Henri Poincare 著
葉蘊理 譯

漢譯世界名著

科學與假設

商務印書館發行

中華民國廿一年十一月初版
中華民國廿三年十一月再版

(52771)

漢譯世界名著 科學與假設一冊
La Science et l'Hypothèse

每冊定價大洋壹元伍角
外埠酌加運費匯費

1.40

原著者 Henri Poincare
譯者 葉蘊理
發行人 [illegible] 上海河南路
印刷所 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

B五七二五

科學與假設目錄

第一册

第二册

第四部　自然界……一一九

譯者序言

法國算理家兼哲學家普恩衎萊（Henri Poincaré）對於科學的哲理不特有深刻的評論，並且他所特創的學說久已被一般學者所推尊；而這是我們讀了下面他的四種名著就可知道的：

一、科學與假設（La Science et l'Hypothèse）；

二、科學之價值（La Valeur de la Science）；

三、科學與方法（Science et Méthode）；

四、最後的思想（Dernières Pensées）。

最後一種是在他去世後那位羣衆心理的著者黎朋先生代編的遺著。聽說這些書在日本與歐洲各國久已有了譯本，獨惜我國尚未完全譯出，所以我感有譯此書之必要。現在第一卷的翻譯差幸竣事，其餘的還待我繼續的努力。此外下面有幾樁事尚望讀者注意：

（一）這部書在法國大學中，是哲學生或科學生必需的讀品；牠的重要，自無疑義。獨惜這是一本會精聚采的讀品：研究科學者要有哲學的概念，或研究哲學者要有基本科學的訓練，方可有領略的機會。

（二）我們爲尊重著者起見，深以直譯此書才不致失去這位大學者的明晰的思想；有時我們圖讀者便於領會，不免參加意譯的辦法以爲補救，但畢竟這是我們有遺憾的事。

（三）有許多的術語在中國還沒有找到固定的位置，譯者爲明瞭起見，有時沿用，有時在拙譯的名詞下注以法文，可不失原文的眞諦。我們希望有較妥切的譯名來在再版時修正之。

（四）原文緊要處本以斜體字表明，今譯文則在相當處，加以小圈。

（五）凡一人名一次用了原文註在譯音下，下次概不重複，祈讀者留意，以免混亂。

最後，我要感謝我的朋友嚴濟慈君的熱烈的友誼：當他在巴黎大學研究正忙的時候，對於拙譯，多所指正；而我們的目的都是想把一種學說誠實的介紹在國內，因此我們這種的合作却是必需的了。做一位大學者有如普恩街萊的傳記，不是易舉的事，但嚴君也應承我做了他這種的善意

和功勞我當讓讀者自己感受着。

一九二七年 Micarême 節，在法國，葉蘊理謹誌。

科學與假設

導言

大凡科學的眞理，在一位膚淺的觀察者總覺無可懷疑；科學的論理是永固的，至於學者有時會自誤的原因，是在他們不知其中的規則。

一切算學的眞理，是用了一串連貫而準確的推理方法從少數明顯的命題(proposition)推演出來的；不單是我們不得不服從這些眞理，就連那自然界（la nature）本身亦復如是。牠們好似能支配「造物者」(le Créateur)，祇許他在比較上很少的解答中，能有所選擇。因此我們只要稍具經驗，便知道他所選的爲何。從每個經驗中，用一套連貫的數學演繹法便可得到許多的結果，也就是這樣從每個結果我們才認識宇宙之一隅。

這就是普通一般人，以及略知物理的中學生所想像的科學定理之來源。這是他們所認爲經

驗與算學之功用，這也是百年前許多學者所懂得的，那時候，他們夢想借用愈少愈妙的經驗中的材料，來說明世界的結構。

人們試略加思索，就可知假設（L'hypothèse）在科學中所占的位置；人們已知算學家捨此莫由，而實驗家亦復如是。因此就生出一個疑問：此種建築於假設上的學問是否堅固的，有人以為經不起一陣小風便要傾倒的，作這樣的懷疑，還是膚淺的見解，懷疑一切，或信仰一切，都是很便利的兩種解答，因為兩者都可以使我們不用思索。

我們對於假設先且不宜妄加責難，應該細心審察他的任務；這樣才能認定他不特是必需的東西；並且這往往是合法的了。我們將見假設可分幾種，有的是可以證實的，並且一經實驗證明，就成為眞理的淵藪；有的不會欺誤我們，同時有堅定我們的思想之利益，有的外似假設，其實不過是一種遮了面目的定義，或公約（définition ou convention）而已。這最後的一種假設大半見於算學及其相關之科學。這些科學，適以此而愈形眞確；這些公約是我們精神上一種自由活動之作品，牠在這一種範圍裏是無障礙的。在這裏面我們的精神可以肯定，因為牠能命令。但要知道，這些

命令僅可頒行於我們的科學中（科學非此卽無依據）；那自然界則不受牠們支配的。雖然，這些命令是否任意的？不；否則牠們將不生效力了。經驗固讓我們自由選擇，然同時又昭然示我人以最便利的路徑。所以我們的命令如同一聰明專制的君主要諮詢國會後才頒布的命令一樣。

有人對於有些科學的基本原則上，覺有一種自由規定的公約之色彩，引爲奇事。他們極力想就此擴充起來，而同時忘卻了自由非卽任意之謂。因此他們就成立了所謂唯名派學說（nominalisme）。他們自問道，學者是否卽他所自造的定義之傀儡，而他所認爲發現的世界是否卽他的私意所創。在這種情形科學將或是確實的，但是缺少價值了。

果眞如此，則科學將必無能力了。但我們竟見其蒸蒸日上。牠如不能使我們知道些實在的東西，這樣是不可能的；但牠所能達到的，非有如老實的斷論家（dogmatiste）所想的物之本身，這不過是物與物間之關係而已；除這種關係以外，再沒有可知的實在（la réalité）了。

這就是我們將來的結論，然爲此我們必須從算術與幾何起一直談到機械學與實驗物理學。

數學推理（raisonnement mathématique）的性質是什麽？眞如我們普通所信爲演繹的

嗎？把牠仔細分析一下，可知大爲不然，他在某種範圍內卻帶着歸納推理的性質，其所以豐裕亦正在此。但牠還保存着不少的絕對精密的性質；這是我們在開始就要說明的。

等到既然明白算學推理所用的這種工具之後，那時我們還要討論另一基本觀念，此卽數量(la grandeur mathématique)。這是我們可在自然界中覓得呢？抑或是我們所創造的呢？又，果眞是那最後的解答則吾人不犯錯誤一切的危險嗎？試把我們感覺所得的麤鈍標準和那數學家理想中所運用的又靈巧又周密的數量來比較，其中勢必發生歧異；由此可見我們想收羅萬有的這張表格，原來是我們手創的；然而我們并未偶然爲之，我們可說曾經按照尺寸去做的，所以我們能收羅一切事實，同時又能使他主要的東西不至錯誤。

我們對於世界所立的牠一表格就是空間(d'espace)。幾何的基本原理是從何而來？是論理學(la logique)給我們的嗎？陸把周夫斯基(Lobatchevsky)創立了非歐克里得幾何學(géométrie non euclidienne)以證明其不然。空間是否由感覺得來的？也不是，因爲我們器官所能感觸到的，絕對與幾何的空間不同。幾何學是否來自經驗？細細研究之後，可見不然。所以吾們

結論牠的原理不過是一種公約；但不是任意的公約，今如把牠轉運到別一世界，（我名之曰非歐克里得世界，我並想發明之，）則我們另當採用別的公約了。

在機械學中，我們勢必得同一的結論，並且我們將知這種科學的原則，比較上雖直接根據於經驗，但終含有幾何定理（postulat）之公約性。一直談到此地，都還是唯名派占着勝利，現在我們且看眞正的物理學如何。這裏情形便大不同，我們遇見別種的假設，并可見其何等的豐富。表面看來，物理的理論好像是很脆而易折的，其在科學史上，又每如曇花一現，新陳代謝似的，但是牠們也不能完全消滅，終有所殘留。這殘留的東西，正是應當分析的呵，因爲正是那兒而唯獨那兒，才是眞正的實在咧。

物理學的方法，是建設在歸納上的，我們藉此可知在外界某種境況畢具時，某現象必可重新發生。如所有的這些境況可以如數重現，則此條原理，就可以放心應用了。但這是從來沒有的，其中總有些境况是缺少的呵。我們可以確信這是不重要的嗎？這顯然不是的。這也許似乎對的，但這不是確實一定的呵。由此見得或然性（la probabilité）的觀念在物理學上之功用，是何等的偉大

了。所以或然性的計算不是一種消遣及賭博者的引導，我們應當深究其原理才行咧。關於這層，我只能給點不完備的解答，因爲至今那種空泛的，使我們分別形似的本能還不受分析學的制裁。

我以爲把物理學家工作的情形研究之後，還要說明他們工作的成績。因此我就在光學與電學中舉了些例子。我們將知弗勒納耳（Fresnel）和馬克思威耳（Maxwell）之理論何來，以及安培（Ampère）與那些創造這動電學（électrodynamique）的學者怎樣引用的一些不自覺的假設。

第一部　數與量

第一章　數學推理之性質

一

數的科學之可能與否，好像已成爲不可解決之矛盾論了。如果這種科學之爲演繹不過是表面的，則牠所有的這種嚴密而無疑的正確性何由而來的呢？反之，若說牠的命題儘可用形式論理

學(logique formelle)互相引出，則算學豈不變成一種汎大的重複思想麼(tautologie)？三段論不能告人以眞正新穎的事物，且如所有必來自全等原則(principe d'identité)，則所有亦必能歸入其中；然則許多書中的定理，將不過是A卽A的各種說法而已。

自然，所有的推理都可歸根到幾條公理(axiome)上，因這是所有推理的起點。假使有人判明這些推理不能縮爲矛盾原理(principe de contradiction)。又如果有人不願看見那些不含數學需要性之經驗事實，則仍可把那些推理歸入先驗的綜合判斷(jugement synthétique a priori)之中。這樣幷非解決困難，不過加以洗禮而已；卽使到了綜合判斷的性質對於我們不再神祕的時候，然而這種矛盾仍不會消滅的，牠不過退了一步；三段論對於所有供給與牠的理由仍是無所增加的；這些理由不過是些公理，而在結論中人們決不能找到別的東西。

無論什麼定理，如其證明中不參加新的公理，則必不是新的，推理只能借用直接的直覺法(intuition)給我們明顯的眞理；牠好像只是一個暫時的中人，而人們要問不要問那所有三段論的工具是否單單用來遮蔽我們這借用品的？我們隨便展開一本數學書，便知道上說的矛盾令人

更爲可奇；著者處處想把已知的命題作一種推廣。故算學方法是否由特別而推及普遍，然則何以又名之爲演繹的呢？

最後，如數學是純粹分析的，或可由少數綜合判斷分析出來的，則聰明特殊的人一目就可看見所有的眞理；他將可想出一種簡單的言語來敍述這些眞理；便常人亦能一目瞭然。

人們如不承認這些結果，就要知算學推理的本身有一種創造性，因此牠與三段論實有分別。兩者之分別決不是浮面的。譬如將兩相等數作同樣的均一計算，便有相似的結果。我們實在不能解釋這條常用規則的奧妙。

所以這些推理的形式，不問其可否歸入實際的三段論，總保有分析性，而其力弱效薄，也正是這個緣故。

二

我們現在要討論的已是很陳舊的問題了；賴布尼剌 (Leibnitz) 已經想證明二加二得四，我們試看他的證法如何。

我假定 1 數已有定義，又知 $x+1$ 之運算，即加一單位於與數 x。這些定義，無論如何，與推理沒有關係。

其次我將 2, 3 和 4 用下列式規定之：

(1) $1+1=2$, (2) $2+1=3$, (3) $3+1=4$,

同樣，我用下列式定明 $x+2$

(4) $x+2=(x+1)+1$

$2+2=(2+1)+1$ （定義 4 ）

$(2+1)+1=3+1$ （定義 2 ）

$3+1=4$ （定義 3 ）

所以：$2+2=4$ （即所欲證）

我們不能否認這個推理純是分析的。但假使問於算學家，彼必答曰：『這不是眞的證明，這不過是一種對正而已。』人們僅將這兩種純粹公約性的定義做了一種比較，才知道是相等的；至於

新的東西，是一點沒有得到。對正。(vérification) 之所以不同於眞的證理，實因牠是純粹解析的。是毫無效果的。其所以無效果者，因其結論只是三段論的兩前提 (prémisse) 之一種評語而已。反之眞正的證理是很充富的，以其結論的意義比較前提普遍。

因此 2+2=4 這個等式之所以能被對正，只因牠是特例而已。所有算學中的特別定理都可用此法對正之。然而算學如竟成爲一串的對正，則亦將不成爲科學了。例如下棋的人並不見得因爲贏了一盤，就發明一種科學。那裏只有普通的科學。

人們竟可說這些正確的科學的目的，正在免去我們這種直接去對正之辛苦。

三

我們且看在工作時的幾何家，而細察牠們所用的方法。

這卻不是容易的事；單單任意翻開一本書而分析其中某條證理，這是不夠的呵。

對於討論幾何學中一切定理的功用等複雜的難題，以及空間觀念之來源與性質問題，我們先當置之不理。爲同一理由，我們也不能談到微積分學。我們要揀最純粹的數學來談，這就是

算術。

此外還要選擇一下；因爲在高深的數論中，那原始的數學觀念，已受了極深的改進，所以比較不易分析。

所以要在算術的初部中，我們才可找到解釋，然正是在最根本的定理證明中，顯見得古法著者之缺少精密的態度。這是不可怪他們的；他們曾受一種必需的束縛。初學者還沒有十分算學精確性的訓練；他們在那裏只有見一些空虛的繁複；所以人們如在這上面苛求他們，那不過白費時間；他們將來還是要從新按步就班學過的，而這種程序也就是那些科學建設家所經過的。

爲何要這樣長的準備，才能習於這種精確性，而這好像是聰明人都當賦有的呢？這是一個論理與心理問題，大有討論之價値。

然這是我們題外的事，可不贅述，爲不失掉我們的目的，我們要把最根本的定理重新證明，且其形式當非爲免去那初學者掃與而淺近的可比，乃是能够滿足已有成就的幾何家的。

加法之定義——我假定 $x+1$ 之運算，已有定義，即將 1 加於與 x 數是也。

且這個定義，無論爲何，對於下面的推理，是毫無關係的。

現在我要規定 $x+a$ 之運算，此卽將 a 數加於 x 數是也。

若將演算法規定爲：

$$x+(a-1)$$

則 $x+a$ 之算法可以下列式定之：

$$(1)\quad x+a=[x+(a-1)]+1$$

所以我們如果知道何爲 $x+(a-1)$，便知道何爲 $x+a$，因爲我在起初已假定人們知道何爲 $x+1$，故 $x+2, x+3$ 演算法亦可用迴環法 (par récurrence) 規定了。

這個定義頗值得注意，牠有種特別的性質，且已有所別於純粹論理的定義；其實等式（1）包含無盡不同的定義，每一定義必待前者明白後才有意義。

加法之特性——可合性 (associativité) ——我說：

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

蓋如C為則此定理是對的，因可寫為：

$$a+(b+1)=(a+b)+1$$

卽與剛才規定加法之（1）式相同。

今如 $c=\gamma$ 時此定理仍真，則 $c=\gamma+1$ 時此定理亦真。

蓋由 $$(a+b)+\gamma=a+(b+\gamma)$$

可得： $$[(a+b)+\gamma]+1=[a+(b+\gamma)]+1$$

又依定義（1）有：

$$(a+b)+(\gamma+1)=a+(b+\gamma+1)=a+[b+(\gamma+1)]$$

由此可見用了一串純粹分析的演繹法，證明此定理對於 $\gamma+1$ 亦真。故 $c=1$ 時既真，則 $c=2$, $c=3$ 時，亦復如是了。

通易性 (commutativité) ——（Ⅰ）我說： $a+1=1+a$

今如 $a=1$，則此定理顯然是真的，人們再可用純粹分析的推理來證明如 $a=\gamma$ 時為真，則

$a=\gamma+1$ 亦然；但 $a=1$ 時既如此，則令 $a=2$，$a=3$ 等等，亦因而如此；這就是命題用迴環法而證明。

（二）我說：

$$a+b=b+a$$

此定理於 $b=1$ 時已證明如上，人們再可用分析法證明如其 $b=\beta$ 時爲眞，則 $b=\beta+1$ 時亦必如是。因此命題因迴環法而成立。

乘法之定義——我們用下列等式來規定乘法：

$$a\times 1=a$$

$$(2)\qquad a\times b=[a\times(b-1)]+a$$

等式包含無數的定義；一如(1)式；令 $a\times 1$ 既經規定，則此式亦可規定 $a\times 2$，$a\times 3$ 等等。

乘法之特性——可分性（distributivité）——我說：

$$(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c)$$

如 $c=1$ 時人們可用分析法證明此式之眞；其次用同一方法亦可知如 $c=\gamma$ 時爲眞，則 $c=\gamma+1$ 時亦復如是。

這樣我們的命題又是用迴環法而證明了。

通易性——（一）我說：

$$a\times 1=1\times a$$

命 $a=1$ 時此乃顯然的定理。人們可用分析法證明如 $a=a$ 時，此定理爲眞，則 $a=a+1$ 時亦然。

（二）我說：

$$a\times b=b\times a$$

於 $b=1$ 時，此定理已經證明。人們可用分析法證明如 $b=\beta$ 時爲眞，則 $b=\beta+1$ 時亦然。

四

我且把這一串單調的推理停止在這裏罷。但就是這種單調最能把那一致而又步步碰到的

方法，明白指示出來。

這就是迴環證明法。人們先於 n=1 時證明其定理爲眞，然後證明是否 n−1 時爲眞，n 時亦然，如是依次推之於任何整數，仍能不失其爲眞。

剛才我們已經見過用這方法怎樣證明加乘二法的規則，此卽代數演算之規則；這種演算是轉變算式的工具，所得形式組合之複雜，遠非單純三段論可比擬；但這仍是純粹分析的工具，牠是不會有新結果的。故如數學此外再無別的工具，則行見其無發展之日；但是牠可以從新運用同樣的方法，就是所謂迴環推理法（raisonnement par récurrence），因此他仍可繼續前進了。

人們若能注意到，則可見其步步都是這樣的推理，而其形式或卽如上文所說過簡單的，或則大同小異。這實在是最完善的數學推理，我們當仔細的去研究牠。

五

迴環推理法之重要特性是在能綜合無數的三段論，而納聚在唯一的公式中。

欲明此理，且待我將這些三段論依次說明，牠們的排列有如瀑布直瀉下來。

這自然都是些假設的三段論。

今已知1數的定理爲眞。

但如果1爲眞時，則於2亦然。

故牠於2爲眞。

但假使於2爲眞，則於3亦然。

故牠於3爲眞，餘依次類推。

由此可見每一三段論之結論可做下三段論之小前提。

且所有三段論之大前提皆可化成唯一的公式。

此即如定理於 $n-1$ 時爲眞則於 n 時亦然。

可見在迴環推理法中人們僅能說明第一三段論之小前提，及含得有像特例之大前題的普遍公式。

因此這一串無盡的三段論可縮短成爲幾行的語詞。

現在可容易明白，有如我已說過的，何故某定理的特別結論可用純粹分析的方法去對正。我們如不要證明那定理於任何數時爲眞，而只要於6時爲眞，只需證明其前五條的三段論之爲眞；但如我們要證明定理於10時爲眞，則需九條三段論；最大的數目，所需更多；然此數無論如何大，我們終可達到目的，而這樣分析的對正總是可能的。

雖然我們無論走多遠，終究不能得到一適合於種種數目的普遍定理，——只有牠才能作爲科學的目的。爲此則非有無窮的三段論不成，這必須經過那分析家——他不得不依據形式的論理學——的忍耐力還永久塡不滿的深涯。

起初我曾問過，何以人們想不通竟有人能一眼看透算學中所有的眞理。現在這個問題是很容易回答的了；奕者能做四步五步的預算，但是無論我們覺得他怎樣奇怪，他只能預備有限的數目；假使他將這種本事用在算術上，他就不能用直觀法看透那普遍的眞理；爲求到一最小的定理，他也必用迴環法推想出來，因爲這是從有限數到無窮數之推理的工具。

這工具總是有益的，因其一方面能任我們的意思昇進數級，一方面又能省卻極無味而單調

的冗長的對正，並且這種對正在事實上尤非永遠能施行的呵。然而遇普遍定理時，這工具尤萬不可少的了，因爲其中的分析對正法，雖不能允許我們達到普遍定理，但能使我們不斷地接近牠。

有人必定以爲微積分學與我們現在所談的算術範圍相差尚遠，但是剛才我們已知算學的『無窮』觀念之重要，少了牠便無科學，因爲也沒有普遍的東西了。

六

迴環推理所依據的判斷可用別的方式表示之；例如在無窮個相異的整數中，我們可說必有一數較小於其牠各數。

人們可很易的由此一說明推及牠一說明，而自覺迴環推理之合法已經證明了。

但照這樣做下去，終必見阻於一不可證明的公理，而且這公理實卽待證的命題之另一說法罷了。

所以迴環推理之規則，決不能變爲矛盾原理，這是誰也不能否認的結論。

這條規則又不是從經驗上得來的；經驗所能告訴我們的，不過說此規則於先十數或先百數

爲眞，但不能推之於無窮數；只能推之多少總是有限止的部分。

但是，如所有的問題，只是這點，則矛盾原理已足濟事。牠可使我們推演無論多少的三段論，然其所以失敗，只在人們想把無窮的三段論納入唯一的公式中，對於無窮就是經驗也無力量。這條規則，既非解析法所能證明，而又非經驗所能對正的，卻是先驗的綜合判斷之實例。人們又決不可在這裏好似對於少數幾何的定理認爲這是一種公約。

然則我們何故勢必服從這種判斷，有如金科玉律呢？原來這不過是表現精神力量之偉大，他能斷定苟某種動作一次可能，則推之無窮次亦無不可能。這種強大的精神力具有一種直接的直覺，而經驗不過是給他一種利用的機會，而因此能够領會。

然有人說：如那粗率的經驗不能證明迴環推理之合法，則助以歸納法的經驗，仍是一樣嗎？我們試看某定理對1,2,3等數依次都眞的時候，於是我們可說那定理已顯然成立，這也和那些根據大多數但有限的觀察之各種物理學定律一樣。

我們要認明其中有與通用的歸納法酷似之處，然而有大異之點存在。應用在物理科學中的

歸納法總是不確實的，因牠是建在宇宙有普遍的程序之信仰上，但這種程序是超人的。反之數學歸納法或即迴環證明法是我們一定要奉從的，因爲牠是精神主宰的肯定。

七

我已經說過數學家極力想把他們所得的命題推廣起來，我不必另找例子，就照剛才已證明的等式：

$$a+1=1+a$$

其次我又曾用以求得等式：

$$a+b=b+a$$

此式當然較爲普遍。

所以數學亦可如別的科學，由特別歸到普遍。

這件事在我們以前開始研究時，好像是不可了解的，然自剛才我們發現迴環證明法和通用的歸納法之相似點以後，我們就覺得其中沒有什麼神祕了。

無疑的，數理的迴環推理與物理的歸納推理，兩者的基礎雖各有不同，但牠兩者的進趨，卻是平行一致的，向一個方面走的，換一句話說，牠兩者都是由特別歸到普遍。

我們試再仔細的討論。

今欲證明等式：

(1)　　$a+2=2+a$

我們只需應用二次下列規則：

$$a+1=1+a$$

且演式如下：

(2)　　$a+2=a+1+1=1+a+1=1+1+a=2+a$

從(1)式用純粹分析的方法演繹出來的(2)式幷不是一簡單的特例：牠是另一物事。

所以人們甚至不能說：在數學推理之眞正解析與演繹的部分是照普通的字義說由特殊而進於普遍。

（2）式之兩段不過是（1）式之兩段較繁的組合，而解析之爲學只是分別其中的要素及研究其相互的關係。

所以數學家用『建築的方法』而『建築』那些逐漸繁複的組合。他們再用分析的方法，從這些組合歸還到其中所含的原素，他們乃知這些原素間的關係，而由此推想到這些組合的本身間之關係。

這卻是一種純粹的分析步驟，然這不是由特殊進於普遍，因那些組合當然不能認爲比較原素更爲特別。

人們對於這種『建築』的方法頗爲注意，這是很對的，人且以此爲數學進步之必需與充足的條件。

這個方法是必需的，不錯，若就以爲充足了，那還不見得咧。

如要一種建築是有益的，不是徒耗心血的，而且是可以助人向上的梯堦，則第一要有一種系統，使吾人不見其徒爲磚石之堆砌而已。

說一句正確的話，就是要使我們覺得這種建築品比較其各原素之本身爲有益。

此益處何在？

例如何故總是拿着可以分成多數三角形的多角形來推想，而不向這些三角形去推理呢？此因任何邊之多角形有些特性是人們可以證明的，證明以後，人們便可應用此理於任何特別多角形。

反之若直接去研究那些由多角形分成的三角形中之關係，往往費了許多心力才能發現這些特性。然而我們如已知普遍的定理，則省力多了。

所以一建築之有益與否，是在其能否與其牠相似的建築並列，成爲同一類(genre)的東西。

假使四角形不僅是兩個三角形之湊合物，正因牠是多角形中之一類。

並且還要能够證明此類之特性，而以後不必一一證明此類之各種。

如要達到這步，則必須經過一級或多級的路程，從特殊來到普遍。

這種『建築』的分析法，並不迫着我們從上面走下來，牠能使我們大家都站在同一的水平

線上。

我們如無數學的歸納法，便不能上進，因爲只牠才能告訴我們新鮮的事物。如無那種有別於物理歸納而一樣有效的數學歸納法之協助，則必無鞏固之建築去創造科學了。

最後，請注意此種歸納法之能成立，全在同一的事實可有無窮次的重現。故弈棋術決不能成爲一種科學，因先後各子之步法是不相同的。

第二章　數量與經驗

人們如要知道數學家之所謂連續物(un continum)究作何解，這事不應向幾何學上尋問的。幾何家多少總要表現他所研究的圖形，然這只是他的工具而已；他研究幾何時，少不了面體(etendue)，等正如他用粉筆來表示；所以人們對於那粉筆的畫線所生出來的小彎曲之無足輕重，正如他所用的粉筆之爲白色一般。

至於純粹的分析家就不怕這個阻礙。他將數學從一切與牠無關係的原素中取出，故能回答

我們的問題算學家所推想的那連續物，眞是什末呢？許多用心的數學家早已想解決此題；譬如丹勒利（J. Tannery）在他所著的『一個變數之倚數論導言』（Introduction à la théorie des Fonctions d'uno variable）一書中已可見得了。

我們先自整數排列法談起；今於二相續的整數中加入一個或多個的中間數，再於二相續的新數中加入中間數，如是依次類推以至無窮。由是乃得無窮的項數，此即所謂分數，有理數，或可約數。然此尚不足；在這些無窮的項數中，當再插入所謂無理數或不可約數。

在未申說以前，我們先要注意一事。就是這樣想出來的連續物，不過是按在一定順序列成的個體的集合，雖爲無窮，然彼此不相侵犯。此處非如普通觀念，我們假設在連續個體之中有一種使成爲一體的密切關係，此處不是點成立於線之先，卻是線反先於點。故從那著名之公律，則連續物者，乃集體中之合一也。人僅見集體，而不見其合一耳。分析家照他們那樣規定連續亦有其理，因爲他們一直是立在連續上推理的。然由此已可見眞正之數學的連續實與物理家及玄學家之連續有天壤之別了。

或曰數學家倘僅以此定義爲滿足，則無異做字的傀儡了，他們當詳細說明那中間數究爲何物及其插入法，並且證明此可能性。然這樣便錯了，在推理中這些中間數的唯一特性（註一）是在牠們的順序；所以唯這特性才可加入定義中。

因此人們可不必顧慮中間數項之加入法；更無人不信這是可能的，除非他忘卻可能這字在幾何家的口裏就是不相矛盾的意思。

雖然，我們的定義尙未完善，我將補說在這長段支言之後。

不可約數之定義——柏林派數學家，尤以龍勒克（M. Kronecker）先生爲最，他毫不借用別的什麼材料，只用整數來極力建設那分數及無理數的連續體。照這樣看來，算理的連續將不過是精神的純粹創造品，與經驗毫無關的了。

他們對於有理數的概念，似乎並無困難，他們極力討求不可約數的定義。然未把他們的定義說明以前，我當加一申明，以免那缺乏幾何學家的習慣者之駭異。

數學家所硏究的不是物（l'objet）之本身，只是物與物間之關係而已；如其關係不變，則物雖

有易，仍與他們無礙。物質於他們是不重要的，唯獨物之形式要緊。

倘若人們不記得此義，則必不解杜德金(Dedekind)先生之稱不可約數只是一種符號，這與普通信為可感觸而可測視的數量觀念大不相同。

現在且看杜先生的定義若何：

大凡可約數都可依照無窮的方法分為兩班，其原則便是凡第一班之任何數必較大於第二班之任何數。

有時第一班中有一數較小於其牠各數；例如將大於2及等於2之數歸入第一班，又把小於2之數歸入第二班，則2為第一班中最小之數，此理甚明。所以2之數便可作為此種配置之符號。

反之，也許在第二班中有一數大於其牠各數；例如將凡大於2之數歸入第一班，將2與小於2之數歸入第二班，則2在此地仍可作為此種配置之符號。

然有時也許在第一班中無一數小於其他各數，以及在第二班中無一數大於其他各數。例如將平方較大2於之可約數歸入第一班，將平方小於2之數歸入第二班，大家知道其中無一數之

平方適爲2者。在第一班中顯然無一數小於其牠各數，因爲儘管某數之平方接近於2，人們總還可以找到別一個可約數而其平方更接近於2的。

照杜先生的看法，不可約數$\sqrt{2}$不過是可約數分配法的特別樣式之符號而已；而在每一分配的方式中，必有一可約數或不可約數以做其符號。

但這就算滿足，未免太不顧及這些符號的來源了；此外尙須說明如何人們會給這些符號一種具體的存在性，又這難點非早已由那分數上發生了嗎？如在事前，我們觀念中沒有那物質之無窮的可分性（亦卽其連續性），則我們有無這些數的觀念？

物理的連續性——人們到此就要問算學連續的觀念，是否僅由於經驗而來的；果然，則經驗的粗疏結論——這就是我們的感覺——很可測量了。人將以爲這是對的，因爲近年來有人努力去測量，幷得發明定律名曰費希勒（Fechner）定律，而根據此定律則感覺與刺激之對數成正比例。

然我們如細察那定律所根據的經驗，則結果必大爲不然。例如我們覺得10格蘭姆重的A物

與11格蘭拇重的B物兩者生同一之感覺，而B物之重量，在感覺上又無別於12格蘭拇重的C物，但人們對於A與C之差別則頗易感覺。故經驗所得之粗疏的結果，可以下列式表示之：

$$A=B \qquad B=C \qquad A<C$$

此可認爲物理的連續性之公式。

其中與矛盾的原理大有不合之處，我們認爲有免除這困難之必要，乃想出算學的連續來。故人們勢必結論說此種觀念是精神所創造的，不過這也是經驗所指示的。

我們不能相信等於第三物之兩相等物而不自相等，由此我們假定A別於B，B又別於C，惟因我們感官之不靈，故不能辨別之。

數理連續性之創造

第一層——至今爲求事實上證明起見，我們可在A與B中任意加幾項數，但這還是間斷不相連續的；我們如利用一種工具來補助吾們薄弱的感官，例如顯微鏡，則剛才無別之A與B兩項，現在就可分別了；然在已經分別了的A與B中加入D項，我們又無法可別之於A與B了。無論什

麼精密的方法與工具，那由經驗得來的粗疏結果總有一種物理的連續性，及其相關的矛盾。

除非在已經辨別的數項中不斷地加以新的數項，而且這個工作當永遠繼續進行於無窮才行，否則我們總是免不了這種的弊端。假使無極精密的儀器把物理的連續物分成散離的原子，如以天文鏡測視天河，分出無數的小星一樣，則這種工作還是不能停止。但我們不能理想到這個，因爲我們總是用感官作儀器，譬如用眼窺視顯微鏡放大的物像，故這種物像總含有一種視覺的性質，而因此有物理的連續性。

直接看到的一種長度，和經顯微鏡放大一倍的半長度是毫無分別的。故如全部的東西與其一部分相似，這是一種新的矛盾，倘若項數是定爲有限的；因一部分所含的項數較少於全部，故不能與之相似。

一待項數認爲無窮多，則矛盾立消；例如整數羣 (groupe) 儘可認爲與其中之偶整數羣相似；因每一整數可以一偶整數與之相當，此偶整數卽該整數之二倍。

但這不僅是爲免去含在經驗結果中的矛盾，人們才用無限的項數來造成連續物之意念。

此中情形正與剛才整數中發生的一樣。我們能設想一單位可加入於一羣的單位中；這完全是經驗才使我們有機會練習這種腦力，習而久之，就成自然了，成了自然以後，我們覺得我們的權力是無限，且可無窮的數下去，雖則我們所數的向來是有限的東西。

同樣，一待我們在相續的兩數中加入中間數，我們就覺得這種工作可以繼續至於無窮，且可說在牠本身上毫無理由足以使我們停止的。

爲簡便起見，且讓我規定凡是用如同可約數級的定律所組成的項數羣謂之第一級算理的連續物。今如按着不可約數之組成法的，再於其中加以新項，則我們可得所謂第二級算理的連續物。

第二層——我們只走了第一步；我們已經說明第一級連續物的來源；然現在要知道何以這還不足，而何以要發明不可約數來補充。

人們試想像一根線，牠便不得不含有物理的連續性的色彩，即是說須聯想到那根線的某種寬度。所以兩線就好像是兩條很窄的帶子，且如照這樣粗疏的想像，則兩線交叉時，必有公共占據

的一部分。

然而純粹幾何家的志願更大；他雖一方面不全然脫離感官的幫助，然他想達到一種無寬狹的線，與無大小的點之觀念。而說線乃漸形收窄的最後限度，點乃漸形縮小的最後限度，所以我們那兩條交叉的線，無論怎樣細而窄，總有一共同的部分，而其限度即幾何家所謂點是也。

因此之故，人們說兩線相交必有一共同點，而這個道理似乎是非常眞確的了。

然如人們把線看作第一級連續物，即如幾何家的線只是用有理數的座標（les coordonnées）之點集成的，則這個道理未免含有矛盾了，這個矛盾將更爲明顯，如人們承認圓圈與直線之存在。

其實，如只認以可約數爲座標之點是實在的，則內切於正方形之圓與此正方形之對角線將不能相交，因其相交點之座標非可約數。

這樣還不夠，因爲這僅少數是不可約數，而非完全是不可約數。

今試分一直線爲二半直線。每一半直線可試爲某種寬的條子；則這兩條子互相侵越，因其間

並無間隙。牠們的共同部分可認爲一點，所以我們若想那條線愈縮愈細，以至把牠分作兩截時，牠們的共同交接點，仍只一點，這差不多是很明顯的道理；這裏我們就遇到龍勒克先生的觀念了；凡一不可約數可視爲兩班有理數之交界點。

此即第二級連續物之來源，牠是眞正的算理的連續物 (le continu mathématique)。

撮要——撮要言之，精神有創造符號之能力，此其所以能建設算理的連續物，而此實即符號之特別方法而已。只爲要免去一切矛盾，牠的權力才是有限止的；然精神如無經驗給牠以矛盾的理由，則亦不會亂用。

在此地，這種矛盾的理由就是從感官的粗糙結論中分出的物理連續性 (le continu physique)。但這觀念未免牽及許多矛盾，這是要依次免除的。因此我們勢必想出漸趨繁複的符號方法。將來我們要說的方法，不特無本身的矛盾——這已如上面我們所經過的各步程——且與那些所謂直覺的命題不生衝突，這些直覺的命題是從多少經過工作的實驗觀察中出來的。

可量的數量——直至此地，我們所研究的量都是不可測量的；我們固能說這量比那量或大

或小，然不能說到底大幾倍或小幾倍。

其實至今我只研究了數項排列之順序。然在應用上這是不够的。我們要學習來比較任何二項數（terme）間之相差。有了這個條件，連續物才變成可量的數量，算術的計算也隨即可應用上去了。

這事又非有一種新與特別的公約幫助不成。人們公認在A B兩項間之相差等於C D兩項間之相差。例如我們曾在上文以整數級為起點，又曾假定n的相續兩項之間夾以中間項，而這些新項照公約上將認為等距離的。

這是一種兩數量相加的定義方法；因為假使照定義A B間距離等於C D間距離，則A D間距離，即為A B加C D間距離之和。大概看起來這個定義是任意的。但也不盡然。因牠服從某種條件，例如牠服從加法之可合性與可易性的規則那樣。然只要所揀的定義合乎這些規則，則選擇本無甄別，而無庸去把牠十分確定的。

各種的注意——我們可以舉出幾條要緊的問題來討論。

(一)精神的創造力是否被算理的連續性之發現掏汰呢?;不布哇乃蒙(Du Bois-Reymond)先生的著作證明極淸。

大家知道數學家能分別各級中的無窮小,第二級的無窮小(infiniment petit du 2^{e} ordre)不特是絕對的無窮小,且對於第一級無窮小亦爲無窮小的。我們不難想像一種分數級甚或無理數級的無窮小,於是我們又尋得算理的連續,這正是我們在前幾頁所討論的。

但還有別的咧;有些無窮小對於第一級無窮小爲無窮小,但對於第 $1+\varepsilon$ 級的無窮小,便是無窮大了,且這是不問 ε 小得如何。這就是我們在數級新插進的數項,且如照剛才我所用過的說法(雖是不大通行),我可說人們又創明一種第三級連續物了。

我們本可追求下去,但這是無謂的精神玩意;且想出來的符號,將無應用之可能,而無人要去注意的。今卽就第三級連續物而言,其本身已少實用,而幾何學家直認爲是一種簡單的好奇而已。人們的精神受經驗之逼迫,認爲必要時,才一施其創造之技能咧。

(二)旣有數理的連續性的觀念之後,人們卽可免去有如產生此觀念之矛盾否?

