始

理學士 大上茂喬 著

代數學演習

東京
文明社

緒　言

旣刊微分學演習及ビ積分學演習ト同樣ニ，本書モ亦，高等數學ヲ學修スル人々，並ビニ獨修スル人々ノ，最モ有利ナル參考書タランコトヲ目的トスルモノナリ．之レガ爲ニ，特ニ意ヲ用ヒシ點モ，大體前記兩書ト同樣ニ，

1. 成ルベク小數ノ，最モ根抵的ノ事項ヲ，基本定理トシテ各章ノ初メニ揭ゲ以テ問題解說ノ根據トナシタルコト．
2. 現行，高等專門學校程度，及ビ文檢程度ノ代數學ノ，有ラユル種類ノ問題ヲ，遺漏ナク，又重複セズ，網羅セシト努メタルコト．
3. 總テノ問題ノ解說ハ，出來得ル限リ，直截簡明ニシテ，而モ嚴密ナランコトヲ期シタルコト．

等ナリトス．サレド著者ノ菲才，其實ノ其意ニ伴ハザルコト多キヲ憂フ．讀者ノ批正ヲ得バ幸ナリ．

尙又，級數ノ收斂發散問題ハ，近來一般ノ慣例ニ遵ヒ，總テ之レヲ微分學ニ讓リ，連分數，數論，不定方程式等ノ問題ハ，紙數ノ都合上，全部割愛スルノ止ムナキニ至リタリ．讀者幸ニ諒セラレヨ．

昭和六年三月　　　　著　者

目　次

代數學演習

第一章

恒等式（剩餘定理、對稱式、交代式）

基本定理　I.　x ノ整式 $f(x)$ ヲ $x-a$ ニテ割リタルトキノ剩餘ハ $f(a)$ ニ等シ、從ツテ $f(a)=0$ ナラバ $f(x)$ ハ $x-a$ ナル因數ヲ有ス。

II.　x ニツキ n 次ヲ超ヘザル二ツノ整式ガ n 個ヨリ多クノ x ノ值ニ對シテ相等シクナルトキハ其二ツノ整式ハ恒等的ニ相等シ、從ツテ x ノ各次ノ係數ハ夫々相等シク、x ノ總テノ值ニ對シテ相等シキ值ヲ有ス。

III.　對稱式ト對稱式トノ和、差、積及ビ商ハ又對稱式ナリ。

IV.　交代式ト交代式トノ和及ビ差ハ交代式ニシテ積及ビ商ハ對稱式ナリ。

V.　對稱式ト交代式トノ積及ビ商ハ交代式ナリ。

演習問題

1.　$x^5-5x^4+9x^3-6x^2-x+2$ ハ x^2-3x+2 ニテ割リ切レルコトヲ證明セヨ。

〔解〕　所題ノ五次式ヲ $f(x)$ トスレバ $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ ニシテ且ツ $f(1)=0$, $f(2)=0$ ナル故ニ基本定理 I ニヨリ $f(x)$ ハ $x-1$, 及ビ $x-2$ ナル因數ヲ有ス。而シテ $x-1$, $x-2$ ハ公約數ヲ有セザル故ニ $f(x)$ ハ又 $(x-1)(x-2)$ 即チ x^2-3x+2 ナル因數ヲ有ス。

2.　k ガ如何ナル值ノトキ $a^3+b^3+c^3+kabc$ ハ $a+b+c$ ニテ割リ切レルカ。

〔解〕　$f(a)=a^3+b^3+c^3+kabc$ トスレバ a, b, c ノ何レカガ 0 ナルカ又ハ何レカ二ツノ

和ガ 0 ナルトキハ $f(a)$ ハ k ノ如何ニ係ラズ $a+b+c$ ニテ整除セラルヽコト明カナリ、然ラザル場合ニ $f(a)$ ガ $a+b+c$ ニテ整除セラルヽタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ基本定理 I ニヨリ

$$f(-b-c)=0$$

ナルコトナリ、然ルニ

$$f(-b-c)=-(b+c)^3+b^3+c^3-k(b+c)bc=-bc(b+c)(k+3)$$

$$\therefore\ k+3=0, \qquad \therefore\ k=-3$$

即チ所題ノ式ガ $a+b+c$ ニテ割リ切レルタメニハ a, b, c ノ何レカガ 0 ナルカ又ハ何レカ二ツノ和ガ 0 ナラバ k ノ如何ニ係ラズ、然ラザル場合ニハ $k=-3$ ナルヲ要ス。而シテコレガ又十分條件ナルコト明カナリ。

3. $x^4-3x^3+5x^2+lx+m$ ガ x^2-5x+6 ニテ割リ切レル樣ニ l 及ビ m ノ値ヲ定メヨ。

〔解〕 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ ニテ割リ切レルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ $x-2$ 及ビ $x-3$ ニテ割リ切レルコトナリ、コレガタメニハ基本定理 I ニヨリ

$$2^4-3.2^3+5.2^2+l.2+m=2l+m+12=0$$

$$3^4-3.3^3+5.3^2+l.3+m=3l+m+45=0$$

コノ聯立方程式ヲ解キテ

$$l=-33, \qquad m=54$$

ヲ得、コレ即チ所要ノ値ナリ。

4. x ノ整方程式(係數モ整數) $f(x)=0$ ガ $1-2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}$ ナル根ヲ有スルトキハ整式 $f(x)$ ハ x^3-3x^2+9x-9 ナル因數ヲ有スルコトヲ證セヨ。

