC＝1:2 ナル點Dヲ取レバ

$$2\cdot AB^2+AC^2=6\cdot BD^2+3\cdot AD^2 \quad ナリ.$$

11. 等邊凸多角形内ノ任意ノ點ヨリ其各邊ヘ引ケル垂線ノ和ハ不易ナリ.

12. 正五邊形ニ於テ同一ノ頂點ヲ通ラザル二ツノ對角線ハ互ニ中末比ニ内分セラル.

13. 鋭角三角形ABCノ邊BCヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ,邊ABノ上ニAヨリ此圓ニ引キタル切線ノ長サニ等シキ線分ADヲ取リ,Dヨリ ABニ垂線ヲ引キ,邊ACノ延長トEニ於テ交ラシムルトキハ, △ABCト△ADEトハ等積ナリ.

14. 直角三角形ABCノ直角ノ頂點Aヨリ斜邊BCヘ垂線APヲ引キ,Pヨリ二邊AB, ACヘ夫々垂線PX, PYヲ引ケバ $\frac{BX}{CY}$ ハ $\left(\frac{AB}{AC}\right)^3$ ニ等シ.

15. 二ツ宛相交ル三ツノ圓アリ,其二ツ宛ニ共通ナル三ツノ弦(若クハ其延長)ハ同一ノ點ヲ通ル.

三ツノ圓ガ二ツ宛相切スルトキハ如何.

16. 弓形ACBニ於テ弦ABノ長サ16寸,弧ノ中點CヨリABヘノ垂線CDノ長サ

4寸ナルトキ,此弓形ガ屬スル圓ノ半徑ヲ求メヨ.

17. 面積154平方尺アル圓ノ周ニ等シキ周ヲ有スル正方形及ビ正六邊形ノ面積ヲ求メヨ. 但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トシテ各ヲ平方尺ノ小數第一位マデ求メヨ.

18. Pハ定圓周上ノ一定點ナリ. 弦PQ或ハ其延長ノ上ノ一點ヲQ′トシ,PQトPQ′トノ積ガ與ヘラレタル正方形ノ面積ニ等シキトキ,Q′ノ軌跡如何.

19. 二定直線ニ至ル距離ノ比ガ與ヘラレタル比ニ等シキ點ノ軌跡如何.

20. 二ツノ圓ヲ等角ニ見込ム點ノ軌跡如何.

註 一點ニ於テ一ツノ圓ヲ見込ム角トハ此點ヨリノ二ツノ切線ノナス角ノコトナリ.

21. 與ヘラレタル二ツノ正三角形ノ面積ノ和ニ等シキ面積ヲ有スル正三角形ヲ作ルコト.

22. 與ヘラレタル二ツノ矩形ノ面積ノ比ニ

等シキ比ヲ有スル二ツノ線分ヲ求ムルコト.

23. 一定點Oヨリ直線ヲ引キ定直線トP,定圓周トQニ於テ交ラシメ,OP:OQヲ與ヘラレタル比ニ等シカラシムルコト.

24. 定三角形ニ內接スル正方形ヲ作ルコト.

25. Oハ定點ニシテPハ定直線AB上ノ定點ナリ. 今Oヲ中心トシテ圓周ヲ畫キ,ABトM, Nニ於テ交ラシメ,PM, PNノ比例中項ガ與ヘラレタル長サニ等シクナル樣ニスルコト.

26. 定直線上ノ一點ト,其上ニアラズシテ且ツ其直線ノ一方ノ側ニ在ル二定點ノ各トヲ結ビ付クル二ツノ線分ノナス角ガ最大ナル樣ニスルコト.

27. 二定點ヲ通リ定圓ニ切スル圓ヲ畫クコト.

補充問題

第二編之部

1. 五邊形ノ各邊ノ延長ガ,一ツ置キノ邊ノ延長ト交リテ成ス星形ノ五ツノ頂點ニ於テノ角ノ和ハ2直角ニ等シ.

2. 三角形ノ一ツノ角ノ二等分線ガ,此角ニ對スル邊ト成ス二ツノ角ノ差ハ,三角形ノ他ノ二ツノ角ノ差ニ等シ.

3. 三角形ノ一ツノ外角ノ二等分線ガ對邊ト成ス角ハ,三角形ノ他ノ二角ノ差ノ半分ニ等シ.

4. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ任意ノ點P ヨリ BC ニ垂線ヲ引キ,二邊 AB, AC (若クハ其延長)ト夫々 Q, R ニ於テ交ラシムルトキハ,線分 PQ, PR ノ和ハ不易ナリ.

若シPガ BC ノ延長上ノ點ナラバ如

何.

5. A ヲ頂點トスル二等邊三角形 ABC ニ於テ,邊 AB 上ノ任意ノ一點ヲ D トシ,又 AC ノ延長上ニ一點 E ヲ取リ CE＝BD ナラシメ,D ト E トヲ結ビ付クレバ線分 DE ハ BC ニ依テ二等分セラレ,且ツ DE＞BC ナリ.

6. 二等邊三角形 ABC ノ頂點ヲ A トシ,邊 AB ヲ延長シ,其上ニ於テ AB ニ等シク BD ヲ取リ,又 AB ノ中點ヲ E トスレバ, CD ハ CE ノ二倍ニ等シ.

7. △ABC ニ於テ AC ノ中點ヲ D トシ, BC 上ニ一點 E ヲ取リテ $BE=\frac{1}{3}BC$ ナラシメ,二直線 BD, AE ノ交點ヲ F トスレバ $AF=3.EF$ ナリ.