否，試舉例以明之。

要是很通博的人才覺得凡是曲線不必顯然要有一切線：其實，如說曲線及直線是極細的兩條帶子，人們總可使牠們有一共同的小部分而不相交。然後我們再想像這兩條帶子縮小以至於無窮細，則二者共同的部分可以仍然存在，等到了可說是到某限度時，這兩條線只有一點的共同部分，於是兩線只是相觸而不相交了。

幾何家這樣的推想，不問其有心或無心，實與上面我們已證明兩線相交只得一點的道理相同，而他的直覺也似乎是很合法的。

但這也許就是騙他的。人們可以證明有些曲線幷無切線，倘若這線是屬於第二級分析的連續物（continu analytique de 2e ordre）。無疑的，用我們上面的巧法子，或亦可免除這些矛盾；但這種既然只能見之於特別情形，大家便不注意了。與其謀直覺與分析算理之調和，人們情願犧牲其一，而分析算學既是不可侵犯的學問，那自然是直覺法倒霉了。

多元的物理連續——在上面我曾研究過由我們感官直接得來的或即費氏的經驗粗疏結

果所生出來的物理的連續性；我並已證明其結果是總括在矛盾的方式中。

且看這個觀念如何擴充，並如何能由此生出多元的連續物之觀念。

$A=B \qquad B=C \qquad A<C$

設有兩團相別的感覺或者我們可辨別之，或不能辨別之，有如在費氏試驗中十二格蘭姆重量可別於十格蘭姆的重量，但不能別於十一格蘭姆的。我不必用別的東西來建設多元的連續性。

今試把各團的感覺叫作『元』（élément）。這與算學家的點相彷彿；但這也不是完全相同的東西。我們不能說這元是無大小的，因為我們不能別之於其鄰近的元，因此牠似乎被包圍在雲霧裏一般。拿天文學作比，我們的『元』就如星雲，而算學上的點子就如羣星一般了。

這個既已說明，今如由一任何元至於他一元中間經過一串相續的而前後不能辨別的元，則這些元就可形成一連續物。將這串的粿子比算學家的線，正如其元比點子一般。

在未申說之前，先將所謂刳數 (une conpure) 下一定義。設有一連續物 C，試取出其中的若干元，而暫認為牠們不屬於此連續物。這些取出的元，即總而名之曰刳數。有時 C 物藉此又重分為

許多不同的連續物，於是所餘的一團元子不復成爲唯一的連續物了。

於是C上有A B二元，我們當認之爲屬於二不相同的連續物，這所以能看出來，因爲決不能在C中找得一串從A到B相續的元，且每一元與前一元又不可辨別；除非此練中之某一元無異於判數中諸元之某一元，故亦當歸入這個判數裏面。

反之，也許那成立了的判數不足以重分C物爲要區別物理的連續物，我們正得要去觀察何種判數才是合乎重分之用。

如物理的連續物C可用一種判數重分；這判數又是有限數而互相可別的元所成，（故既非連續物，又非許多的連續物）我們就說C是一元的連續物 (un continuum à une dimension)。

反之，如C只能用那本身亦成連續物的判數重分之，我們就說C是多元的。倘用一元連續物之判數即可濟事，我們就說C是二元；倘用二元的判數即行的，我們就說C是三元，餘依次類推。

是以多元的物理連續物之觀念已經規定了，這全靠這件很簡明的事實二團感覺有時可以辨別或有時不能。

多元的數理連續物——至於n元的數理的連續物之概念，自然也可用我們在本章開始已研究過的方法推引出來。大家知道這種連續物中的一點，可用n個不同的數量規定之，此即所謂座標。

這些量不必盡是可測定的，例如有一部分的幾何學無需測定這些量，而僅研究如在ABC曲線上，是否B在A與C之間，而不問AB弧長等於BC弧長或二倍之。這種算學名曰位置分析學（analyse situs）。

這是一門很充裕的學說，有許多幾何學家去研究，因而發明許多可注意的定理。其與平常幾何定理不同處，即在牠純粹是屬於性質的，且如這些圖形被一位不精巧的畫師將各部分大改變，甚至將直線畫成多少帶灣曲的線了，這也不妨，那些定理還是眞實的。

這是因爲人們想在我們剛才所定的連續物中作一種測量的計算，於是這種連續物就成爲空間，而幾何學始生；但這事且留在下章再談罷。

（註一）以及包含在特別公約中之特性，這些公約用以述明加諸的，詳述在後。

第二部　空間

第三章　非歐克里得幾何學

凡一結論必先有前提；這些前提，或本身即明顯的，故不待證明之，或僅依別的命題才能成立，但我們既不能溯源至無窮，則凡演繹的科學，特別的是幾何學，必先建設在幾條不可證明的公理上才行。故凡幾何學的公式開始就是這些公理。然其中也有要分別的；有些如『等於第三量之兩相等數量必互相等』一公理並非幾何上的命題，而是分析學的命題。我認爲牠是先驗的分析判斷，故我不去理牠，

然對於別的專屬於幾何的公理，我就要認眞的研究一下了，大概書中有三公理：

（一）經過二點只能作一直線；

（二）直線是兩點間最短的距離；

（三）自一點只能引一直線，和自己與直線平行。

雖然人們常省去證明那第二公理，但將牠自其牠二公理及許多默認的公理中演繹而出，是可能的，這且待以後再詳述之。人們久想證明那第三公理，即所謂歐克里得公理（postulatum d'enclide），然終是白費力。他們對於這種空幻希望的努力，眞是不可思議。及到十九世紀初葉有二大學者——差不多同時——其一匈牙利人波而牙（Bolyai），其二俄羅斯人陸把周夫斯基(Lobatchevsky)用一種不可否認的態度說這個證明是不可能的；他們差不多替我們擺脫了那些沒有公理的幾何發明家；從此法國科學院 (Académie des Sciences) 每年只接到一二種新的證明論文了。

雖然這個問題，尙未解決；不久就有李滿 (Riemann) 先生著名的論文，題爲幾何學之基本假設 (Über die Hypothesen welche der Geometrie zum Grundeligen)。

這篇文字引起許多近代的著作，稍緩我將述及，其中以白耳太密 (Beltrami) 與愛兒母慈 (Helmholtz) 尤當提出說明。

陸把周夫斯基幾何——倘若歐克里得公理可從別的公理導出，吾人不承認這公理，但又承認那些別的公理，則人們必將得互相矛盾的結論了；所以必不能在這種前提上，建立一種自圓其說的幾何。

這正就是陸氏所做的。他始先假定：

人們可自一點引出許多直線和已與直線平行。

此外他仍舊保存其牠的歐氏公理。從這些假設他乃演繹出來許多的定理，不特其中無自相矛盾之點，且其創造之幾何學的穩固邏輯實與歐克里得的媲美。

這些定理，自然是與我們所習用的大為不同，且乍看上去，還不能生些懷疑咧。

譬如三角形之三內角之和是小於二直角，其與二直角之差則與三角形之面積成正比例云。

要想畫一圖形與所與的圖形相似而相等，這是不可能的。又如分一圓周為 n 等份，自各點引以切線，則此 n 切線形成一多角形，只需這圓的半徑不太大便行；如其太大，則彼此不能相交。

現在不必多舉這些例子罷；陸氏命題與歐氏命題是毫無關係，但論其各自互相聯絡之合理，

則無差別。

李滿幾何學——我們試假定有一無厚薄的萬物所生存之世界；又假定這些『無窮扁平』的動物都是在唯一的平面內，而不能走出來的。又設想此世界與別世界相距甚遠，以免受其影響。當我們正在做這些假設時，我們不妨再假定這些動物自能推想，並且有研究幾何之能力。這樣，他們對於空間一定看做是二元的了。

現在且假定這些理想的動物雖是無厚薄的，但是圓球形的樣子，而不是平的，而這些球形的動物都生長在同一的球上，不能走出的。然則牠們將建立何種的幾何呢？第一，牠們自然還是看那空間是二元的。直線對於牠們實卽球面上兩點最短之距離，此卽大圓周的弧線，一言以蔽之，牠們的幾何將是球面幾何學。

他們所謂的空間，就是這永遠脫離不了的球面，在這上面遊行着他們可以看見的千萬象。他們的空間將是無邊界的。因他們在球面上可以一直向前走而不休止，但這空間將是有限的；因在那上面雖無端頭可尋，然可以打一個圈子。

這樣，李氏幾何學卻是三元的球面幾何。德國的算學大家爲建立他那種幾何，不單走來便推倒了歐克里得公理，並連第一公理也丟去：從二點只能作唯一的直線。

球面上之二點普通僅可通過一大圓周（此即如我們方才所見的那些理想的動物所認識之直線）；然而也有個例外；如此二點是對徑的則由此二點可通過無窮數的大圓圈。

同樣，在李氏幾何中，（這至少是在李氏幾何各式中之一如是）由二點僅可通過唯一的直線，但有時亦可通過無窮的直線。

李氏幾何與陸氏幾何有一相反的地方。

例如三角形之三內角和是：

在歐氏幾何中等於二直角；

在陸氏幾何中則小於二直角；

在李氏幾何中則大於二直角。

由一點所可引與所與線相平行之線數是：

在歐氏幾何中等於一；

在李氏幾何中等於零；

在陸氏幾何中等於無窮。

此外，我們要加說一句：李氏的空間是有限的，雖然是無邊界的，這兩個名詞的意義與上面所說過的相同。

常曲度之表面——雖然，還有一個可能的異論。陸氏與李氏的定理是毫不矛盾的；但無論從他們的假設中所抽出的兩種定義所得的結果怎樣多，他們在未將所有的結果盡得以前，他們勢必停止下來，不然，則其數將爲無窮了；倘若他們再向前推演，何見得他們就不發生各種矛盾而後休呢？

這種困難在李氏幾何中是沒有的，只須人們以二元空間爲限；剛才我們已見過那李氏幾何無異於球面幾何，這幾何不過是普通幾何的一支部，當然毋庸討論。

白耳太密先生同樣把陸氏二元的幾何歸入只是普通幾何中之一支部，以反對所有相關這

個的異論。

且說他究竟如何做到的吧。假設在一表面上有一任何圖形。試想此圖形是畫在一種可屈折而不可伸縮的布上，而此布便緊貼在這表面上，假使此布移動而變形時，則此圖形上的各線亦隨而變形，但不改其長度。普通這個可屈折但不可伸縮的圖形是不能換位而不至脫離此表面的；但有一種特別的表面對於這種動作是可能的，此卽常曲度面。

今試再將我們先前的比喻來談，迴想那些無度的動物是生長在這一種的面上，於是他們以爲一圖形之運動而同時能保定其各線之長度，都是可能的事了。反之，這種的運動對於曲度可變的面上之無生物厚度的動物，便是無稽之談了。

這種常曲度面可別爲二：

一種是正曲度的，可變其形以緊貼於球面上。所以這種面上的幾何，變爲球面幾何，卽李氏幾何。

牠種是負曲度的。白耳太密先生已證明此種體面上的幾何，卽陸氏幾何。故李氏與陸氏之二

元幾何，仍與歐氏幾何相合。

非歐克里得幾何之釋義——由是一切關於二元幾何的反議都消滅了。

我們亦不難把白耳太密先生的推理擴充於三元幾何。那對於四元幾何猶不生問題的人，對這自亦無何困難，但這種人是很少的。所以我另法來講吧。

設有我名之曰『基本平面』的平面，且製定一種字典，使每個有兩行的重複解釋，好像那有兩種語言的普通字典有兩種同義的字一樣形式。

空間……在基本平面以上的空間之部分。

平面……與基本平面相交成直角之球面。

直線……與基本平面相交成直角之圓圈。

球體……球體。

圓圈……圓圈。

角……角。

二點之距離……即基本平面與經過此二點之正交圓之交點及此二點之非調和比（le rapport anharmonique）之對數。

餘不贅述。

然後試將陸氏幾何的定理用此字典翻譯，有如用德法合璧字典翻譯一段德文一樣。如是我們就得普通幾何的各定理。

例如陸氏定理爲『三角形之三角和小於二直角』可譯爲：『如一曲線的三角形之三邊是與基本平面相交成直角之圓弧線，則三角之和必小於二直角。』如是無論如何引申陸氏的設想之結果，人們終不致有何矛盾。其實如陸氏之二定理是互相矛盾的，則所借用我們的字典翻出來的二譯文勢必亦然，但這些譯文是普通幾何的定理，而沒有人疑惑普通幾何是不會有矛盾的，我們這個信仰是從何而來？並且是否已經認爲妥當？這個問題我是不去問牠，因爲問起來就要說長了。然則除了我上面所提出來的疑難外，再也沒有別的了。

這還不算完了。陸氏幾何能用具體的解釋，而非一種無益的論理的練習，牠有許多的應用。我

不單此地無暇談牠，並我與克朗（Klein）先生由此算出的一次微分方程式解法（intégration des équations lineaires）也不談及了。

況且，這種解釋不是唯一的，人們儘可編製許多同上的字典，只須經過簡單的『翻譯』就可將陸氏幾何的定理變爲普通幾何的定理。

內函的公理——試問那些幾何書中所清楚說明的公理是幾何學的唯一的基本嗎？人們試看在依次把牠們捨去之後，那與陸氏，歐氏，李氏理論有共同性的幾個命題還是成立，就知其不然了。這些命題必建設在幾何家不去說明而承認的前提上。將牠們從古法的證理上分出來，這是很有趣味的事。

密耳（Stuart Mill）氏以爲一切定義必內含一公理，因爲下定時，人們已不知不覺的承認那規定物（l'objet défini）之存在了。這樣就未免說得太過分了；在算學中人們下了一物之定義後，少不了再要證明牠的存在，所以省去這種手續，就是因普通一班讀者都能自去領略。我們不可忘記這『存在』一個字對於算學中的物與對於物質的物是有不同的意義。一個算學中的物

可以存在，只須牠的定義之本身或與先前認可之命題皆不發生矛盾。

密氏這個觀察雖不能應用在一切定義上，然對於一部分的定義是正確的。有時人們對於平面的定義是如下：

平面是一個表面(surface)；就是那聯結牠許多點中之某二點的直線能全在這表面上。

這定義顯然包含一新的公理；誠然，人們可把牠改換，那還好些，但為此必要把公理明白的發表才行。

別的定義也足以引起重要的省思。

譬如那二形相等之問題：凡是可以疊起來則二形必相等；為得要將兩形疊起來，則必先移動其一，其一直使牠能夠接觸其二為止。但應怎樣移動呢？假使我們發此疑問，人們一定答道，移動時要如那不變形的固體，不可將此圖形變易才行。由此仍顯然歸到原有的問題，這竟是轉圈子了(cercle vicieux)。

實際上，這個定義沒有定出什末來；對於那只有流體的世界上的生物，牠是毫無意義的。假使

牠對於我們好像是很明白，那是因爲我們對於天然的固體是習見的，這天然的固體與那理想中四面不變的固體，沒有大別的。

雖然，這定義無論其怎樣不完美，總是含蓄一種公理。一個不變易的圖形運動之可能性，本身並不見得是明顯的眞理，即使牠有如歐克里得公理的顯明，但決不如先。驗分析的判斷之顯明。

此外研究幾何定義及證理的時候，人們覺得勢必不特無證明的認可那種運動之可能性，且對於牠的幾種特性，也須認可才行。

第一這是在直線定義中就可看出的。人們先前所給與予的定義都是不成然，而那眞正的，就是那暗含在有直線參加的一切證明中的那一種。

有時一不變圖形之運動也許是這樣的：凡屬於此圖上某線的各點不動，當在此線外之各點移動時。凡這種線就名之曰『直線』。我們在這條說明中早已有意把那定義與其內函的公理分開了。

有許多的證理，例如三角形之相等，由某點引一直線垂直於牠直線之可能，假定許多可省說明的命題，因爲牠們勢必認定在空間有用某法移動一圖形之可能。

第四種幾何學——在這些內函的公理中，有一條是很可值得注意的，因爲倘若把牠拋棄，人們還可構成第四種幾何，與陸氏李氏及歐氏的三幾何一樣合宜。

如要證明人們可由A點引一與直線AB相垂直之直線，人們設想有一繞A點而動且始與直線AB相重合的直線AC；於是人們將此線繞A點而轉，直至爲AB之引長線而止。

故人們假設二個命題：第一這種旋轉是可能的，其次卽可轉到互相引長之直線而後止。

如人們只承認第一命題而否認第二者，便要得着比陸氏與李氏幾何更爲奇異的定理，但這也是不會互相矛盾的。

我且敍述那些定理中的一種，但我並不選擇那最奇異的：眞正的直線可以自相垂直。

里(Lie)氏定理——暗地導入古來證理中的公理數目，是超過所需要的多，所以人們想把牠們減至最少數。易耳白(Hilbert)先生好像是曾解答這個問題了。人們可以直覺地問這種減

豹是否可能，假使那必需的公理及理想的幾何之數目是有限的。

蘇妃士里 (Sophus Lie) 的一個定理支配了各種討論我們可這樣的說明牠。

假定人們認可下列的前提：

(一) 空間是 n 度的。

(二) 不變易的圖形之運動是可能的。

(三) 此圖形在空間的位置必需 p 個條件方可確定之。

由是合乎這些前提的幾何爲數是有限的了。

我並要申說如 n 是已定了，則人們可規定 p 之最高限 (limite supérieure)。

所以人們倘認定運動之可能，則僅能發明有限的（且爲數頗小）三元幾何。

李氏幾何——雖然，這個結果似乎是遭李氏駁議的，因其曾建立無數不同的幾何，而普通所謂的李氏幾何不過是特例而已。

他說：凡白都在人們對於一曲線之長度的定義是如何。但這種定義的樣式是多極了，而每一

個都可作爲一種新幾何之起點。

這是完全對的，不過大半這些定義與那在里氏定理中認爲可能的不變圖形之運動，是不能相合的。所以李氏幾何縱然有許多好地方，但永遠不過是純粹分析的，是不能有如歐氏幾何的可證明的。

易耳白之各種幾何——最後魏翁勒斯（Veronese）與易耳白先生曾想出更新奇的幾何，「名曰非阿希梅得幾何」（la géométrie non-archimédienne）。他們捨去阿希梅得公理，而建築那些新的幾何，這公理是凡以够大的整數乘某長度，則終必超過所先給的任何大的長度。

在一非阿氏直線上普通幾何的點子皆可存在，然倘有無窮的點子夾在其中，這樣所以那舊法幾何家認爲相鄰接的兩節線之交界間現在就可插進無窮數的新點子。一言以蔽之，用前章的說法，非阿氏的空間並非二次的連續物，乃是三次的連續物。

公理之性質——大半算學家看陸氏幾何不過是一種簡單的論理的奇特；有些人更進一層，他們以爲既然有許多種幾何，則我們的幾何是眞確的嗎？誠然經驗使我們知道三角形的三角之

和等於二直角；但這因我們可計算的三角形都太小的緣故；如照陸氏說，則其相差與三角之面積成正比例；然則當我們計算較大的三角形，或我們的儀器更精的時代，這種差數就可被我們感覺得了嗎？由此以觀，歐氏幾何只是暫用的幾何而已。

爲討論這個意見，我們先須問幾何公理（axiomes）的性質爲何。

是否有如康德所謂先驗綜合的判斷？

這種判斷既是用那樣的力量來征服我們，以致我們不能設想相反之命題，更不能在牠的上面建立一切理論。非歐氏幾何自亦不成立了。

爲得可以確信我們可舉一眞正的先驗綜合的判斷，例如我們在前章已見其位置重要的那一種：

如1之定理爲眞，又如n＋1亦眞，只須於n爲眞則此定理於任何正整數皆眞。其次人們試離開這種推理，而否認這命題，以建立一種謬誤的算術，有如非歐氏幾何，——人們是不會達到目的，甚至在起始時，人們就會把這些判斷認爲分析的了。

況且，再把我們那無厚薄的動物的設想來談吧；倘若那些動物，具有我們的理性，我們決不能相信牠們竟採用與其經驗相反的歐克里得幾何。

然則我們應該結論幾何的公理就是經驗的眞理嗎？但那理想的直線和圓周是不可實驗的；所能的只有實在的物質。然則作幾何基礎的實驗將託於何處呢？這卻好回答。

我們在上面已經知道我們總是想像着好比這些幾何的圖形與固體物同態。故幾何所借重於經驗者，實卽固體之性質。

由光之性質及其直線的傳播，也引出許多幾何的命題，尤其是投影幾何，由此以觀，人們將想說：度量的幾何卽固體之研究，而投影幾何卽光之研究。

然這裏卻免不了一不能超過的困難。幾何學如是一種經驗的科學，則不成爲一精確的科學，而此後終需不斷的改良了。夫復何言？從今日起，牠的錯誤將會承認，因爲我們知道世上沒有嚴密不變的固體。

然則幾何的公理既非先驗綜合的判斷，亦非經驗的事實。

這原來是些公約。（conventions）；在這些可能的公約中，我們的選擇是受經驗的事實引導；但牠仍是自由的，牠爲免去一切的矛盾起見，才有所限制。所以那些決定公理之取捨的經驗定律雖是近似的，然那些公理則是極嚴密的眞確。

換句話說，幾何學的公理（我並不談算術的）其實卽戴着假面具的定義。

由是人們對於這個問題當作何感想：歐氏幾何是眞確的麽？

這個問題毫無意義。

這好比問『米突』度量衡（système métrique）是對的，而舊制度是錯的；笛卡兒式的座標（coordonnées cartésiennes）是對的，而極樞座標（coordonnées polaires）是錯的了。這不是這種幾何比那種幾何眞；只有比較上便利不便利而已。

而歐氏幾何是並且永久是便利的幾何；

一、因爲牠是簡明的；這不單是因我們精神上的習慣關係，或因我們對於歐氏的空間有一種莫明其妙的直接的直覺；牠本身確是最簡明的，有如一次多項式是比二次多項式較簡，球面三角

之公式比平面三角之公式簡明，卽使一位不明白這些幾何公式的意義的分析算學家看上去，也有如此的感想。

二、因爲牠與自然界之固體的性質頗能溶合，這些固體是我們的五官四肢所能感覺到的，而用此我們就製造測量的儀器。

第四章　空間與幾何

我們先以一小奇論開端。

今如有一種生物，具有我們同樣的精神與感官，但先前毫未受過教育，牠們在適當的外界中，將能得一種印象，比方這個可使牠們建設與歐氏幾何不同的幾何，且能把這外界的現象都放在非歐克里得的空間或竟四度的空間。

至於我們，則我們的教育都來自現今的世界，假使一旦置身在這新世界中，則我人不難把其中一切的現象都歸入我們的歐克里得空間。反而言之，今如這些生物都轉運到我們的世界中，則

牠們必把我們所有的現象歸入非歐克里得的空間。

我說我們少少努力便也可這樣做的。今如有人竭畢生之力去做，則必定能夠達到這第四度的想像。

幾何的空間與表示的空間——人家往往說外物的影像是存在空間的，並說要合乎這條件，那物才能形成。也有人說這個作我們感覺與表示（la représentation）的周全格式（cadre）之空間，與幾何家所熟悉的空間是完全相同的。

前句話對於作如是觀的聰明人，必甚奇異。但要看，假使他們不受幻想的影響，則一個深奧的分析，可以免除。

第一那眞正的空間之特性是什麼？我想指那作成幾何學對象的空間，而我名之曰『幾何的空間』試擇要述之如下：

一、牠是連續的；

二、牠是無窮的；

三、牠是三度的；

四、牠是同質的(homogéne)，卽是各點都是相同的；

五、牠是同位的(isotrope)，卽是經過同一點之各線都相同。

現在我們試把牠和我們感覺的及表示的格式相比，則我便叫做表示的空間(les pace représentative)。

視覺的空間——先試設想一種純爲視覺的印象，這是由於眼膜(rétine)深處所形成之物像而來。

略一分解，卽知這個物像是連續的，但僅是二度的，此已有別於幾何的空間，此卽所謂純粹視覺的空間。

他方面這物像是放在有限格式中(cadre)的。

最後，還有一個亦是重要的區別：此純粹視覺的空間不是同質的。眼膜上的各點，——能夠自形成的物像之抽象——沒有同一的作用。那黃斑點決不能認爲與眼膜邊部之一點相同。其實不

單是同一的對象在那上面可生更強大的印象，且在一切有限上的格式中居中的點子與近邊的點子，是不相同的。

再深加分析，我們可知這視覺的空間之連續性與其爲二度的空間，亦無非一種幻覺；所以牠與幾何的空間相差更遠，我們對這且不多說，我們在第二章中已把這種的結果談的很够了。

但視覺可以測物之距離，所以又能觀察第三度了。

但是大家知道這種的觀察，實卽配對光線所費力之感覺，和雙目所應作的曲度以明視一物之感覺。

這是一些筋肉的感覺，與給我們二度空間之概念的視覺大爲不同。故因此第三度對於我們，和其牠二度有不同的作用。故所謂完全視覺的空間不是同質之空間。

誠然，牠有三度；意卽對於我們視覺的元素，（這至少是有助於面積之概念的，）知其三則其餘皆可完全規定；若照數理的話說，這是含三獨立變數的函數。

然而我們再過細審視一下，對於第三度我們有二種不同的樣子來發覺牠；卽對光之費力與

雙目之曲度。

無疑的，這兩種指示總是嚙合的，其中有常定的關係，換數理話說，就是測量這二種筋肉感覺的變數，在我們看上去並非各自獨立的，或者，爲省用那已很精細的算學概念起見，我們仍可回到第三章，而把同一的事實述之如下：

如A與B二曲度之感覺是不可辨別，則同時和牠相依的A^1與B^1二對光之感覺也將不能辨別了。

但這可說是一種經驗的事實；如要作反面的假定，先驗上是毫無妨礙的，又如有這相反的假定，如這二筋肉的感覺有各不相依的變動，那末我們將要多注意一個獨立的變數，而對於『完全視覺的空間』我們將認爲四元的物理的連續物了。

我還要加說一句，這就是外部的經驗的事實。我們儘管可以假定有一生物，具有與我們同一的精神和感官，是生於某世界中，那裏光線射到的身上時，必經過重複的折光體。於是供給我們視察距離的兩種指示，不再聯有常定的關係了。一個在這樣世界中受感官教育的生物，對於完全視

覺的空間必將認爲四度空間了。

觸覺的空間與動覺的空間——「觸覺的空間」比視覺的空間更爲複雜，而與幾何的空間相差更遠了。因此對於觸覺用不着去重複那對於視覺的討論。

然在視覺與觸覺的結論之外，尚有別的感覺，其輔助於空間概念之萌芽更大。這是大家統知道的，這種感覺是隨着我們所有的動作而生的，這就是普通所稱的筋肉感覺。

與此相連的格式就成爲所謂「動覺的空間」（l'espace moteur）。每一筋肉生出一種特別的可增可減的感覺，因此我們全體筋肉的感覺所依之變數當等於我們所有的筋肉數。因此我人有若干筋那動覺的空間便有若干度了。

我知道有人將說，筋肉的感覺足以助成空間之概念，這是因在我們對於每一運動的方向都有一種感想，而這也就是感覺中之一部分。如果這是眞的，如果某筋肉的感覺要有方向之幾何的感覺作伴才得發生，則幾何的空間眞就是支配我們感覺的一種形式。

但當我自己分析我的感覺時，我並不覺得是如此的。

我所見得的，就是關於同方向運動的感覺，是被許多觀念的簡單聯合聯結在我腦中。我們所謂『方向之感想』即是由這種聯合而來。所以這種感想決不是在唯一的感覺中可找得的呵。

這種聯合是很繁複的，因為根據四肢的位置，同一筋肉之收縮能與多種不同方向之運動相合。

這個聚合是顯然已具有的了；有如其牠各種的觀念之集合，牠是一種習慣的結果；此結果本身也是由許多的經驗而來；絕無疑的，假使我們的感官教育是受之於另一世界，那裏我們受着不同印象，則必生出相反的習慣且我們筋肉的感覺必隨其牠的定律以相聯了。

表現的空間之性質——綜上以觀，在視覺的，觸覺的，與動覺的三種形式之下的表現空間是純粹與幾何的空間不同的。

牠既非同位的又非同質的；人們且不能說牠是三度的。

人們往往說我們把外界所觀察的對象，『投影』於幾何的空間；或即我們把牠『位置』（localiser）起來。

這有意義否，而有何意義？

這個意思就是說我們把外界的事物表現於幾何的空間嗎？

我們的表現，只是我們的感覺所傳達出來的，所以只能和牠列入同一的格式中，卽是說在表現的空間中。

我們之不能把外物表現於幾何的空間，有如畫師不能在一平面的圖上畫出物之長闊高三度來。

表現的空間只是幾何的空間之影像，這個影像經了一種透視就變其形狀，而我們只是按了透視學的道理才能表現物體。

所以我們並非把外物表現於幾何的空間，我們只是把這物體當作在幾何的空間而對牠推想。

他方面，當我們說把某某物件「位置」於空間之某某點，這是什麼意思？

這就是說，爲達到這物，我們把要做的動作表現出來；而不說爲表現這些動作，必將其本身投

影於空間，以及空間之概念當因此先存在。

當我說我們把這些動作表現出來，我只說我們把與之相伴的筋肉的感覺表現出來，這些筋肉感覺是毫無幾何的性質的，牠們因此毫不含蓄空間概念先在的意思。

狀態的變化與位置的變化。——但有人將說，如幾何的空間之觀念非我們精神上所必具的，又非任何感覺所能供給我們的，則此念又何自而生的呢？

這就是我們要研究的，而這要稍費時間才成，但我可把我所嘗試的解釋先簡括言之：我們任何的感覺，單獨起來，決不能引起我們一種空間的觀念，我們只是把這些感覺發生的次序研究之後，才得到此念。

我們最初是知道我們的印像是會變更的；但在我們所發見的變更中，我們馬上就可以有所區別。

我們有時說這些印像成因的對象，是變了狀態，時而說牠們是變了位置，或者牠們只是移動了。

不問一對象是變態或變位，對於我們總是同樣：即印象集合中的一種變化。

然則我們如何能够去分別牠們哩？這是容易明白的，今如只是位置的變易，我們可以把原始的印象集合重新演過，做那些使我們恢復正對動物體原位在同一相對的地位中之動作。如此我們矯正所發生的變化，而用相反的變化可使物歸原狀。