〔解〕 $x=1-2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}$ トオクトキハ $x-1=2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}$, 兩邊ヲ立方スレバ

$$x^3-3x^2+3x-1=2^2-3.2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}(2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}})-2=2-6(x-1)$$

$$\therefore\ x^3-3x^2+9x-9=0,$$

今 $f(x)$ ヲ x^3-3x^2+9x-9 ニテ割リタルトキノ商ヲ Q, 剩餘ヲ R トスレバ Q, R モ亦 x ノ整式ニシテ

$$f(x)=(x^3-3x^2+9x-9)Q+R$$

ナル關係アリ、此兩邊ノ x ノ代リニ $1-2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}$ トオケバ題意ニヨリ $f(x)=0$ 又 $x^3-3x^2+9x-9=0$ ナル故ニ R モ亦 0 トナル、然ルニ R ハ x ノ二次又ハ其以下ノ整式ナル故ニ立方根ヲ含ム値ニテ 0 トナルコトナシ故ニ R ハ始メヨリ 0 ナリシナリ

依ツテ $\qquad f(x)=(x^3-3x^2+9x-9)Q,$

即チ $\qquad f(x)$ ハ x^3-3x^2+9x-9 ナル因數ヲ有ス。

5. x ノ整式 $f(x)$ ヲ $(x-\alpha)(x-\beta)$ ニテ割リタルトキノ剩餘ヲ求メヨ。但シ $\alpha \neq \beta$ トス。

〔解〕 商ヲ Q, 剩餘ヲ R トスレバ

$$f(x)=Q(x-\alpha)(x-\beta)+R,$$

除數ハ x ニツキテ二次ナル故ニ R ハ x ニツキテ一次以下ナルベシ、依ツテ

$$R=Ax+B$$

トオク、但シ A 及ビ B ハ未定係數ナリ、然ルトキハ

$$f(x)=Q(x-\alpha)(x-\beta)+Ax+B,$$

コレハ恒等式ナル故ニ x ノ値ノ如何ニ拘ラズ兩邊ハ相等シ、依ツテ $x=\alpha$, $x=\beta$ トオケバ

$$f(\alpha)=A\alpha+B, \qquad f(\beta)=A\beta+B$$

コノ二式ヨリ A, B ヲ求ムレバ

$$A=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}, \qquad B=\frac{\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)}{\alpha-\beta},$$

故ニ所要ノ剩餘ハ次ノ如シ、

$$\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}x+\frac{\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)}{\alpha-\beta},$$

6. $(x^2+5x+2)^3$ ヲ x^2+2x+3 ニテ割リタルトキノ剩餘ヲ求メヨ。

〔解〕 $x^2+2x+3=P$ トオケバ $x^2+5x+2=P+3x-1$

$$\therefore\ (x^2+5x+2)^3=(P+3x-1)^3=P^3+3P^2(3x-1)+3P(3x-1)^2+(3x-1)^3$$

依ツテ所要ノ剰餘ハ

$$(3x-1)^3=27x^3-27x^2+9x-1$$

ヲ $P=(x+1-i\sqrt{2})(x+1+i\sqrt{2})$ ニテ除シタルトキノ剰餘ニ等シ依ツテ前問ノ結果ニ於テ $\alpha=-1+i\sqrt{2}$, $\beta=-1-i\sqrt{2}$ トオキ所要ノ剰餘 $90x+242$ ヲ得

（注意） α, β ガ複素數ナル如キ場合ニハ前問ノ結果ヲ用フルヨリモ次ノ如クスル方簡便ナリ、即チ

$27x^3-27x^2+9x-1=Q(x^2+2x+3)+Ax+B$

ノ兩邊ニ $x^2+2x+3=0$ 即チ $x^2=-2x-3$ トオケバ

$-27x(2x+3)+27(2x+3)+9x-1=Ax+B$

$\therefore\ -54x^2-18x+80=Ax+B$

$\therefore\ 54(2x+3)-18x+80=Ax+B$

$\therefore\ 90x+242=Ax+B$ x ハ複素數ナル故ニ $A=90$. $B=242$

7. x ノ整式 $f(x)$ ヲ $(x-\alpha)^2$ ニテ割リタルトキノ剰餘ヲ求メヨ。

〔解〕 $f(x)$ ヲ $x-\alpha$ ニテ割リタルトキノ商ヲ $g(x)$, 剰餘ヲ R_1 トシ $g(x)$ ヲ更ニ $x-\alpha$ ニテ割リタルトキノ商ヲ Q, 剰餘ヲ R_2 トスレバ