8. 平行二定直線上ニ兩端ヲ有スルスベテノ線分ノ中點ハ一ツノ定直線上ニアリ.

9. 梯形ノ平行セザル二邊ノ中點,及ビ對角線ノ中點ハ一直線上ニアリ,而シテ平行セザル二邊ノ中點ヲ結ビ付クル線分ノ長サハ二ツノ底邊ノ和ノ半分ニ等シク, 對角線ノ中點ヲ結ビ付クル線分ノ長サハ二ツノ底邊ノ差ノ半分ニ等シ.

10. 三角形ノ一頂點ヨリ,他ノ二頂點ニ於ケル內角及ビ外角ノ二等分線ニ垂線ヲ下ストキハ,此四ツノ垂線ノ足ハ一直線上ニ在リ.

11. △ABC ノ各外角ノ二等分線ニテ成ル三角形ノ三ツノ角ハ夫々 $\frac{A}{2}+90°$, $\frac{B}{2}+90°$, $\frac{C}{2}+90°$ ニ等シ.

12. 四邊形ノ相隣レル角ノ二等分線ノ成ス角ハ他ノ二ツノ角ノ和ノ半分ニ等シ.

13. 四邊形ノ相對スル角ノ二等分線ノ成ス角ハ,他ノ二ツノ角ノ差ノ半分ニ等シ.

若シ相對スル角ガ相等シキトキハ,其二等分線ノ位置ノ關係如何.

14. 四邊形 ABCD ノ一組ノ對邊 BA, CD ノ延長ノ交點ヲ E, 他ノ二邊 AD, BC ノ延長ノ交點ヲ F トスレバ, ∠E, ∠F ノ二等分線ノ成ス角ハ ∠B ト ∠D トノ和ノ半

分ニ等シ.

15. △ABCノ各邊ノ上ニ其外側ニ正三角形BCD, CAE, ABFヲ畫ケバ線分AD, BE, CFハ相等シ.

16. 正方形ABCDノ角頂Aト邊BC上ノ任意ノ一點Eトヲ結ビ付ケ, ∠EADノ二等分線ヲ引キ邊CDトFニ於テ交ラシメ,CDヲDノ方へGマデ延長シDGヲBEニ等シカラシメ,AトGトヲ結ビ付クレバ△AFGハ二等邊三角形ナリ.

17. Aヲ直角トスル三角形ABCノ角Bノ二等分線トACトノ交點ヲDトシ,又Aヨリ斜邊BCヘ引キタル垂線トBDトノ交點ヲEトスレバAD＝AEナリ.

18. △ABCノ二邊AB, AC上ニ夫々正三角形APB, AQCヲ原三角形ノ外側ニ作リ,又邊BC上ニ正三角形BRCヲ原三角形ト同ジ側ニ作ルトキハ四邊形APRQハ平行四邊形ナリ.

19. 一定點ヲ通リテ與ヘラレタル二直線ト

等シキ角ヲナス直線ヲ引クコト.

20. 河岸ヲ距ル或點ニ家Aアリ,其川ヲ隔テテ對岸ヲ距ル或點ニ家Bアリ. 今A, B兩家間ヲ最短距離ニテ達シ得ル樣ニ川ニ橋ヲ架セントス,如何ナル點ヲ撰ブベキカ. 但シ川ノ兩岸ハ平行シ,橋ハ河岸ニ直角ニ架スルモノトス.

第三編之部

1. 梯形ノ底邊ヲa, bトシ,他ノ二邊ノ中點ヲ結ビ付クル線分ヲcトシ,高サヲhトスレバ其面積Sハ次ノ如シ.

$$S=\frac{1}{6}h(a+b+4c)$$

2. 梯形ノ面積ハ平行セザル一邊ト之ニ其對邊ノ中點ヨリ引キタル垂線トノ積ニ等シ.

3. 直角三角形ABCノ直角ヲ夾ム二邊AB, ACノ各ノ上ニ,夫々一ツ宛其端D, Eヲ有スル線分ヲ引クトキハ

$$CD^2+BE^2=DE^2+BC^2$$

ナリ.

4. 矩形ABCDノ平面上ノ任意ノ點ヲPトスレバ

$$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$$ ナリ.

5. 二ツノ同心圓APB, CQDノ直徑ヲ夫々AB, CD トシ,P及ビQヲ夫々圓周上ノ任意ノ點トスレバ

$$PC^2+PD^2=QA^2+QB^2$$ ナリ.

6. △ABCニ於テ $B=45°$ ナルトキ,邊ABノ中點ヲDトシ,頂點Cヨリ ABニ下シタル垂線ノ足ヲEトスレバ

$$AC^2=2\cdot(AD^2+DE^2)$$ ナリ.

7. △ABCハBCガ斜邊ナル直角二等邊三角形ナリトシ,Dヲ BC 上ノ任意ノ一點トスレバ

$$2\cdot AD^2=BD^2+DC^2$$ ナリ.

8. 平行四邊形ABCD及ビ一點Oヲ取レバ△OABト△OBCトノ面積ノ和或ハ差ハ△OBDノ面積ニ等シ.

9. △ABCノ各邊ノ上ニ其外側ニ正方形ABDE, BCFG, CAHKヲ作レバ,△AHE, △BDG, △CFK ハ等積ナリ.

10. △ABCノ邊BCヲD, Eニテ三等分スレバ

$$AB^2+AC^2=AD^2+AE^2+BE^2$$ ナリ.