譬如是有關視覺的，有一物在目前行動，我們可『隨之以目』而利用眼球之運動可使物像永落於眼膜之同一點。

這種動作是我們良知的，因這是有意的，而且有筋肉感覺相伴的，但這不足以說我們把牠表現於幾何的空間。

是故變位之特性所別於變態者，乃在牠能用此術以矯正之。

人們因此有時可用二法由A印象的全體至於B印象的全體：一、這是無意的而不受筋肉之感覺，這是當物體移動時有的情形；二、這是有意的而有筋肉之感覺的，這是物雖不動然我們對他有相對的運動時之情形。

果然如是，則由A集至B集之歷程只是位置上的變易。

由此可知視覺與觸覺，如無『筋肉的感官』之協助，決不能給我們空間之概念。不單是這個概念不能來自唯一的感覺，而是來自『一。串。的。感。覺，』並且一不動的物體永不能有之，因為牠既不能就自身之運動矯正外物易位之結果，則牠絕無理由去區別這個與態的變化不同，倘若牠的運動是無意的，或毫無感覺相伴，牠也不能得到這種概念。

對消之條件——有一種對消（compensation）能使兩不相關的變易互相矯正，像這種的對消怎樣是可能的？

今如有一。已。知。幾。何。的。人，他必這樣推想：

如要發生對消，當然要一方面外物之各部分，他方面我們的感官之各機關，經了這兩種變易之後，仍恢復其原有相對的位置。為此，則外物之各部分亦必互相保存其相對的位置，且我們的感官之各部分互相亦須如是。

換句話說，在第一種的變易中，外物應如不變的固體之移動，而在矯正第一種變易之第二種

變易中，我們身體的全部亦須如是。

按照這種的條件，則對消可以發生。

但我們尙不知幾何學的人，因爲我們對於空間的概念尙未形成，所以我們不能做那般的推理，我們不能先驗的預測這種對消是否可能的。然由經驗知道這有時做得到的，而就是根據了這件經驗的事實，我們始能從位置的變化中辨別出狀態的變化。

固體與幾何——羅列在我們四周的萬物之中，有些常常受一種移動，而這種移動同時可受我們自身適當的動作之矯正，這就是固體。

其牠形狀可變的物件，除非例外，不能有這般的移動。（只有位置之變易而無形狀之變易。）倘若物體移動同時變易其形狀，那末我們就是用適當動作，也不能把我們的感官之各機關移到與此物原始的相對的位置；因此我們不能重新建立原有的一切印象。這只是以後，屢經新試驗之後，我們才學得把變形的物體分爲若干較小的部分，那各部分都能按照固體的規則移動。如是我們對與變形（déformation）與其牠變態有所區別；在這些變形中，每一部分只是受可以矯正

的地位之變易，但全體所受的變動則較深切，且不能受一種相關運動之矯正了（movement corrélatif）。

如這種的概念已是很複雜的了，而其發現在比較上已是遲了；並且如果固體之觀察中不曾教我們辨別位置之變易，則這概念必不能產生。

所以自然界中苟無固體，亦必無幾何學了。

還有一個解釋，亦頗有注意之價值。設有一固體始占位置 α，其次來至位置 β；在第一位置時，牠使我們感受印象全體 A，而在第二位置時，則印像全體 B。今設又有第二固體與其第一有不同之性質，例如有不同的顏色。我們也假定牠由 α 至 β，在 α 時使我們感受印像全體 A^1，至 β 時則爲印像全體 B^1。

普通 A^1 圜與 A 圜必無相同處，B 圜與 B^1 圜亦然。所以由 A 圜至 B 圜與由 A^1 圜至 B^1 圜這兩種的變易，論其本身，普通是毫無相同的。

雖然，對於這二種變易，我們皆認爲是移動，或更好點，我們認爲同一的移動。這是怎樣的一回

事？

這只是因為牠們可以被我們身體上同一相關的運動矯正。

所以這是『相關運動』才在這兩現象中成立唯一的聯絡。否則我們永想不到把牠倆接近起來。

他方面，我們的身體，利賴骨接及筋肉，方可以做出無數的不同的動作；但牠們都不能『矯正』外物之變動；倘若這樣，那末我們全身，或至少我們感官的各部加入行動時，必定一致的行動，意即如固體之常保其各部之相對的位置而不變。

撮要

一、第一我們要區別兩種現象：

有些是無意的，又無筋肉之感覺隨伴的，我們認為來自外物；這是外界的變易；

有些，其性質適與上相反，而來自我們本身的動作，這是內部的變易。

二、我們注意着這每一種現象的變易可被牠種相關的變易所矯正。

三、在外界的變易中，我們分別那些在別種的變易中有一與此相關的變易者，是謂移動；同樣，在內部的變易中，我們分別那些在第一種的變易中有與此相關的變易者。

由是利賴了這種相互的關係，我們乃下現象特別範圍的定義，謂之移動。就是這些現象的定律作成幾何的對象。

同質定律——這些定律中第一就是同質定律。

假定因外界變易 α，我們由印象A圖至於印象B圖，其次被一有意的，而相關的運動 β 矯正 α，使我們仍歸於A圖。

今假定有外界的變易 α，使我們重新由A到B。

於是經驗告訴我們，即此變易 α' 有如 α 可用有意而相關的動作 β' 矯正之，且此 β' 動作和矯正 α 之 β 動作適為同一之筋肉感覺。

有了這事實，所以人們平常說空間是同質的且是同位的。

人們也可以說某動作發生之後，可再發生至二次三次，如是類推，而不改其特性。

在第一章中我們曾研究過算學推理之性質，我們已知那同一計算重演至無窮次數之可能性之重要。

算學推理之功效全靠這種的重複性；所以這是利賴了同質定律，牠才能建立在幾何的事實上。

同質定律之外，尚有無數相似的定律，我也不必贅述，但算學家可一言以蔽之，說許多的移動成爲『一羣』(un groupe)。

非歐克里得世界——假使幾何的空間是一強加於我們每個表現——單獨地估計——的格式，則人們將不能頃刻離開這表格來表示一影像，且我們絲毫不能變易我們的幾何學。

但其實也不然，幾何不過是這些影像前後相繼續之定律的撮要。於是儘可想像一串的表現，與我們尋常的表現處處相似，但其相繼續之定律與我們已習用者不同。

於是人們可想到如有一種生物，牠的教育就是在這些定律遭變的環境中受的，則牠們必另有一種與我們不同的幾何學了。

譬如在一大圓球中的一世界而服從其中如下的定律：

其中的溫度是不統一的；中部最高，若距心漸遠，則溫度漸降，當我們到了圍住這世界的球面上乃爲絕對零度。

我再把此溫度變動之定律申說一下。設有一限度的球其半徑爲 R；r 爲自某點至球心之距離。則該點之絕對的溫度將與 R^2-r^2 成正比例。

且我假定在這世界中所有體皆具同一的澎漲率，是以某樣的一條尺，其長度的與絕對的溫度成比例。

最後，我假定一物由溫度不同之一點移至牠一點後，牠能立即與其新環境之溫度相同。

在這些設想中，絲毫沒有不可想像的或矛盾的。

凡是一物距球面愈近，則其形亦變得愈小了。

第一我們要知道，如在我們習用的幾何上看來，這世界是有界限的，而對於這上面的居民，實是無限的了。

蓋當牠們要走近那有限的球面時，牠們漸漸的降冷，因此縮小。牠們的脚步也漸漸的小，因此牠們永不能達到球上。

對於我們，幾何學不過是研究固體運動之定律；對於這些理想生物，便是剛才我說過那隨温度而變形的固體運動之定律研究了。

無疑的，在我們的世界中，天然的固體受了寒熱之後也發生形狀或體積之變化。但是我們建立幾何的基礎之時，竟把這種變化忽略去了，蓋因牠們既是很弱小的，又是不整齊的，所以我們認爲是偶然的事。

但在這假設的世界中，則大爲不然，而這些變化有整齊的而極簡的定律。

他方面，這些居民身體上各部分也受同一的形狀與體積之變化。

我還作一設想；我假定光線經過不同的屈折環境時，其折光率與 R^2-r^2 成反比例。在這情形之下，顯見得光線不是直的而是圓的了。

爲要把前說加以證實，我尚須說明在外物位置中的某種變易，則這理想世界上有知覺的生

物，亦可用相關運動矯正之;而這是為的要恢復那有知覺生物所有的原始印像集合。

假定某物移動時，非如不變的固體之變形而如一固體依照上面說過的溫度定律，受着不相等的澎漲而變形。

為省便起見，請把這種的運動名曰非歐克里得的移動。

如一有知覺的生物在旁，則牠的印像將被該物之移動所改變，但牠如能有合式的動作，則這仍可還原的。這只需最後此物與那有知覺生物的總和（看作一體），能作這些特別移動的一種，如我剛才所謂的非歐克里得的移動。人們如假定這有知覺生物的四肢與其世界中的別物體受同一的定律澎漲，則這事就是可能的了。

在我們習用的幾何上，雖然這些物體移動時是變形的，且其各部分不復保存其相對的位置，但是我們將看見那有知覺生物的印象仍是一樣的。

蓋各部互相的距離雖能變更，然起初相抵觸的部分最後仍是相抵觸的。是故觸覺的印象並未變易。

他方面，如留心上文關於光線之拆光與曲度之設想，則視覺的印象亦將未有變易了。

所以這些理想的生物，有如我們要把牠們所經驗的現象類集起來，以及分別在牠們當中的「位置的變易，」可用有意的相關動作去矯正。

牠們如建設一種幾何，這將與我們的不同，我們是研究不變固體之運動的；牠們的幾何是牠們能區別的位置變易，而這就是「非歐克里得的移動，」這就是非歐克里得幾何。

是故和我們一樣的生物，但牠的教育是受在這種的世界裏，則其幾何學將與我們的不同了。

四元世界——人們既能表現非歐克里得世界，同樣也可表現四元世界（le monde à 4 dimensions）。

視覺，縱然用一隻眼，與眼球的筋肉運動之感覺相加，便足使我們知道三元的空間了。

外物的影像畫在我們的眼膜上，牠是二元空間之圖畫；這就是透視。

但因這些物件是動的，有如我們的眼睛，故我們把同一物體用各種相異的眼光，可依次看見許多的透視。

同時我們觀察得由一透視至於他一透視時常有筋肉的感覺相伴。

如果自透視A至透視B，與自透視A^1至透視B^1這兩種經過都有同一筋肉的感覺相伴，我們把牠倆互相接近好比對於同性質的動作一樣。

其次再研究這些動作互相組合之定律，我們知道牠們形成一羣，而其構造與不變的固體之運動相同。

但我們已知道這是從羣的特性，我們才得幾何的空間與三元空間之概念。

是故我們明白如何三元空間的意思會從這些透視的景物產出，雖然其中每一個只是二元，因爲牠們按照某定律互相繼續下去。。。。。。。

好了，一如人們旣能在一平面上作三元的圖形之透視，人們也可在三元（或二元）的圖畫上做四元的圖形之透視。這對於幾家不過是一種玩意而已。

人們甚至可用各種不同的眼光把同一的圖形做許多的透視。

我們很容易表現這些透視，因爲牠們只有三元的緣故。

試設想同一物之透視依次相繼下去；而每一經過皆有筋肉的感覺相伴。

不必說，人們當認定其中兩個經過，如果都是同一的筋肉感覺的會合，爲同性的動作。

人們儘管可以想到這些動作按照我們任意的定律互相組合，例如使其形成一羣，而與四元不變的固體運動有同一的結構。

那裏面是絲毫沒有不能表現的，而這些感覺恰恰是那具有二元眼膜，又能在四元空間移動的一種生物所感受的。

就是在這種意義我們才敢說我們能夠表現第四元。

照這樣去表現我們在上章講過的易耳白（Hilbert）的空間，是不可能的，因爲這個空間已不是二次的連續物了；所以牠與我們尋常的空間，大有分別。

結論——人們可見經驗在幾何之萌芽上，有不可缺的地位；但因此就說幾何學是或有一部分是實驗的科學，那就錯了。

牠卽使是實驗的，但這也不過是暫時的，近似的。而此近似之程度又是何等的粗陋！

故幾何只是一種固體運動之研究；但其實牠是不管天然固體的，牠的對象乃是一種理想的固體，絕對不變的，這不過是一種簡化的，極遙遠的影像。這些理想物的概念完全是來自我們的精神作用，經驗不過與我們此將牠從那裏提出來的機會。

幾何的對象，是在研究特別的一『羣』；但這『羣』之意念，在我們腦中至少已強有力的預先存在。牠之支配我們，非如我們感覺之形式，而是我們會意（l'entendement）之形式。

但是，在這些可能的『羣』中，應該選出那認爲標準，以統轄各天然現象的一種。

經驗引導我們作這個選擇，但不支配我們；牠告訴我們並不是某某幾何爲最眞確，卻是使我們知道某種爲最便利。

人們當注意到我能够描寫我在上面理想的空幻世界，用尋常幾何的語詞。

其實我們即使來到那裏面，我們還是不會改換這語詞的。

在那裏面受教育的生物，自然覺得以創造一種合乎牠們的印象，而有異於我們的幾何之幾

何爲便利。至於我們對着同一的印象，我們一定覺得以不改變我們的習慣爲最便利。

第五章　經驗與幾何

一、前文中我已反復證明幾何原理幷不是經驗的事實，且特別說明歐克里得公理決非實驗可以證明的。

我所根據的理由無論如何堅實，我相信還須加以申說：因爲有一種根深蒂固的謬想存在許多人的腦海中咧。

二、設有一物質的圓圈，試量其周與徑，又試算此二數之比例爲π否，這卻是做什麼呢？人們所做的幷不是關於空間特性的試驗，而是有關那作成此圖之物質特性的試驗，以及那做成用以測量的密達尺物質特性的試驗。

三、幾何學與天文學——人們對於上面的問題，又有一種說法。倘若陸氏的幾何是眞的，則一顆遠星的視差（parallaxe）將是有限的了，再如李氏的幾何是眞的，這數就將是負的了。這些結

果好像是可供試驗的，所以人們希望天文的觀察可以在這三種幾何中有所採擇。

但在天文中所謂直線，簡直就是光線的路程。所以即使萬一有人發現了負數的視差，或證明一切視差皆大於某定限，人們對於下述的兩結論，當有所選擇；我們或是捨棄歐克里得幾何，或是修改光學的定律而認可光之傳達嚴密講起來，不是直線。

大家對於後面這個解答必認為更便利，這是不消說的。

所以歐克里得幾何對於任何新穎的試驗都是不怕的。

四、人們能否證明某種現象在歐克里得的空間是可能的，而在非歐克里得的空間就不可能，於是經驗審察這些現象時，就與非歐克里得的假設直接發生衝突麼？我看起來，這種問題實無存在的價值。我以為提出這個問題不啻說有能用呎與吋計量而不能用尺與寸計量的長度麼？這樣當經驗審察這長度時，就和那十寸為尺的設想將直接發生衝突？這個問題之荒謬，大家一望而知。

我們且把這個問題再仔細一看。我假定在歐克里得的空間中有一直線含有二種特性，姑名之曰A與B；而在非歐氏的空間中牠含有A性，但無B性；最後我假定唯有直線既能在歐氏空間

中又能在非歐氏空間中含有A性。

果然如是，那麼經驗就可以在歐氏的設想與陸氏的設想中有所採決了。人們就可以見得某某可試驗的而具體的物件（例如一道光線）含有特性A，由此可以結論光是直線的，然後再看牠有無特性B。

但其實不然，因爲沒有一種特性如特性A的，可以作爲一種絕對的標準來認識直線，而辨別牠於其牠的線。

譬如有人將謂：「這個特性必是如此的：直線之爲物，卽凡含有此線之圖形移動時，勢必變動此圖之各點相互的距離，且使此線之各點仍舊固定？」

其實，這就是在歐克里得或非歐克里得的空間中直線所有而唯牠獨有的一種特性。然而人們如何用經驗可以認識這種特性是屬於某某具體的物呢？因此勢必量其中的距離，但又何以見得用那物質儀器量得的具體數量，就可代表那抽象的距離呢？

對於這個難點，人們僅僅把牠打退了一步而已。

其實我剛才所說的特性，並非直線獨有的，所以這是直線與距離二者的特性。如要將牠做爲絕對的標準，人們不特需要證明除了直線與距離之外，牠不屬於任何線，還要證明除了直線之外，牠不屬於任何線，又除了距離之外牠不屬於任何數量。但這是不確實的。

所以要想借一種具體的實驗能在歐氏幾何中解釋一切，而不能在陸氏幾何中解釋一切這是不可能的，因此我結論：

任何實驗與歐克里得公理永不會有所矛盾；即與陸氏公理亦永不會有所矛盾。

五，但只管歐氏幾何（或非歐氏幾何）與經驗不致直接生起衝突，這還是不够的。不能是這樣說麼：牠們所以與經驗發生矛盾，除非侵犯充足理由原則 (le principe de raison suffisante) 及空間相對原理吧？

請述之如下：設有一物質系統；一方面我們要看那系統之各物體的「狀態」（例如其溫度，其電位等等）他方面要看牠們在空間的位置；而在這些允許規定此地位的理由中，我們還要分別那規定牠們相對位置的相互距離，以及那些規定系統的絕對位置與其在空間的絕對方向之

條件如何。

在這系統中所發生之現象的定律，與這些物體的狀態及其相互的距離是有關係的；然以空間之相對性及其被動性的關係，這些定律和這系統之絕對的位置，與絕對的方向是無關的。換言之，在任何時刻，物之狀態及其相互距離，僅根據這些物體本身的狀態，及其初時的相互距離，而與此系統在初時絕對的位置及絕對的方向毫不相干。簡而言之，我可名之曰相對定律。

一直到此，我所說的有如一位歐克里得幾何家說的話。然我已申明，無論何種經驗可有一歐氏的設想之解釋，但同時也可有一非歐氏的設想之解釋。好了，我們已做了許多的試驗，我們已把他們在歐氏的設想中解釋，而我們已認識這些試驗是與相對定律不相矛盾的。

我們且來在非歐氏的設想中解釋之；這總是可能的，不過我們不同物體之非歐克里得距離在這新解釋中常與原來的解釋中的歐克里得的距離是不同的。

把我們的經驗用這新式的方法解釋，還可與『相對定律』脗合嗎？如其不然，人們沒有權利說經驗已證實非歐克里得幾何之謬誤嗎？

這眞是杞人憂天了；其實人們如要把這相對定律嚴密的應用起來，那就非應用到宇宙全體不可。蓋人們如僅認定宇宙之一部分，又假使這部分的絕對位置一變，則其與宇宙間各物之距離亦將變，牠們對於這局部的影響因此將能有所增減，也因此其中能够改變萬象的定律了。

然我們的系統如是宇宙全體，則實驗勢必不能告訴我們牠在空間有什麽絕對的位置與方向。無論我們的儀器何等精巧，我們所能知道的，只是宇宙局部的情狀，及其相互的距離。

由是我們的相對定律可這樣說法：

我們在我們的儀器上所能測視的記數僅隨我們在初時所能測視的記數而定。

但這種的說法與任何實驗的解釋無關。所以如某定律對於歐氏的解釋爲眞，當然非歐氏的解釋也眞了。對於這個題目，請再讓我支離一回。我上面已經說過規定一系統中各物位置的理由；我還當說明規定牠們速度的標準；於是我將能分別那借以變動各物相互距離之速度；他方面，系統之旋轉的與運動的速度，即是說，借以變動絕對的方向與位置之速度。

爲使人家完全滿意起見，則相對定律宜這樣說法才好：

在任何時刻物之情狀與其相互距離，一如同這時借以變動這些距離之速度，僅靠初時這些物體之相互距離與其情狀為標準，一如那初時借以變動這些距離之速度，但這與系統初時之絕對的位置及方向既無關係，又與初時這絕對的位置與方向變動之速度無關。

不幸這樣說明的定律不合乎經驗，至少是與我們普通解釋的經驗不合。

今如有人遷居在一星球上，那裏的天空常是雲霾滿佈，以至永不能看見別的星球；則此人一定以為生活在獨立空間的星球上。然此人當可覺得球的旋轉，或用量星球之扁平度的方法，（這就是我們普通藉天文觀察的辨法，但亦可用純粹地文學的方法，）或用傅哥爾（Foucault）擺之試驗所以此星球之絕對的運動亦可顯明了。

這裏面有一件事實觸犯哲學家，但物理學家則非承認不可。

人們知道牛頓（Newton）藉此以結論絕對空間的存在；我對於這種見解，卻不能採用，我將在第三部中說明所以然。現在我尚無意來討論這個難點。

所以在相對定律說明中我必當免去混合各種速度在那些規定物體狀態的結論中。

雖然，這個困難對於歐氏幾何及對於陸氏幾何都是一樣的；所以我對此無何種不安，且我只是便中談及而已。

有關緊要的，就是結論：經驗對於陸氏幾何與歐氏幾何不能有所定奪。

總之，無論如何反復申辯，那實驗主義的幾何（empirisme géométrique）並無有理的意義。

六、經驗不過告知我們物與物間之關係（le rapport）；至於物與空間之關係，或空間各部之互相關係，都是經驗論不到，也是不能論到的事呵。

讀者對此必回答道：『不錯，唯一的經驗是不够的，因爲牠只給我們一個含有許多未知數的方程式；但我如能做許多的試驗，則我將得足够的方程式去計算未知數了。』

單單知道大桅杆的高度，並不足以計算船長的年齡。就是把那船裏各種木塊統計了，人們將得許多的方程式，但還是不能知道他的年齡。所有關於那些木塊的測量而發現的東西，只是有關木塊的，除此以外，並無其牠。同樣，你的經驗無論如何多，如只能及於物與物間之關係，故絲毫不能

發現什麼空間各部分的相互之關係。

七、你們又將說麼？如果經驗及於物體，那麼至少及於物體之幾何的特性。

那麼先請問物體之幾何的特性，究作何解？我假定這就是物體與空間之關係；所以這些特性是不可試驗的，因爲試驗不過及於物與物間之關係而已。這樣已足見得此並非經驗不經驗的問題了。

然而我們先總要了解物之幾何的特性的意義。當我說一物含有許多部分，我假定在這裏我並不指明一種幾何的特性，即使我給我假設的最小部分一個不合的名辭叫作點，這也還不是幾何之特性咧。

又如我說某物體之某部與另物體之某部相接觸，我所說的是二物間相互之關係的命題，而并不是物與空間之關係。

我假定讀者承認我剛才所說的并非幾何特性；我確信至少讀者承認我這些特性與一切數量的幾何毫無關係。

既然如此，今設有一固體是用共同聯在O點的OA，OB，OC，OD，OE，OF，OG，OH八根小鐵條作成的。

此外另有第二個固體，比方是一木塊上塗三墨跡名曰αβγ。其次我假定我們覺得我們能够使αβγ可與AGO相接觸，（意即α與A，β與G，γ與O皆同時接觸）因爲人們可依次使αβγ與BGO，CGO，DGO，EGO，FGO接觸，其次與AHO，BHO，CHO，DHO，EHO，FHO，又其次αγ可依次與AB，BC，CD，DE，EF，FA接觸。

這就是人們可審察而得的，而事先並不必知道什麼空間的數量之特性及形式。這種審察是絲毫不及於『物體之幾何特性』的。倘若這些受試驗的物體是按照與陸把周夫斯基的羣（意即根據在陸氏幾何中之固體的一般定律）有同一構造的羣而運動，則這些觀察將爲不可能的了。所以牠們足以證實這些物體是按照歐氏的羣行動的，或至少也不是依照陸氏的羣而運動的了。

這些審察與歐氏的羣相符合，這是容易見得的。

因爲我們能够作這些觀察，假使物體αβγ是我們普通幾何中不變形的固體，而爲直角三

角形，又如ABCDEFGH諸點爲一棱體之角尖，此棱體乃我們普通幾何的兩個正六面錐體（2 pyramides hexagonales irrégulierés）湊合而成，二者之公共底面爲ABCDEF其錐尖一爲G一爲H。

現在假定不用前面的審察，而如剛才依次把αβγ聯合在AGO，BGO，CGO，DGO，EGO，FGO，AHO，BHO，CHO，DHO，EHO，FHO諸形上，然後人們可將αβ（而不再是αγ了）依次聯合在AB，BC，CD，DE，EF及FA諸形上。

這將是人們所能做的審察，假使非歐氏幾何是眞的，只需αβγ與OABCDEFGH二體是不變的固體，假使第一體是直角三角形而第二體是大小合式的兩個相重的正六面錐體。

所以如果這些物體依照歐氏羣而運動，則這些審察將是不可能，但照陸氏羣而運動，牠們便可能了。所以牠們足以（如有人去做）證明這些物體不是依照歐克里得羣運動的。

是故我對於空間的形狀，性質及諸物與空間的關係，不必做任何假設，又不必支配某物有任何的幾何特性，但我已做了許多的審察，使我能夠說明在某種情形中這些試驗的物體依照歐克

里得摹而運動，在另一種情形中牠們依照陸把周夫斯基摹而運動。

但我願人們不要說那第一種爲證明空間是歐克里得試驗的審察，那第二種爲證明空間不是歐克里得試驗的審察。

其實人們可想像（我只說想像）有些物體運動有使第二種審察之可能。其證據卽在那一初來的機械匠苟能吃苦賣力，就可把牠造成。但你不要就此結論空間是非歐克里得的呵。

並且就是當那機械匠造成那些我方才說過的奇怪物體時，那些尋常的固體仍能存立，故必結論空間同時是歐克里得的與非歐克里得的了。

例如設有一半徑R極大之圓球，其溫度依照我討論非歐克里得世界時之定律，由球心漸降至於球面。

有一種澎漲率極微的物體，我們可認爲尋常不變的固體；他方面，有一種澎漲率極大的物體，則可認爲非歐克里得的個體。我們可有兩個雙重的錐體 O A B C D E F G H 與 O′ A′ B′ C′ D′ E′ F′ G′ H′ 又有兩三角形 $\alpha\beta\gamma$ 與 $\alpha'\beta'\gamma'$。第一雙重錐體將是直線形成的，第二錐體是曲線

形成的；三角形 α β γ 是用一種不可澎漲的物質製成，而 α′、β′、γ′ 是用一種極易澎漲的物質製成。用三角形 αβγ 與雙重錐體OAH就可得第一種審察，用三角形α′β′γ′與雙重錐體O′A′H′就可得第二種審察。於是經驗似乎起先證明歐克里得幾何是眞實的，然後證明這是謬誤的了。

所以經驗只及於物體，并不及於空間。

補充語

八、爲完全起見，我還當說到一個很難的問題，但是因爲太長的緣故，只能把我在玄學與道德雜誌及在一元雜誌中（Revue de Métaphysique et pe Morale; The Monist）的著作概括於下。現在要問，我們所謂的三元空間究作何解？

我們已知道被我們筋肉的感覺所發覺的『內部變動』之重要。牠們可以用爲確定我們身體上各種的態度。我們試任意認定態度A爲起點。當我們由態度A到態度B時，我們受得一些筋肉的感覺S，而這感覺S即可確定B。但我們總是要注意有時S與S′的兩種感覺可以確定同一態度B。（因爲起初態度A與最後態度B既相同，其中經過的態度及相伴的感覺可以不同的。）

所以究竟用何法，我們認明σ與σ'有相等的價值哩？這是因爲牠們可用以對消同一的外界的變易，或更擴而言之，在對消外界的變易之時，二感覺之中，其一可以其牠代替。

在這些感覺中，我們已區別那些自身能對消外界的變化，而名之曰『移動』。對於兩個很近的移動，我們既不能有所辨別，故這些移動的全體含有物理連續之特性；經驗告訴我們說：這就是六元的物理連續之特性；然空間自已到底有多少元，我們卻還不知，我們當另去解決一問題。

何爲空間之一點？大家自信都知道的，其實這是幻想了。我們所見的，當我們盡力去表現的空間之一點，這就是白紙上之黑點，黑板上之白點，這總是一件東西。所以這個問題要如下文去解釋才行：

當我說B物現占之位置與剛才A物所占者爲同一點，這是何意？或用何種標準，我可有此種認識？

我可說，雖然我未移動（這是我由筋肉感覺知道的），我的第一指方才觸了A點，現在觸着B點。我可用別的標準來說，譬如換一個指去指點，又或用眼光去觀視。然第一標準已足够了，我知

道如第一標準回答對的，則其餘的亦必有同一的回答。這是由經驗我纔能知道的，但這是我不能先驗的知道的。這也是爲了這個緣故，我才說觸覺不能及遠，這又是另一種方法說明同一的經驗事實。反之，如我說眼光可遠及於物，意即謂眼光所供給的標準可回答對的，而別的標準則回答不對的。

其實，一物雖離遠了，然其影像仍可留在眼膜之同一點。故視官回答對的；觸官之回答不對，因爲我剛才接觸那物之手指現在已和牠遠離了。如果經驗告訴我們說一指拇回答對的，同時牠一指拇回答不對的，我們仍是可以說觸覺作用可以及遠（le aoucher séxerce à distance）。

總而言之，關於我的身上每一態度，我的第一手指確定一點，而唯牠能確定空間之一點。

由此每一態度即有一點相對應，但往往同一點可有許多不同的態度相對應（就是在這種情形中我們才說我們的手指未動，所動者是其餘的體部。）所以在這些態度的變易中我們要分明那手指未移動的一種變易。我們怎會想到這步？此因我們常常注意到在這些變易中那接觸物體之手指幷未脫離。

所以我們可以把所有的態度列入同一班次，這些態度可由我們前面所分別的變易中之一彼此互相引出。故同班的各種態度同以空間之某點相對應。所以每一班即有一點相對，每一點即有一班相對。但人們可以說，經驗所達到的並非點子，而是這些變易組成之班次，或更好些，是相關的筋肉的感覺之班次。

於是凡我人說空間是三元的，即是簡簡單單的說：這些班次的全體有如三元物理的連續之特性。

人們又可結論這是經驗告訴我們說空間是幾元的。但實際上，此地經驗不及於空間，而及於我們的身體，及其與鄰近物之關係。並且這些經驗是很粗陋的。

在我們頭腦中，早就存有一些羣之觀念，其理論已經李氏研究過了。我們到底揀那一羣作標準，以比較那些自然界的現象？這一羣選了之後，我們還要揀那一小羣，以確定空間之一點？經驗用指示我們那一種選擇最合我們的身體特性的方法引導我們。然而牠的功用亦僅限於此。

祖傳的經驗。。。。

有人常說：如個人的經驗未能創造幾何，祖傳的經驗則爲不然。但這是怎講呢？其意是否我們不能由經驗而證明歐克里得的公理，但我們的祖宗竟能做過？這絲毫不是的。人們的意思，卽用自然選擇法，我們的思想能與外界的情形適合，牠採用了最有利益的幾何；易言之，那最便利的。這一層是與我們的結論完全相符合的，幾何學不是眞實的，但是有益的。

第三部　力

第六章　古法的機械學

英國人將機械學作實驗科學教授；在大陸的國家，人們就認爲一種演繹的和先驗的科學。不必說，這是英國人有道理；不過在習用的方法中，人們怎會忍耐這久？何以大陸的學者雖想脫離他們前輩的習慣，但總是不能完全逃出這個難關呢？

他方面，如果機械學原理之來源不過是些經驗，這是否就是暫時的，或近似的呢？將來嶄新的試

驗不能使我們一旦修正這些原理，或竟推翻牠們麼？

這就是自然會有的疑問，而其解決之困難主因是在一般機械專書不能分明何爲經驗，又何爲算學的推理，何爲公約又何爲假設。

這還不算數：

（一）絕對的空間是沒有的，我們所會意的不過是相對的運動而已；但是人們說明機械的事實時，總當空間是絕對的而把牠們歸入其中。

（二）時間不是絕對的；所謂兩個歷時相等只是一種身本無意義的斷語，而要得有一種意義亦必須公約。

（三）不特我們沒有兩個相等的時間的直覺，幷且我們對於兩地所發生的兩件事端同時幷現（la simultanéité）的直覺也是沒有；這就是我在時間之測量（La mésure du temps）（註）一文中已詳論過了。

（四）最後，我們的歐克里得幾何亦不過是一種公約的言語；我們可以把機械的事實歸入

非歐克里得的空間，這雖然是個比較不便利的標準但與我們平常的空間是同一的合法；一切定理的說明雖似從簡入繁，但這還是可能的。

由是那絕對的空間，絕對的時間，甚至幾何學，幷非機械學所當服從的條件；這些東西之不先機械學而存在正如法文不必比那些用法文表現的眞理先存在。

人們可把機械學的基本定律用一種與這些公約毫不相干的言語說明；而人們將必更爲明白這些定律的本身是什麼；這就是安得那得（Andrade）先生在他的物理的機械學中所做過的部分的嘗試。

如此說明這些定律自然將較爲繁複，因爲正是爲要縮短而簡化這種說明，才想出來這些公約。

至於我呢，除了關於絕對的空間外，我把這些困難姑且放下；這決不是忽視牠們；因爲我們在前兩節文中，已經充分討論過了。

所以我暫且承認那絕對的時間，及歐氏幾何。

惰性的原理——凡物不受外力只能作直線的等一的運動（mounement rectilique et uniforme）。

這是否我們必有的先驗的眞理？果眞如是，爲何希臘學者竟沒有知道？他們又怎能相信那發生運動的原因一停，則那運動亦卽停止呢？又或凡物如不受外界阻力則常繞圓旋轉，卽所謂運動中之最高尙者（le plus noble）？

人們如說物之速度是不可變的，假使牠無變易之理由，則人們不是也可堅持說如物不受外界改變牠的原因，則此物之位置不易，或其軌道之曲度不變？

所以惰性原理既非先驗的眞理，是不是經驗的事實呢？但人們曾否試驗過毫不受外力之物體，如曾做過，則人們又何從知道這些物曾否已受了外力呢？人們常用下面的例：一彈子滾於一張大理石的平面上好久不停止；但我人何以說牠是毫不受外力呢？是否因爲牠遠離了他物，所以說牠是毫不受外力麼？今若任意擲之於空中，牠離地更遠；但大家知道在這種情形之下牠將受地心吸力的影響。一般機械學教授常是很快地通過這例；但他們加說惰性之原理爲其結果間接證實。