$$f(x)=g(x)(x-\alpha)+R_1 \qquad g(x)=Q(x-\alpha)+R_2$$

$$\therefore\ f(x)=Q(x-\alpha)^2+R_2(x-\alpha)+R_1$$

R_1, R_2 ハ x ヲ含マザル故ニ所要ノ剰餘ハ $R_2(x-\alpha)+R_1$ ナリ然ルニ基本定理 I ニヨリ

$$R_1=f(\alpha),$$

$$\therefore\ g(x)=\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$$

右邊ノ割リ算ヲ實施スルコトニヨリテ $g(x)$ ヲ求ムルコトヲ得、然ルトキハ又基本定理 1 ニヨリテ

$$R_2=g(\alpha).$$

コレニヨリテ所要ノ剰餘 $R_1(x-\alpha)+R_1$ ヲ得

8. $x^4+4x^3+3x^2+px+q$ ト x^3+3x^2+2x+1 トヲ x^2+2x+1 ニテ割ルトキ同ジ剰餘ヲ得ル様ニ p ト q トノ値ヲ定メヨ。

〔解〕 題意ニ適スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ與ヘラレタル二式ノ差ガ x^2+2x+1 ニテ整除セラルヽコトナリ、依ツテ與ヘラレタル二式ノ差ヲ $f(x)$ トスレバ

$$f(x)=x^4+3x^3+(p-2)x+q-1$$

又 $x^2+2x+1=(x+1)^2$ ナル故ニ前問ニ於ケル R_1, $g(x)$, R_2 ハ次ノ如クナル

$$R_1=f(-1)=-p+q-1$$

$$g(x)=\frac{x^4+3x^3+(p-2)x+p}{x+1}=x^3+2x^2-2x+p,$$

$$R_2=g(-1)=p+3,$$

依ツテ題意ニ適スルタメニハ $R_1=R_2=0$, 即チ

$$-p+q-1=0, \qquad p+3=0$$

$$\therefore\ p=-3, \qquad q=-2$$

コレ即チ所要ノ p, q ノ値ナリ。

9. n ガ正ノ整數ナルトキ $x^n-na^{n-1}x+(n-1)a^n$ ハ $(x-a)^2$ ニテ割リ切レルコトヲ證セヨ。

〔解〕 $x^n-na^{n-1}x+(n-1)a^n=x^n-a^n-na^{n-1}(x-a)$

故ニ $x-a$ ニテ割リタルトキノ商ハ

$$x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots\ldots+a^{n-1}-na^{n-1}$$

此商ニ於テ $x=a$ トオケバ明カニ 0 トナル、故ニ此商ハ又 $x-a$ ニテ整除セラル、

從ツテ所題ノ式ハ $(x-a)^2$ ニテ整除セラル、

或ハ次ノ如ク歸納法ニヨツテ證明スルモ可ナリ、

$x^{n+1}-(n+1)a^nx+na^{n+1}=\{x^n-na^{n-1}x+(n-1)a^n\}x+na^{n-1}(x^2-2ax+a^2)$

故ニ所題ノ式ガ n ノトキ $(x-a)^2$ ニテ整除セラルト假定スレバ $n+1$ ノトキモ亦 $(x-a)^2$ ニテ整除セラル、然ルニ $n=2$ ノトキ明カニ整除セラル、依ツテ n ガ正ノ整數ナルトキ常ニ $(x-a)^2$ ニテ整除セラル。

10. x^3+px^2+qx+r **ガ** ax^2+bx+c **ニテ割リ切レルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求メヨ。但シ** a, b, c **ハ 0 ナラズトス。**

〔解〕 商ヲ $Ax+B$ トスレバ

$$x^3+px^2+qx+r=(ax^2+bx+c)(Ax+B)$$

$$=aAx^3+(aB+bA)x^2+(bB+cA)x+cB$$

依ツテ基本定理 II ニヨリ

$$aA=1, \quad aB+bA=p, \quad bB+cA=q, \quad cB=r,$$

第一式ト 最後ノ式トヨリ $A=\dfrac{1}{a}$, $B=\dfrac{r}{c}$

コレヲ第二、第三式ニ代入スレバ

$$\frac{ar}{c}+\frac{b}{a}=p, \quad \frac{br}{c}+\frac{c}{a}=q$$

コレ即チ必要ナル條件ナリ逆ニ第一條件ヨリ $\dfrac{ar}{c}=\dfrac{ap-b}{a}$, 第二條件ヨリ

$\dfrac{br}{c}=\dfrac{aq-c}{a}$ 兩邊ニ $\dfrac{a}{b}$ ヲ乘ズレバ $\dfrac{ar}{c}=\dfrac{aq-c}{b}$

$$\therefore \quad \frac{ap-b}{a}=\frac{aq-c}{b}=\frac{ar}{c}$$

コノ各ヲ k ニ等シトオケバ

$$p=\frac{ak+b}{a}, \quad q=\frac{bk+c}{a}, \quad r=\frac{ck}{a}$$

$$\therefore \quad x^3+px^2+qx+r=\frac{1}{a}\{ax^3+(ak+b)x^2+(bk+c)x+ck\}$$

$$=\frac{1}{a}\{x(ax^2+bx+c)+k(ax^2+bx+c)\}$$

即チ上ノ二ツノ條件アラバ x^3+px^2+qx+r ハ ax^2+bx+c ニテ整除セラル

依ツテ上ノ二ツノ條件ハ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ナリ。

11. x **ニ關スル四次ノ整式アリ** $(x-2)^3$ **ニテ割レバ剩餘 3 ヲ得** $(x-1)^2$ **ニテ割レバ剩餘 −3 ヲ得ルトイフ、其整式ヲ求メヨ。**