11. △ABCノ各邊ノ上ニ其外側ニ正方形ABDE, BCFG, ACHKヲ畫キ,DトGト;FトHト;KトEトヲ結ビ付クレバ次ノ等式アリ.

$$BC^2+EK^2=2(AB^2+AC^2)$$
$$AB^2+FH^2=2(AC^2+BC^2)$$
$$AC^2+DG^2=2(BC^2+AB^2)$$

12. 前問題ニ於テ六邊形EDGFHKノ各邊ノ平方ノ和ハ, △ABCノ各邊ノ平方ノ和ノ四倍ニ等シ.

13. 四邊形ノ一組ノ相對スル邊ノ延長ノ交點ヲ頂點トシ,兩對角線ノ中點ヲ結ビ付クル線分ヲ底邊トスル三角形ノ面積ハ,原四邊形ノ面積ノ四分ノ一ニ等シ.

14. 四邊形ノ面積ヲ其一頂點ヲ通ル二ツノ直線ニテ三等分スルコト.

15. 四邊形ノ面積ヲ其一邊ノ上ノ定點ヲ通ル直線ニテ二等分スルコト.

第四編之部

1. 一定點ヲ圓周上ノ點ニ結ビ付クル線分ノ中ニテ,中心ヲ通ルモノハ最大ナリ,又其延長ガ中心ヲ通ルモノハ最小ナリ.

2. 定角 XOY ノ二等分線上ノ定點ヲ P トス. 二點 O, P ヲ通ル任意ノ圓周ガ角ノ二邊 OX, OY ト交ル點ヲ夫々 A, B トスレバ,線分 OA, OB ノ和ハ不易ナリ.

3. 內接四邊形 ABCD ノ二邊 AB, DC ノ延長ノ交點ヲ E トシ, AD, BC ノ延長ノ交點ヲ F トシ,二ツノ三角形 BCE, CDF ニ外接スル二ツノ圓周ノ交點ヲ G トスレバ,三點 E, G, F ハ一直線上ニ在リ.

4. △ABC ノ內接圓 O ト角 A ノ內ニアル傍接圓 O′ トヲ畫キ,三邊 BC, CA, AB トノ切點ヲ夫々 D, E, F 及ビ G, H, I トシ,此三邊ノ長サヲ夫々 a, b, c ニテ表シ,且

ツ三角形ノ周ノ半分ヲ p ニテ表セバ次ノ關係アリ.

$AE=AF=p-a$　　$AH=AI=p$

$BD=BF=p-b$　　$BG=BI=p-c$

$CD=CE=p-c$　　$CG=BH=p-b$

5. 三角形ノ三邊ノ上ニ,此三角形ノ外側ニ作リタル各正三角形ニ外接スル圓ハ同一ノ點ヲ通ル.

6. A ニ於テ互ニ外切スル二ツノ圓ノ外公切線ヲ引キ,其切點ヲ B, C トスレバ, ∠BAC ハ直角ナリ.

7. 三角形ノ三ツノ頂點ヲ中心トシ,其內接圓ノ切點マデノ距離ヲ半徑トスル三ツノ圓ハ二ツ宛互ニ外切ス.

　三角形ノ傍接圓ノ切點ニ就キテハ如何.

8. 內接四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トシ,三角形 AOB ノ外接圓ヲ畫キ,點 O ニ於テ此圓ニ切線ヲ引ケバ,此切線ハ此四邊形ノ一ツノ邊ニ平行ナリ.

9. A, B, C ハ圓周上ノ三點ニシテ, D, E ハ夫々弧 AB, AC ノ中點ナリ,直線 DE ガ AB, AC ト交ル點ヲ夫々 M, N トスレバ, △AMN ハ二等邊三角形ナリ.

10. 三角形ノ一ツノ頂點ヲ通ル其外接圓ノ直徑ハ,他ノ二頂點ヨリ夫々其對邊ニ引ケル垂線ノ足ヲ通ル直線ニ垂直ナリ.

11. 內接四邊形 ABCD ノ相對スル二邊 AB, DC ノ延長ノ交點ヲ E トシ,他ノ二邊ノ延長ノ交點ヲ F トスレバ,∠E, ∠F ノ二等分線ハ互ニ直交ス.

又此等ノ二等分線ガ四邊形ノ四ツノ邊ト交ル四ツノ點ハ一ツノ菱形ノ頂點ヲ成ス.

12. 三角形ノ垂心ハ其各頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ノ足ヲ各頂點トスル三角形(是ヲ原三角形ノ**垂足三角形**トイフ)ノ內心ナリ.

13. △ABC ノ三ツノ角ノ二等分線ガ其外接圓周ト交ル點ヲ夫々 A′, B′, C′ トスレバ, △ABC ノ內心ハ △A′B′C′ ノ垂心ナリ.

14. 三角形ノ一ツノ角ノ二等分線ハ,其角ノ頂點ヨリ其對邊ヘ引ケル垂線ト,同ジ點ヲ通ル外接圓ノ直徑トノ成ス角ヲ二等分ス.

15. 任意ノ三角形ニ於テ,次ノ九ツノ點ヲ通リテ一ツノ圓周ヲ畫クコトヲ得.

(第一) 各邊ノ中點.

(第二) 各頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ノ足.

(第三) 垂心ト各頂點トヲ結ビ付クル線分ノ中點.

定義 此圓ヲ三角形ノ**九點圓**トイフ.

16. AB ハ圓ノ直徑, CD ハ AB ニ平行ナル弦ニシテ, P ハ AB 上ノ任意ノ一點ナリトスレバ

$$CP^2+DP^2=AP^2+BP^2$$

ナリ.