這是他們沒有好好的解釋，其實他們想說人們可以證實一更普遍的原則之各種結果，而惰性原理不過其中之一特例而已。

對於這條更普遍的原理，我想這樣說明：

某物之加速度僅恃此物之位置及其鄰近物之位置與速度。照算學家的說法，就是宇宙間各種物質分子運動皆根據二次微分方程式。

爲說明這實在是惰性原理之自然的推廣，我還要求讀者允許作一種幻想。我上面已說過，惰性原理幷不是我們先驗卽有的；別的定律，和牠一樣，也能與充足理由之原則相合。今有一不受外力之物，與其假定牠的速度不變，人們可以假定這是牠的位置或其加速度不當變易的。姑了，我們此刻暫把這兩個假想的定律之一認爲自然定律，而用以代替惰性定律。然則將有若何的自然推廣？稍一思索便可知道。

在第一項中，人們當假定物之速度僅依其位置與鄰近物體之位置而定；在第二項中，假設物體加速度之變易，僅依物之位置，鄰近之物體，牠們的速度及加速度而定。

換算學的術語說：就是運動之微分方程式在第一項中是第一級的，在第二項中是第三級的。

現在把我們的幻想修改一下。我假定有一與我們太陽系相似的世界，不過因一種特別的意外其中衆星的軌道沒有離心性及傾斜，我又假定星羣的物質太小，以致牠們相互擾亂的影響極弱。那麼在此種星球上的天文家必結論說，凡星球之軌道必爲圓形，並與某平面相平行；某星球在某時間的位置已足規定牠的速度與軌道了。牠們所採用的惰性定律必是我剛才說過的第一假設定律。

今試想這個系統有一天忽被來自遠方星座的一大堆物質極速地穿過。於是所有軌道必大爲擾亂。我們的天文家還不致十分驚訝；他們以爲這顆新星乃是唯一的禍物。他們說，當這大星遠離之後，秩序自然又可恢復；星球與日球的距離雖不能變成像肇禍以前的原狀，但一待搗亂的星去了之後，則各軌道仍爲圓狀是無疑的。

這一直要等那搗亂的東西遠離之後，而那些軌道不恢復圓形，卻變成橢圓的，只是這樣，這些天文家才知道他們的錯誤，以及有重做他們的機械學之必要。

我已把這些設想申說了一番；因爲好像人們不能大知道何爲普通的惰性定律，若不將牠與一個相反的設想對照。

現在卻好了，這個普通的惰性定律已由經驗對正否，并可否對證？當牛頓著原則論一書時，他以爲這是已得的眞理，並且已由試驗證實了。他這種的見解不特是惑於就人體論力之說（l'idole anthropomorphique），——我們以後再說罷——並且受蓋利烈（Galilée）工作的影響。他還受了克百烈（Képler）定律的本身影響；蓋根據這種定律，凡一星球之軌道可由其初時之位置與速度確定之，而這正是我們普通的惰性原則所要求的。

如要這種原則單是表面上的眞理，又如怕將來這個原則被有如我剛才與之相反的原則推而代之，那末除非我們被特別的意外所誤，有如我在上面所說的幻想中已使我們理想的天文家走入迷途的意外一樣。

這樣的設想是太不相像，不値得在這裏停留。誰也不信有這種偶然的事。依照觀察準確的程度如何，那兩離心率（excentricite）適皆爲零的或然性（la probabilité）不是較小於一

個恰正是〇・一，一個是〇・二的或然性，這是無疑的。一件簡單的事體之或然性不必小於一件複雜的事體之或然性；然假使前者發生了，我們不能相信自然界有心騙我們。這種的誤會的假設既然免掉了，我們就可以認爲在天文學一方面，我們的定律確已被經驗證實了。

然天文學不是物理學全體。

人們豈不想到一旦有些新的實驗來，使在物理學中某部分的定律不適行嗎？凡一實驗的定律都待修改的，人們當常常希望某某定律將來可代以更精確的定律。

雖然竟無人眞正疑心我們所說的定律終亦被推翻或遭改正。何則？這正是因爲人們永不能把牠作一決定取捨的實驗。

如要這個實驗是完全的，第一要宇宙萬物經了某定時間仍舊歸還原地，恢復原始的速度。在那時候，人們就可見得牠們是否仍隨前次的軌路了。

但這種實驗是不可能的，人們最多只能做到一部分，而且無論怎樣做總有些物體是不能還原的；所以各種對於定律的抵觸，由此都可解釋了。

這還不算數；在天文學中我們看見我們所研究運動的星球，且我們承認牠們不受其牠不可見的物體之影響。在這種情形之下，我們的定律要麼可以對正要麼就不可對正。

但在物理學中則不然，若說一切物理的現象都是由於運動，這就是其中的分子運動，我們不能見到。故如我們所見的某物之加速度，除與可見物及已知其存在而不可見物之分子的位置與速度有關，此外還與牠物有關，則我們何常不可假定這牠物卽其牠新分子之位置或速度，這些分子是我們從前所不疑其存在的。於是那條定律仍可保存。

且讓我用算學的術語把上面的意思換一個形式說明。我假定我們觀察 n 分子，且其 3n 座標可以滿足 3n 四次微分方程式（而非如惰性原則所要求爲二次的）。我們知道如加入 3n 助變數則 3n 四次方程式可化爲 6n 二次方程式。由是如假定這 3n 助變數用以表示 n 個不可見分子之座標，則結果又合乎惰性定律了。

總之，這個定律既在一些特別款項中可以用經驗對正，卽可擴充於普遍的款項中，因爲我們知道在這些普遍的款項中，經驗既不能把牠肯定也不能反對。

加速度定律——物之加速度等於質量除力之商數。這個定律可用經驗對正嗎？爲此必將此定義中之三量加速度，力，質量，設法測定。

我承認人們可以測定加速度，因爲我暫把關於測量時間之困難，按下不提。但力與質量當如何測量呢？我們簡直不知道這是什麼？

何謂質量？（masse）牛頓說此即體積乘密度。——湯姆生（Thomson）與代衣（Tait）都以爲這不如說密度乃體積除質量之商。——何爲力？賴克南希（Lagrange）說這是發生物之運動或引其傾向運動之原因。——紀哥夫（Kirchhoff）反說這是質量乘加速度之積。然則何以不說質量即加速度除力之商？

這種困難眞是解不開的死結子呵。

當人們說力乃運動之起因，這不啻談玄學，人們如把這種定義認爲滿足，牠一定毫無效果。要想一定義有點功用，牠必能指示我們如何測力；僅此已足，我們並不希望牠告訴我們力之本質是什麼？更不必問牠是運動之因或果。

所以第一要定明二力相等之標準。如何二力才相等？人們說，凡相等之二力施於同一之質量上可發生同一之加速度，又或二者直接相反的時候，其勢力平均。這種定義不過騙騙眼目而已。我們決不能把加於此物之力換在牠物之上，有如把火車頭調換在別的一輛車子上的方便。所決不能知道施於某物之力如果換在牠一物時，其加速度如何。我們又無從知道曾爲直接相反之二力在不直接相反時，牠們將爲何物。

當人們用動力機測量力之大小或以牠重量使其平衡時，這箇直就是要把這定義變爲物質化。設有自下向上二直向力F與F'各加於C與C'兩物體上；我又把一個重物P先掛在C物上，後在C'物上；如在這兩款中都得平衡，則我結論F與F'的力相等因爲牠倆都是等於P物之重量。

但我能確定當我由物體C將P物移到物體C'時其重量未易否？此大不然，我確信這是相反的；我知道重量之強弱，隨地而易，譬如在兩極的當比在赤道的爲強。無疑的，這種差別是很微的，而在實用中我是不算牠的但一條很完美的定義卻要有一種數理的精密性才行；這種精密是沒有的。我所說的重量，自可應用到動力機中發條的力，因爲溫度以及許多的環境均能使其變動。

這還不算數：人們不能說P重量是施於C物上而直接與F力平衡。所施於C物者，乃P物加於C物之作用；P物一方則受有自己之重量，一方則受有C物加於P物之反力R。結果F力等A力，因此力使其平衡之故；A力等於R力，此說根據主動力與反動力之原理結果，R力等於重量P，因此力使其平衡之故。由此三等式，我們方才結論F等於P。

所以在兩力相等之定義中，我們卽需藉主動力等於反動力之原則以立說；由是這個原則再不可認爲經驗之定律，而當認爲一種定義。

所以我們可有二法以認識兩力之相等；互相平衡之兩力相等；主動與反動力之相等。然我們上面已見過這兩種方法是不足的；我們勢必採用第三法，則且承認某種力，例如物之重量，其方向與量均爲常數。但是我已說過，這第三規則乃是實驗的定律，只是近似的眞實；這是不好的定義。

所以我們要來談紀哥夫的定義；力等於加速度乘質量之積。這條『牛頓定律』也不能看作實驗的定律，牠不過是一定義而已。但這定義還是不充足的，因爲我們不知質量之爲何物。自然我們可藉牠來計算在不同的時候加於同一物體的兩力之相比；至於加在兩不同物的兩力之比，則

非其所能了。

為要補充這個定義，我們又須引用牛頓第三定律（主動力與反動力之相等），此不當認為實驗的定律，而當認一種定義。今有互相抵觸之二物A與B，A之加速度乘其質量等於B施於A之主動力；同樣，B之加速度乘其質量等於A施於B之反動力。若下定義，主動力既等於反動力，則A與B質量之比重當等於二者加速度之反比。兩質量之相比就是這樣定明；而要經驗去對正這個比是常數。

如果除了AB兩物之外，並無世界上牠種物力參加，則此定義甚善。其實不然，A之加速度非特由於B，且由於別的C，D等物。所以如要應用先前規則，必須將A之加速度分解，成若干支部，而在這些支部中認清何支部是由於B的。

如我們承認C施於A之力，是簡單加在B施於A之力上，雖有C之參加，仍不變B施於A之力，或雖有B之參加，不改C施於A之力；是故如我們承認兩物相吸引，其吸引力之方面是在連接兩物之直線上，且此力只倚賴兩物之距離如何；一言以蔽之，如我們承認向心力之假設，則這種的

分解還是可能之事。

人們知道，如要定天空中星球之質量，人們所用的原則大為不同。萬有引力律曰，兩體之吸引力與其質量成比例，今如 r 為牠倆之距離，m 與 m' 乃其質量 k 代表常數，則此吸引力為：

$$\frac{kmm'}{r^2}$$

但人們所測量的并非質量，是即力與加速度之比而是有吸力的質量；並非物之惰性，而是牠吸引之能力。

這是一個間接的方法，理論上不一定是需要的。也許吸引力與距離平方成反比例，而不與質量成比例，此即：

$$\frac{1}{r^2}$$

而非

$$f = kmm'。$$

倘若是這樣的，人們因天體的相對運動之觀察，可以測定這些體的質量。

然我們有無承認向心力假設之權？這個假設是否嚴密的精確？牠永不會與經驗相矛盾？誰敢斷定呢？且如我們捨了這個假設，則此慘淡營造而成的大廈登時將傾覆了。

我們再無權可說A之加速度由於B力之支部。我們毫無方法別之於由C力或其牠之支部。那測定質量之規則，現在卻不能應用了。

然則主動力與反動力之原則中尚有何物存在？今如捨去向心力之假設，則此原則必當如是說明：凡在一系統中脫離任何外力之影響的物體，則加其上所有力之幾何總量將為零。易言之，此系統之重心運動將為直線的而等速的。

這樣才似乎是規定質量之一法；重心之位置自然是依據物的質量之値；故必整理此値，使其重心做直線而等速的運動；如牛頓第三定律是眞的，則那總是可能之事，而這可能之方法，普通唯有一種。

然世界上沒盡能脫離外力之系統；宇宙間各部分多少總受他部之力。故重心運動之定律，惟應用於宇宙全體才算嚴密的眞實咧。

是以如要從中知道各質量之值，必先觀察宇宙重心之運動。這個結果明明是荒謬之至；蓋我們僅知相對的運動；宇宙重心之運動是我們永世不能發覺的呵。

所以我們一無所有了，而我們的力量是白費了；不得已我們自認不中用，只好退讓到下面的定義：質量是一種係數，便於演算而已。

我們如把不同的價值支配到各質量，我們便可重新建立機械學。這個新的機械學既不會與經驗衝突，又無礙於動力學之普通原理。（惰性原則，力與質量及與加速度之比例，主動力與反動力之相等，重心直線而等速的運動，面積原則。）

不過這些新機械學的方程式，將比較的不簡單。我們聽好：比較不簡單的便是第一部分的項數，是即經驗先已告知者；人們或者可把質量稍微改變而不致使全部的方程式對於簡單有所增減。

黑子（Hertz）嘗問機械學的原則是否嚴密眞實的。他說：「照許多物理家的見解若有關係很遠的實驗可使那不可動搖的機械學原理改變，這眞是不可思議的；然而由經驗中得來的東

西，總是可用經驗矯正的。」

照我們剛才所說的，這未免有點杞人憂天了。動力學原則，我們起初看上去，似乎是經驗的眞力；但我們已經不得已把牠當作定義了。這是依定義力才得等於質量加速度之積；這就是一種原則，以後永不受實驗之攻擊了。這也是依定義主動力才等於反動力。

但是人們要說哪，這些不可對正的原則，是絲毫沒有意義的；經驗不能有所衝突；但牠們不能告訴我們以有用的東西；於是研究動力學有何好處呢？

這樣太快的判罪，未免太不公正了。自然界中沒有一種系統是完全孤立的，完全脫離外界一切影響的，但是有一種系統大約是孤立的。

人們如觀察這類的系統，人們不特可以研究其中各部分之相對運動，且可研究牠的重心對於宇宙間其他部分之相對的運動。人們就可見得這個重心運動大約是直線而等速的，正與牛頓第三定律相合。

這是經驗上的眞理，但決不會被經驗推翻的；其實一個比較更精確的經驗告訴我們什麼？牠

告訴我們說定律不過大約是眞的；但這是我們早已知道的了。

現在人們可以了解經驗何以可做機械學原則之基礎，而永不會和牠發生衝突的

人體力學（la mécanique anthropomorphique）——人們要說哪紀哥夫只是隨同一般算學家而傾向於唯名派，他雖是能幹的物理家也免不了這一層。他想有一種力之定義，因此他就採取了首先遇到的命題；但是力之定義，我們卻不需要。力之觀念是最原始的概念，不可分析的，不可規定的；我們都知道牠是什麼，我們對牠有一種直接的直覺。這種直覺來自努力之概念，而這是我們自幼就已熟悉的了。

然而第一就是這直接的直覺可以使我們知道那力的本身之究竟，但這還不足以建立機械學；況且這也是完全無益的。緊要的，不是要知道力之爲何物，是要知道怎樣測量此力。

凡是不能測量的，對於機械學家也是無用的，正和物理學家對於冷或熱的主觀是一樣的情形。這種主觀的概念既不能用數目表出，所以是無用的；假如一位大學者，他的皮膚對於冷熱雖是麻木不仁的；但他將能與別人一樣視察溫度表，而這樣已足建設許多熱學的理論了。

但這種努力之直接的概念不能用以測力例如平常人舉重時自比提慣包裹的人吃力。

還有一層，這種費力之概念不能使我們領會力之眞性質；最後牠不過留了些筋肉的感覺，人們決不相信太陽吸引地球時，牠受有筋肉的感覺。

人們所能探覓的，只是一種符號（symbole）比較那幾何家所用的矢還要不正確及不便利些，然大家都離開實際尚遠咧。

這種以筋肉感覺說力的概念（l'anthropomorphisme），在機械學發生時代占了很大的勢力；將來牠也許供給一種符號，爲少數人所滿意；然而牠是不能建立什麼東西含有眞正的科學特性或哲學特性的。

線之學派（l'école du fil）安得拉得（Andrade）先生在他著的物理的機械學教程中，曾把古代的人體力學重立新說。他用他所奇怪稱謂的線之學派以對抗紀哥夫也在內的機械學家一派。

這派想「把一切都歸納於一些質量很輕微的物質系統中，這些系統要是在伸張情形之下，

且能把極大的努力傳達於遠處的物體，這種系統之理想的形式就是線。」

一條傳力的線，受了這種力量立卽輕微地伸張；由線之方向我們可以看出力之方向，此力之量則視線之伸張而測定。

於是人們可以意想下面的一個試驗了。有一A物繫於一線；在他端我們激動某一種力，我們使此力變動一直到使此線伸張爲α爲止，同時我們登記A之加速度；今去A易之以B，再重新激動此力，或其他一種力，我們又使牠變動一直到使此線伸長爲α爲止；同時登記B之加速度。人們用A與B重複試驗，但須使線伸長爲β。這四個觀察所得的加速度當成爲比例。於是上面所說明的加速定律就是經驗上的對正了。

換一試驗法，人們可繫一物於同樣的等張的許多線之同時動作之下，再由試驗去尋找這些線的方向怎樣才能使這物平衡。這樣人們就可經驗的證明力之綜合規則了。

不過到底我們所做的是甚麼？我們由線受力後之變形而定明此力，這還算合理；其後我們承認如有一物繫於一線，則此線所傳給牠的努力等於物體施於此線的動作；結果我們還是用着動

力與反動力相等的原則，但這並不是認此原則是經驗的眞理，而是認爲力之定義。

這個定義和紀哥夫所定的同一是公約性的，但牠比較的不普通些了。所有的力不見得都被線傳達，（並且如要作此比較則這些力須是被同樣的許多線傳達才行，）假使人們承認有一條不可見的線把地球繫在太陽上，至少人們應相信是無法可以測視此線之伸長的。

由是以觀，我們的定義，十有九是不對的；人們決不能與以任何意義，所以還是要回到紀哥夫的定義才行。

那末何必費了這個周折呢？你們承認了力之某種定義，而牠在某種情形之下才有意思。在這樣的情形中你們用經驗證實牠引出加速定律。得了這經驗之許可，然後你們再將加速定律作爲在任何情形下的力之定義。

今如將加速定律認爲在一切款項中之定義，又認這些經驗並非此定律之立證，而是反動力定律之立證，或做爲彈性物體之變形只靠加於此物之力的證明，這樣不是比較簡單些嗎？

至於你們的定義成立之條件永不會完全滿足的，一條線永不會沒有質量的，此線除受繫結物反動力外不受其牠外力這都沒有算在內。

安得拉得先生的觀念頗饒興趣；雖對於我們論理上的要求，不能與以滿意，然能使我們對於機械學發生史更加瞭解。牠們所引起的思索能使我們看明人的思想如何從老實以筋肉感覺說之概念進到現代科學之意念。

我們於機械學之起原時，見得一種很奇特的，實即很粗陋的實驗；至終末時，則得一種很精確的很普遍的定律，而我們認此確實為絕對的了。這種確實性，可說原是我們認那種定律為一種公約我們才給與牠的。

然則加速定律與力之綜合規則，都不過是任意的公約了嗎？這是公約，不錯；任意的，就不是了；人們細看那些引導科學創造家採用公約之實驗，這些實驗無論如何不完美已足證明這些公約之合理而非任意的了。因此最好人們常常注意這些公約在實驗上的根源。

(註)玄學與道德雜誌第六卷一至十三頁(一八九八年正月)入參考科學之價值第三章。

科學與假設

第七章 相對運動與絕對運動

相對運動原理——人們曾經想把加速定律連續於更普遍的定律中。任何系統的運動當受同樣的定律的支配，不問人們把牠納於固定的座標軸 (axe fixe) 或納於作直線而等速運動的座標軸。這就是相對運動原理，我們有兩種理由當遵守之：第一，有最淺近的實驗證明之，其次相反的假設大爲我人所厭棄。

那麼我們承認了牠罷，并設有一力加於一物體；又有一位觀察者，其均一的速度正等於物的初速度，而此物對於觀察者的相對運動，必與牠在由靜止而運動的絕對運動相同。人們由此結論物體之加速度不靠牠的絕對速度，有人還想從此引出加速定律之證理咧。

這個證理已隱隱的散在中學課程之中了，顯明的這事是白費辛苦的。我們之不能證明這定

律，實因我們不得力之定義；這個阻礙處處碰見，因為我們前面的原理也未能供給我們所缺之的定義。

相對運動原理是很有趣味，而很可供研究的。我們且極力把牠精確的說明罷。

在上文我們說過一系統中各物之加速度只依其相對速度，及其相對位置，而毫不依其絕對的速度與位置，祇要這個系統的活動標軸的運動而沿直線而等速的運動。又或人們願意這樣說，牠們的加速度可僅倚其速度之差數及座標之差數，而非這些速度與座標的絕對值。

倘若這個原理是合乎相對的加速度，好點說合乎加速度的差數，那末把他和反動力原理組合起來，人們便可證明牠對於絕對的加速度還是眞實的。

所以現在我們要說的，就是如何證明加速度之差數，僅倚速度的及座標的差數，用數理的語詞說，就是這些座標的相差數可以滿足二次微分方程式。

這個證理可否由經驗中演繹出來，或由先天的思想生出來的？

讀者試反思我們在上文所說過的，便自可解答了。

這樣說明相對運動原理與上面我所說的擴充的慣性原理實相仿彿但也不盡然因爲一是座標，一是牠們的相差數。所以由這個新的原理所得的東西多於舊的，不過其中討論及其結論都是一樣的可不必贅述了。

牛頓的論見——我們現在遇見一個很重要的，甚至很紛爭的問題了。我們上面說過相對運動原理對於我們不特是經驗的結果，並且說過任何相反的假設都先驗的遭人們厭棄。然則何以僅是標軸沿直線而等速運動時，那個原理纔是眞實的呢？如這運動是會變的，或至少變成等速的旋轉運動，則這個原理對於我們似乎仍當有同樣的效力。但在這兩款中這個原理是不眞實的。

對於沿直線而不等速的運動我且不多說；仔細一看，一切謬解都可打消了。今如我站在車輛中，車碰着障礙物驟然停止的時候，雖是毫無一力直接的加在我身上，我也一定要倒在相反的方向。這沒有什麼神祕；因我雖沒有受着外力，但那輛車則已受到外力的衝動了。那兩物之相對運動便亂了，只要兩者之一的運動受了外來的變因；這毫不是奇怪的事。

我現在要仔細討論屬於標軸作等速旋轉運動的物體之相對運動。今如天空永是密布雲霓，我們又無法觀察那些星球，我們仍可結論地球之旋轉；其法在測視地球之扁平率，或用弗哥耳(Foucault)的鐘擺之試驗。

不過就是如此，說地球是旋轉的，可有意義嗎？苟無絕對的空間存在，那麼地球將繞何而旋轉，他方面我們安能承認牛頓的結論而相信空間是絕對的？

雖然，我們僅知這些可能的解答使我們詫異還是不夠，我們要一一的解析我們厭棄牠的理由何在，使我們選擇了一個的時候也有一個理由。所以望讀者恕我下文冗長的討論罷。

試仍回到我們剛纔的幻想：這便是重層的雲霾密布在天上使人們不能窺見星球，而人們亦不知其中有此；那末人怎能知道地球是旋轉的呢？他們一定比我們的祖先更要堅持說地球是不動的；他們還要等許多年代纔得有哥白尼(Copernicus)產生，不過這位哥白尼終久必到的；然則他怎樣來到呢？

這世界上的機械學家不會走來便碰着什麼絕對的矛盾。在相對運動的理論中，人們除了眞

正力之外，還想出兩種理想的力，是卽所謂普通離心力與組合離心力。所以我們理想的學者可以把這兩力看作實在的來解釋一切，而牠們與擴充的慣性原理并不見得有何矛盾，蓋這些力一種有如眞正的吸引力，靠系統各部分的相對位置，一種有如眞正的摩擦力，靠牠們的相對速度。

但是不久又有許多的難點喚起他們的注意；他們如能實現一個孤離的系統，則其重心運動將沒有一條大約是直線的軌道了。爲說明這個事實，他們可以利用離心力而認之爲實在的；且無疑的，他們以爲這是由於物體之相互動作。只是他們將不能看見這些力會消滅在牠們距離極大的時候，這就是說當牠們孤離愈實現的時候，不特如此，這離心力隨距離之增長而愈大，大至無窮。

這個困難對於他們已似很大的了；但他們所受的阻礙并不長久他們很快的就想出一個有如我們以太（ether）的很抽象的環境（milieu），而一切物體都沉浸其中，且受其拒絕力。

然這還不算數，空間是對稱的（symétrique），但運動定律並不表現對稱，牠們在左右之中應該有所分別。例如旋風總是向一個方向旋轉，然而天空中的星石因爲對稱的緣故，無區別地望左轉或望右轉，卽令我們的學者竭力造成一個完全對稱的宇宙，這個對稱是不能持久的，雖表面上

沒有理由可以說明這個對稱是向這方面擾亂了而非在對方面。

由此他們還可發明許多道理，這是無疑的，他們所發明的東西，頂出奇不過於浦多列麥(Ptolémée)的玻璃球，他們這樣前進，行見其愈弄愈繁，直待那位哥白尼來到，一條帚掃的乾乾淨淨，說道不如假定地球是旋轉的爲簡單些。

同樣我們的哥白尼對我們說，如今假定地球是旋轉的，則較爲便利，因爲人們可用很簡明的言語，說明許多天文學定理；那位哥白尼也說：今如假定地球是旋轉的，則較爲便利，因爲人們可以用很簡明的言語，說明機械學的定律。

然而絕對的空間，意即我們藉以觀察地球是否旋轉的標準，還是可以認爲毫無客觀的存在性。因此有了這個斷語：『地球旋轉』是毫無意義的，因無一實驗可以證明這個事實；像這種的實驗，不單不能實行，竟未能被思想之奇異有如魏勒(Jules Verne)的所能幻思，卽想得時，亦必生出許多的矛盾；易言之，『地球旋轉』與『較便利的假設地球旋轉，』這兩命題均是同一的且唯一的意義；而在兩者之中再沒有別的了。

或者人們還不以此為滿意，且覺得在許多的假設中，或在我們關於此題所能做的公約中何以其中竟只有一條是較其牠的便利，這個道理，似乎使人詫異。

然而遇到天文的定律時，人們就很容易容納這條公約，而關於機械學時，人們何故覺得詫異呢？

我們已知物體之位標是用二次微分方程式規定，而這些位標之差數，亦是如此規定的。這是我們所謂擴充的慣性原理與相對運動原理。如這些物體的距離也同樣是用二次方程式規定，則人們似乎應當完全滿意了。試問在何種限制之下人們纔得滿意，且何故他不滿意呢？

我們要明白這層，不如舉一個簡明的例。我假定有一個與太陽系相似的系統，但從這系統中，人們不能看見系統外之任何恆星，因此天文家僅能觀察太陽與其衞星之相對距離，而非衞星的絕對經度。我們如直接從牛頓定律中，演算那規定距離變動的微分方程式，這些方程式將非二次式了。我的意思就是說，除了牛頓定律之外，假使人們已知這些距離在起初時的值，及其對於時間的引數 (la dérivée)，這還不足算定這些距離在以後任何時間之值。所缺的與數，也許就是天文

家所謂面積常數。

然此地人們可以立在兩個不同的視點而識別兩種常數。在物理家的觀察，世界不過是一串現象，這些現象，一方面只靠起初時的現象，一方面只靠那些聯絡結果與來歷的定律。由是如果觀察告知我們某定量爲常數時，我們在下兩種觀察方法中就有一個選擇了。

或者我們承認有一種定律，按這個定律，那數量是不能變的；然牠在世紀之初，牠恰恰的不是別數而的確是這數；這數一直保存至今，那完全是偶然。所以這個數量可以名之曰偶然常數(constante accidentelle)。

或者我們反而承認有一自然的定律，按這定律，那個量必是此數而非彼數。所以我們又有個所謂本然常數(constante essentielle)。

例如照牛頓定律，地球公轉的週期，應當是個常數。然這數卻等於 360 天有餘而非 300 或 400天的，這個緣故，我可說是一種莫明其妙的初時偶然。這是一種偶然常數。反之假使在吸力表式中的距離指數是等於 —2 而不等於 —3，這並非因偶然，卻是因爲牛頓定律要如此的。這是本然

常數。

我不知道這樣說明偶然含意對其本身是否合法，也不知道這種區別是否染有人功色彩；但至少可以確信的是，當自然界尙含有所祕密時，以上的應用法便是很任意的，並且總是不能持久的。

至於面積常數，通常我們總認爲偶然常數。不知我們理想的天文家亦同我們一樣設想否？他們如能比較兩種不同的太陽系，他們或竟可覺得這個常數可有許多不同的值，然起初時，我恰恰就已假定他們的系統是孤立的，幷且他們不能觀察系外的任何恆星。在這情形之下，他們僅能有唯一的常數，有唯一的值，而絕對不變的；牠們一定還要把牠認爲本然常數。

爲免去一個反駁起見，我順便還說幾句，在這個理想世界的居民，既不能觀測又不能像我們規定那面積常數，因爲他們不能捉摸那些絕對經度；但這還不能禁止他們漸漸能注意到某一種常數，這常數自然地引導在牠們的方程式中，而這不是別的，這就是我們所謂面積常數。

然這樣又出事了，且請說來。如果這面積常數，是認爲本然的，認爲倚靠一自然的定律，那末如

要計算那些衛星在某時的距離，只要知道這距離在初時之值，及其一次引數之值。在這新的觀點上，那些距離可由二次微分方程式規定。

但這些天文家的意思認爲完全滿意否？我不相信；第一他們計算漸高次的微分方程式時立刻就見得這些方程式反化繁爲簡。最使他們注目的，就是這些方程式之對稱的困難。於是又要承認許多不同的定律，這要隨這些衛星的全體是多棱體形，或對稱的多棱體形而定，人們如要免去這個結果非得承認面積常數是偶然的不可。

我所舉的例是很特別的，因爲我所假設的天文家完全不管地球上的機械學，而他們的眼界只限於太陽一系。然我們的結論卻能適合於任何款中。我們的宇宙是比他們的大，因爲我們還有恆星，但牠是有限止的，於是我們對於這宇宙全體，可做一種推理，正如這些天文家對於他們的太陽系做一種推理一般。

由此人們可見，結果我們不得不結論那規定距離的方程式的次數是高於第二的；那末我們何以感覺得詫異呢？

爲什麽我們覺得各現象之次序依靠這些距離在初時的一次引數值爲自然，而我們對於依靠二次引數之値就疑惑呢？這不過是因爲我們常常研究擴充的惰性原理及其結果所以養成的一種習慣了。

在某定時的距離之値倚靠牠們的初時之値，牠們的第一次微引數，以及其他。這其他是什麽？人們如不願意這個只是二次引數中之一，人們可選定一種假設，有如通例假設這其他便是宇宙在空間的絕對方向，或此方向變動之速度，這也許是的，這一定是幾何家認爲最便利的解答；但對於哲學家就不見十分滿足了，因這方向是不存在的。

人們可以假定這其他是些不可見的物體之位置，或速度；這確是有些人做過的，幷且名之曰阿爾法體 (le corps alpha)，雖然我們的目的只要知道這物體之名稱就算完事了。這個巧法正與前章末了我說到惰性原理時的巧法酷似。

總之，困難是人造的，這只要將來我們儀器上的指示，僅依前已經給與我們的指示，或從前本可給與的，所要的統統在此。因此在這種情形之下，那我們儘管放心好了。

第八章 能與熱力學 (Energie et Thermodynamique)

能之系統——古機械學所引起的許多難點於是使人愛重一種新的系統名曰能的系統 (le système énergétique)。

能之系統產生於能之永存原則發明之後，這是愛兒母慈(Helmholtz)纔給了牠一個固定的形式。

我且規定作此原理基礎的兩種數量：一種是動能 (l'énérgie cinétique on farce vive)，一種是位能 (l'énergie potentielle)。

自然界中各種物體所能受到的一切變態總是根據下面兩種實驗的定律：

一、動能和位能之和爲常數。這就是能之永存原則。

二、如某物體之系統在 t_0 時之情形爲 A 在 t_1 時之情形爲 B，則牠由第一情形至第二情形總是經過一條路，這路使二能在分開 t_0 與在 t_1 兩時期之間隔時期之相差數的平均值爲最小。

這就是阿密耳東 (Hamilton) 原則，這是最小作用原則 (le principe de moindre action) 之一種形式。

能力的理論比較古傳的理論有下列之利益：

一、這個理論比較完全；就是說能之永存原則與阿密耳東原則所能告訴我們的比古傳的原理中之基本原則爲多，并且牠們排除了一些自然界所不能實行的動作，這些動作是與古傳的理論相符合的。

二、這個理論省了我們原子的設想，而在古傳的理論中，這幾乎是不可免的。

但這個理論他也引起許多新的困難：

那二種能的定義之不易規定同在第一系統中力與質量的界說之不易規定相差極少；然而人們對此究覺較易解決，這至少是在最簡單的款中如此。

設有一孤離的系統，係多數物質的點所組成；我們假定這些點子受制於力，只由於牠們相對的位置與相互的距離，而非牠們的速度。按照能之永存原則，其中該有力的一個倚數 (une fonction des forces)。

在這個簡單的款中，力之永存原則的說明是極簡單的了。與實驗合宜的某數量，該是固定的。這個數量是兩項數之和；其一僅由於物質點之位置，而與其速度無關；其二是與速度平方成爲比例。做這種分解只有一種方法。

這兩項數之第一項我名之曰 U，即位能；第二項數我名之曰 T，是即動能。

今如 $T+U$ 爲常數，自然無論什麼 $T+U$ 的倚數也是如此：

$$\varphi(T+U)$$

但這個 $\varphi(T+U)$ 倚數將不是兩項數之和：即一項是不靠速度的，一項是與速度平方成比例的。在固定不變的倚數中唯有一種倚數具此性質，即 $T+U$（或係 $T+U$ 之一次倚數，這是不要緊的，因爲用單位與原點之變換法，這個一次倚數總可變成 $T+U$ 的。）此即我們所以謂能的；其第一項我們名之曰位能，第二項則謂爲動能。所以這二種能力的定義可以一直推下去毫不混雜。

物之質量的界說亦是如此。動能可很簡單的用一切物質點對於其中某點之相對速度及其質量來表明。這些相對速度是可以觀察的，一待我們有了以相對速度爲變數的動能之表式，則由這表式的各係數可得質量若干。