〔解〕 所要ノ整式ヲ $f(x)$ トスレバ題意ニヨリ次ノ二ツノ關係アリ

$$f(x)=(Ax+B)(x-2)^3+3$$

$$f(x)=(A_1x^2+B_1x+C_1)(x-1)^2-3$$

依ツテ基本定理 II ニヨリ兩式ノ右邊ノ x ノ各次ノ係數ハ等シカラザルベカラズ

即チ

$$A=A_1$$

$$6A-B=2A_1-B_1$$

$$12A-6B=A_1-2B_1+C_1$$

$$8A-12B=2C_1-B_1$$

$$8B-3=3-C_1$$

コノ聯立方程式ヨリ A, B ヲ求ムレバ $A=18$, $B=-12$,

依ツテ $f(x)=(18x-12)(x-2)^3+3=18x^4-120x^3+288x^2-288x+99$

12. $f(x)$ **ハ** x **ニ關シテ二次ノ整式ニシテ** $f(x^2-1)$ **ハ** $f(x)$ **ニテ整除セラルトイフ** $f(x)$ **ヲ求メヨ。**

〔解〕 題意ニヨリ $f(x)=Ax^2+Bx+C \ (A\neq 0)$ トスレバ

$$f(x^2-1)=A(x^2-1)^2+B(x^2-1)+C$$

コレガ $f(x)$ ニテ整除セラル、故ニ

$$A(x^2-1)^2+B(x^2-1)+C=(Px^2+Qx+R)(Ax^2+Bx+C)$$

基本定理 II ニヨリ兩邊ノ各次ノ係數ヲ等シトオケバ

$A=AP$, $\quad O=AQ+BP$, $\quad -2A+B=AR+BQ+CP$,

$O=BR+CQ$, $\quad A-B+C=CR$

コレヨリ A, B, C ヲ求ムレバ $B\neq 0$ ナラバ 第一、第二、第四式ヨリ $P=1$,

$Q=-\dfrac{B}{A}$, $\quad R=\dfrac{C}{A}$ 第三、第五式ニ代入スレバ

$$2A^2+2AC-AB-B^2=0, \quad A^2-AB+AC-C^2=0$$

$$\therefore \quad AB-B^2+2C^2=0$$

最後ノ二式ヨリ B ヲ消去スレバ

$$B=\frac{A^2+AC-C^2}{A} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \ (1)$$

$$A^2+AC-C^2-\left(\frac{A^2+AC-C^2}{A}\right)^2+2C^2=0 \quad \cdots \ (2)$$

(二) ヲ整頓スレバ

$$C^4-2AC^3-2A^2C^2+A^3C=0$$

即チ $C(C+A)(C^2-3AC+A^2)=0$ $\therefore$ $C=0$ *or* $-A$ *or* $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}A$

從ツテ (1) ヨリ $B=A$ *or* $-A$ *or* $(-1\mp\sqrt{5})A$

$\therefore$ $f(x)=Ax^2+Ax=A(x^2+x)$

或ハ $\quad =Ax^2-Ax-A \qquad =A(x^2-x-1)$

或ハ $\quad =Ax^2-(1\pm\sqrt{5})Ax+\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}A=A\left\{x^2-(1\pm\sqrt{5})x+\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

次ニ $B=0$ ナラバ上ノ第一、第二、第三式ヨリ

$$P=1, \qquad Q=0, \qquad R=-\frac{2A+C}{A},$$

第五式ニ代入スレバ

$$C=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}A,$$

故ニ此場合ニハ

$$f(x)=Ax^2+\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}A=A\left(x^2+\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\right),$$

但シ A ハ 0 ニアラザル任意ノ定數ナリ。

13. $\boldsymbol{f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots\ldots+a_{m-1}x+a_m}$

$\boldsymbol{f'(x)=ma_0x^{m-1}+(m-1)a_1x^{m-2}+\ldots\ldots+2a_{m-2}x+a_{m-1}}$

トシ $f(x)$ ガ $f'(x)$ ニテ割リ切レルヤウニ係數 $a_0\ a_1\ a_2\ldots\ldots a_m$ ヲ定メヨ。

〔解〕 $f(x)$ ハ m 次 $f'(x)$ ハ $m-1$ 次ナル故ニ $f(x)=(Ax+B)f'(x)$ 即チ

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots\ldots+a^{m-1}x+a^m$$
$$=(Ax+B)\{ma_0x^{m-1}+(m-1)a_1x^{m-2}+\ldots\ldots+2a_{m-2}x+a_{m-1}\}$$