17. △ABC ノ邊 BC, CA, AB ヲ夫々 a, b, c トシ,內接圓ノ半徑ヲ r トシ, ∠A, ∠B, ∠C ノ內ニアル傍接圓ノ半徑ヲ夫々 r_1,

r_2, r_3 トシ, $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ トスレバ

$$sr=(s-a)r_1=(s-b)r_2=(s-c)r_3$$

ナリ.

18. 定圓周上ノ任意ノ點ヨリ之ニ引キタル切線上ニ於テ,切點ヨリ測リテ與ヘラレタル長サニ等シキ線分ヲ截リ取ルトキ,切點ナラザル端ノ軌跡ヲ求メヨ.

19. 一定點ヲ定圓周上ノ任意ノ點ニ結ビ付クル線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

20. 直交スル二定直線上ニ兩端ヲ有スル定長ナル線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

21. 定長線分 PQ ハ,其兩端 P, Q ガ,AB ヲ弦トスル與ヘラレタル弓形ノ弧ノ上ニ在ル樣ニ動クトキ,AP ト BQ トノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

22. 定圓外ノ一定點P ヨリ引ケル二ツノ切線ノ切點ヲA及ビBトシ,Aヲ通ル任意ノ弦 AQ ニ平行ナル直線 PR ト直線 QB トノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

23. 一ツノ圓ノ定マレル直徑 AB ノ一端A

ヲ通ル任意ノ弦 AC ノ他ノ端C ニ於テ切線ヲ引キ,Bヨリ之ニ垂線 BD ヲ引クトキ, BD, AC ノ延長ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

24. 弧 AB ノ一端A ヲ通ル任意ノ弦 AC ノ延長上ニ CB ニ等シク CM ヲ取ルトキ,點Mノ軌跡ヲ求メヨ.

又 CA 若クハ其Aノ方ヘノ延長上ニ CB ニ等シク CM ヲ取ルトキ,點Mノ軌跡ヲ求メヨ.

25. 相交ル二ツノ定直線マデノ距離ノ和ガ與ヘラレタル長サニ等シカルベキ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

又其差ガ與ヘラルルトキハ如何.

26. 定線分 AB 上ノ任意ノ點ヲPトシ, AP, BP ノ上ニ其各ヲ底邊トスル二ツノ正三角形ヲ其同ジ側ニ畫キ,其頂點ヲ結ビ付クル線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

27. 二定點ヨリノ距離ノ平方ノ差ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

28. 四定點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

29. 次ノ各條件ニ適スル圓ヲ畫クコト.

(1) 二定點ヲ通リ,定直線若クハ定圓周上ニ中心ヲ有スルコト.

(2) 一定點ヲ通リ,定直線若クハ定圓周ニ切シ,與ヘラレタル半徑ヲ有スルコト.

(3) 二定直線,若クハ一定直線ト一定圓周トニ切シ,與ヘラレタル半徑ヲ有スルコト.

(4) 一定直線若クハ一定圓周上ニ中心ヲ有シ,他ノ一定直線若クハ定圓周ニ切シテ,與ヘラレタル半徑ヲ有スルコト.

(5) 一定直線若クハ一定圓周上ノ定點ニ於テ之ニ切シ,且ツ一定點ヲ通ルコト.

(6) 定直線上ノ定點ニ於テ之ニ切シ,且ツ他ノ定直線又ハ定圓周ニ切スルコト.

30. 一定點ヲ通リ一定圓ニ割線ヲ引キ,此割線上ニ生ズル弦ノ長サヲシテ,與ヘラレタル長サニ等シカラシムルコト.

31. 二ツノ定圓ニ割線ヲ引キテ,此割線ガ各圓ニ依テ截リ取ラルル弦ノ長サヲシテ,夫々與ヘラレタル二ツノ線分ニ等シカラシムルコト.

32. 互ニ內切スル二ツノ圓ノ切點ヲ通リテ弦ヲ引キ,兩圓周ノ間ニ夾マルル部分ガ與ヘラレタル長サニ等シクナル樣ニスルコト.

33. 底邊,頂角及ビ他ノ二邊ノ和ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

34. 底邊,頂角及ビ他ノ二邊ノ差ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

35. B, Cハ定圓周上ノ二定點ナリ,今圓周上ニ一點Aヲ取リ,弦AB及ACヲ二邊トスル平行四邊形ABDCヲ作リ,對角線ADヲシテ最大或ハ最小ナラシムルコト.

第五編之部

1. 二ツノ圓 ABC, A′B′C′ ニ於テ二ツノ弓形 ABC, A′B′C′ ノ含ム角ガ相等シキトキハ,二ツノ圓ノ半徑ノ比ハ其弦 AC, A′C′ ノ比ニ等シ.

2. D ヲ △ABC ノ底邊 BC (若クハ其延長)上ノ任意ノ點トスレバ,二ツノ三角形 ABD, ACD ノ外接圓ノ直徑ノ比ハ二邊ノ比ニ等シ.

3. 三角形ノ各頂點ヨリ之ニ對スル邊ニ引キタル三ツノ線分ガ同一ノ點ヲ通リ,此點ニ於テ分タルル各線分ノ二ツノ分ノ積ガ相等シキトキハ,此交點ハ三角形ノ垂心ナリ.

4. 多角形ノ各頂點ヲ一ツノ點ニ結ビ付ケタル線分ヲ,同ジ比ニ內分若クハ外分シ,其各分點ト其次ノ分點トヲ結ビ付ケテ得ル所ノ多角形ハ原多角形ニ相似ナリ.