所以在這簡單的款中，我們不難規定這些基本概念。然在較繁的款中則困難重生，例如力有時不單由於距離，且與速度有關。又如魏北(Weber)假定兩電分子之互相作用不僅由於牠們的距離，且與其速度及加速度有關。如果物質點之互相引力也依照與這個相似的定律，則U必依速度爲轉移而能包含一個與速度平方爲正比例的項數。

然則在與速度平方成比例的項數中，怎樣辨別來自T或U的那幾個呢？是故又怎樣分別這兩部分的能呢？

但更進一層，卽能的本身又怎樣規定呢？倘若T＋U的特性，卽其爲一特別形式的兩項數之和之特性，消滅了之後，則我們毫無理由以T＋U爲界說而非其牠T＋U之倚數。

然這還不算，我們不特要留意純粹的機械能，此外還要計算別種形式的能，卽如熱，化學能，電

能等等。故能力永存原則當以下式表之：

$$T+U+Q=\text{const.}（常數）$$

其中T代表可感的動能，U爲位置的位能而只依物體之位置爲轉移的，Q爲分子內部之能，其形式則或爲熱的，或爲化學的，或爲電的。

如果這三項數都是絕對不同的，如T與速度平方成比例，U與這些速度及物體之狀態無關，Q與速度及物體之位置無關，而只依其內部情狀爲轉移，則一切均可順利進行。能之表式只能用此唯一的方法分爲這三項數。

其實並非如此；假定有荷電之數物體：則其相互作用所生之靜電能當然由於其所受電之數量而定，即依其情狀爲轉移，然而同時牠與位置也有關係。如果這些物體皆在運動中，則彼此必生動電作用，而動電能不特由於物之情狀及位置而定，且與其速度有關。

所以我們再也沒有方法可以規定某某項數當屬於U或Q或T，而把這能力之三部分劃清楚。

倘若（T+U+Q）是常數，則其任何倚數亦然。

φ（T+U+Q）

倘若（T+U+Q）是我上面已說過的一種特別形式，則結果亦不致有混雜；在爲常數之諸倚數 φ（T+U+Q）中將只有一倚數，而此種特別形式，而正就是這個，我名之曰能。

但我已經說過，實在不是嚴格如此的；在爲常數的諸倚數中，沒有一個可以化爲這樣特別的形式；然則從此怎樣在這些倚數中，揀那該當稱爲能的倚數呢？我們再也沒有什麼可作我們選擇的指導了。我們只剩了一個能之永存原則的說明；**那裏有些東西是常定的**。

這樣說法，這個原則也脫離了實驗之攻擊，而縮成一種重複之言語（tautologie）。假使世界受定律之支配，其中有些數量自必是常定的。以實驗爲根基的能之永存原則，爲了相似的理由，有如牛頓的原則，也不會被實驗打消的。

這個討論明示由古傳的系統換到能的系統，已經得到了一種進步；但同時也明示這個進步還是不夠的。我以爲還有一個辯駁更爲重要，就是最小作用原可應用於可轉變的現象中（phénomene réversible ）而於不可轉變的現象中就不能應用。愛耳莫慈想把牠推廣到不可轉變的現象中，但是沒有成功，這也是不能成功的：在這種情形之下，一切還待努力咧。

甚至最小作用原則之說明也有點抵觸理智。譬如在一面上運動之物質的分子脫離了外界一切的影響，要從此點來到彼點之時，將取道於此面上之最短線（signe géodésique），即路徑之最短者。

這個分子似乎自己知道人家將要引牠去某地點就預算定從某路線達到某點當費時若干，然後再揀定最適當的路徑。照上面的說明看來，這個分子似乎是能動而能自主的生物了。最好把這說明換一個比較不甚抵觸理智的說明，有如哲學家的口氣，那裏的最後因（causes finales）不像是去代替實效因（caustes efficientes），這是很明顯的。

熱力學（thermodynamique）（註）——熱力學中二大基本原則的功用在自然哲學中日見其重要了。我們捨了四十年前的那些滿載着為分子的假設之野心的理論，我們今日想把數學的物理全部建立在唯一的熱力學上。試問克魯秀士（Clausius）與墨淹（Meyer）之二原則

可作鞏固之基礎麼？這是無人懷疑的，但這個信仰果從何而來呢？

某日有一位高明的物理學家和我談到舛錯定律（loi des erreurs）時，曾說大家所以都極相信的緣故因爲數學家以爲這是觀察的結果，而在觀察者以爲這是數學中之一定理。能之永存原則很久就是經過了這種情形。今日則不然；沒有人不知道這是經驗的事實。

然則是誰給我們的權力，讓我們把這原則看做比那些證明這些原則的實驗更爲精確，更爲普遍呢？這個問題好比人家常常在那裏問推求實驗的論據是否合法，但我卻對付不了這個問題，因爲已經有許多的哲學家想解決而終於未能。唯有一事是的確的：就是如果我們沒有這個能力，則科學必不能存在，或至少要縮成一種貨物清單，一種分立的事實之觀察，這樣則科學對於我們將是毫無價值，因牠將不能滿足我們的秩序及和諧之需要，且牠同時亦必無先見之明了。只因在一件任何事實前的種種情形永遠不能再同時很相似地發現，就已經應該先有一種概括力去預測在這種情形中的最小一點受了變動之後是否還能重新發現。

然而凡是命題都可用無窮的方法來概括。在一切可能的概括中，我們當有所選擇，而只能取

那最簡單的。所以我們的行動所根據的見解以為一個簡單的定律（雖然一切都是相等），比繁複的定律為可靠。

五十年前，人們已老實承認這點了，並且宣言自然界歡喜簡明；然而從那時起自然界已給我們極多的反證。現在吾人已無此種傾向，而只揀那不可缺的留下，使科學不致成為不可能。

經過比較上不算多而表現幾許歧異的若干實驗，來規定一種普遍的，簡明的，準確的定律的時候，我們所幹的只是服從了一種需要，這種需要是人的理智所不能免除的。

然而此外還有一層，所以我還要論列。

沒有人疑惑從一切特別的定律中引出的墨淹原則比這些定律要持久，如有從蓋伯勒定律中引出的牛頓定律要比牠們持久，這些定律只不過是近似的，假使我們顧及擾亂現象（perturbation）。

何故這個原則在一切物理的定律中占一個特別重要的位置呢？其中頗有許多的小理由。第一人家以為我們在沒有承認永久運動之可能的時候，就不能捨去這個原則，或不疑惑牠

那絕對的嚴密性；不必說我們對於永久運動是取懷疑態度的，且我們相信對於這個問題與其否認不如承認牠爲妥當。

這或者也不盡然；永久運動之不可能，雖可牽引能之永存原則，然這僅限於轉變現象。

那墨淹原則之簡明也有助於我們信仰之堅定。由實驗直接引出的定律，例如茉莉我得（Mariotte）定律之簡明反足以使我們不信任：此地則不然；初看上去，我們只見些不調和的原素在那裏構成一種意外的秩序，而組成一個和諧的整體；我們不相信這種出人意料之和諧乃偶然的簡單效果。這好像愈是我們犧牲的力量大，我們所獲得的東西愈是珍貴，或者愈是那自然怕我們去揭露牠的祕密，我們愈確信已經從牠那裏搶得了真祕密。

然而這還不過是些小理由；如要把墨淹定律建設爲一個絕對的原則，那就還要經過一番深切的討論。但我們如去試行，必見得這絕對的原則，就是去說明牠也不是容易的事。

在每一個特別款中我們當可見得能是什麼？並且至少可給他一個暫時的界說；但要找到一個普遍的界說，那就不可能了。

假使要把這原則盡量普遍的說明，并且應用之於宇宙間，那便可說牠竟或會消失了，所剩下的，只是其中有些東西是常定的。

但連這句話也有一種意義嗎？據確定派 (déterministe) 的假設，宇宙的狀態是用極大數目之 n 個助變量規定的，我名之曰 $x_1\,x_2\cdots\cdots x_n$。只要人家在任何時，一知這 n 個助變量之值，也就知其對於時間之引數，由是就可計算這些助變量在先前或以後之值。易言之，這些 n 助變量可滿足 n 個一次微分方程式的需要。

這些方程式有 $n-1$ 積分，故亦有 $n-1$ 個含有 $x_1\,x_2\cdots\cdots x_n$ 之倚數，且爲常定的。假使我們說其中有些東西是常定的，我們所說明的只是重複的言語。我們甚至很難說在這些積分中，那一個當保存能之名稱。

然而當人們把墨淹原則應用在有限止的系統中時，人們對於這原則的觀念并不是這樣的呵。

於是人們承認在我們所說的 n 助變量中的 p 個各自獨立的變動，因此我們只有這 n 助變

量及其引數間之 $n-p$ 的關係，這個通常都是一次的。

為便於說明起見，假定外力工作之總數為零，向外播散之熱亦然。於是且看我們的原則的意義何在：

在這些 $n-p$ 關係式中，有一種組合，其前項為全微分；又據我們那些的 $n-p$ 關係式，此全微分既為零，則其積分為常數，而就是這個積分我們名之曰能。

然而其中怎會有許多的助變量是各自獨立變動的呢？此種情形只有在受外力之影響時纔能發現。（雖然為簡便起見，我們已假定這些力的工作之代數和為零。）其實如這系統完全脫離一切的外力，則我們的 n 助變量在某定時之值已足拿來規定那系統以後任何時間的情狀，但只要我們常守着確定派之假設；因此我們又和上面一樣，遇着同一的困難了。

某系統將來之情狀所以不完全為牠現在的情狀所規定者，是因牠還要受系統以外的物體的牽制。然則在規定這系統的情狀之助變量 x 中，有許多與外物之情狀無關的方程式之存在是可確信的嗎？⋯⋯如在某些款式中，我們相信能夠找到若干方程式，這是否只因為我們的無知，並因

這些物體的影響太微弱，以致為我們的實驗所不能發覺呢？

如果這系統不是認為完全孤立的，則其內部能之嚴密精確的表式當與外物情狀有關。并且在上文中我不是曾經假定這外力工作之和為零嗎？我們如要免除這個不很自然的限制，則更不易說明了。

所以為得要成立墨淹原則，而給與一個絕對的意義，那就應該把牠推廣於全宇宙，但這樣我們正要避免的困難又在面前了。

綜而言之，且用普通的說法，能之永存定律只能有一種義意，此即在一切可能中有一共同的特性；然依確定派的假設，只有一個惟一的可能，因此那定律便毫無意義了。

反之依照不確定派的假設，即使人們把牠看做有一個絕對意義的，那定律將仍有一個意義；這定律好像是支配着自由的一種界限。

然而說到自由這個字，我就覺得跑錯了路，我快要跑出數理與物理的範圍之外了。所以我停止，而在這番討論中，我只要保留一種印象，就是說墨淹定律的形式是很寬泛，差不多能夠任意將

一切歸納進去。我的意思不是說這定律毫無客觀的實在性，也不是說牠只是一種重複的言語，因爲在每一個特別款式中且只要人們不去一直推到絕對，牠總有一十分明白的意義。牠這種的寬泛性，更足以使人相信牠之持久，牠方面旣謂要等牠溶化於更美的和諧之中自身纔得消滅，我們可以信任牠而去工作，並且可以預先確信我們的工作決不會白費了的呵。

上面我所說過的幾乎全可應用於克魯秀士原則上。其特點是在用不等式表出的。或者人家將說一切物理的定律統統是如此的，因爲牠們的精密程度總是被觀察上的錯誤所限止。但牠們至少表明想作爲最先的近似者，而我們希望將來以更精確的定律，去慢慢地代替牠們。但克氏原則之所以成不等式，並非由於我們觀察方法之不完善，這卻是因爲這個問題之本身性質的原故。

第三部之總結論。

由上以觀機械學之原則，對我們表現兩種不同的情形。一方面，是建立在實驗上的眞理，對於差不多是孤立的系統可算是證驗得很相似的了。他方面，是些可以適合於宇宙全體，而且被認爲嚴格眞實的基本原理（postulat）。

這些基本原理，其所以有一種普遍性與確實性，而反爲牠們所自出的經驗的眞理所缺乏者，因爲牠們於最後的分析，便縮爲一種簡單的公約，而這是我們所能做的因爲我們預先可以確信的是不會受任何實驗所反駁的。

不過這種公約并非絕對任意的；牠不是由我們的私意而出；我們採用牠因爲有些實驗指示我們，說他是便利的。

這樣人們就可解釋實驗如何建立了機械學之原則，以及實驗何故不能推翻牠們。

我們試以幾何作比。幾何學中基本命題，有如歐克里得原理，也不過是些公約，但如要問牠們是眞的，或是假的，則其不合理正如問密達制是眞的或是假的了。

不過這些公約是便利的，而這是若干的經驗告訴我們的。

起初這個比較完全是相似的；經驗在這兩者之中似乎有同樣的功用。所以我們想說：或者機械學當認爲一種實驗的科學，因此幾何學亦必如是；反之，或者幾何學是一種演繹的科學，因此人們對於機械學也可這樣說。

像這種的結論未免不合法了。使我們認幾何之基本公約爲最便利而採用牠的那些經驗所根據的對象，完全與幾何學所研究的對象不同；這些經驗是以固體之特性及光線直射性爲對象的。這些都是機械學的實驗，光學的實驗；而無論用何種名義，也不能把牠認爲幾何學的實驗。就連我們幾何於我們所以覺得便利的其主要原因，是我們身體的各部，眼睛，四肢，正具有固體的性質。照這樣說，我們的基本實驗就是生理學的實驗，所以實驗的並非空間，空間是幾何家研究的對象，所實驗的是在身體上，是卽他研究幾何時所需用的工具。

反之機械學的基本公約，以及證明其爲便利的那些實驗，牠們皆有些同一的，或相似的對象，公約式的而普遍的原則是特別的與經驗上的原則之直接而自然的推廣。

我希望人家不要說我在科學間劃出疆域來；也不要說假使我把固體的研究與純粹的幾何學劃開，我就能於普遍原則之公約式的機械學與實驗的機械學兩者中間另立一種界限。其實我若把這兩種科學分開時，誰不見得到我把牠們兩者都各有傷害，而公約式的機械學孤立了之後，只剩很有限的東西，絕不能與這幾何的學說相比呢？

現在我們可以明白為什麼機械學的教授還是應該為經驗的。只有這樣纔能使我們明白科學如何萌發，如要澈底明白科學之本身這卻是不可少的。

而且我們如研究機械學，這是為應用的；如要應用，則牠非是客觀的不行。但是就我們所已經見過的說，凡是那些原則在普遍上與確實上有所得，在客觀上，便有所失。所以要緊的，是在把原則的客觀方面早早熟悉，而這要從特別的到普遍的，而不去取相反的步驟纔能做到。

凡原則都是些變相的界說與公約。不過牠們仍是由實驗的定律引出，故原則可說是由定律砌成，我們對於認為有絕對的價值。

有些哲學家未免太推廣了；他們以為原則就是全部科學，因此以為全部科學乃是公約的。這種荒唐的學說，所謂唯名派，實在不值一論。

一個定律怎會變成原則呢？牠能表明A與B二項間之關係。然這定律不嚴格是確實的，這僅是相近的。我們任意地加進一個多少是幻想的中間項數C，而依界說C即為與A恰好有為定律

所表示之關係者。

由是我們的定律分解爲二：其一表示A與C之關係的絕對而嚴格的原則；其二，表示C與B之關係的近似的而可修正的實驗定律。顯然的儘管我們再繼續的分解下去，那些定律終久存在。

我們現在來到純粹的定律範圍了。

(註)下文係我所著熱力學書中序文之一部分原文。

第四部　自然界

第九章　物理學中的假設

實驗與概括之功用——實驗爲眞理的唯一泉源：唯獨牠能告訴我們一些新事物；唯獨牠能給我們一種確切性。這就是無論誰都不能反對的兩點。

然則假使實驗包括一切，則數理的物理學（la physique mathématique）之地位又是怎

樣？實驗的物理學要這個助手有何用處？這個助手既像是無用的，而且恐怕是危險的呢！

但是數理的物理學還是存在着；牠的功勞又實在是不可抹殺的；其中必有一種事實有說明的必要。

這就是單單去觀察不濟事的，必要利用這些觀察，因此所以要概括。這正是一向人家都做過的；不過因為想起從前的錯誤，有了前車之鑒人家就漸漸地格外慎重，多從事觀察而逐漸減少概括。

每一世紀的人總喜譏誚前世的人，怪他們對於所觀察策而概括得太快又太老實。笛卡兒很可憐那些伊洪學家（ioniens），然而笛氏自己又惹我們微笑；而我們的子孫必將譏笑我們，這是無疑的。

然則我們難道不能一直走到盡頭嗎？這不是我們免去所預料的遺笑之方法嗎？我們不能將赤裸裸的實驗認為滿足嗎？

不，這是不可能的；這樣未免太不懂得科學的眞正特性了。凡是學者應當做整理的功夫，人們

靠着事實建設科學，正如用磚石築成房屋；然而許多事實之不成其為科學，正如一堆磚石之不成其為房屋呵。

并且最要緊的，學者應當有先見之明。高立爾（Carlyle）在某處曾經說過：『唯獨事實是要緊的；法王約翰無土（Jean Sans Terre）曾經過此地，這眞是件很可讚美的事，為此事實我願將天下所有的理論去換。』

高立爾是培根的同鄉；但培根卻不會這樣說。這原也是歷史家的口脗。物理家就要這樣說：『法王約翰無土曾經經過此地；但這與我毫無關係，因為他也再不會經過此地了。』

我們大家都知道有好的實驗，也有壞的實驗。假若是壞的，那就再多也是無用的；人們做牠一百個也好，做牠一千個也好，經不起一位眞的學者，例如巴斯德（Pasteur）做的一種工作，就可把那些都壓倒至於忘掉。我想培根是很明此理的，是他發明那決擇實驗（Experimentum Crucis）之名詞的。但這是高立爾不會懂得的呵。一件事便是一件事實；一個小學生毫不注意的在那裏看計溫表的度數；不管他注意不注意，橫豎他已經看到了，但如只以這事實算數，那麼這裏是和

剛纔法王約翰無土遠遊這回事。同樣的一種眞實了。何以那位學生做的這件事實沒有效用，而若是一位物理家測定温度的事實就將是很重要呢？這因爲前者所看的度數，我們絲毫無可結論。然則何爲好的實驗？好的實驗就是除了一件孤單的事實外，令我們還能知道別的東西；這就是使我們能夠先測，亦卽令我們能夠概括的一種實驗。

苟無概括，則先測是不可能的事。在某種境況下，人們做了實驗，下次決不能同時重有這些境況。所以視察過的事實，以後再也不重生了；人們所以能肯定的唯一事物，就是在相似的境況之下，當有一相似的事實發生。可見想要先測，至少先要有相似觀念 (l'analogie)，而這樣就已經是概括了。

人們無論如何膽小，總應該去做增註的功夫；實驗只給我們一些孤立的點子，要用一條連續的線把牠們集合起來；這纔是眞正的概括。但是還要知道這畫出來的曲線只在這些點子間穿繞而過；並非恰恰的通過這些點子。所以我們不僅自限於概括實驗，並且還要矯正牠：凡是不願做這種的修正，而以赤裸裸的實驗爲滿足的物理學家勢必說出許多離奇的定律來。

由是以觀，赤裸裸的事實對於我們是不夠的；因此我們要有經過整理的科學，即有組織的科學。

人們往往說，做實驗必不可存一種成見(idée préconçue)。這是不可能的；這樣不特將一切的實驗變爲廢物，並且似乎人們情願把牠變爲不可能的了。各人有各人的世界觀，而不易從中退出。例如，我們是用言語纔能有所表白，而我們的言語中所含的正是這些成見，卻也不能有別的。不過這是些不知覺的成見，眞比別的還更危險一千倍。

我們若是這樣說，如果我們加入了些其他有自覺的成見，我們只是增加一些壞處嗎？我不相信；我想這或可做兩者勢力平均的錘子，我將說這可作爲解毒藥；牠們兩者間總是合不好的；牠們彼此必互相引起衝突，因此我們不得不把事物反覆從各方面去仔細考量。這樣已足使我們能得自由，好比奴隸能夠選擇他的主人，就不是奴隸了。

是故，靠着概括每一觀察過的事實，可使我們預測許多的事實；不過我們不要忘記只是第一種事實是確切的，其餘的都不過是大概的罷了。一件預測之事，無論怎樣穩固的確定，我們去證實

牠的時候，絕對不能相信牠不會被實驗推翻的。但這或然性往往是很大，使我們在實際上可以認爲滿足。與其毫不去預測，不如有點不能確定的預測。

所以有機會的時候我們萬不可不屑去做一番證實的功夫。但凡試驗都是很長很難的，而好學的人是不多的；而我們所需要預測的事實爲數正是無窮；我們所能做的直接證明的數目對於那樣大的數量眞同滄海一粟。

我們希望從我們所能直接達到的這一些中間抽出最好的效果；應該每一實驗能給我們最多的預測及含有最大的或然性。這個問題可以說是在增加科學機械之效率(reudement)。

請試以科學與日益擴充的圖書館相比；圖書館的經費既不充裕，則管理圖書的人應當不濫費。

這是實驗的物理學負買書之責；所以唯獨牠能使圖書館豐富起來。

至於數理的物理學，其任務在製定書目。而書目製定得再好，也不能使圖書館增加豐富。但牠能有助於讀者之使用其豐富的藏書。

而且他可以其藏書闕點之所在指示管理人，使他下次購書格外正當合理；此事在經費愈少之時，愈是要緊。

這就是數理的物理學之功用；牠應當指導我們去概括以增加我剛纔所說的科學機械之效率。但牠用何種方法以達到此目的，且如何可以行之而無危險，這就是還待下文討論的。

自然之和一性——第一我們要注意一切概括，在某範圍中多少有一種自然界之簡明性與和一性的信仰。關於和一性，這個問題不會有何困難。如果宇宙之各部分不同一物之各機關，則互相不生作用，牠們將互相不認識；而尤其是我們將只能知其一部。所以我們就不必問那自然是整個的，但牠何故是整個的。

關於簡明性這個問題，就不是這樣容易的了。自然不一定是簡明的。我們可否當牠是這樣的而無危險？

從前因爲茉莉得定律之簡明，便引爲此定律是確實之論證；其時弗勒納耳（Fresnel）自己有一次與拉卜拉斯（Laplace）談話時，曾說過那自然界毫不顧慮分析上之困難，後來他恐怕違

反衆意太甚，又自覺非加以解釋不可。

今日一切觀念都大變了；但那些不相信自然界的定律一定是簡明的人，然而仍舊不得不作爲相信似的幹下去。他們不能完全脫離這個需要，除非是把一切的概括，因而一切科學都弄成不可能。

一件任何事實顯然可用無窮的方法來概括，但要緊的是選擇；而選擇只能以簡明爲標準。我們試以最平常的例子作比：如插數法(interpolation)，我們在觀察上所給與的點子間，穿過一條整齊的連續線。爲何我們要免去這些角點，以及太急促的屈折呢？爲何我們不在那曲綫上畫出最任意的彎轉曲屈之形？此因我們預先知道，或我們自信知道那要表示的定律不能如是之繁複的。

木星的質量，可以或由他的衞星運動測知，或由那些大行星之擾亂測知，或由那些小行星之擾亂測知。我們如將此三法所測定數平均之，乃得三個近似而各異之數。說明這個結果時，我們可以假定引力係數在這三款中是各不相同；因此觀察所得之結果當然較爲完滿。然則我們爲何捨去這種說明而不採用呢？這不是以牠爲荒謬，實因牠是無用的繁複。要到了不得已不採用牠的時

候，我們纔去採用牠，現在還不必。

綜而言之，普通凡是定律總被認為簡明，一直要得到相反的證明纔止。

這個習慣之所以支配着在物理家，已如我剛纔所說；然當着這些天天指示我們以更繁複而更豐富的新節目之發現，怎樣容這種習慣之存在呢？而且如何把牠與自然統一性的感覺相融洽呢？因為倘若一切以全體為轉移，則這樣多的不相同事物間之干預的各種關係必不復能簡明了。

我們試研究科學的歷史，我們可見到兩種可說是相反的現象：有時是簡明藏匿在複雜的外表下面，有時反過來簡明是顯然的而他卻是隱蔽着非常複雜的眞實。

那有再比行星的擾亂運動更複雜；那有再比牛頓定律更簡明呢？這正如弗勒納耳說過的自然界在那裏玩忽分析的困難，只用簡單的方法，經過彼此互相混合了之後，就發生一種不可言喻的難解亂絲。簡明正是藏匿在這裏，正應當去發現牠。

相反的例子也多極了。在氣體運動（théorie cinétiqe des gaz）之理論中，人們設想一定具有極大速度的分子，牠們的軌道受不斷的衝擊，變成最奇怪的形狀，並且在空間四面八方都佈

滿了牠們的路迹可觀察到的結果，卽是茉莉得之簡明定律；每一種個別的事其實是複雜的；大多數的定律成立了在平均數中的簡明性。此地之簡明，只是表面的，而我們感官之遲鈍，正是阻礙我們不能見到此中之複雜。

好多的現象都是服從一種比例的定律；何則？因爲在這些現象中，有一些東西是很小的。因此所觀察得的簡明的定律，不過是這種普遍的分析規則之翻譯，照這規則，某倚數（fonction）之極微末的增量與其變數之增量成正比例。實際上，我們所謂爲極小的增量幷非極小，不過是很小罷了；所以比例的定律亦無非近似的，而那種簡明只是表面的了。我剛纔所說的，可以應用到微小運動之重疊（la superposition des petits mouvements）規則，這條規則用處極大，且爲光學之基礎。

至於那牛頓定律之本身呢，牠的簡明性隱匿得這末長久，也許只是表面的。誰知道牠不是一種複雜的機械作用，或生於一種不可捉摸而受不有規則運動的物質之影響，誰知道牠不是只靠着多數與平均數的一套把戲纔能成爲簡明呢？無論如何，若不假定那眞正的定律含有補充的項

數，是很難的，這些項數在短距離時，便有效用。假使在天文學中牠們比牛頓公式中之項數來得忽略，或者此定律因此就得到牠的簡明性，這只因為天空中的距離極為巨大的關係。

無疑的，假使我們觀察的方法日漸精密，我們便可在複雜的裏面找出簡明的東西，再由簡明裏面找出更複雜的東西，如是循環不已，我們便不能預料最後將是什麼。

在這個進程中，有些地方是要停當的，而為得科學之可能起見，在遇到簡明的地方，就應該停下來。這裏正是我們唯一的地盤，在這上面我們纔能建設一切的概括，然而這簡明既只是表面的，這塊基地是否能夠堅固的呢？這是應付諸討論的。

為此，請看簡明之信仰在我們的概括中有何功用？今我們已經在許多特例中證實了一條簡明的定律；我們不承認這只是偶然之事，因此我們結論那定律在普通例中也應當是眞確的。

蓋伯烈(Képler)注意到狄哥(Tycho)所觀察的一行星的位置都是在同一的橢圓上。他永未想到狄哥因一種奇怪的偶然每次測天時，都正當那星球眞正的軌道與那橢圓曲線相交的時候。

所以簡明性是實在的，或者是隱藏着一種複雜的眞理，這有何關係？隨牠是消去各個個別相差的大多數的影響之作用，或者是可以略去幾個項數的若干數量之大小的作用，無論如何，牠總不是偶然的作用。這種簡明是表面的，或是實在的，總有一個原因在。所以我們總可做同一的推理，且如一簡明定律曾經於好幾個特別款中觀察過，我們便可很正當的假定牠在相似的款中，還是眞確的。我們若對此否認，那就是給偶然以一種不可承認的功用了。

但是其中有一個區別。如果那簡明是實在而深刻的，則我們的測量工具的準確無論如何進步，則這種簡明仍舊不會搖動；所以我們如果相信自然界具有十分的簡明性，則我們也該把這一種近似的簡明性，從而結論牠有嚴密的簡明性。這是前人所做過的；這是我們現在再無權去做的了。

譬如，蓋伯烈定律之簡明不過是表面的。這雖無礙牠對於一切如太陽系之系統大約都可適用，但要說這是嚴密眞實的，那就不能了。

假設之功用——凡是概括都是一種假設；所以假設有個必需的功用，這是誰也不會反對的。

不過牠應當常常的經過證驗，並以愈早愈多爲妙。不必說，牠如經不起這種證驗，我們就當立即把牠拋棄。普通大家是這樣做的，但有時總帶幾分不高興。

其實這種不高興是不能說出理由的；物理家當他拋棄一種假設的時候，應當反而十分快活，因爲他正是得了一個求之不得的發明的機會呵。我想他的假設不是輕易採用的；因爲牠已經顧及到一切好像能夠干預現象之各已知要素。假使不能證明這其中必有不曾料到而非常的事；這正是我們要去尋覓未知與新鮮的東西。

所以這樣推翻的假設是無效果的麼？大爲不然，我們可說牠比眞正假設的功勞更大；不特牠是一種決定的實驗機會，並且我們偶然中作了這個試驗，若不曾作假設我們將一無所得；不能見得非常的東西，不過是多了一件事實，而不能從中得到什麼結果。

現在要問在如何情形之下，利用假設，纔不致有何危險。

單單決心去試驗，是不濟事的；此外還有危險的假設；第一，最主要的，就是默示的與無意識的假設。我們既是不知不覺的作了，因此也無能力拋棄牠。此地還是數理的物理學可以協助我們。以

牠那般固有的精確，使我們不得不定立一切，就是沒有牠，我們不知不覺也要做的假設。

他方面，我們當注意不可濫用假設，並須依次而用之。我們如果把一理論建立在許多的假設之上，一旦被實驗推翻，則在吾人所有之假設中當換去那一個呢？這是不得而知的。反而言之，如果試驗得成功，我們可能相信所有的假設同時都證實了嗎？我們相信只須用一方程式就可以求得幾個未知數嗎？

此外還要好好的把各種的假設分別一番。第一，其中有一種很自然的假設，為我們所難於免去的。比方我們不能不假定那遠離的物體之影響完全可以忽略，那微小運動是服從一次之定律，又如效果乃其原因之連續的倚數。我對於對稱定律所要求之條件，以為也是這樣。所有這一切的假設，可以說是組成數理的物理學所有的理論之公同基礎。人們到不得已時纔能把牠們捨去。

此外還有第二類的假設，姑名之曰無別的。在大多數問題中，分析家在演算之初便假定物質是連續的或反是原子所組成的。無論他做那一種假定，其結果則一，不過求得有難易而已。如他假定的是原子，難道實驗證明他的結論時，他就以為證明了原子是眞實存在的嗎？

在光學中有兩種矢量(vecteurs)。其一是認爲一種速度，其一是認爲旋渦(tourbillon)。這仍是一個無別的假設因爲我們如把牠兩調換過結果還是一樣；所以實驗之成功不能證明第一矢量果爲速度；牠只證明一事，就是這個矢量；這是我們所加入於前提中唯一的假設。要把我們理智的薄弱所要求的這種具體外形給與牠，那就應該或者把牠看做一種速度，或者是一種旋渦；正如我們應該用x或y字來表示，但結果無論如何，並不證明把牠當做速度是對了或錯了；正如代之以x或y時不見得就對了或錯了一般。

這些無別的假設，只要我們不看錯牠們的特性，永不至是危險的。牠們是能夠有用的，或者可以當着計算的技巧，或者用具體的影象來維持我們的意識，正如人說爲固定思想；所以這是無須禁止的。

第三類的假設，就是眞正的概括。這就是爲實驗所該當肯定或否認的。不問是證實了或推反了，牠們能夠有豐富的效果。然而爲我說過的理由，非得我們不增積牠們的數目纔能夠是這樣。

數理的物理之起源——我們現在要進一步仔細去研究那些構成數理的物理學之發達的

條件。我們第一就承認一般學者都在勉力去解決實驗直接給與的複雜現象，要把牠分解爲許多基本的現象。

還有三種方法：第一，是在時間裏的。與其把現象的級進發展作全部的觀察，我們不如把一時刻之前與此時刻相連接起來；我們承認世界的現在情形只視最近過去的時代如何，而並非直接受既往已久的記憶之影響。依賴着這個基本原理，不必去直接研究現象一切過程，我們祇寫牠的「微分方程式」卽夠了；例如蓋伯烈定律可用牛頓定律代之。

其次我們想法在空間裏分解現象。實驗所給我們的乃是一個紛亂的事實，演於一廣大的戲台上；故須竭力去辨別那些基本的現象，這現象反是存在空間之極小的部分。

請舉數例，以明吾說。今有一慢慢地冷下去之固體，要去研究其溫度分配之複雜的全部，那是永世做不到的。只要想一想那固體之一點不能向遠隔的一點直接傳熱，那什麼一切都成爲簡單了；牠只能傳熱於最貼近的點，再由這些點傳開去纔能把那熱氣傳於物體之牠部。那基本的現象就是二鄰點之熱的交易；此僅限於一小部分，且比較上是簡單的，只要人們承認，（而這似乎很自

然的）那交易現象不受距離較大的分子之溫度的影響。

現在我屈折一棍牠卽刻變爲極複雜的形狀而爲吾人所不能直接研究的；然我仍可去試一試，只須注意牠的曲折力是棍內一部很小分子變形的綜合力，並且每分子之變形只由於那些直接加於牠的力，而絕非能加在其牠分子上之力。

在這些我可以不費力的再添上許多的例子中，我們承認沒有距離的作用，或至少沒有相距甚遠而發生的作用。這卻是一種假設；不常常是眞的，地心吸力的定律可爲明證；所以應當把牠來證驗；如果牠是證實了，就是近似的，牠亦是可寶貴的，因爲這足以使我們至少用漸進近似法研究數理的物理。

如果這個假設經不起試驗，那就要另找相類的東西，因爲此外尙有他法以達到基本之現象。倘若有許多的物體同時運動，有時牠們的作用也許是獨立的，也許是簡單相互增加的，至於增加的方法或如矢量的，或如非矢量的。所以基本現象乃是孤立的物體之作用，或者是我們對於微小的動作更普通點說對於微小變動還有所討論，這些微小變動是服從那著名之堆疊定律的。於是觀