ト假定シ兩邊ノ各次ノ係數ヲ等シトオケバ

$$a_0=ma_0A \qquad\qquad \therefore\ A=\frac{1}{m}, \qquad B=\frac{a_1}{m^2a_0}$$

$$a_1=ma_0B+(m-1)a_1A \qquad\qquad a_2=\frac{(m-1)a_1^2}{m^2a_0}+\frac{m-2}{m}a_2$$

$$a_2=(m-1)a_1B+(m-2)a_2A \qquad\qquad a_3=\frac{(m-2)a_1a_2}{m^2a_0}+\frac{m-3}{m}a_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m-2}=3a_{m-3}B+2a_{m-2}A \qquad\qquad a_4=\frac{(m-3)a_1a_3}{m^2a_0}+\frac{m-4}{m}a_4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m-1}=2a_{m-2}B+a_{m-1}A \qquad\qquad a_{m-1}=\frac{2a_1a_{m-2}}{m^2a_0}+\frac{a_{m-1}}{m}$$

$$a_m=a_{m-1}B \qquad\qquad a_m=\frac{a_1a_{m-1}}{m^2a_0}$$

$$\therefore\ a_2=\frac{(m-1)a_1^2}{2ma_0} \qquad a_3=\frac{(m-2)a_1a_2}{3ma_0}=\frac{(m-1)(m-2)a_1^3}{2.\ 3\ m^2a_0^2}$$

$$a_4=\frac{(m-3)a_1a_3}{4ma_0}=\frac{(m-1)(m-2)(m-3)a_1^4}{2.\ 3.\ 4\ m^3a_0^3}$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$a_k=\frac{(m-k+1)a_1a_{k-1}}{k\,ma_0}=\frac{(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-k+1)}{2.\ 3.\ 4\ldots\ldots k\,m^{k-1}a_0^{k-1}}a_1^k$$

但シ a_0, a_1 ハ任意ノ數ニテ可ナリ。

14. $\boldsymbol{ax+by+cz+d}$ ガ $\boldsymbol{x, y, z}$ ノ値ノ如何ニ係ラズ常ニ一定數 $\boldsymbol{k}$ ニ等シキタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求メヨ。

〔解〕 題意ニヨリ x, y, z ノ値ノ如何ニ係ラズ $\qquad ax+by+cz+d=k$

故ニコノ兩邊ヲ x ノ整式ト見做セバ基本定理 II ニヨリ

$$a=0, \qquad by+cz+d=k$$

ナラザルベカラズ。又 $by+cz+d=k$ ノ兩邊ヲ y ノ整式ト見做セバ y ノ値ノ如何ニ係ラズ此兩邊ハ相等シキ故ニ基本定理 II ニヨリ

$$b=0, \qquad cz+d=k$$

ナラザルベカラズ、同樣ニ又 $cz+d=k$ ノ兩邊ヲ z ノ整式ト見做セバ

$$c=0, \qquad d=k$$

ナラザルベカラズ即チ $ax+by+cz+d$ ガ x, y, z ノ値ノ如何ニ係ラズ常ニ一定數 k ニ等シキタメニハ $\quad a=b=c=0, \quad d=k \quad$ ナルヲ要ス、逆ニ此條件ガ成立スル

トキハ $ax+by+cz+d$ ハ常ニ k ニ等シ、依ツテ此ノ條件ハ即チ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ナリ。

15. x ニ如何ナル値ヲ與フルモ $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ノ値ガ一定不變ナルタメニハ a, b, c, d ノ間ニ如何ナル關係アルヲ要スルカ、又其一定不變ノ値如何。

〔解〕 一定不變ノ値ヲ k トスレバ

$$\frac{ax+b}{cx+d}=k \qquad \therefore \quad \frac{(a-ck)x+b-k}{cx+d}=0$$

故ニ x ノ値ノ如何ニ拘ラズ（但シ $-\dfrac{d}{c}$ ヲ除ク）

$$(a-ck)x+b-dk=0$$

ナルヲ要スコレガタメニハ基本定理 II ニヨリ

$$a-ck=0, \qquad b-dk=0$$

ナルヲ要ス 依ツテ $c\neq0,\ d\neq0$ ナル場合ハ

$$k=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

逆ニ $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ ナルトキコノ各ヲ k トオケバ

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ckx+dk}{cx+d}=k \qquad (cx+d\neq0)$$

故ニ此條件ハ亦十分ナル條件ナリ即チ c, d ガ 0 ナラザル場合ニ $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ガ x ノ値（$-\dfrac{d}{c}$ 以外ノ）ニ係ラザルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

ニシテ且ツ其値ハ $\dfrac{a}{c}$ 或ハ $\dfrac{b}{d}$ ナリ

次ニ $c=0$ ナル場合ニハ $a-ck=0$ ヨリ a モ亦 0 ナルヲ要シ $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ノ値ハ常ニ $\dfrac{b}{d}$ トナリ、$d=0$ ナル場合ニハ $b-dk=0$ ヨリ d モ亦 0 ナルヲ要シ $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ノ値ハ $x=0$ 以外ニ於テ常ニ $\dfrac{a}{c}$ トナル