5. 定圓周上ノ定マレル弧 AB ノ中點ヲ C トシ,其共軛弧ノ上ノ任意ノ點ヲ P トスレバ $\frac{AP+BP}{CP}$ ハ不易ナリ.

6. 正方形 ABCD ニ外接スル圓周ニ於テ,弧 AD 上ノ任意ノ一點ヲ P トスレバ, $\frac{PC+PA}{PB}$ 及ビ $\frac{PC-PA}{PD}$ ハ何レモ不易ナリ.

7. 圓周上ノ一點 A ニ於ケル切線ヲ X トシ,任意ノ弦 BC ノ兩端ヨリ X ニ垂線 BB′, CC′ ヲ下シ,又 A ヨリ BC ニ垂線 AA′ ヲ下セバ

$$AA'^2 = BB' \cdot CC'$$ ナリ.

8. 圓外ノ一點 P ヨリ切線 PA, PC 及ビ割線 PBD ヲ引キ,圓周ト夫々 A, C, B, D ニ於テ出會ハシメ,內接四邊形 ABCD ヲ作レバ,此四邊形ノ相對スル邊ノ積ハ相等シ.

9. △ABC ノ邊 AB ノ中點 D ヨリ半直線ヲ引キ, AC ト E ニ於テ, BC ノ延長ト F ニ於テ交ラシムレバ

$$AE : EC = BF : CF$$ ナリ.

10. 相等シカラザル二ツノ圓ニ切スル第三ノ圓ノ切點ヲ通ル直線ハ恒ニ初メノ二ツノ圓ノ相似ノ中心(內心又ハ外心)ヲ通ル.

相等シキ二ツノ圓ニ就テハ如何.

11. 二ツノ圓ノ相似ノ中心ヲOトス. Oヨリ一ツノ割線ヲ引キ第一ノ圓周トA, A′ニ於テ交リ,第二ノ圓周トB, B′ニ於テ交ラシムレバ, OA·OB′ハOA′·OBニ等シク,且ツ此積ハ何レノ割線ニ就テモ總テ互ニ相等シ. 但シAトBト, A′トB′トハ各相對應スルモノトス.

12. 圓ニ內接スル四邊形ノ相對スル二邊ノ積ノ和ハ其對角線ノ積ニ等シ.

13. 四邊形ノ相對スル二邊ノ積ノ和ガ其對角線ノ積ニ等シキトキハ,此四邊形ハ圓ニ內接シ得ベキ四邊形ナリ.

14. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ナルトキハ,相對スル邊ノ積ノ和ハ四邊形ノ面積ノ二倍ニ等シ.

15. 二ツノ線分ノ積ガ一定ナルトキ,其和ノ最小ナルモノハ如何.

16. 一定點Oヨリ引キタル二ツノ線分OP, OQノ比ガ一定ニシテ,且ツ此二ツノ線分ガ與ヘラレタル角ヲナストキ,點Pノ軌跡ガ直線ナレバ點Qノ軌跡如何.

又點Pノ軌跡ガ圓周ナラバ點Qノ軌跡如何.

17. △ABCノ底邊BCニ平行ナル一ツノ直線ガ△ABCノ邊トナス梯形ノ對角線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

18. 定マレル三角形ニ內接スル矩形ノ對角線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

19. 定直線外ノ一定點Oト此直線上ノ總テノ點トヲ結ビ付クル線分OA(若クハ其延長)上ニ一點Mヲ取リ OA·OM＝k^2 ナラシムルトキ,點Mノ軌跡ヲ求メヨ. 但シkハ與ヘラレタル長サナリ.

20. 定圓周上ノ定點Oヲ通ル總テノ弦OA(若クハ其延長)上ニ一點Mヲ取リ

$OA \cdot OM = k^2$ ナラシムルトキ,點Mノ軌跡ヲ求メヨ. 但シkハ與ヘラレタル長サナリ.

21. 二ツノ圓周ノ交點ノ一ツAヲ通リテ任意ノ直線ヲ引キ各圓ノ周ト夫々C,Dニ於テ終ラシムルトキ,線分CDヲ與ヘラレタル比ニ分ツ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

22. ABハ定圓ノ定直徑ニシテ,Cハ此圓周上ノ任意ノ點ナリ,BCヲCノ方へ之ト等長ニDマデ延長シ圓ノ中心OトDトヲ結ビ付クルトキ,DOトCAトノ交點Mノ軌跡ヲ求メヨ.

23. 與ヘラレタル線分ニ等シキ各邊ヲ有スル正五邊形ヲ畫クコト.

24. 定マレル三角形ノ一邊上ニ一點ヲ求メ,之ヨリ他ノ二邊ニ平行ナル二直線ヲ引キテ生ズル平行四邊形ノ面積ヲ最大ナラシムルコト.

25. 頂角,高サ,及ビ頂點ヨリノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

26. △ABCニ於テ邊BC上ニ一點Dヲ求メ

$$AD^2 = BD \cdot DC$$

ナラシムルコト.

27. 與ヘラレタル三角形ヲ,其一邊ニ平行ナル直線ニテ二ツノ部分ニ分チ,其面積ノ比ヲ與ヘラレタル比ニ等シクスルコト.

28. 與ヘラレタル三角形ヲ,其底邊ニ垂直ナル直線ニヨリテ等積ナル二ツノ部分ニ分ツコト.

29. 定マレル三角形ニ,與ヘラレタル矩形ト相似ナル矩形ヲ內容セシムルコト. 但シ此矩形ノ一邊ハ定三角形ノ一邊ノ上ニアル者トス.