察得來的現象將可分爲簡單的運動，例如音之分爲和諧，光之分爲單色光(monochromatique)。

幾時我們已經辨別要從那方面尋覓基本現象？試問用何方法，才可達到目的呢？

第一，爲得猜想牠或說，爲得猜度有益於我們的，那就不必一定深入機械法裏面；我們只要曉得由大多數得來的定律就够了。我們試再以熱之傳播爲喩；每分子向鄰近的分子傳熱；至於按了什末定律，這是我們不必要知道的；假使我們在這一點上有所假設，則將是一種無可無不可的假設，所以這既是無用的，亦且不可證實的。其實有了平均的作用以及間界（milieu）之對稱性，一切的殊異都平衡了，且無論做的那種假設，結果總是一樣的。

在彈性（l'élasticité）學理中與毛細管現象（capillarité）理論中有同樣的情形發生；鄰近的分子互相吸引，或互相推拒；我們不必知道這按的是甚麽定律；我們只要這吸力只能在小距離以內才有感覺，只要分子是極多的，只要間界是對稱的。而我們只能讓大多數定律去支配一切。

此地還是基本現象之簡明，隱藏在總現象的複雜裏面；不過這個簡明性也只是表面的，內裏

尙有很複雜的組織。

求得基本現象的最好方法當然是實驗了。這應當用經驗上的巧法，以解散那自然界給我們的一束複雜，而仔細硏究提鍊得愈淸楚愈妙的原素；例如人們用三棱鏡分光爲七色，用偏光鏡分光爲偏光（lumière polarisée）。

所不幸者，這是往往不可能的，且不足的，而有時我們的理想要超過經驗才行。我只要舉一個那常使我注意的例子：

我如分解白光，我可採取一小部分之光帶（spectre），但無論如何小，牠總保有某種闊度。同樣，天然光，卽所謂單色光的呈現一很細的線紋，但非無窮的細。我們可假定用實驗來硏究這些單色光的特性時，以漸漸而細的光帶來試驗，最後至於可說是到極端定限之時，我們才認識一種嚴格的單色光之特性。

這是不確實的。我假定有從同一光源射出之二光線，我們使牠們先在二垂直之偏光鏡穿過，使成爲在兩垂直平面之偏光，再把牠們回在同一平面中，然後使牠們爲光線之交叉。如果光線

之嚴格單色的，則牠們就交叉了；但我們的光既是差不多的單色光，就沒有交叉作用，而這是不問彩紋之如何細的；假使要不是這樣，那就應該叫此紋細到比較已知的最細彩紋，縮小千萬倍才行。

所以在這裏，我們爲達到極端邊際的過程所騙了；這是要理想超過實驗才行。而其成功之故是在牠能受簡明本能之指揮。

知道了基本的事實，我們就能把這個問題列爲方程式；於是經了些組合，就可引出那些可觀察的與可證實的繁複事實。此卽所謂積分法；而這又是數學家的本務了。

人們可問何以在物理科學中，概括很自然的成爲數學的形式。這個理由現在是很易明白的了：這不特是要表示數的定律；此因可觀察的現象，是由許多相似的基本現象堆積而成；由是微分方程式很自然的加入了。

僅只每一基本現象服從簡明的定律是不够的，還要那些正待組合的現象服從同一的定律。唯獨這樣，那數學的參加才有益處；蓋算學教我們把相似的東西與相似的東西組合起來。牠的目

的是在猜想一組合之結果而不必再一塊塊的重新組合起來。如果同一的演算，要重演至數次，數學令我們用一種歸納法，使我們預先知道結果，就可以免去了這種的重複。這是在前面數學推理一章中我已說明的了。

然而爲此，一切的演算當互相類似；否則自然要實際的忍耐着依次做下去，而數學就成爲無用的了。

所以這全靠物理學家所研究的物質之近似的同質性（homogénéité），那數理的物理學才能產生。

在自然科學中，就再沒有這些同質性，遠離部分之獨立性，基本事實之簡明性的條件了，而爲了這個原因，那自然科學家就不得不求助於別的概括方法。

第十章　近代物理學之理論

物理學理論之意義——普通人很奇怪那些科學理論的不經久。他們見那些定論經過了幾

年的幸運就被人先後的抛棄，他們只見到殘毀層層堆疊；他們分明見到現在風行一時的理論，霎時間就要變成明日黃花，因此結論牠們是絕對無效的。這就是他們所謂科學之破產。。。。。

他們這種懷疑是膚淺的；他們全不懂得科學的理論之功用及目的，不然他們可以明白就是那些殘毀也還是有用處的。

弗勒納耳認定光即以太之運動。這個理論似乎是再也沒有更堅固的了。然而現在人們卻丟了牠而喜用馬克思威耳的理論了。然則弗氏的工作可說是徒然的嗎？否，因弗氏之目的不是要知道在有無以太，以及牠是否為原子所成，這些原子是否望某某方向運行；而為的是預測光的現象。

而這卻是弗氏理論永遠可以做到的，在馬氏以前或在其後。其中微分方程式總是對的；我們總可用同樣的方法計算其積分的，而所得之結果，總保存牠們整個的價値的。

但是人家不要說我們這樣是把物理學之理論，變成一種實用的簡單方術；這些方程式表示一些關係，而這些方程式之所以仍舊是對的，因為這些關係能保存其實在。或前或後，牠們能告訴我們某物與某物有何種關係；不過這某物我們從前名之曰運動，現在卻名之曰電流了。然而這些

名稱不過是眞物之影像，至於眞物永被自然遮着，是不可見的。在這些實在物之中，眞正的關係是我們能達到的唯一實在，而唯一的條件，就是在我們不得不用來代替牠們的那些影像中，當一如在這些眞物中，有同樣的關係。倘若這些關係知道了之後，那麼我們如認爲利便時，又何妨把此一影像換彼一影像。

就是那定期現象（例如電之顫動）或的確是生於某原子之震動，有如一鐘擺眞是擺來擺去，這既是不可靠的，又是無味的。而說電之顫動與鐘擺運動及其牠一切定期現象之間有一種符合於深切的實在之密切關係；而這種關係，這種同等，或竟說這種並行的情形，互相追逐，至於細微末節之處；或者牠是較普遍的原則之結果，如能力原則與極小作用原則；這都是我們可以肯定的；這都是永久同一的眞理，那怕我們把牠弄成奇形怪狀罷。

關於折光（la dispersion）的問題，人們已提出過許多的理論，最先的總是不完全，而且只含有極少部分的眞理。後來就有愛兒母慈(Helmholtz)的理論，其後人們又把牠用各種殊異的方法來加以改良，且愛氏自己也曾根據馬氏的原理，重立一說。然而可奇的事，就是這些在愛氏以

後的學者，各由表面上大爲分歧的起點，都歸到同一的方程式。我敢說這些理論同時都是眞的，這不僅因爲牠們能使我們預測到同樣的現象，且以其皆能將一種眞實的關係顯明，卽吸光現象（absorption）與不規則的折光現象之眞實關係。在這些理論的前提中，所有眞的事物就是爲一切學者共同的；這就是關於某物與某物間的關係之肯定，至其名稱則隨人而異。

氣體理論已惹起不少的辯駁，我們若以此爲絕對的眞理，那將有不能自圓其說之處。但這些辯駁仍不能阻止那理論曾經是有益的，尤其是曾經使我們發覺了一種眞的關係，卽是氣壓力與滲透力（osmose），倘若沒有這理論，我們便不會知道了。依這樣看法，也可說牠是眞的。

當一位物理家察覺二相反而同是可貴的理論時，他有時會說：我們不必顧慮這個，雖然這條鍊子的中間圈環看不見，我們且緊握住其兩端。這位窘着的神學家的論調將很可笑，如果按照普通人所謂物理之理論，當遇見牴觸的時候，則至少其中必有一理論是應該看作是錯誤的。倘是只爲尋求應該尋求的東西，那就不然了。這也許牠兩者所表示的都是一個眞實的關係，而其矛盾之處，只在那代表實在的影像之中。

對於覺得我們太限制學者研究範圍的人，我將答道：我們所禁止你們討論，而你們有遺憾的這些問題不特是不可解決的，亦屬幻想而毫無意思的呵。

有的哲學家以爲所有的物理皆可用原子之互撞的道理來說明。倘若他只要說在物理現象中，和大多數圓球之相撞，有同樣的關係，那再好沒有了，這是可以證實的，這也許是眞實的。但他還有其他一點意義；我們相信是懂得他的，因爲他們相信是知道何爲撞擊之本身；何則？簡簡單單的爲的是我們常常看過彈子遊戲。我們能否相信上帝看他的造化時，和我們看打彈子有同一的感想呢？倘若我們不願意加這斷語以這種奇怪的意義，倘若我們又不願意我剛才所說明的且是好的那種狹義，那末這個斷語便毫無意義了。

可見這一類的假設只有比喻的意思。學者對之不當禁用，正如詩人之不禁比喻；但須知道牠們的價值。爲滿足人的理智牠們是有用的，而只要牠們不是無別的假設，那就無害了。

這一番的討論，可以解答何以某種理論已爲人被認爲拋棄了的，且爲經驗所根本推反了的，竟驟然能死灰復燃重新取得生命。這是因爲牠會表示過眞實的關係；且爲了這個理由，或那個理

由，我們相信應該用別的語詞表明同一的關係之時，那理論仍舊是眞實。所以牠們曾經持一種緩進的生命。

記得不滿十五年前，那裏還有比古龍（Coulomb）所想出的液體再老實而可笑的把戲麼？但今天牠又出現了，名曰電子（electron）。然則這些永久荷電的分子與古龍的荷電分子，又有何區別？當然在那些電子中那電賴有一些物質作支撐，但這卻是很微小的；換言之，牠們有一質量（至今還有人駁議這話）；然而古氏不是不給他的液體以質量；或者，假使他不給與，這也是他所抱歉的。至於說那電子之信仰將不復受缺損，這卻是膽大的肯定；我們觀察這種信仰的意外復興，亦是奇怪的事。

然而最可注目的例子，就是高樓（Carnot）原則。高氏以錯誤的假設爲起點，來建立此原則；當我們知道熱不是不可燬滅的，而能變成工作的，就完全拋棄了高氏的觀念；其後，克魯秀士（Clausius）從事於此，才得最後之勝利。高氏原則用他古老的形式，表示別的不確實的關係於眞實的關係的旁邊，這是舊思想之殘餘；但是這些錯的參加，並不改變別的眞實。克氏只是撇開了牠們，

有如修剪枯枝一般，

其結果乃得熱力學之第二基本定律。這總是那些相同的關係；雖然這些關係於相同事物間至少是在表面上不復存在。這已足保存那原則之價值。並且高氏理論未嘗因此而消滅；這些理論又曾經適合於染有錯誤的問題；但是牠們的形式（即其主要者）仍是正當的。

我剛才所說的，可以同時顯明普遍原則的功用，例如極小作用原則，或能之永存原則。

這些原則有一極高的價值；這是我們在許多物理定律的說明中尋求公共點時，才得到的；所以牠們代表有如無數的觀察中之精髓。

但是，由牠們的普遍性生出一個結果，這是我在第八章已令人注意的了，這就是牠們不復能不被證實。我們既不能給與能以一個普遍的定義，能之永存原則的意義只是說其中有些東西是不變之常數而已。所以無論將來實驗給我們什麼世界的新概念，我們事先就確信其中必定有些東西為常數，而我們名之曰能。

這樣是不是說那原則並無一點意義而無形中變成一種重複的言語呢？絕對不是的，牠的意

義是說凡我們所命為能的那些東西，都互相有一種眞正親屬的聯絡；牠肯定其中有一實在的關係。但是如果這個原則有一個意義，這也許是錯的；也許我們無權去無窮地擴展牠的應用，但就字的嚴格意思講來他事先就確定了這是可證實的；然則我們怎能知道牠在何時達到人家所能正正當當給與牠的擴展之全部呢？簡簡單單，就是要等牠對我們不復中用之時才行，這就是說，不欺騙他使我們預測新的現象。在這種情形之下我們可以確信那肯定的關係，不復是實在的了；否則，牠將是很豐富的；經驗不必直接與原則的一種新擴展有所衝突，但也能把牠推翻。

物理學與機械——大半理論家對於根據機械或動力學的解釋總有一種偏愛。有些人只要能夠把一切現象用分子間按某定律之互相吸引運動說明，就心滿意足。有些人就貪心更大，他們想去了那種相距離的吸引力；於是他們的分子的路徑是直線的，非得受了衝擊不能屈折。還有別的人，例如黑慈，他們去掉那些力，但假定分子間有一種幾何的聯絡，有如我們的骨節；所以他們想把力學變成一種動學（cinématique）。

一言以蔽之，大家想把那自然界縮成某種形式，凡是在此種形式以外，他們總不能滿意的。那

自然界是否能夠爲此而這樣柔順呢？

我們在第十二章中談馬克思威爾理論時，再討論這個問題罷。凡是能之永存原則與極小作用原則滿足的時候，我們就可見其中不單有一機械的解釋之可能，並且可有無窮的咧。利賴了戈立克思（Konigs）先生一條關於交接系統（systèmes articulés）很著名的定理，我們可以證明用能以種種樣式用黑慈式的聯絡方法或中心力（forces centrales）來解釋一切。我們要證明當然比那常以簡單衝擊，自爲解釋一切的一樣容易無疑。

爲此，自然應該不以通常的物質爲自足，不以我們官能所感觸到而其動作爲我們所直接觀察的那種物質爲自足。或者我們將假定這個通俗的物質是許多原子構成，而這種原子內部的動作不爲我們所知，僅全部的移動爲我們官能所接近的。或者我們將幻想一些稀薄的液體，（叫牠們以太也好，或旁的名稱也好，）牠們在物理的理論中，歷來曾佔一極重要的位置。

人家往往更進一步把以太看成唯一的原始物質甚至唯一的眞正物質。最持中的人，把普通物質認爲凝結的以太，這是毫無可怪的；然而還有人更減輕牠的作用，而只看做以太之奇數(singularités）的幾何位置。例如開耳闓（Lord Kelvin）以爲我們所認爲物質的不過是以太受有旋渦運動之地點而已；在李滿（Riemann）看起來，這是以太常被消滅的地點；在比較最近的理論家，如魏舍（Wiechert）或勞莫（Larmor）看起來，這是以太受了一種非常特別的絞繞（torsion）的地點。倘若假使我們想從上面諸家中取一說，我就要問人家怎樣可以把不過是假物質的通俗物質上所觀察到的機械特性以眞物質的名義加在以太上。

當我們已知道熱不是不可消滅的時候，就把從前的液體，熱，電等一概拋去。然而還有別的理由。當我們把這些東西認爲物質時，可以說就是着重了牠們的個性，我們不曾在其中挖了一條深淵。等到我們對於自然界和一的性有了較深切的感想，又看明所有聯絡各部分的密切關係，這個深淵就該塡塞才行。從前的物理家增加許多的液體，不但造出些不需要的東西，並且把眞正的聯絡也割斷了。

凡一理論不肯定錯誤的關係是不够的，還要不遮了眞正的關係才行。

至於我們的以太，實在有不有呢？

我們知道以太的信仰從何而來。從遠星射來的光線需歷程數年，才到我們眼上，而當牠既已不在那顆星上，又尙未來到地球的時候，總得有一個寄托的地方，可以說總有一個物質的承受東西。

我們可把同樣的思想，用更深切的算學形式與抽象形式來表示的。我們所觀察得的，是物質的分子所受到的變易的；例如我們看見那照片上所受到現象的結果，實即數年前那星球焰燒的現象。但是在普通的機械學中，某系統之情狀僅由其最貼近的先前情狀如何而定；所以這系統滿足微分方程式。反之，我們倘使不相信以太，則物質的宇宙狀況不特由於最貼近的先前狀況，且亦由於既往已久的狀況；於是此系統將滿足有限差數的微分方程式。這是爲要免去與機械學普遍的定律相抵觸之故，我們才發明以太。

而這不過是迫着我們拿以太來塡滿星球間之眞空，並不是敎以太滲入物質本身的中間去。飛左（Fizeau）的實驗更近一步，用穿過水或空氣之播動光線的交叉。飛左的實驗似乎指示我們有互相滲透，但於相互關係之下而移動的二種不同之範圍。我們竟相信以太可用手指觸覺了。

然而我們還可以想出些使我們對於以太的感觸，更爲密切的試驗。假定牛頓原則，卽主動力與反動力相等之定則，如單單應用在物質上就不確實了，並且假定這是剛才我們所察覺的。於是加在一切物質分子上之幾何的總數就非零了。假使我們如不願變易全部機械學，那就應該把以太加入，使得那物質似乎受到的動力抵消那物質對於某物所發的反動力。

或者，我假定人們承認光與電之現象都受地球之影響。人們就要給論這些現象不但可以告訴我們物質體的相對運動，並且可以使我們知道那似乎是牠們的絕對運動。這還是應該有以太，使得這些自命的絕對運動不是對着虛空的空間移動，而是對着具體的一種東西。

這是人們會做得到的嗎？我早就沒有這個希望，稍待我將說出原由來，但這種希望不是怎樣荒謬的，因爲別人曾經有過。

例如，羅倫慈（Lorentz）的理論（這是我在第十三章中要仔細說的），倘是眞實的，照這個理論，牛頓定律將不適合於唯一的物質，而其差數之能受試驗將不太遠。

他方面，人們對於地球運動的影響曾經做過很多的探索，結果總是否定的；然而我們所以屢

次從事試驗，正因我們事前就無把握，並且即照一般流行的理論所得的抵償也不過是近似的，所以我們要等待精密的方法來給與確實的結果。

我相信這樣一個希望是虛幻的；倘有這種的成功，我們將不會另有一個新世界，那也是稀奇的。

現在請讀者讓我說幾句題旁邊的話；因爲我當說明何以雖然有羅倫慈那樣主張我不相信有更精密的觀察便能證明物體間相對移動以外的東西；人們曾做過許多的試驗，以爲可以發見第一級無窮小的項數；然結果總是否定的。這能是偶然之事麽？一定沒有人承認的；人們曾經尋找普遍的解釋，而羅倫慈找到了；他示明第一級無窮小的項數自當消去的，而第二級無窮小的項數則不然。於是人們更作有精密的試驗；結果也是否定的；這也不是偶然的事；這是要解釋的；人們已想到了；總是可以想到的；假設便是缺欠最少的根基。

然而這還不够；誰不覺得這還是把偶然之位置抬的太高了？今有某種情形恰巧消去這些第一級無窮小，又有某種大爲不同，然亦適宜的別樣情形能消去第二級無窮小，然這種少有的助合

不也是偶然之事嗎？不然；我們對於這兩種，應當找出同一的解釋，於是一切都使我們連想到這個解釋也必適合於更高級的無窮小，而這些項數的相互抵消，就是嚴密而絕對的了。

科學的近狀——在物理發達史中，我們可以分出兩種相反的趨勢。一方面，在有些好似應當永遠分開的物事中間，可以隨時發現新的關係；散亂的事實，就不再各不相干了；牠們漸漸的有整理，成爲一種有強力的組合之傾向。科學乃上了純一與簡單之路了。

他方面，觀察使我們天天知道新的現象；不過牠們要想在科學中占個位置，這就非久待不可，因此有時爲要給牠們一個位置，我們勢必把整個建築拆去一角才行。在那些本已知道的現象中我們粗陋的官能使我們看做很均一，而往後我們就天天察見其中多變化的小地方；我們初以爲簡單的，變爲複雜了，而科學似乎向變化與複雜之路而行。

這兩種相反的趨勢，有時此勝，有時彼勝，究竟結果是誰勝呢？倘若這第一種勝了，則科學爲可能；然而這不能先驗的證實，並且可以慮到經過了徒然的費力，想把那自然做成我們理想的純一，以後因自然界現象被我們所發現者日積月累，我們恐終於不勝其繁，疲於分類，拋棄了我們的理

想，而把科學變爲無數方術之登記。

對於此問題，我們未能回答。我們所能做的，乃在觀察現在的科學，以比較從前的科學。經過這種審察，我們當然能够抽出一些推測。

五十年前，人們曾經抱有無窮的希望。自從能之永存原則及其各種變化發現後，我們才知道力之統一性。例如牠能說明熱之現象可用分子運動解釋。至於這些運動的性質，則人們尚未十分確知；然而人們相信不久就可以知道了。關於光的問題，一切可說已解決了。至於電學則進步尚少。電學正與磁力學相合起來。這一步走向統一之路，卻是同小可，這是最後的一步。然而電學怎樣也入於普遍的總和一，他怎樣歸於普遍的機械論？人們卻還一點未想到。但這統一之可能，是誰也不疑的，人們確有此信仰。最後，關於物體的分子之特性，則統一更似容易；但一切詳細情形則尚在模糊中。一言以蔽之，希望是寬大的，熱烈的，但卻是空空洞洞的。

時至今日我們看見什麼？

最先是第一種進步，長足的進步。光與電之關係現在是知道了；從前分開的光，電，磁，這三科現

在只是一個了；而這種合併似乎已成定局。

然而得到這種的勝利，我們也着實有所犧牲。光學現象成爲一種特別款；而歸於電現象，只要牠們在分離的時候，是容易用人們自信爲詳細知道的運動來解釋，這是極順適的；但是現在一種解釋如要可行，應當推之於全部的電學而適合。但這卻不是容易做的啊。

我們所最滿意的，就是我們要在最後章說到的羅倫慈理論，牠用小電體之運動說明電流；這當然是一種將已知的事實說得最透澈的理論，是一種將最多數的眞實關係顯明出來的理論，是一種爲人們在最後的建築中所能找到得最多遺跡的理論。然而牠還免不了我上面已指明的大缺點；牠是反對牛頓定律的，即主反動力之相等之定律；或者在羅倫慈的看法，這原則竟是不能應用到唯一的物質；爲要使牠成爲眞確的，那就應該注意到那以太對於物質之主動力，以及物質對於以太之反動力。但在未來的新局面以前，好像這種事物的情形不是這樣的。

雖然，因靠着羅倫慈，那飛左關於動體的光學研究的結果，平常折光及異常折光，與吸光諸定律，才有所聯絡，並且與以太的其他特性，結了再不斷的關係是毫無的。試看齊門（Zeeman）的

新現象一來就有一個地位，並且牠竟能幫助法郎台（Faraday）磁轉現象之分類，這是馬克思威耳費了許多工夫所沒有成功的；這樣的容易足以證明羅倫慈的理論，並非一種預定消滅的虛飾集合物。大約我們應當修改牠，但不應消滅牠。

然而羅倫慈的奢望，只是把動體的光學及其動電力學集合起來；他并不想給牠一種機械學的解釋。勞莫更進一步，他保守羅氏理論的精髓而於其中加入馬克巨拉（MacCullaph）對於以太運動的方向之觀念，正如接樹一般。他以為以太的速度與磁力有同一的方向與同一的數量。所以這個速度是我們所知道的，因為磁力是可以試驗的。這種學說無論如何巧妙，羅氏的理論之缺點，還是存在，并且加多了。主動力不等於反動力。依照羅氏，我們簡直不知何者為以太的運動；但因為這種不知，我們可以假定牠們抵消了物質的運動，而恢復主動力與反動力之相等。依照勞莫，我們知道以太的運動，而我們可以察得這種抵消是沒有的。

如果照我的意思，勞莫是失敗了，這是否是說機械學的解釋就不可能嗎？大為不然；我在上面說過，凡現象服從能與極小作用兩原則，就有無窮的機械解釋；所以光與電的現象也是如此。

然而這還不够要使一個機械的解釋是好的，那就要簡明；而且爲在一切可能的解釋中選擇，我們除爲了必需選擇的原因之外，還有別的原因。然而合乎此種條件的理論，因而有點用處的，我們卻還沒有咧。我們應不應抱怨呢？果眞這樣，那就不啻忘記了我們的目的爲何物了，我們的目的不是其中的機械，而眞實及唯一的目的就是和一（unité）。

所以我們應節制我們的奢望；不必去想什麼機械的解釋；假使我們願意就以總可得到一種解釋爲滿足罷。對於這點我們已有成就；能之永存原則，至今總是證實的；此外還加上第二原則，卽極小作用原則，此原則已有合乎物理學的形式。牠也是常常證實了的，這至少是關於那服從乃甘賫方程式（equations de Lagrange）的可逆現象，卽是服從機械學中最普遍的定律。

至於不可逆現象，就更不順手了。然而牠們還是有秩序而漸趨於和一的；這全靠高樓原則之光照熱力學從事於物體之澎漲及其變形之研究已很久了。近來牠漸膽大起來而擴張其範圍。凡電池理論，熱電現象之理論，皆當歸功於牠；牠在物理學中無處不有所啓示，且對於化學亦有所攻鑽。處處總是同一的定律；處處在不同的表面下，我們找到高樓原則；處處也碰到這個熱溫率（entropie）之不可思議的抽象概念，這個概念與能的概念有同等的普遍性，而且也象牠似乎遮蓋着一種實在。傳熱現象從前似乎不應屬於熱力學；然而新近我們已見到牠歸於同一的定律下面了。

從那我們發現許多新的相似點，以至於細微點地方還是相似；窩密的電阻力（résistonce ohmique）有似液體的凝聚（viscosité）力；磁化遲延現象（l'hystérésis）尤似固體的摩擦。在任何款中，摩擦似乎是各種不同的不可逆現象之模形，而這種關係是實在而深遠的呵。

人們也曾找過這些現象的一種純粹機械的解釋。這是不容易找的。要找到牠們就得假定那種不可逆現象不過是表面的，而基本現象是可逆的，並且服從動力學已知的定律。然而基本的東西甚多，且漸相混合，所以在我們粗陋的眼光看來，似乎都是傾向統一的，就是說都向同一的方向前進，沒有回顧的希望。因此表面的不可逆現象只不過是大多數公有的定律之效果。唯有一種生物，其感官是無窮的靈敏，有如馬克思威耳理想的魔鬼，可以理解這束亂絲而引世界退後。

爲這個有關於氣體運動之理論的觀念卻費了極大的力，而總是不豐富的；但牠將來可以成

爲豐富的。這不是在此地審查牠會不會引起矛盾來，及是否合乎物之眞性。

雖然，我們且把顧衣（Gony）先生對於勃朗良運動（mouvement brownien）之奇特的觀念說一說。照這個學者的說法，這個奇異的運動不合高樓原則。那些他使牠震動的分子就比那很緊的亂絲網孔還細小；所以牠們將去分理這亂絲，而因此使世界逆行。我們將以爲這是馬克思威耳的魔鬼作怪呢。

綜而言之，舊時已知的現象分類得逐漸進步；但新的現象也來要牠們的位置；其中大半，有如齊門現象，一來就得到了。

然而我們還有負極光（rayons cathodiques）×光，鈾光，及鐳光。其中別有一世界爲任何人所沒有想到的。因此正不知還要安插多少不速之客咧！

現在誰也不能預料牠們將有何等的位置。但是我不相信牠們要消滅這普遍的統一，我還是相信牠們將有所補足咧。蓋一方面新的射光似與光耀現象（luminescence）相關連；牠們不特可以激起弗光現象（fluorescence），並且有時牠們發生的情形與之相同。

牠們與那受紫外光（la lumière ultra-violette）激起火焰發生的原因，也不是沒有關係。

最後，而最重要的，人們相信在這些現象中找到一種荷電的眞正伊洪，其速度之強大比在電之分解液中的自然有天壤之別。

這些都是很空泛的，但都待將來確定。

燐光現象（phosphorescence），光對於電閃之作用，又是較爲偏僻的問題，致爲學者所遺棄。我們現在可盼望去造一條新路線，使其與普遍科學的交通益加利便。

不特我們將發現新的現象，且在我們信爲知道的現象中，又顯露意外的景象。在自由的以太中，一切定律都保存牠們莊嚴的簡明性；但純粹的物質似乎漸形複雜；凡是我們所說到過的，永遠不過是近似的，而時時刻刻我們公式需要新的解釋。

雖然，那些表格並未中斷；在我們信爲簡明的物中，那些爲我們已經認識的關係，於我們知道牠們的繁複時，還是存在着於這些同一的物中，而要緊的只是這專我們的方程式愈形繁複，使得

與自然界的繁複愈加接近，這是實在的；但關於推算這些方程式之關係式卻絲毫沒有變易。一句話說來就是這些方程式的形式還是支持着。

我們就以弗勒納耳（Fresnel）關於返光（la réflexion）定律作例罷，弗氏是用一個簡明而引人注意的理論來建立的，且似乎得着實驗上證明的。此後有更精確的研究已經肯定這種的證實不過是近似的而已；牠們處處表示有橢圓偏光現象。然而利賴了這首次近似的結果，我們才找到這種不規則現象的原因乃是其中有一層東西經過的緣故；而弗氏理論仍不失其精要而存在。

不過人們不得不有一種思想：就是如果人們起初就懷疑爲這種關係所聯絡的物事的複性，則一切這些的關係將成爲依然是不會見到的了。久已有人說：如果狄哥有十倍精確的天文儀器，則永不會有克百勒牛頓及天文學。一種科學發生得太遲，而觀察的方法已太完善，就是一件不幸之事。今日的物理化學（la physico-chimie）就是如此；牠的創造家往往受那第三位或第四位小數之累，所幸的，這種人都有一種強固的自信力。

我們對於物質的特性愈是明白，愈見其中有一種繼續性。自從安得來斯（Andrews）與王德耳瓦耳斯（Van del Wals）的研究結果發表之後，我們才明白液體變成氣體之經過詳情，及知道這種過程不是驟然的。同樣在液體與固體兩種狀態之間，也沒有什麼深淵，又在新近的一個學會中我們見到同時有關於液體固結性，與固體流行的論文。

在這種傾向之下，簡明性的失敗是無疑；有某種現象從前是用許多直線表示的，現在多少也要用繁複的曲線把這些直線湊合起來。在這一方面，統一性卻於其中得到許多優勢。這些種類分清之後，使我們的理智能得休息；但牠們還是不足以使人滿足。

總之，物理的方法已經擴張到一個新的範圍內，此即化學；物理化學（physicochimie）乃因此產生。這門學問現在還在幼稚時代，然而牠已能使我們把許多現象聯絡起來，例如：電之分解（l'electrolyse），滲透作用（l'osmose），以及伊洪運動（le mouvement des ions）。

從這樣短促的說明中，我們得到什麼結論呢？

把什麼都計算在內，我們已是近於統一（unité）了，我們所取的步驟，並未如五十年前所

希望的那般迅速，我們沒有取預定的路徑；然而，在結果上卻已拓展了許多地域。

第十一章　或然性之計算

在這個地方，忽然來說或然性之計算，我想人們一定是詫異的。牠與物理科學的方法又有何關呢？

但是我所要舉出而不會解決的問題，自然而然為研究物理的哲學家所要提出討論的呵。為此所以在前二章中，我常常用過或然性與偶然這些字眼。我上面曾經說過：『一切預料的事實只是或然的，無論一種預測之如何穩固，我們決不能絕對的信牠不致被經驗所推翻的。然而這或然性往往是很大的，以致我們在實用上能够滿意。』

其後我又說過：

『我們且看那簡明之信仰，在我們的概括理論中有何功用。在許多特例中，我們曾將簡明的定律證實，而我們對於這樣一再重見的巧合，決不承認是一種偶然的事。』

所以在許多情況中，物理家的地位有如賭博者，只盼望幸運。凡是他們用歸納法推想的時候，他們多少有意識地用或然性來計算。

因此我不得不插入一句話，而打斷我的物理科學方法之討論，來詳細察看這種計算之價值及其值得爲吾人信用之程度。

單看或然性之計算這個名詞已屬怪語；或然爲確定之反面，是人們所不知道的，既是不知道的，又如何去計算呢？但是許多高明學者卻已經從事過這種計算，而我們決不能否認科學已從此中獲得若干益處的。這表面上的矛盾，怎樣解釋呢？

或然性這個名詞已有人下過定義否？到底牠可不可定義呢？假使不能，則我們怎麼敢去推理呢？人家將說，這個定義是很簡單的：一事端之或然性者，卽順利於此事端的發生情形之數目與其可能發生情形的總數之比。

試舉一簡明之例，便可見此定義之不完全了。我試擲二骰；爲要二枚中至少有一顯六點之或然性爲如何呢？每骰可顯六種不同的點，此可能情形之數爲6×6=36，順利情形之數爲11，故此或

然性爲 $\frac{11}{36}$。

這個答案是不錯的。然而豈不可說兩骰所顯出的點子可成 $\frac{6\times7}{2}=21$ 不同的組合？在這些組合中，6個是順利的；故其或然性爲 $\frac{6}{21}$。

何以計算可能情形的第一式要比第二式合法呢？無論如何，這不是我們的定義告訴我們的。所以我們只好補足這定義，在『……與其可能發生情形的總數之比』句下增加一句說：『只要這些情形是一樣或然的。』這樣我們竟是只有將或然的來規定或然的了。

我們怎樣知道兩件可能的情狀就一樣的或然呢？這難道是一種公約嗎？我們如果在每一問題之起首用一種明釋的公約，那就一切順利，我們只要應用算術與代數的規則就可以一直算到底，所得的結果，不致有懷疑的餘地；但是一到我們要稍稍應用牠的時候，則我們必須證明這個公約是合法的，於是我們又將逢到我們以爲已經巧避的困難了。

有人將說，用我們的普通理智就可以知道須做何種公約麼？唉！白譚（M. Bertrand）先生曾經好玩演算一簡明的題目：『如要在一圓周中作一弦（corde）比內接正三角形之邊爲長，

則其或然性爲何?』這位著名幾何家曾依次用兩個都合乎普通理智的公約，於是得了兩個不同的結果，一爲 $\frac{1}{2}$，一爲 $\frac{1}{3}$。

由此以觀，則或然性之計算簡直是一種空虛的科學，我們再也不可相信這種不清不楚的本能，所謂普通理智的，而我們從前還要藉以矯正我們的公約咧。

然而對於這種結論，我們也不能贊同；這種不清不楚的本能是我們所不可少的；沒有牠則科學將爲不可能，沒有牠我們既不能發定定律，又不能應用定律。譬如，我們可以說明牛頓定律嗎？這是當然的，因爲有許的觀察都能與之相合；但是這裏不是偶然的簡單作用麼？況且我們雖然知道這定律已眞了許多世紀，又怎麼知道牠明年還是眞的呢？對於這個疑問可說誰也不能回答，除非說：『這是很少或然性的。』