16. z ノ値ノ如何ニ係ラズ

$$\frac{2z^2+(x-a)z+2(y-2a)}{3z^2+(y-b)z+x+3b}$$

ノ値ヲ一定不變ナラシムル如キ x, y ノ値ヲ求メヨ。

〔解〕 z ノ値（分母ヲ0ナラシメザル）ノ如何ニ係ラザル所題ノ分數式ノ値ヲ k トスレバ前問ト同樣ニ

$$k=\frac{2}{3}=\frac{x-a}{y-b}=\frac{2(y-2a)}{x+3b}$$

$$\therefore \quad 3x-2y=3a-2b, \qquad x-3y=-6a-3b$$

コノ聯立方程式ヲ解キテ

$$x=3a, \qquad y=3a+b$$

17. 與ヘラレタル圓周上ノ任意ノ点ヨリ互ニ垂直ナル二ツノ定マレル直徑ニ至ル距離ヲ夫々 x, y トスルトキ ax^2+by^2 ガ一定ナルタメノ條件ヲ求メヨ。

〔解〕 與ヘラレタル圓ノ半徑ヲ r トスレバ圓周上ノ點ノ位置ニ係ラズ

$$x^2+y^2=r^2,$$

$$\therefore \quad ax^2+by^2=ax^2+b(r^2-x^2)=(a-b)x^2+br^2$$

コレガ常ニ一定値 k ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ基本定理 II ニヨリ $a-b=0,\quad br^2=k$ ナリ，

依ツテ所要ノ條件ハ $a=b$ ニシテ此場合ノ一定値ハ br^2 或ハ ar^2 ナリ。

18. $kx^2+(a-k)^2x+k^2+bk+c=0$ ノ一根ガ k ノ値ノ如何ニ係ラザルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求メヨ。

〔解〕 k ノ値ノ如何ニ係ラザル一根ヲ α トスレバ

$$k\alpha^2+(a-k)^2\alpha+k^2+bk+c=0$$

即チ $\quad (\alpha+1)k^2+(\alpha^2-2a\alpha+b)k+a^2\alpha+b=0$

此關係ガ k ノ如何ニ係ラズ成立セザルベカラザルガ故ニ基本定理 II ニヨリ

$$\alpha+1=0, \qquad \alpha^2-2a\alpha+b=0, \qquad a^2\alpha+b=0,$$

第一式ヨリ得ル $\alpha=-1$ ヲ第二, 第三式ニ代入スレバ

$$1+2a+b=0, \qquad a^2-b=0.$$

逆ニ此關係アルトキハ所題ノ方程式ハ k ノ如何ニ係ラズ -1 ナル一根ヲ有ス，依ツテコノ關係ハ所要ノ條件ナリ。

19. **k ノ値ノ如何ニ係ラズ聯立方程式**

$$kx+(a-k)y=1,\qquad (bk-1)x+(c+k)y=k+1$$

ヲ滿足セシムル x, y ノ値ガ一定ナルタメノ條件ヲ求メヨ。

〔解〕 x, y ノ一定ノ値ヲ夫々 α, β トスレバ

$$k\alpha+(a-k)\beta=1,\qquad (bk-1)\alpha+(c+k)\beta=k+1$$

卽チ $(\alpha-\beta)k+a\beta-1=0,\qquad (b\alpha+\beta-1)k-\alpha+c\beta-1=0$

此二ツノ關係ハ k ノ値ノ如何ニ係ラズ成立ス，依ツテ基本定理 II ニヨリ

$$\alpha-\beta=0,\qquad a\beta-1=0,\qquad b\alpha+\beta-1=0,\qquad \alpha-c\beta+1=0$$

コレヨリ α, β ヲ消去スレバ

$$b+1=c-1=a \qquad 但シ\ a\neq 0\ トス$$

$a=0$ ナラバ $a\beta-1\neq 0$ ナル故ニ x, y ノ題意ノ如キ一定ノ値ナシ。

20. **P ト Q トハ x ニツキテ同次數ノ整式ニシテ P ヲ Q ニテ割リタルトキノ商ヲ a 剩餘ヲ U, Q ヲ P ニテ割リタルトキノ商ヲ b, 剩餘ヲ V トスレバ a, b, U, V ノ間ニ如何ナル關係アルカ。**

〔解〕 題意ニヨリ

$$P=aQ+U,\qquad Q=bP+V,$$

$$\therefore\ Q=b(aQ+U)+V \qquad \therefore\ (1-ab)Q=bU+V$$

然ルニ P, Q ハ x ニツキ同次ナル故ニ b ハ x ヲ含マズ且ツ U, V ハ P, Q ヨリ低次ナリ，從ツテ上ノ恒等式ノ右邊ハ左邊ヨリ低次ナリ。 從ツテ基本定理 II ニヨリ $1-ab=0$, 從ツテ又 $bU+V=0$, 依ツテ所要ノ關係ハ

$$1-ab=0,\qquad bU+V=0,$$

ナリ。

21. **p ガ n ヨリ小ナル正ノ整數ニシテ $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ ガ悉ク不等ナルトキハ**

$$\frac{x^p}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}$$

ナルコトヲ證セヨ。 但シ

$$A_1=\frac{a_1^p}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots\ldots(a_1-a_n)},$$

$$A_2=\frac{a_2^p}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots\ldots(a_2-a_n)},\ \ldots\ldots$$