30. 二定直線ニ切シ,其何レノ上ニモアラザル一定點ヲ通ル圓ヲ畫クコト.

全書雜題

1. △ABCノ二頂點A, Bヨリ其對邊ニ夫々垂線AD, BE ヲ引キ, Bヨリ直線DE ヘ垂線BF ヲ引ケバ ∠FBD＝∠EBAナリ.
2. 正三角形內ノ任意ノ一點ヨリ三邊マデノ距離ノ和ハ不易ナリ.

   若シ正三角形ノ外ニアル點ヨリナラバ如何.
3. 二ツノ中線ガ相等シキ三角形ハ二等邊三角形ナリ.
4. 三角形ノ頂角ノ二等分線ハ,一般ニハ頂點ヲ通ル中線ト頂點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線トノ間ニアリ.
5. 三角形ノ大ナル角ノ頂點ヨリノ高サハ小ナル角ノ頂點ヨリノ高サヨリモ小ナリ.
6. 三角形ノ大ナル角ノ頂點ヨリノ中線ノ長サハ小ナル角ノ頂點ヨリノ中線ノ長

サヨリモ小ナリ.

7. 對角線ノ數ガ90アル多角形ノ邊數ヲ求メヨ.
8. 三角形ノ外心ヨリ一ツノ邊マデノ距離ハ其邊ニ對スル頂點ト垂心トノ距離ノ半分ニ等シ.
9. 三角形ノ重心ヲ通ル直線ニ對シ,其直線ノ同ジ側ニアル二ツノ頂點ヨリ其直線ヘノ距離ノ和ハ,反對ノ側ニアル一ツノ頂點ヨリノ距離ニ等シ.
10. XX′, YY′ ハOニ於テ互ニ直交スル二ツノ定直線ニシテAハ一定點ナリ. Aヲ通リ互ニ直交スル二直線ヲ引キ, XX′, YY′ ト夫々B, Cニ於テ交ラシムルトキ, 線分BCノ中點Mハ定マレル直線上ニ在リ.
11. 直角ニ交ル二直線X, Yノ上ニ夫々相對スル二頂點ヲ有スル正方形ノ他ノ二ツノ頂點ハ常ニ二ツノ定直線ノ上ニアリ.
12. △ABCノ二邊AB, ACノ上ニ其外側ニ

正方形ABDE, ACFGヲ畫キ,GトEトヲ結ビ付クレバ線分EGハ△ABCノAヨリノ中線ノ二倍ニ等シ.

又BC, EGノ中點及ビ二ツノ正方形ノ對角線ノ交點ハ一ツノ正方形ノ四ツノ頂點ヲ成ス.

13. 三角形ノ各頂點ヨリ此三角形ヲ截ラザル直線マデノ距離ノ和ハ,其重心ヨリ其直線マデノ距離ノ三倍ニ等シ.

直線ガ三角形ヲ截ルトキハ如何.

又特ニ直線ガ重心ヲ通ル場合ヲ吟味シ,其結果ガ問題9ノ結果ト一致スルコトヲ示セ.

14. 三角形ノ外心,垂心,及ビ重心ハ同一直線上ニ在リ,而シテ垂心ト重心トノ距離ハ外心ト重心トノ距離ノ二倍ニ等シ.

15. 互ニ內切スル二ツノ圓ノ切點ヲAトシ,Bニ於テ內部ノ圓ニ切スル外部ノ圓ノ弦CDヲ作レバ,ABハ∠CADヲ二等分ス.

16. 定圓周上ノ一定點ヲAトシ,定直線上ノ一定點ヲBトス. A, Bヲ通リテ任意ノ圓ヲ畫キ,此定圓及ビ定直線ト再ビ交ル點ヲ夫々C, Dトスレバ,直線CDハ常ニ一ツノ定點ヲ通ル.

17. 底邊ト頂角ノ大サトガ一定ナル三角形ニ於テ底邊ノ兩端ヨリ夫々其對邊ヘ引ケル垂線ノ足ヲ結ビ付クル線分ノ長サハ不易ナリ.

18. 弓形ノ弧ト弦トニ切スル圓ノ二ツノ切點ヲ通ル直線ハ恒ニ定點ヲ通ル.

19. 或點ヨリ三角形ノ三邊又ハ其延長ニ下セル三ツノ垂線ノ足ガ同一直線上ニアレバ,此點ハ此三角形ノ外接圓周上ニ在リ.

20. 四邊形ABCDノ相對スル二邊AB, DCノ延長ノ交點ヲEトシ,他ノ二邊ノ延長ノ交點ヲFトスレバ,四ツノ三角形BCE, CDF, ADE, ABFノ外接圓周ハ同一ノ點ヲ通ル.

21. 三角形ノ重心ヨリ各頂點ニ至ル距離ノ平方ノ和ノ三倍ハ各邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ.

22. GヲΔABCノ重心,Pヲ任意ノ一點トスレバ

$$AP^2+BP^2+CP^2 = AG^2+BG^2+CG^2+3\cdot GP^2$$

ナリ.

23. 鋭角三角形 ABC ノ二頂點B,Cヨリ其對邊ニ引ケル垂線ヲ夫々 BP, CQ トスレバ

$$BC^2 = AB\cdot BQ+AC\cdot CP$$ ナリ.

∠B 又ハ ∠C ガ鈍角ナレバ如何.

24. 二ツノ同心圓アリ,內部ノ圓周上ノ一定點Pヲ通リ此圓ニ任意ノ弦 PA ヲ引キ,又 PA ニ垂直ニ外部ノ圓ノ弦 BPC ヲ引クトキハ, $PA^2+PB^2+PC^2$ 及ビ $BC^2+CA^2+AB^2$ ハ何レモ不易ナリ.