但我們姑且承認此定律吧；靠着牠，我想能够計算一年後木星之所在。然而我有這權嗎？誰敢說一個極大的物質挾着極大的速度就不會近着太陽系經過而發生一種不可預測的紛亂呢？講到此地，又是無可回答了，除非說『這是很少或然性的。』

照這一看，所有科學不過是一種非意識的或然性計算之應用；所以破壞這種計算不會破壞科學的全體。

在有些科學問題中，或然性計算更是顯然的一部分，對此我不再多說了。第一，譬如插值法（interpolation）是在已先知函數之值後來猜其中間的值。

我還要舉個例，即那著明的觀察上的舛錯論，這是我以後還要談及的，氣體運動理論，這個知名的假設是假定某一氣體分子可運行極繁複的軌道，但因其數太多，故唯一可觀察的平均現象服從簡明的定律，即茉莉得與蓋呂申克（Gay-Lussac）定律。

所有這些理論都是根據大多數的定律而來，所以或然性的計算顯然是牽累了牠們。牠們確是只有一種特別的利益，而除了關於插值法外，這都是些犧牲；對於這些犧牲人們是可以免爲其難的。

但是我上面已經說過，這還不僅是這些部分的犧牲，而是關於科學的全體，因科學的正當地位將發生疑問了。

我知道有人一定要說『我們是無知者，但我們應該作爲。如要作爲，就無暇去做詳密調查的功夫，來開我們的茅塞；況且這樣的調查，要花費無窮的時間才行。所以我們不知不覺的應該決定我們要靠小機運而行，而且按照規則，但也不必信之太甚。我所知道的並不是說某事是眞的，不過在我認爲最好的，還是當牠是眞的做去。』

然則或然性的計算以及科學只有實用的價値了。

不幸那些難點，不是這樣可以打消的；今設有一賭博者要下手時，請我指教。如果我答應了他，則我將根據或然性計算，但我不能擔保他成功。這就是我所謂主。觀。的或然性。關於這一層，人們或可滿意我剛才所說的。但我假定有一旁觀者專記每局的結果，而且這賭博的時間又甚長；則末了看他的記錄之時，結果必合乎或然性計算，這就是我所謂客。觀。的或然性；而正是這個現象正有待解釋的。

現在有許多保險公司應用或然性計算，且他們能分配於股東以紅利，這紅利的客觀實在是無可疑議的。拿我們的無知與作爲的需要來解釋此事，這是不够的。

所以絕對懷疑是不能成立的；我們當有謹慎之態度，但我們不能作攏統的攻擊，一定要經一番討論才行。

一、或然性問題之分類——關於或然性的問題之分類，我們可有好幾種看法，第一根據普遍性。在上面我已說過或然性者，乃順利情形之數與可能情形之數之比。因為沒有較妥的名詞，故名曰普遍，這是與可能情形之數並進的。此數可以有限的；例如一局骰子之可能情形的數為三十六。此為第一級的普遍性。

但是，譬如我們問在圓周之一點能為本圓內接正方形中之一點的或然性如何，圓中有多少點便有多少可能情形，質言之即無窮數。這是第二級的普遍性。這個普遍性更可加以擴張：我們可以問，如欲某倚數滿足某條件，則此或然性若何；於是我們可想出若干相異的倚數，就有若干可能的情形。這是第三級的普遍性，譬如，當我們根據有限數的觀察而猜想最或然的定律之時，我們就昇上這級了。

我們可根據完全不同的一點來着。如果我們不是無知，那就沒有或然性，而只有確定之位置

了；但是我們的無知不能是絕對的，否則也沒有或然性了，因爲就是要達到這種不確實的科學，亦要借點光明才好。所以或然性問題可視此種無知程度之深淺而分類。

在算學中，已經可提出或然性問題。如任意在對數表中找一對數之第五位小數爲9時，此或然性若何？我們一定不遲疑的答道，這是 $\frac{1}{10}$。此地我們具有此題所應有之與數；我們不用表就可計算對數；但我們不願費這種力。這就是第一級的無知。

在物理學中，我們的無知是更大了。一系統在某時之情狀視二事爲轉移：其初時之情狀及此情狀因以變動之定律。這兩樣事情我們如都知道了，我們只剩算學問題待解決，而我們又落在第一級的不知上面了。

但我們往往只知定律，而不知其初時之情狀。譬如有人問現在小行星之分配如何；我們知道自古以來牠們是受蓋伯烈定律支配的，但我們絕不知道牠們初時狀況如何。

在氣體運動中，有人假定氣的分子之軌道爲直線，且服從兩彈體互衝之定律；但因不知道牠們的最初速度，故其現在速度亦無從得知。

唯獨或然性計算可以預料平均現象，此卽許多速度所組成者。這是第二級的無知。

最後，不特初時的條件，並且定律之本身皆有不知之可能；於是人們達到第三級的不知，而普通我們對於一現象的或然性之問題再也不能有絲毫的肯定了。

往往與其根據多少不完全的定律智識，以預測一事端，不如先知事端，再猜其定律，與其由因求果，不如從果求因。這叫作原因之或然性問題，這些問題對於科學上之應用要算最有趣的了。

今如我和一位我知道他極誠實人做紙牌遊戲；他將出牌；當他反出的牌是王，則此或然性如何？這是 $\frac{1}{\infty}$；這是結果之或然性問題。我和一位不相熟的人作同樣的遊戲，他反了十次牌，其中六次是王；假使我的遊伴是騙子，則此或然性又將如何？這是原因之或然性問題。

我們可說這是實驗方法之主要問題。我已觀察得 x 的 n 個之值，及 y 所有相當之各值；我已察得後者與前者之比爲顯然的常數。這就是一件事端，試問其原因何在？

這也許是有一種普通的定律，根據這定律 y 與 x 成正比例，而其中小小的差別是由於觀察之錯誤？這是一種問題，我們研究科學時總不斷地遇到的，而不知不覺的解決了。

我現在且把這些不同類的問題提出討論，我先討論主觀的或然性，次討論客觀的或然性，這都是我上面定過的名詞。

二、在數理科學中的或然性——自一八八三年以來，將圓周變成平方之不可能是已經證明的了；但以前許多幾何家以爲這個不可能性實在是十分『或然的，』所以科學院不經審察的丟棄那班可憐的瘋子每年送去的論文，呵，那些論文眞是太多。

試問學院有過錯嗎？自然不是，因爲牠知道這樣并不會埋沒一種眞正的發現。牠當時雖未能自辯；但深知道牠的良知決不會欺騙牠的。如果你要問這學院裏的會員，他們一定答道：『我們曾比較還是一位無名的學者能解答從來想解決而未能的問題之或然性爲大，還是地球上又多了一個瘋子的或然性爲大；我們覺得這後者的或然性似較大』。這是很好的理由，但毫無數理的性質，這純粹是心理的。

又如你再追問他一句，他又將說：『你何以要一超然倚數 (fonction transcendente) 之某値爲代數的數；又如 π 爲某代數方程式之根，你何以要他是倚數 $\sin 2x$ 之循環數 (période)

而同一方程式之其餘的原則又不然呢?』總之,他想用一種最不可捉摸的充足理由之原則來辯護。

然他們從中可得着什麼?我想頂多不過一個時間利用的規則,與其把時間用來看那種早爲他們所不信任而枉費心血的書,不如用在普通的工作上爲有益。但我上面所謂客觀的或然性與此題毫無關係。

至於第二題則大爲不然。

例如我有一本對數表,在起首10,000對數中隨意取一個,要牠的第三小數爲偶數,則此或然性爲何?你一定不遲疑的回答這是 $\frac{1}{2}$,其實你如把這10,000數目的第三位小數一個個寫出來列成一表,一定見到偶數之數與奇數之數相差不多。

質言之,現在如果把這10,000對數之10,000相當數寫下;如果對數之第三位小數爲偶數,則每數爲+1,反之則爲-1。然後將此10,000數平均之。

我將不遲疑地說:這10,000數之平均數大約爲零,並且我如果實在去計算,我證明這數目一

定是很小歐。

但這種對正也是無益的。我本可證明此平均數小於0,003。為建立這個結果，那就要用很長的演算，此地篇幅是太小了，因此我只好引證我在一八九九年四月十五號出版的普通科學雜誌內所登之一文供讀者參考。我所要使人注意的唯一點就是在這演算中，我只需要二事為根據，即對數的第一次引數與第二次引數在認定的間隔內，仍舊是包含於某定限中。

由這結果乃知此特性不僅於對數為眞，且於任何連續倚數亦然，因為凡是連續倚數的導函數都是受限制的。我所以能先將結果確定。第一，是因為我在別的倚數中已經常常觀察些相似的事實；其次，因為我在良心上總做了些多少是無意而不完善的推理，這種推理引我到前面的不相等式，有如一位演算的熟手在未算完乘法以前早已知道『大約若干』了。

況且，我所謂我的直覺，既然只不過是一種眞推理的不完全的覘察，人們便可說明觀察與我的預測之相符合，又客觀的或然性與主觀的或然性之相符合。

今再選下題以為第三例：u為一任意數，n為一極大之給與的整數；則 $\sin nu$ 之大概值為

何？這個題目本身是毫無意思的，如欲給牠一個，就要一公約；我們試認u介於a與a+da之間，其或然性爲φ(a)da；故此或然性與無窮小的間隔da之面積成比例，而等於此面積乘那只跟着a轉之倚數φ(a)。至於此倚數可任意擇定，但是必需假定牠是連續的才行。當 sin nu 之値不變而u增加2π時，故我不去限制普遍性可以假定u介於o與2π之間，因此我就要假定φ(a)是循環倚數，其循環數爲2π。

我們要求的大概値用單積分表之甚易，且很易證明此積分是小於 $\frac{2\pi M_k}{n^k}$。M_k爲φ(u)的第K次之引數之最大値。所以人們可見如第K次之引數爲有限的，則上式之値，當n爲無限地增大時，將漸趨於零，且較 $\frac{1}{n^{k-1}}$ 之趨於零爲快。

故n極大時，sin nu 之大概値爲零；爲要規定此値，我曾求助於公約；但無論此公約如何，結果總是一樣的。我只受很小的制限假定φ(a)倚數爲連續而循環的，這些假設是這樣自然，以致我們自問怎能將此免去。

把前面各異的三個例子審察了之後，我們一方面已經窺見哲學家所謂充足理由原則之功

用何在，他方面，有些特性是爲一切連續倚數所公有的，這是件重要的事實。在物理科學中研究或然性足使我們得到同一的結果。

三、在物理學中的或然性——現在我們談到關於上面所說的第二級的不知之問題了；這就是那些人們知其定律而不知其系統初時之情狀的題目。我儘可多舉些例子，但我只要舉一個：在十二宮（zodiaque）上小星球現在大概的分佈如何？

我們相信牠們是服從蓋伯烈定律的；我們不變易此題之性質，甚至可假定牠們的軌道都是圓的，都在同一平面，而爲我們所知道的。反之，我們完全不知牠們初時的分佈如何。但是我們不遲疑的肯定今日這種分布是均一的。何則？

試 b 爲一小星球在初時即在零時之經度，設 a 爲其平均運動；則其在現時，即在 t 時之經度當爲 $a+b$。如說現時之分佈爲均一的，這就是說以 $at+b$ 的倍數爲角度的正弦和餘弦之平均數爲零。我們何以做此肯定？

試以平面上之一點代表每一小星球，此點之位標適爲 a 與 b。這些代表點將包含於平面上

某定範圍內，但點數既多，此範圍便好像撒滿了點子一般。其實我們一毫不知牠們的分布法。

對於此種問題，我們要應用或然性計算時，怎樣做呢？如要一點或多點是在範圍中某定部分，此或然性為何？在我們不知的時候，我們只好作一任意的假設。為要使人明白此假設的性質，請讓我與其用數理的公式，不如用一粗淺而具體的影像來說。我們試想像在此平面上舖有一種理想的物質，其密度是可變的，但是連續變動的。於是我們作為這樣的說，那些在平面上某部分之點子其數與那理想的物質之數量成比例。於是人們如有平面上兩相等的部分，則我們小星球中之代表點在此一部分或在彼一部分之或然性之比等於此理想物質之平均密度在此兩相當部分之比。

這裏所以有了兩種的分佈，一種是眞的，其中代表點是很多的，很擠的，但有如在原子設想中，物質的分子之分佈，都是散離的；一種是離開實際的，其中代表點是以理想的連續物質代替的。我們知道這後者不是實在的，但是我們的無知謏了我們，逼着我們才去採用牠。

我們如尚有關於代表點之實在的分佈法之意見，則我們便可安排得使在某定大的部分內

此理想的連續物質之密度大約可與代表點之數成比例，質言之，就是包含在此部分內的原子。其實這也是不可能的，而以我們這樣甚的無知，我們勢必任意揀一倚數，以定我們的理想物質之密度。我們只受一種不得已的假設之限制，我們假定此倚數是連續的。這樣已足使我們得一結論，我們且看罷。

在 t 時，那些小星球之大概的分布如何？或者，在 t 時，徑度正弦之大概值，即 $\sin(at+b)$ 爲何？起初我們曾作一任意的公約，但我們如採用之，則此大概值是完全定當了。今將平面劃分爲小面積。認定 $\sin(at+b)$ 在每小面積中心點之值；將此值乘此小面積，及理想物質之相當的密度；然後再將所有小面積總合計算而求出其和。照定義，此總數即所求之大概的平均值，這樣他是用雙積分表示的。

人們或以爲此平均數由 φ 倚數而定，此倚數規定理想物質之密度，而 φ 既是任意的，那麼跟着任意的選擇，我們可得任何的平均值。這卻是絕對不然的。

用一簡明的計算可以證明此雙積分，當 t 增加時，牠卻遞降得極速。

因此，我不知道究竟對於起始時的某種或某種的分佈問題應該做什麼假設才好；但是無論用何種假設，其結果總是一樣的，就是這樣我才免了許多困難。

無論 φ 倚數是什麼，當 t 增加時，其平均值漸趨於零，只因爲那些小星球必已完成了極多次數之旋轉，所以我能肯定此平均值必爲極小。

我可隨意選擇 φ，但是有一種限制：就是此倚數應當是連續的；因爲照主觀的或然性而論，如選了一種不連續的倚數，未免不合理性；例如我假定起始時的徑度爲 0°正而不能正 0°與 1°之中，其理由何在？

但是如果照客觀的或然性而論，如果我們從理想的分佈（那裏理想的物質已假定爲連續的）來到眞實的分佈（那裏我們表示的點有如散離的原子），則困難又生。

$\sin(at+b)$ 之平均值簡直可用下式表之：

$$\frac{1}{n}\Sigma\sin(at+b)$$

其中 n 表小星球之數。我們所有的已非一連續倚數之雙積分，乃是散開的項數之和數。然而

竟無人眞切地疑惑這平均値實在是極小的。

此因我們的代表點既極擁擠，我們這散開的項數之和數與積分相差普通也是很少的。一積分乃一些項數之和，在項數增至無窮時所趨向之界限，如項數極多，則和數與其界限相差極少，即與積分相差極少，而我關於積分所已說的話仍然適於此和數。

但也有例外，例如對於一切小星球的問題爲：

$$b = \frac{\pi}{2} - at,$$

在 t 時所有一切星球之經度將爲 $\frac{\pi}{2}$ 其平均値當然等於1。爲此，則在0時，所有小星球都應該放在一種特別形而緊密的螺旋線上。大家將以爲這種初時的分佈是未必的。（就是假定牠實現了，但在現世代，譬如一九〇〇年一月一日，其散佈必不均一，數年後才可均一。）

然而爲何我們斷定這初時的分佈是未必的呢？這是要解釋的，因爲我們倘若沒有理由捨去這個荒謬的設想，認爲不確實，那就統統都會傾倒了，而我們對於或然性問題，也不能肯定現時的分佈是如何了。

我們要援引的，仍是充足理由的原則，這是常常要回顧到的。我們可以假設星球起初時分散得彷彿成一直線；且亦可以假定星球不是整齊的分佈；但是在我們覺得好像無充足理由使那產生牠們而為吾人所不知的原因去依着一條很整齊但很複雜的曲線而動作，幷且好像特意選擇這曲線而使得現在的分佈不是均一的。

四、紅與黑——為那些偶然的遊戲所引起的問題，例如轉盤賭（roulette），其實與我剛才所談的完全相似。

譬如在圓面上分成極多的相等部分，並間以紅黑二色；用力將指針旋轉，在經過很多數的圈子之後，牠止於某分格。欲此分格為紅，則其或然性當然為 $\frac{1}{2}$。

今如指針之旋轉角度為 θ，且包含數圓周；我如用力旋轉此針使止於 θ 與 $\theta+d\theta$ 之間，則不知或然性為何；但是，我可做一公約；假定此或然性為 $\varphi(\theta)d\theta$；至於 $\varphi(\theta)$ 倚數我完全可以任意選擇之；絕對沒有什麼可以指導我選擇；但是我卻自然的會假定這倚數是連續的。

設 ε 為每紅分格或黑分格之長度（在半徑為 1 之圓周上計算。）

那應該計算$\varphi(\theta)d\theta$之積分，一方面把牠普及於所有的紅分格，他方面普及於所有的黑分格，而比較其結果。

我們試認定一間隔2ε內含一紅分格及牠相接的黑分格。設M與m為$\varphi(\theta)$，在此間隔中之最大與最小值。普及於所有紅分格之積分將小於$\Sigma M\varepsilon$；普及於所有黑分格之積分將大於$\Sigma m\varepsilon$；故其相差將小於$M(M-m)\varepsilon$。但是如倚數φ是假定連續的；又如ε對於指針所轉之全角度為極小，則$M-m$之差數將為甚小。故二積分之相差極小，其或然性將近於$\frac{1}{2}$。

人們自當明白，不知道倚數φ為何，我應該將或然性當作$\frac{1}{2}$做去。他方面人們可以解釋何以我們從客觀一方面着想，我觀察得若干次數的局，這觀察的結果是紅的次數大約等於黑的次數。

凡賭博家都知道這客觀的定律；但這定律足以陷他們於錯誤中；雖經屢次救出，然仍舊常常墮落其中。如果紅色連接出了六次，他們以為放在黑的上一定靠得著；因為他們說紅色連出七次，這是很少的。

實際上，他們獲勝的或然性還是$\frac{1}{3}$。在觀察上，實在連出七次紅色是很少的，但六次紅一次黑也是很少的呵。他們注意七次紅是很罕有的了；他們所以不能注意六次紅一次黑也是罕有的緣故，這完全是因爲這種情形很少引起注意。

五、原因之或然性——我現在來談原因之或然性的問題，這是在科學應用一方面最重要的，例如：有兩顆星在天球上是很接近的；這種表面上的接近是否偶然的事，而這兩顆星雖似在同一的視線上，然與地球之距離是否相差甚大，而因之彼此相距離遠呢？或者這是實在的接近嗎？這就是原因之或然性的問題。

直到現在所談的求結果之或然性的各問題中，在起初我們曾應該安放一種多少是合理的公約。假使在某種限度中，結果與常常獨立於這公約以外，這只因爲某種假設的條件使我們先驗的捨去不連續的倚數，或某種荒謬的公約。

我們研究原因之或然性時，我們又可見到一些同樣的東西。一種效果可由A原因或B原因所產生。今效果既已發生；人們要問這是由於A原因之或然性爲何；這是後驗的原因之或然性。但

是如果沒有多少經過審查的公約預先告訴我A原因之先驗的可信率，那我就不能計算牠了；所謂先驗的或然性，卽對於倘未觀察其結果的人而言的事端或然性。

爲更明白起見，我再舉前面說過的那種紙牌戲（jeu d'écarté）爲例；我的對手人先動而所出的是王，如果這是騙子，則其或然性爲何？依普通的公式求得，這是$\frac{8}{9}$，這個結果當然是很可怪的。我們如再加以考察，將可看見，我們做這樣的計算，好像在未坐在桌子旁邊以前，我兩分中已有一分認我的對手人爲不規矩。還是荒謬的假設，因爲如有這心理我一定不和他玩了；故此結論之謬誤亦卽在此。

關於先驗的或然性之公約已經不對了；是故後驗的（a posteriori）或然性之計算引我到一個不可容納的結果。由此可見這預定的公約之重要；我還進一步說，倘若絕不設這種公約，則後驗的或然性之問題將毫無意義；故總要明白的或暗示的去做牠才行。

現在再舉一個更合乎科學的例子。我想確定一實驗的定律；此定律待我知道之後，就可用曲線來表示；我做了若干次孤立的觀察，每一觀察可以一點表之。我得了這些不同的點之後，便用曲

線穿過之，使不致與各點相距太遠，並須保持此線整齊之形狀，沒有角點，沒有太急的曲折，沒有曲度徑太急的變換。此曲線可表出大概的定律，我承認牠不但能使我知道已經觀察過的倚數中之中間倚數值，而且還能使我知道那些觀察得的數值之本身，比直接的觀察更爲正確。（因此我將曲線貼近這些點子而通過，並非經過這些點子的本身。）

這是原因之或然性的問題。那些效果即我所記錄下來的量度；牠們依着兩種原因的組合：現象之眞正定律與觀察之錯誤。知道了効果，尙須尋求使現象服從某定律之或然性，以及使引起某種錯誤之或然性。於是或然性最大的定律與所劃的曲線相合，而一種觀察之或然性最大的錯誤即以此點與此曲線之距離表現之。

但是在一切觀察以前，我如對於某定律之或然性以及我萬一的錯誤之或然性沒有先驗的一種意見，則此題將毫無意義。

如果我的儀器是精巧的（這是我在未觀察以前已經知道的了），我就不會使我的曲線與實驗上直接得來的表點相離太遠。這些儀器如其不好，我可以稍爲離遠一些，冀得一較少屈折之

線；這樣，那曲線之整齊形狀就多犧牲一些了。

我爲何要想法劃一沒有屈折的曲線呢？此因我先驗的就認定一定律爲連續的倚數所表示（或以高次引數是很小的倚數表示），比之不合此種條件之定律的或然性較大。如無此種信仰，我們現在所談的問題將毫無意義；插值法將亦是不可能了；人們決不能從有限的觀察中推出一種定律；這樣科學將不能成立了。

五十年前，物理學家認定在同樣的情況中，簡明的定律總比複雜的定律爲可信。他們甚至引借這個原則來袒護茉莉得定律，反攻侯落耳（Regnault）的試驗。現在他們排斥這種的信仰；但是有多少次，他們不得已仍當奉守那信仰做去！雖然，這個傾向所餘的就是連續性之信仰，而我們剛才已見過，如果輪到這個信仰也有消滅的一天，則實驗的科學將成爲不可能了。

六、錯誤論——因此我們就來到談關於錯誤的理論，此理論與原因之或然性的問題直接相關。此地我們仍是察見一些効果，此即若干不相調和的觀察，而我們想法去猜度其原因，這些原因，一方面是測量的質量之眞值，他方面是每一單獨的觀察中所做的錯誤。應當計算每一錯誤之後

驗的或然性數量，以及須待測量之質量的大概值。

但是，照我剛才所已經說明的，如果人們不先驗的（即在一切觀察以前），承認一種錯誤的或然性定律，是不能做這計算的。錯誤定律究竟有沒有呢？

凡計算家所承認的錯誤定律就是哥斯（Gauss）定律，牠是用一超然曲線表示的，名曰「鍾形曲線」。

先且照古法分別系統的錯誤（erreur systématique）與偶然錯誤（erreur accidentelle）。我們如果用太長的米突尺量一長度，我們結果所得的數總是太小，雖經數次測量，然這終是無用的；這就是系統的錯誤。我們如用一精密的尺量之，雖然我們也能錯誤，但是有時我們錯的多，有時錯的少，苟經多次測量之後，試求其平均數，則錯誤漸消。這是偶然的錯誤。

系統的錯誤不能滿足哥斯定律是顯然的；但是偶然錯誤能滿足牠嗎？人們早已試演過許多的證明；而大概都是些粗陋的誤解。但是人們仍可根據下述的假設以證明哥斯定律：所犯的錯誤乃是許多部分的與各自獨立的錯誤組合而成；每一部分的錯誤是很小的，并服從一條任何或然

性定律，但一個實在的錯誤之或然性和一個相等而記號相反的錯誤之或然性是同樣的。自然這些條件往往可以滿足的，但並非永是如此，對於滿足這些條件的錯誤，我們就名之曰偶然的。

人們可見最小乘方法（la méthode des moindres carrés）不是在一切款中都合法的；普通物理學家還比天文家更看輕牠。這一定由於天文家除遇有如物理學家的系統錯誤之外，還要抵抗一種極重要的錯誤之原因，而這完全是偶然的錯誤；我就是說大氣的波動。所以聽一位物理家和一位天文家討論某觀察方法，那是很奇怪的。物理家因確信一次對的測量勝過許多次不準的，故小心竭力以消盡最後的系統錯誤爲前提，而天文家回答道：『但是你這樣只能觀察極少數的星；偶然的錯誤還是不消滅的。』

我們的結論如何？是否應該繼續應用最小乘方法呢？我們應當分別：我們已把所能懷疑的一切系統錯誤都消去了；我們確然知道還有，不過我們不能發現牠們；但是我們應當定一個主意，而採用一個確定的數值，認爲或然的數值；爲要這樣我們最好的做法就是應用哥斯方法。我們所應用的止是關於主觀的或然性之實用的規則。那就沒有什麼說了。

但是人們還想進一步，並且不特肯定或然的數值是若干，並且肯定結果中所犯的或然錯誤是若干。這是絕對不合法的；要這是眞實的除非我們確知那些系統的錯誤都已經消去了，但這是我們所絕對不得而知的。

我們有兩種觀察；應用最小乘方法時，我們覺得第一種或然性的錯誤比第二種的小兩倍。但是第二種的却比第一種的好，因爲第一種的或竟是顯着很大的系統錯誤。我們所能說的，便是第一種的大約勝於第二種的，因爲牠的偶然錯誤較弱，並且我們絕沒有理由去肯定，系統錯誤中之此種比彼種爲大，關於這層，我們絕對是不知道的。

七、結論——在前文中我提出了許多的問題，可是一個都沒有解決。但是我幷不懊悔已經寫了出來，因爲這些文字也許能引起讀者去思索這些難題。

雖然這樣，其中有些地方似乎是成立得很好的了。如要作某種或然性的計算，且使這計算有一個意義，那末就應該以承認一種假設或是常常略含任意性的公約爲起點。選擇這種公約時，我們只能以充足理由的原則爲嚮導。

不幸這個原則是很空泛的，並且是很有收縮性的，而在我們方才很快的考察中，已見過牠有各種不同的形式了。最常見的形式，就是連續性之信仰，這信仰很難用不可辯駁的推理去證實，但是如果沒有了牠，則一切的科學也就不可能了。最後，凡是能應用或然性計算而有效果的問題，就是其結果都是與初時的假設不相干，祇要這假設滿足連續條件。

第十二章　光學與電學

弗勒納耳之理論——人們所能舉的最好的例子（註一）就是光的理論及其與電學之關係。有賴於弗氏，光學才變成物理中最進步之一部分；所謂波動說實在是愜乎人意的一種具體的理論。但我們不可向牠要求牠所不能給我們的東西呵。

數學理論不是以在揭示我們事物的眞正性質爲目的；如有這種奢望，那就未免是無理了。牠唯一的目的，只在整理實驗所告訴我們的物理定律；然而如果不靠數學，則我們連這些定律說都說不出來。

以太眞正存在與否，這都與我們沒有大關係的，這是玄學家的事情；在我們最要緊的，就是我們可以把牠當作存在的，而這個假設頗便於解釋許多現象。除了這個理由之外，我們還有無別的理由可以相信物質的東西之存在嗎？這也不過是一種便當的假設；但這是永遠如此便當的，那怕有一天以太成爲無用的而被拋棄。

然而就是有那一天，光學定律及其方程式還會是眞實的，至少是第一種的近似。所以研究那聯絡這些方程式的學說總是有益的。

波動學理就是建在一種分子的假設上的；有些人相信這樣就把藏在定律裏的原因揭發了，他們以爲這是有益的；有些人以爲這正足以引起猜疑；然而我以爲這種猜疑與前面一班人的幻想，都是不能證明的。

這些假設的作用是次要的，人們可以犧牲了牠們，普通人們總不這樣去做，因恐失去陳述上之明晰，而這就是唯一的理由。

其實人們如仔細去觀察，則見人們所借用於分子假設的不過二事：能之永存原則，及一次方

程式，這些方程式表示微小運動，有如極小變易的普遍定律。

　這可以說明何以人們採用光的磁電理論時，弗氏的結論大半仍可以無變動而存在。馬克思威耳之理論——大家知道光與電的密切關係一直要等馬克思威耳才把牠倆聯絡起來。這樣，基礎雖是更寬大入於更高的和諧中，但是弗氏的光學還是成立。牠的各部分還是存在，而其互相的關係總是一樣的。不過，我們講解時的語法已變了，他方面馬氏更發明許多前人未曾發現的電與光之各部分的關係。

　法國的讀者第一次展開馬氏的書之時，便覺有所不安，甚至往往贊美的感情與猜疑的感情參半。要費了許多的努力與長久的犧牲，這種感想才可消滅。有些高明人竟把牠永久保存着。

　爲何這位英國學者的思想在我國這樣難得同意呢？無疑的，這是因爲大半有智識的法國人所受的教育使他們愛重精確，與邏輯先於其牠一切特性。

　對於這方面，古傳的數學的物理之理論足使我們完全滿意。我們所有的老師，自從拉卜拉斯（Laplace）直至哥希（Cauchy）都是用同一的方法去研究他們從一種很明顯的假設起

始，而得到一種有如數學之嚴密的結果，然後，再藉實驗以爲比較。他們好像要把物理的各部分都給以有如天體機械學的精密性。

對於性喜這種模範的人，凡是一種理論總難於使他滿意。他不特不容有一點矛盾的地方，還要各部分都合乎論理的聯絡起來，並且要不同的假設愈少愈好。

還不只此，他還有別的要求，這是我以爲不大合理的。在我們能夠感觸到的物質之後，他還想看見一種別的物質，在他以爲惟此是眞實的東西，而這種物質所有的只是純粹幾何的特性，其原子只是按照動力學公律而移動的數學的點。明知這些原子是無形無色，但因一種不知不覺的自相矛盾，他想把牠們表現出來，因此使其更加接近尋常的物質。

這樣他才完全滿意，並且以爲探進宇宙之祕密了。假使這種滿意是騙人的，但也不容易改變這種想頭。

因此，一個法國人展讀馬氏的書之時，他期待着可以找到好像建在以太設想上之物理的光學那般精密而有理的理論，他未免大失所望；這是我要卽刻奉勸讀者務必免去的，同時告訴他那

些是應在馬氏書中尋求的，那些是不應尋求的。

馬氏對於電與磁並沒有機械的說明；他僅限於說這個說明是可能的。

他也示明光學現象不過是磁電的特別現象所以人們可從所有電之理論中，直接推出關於光之理論。

不幸這個道理倒過來講就不對了，從完全的光之理論中，往往不容易引起關於電之理論。人們如從弗氏理論起始，這更是特別不容易了；這一定並不是不可能；但人們總要問從前所有認爲決無變更而可贊美的結果是否勢必一齊拋去。這好像是退走一步了；許多高明的人決不願這樣放任的。

讀者就是無奢望時，他還免不了別的困難。這位英國學者不是要建立一座唯一的，最後的，佈置極好的大廈，這不過好像他建了許多暫時的而獨立的建築，在這些建築中交通甚是困難，有時竟不可能。

我們試舉一個例，例如有一章論靜電引力可用感電間界之伸張力與壓力說明之。如把這章

刪了之後，其餘的不見得不明和不完全，並且他方面，這章自有牠的理論，人們不看牠的前後文就可懂的。但是這章不僅是獨立的；並且與全部書中的基本意義難融合。馬氏並不想將此連合，他只限於說：『我未能再進一步，即我不能用機械學來說明通感體之變形力 I have not been able to make the next step, namely to account by mechanical considerations for these stresses in the dielectric。』

這個例子足以說明我的意思；其實我可以舉許多別的例子。譬如人們讀到磁之偏極旋轉 (polarisation rotatoire magnétique) 現象時，誰還疑惑光的現象與磁的現象有相同之處。

所以人們不要以爲免了矛盾自己總要有一致的主張才行。其實，兩種矛盾的理論，只要人們不把牠混合，並且不要問事物的究竟如何，都可以做研究的有益工具，如果馬氏沒有開了這些新的歧路，則讀他的書時所能引起的感想一定較少。

然而這樣則基本觀念未免稍被遮蓋了。這種的情形尤以在通俗的書籍中爲最，以致這是唯一被棄的一點。

所以我相信應該解釋這基本觀念之內容，以更顯明其重要。爲此，插一句閒話是必要的。

關於物理現象之機械的解釋——凡在物理現象中總是有某種助變數是實驗可直接達到而可測量的。我名之曰助變數 q。

次由觀察使我們知道這些助變數變動的公律，這些公律普通可用那連絡其中助變數 q 與時間之關係的微分方程式表示。

倘若把這種現象給以一種機械的解釋，那將怎樣做呢？

那麼人們將或用普通物質之運動或用一種或數種理想的液體之運動以解釋之。

這些液體將認爲極多數單離的分子 m 所組成。

那麼何時我們可以說我們有了某現象之完全的機械解釋呢？這就一方而要待我們知道了這些滿足假設分子 m 的座標之微分方程式，這些方程式且當合乎動力學原則；他方面要待我們知道了那規定分子 m 的座標爲助變數 q 的關係，這些助變數 q 可由經驗求得的。

我已經說過，這些方程式是要合乎動力學原則的，尤其要合乎能之永存原則及極少作用原

則。

由第一原則可知能之全部乃是常數，且可分爲二部分：

一、動能（energie cinétique）或活力（force vive）其強弱有靠那些假設分子m之質量及其速度，我名之曰T，

二、位能（energie potentielle）只靠這些分子之位標，我名之曰U。此T與U兩能之和卽爲常數。

現在要問極小作用能告訴我們什麼？牠說那系統如要從牠在t_0時所占之初時位置，移往牠在t_1時所占之最後位置，其所取之路徑必使在那從t_0時到t_1時的過程中『作用』之平均值（卽T與U二能相差數）爲最小。況且第一原則實卽第二原則的結果。