トス。

〔解〕 所題ノ式ノ兩邊ニ $(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)$ ヲ乘ズレバ

$$x^p=A_1(x-a_2)(x-a_3)\ldots\ldots(x-a_n)+A_2(x-a_1)(x-a_3)\ldots\ldots+(x-a_n)+\ldots\ldots$$
$$+A_n(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_{n-1}),$$

此等式ノ右邊ノ各項ハ x ニツキ $n-1$ 次ナル故ニ右邊ハ $n-1$ 次或ハ其以下ナリ、又 p ハ n ヨリ小ナル正ノ整數ナル故ニ左邊モ亦 $n-1$ 次或ハ其以下ナリ、然ルニ $x=a_1$ トオケバ左邊ハ a_1^p ニシテ右邊ノ第一項ハ a_1^p トナリ第二項以下ハ皆 0 トナル故ニ $x=a_1$ ノトキ兩邊ハ相等シクナル，同樣ニ $x=a_2$ トオクモ左邊ハ a_2^p ニシテ右邊ノ第二項ハ a_2^p トナリ其他ハ總テ 0 トナルガ故ニ $x=a_2$ ノトキモ兩邊ハ相等シクナル、同樣ニ a_3 ヨリ a_n マデノ値ノトキ兩邊ハ常ニ相等シクナル、即チ上ノ等式ノ兩邊ノ整式ハ $n-1$ 次或ハ其以下ナルニ $a_1, a_2\ldots\ldots a_n$ ナル n 個ノ値ノトキ相等シクナル、故ニ基本定理 II ニヨリ兩邊ハ恒等的ニ相等シ、從ツテ其兩邊ヲ $(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)$ ニテ割リテ得ベキ所題ノ式モ x ノ値ノ如何ニ係ラズ恒等的ニ成立ス。

22. **$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ ヲ計算セヨ。**

〔解〕 所題ノ式ハ a, b, c ノ三次ノ同次對稱式ナル故ニ

$$L(a^3+b^3+c^3)+M\{a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)\}+Nabc$$

トオキ係數 L, M, N ヲ決定スルタメニ $a=1,\ b=c=0$ トオケバ $L=-1$, $a=b=1$, $c=0$ トオケバ $2L+2M=0$ $\quad\therefore\ M=1$, $a=b=c=1$ トオケバ $3L+6M+N=1$ $\quad\therefore\ N=-2$, 依ツテ所要ノ展開式ハ

$$a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)-a^3-b^3-c^3-2abc.$$

23. $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)+a^2(b+c)$
$+b^2(c+a)+c^2(a+b)$

ヲ簡單ニセヨ。

〔解〕 所題ノ式ハ a, b, c ノ三次ノ同次對稱式ナル故ニ前問ト同様ニ

$$L(a^3+b^3+c^3)+M\{a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)\}+Nabc$$

トオキ L, M, N ヲ決定スルタメニ兩邊ノ a^3 ノ係數ヲ比較スレバ $1=L$, a^2b ノ係數ヲ比較スレバ $0=M$, abc ノ係數ヲ比較スレバ $3=N$, 依ツテ所題ノ式ハ

$$a^3+b^3+c^3+3abc$$

ニ等シ。

24. $a, b, c\ldots\ldots$ **ニツキテノ對稱式** A **ガ其中ノ或文字例ヘバ** a **ヲ含ム一因數ヲ有スルナラバ** A **ハ其因數中ノ** a **ヲ,** $b, c\ldots\ldots$**等ニテ置キ換ヘタル式ノ總テヲ因數トスルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 a ヲ含ム因數ヲ F トシ

$$A=F\cdot P$$

トオク、今 a ト $b, c\ldots\ldots$ 等ノ中ノ任意ノ文字トヲ交換スルトキ F ハ F' トナリ P ハ P' トナリタリトス。A ハ對稱式ナル故ニ此交換ニ由ツテ何等變化セズ、依ツテ

$$A=F'\cdot P'$$

即チ A ハ又 F' ヲ因數トスルコトヲ知ル。

(注意) 本題ハ亦交代式ニモ適用シ得ルコト明カナリ。

25. $xyz-xy-yz-zx+x+y+z-1$ **ヲ因數ニ分解セヨ。**

〔解〕 所題ノ式ハ x, y, z ノ三次ノ對稱式ニシテ $x=1$ トオケバ 0 トナル故ニ基本定理 I ニヨリ $x-1$ ナル因數ヲ有ス、從ツテ前問ニヨリ $y-1$, $z-1$ ナル因數ヲ有ス、從ツテコレ等ノ因數ノ連乘積ヲ因數トス,然ルニコレ等ノ因數ノ連乘積ハ x, y, z ニツキテ三次ナル故ニ殘ル因數ハ x, y, z ヲ含マズ、依ツテ殘ル因數ヲ L トシ

