Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 17

Aufgaben

Aufgabe 17.1.*

Schreibe den 5-ten Kreisteilungskörper K_5 als quadratische Körpererweiterung von $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$.

Aufgabe 17.2.*

Wie viele Unterkörper besitzt der Kreisteilungskörper K_{13}?

Aufgabe 17.3. Es sei p eine Primzahl. Betrachte das Polynom

$$P = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X^2 + X + 1.$$

Zeige, dass P irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Aufgabe 17.4. Es sei L der neunte Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$. Zeige

$$L \cap \mathbb{R} \cong \mathbb{Q}[X]/\big(X^3 - 3X + 1\big).$$

Aufgabe 17.5.*

Es sei K_n der n-te Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$ und

$$L_n = K_n \cap \mathbb{R}.$$

Zeige, dass bei $n \geq 3$ die Körpererweiterung $L_n \subseteq K_n$ den Grad 2 besitzt.

Aufgabe 17.6. Es sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Zeige, dass der n-te Kreisteilungskörper mit dem $2n$-ten Kreisteilungskörper übereinstimmt.

Aufgabe 17.7. Bestimme die Kreisteilungspolynome Φ_n für $n \leq 15$.

Aufgabe 17.8. Zeige, dass für $n \geq 2$ der konstante Koeffizient der Kreisteilungspolynome Φ_n immer 1 ist.

Aufgabe 17.9. Zeige, dass für verschiedene n auch die Kreisteilungspolynome Φ_n verschieden sind, dass aber die Kreisteilungskörper gleich sein können.

Aufgabe 17.10.*

Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass in $\mathbb{C}[X]$ die Gleichung

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$$

gilt.

Aufgabe 17.11.*

Es sei $\mathbb{Q} \subseteq K_n$ (in $\mathbb{C}$) der n-te Kreisteilungskörper und sei ζ eine n-te primitive Einheitswurzel. Wir betrachten die Elemente ζ^i, $i \in (\mathbb{Z}/(n))^\times$.

a) Zeige, dass für eine Primzahl $n = p$ diese Elemente eine $\mathbb{Q}$-Basis von K_n bilden.

b) Es sei p eine Primzahl und $n = p^2$. Zeige, dass diese Elemente keine $\mathbb{Q}$-Basis von K_n bilden.

Aufgabe 17.12. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \subseteq K_n$ der n-te Kreisteilungskörper und sei ζ eine n-te primitive Einheitswurzel.

(1) Zeige, dass für jedes k die (benachbarten) Einheitswurzeln
$$\zeta^k, \zeta^{k+1}, \ldots, \zeta^{k+\varphi(n)-1}$$
eine $\mathbb{Q}$-Basis von K_n.
(2) Bilden die primitiven n-ten Einheitswurzeln stets eine $\mathbb{Q}$-Basis von K_n?

Aufgabe 17.13. Bestimme die Norm und die Spur der n-ten komplexen Einheitswurzeln im n-ten Kreisteilungskörper.

Aufgabe 17.14. Es sei $\zeta_n \in \mathbb{C}$ eine n-te primitive Einheitswurzel, und $K = \mathbb{Q}[\zeta_n]$ der zugehörige Kreisteilungskörper. Zeige, dass es galoissche Körpererweiterungen $K \subseteq L$ gibt, deren Galoisgruppe zyklisch der Ordnung n ist.

Aufgabe 17.15. Zeige, dass das achte Kreisteilungspolynom $X^4 + 1$ über allen endlichen Primkörpern $\mathbb{F}_p$ reduzibel ist.

Hinweis: Zeige, dass $\mathbb{F}_{p^2}$ für $p \neq 2$ bereits eine primitive achte Einheitswurzel enthält.

Aufgabe 17.16.*

Es sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen und $n \in \mathbb{N}$. Es sei a der größte gemeinsame Teiler von n und $q-1$. Zeige, dass es in $\mathbb{F}_q$ genau a n-te Einheitswurzeln gibt.

Man folgere, dass es n n-te Einheitswurzeln in $\mathbb{F}_q$ genau dann gibt, wenn n ein Teiler von $q-1$ ist.

Aufgabe 17.17. Es sei p eine Primzahl und n eine natürliche Zahl, die wir als $n = kp^a$ schreiben mit k und p teilerfremd. Zeige, dass der n-te Kreisteilungskörper über $\mathbb{F}_p$ gleich $\mathbb{F}_q$ ist (mit $q = p^e$), wobei q die minimale echte Potenz von p mit der Eigenschaft ist, dass $q-1$ ein Vielfaches von k ist. Zeige insbesondere, dass es ein solches q gibt.

Aufgabe 17.18. Es sei K_p der p-te Kreisteilungskörper zu einer Primzahl p und sei ζ eine primitive p-te Einheitswurzel. Bestimme die Übergangsmatrix und ihre Determinante für die $\mathbb{Q}$-Basen

$$1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{p-2}$$

und

$$\zeta, \zeta^2, \ldots, , \zeta^{p-2}, \zeta^{p-1}$$

von K_p.

Aufgabe 17.19.*

Bestimme die Zwischenkörper des 7-ten Kreisteilungskörpers K_7. Dabei soll jeweils eine Restklassendarstellung explizit angegeben werden.

Aufgabe 17.20. Es sei K_n der n-te Kreisteilungskörper, $n \geq 3$. Zeige, dass es einen Zwischenkörper L, $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq K_n$, gibt, der eine quadratische Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 17.21.*

Es sei ζ eine primitive 7. Einheitswurzel. Wir betrachten das Element

$$y = \zeta + \zeta^2 - \zeta^3 + \zeta^4 - \zeta^5 - \zeta^6 \in \mathbb{Z}[\zeta] = R_7$$

im siebten Kreisteilungsring.

(1) Skizziere $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \zeta^5, \zeta^6$ und verorte y geometrisch.
(2) Berechne y^2.
(3) Bestimme einen quadratischen Zahlbereich, der im siebten Kreisteilungsring enthalten ist.

Für eine weitgehende Verallgemeinerung dieses Sachverhaltes siehe Lemma 23.8.

Aufgabe 17.22. Analysiere für den zwölften Kreisteilungsring R_{12} das Zerlegungsverhalten für die Primzahlen $p \leq 20$. Studiere dabei auch das Zerlegungsverhalten in den Zwischenringen $R_3 = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}]$, $R_4 = \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ und $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Abbildungsverzeichnis