如果人們知道此T與U二倚數，這個原則就足以規定運動之方程式。

在所有由此地至於彼地之各種路徑中，自然有一條路可使作用之平均值比任何路徑之平均值爲小。而且只有一條路，因此極小作用之原則足以規定所經歷之路徑以及運動之方程式。

這樣，人們就得所謂賴甘之（equations de Lagrange）方程式。

在這些方程式中，獨立的變數卽是假設的分子 m 之位標；但現在我假定以直接可由實驗求得的助變數 q 爲變數。

於是這兩部分的能當表現爲助變數 q 的倚數及其引數；自然實驗家所看見的是這樣的形式。他當然想用他能直接觀察的數量以定位能及動能。(註二)

如是則系統從此情形到彼情形所走的路徑必使其平均作用爲最小的那樣。

現在不管 T 與 U 是否用助變數 q 及其引數表示的；不管我們是否利賴這些助變數 m 以定起點與終點的情形；極小作用之原則總是眞實的。

所以，在一切由此位置至於他位置之路徑中，此地仍只有一條路能使平均作用爲最小。而因此極小作用之原則足以規定那規定助變數 q 之變法的微分方程式。

這些求出的方程式乃賴甘之方程式之別一形式。

如要組成這些方程式，我們不必知道這些助變數 q 與假設分子之座標的關係，這些分子之

質量，以及成爲這些分子的座標之倚數的U。我們所要知道的，乃爲q之倚數的U之表示及爲q之倚數與其引數的T之表示，就是說爲實驗與數的倚數之動能與位能的表示。

由是不外乎二事，或是T與U的倚數既已合式的選擇了，賴氏方程式有如吾人剛才說的那樣建立起來，則將與實驗求出之微分方程式全相符合；或是並無T與U的倚數可以這樣相合的。在後一種情形，自然就絕無機械的解釋是可能的了。

使機械的解釋是可能的緊要條件，是在能够選定T與U的倚數，使滿足極小作用之原則，而帶出能力永存之原則來。

這個條件也是充足的；試設想我們眞找得中含助變數q的倚數U，U表示一部分之能，而以T表示其他部分，T爲助變數q及其引數之倚數；又假定此倚數對於引數爲二級同質多項式；最後，假定以T與U兩倚數所組成之賴氏方程式能與實驗所得相符合。

要怎樣才可以從中引出一種機械的解釋呢？此必須U可認爲一系統之位能，而T可認爲同一系統之動能。

關於U是不難的；但是T，可認爲一物質系統之動能嗎？

那是很容易證明這總是可能的，甚至有無窮的方法。我只請讀者參閱我所著的電與光一書的序言以求詳細。是故我們如不能滿足極小作用之原則，就無機械解釋之可能；如能滿足這原則，那就不單有一個，且有無窮的解釋。因此，一待有了一個解釋，就有其他無數的解釋。

於此還有一種觀察。

在實驗直接通知我們的數量中，有些被我們認爲我們假設的分子之座標之倚數；我們的助變數q就是這種；我們把別的不特看做根據座標且根據速度或同樣的可說是根據q之引數，或爲這些助變數及其引數之組合。

於是就生出一問題；在所有實驗測得的數量中，我們將以何者爲助變數q？我們將願意以何者認爲這些助變數的引數？這種選擇仍有極大之任意性，但只要合乎極小作用之原則，以求機械解釋之可能。

於是馬克思威耳曾經自問過能否做這種選擇，以及T與U的二能之選擇，使電之現象滿足

此原則。由實驗我們知道電磁場之能可分爲二部分，卽靜電能與動電能。馬氏曾認明如我們把第一認爲位能U，第二認爲動能T；他方面，如靜電荷認爲助變數q，而電流強度認爲其他助變數q之引數；我就要說，在這情形之下，馬氏曾認明電之現象滿足極小作用之原則。由是一定有一機械的解釋之可能。

他如果把這意思不放在第二部書中偏角的地方而放在第一部起始之處，則大半的讀者不致忽略牠了。

所以如果一現象可有一完全的機械解釋，則亦有無數別的，都也可以解釋實驗所揭發的特別之處。

這是物理學中各部分之歷史所證實的；譬如在光學中，弗氏以爲顫動是垂直於偏極平面的；劉滿（Newmann）則以爲是平行的。好久人們就想一『決擇實驗』（expcrimentun crucis）以決定這兩理論孰是孰非，但人們終未能得之。

同樣，卽在電學裏，那二液體與單液體的二理論亦皆能滿意的說明靜電學中觀察所得之定

律。

利賴了我剛才提起的賴氏方程式之特性，所有事實都可容易解釋。

現在很易明白馬氏的基本觀念了。

爲要證明電之機械的解釋之可能，我們不必先去找這解釋之本身，我們只要知道T與U二倚數之表式（此乃能之兩部分），以此兩倚數可組成賴氏方程式，且將此方程式比於實驗的定律。

在這些可能的解釋之中，怎樣作一種實驗不能幫助我們的選擇？或者有一天物理學家將不理會這些不可用積極的方法求得之問題，而將牠們棄給玄學家。這一天尚未到；而人們不是這樣容易忍耐着永不明白事物之深奥的呵。

我們的選擇只能以一種認定個人的觀察是很要緊的爲嚮導；但也有些答題是大家棄而不用的，因爲太古怪了，也有的是大家愛重的，因爲牠們是簡明的關係。

關於電與磁，馬氏不作任何選擇。這不是以其不屑要那種積極的方法不能達到的東西；我們

只看他對於氣體運動論所費之時間就可信了。我還要加說，如果在他的大著作之中他絕不擴張一種完全的解釋，但他從前在哲學雜誌中曾試給這種解釋。從前他不得已做的假設之奇怪及繁複使他後來又棄而不用牠們了。

同樣的精神，可在全部書中見到。其最要緊者，即爲各種理論所公有者，皆已昌明；凡只能合乎一種特別的理論者無不默認而過。因此讀者面遇一種內無實物的形式，他起初還當作不可捉摸，飄忽無定的影子。但他費了的努力使他思想，而結果他明白了他從前所稱贊的理論中，總有些不自然。

(註一)這章是我所著的下列二書中序文的摘錄：光之數學理論 (Paris, Naud, 1889) 及電學與光學 (Paris, Naud, 1901)。

(註二)我們加說U只視q爲轉移，T視q及其對於時間有關之引數爲轉移，且對於引數爲二級同質多項式。

第十三章　動電學(Electrodynamique)

動電學對於我們的立論更爲有益。

安培（Ampère）曾名其所著不朽的著作曰「唯一建立在實驗上的動電學現象之理論。」因此他以爲絕不會做有假設；然而他是做了的；只是他做而不知罷了。

他的後輩反見得很清因爲安培解題之弱點引起他們的注意。他們做了些新的假設，他們這次却自知了；但這是經了幾許次數才到了今天猶未固定的通用的系統：這就是我們要去研究的。

（一）安培之理論——當安培試驗電流之交互作用時，他只將而且只能將關閉電流(courants fermés）試驗。

這不是他反對開放電流（courants ouverts）之可能。如有二導體負有不同之電荷，而連之以金屬線，則生自此到彼之電流，直待兩者的電位相等後方止。

在安培時代，一般意見以爲這是開放電流；因爲人們只是看見電流從第一導體流向第二導體，而不見有電流從第二導體流回第一導體。

因此安培就以這種的電流認爲開放的，例如蓄電器（condensateur）放電時所生之電流，

但他不能以之作爲試驗，因爲經過的時間太短。

人們另可想出一種開放電流。我假定有A B二導體，通之以A M B線。起初有些動作的小導體與B接觸，取得其中一部分的電荷，乃離開B的接觸，而跟着B N A的路運動，於是從這裏搬來電荷，來到A的接觸便放棄這電荷給A，這電荷就由A N B路回至B。

這樣人們可說有一種向一的關閉電路，因爲電流循B N A M B路而行；但此電流之兩部分均極不同：在A M B線上，電自移動經過一不動的導體，其情形如尋常哇兒代電流（courant voltaïque），遇到窩密抵抗（résistemce）而發熱，是以人們名之曰傳導行動；在B N A部分中，電是由一移動的導體所轉輸的，人們名之曰轉輸行動（par convection）。於是，如果把轉輸電流認爲與傳導電流大爲相同，則B N A M B電路必爲關閉的；反之，如轉輸電流幷非『眞正電流』，譬如牠對於磁鐵是無作用的，那就只剩傳導電流A M B，牠是開放的。

例如，用一線聯霍子（Holtz）起電機之兩極，其中之旋轉板乃用轉輸電流法將此極之電轉輸於彼極，然後再經過此線之傳導，回到第一極。

然而這一種的電流極微，要牠強度可觀是很難實行的。照安培當時所設備的方法，人們可說這是不可能的。

總而言之，安氏可以意想兩種開放電流之存在，但這兩種都不是他所能利用來試驗的，因爲牠們太弱或歷時太短。

所以試驗祗能表明關閉電流間之作用，或嚴密點說，關閉電流對於一部分電流之作用，因爲人們可使電流通一關閉的電路，而其一部分是可動的，一部分是固定的。於是人們可以研究可動的部分，受其關閉電流之作用而移動之情形。

反之，安培毫無方法研究開放電流，對於關閉電流或對於開放電流之作用。

(1)兩關閉電流之例——安培試驗二關閉電流之互相作用時，曾得許多非常簡明的定律。

我姑且把與下文有關的定律，簡括的說出來。

一、如果電流強度是保持不變的，又如這兩電路既受一種移動與變形之後，仍歸原狀與原地，則動電力之工作必爲零。

。。。。。。。

換一句話說，其中必有兩電路之動電電位（potentiel électrodynamique），此電位與兩電流強度之積成正比例，又與電路之形式及其相對的位置有關；動電力之工作適等於此電位始終之相差數。

二、凡是電流經過自閉之螺絡管（solenoïde fermé）其作用爲零。

三、電路C對於他一哇兒代電流的電路C'之作用，僅賴C所發展之『磁場』蓋在空間之各點，人們可以規定有方向與定量之磁力，此力有下列之特性。

（A）C對於磁極之力是施在這磁極上的；其量等於磁力乘磁極之磁量；

（B）一根極短的磁針必傾向磁力之方向，此傾向力是一種偶力（un couple），此力與磁力，磁針之磁積（moment magnétique）及其相成角之正弦，成正比例；

（C）如果C'移動時，則C對於C'所生動電力之工作等於穿過此電路之『磁流』（flux de force magnétique）之增量。

（2）關閉電流對於一段電流之作用——安培旣未能實驗一種眞正的開放電流，所以也只

有一個法子去研究關閉電流對於一段電流之作用（une portion de courant）。

其法卽以電路C^1作實驗，此電路分固定與可動的兩部分。可動的一部分譬如是一條可動的線αβ，其α與β的兩端可移動於固定線上。在可動線的兩位置之一，α端是停在固定線之A點上，而β端則停在固定線之B點上。電流由α到β，卽先順可動線由A至B，再順固定線由B至A。故此電流為關閉的。

在第二位置時，可動線既經移動，則其α端移到A^1點，β端移到B^1點。於是電流由α流至β，卽先順可動線由A^1至B^1，然後順固定線由B^1回至B，再由B到A，最後由A至A^1。故此電流仍為關閉的。

今如此種電路受關閉電流C之作用，則其可動的部分必受外力而移動。安培承認此種表面上的力量，那AB可動的部分好像屈服於牠的力量，代表C對於電流之αβ部分之作用，而此種力量有如通過αβ之電流是開放的，此種電流將止於α與β，非如關閉電流，在到了β以後，乃順電流之固定部分回至α。

這個假設似乎是很自然的，而安培做的時候並不覺得；但牠不是強有力的，因爲稍遲就可知道愛耳莫慈要拋棄牠。然而無論如何牠雖未使安培能實驗開放電流，但能使安培發明許多關閉電流對於開放電流之作用，或對於一極小部分的電流之作用的定律。

這些定律還是很簡明的：

一、對於極小部分的電流之力是直接施在這上面的；此力與電流及磁力成直角，且與垂直於電流之磁力部分成正比例；

二、一自閉之螺絡管對於極小部分之電流毫無作用。

但從此就沒有動電電位，就是說有一定強度之開放電流與關閉電流歸還原地時，其總工作并非零數。

（3）繼續的旋轉——關於動電學中最有趣的實驗卽是實行一種繼續的旋轉，有時人們稱這種現象爲單極感應（induction unipolaire）。一磁針可繞其軸而轉；一電流起初通過一固定線，次入於磁針之北極N，經過磁針之半段，再由一可推移之交接點流出，而入於固定之線。

於是此磁針旋轉不已，永不能達到平衡之位置。此弗乃得之試驗。但這是怎樣一回事？如果這是二種定形之電路，一是固定的C，一是可繞軸而轉的C^1，則這後者之旋轉，永不會繼續的；其實這裏有動電位的存在，故必有一平衡之位置，此將是電位最高之處。

故繼續的旋轉，除非C^1包含兩部分方才可能：其一是固定的，其二是可繞軸而動的，有如弗乃得的試驗。不過還要有一個分別。即由固定的部分至於可動的部分，或反之，都是可能的，或用簡單的接觸法（固定的部分之同一點與可動的部分之同一點永相接觸），或用可溜動的接觸（可動的部分之同一點依次與固定的部分之各點相接觸）。

那種繼續的旋轉僅在第二款中才可能。在那時候，則物之系統漸趨於平衡；但是，當牠將達到這點時，那溜動的交接機關能使轉動部分與固定部分之一新點交通牠更換着聯絡，所以牠也更換各種平衡位置之條件，因此，可說那物之系統總追不到牠所要趕上的平衡位置，而那旋轉現象就可無窮的延長下去。

安培承認電路對於C^1之可動部分的作用，即等於C^1之固定的部分不存在，因此亦即等於流

通於可動部分之電流爲開放的。

所以他結論閉電對於開電之作用，或反之開電對於閉電之作用，可生繼續的旋轉運動。

然而這種結論全由我剛才所說的假設而來，並且未經愛耳莫慈所承認，這是我在上面已經說過的了。

(4)二開放的電流之相互的作用——關於二開電之相互的作用，尤其是關於二極小部分的電流之相互作用，無論什麽試驗都不行。安培曾求助於假設。他假定：一，二極小部分的電流之相互作用可縮爲在二者相聯之直線上之一力；二，閉電之相互的作用是這些極小部分之總合作用，而這些作用有如在各部分是單獨時所發生的。

最可注意的，卽在此地安培又作了這兩個假設，而自己還不知道。

雖然，把這兩種假設與關於閉電之試驗綜合起來，可以規定二極小部分之相互作用。

但是這樣，那我們在閉電款中所遇着的簡單定律大多數又是不眞實了。

第一，是沒有動電位；而我們已知在閉電對於開電發生作用時，亦無此種電位。

其次，眞正說起來，是沒有磁力的。

其實關於這個力之定義，我們在上文已給了三種：

一、磁極所受之力；

二、是旋轉磁針之偶力；

三、是一極小部分之電流所受之力。

但是在我們現在的討論中不特這三種定義不相符合，並且每一種都是毫無意義的，其實也是：

一、一磁極所受之力不僅限於一種施於此極的力。其實，我們已知一極小部分電流對於磁極之作用，並非施於極點，乃是施於此小部分上的；這個作用本可用一偶力與一施在磁極上之力代之。

二、這對於磁針所生之偶力不僅是定向的偶力；因爲牠對於針軸之力積並非零。此力可分爲一眞正的偶力，與一補充偶力，此最後力足以促起磁針之繼續的旋轉，這是我在上文已說過的。

三、最後，極小部分電流所受之力並不合於此部分。換言之，磁力之統一性已消滅了。

且看這統一性是怎樣一回事。如兩系統對於一磁極發生同一的作用，則對於一無窮小的磁針亦有同一的作用，對於放在以前磁極所占之位置的極小的部分電流亦然。

那麼，倘若這兩系統僅含閉電，這就對了；依照安培的道理，如這兩系統所含的是開電，這就不對了。

人們只要注意，譬如一磁極是放在A點，又有一極小的部分電流是放在B點，而這部分之方向既是在AB引長線上，則此部分對於磁極是毫無作用，然對於放在A點之磁針或放在A點之極小部分電流，必生作用。

(5)感應（induction）——人們知道自從安培不朽的著作發表之後隨即有動電感應（induction électrodynamique）之發明。

這個現象只要是由於閉電而生，則毫無困難，並且愛爾莫慈曾注意到，只須根據能之永存定律，已足把那些感應的定律由安培的動電定律推想而出。不過還有一個條件，就是要另外承認許

多假設，白德安（Bertrand）先生曾將此層示明。

關於開電，亦可用同一原則，求得此種推論，雖然人們萬不能將所得的結果證之以實驗，因為人們不能實現這種的電流。

人們如將此種分析方法應用在安培的開電理論上，可得許多極能令人奇異的結果。第一，感應現象是不能用學者與實驗家的著名的公式由磁場變動現象推論而出，而且其實我們上文已說過，眞正講起來，已經沒有磁場了。

但是另有一件事情。今有一電路C受可變的哇耳台系統S（systéme voltaïque）之感應；如此S系統自己行動，並隨自變形，此系統之電流按某定律而變動，但變動之後，然後仍復其原位，那自然要假定平均的感應電動力（la force électromatrice mayenne induite）在電路C中為零。

如果這C電路是關閉的，且S系統僅有閉電，那麼這就眞實了。當有一開電時，如果人們承認安培的理論，那就不眞了。所以在任何普通意義而言，感應非特不是磁流之變動現象，且亦不能用

任何物之變動以形容之。

（二）愛耳莫慈（Helmholtz）之理論——關於安培理論之結果及其解釋開電之情形，我很申述了一番。

那些推想出來的命題之不自然與奇特實在是很容易見得的；因此人們想『一定不是那樣。』由此人們可以想像愛氏另覓別路的動機了。

愛氏不用安培的根本假設，這個假設卽兩小部分電流之相互作用可併成一力，此力在兩者相聯之直線上。

他承認一極小部分電流受力不僅爲一，且有一偶力。正爲了這一點，才發生愛氏與白氏之有名的筆墨官司。

愛氏把安培的假設代之以下面的假設：二極小部分電流總可有一動電位（potentiel electrodynamique），此電位僅根據其位置及方向而兩者互相交加的力之工作等於此電位之變量。所以愛氏也和安培一樣，是不能不做假設的；不過，至少他非明白地說明則不做。

在那唯獨可實驗的閉電的現象中，這兩種理論是相合的，在其他的情形中就有分別了。

第一，閉電的可動之部所受之力與將此部當作單離的且認爲開電時所受之力不同，這同安培的設想適爲相反。

現在我們再把上面的C^1電路來談罷，此路原是由α β可動線移動於固定線上而成；在唯一可以實行的試驗中，α β線不是單離的但爲關閉電路之一部分。當其自A B移至A^1B^1時，電位之變動可分爲二因：一、因爲A^1B^1對於C的電位有異於A B對於C的電位，故此電位受了第一種增量；二、因爲此外還要加上A B與A^1B^1各個對於C之電位，故此電位受了第二種增量。A B部分所受之力的工作，卽此種重複的增量數。

反之，如α β爲單離的，則電位只受第一種增量，而就是這第一種增量計算A B所受力之工作。

第二，如果沒有溜動交接，則無繼續旋轉之可能；其實這是由動電位之存在而得之結果，我們談閉電時已說過了。

在弗乃得試驗中，如果磁鐵不動，且如磁鐵外之電流通過可動線，則此線將旋轉不已。但這不是說如果將磁鐵與可動線分離後，而將開電通過可動線時，此線仍可旋轉不已。

由此可見一單離的極小的部分電流所受力與屬於關閉電路的可動的部分所受力不同。此外還有區別：按照實驗與那兩種理論，凡一關閉的螺絡管對於閉電之作用為零；其對於開電之作用，根據安培為零，根據愛氏為非零。

由是乃得一重要之結果。我們上文述過三種磁力之定義；其第三種在此毫無意義，因為一極小部分電流不只受着單力。其第一種亦無意義。其實，何為磁極？這是一無窮長的條形磁鐵之極端。此磁鐵可代以無限長之螺絡管。故欲磁力之定義成立，則開電對於無限長的螺絡管之作用，須僅依其極端之位置而異，就是說對於自閉的螺絡管之作用為零。但是我們才剛已知道，這不是眞的。

反之，我們儘管採取第二種定義，牠是建立在那定向偶力之測量，此力促起磁針之轉動。但是，倘若人們採納這種定義，那麼感應作用與動電効用均不僅依靠此磁場之力線的分佈而定了。

（三）這些理論所惹起的難題——愛氏的理論比安培的理論可算進一步了；但要所有的難題都能解決才好。在這兩家的理論中，磁場這個字都是無意義的，假使我們用一種多少不自然的公約給牠一個意義，則那些電學家所通用的定律不能再應用下去了；因此一線中的感應動電力，不能再以所穿過此線的磁力線之數來計量。

而我們厭棄的心理不特來自我們在思想上與言語上所深染的習慣。此外還有別的原因。我們如果不信距離作用（action à distance）之存在，那麼解釋動電現象時必借用一種間質（milieu）之變遷，而這種變遷正就是所謂磁場，於是關於動電的効應，只能依靠這種磁場。

所有這些的難題都是來自開電之假設。

（四）馬克思威耳之理論——這些難題一待馬克思威耳來到之後就一筆勾消。在他看起來只有閉電。

馬氏承認在通感體（diélectrique）中電場變動時，其中發特別現象，此現象對於電流計（galvanouiètre）之影響與普通電流無異，馬氏名之曰通感電流（Courant de déplacement）。

於是如有一線聯接兩個負有不同的電荷之導體，則在放電時，線中必發生一種傳導閉電；但同時在鄰近的通感體（diélectrique）中，發生一種通感電流，以關閉此傳導電（courant de conduction)。

人們知道馬氏理論可用以解釋光學現象，以爲此現象生於極速的電之顫動（oscillations électrique）。

在當時，這種觀念可說是一種大膽的假設，而毫無實驗作根據的。

二十年後，馬氏的觀念才得實驗的證實。愛慈（Hertz）竟能實現電之顫動，把所有光的特性發揮無餘，其與光不同點，只在電波與光波（longeur d'onde）之長短，就是說有如紅色之別於紫色。他所做的差不多是光之組合。大家都知道無線電報就是從此發源的。

我們可說愛慈並未直接證明馬氏的基本觀念，即通感電流對於電流計之作用。在一方面，這語是不錯的，總之他所直接示明的，就是磁電的感應現象之傳播不像人們信以爲是有無窮大的速度，此速適等於光速。

不過，今如假定通感電流不存在，而感應現象之播速等於光速；又或假定通感電流發生感應現象，且此現象之播速為無窮大，這都是一樣的。

這個道理在起初是看不見的，但可用解析法以明之，這是我不能在此概述的。

（五）何浪之實驗（Rowland）——但是我上面已經說過有兩種開電：第一就是蓄電器，或某導體放電時所發生之電流。

其他情形有如電荷通過一自閉的導圈，其移動時，在電路之一部分為傳導的，在他一部分為轉輸的。

第一種的開電問題可算解決；因通感電流將電路關閉。

至於第二種的開電，其答案更似簡便；倘若電流是關閉的，則這也似乎只有轉輸電流的本身才去關閉。為此，只須承認「轉輸電流」即負電之導體在移動時，可以影響於電流計。

但尚少經驗的證實。蓋即使極力加增導體之電荷與速度，仍然很難得到強度的電流。

這是何浪極能幹的試驗家第一戰勝這些難點。其法用圓盤可收受極大之電荷而發生極速

之轉動。旁邊有無定位的磁系統受牠影響而傾動。

何浪曾做過兩次試驗，第一次在柏林，第二次在巴耳的模（Baltimore）；其後又有希斯得脫（Himstedt）繼之。這兩位物理家竟相信可以宣布他們曾做數量的測視。

何浪這條定律爲所有物理家所承認而無異議的。

而且好像什麽都證實這條定律。閃電（l' étincelle）當然發生一種磁的效應；但是，閃電放電豈不像是由於某電極中之負電分子而轉運於他電極所成嗎？試看電花之色帶（spectre），可見其中有某極之金屬體的景線（raies），這不是證據嗎？然則電花是眞正的轉輸電流（courant de convection）了。

他方面，人們也承認在導電溶液中（électrolyte），電流乃係伊洪（ion）所渡過。故此液中之電亦必爲轉輸電流。但是，牠對於磁針發生作用。

陰極射線（rayons cathodiques）亦復如是；克洛客斯（Crookes）說這是一種不可捉摸的物質含有負電荷，且有極大的速度；易言之，他以爲這是轉輸電流，他的這種見解雖經一時的

駁議，然如今已處處採用了。但是，這些射線可被磁鐵所傾斜。根據主動反動力的原則，這些光線亦當傾斜磁針。

不錯，愛慈相信這些陰極射線不能轉運負電，且對於磁針毫無作用。但這是他錯了；第一培林（Perrin）曾收集這種射線所荷的負電，而愛慈認為不存在的；這位德國學者之錯誤似乎由於X光線之效應而這種光線在當時尚未發明。其次，最近已有人發見陰極射線對於磁針之作用，并且看清愛慈的誤點所在了。

所以電花溶液中之電，陰極射線，這些現象皆視為轉輸電流的，對於電流計有同一的作用，且合乎何浪定律。

（六）羅倫慈（Lorentz）之理論——不久人們又有更進的理論。根據羅倫慈的理論就連傳電流也是一種轉輸電流；他以為電是永久不可分解的寄託在一種小物質的分子上，名曰電子。（electron）；哇兒代電流即是這些電子通過物體時所生，而即是導體與絕緣體（isolant）之分別，其一則能讓這些電子之通過，其他則能阻止其運行。

羅氏的理論頗多優長處，牠能簡單的解釋古今不能解答的現象，就是馬氏的最初理論也未能完滿解決這些問題，例如轉動視差現象（l'aberration）光浪之部分的牽動磁之偏極現象及齊門（Zeeman）現象。

有些反議還是存在着。在某系統中所生之現象似與其重心之絕對速度有關，這與我們對於空間相對性的觀念適爲相反，立撥芒（Lippmann）先生曾得客雷妙（Crémien）先生的擁護，把這種反議明顯的陳述，設有二荷電導體，幷具有同一的移動速度，牠們是相對的靜止；然而牠們中的各個可視爲轉輪電流，牠們當相吸引，而人們如測量此吸力，卽可測得絕對的速度。羅倫慈一派人的回答說，不然，他們以爲這樣測量的，不是絕對的速度，乃是對於以太的相對速度，因此相對論仍是保持着。從此羅氏尋到一種更爲圓轉的解答，但這也更使人滿意些。

無論這些最後的反議是如何，大概說來，動電學的大部自少是完全成立了；一切都呈現一種使人滿意的現象；至於安培與愛耳莫慈之理論，原是爲開電而做的，到現在已無所謂開電，所以這些理論也只有歷史上之價值了。

但是這些變遷之歷史，未嘗於我們無益；我們藉此可以知道學者是如何易受欺騙並且要怎樣才有逃避這個的希望。

第十四章　物質的究竟(註)

近年來物理家最可驚人的發現，即物質之不存在。我們要趕快說這個發現還不是最後的。物質固有最要的東西，就是質量與慣性。這質量是到處永久不變的，儘管受了化學的變化，表面上似乎變成完全不同的東西，但牠終是不變的。所以如有人證明物質的質量與惰性，實在不是屬於物質的，而以爲這不過是牠的一種裝飾，甚至那最是永定的質量也是易於改變的，那麼人們儘可說，物質是不存在的，而人們所宣佈的，當然就是這一點。

我們至今所能觀察的速度都是很微弱的，因爲那些使我們所有的汽車，望塵莫及的天體，其速度在每秒亦不過六十或一百『啓羅米突』；不錯，那光的速度是較大三千倍，但這不是物質的移動，這是經過相對的不動質體（substance）之擾亂現象，有如洋面上的波瀾。凡是在這些小速

度的現象中，物質的質量都看得出是不變的，但從沒有人問過在極大的速度時，也是如此否？

就是這些無限小的東西反比最快的水星更爲迅速：我這是說那些在陰極射線與鐳光中活動的小彈子。人們知道這眞是分子衝突的現象。由此而射出的彈子都荷有負電，這是人們可用弗乃得筒收集而證實的。因爲牠們有了電荷，所以要受磁場或電場的傾斜，而由這些傾斜度的比較，我們乃知其速度及其電荷與質量之比。

但是，由這些測量我們可以知道牠們的速度是極大的，其速度約爲光速十分之一，或三分之一，比星球要快千倍，他方面電荷比較質量是非常之大的。所以每一行動中之彈子可代表一種強大的電流。但是我們知道電流有一種特別的惰性，名曰自感現象（self-induction）。一電流發生後總是有一種保持不休之傾向，故當人們斷絕電路以阻其通行時，乃見在斷絕點發生電花。由此可知電流極力保持其強度正如一行動中之物體總有保持其速度之傾向。所以陰極射線中的小彈子亦能抵抗變更其速度之原因。這有兩種理由：第一，由於牠的眞正慣性；第二，由於牠的自感現象。因爲速度變更時，同時卽有電流之變更。故小彈子——卽所謂電子——當有兩種慣性：機械

的慣性，電磁的慣性。

阿陌海姆（Abraham）先生與高夫芒（Kaufmann）先生，一位是計算家，一位是實驗家，曾協力做這兩慣性的研究。因此他們不得不承認一種假設；他們想所有負電子都是一樣的，牠們有同一的電荷，特別是不變的，我們所觀察牠們的不同僅是由於那些激動牠們的速度。當速度變更時，真正的質量即機械的質量不變，這可說原是牠的定義；但是助成表面上的質量的電磁的慣性，隨其速度按某定律而增加。所以速度及電荷與質量之比，兩者之間必有一關係式，而我們才剛說過，這些數量都可由光線經過磁場或電場時所受之傾斜度計算而得；此關係的研究就可規定二慣性。這結果真是可驚，真正的質量等於零。這自然應該承認起初的假設，但是理論上的曲線與實驗上所得的曲線之相合的程度很大，這個假設便是不會錯的了。

所以這些負電子沒有真正的質量；牠們所以似乎含有慣性，是在牠們變動速度時必擾亂以太。牠的慣性只是一種租借品，不是屬於牠們的，乃是屬於以太的。但是這些負電子不完全是物質的；所以人們能承認除牠們之外還有真正的物質，含有本身的慣性。有些射線——有如哥兒斯頓

孔道射線（les rayons-canal de Goldstein），鐳之α光——也是一些彈雨而成，不過這些彈子荷的是正電；這些正電子也是沒有質量的嗎？這是不能說的，因爲牠們比較負電子重些慢些。於是有二種假設可以承認；或者電子較重之故，在除了牠們所借的電磁慣性之外，牠們本身有機械的慣性，這就是牠們才是眞正的物質；或者牠們也同別的一樣沒有質量，其所以似乎較重者，是因牠們較小。我說比較很小，雖然這種說法似乎奇特；因爲在這種意念中，那小物子不過是以太中之空物，唯以太獨是實在的，含有慣性。

直到此地，物質還是沒有連累着；我們還可採取第一種假設，甚或相信除了在正的負的電子之外，尚有中性的原子。但據羅倫慈最近的研究，我們就要失去這最後的援助。地球很快的在以太中移動時，我們也在被牽動之中；光的或電的現象不會受了這種移動而變更嗎？人們相信了好久，且曾經假設，隨儀器對於地球轉動之方向之不同將得觀察結果之差異。其實不然，且最精密的測視亦未曾得過這樣的結果。由此實驗乃證明物理家的一種共同懷疑；人們如果眞實找得一點東西，則人們不特可以知道地球對於太陽的相對運動，且知其在以太中的絕對運動。但是有許多人

很難相信任何試驗所得的結果，除了相對運動之外，尙有他物；他們到很願意承認物質是沒有電量的。

所以人們對於所得負的結果並不十分驚異；這些結果是與教授的理論相反，但這個能取悅於這些理論以前的一種高深的本能。並且還要把這些理論，根據其結果而修改之，以求合乎事實。這就是費則格好得（Fitzgerald）用一可驚的假設做過的：他承認無論何物，如順地球運動的方向而運動時，必縮短十萬萬分之一。圓球必變成扁橢圓球，且令其轉動時，其變形必使小軸平行於地球之速度。因爲測量的儀器所受之縮小同於試驗物，故人們一無所見，除非能確定光線經過物的長度之時間。

這個假設可以說明觀察而得的事實。然而這還不夠；他日人們還可作更精密的觀察；將來可得正的結果嗎？我們可以測量地球之絕對的運動嗎？羅氏幷沒有這樣想；他相信這種測定永是不可能的；許多物理家之共同的本能（l'insnict），以及至今各種實驗之失敗，都足證明他的推想。所以我們可以承認這個不可能，爲自然界的普遍定律；並且承認這是一種公理（postulat），

然則其結果如何？這正是羅倫慈所尋求的，他發現所有原子，所有正電子，或負電子皆有一種慣性，與其速度依同一之定律相變更。如是則所有物質的原子皆爲小而重的正電子與大而輕的負電子所成，而假使那可感覺的物質對於吾人不似受電，則因爲這兩種的電子的數目幾乎相等之故。兩種都是沒有質量的，而只有假借的慣性。在這系統中就沒有眞正的物質，而只有在以太中的孔竅（trous）。照南九凡（Langevin）先生的意思，物質乃液化的以太而已失其所有之特性了；當物質移動時，這幷不是這種液化的質體在以太中的移動，乃是向以太各部分漸漸擴充的；此種液化之現象同時在後方已變成液體的部分又漸行恢復原狀。故運動的物質不保持其原物。

這就是近來對於此題研究的梗概；但現在高夫芒先生又發表了許多新的試驗。速度極大的負電子，必受弗則格好得的縮小，因此速度與質量之關係亦變；但最近試驗不能證實這種設想；然則一切都要倒了，而物質又得生存之權力。但實驗是不易的事，在今日要想做一個最後的結論還是太早了。

(註)參閱物質的進化黎朋著(L'évolution de la matière par Gustevo LeBon)。