又 ΔABC ノ重心ヲGトスレバ,線分 GP ノ長サモ亦不易ナリ.

25. 圓周上ノ一點Aヨリ直徑 AB 及ビ切線 AC ヲ引キ,切線上ノ一點Cヨリ第二ノ切線ヲ引キ,其切點ヲDトシ,DヨリABニ垂線 DE ヲ下セバ,DE ハ BC ニ依リテ二等分セラル.

又Bヨリ切線 BF ヲ引キ CD ノ延長トFニ交ラシムレバ,AF, BC, DE ハ一點ニ會ス.

26. 圓周上ノ一點ヨリ之ニ內接スル四邊形ノ各組ノ相對スル邊ヘ引ケル垂線ノ積ハ互ニ相等シ.

逆ニ,一ツノ點ヨリ內接四邊形ノ各組ノ相對スル邊ニ引ケル垂線ノ積ガ互ニ相等シキトキハ此點ハ此圓周上ニアリ.

定義 四點A, B, C, D ガ一直線上ニアリテ

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$

ナルトキハ此四點ハ調和列點ヲナストイヒ,之ヲ調和列點(A, B, C, D)ト記ス

27. 調和列點(A, B, C, D)アリテ,線分 AB ノ

中點ヲOトスレバ $OA^2 = OC \cdot OD$ ナリ.

28. 調和列點(A, B, C, D)アリ,直線AB外ノ一點ヲMトシ,Bヲ通リMAニ平行ナル直線ヲ引キ,MC, MD(若クハ其延長)ト夫々E, Fニ於テ會セシムルトキハ

$$BE = BF$$ ナリ.

29. 梯形ノ兩底邊ノ中點,對角線ノ交點及ビ平行セザル二邊ノ延長ノ交點ハ一直線上ニ在リ.

又此等ノ四點ハ調和列點ヲナス.

30. 圓Cノ外ニアル一點Oヨリ二ツノ切線OA, OBヲ引キ,次ニOヨリ割線ヲ引キテ圓周トP, Qニ於テ,弦ABトRニ於テ交ラシム. 而シテABトOCトノ交點ヲNトスレバNRハ∠PNQヲ二等分ス.

31. 一直線ガ△ABCノ三邊BC, CA, AB(若クハ其延長)ヲ夫々X, Y, Zナル三點ニテ截ルトキハ

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1$$ ナリ.

逆ニX, Y, Zハ△ABCノ邊BC, CA, AB(若クハ其延長)上ニアル三點ニシテ(此中奇數個ハ恒ニ延長上ニアリトス)

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1$$

ナルトキハ,此三點ハ同一直線上ニ在リ.

32. △ABCノ各頂點ヨリ任意ノ一點Oマデ引キタル線分(若クハ其延長)ガ對邊BC, CA, ABトノ交點ヲ夫々X, Y, Zトスレバ

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1$$ ナリ.

逆ニ,X, Y, Zハ△ABCノ邊BC, CA, AB(若クハ其延長)上ニアル三點ニシテ(此中奇數個ハ恒ニ邊上ニアリトス)

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1$$

ナルトキハ,三直線AX, BY, CZハ一點ニ會ス.

33. 三角形ノ各頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ガ對邊ト交ル三點ハ同一直線上ニ在

リ.

34. △ABCノ內接圓ガ三邊 BC, CA, AB ニ切スル點ヲ夫々 D, E, F トスレバ,三ツノ直線 AD, BE, CF ハ一點ニ會ス.

35. 長サノ單位ニ等シキ半徑ヲ有スル圓ノ內接正十二邊形ト外接正十二邊形トノ一邊ノ長サヲ何レモ小數第二位マデ計算セヨ.

36. 正三角形ノ一ツノ頂點ハ定點Pニアリ,第二ノ頂點ハ定直線X上ニアルトキ,第三ノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ.

37. 定圓內ノ定點Aヲ通リテ此圓ニ任意ノ弦 BC ヲ引キ,Aヲ通リ夫々B, Cニ於テ此定圓ニ切スル二ツノ圓ヲ畫クトキ,此二ツノ圓ノ第二ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ.

38. ABCD ハ平行四邊形ニシテ,AB ノ位置及ビ大サハ一定ナリトシ,BC ハ其長サガ與ヘラレタルモノトス. ∠C 及ビ ∠D ノ二等分線ノ交點Mノ軌跡ヲ求メヨ.

39. 相交ル二ツノ定直線ニ下ス垂線ノ足ノ間ノ距離ガ與ヘラレタル線分ニ等シカルベキ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

40. 三定點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

41. 二ツノ定圓ニ引ケル切線ノ長サガ相等シカルベキ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

42. 正三角形ニ於テ,其二頂點ニ至ル距離ノ和ガ第三ノ頂點ニ至ル距離ニ等シキ樣ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

43. 定直線上ニ於テ,其上ニアラザル二定點ヨリノ距離ノ和ガ最小ナルベキ點ヲ求メヨ.

44. 定直線上ニ於テ,其上ニアラザル二定點ヨリノ距離ノ差ガ最大ナルベキ點ヲ求メヨ. 但シ此二定點ハ此定直線ヨリ等距離ナラザルモノトス.

45. 銳角 BAC 內ノ一定點Oヲ一ツノ頂點トシ,他ノ二頂點ガ一ツ宛此角ノ二邊上ニアル三角形ノ中,周圍ノ最小ナルモノ

ヲ求ムルコト.

46. 頂角,周圍及ビ一ツノ高サヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

47. 次ノモノヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

(1) 二邊ト一中線

(2) 一邊ト二中線

(3) 三中線

48. 三角形ノ頂角ノ二等分線ノ長サ,其頂點ヨリノ中線,及ビ其頂點ヨリノ高サヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

49. 定線分ヲ二ツノ分ニ分チ,其各分ノ平方ノ和(又ハ差)ヲシテ與ヘラレタル面積 k^2 ニ等シカラシムルコト.

50. 一定點ヲ通リ一定直線及ビ定圓ニ切スル圓ヲ畫クコト.

明治四十四年十二月十八日印刷
明治四十四年十二月廿一日發行
明治四十五年 二 月二十日訂正再版印刷
明治四十五年 二 月廿三日訂正再版發行
大正二年十一月十八日訂正三版印刷
大正二年十一月廿一日訂正三版發行
大正六年十月廿六日訂正四版印刷
大正六年十月廿九日訂正四版發行

《中學教科平面幾何》

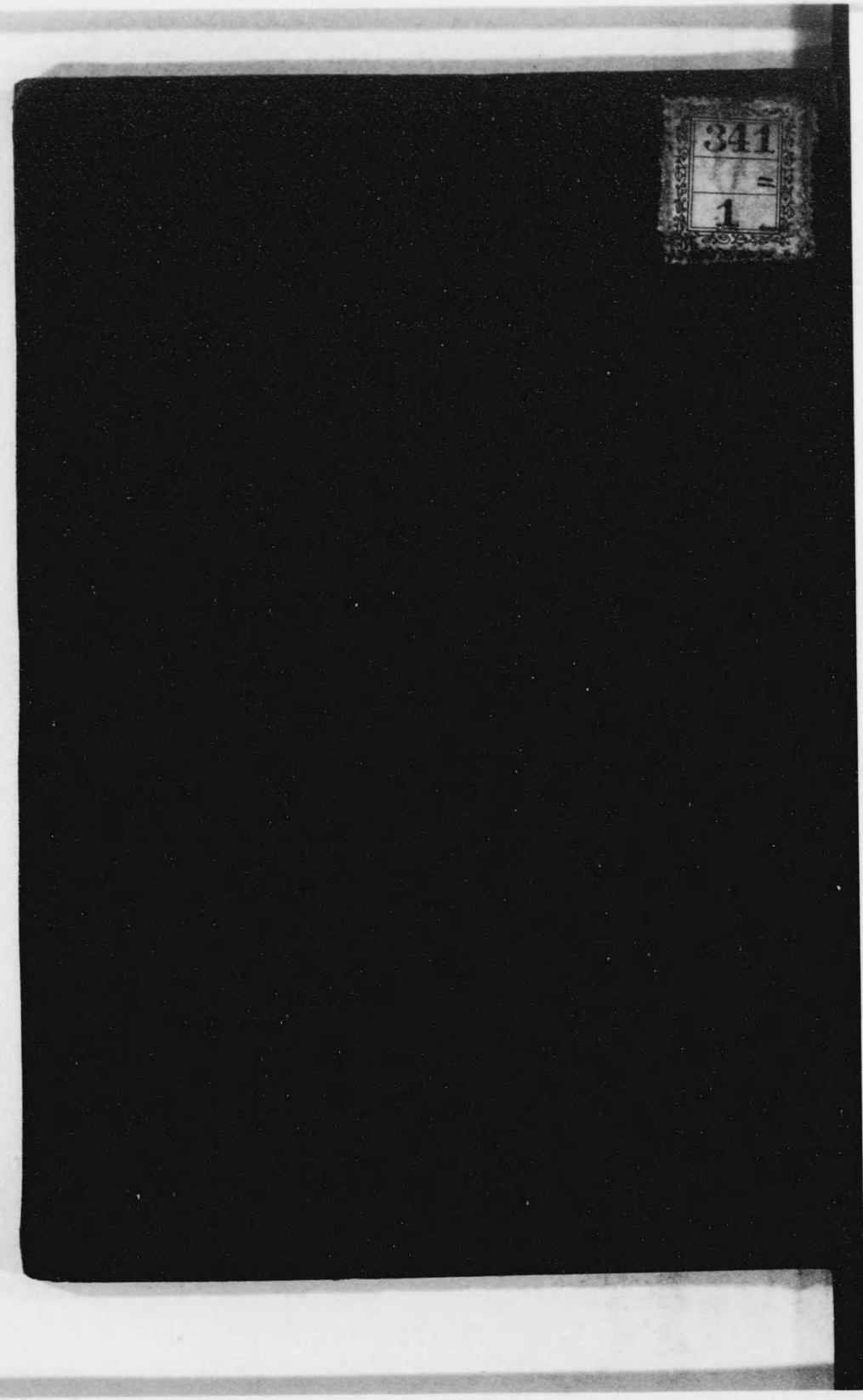
定價金八拾錢

複製 不許 此所ニ編者ノ證印ナキモノハ偽版ト認ム

故ニ本書は偽版なり

編者 寺尾壽
編者 吉田好九郎
發行兼印刷者 東京市神田區裏神保町九番地 合資會社 冨山房
代表者 同所合資會社冨山房社長 坂本嘉治馬
印刷所 東京市京橋區築地二丁目十七番地 株式會社東京築地活版製造所

發行所 東京市神田區裏神保町 合資會社 冨山房
(電話 長本局一〇三六番 本局四一三〇番) (振替貯金口座東京五〇一番) 電報略號(ヤマフ)



終