$$xyz-xy-yz-zx+x+y+z-1=L(x-1)(y-1)(z-1)$$

トオク、L ヲ決定スルタメニ兩邊ノ xyz ノ係數ヲ比較スレバ $1=L$ 故ニ要スル因數ハ

$$(x-1)(y-1)(z-1)$$

26. $(x+y+z)^5-(x^5+y^5+z^5)$ **ヲ因數ニ分解セヨ。**

〔解〕 所題ノ式ハ x, y, z ニツキ五次ノ同次對稱式ニシテ $x=-y$ トオケバ 0 トナル故ニ基本定理 I ニヨリ $x+y$ ナル因數ヲ有ス、從ツテ又前問ニヨリ $z+y$, $x+z$ ナル因數ヲ有ス、即チ所題ノ式ハ $(x+y)(y+z)(z+x)$ ナル因數ヲ有ス、然ルニ此因數ハ又 x, y, z ノ對稱式ナル故ニ殘ル因數ハ基本定理 III ニヨリ x, y, z ノ對稱式ニシテ而モ二次ニシテ同次ナルヲ要ス、依ツテ

$$(x+y+z)-x^5-y^5-z^5=(x+y)(y+z)(z+x)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(xy+yz+zx)\}$$

トオク、L, M ヲ決定スルタメニ兩邊ニ於テ $x=y=1$, $z=0$ 及ビ $x=y=z=1$ トオケバ

$$30=2(2L+M),\qquad 240=8(3L+3M)$$

$$\therefore\ 2L+M=15\qquad L+M=10\qquad \therefore\ L=5,\quad M=5,$$

$$\therefore\ (x+y+z)^5-(x^5+y^5+z^5)=5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx).$$

27. **若干ノ文字ノ交代式ハ常ニソレ等ノ文字ノ中ノアラユル二ツノ差ノ連乘積ニ由ツテ整除セラルヽコトヲ証セヨ。**

〔解〕 $a, b, c, \ldots\ldots$ 等ノ任意ノ交代式ヲ A トシ A ニ於テコレ等ノ文字ノ中ノ任意ノ二ツ例ヘバ a ト b トヲ交換スレバ交代式ノ性質ニヨリ A ハ $-A$ トナル, 故ニ若シ $a=b$ トスレバ

$$A=-A$$

從ツテ $\quad 2A=0\qquad \therefore\ A=0,$

依ツテ基本定理 I ニヨリ A ハ $a-b$ ナル因數ヲ有ス、同様ニ $a-c$, $b-c$, 等ノ因數ヲ有ス、從ツテコレ等ノ連乘積ナル因數ヲ有ス即チ若干ノ文字ノ交代式ハソレ等ノ文字ノ中ノ任意ノ二ツノ差ノ連乘積ニテ整除セラル。

28. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$ **ヲ因數ニ分解セヨ。**

〔解〕 所題ノ式ハ a, b, c ノ四次ノ同次交代式ナル故ニ前問ニヨリ $(a-b)(b-c)(c-a)$ ナル因數ヲ有ス。而シテコノ因數ハ又 a, b, c ノ交代式ニシテ三次ニシテ同次ナル故ニ殘ル因數ハ基本定理 IV ニヨリ一次ノ同次對稱式 $L(a+b+c)$ ナリ、依ツテ

$a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=L(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

L ヲ決定スルタメニ $a=0,\ b=1,\ b=2$ トオケバ $6=6L$

$$\therefore\ L=1, \qquad 故ニ所要ノ因數ハ$$

$$(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a),$$

29. $(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3$ **ヲ因數ニ分解セヨ。**

〔解〕 所題ノ式ハ a^2, b^2, c^2 ニ關シ三次ニシテ同次ナル交代式ナル故ニ前々問ニヨリ $(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)$ ナル因數ヲ有ス、而シテ此因數ハ又 a^2, b^2, c^2 ニツキ三次ニシテ同次ナル故ニ殘ル因數ハ a, b, c ヲ含マズ、依ツテ

$$(a^2-b^2)^3+(c^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3=L(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)$$

トオキ　$a^2=0,\quad b^2=1,\quad c^2=2$　トスレバ　$6=2L \quad \therefore\ L=3.$

故ニ所要ノ因數ハ

$3(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)=3(a+b)(a-b)(b+c)(b-c)(c+a)(c-a).$

30. $(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$ **ヲ因數ニ分解セヨ。**

〔解〕 所題ノ式ハ x, y, z ノ五次ノ同次對稱式ニシテ $x=0$ トオケバ 0 トナルガ故ニ x ナル因數ヲ有ス從ツテ又 $y, z,$ ナル因數ヲ有ス、即チ xyz ナル因數ヲ有ス、コノ因數ハ又 x, y, z ノ三次ノ對稱式ナル故ニ殘ル因數ハ基本定理 III ニヨリ二次ノ同次對稱式

$$L(x^2+y^2+z^2)+M(xy+yz+zx)$$

ナラザルベカラズ、L, M ヲ決定スルタメニ　$x=y=z=1$　トオケバ

$240=3L+3M,$ 即チ $L+M=80,$ 又 $x=y=1\ \ z=-1$ トオケバ

$-240=-3L+M$ 即チ $3L-M=240$ コノ二ツノ方程式ヨリ $L=80,\ M=0$

依ツテ所要ノ因數ハ

$$80\,xyz(x^2+y^2+z^2)$$

31. $(a+b)^3+(a+c)^3+(a+d)^3+(b+c)^3+(b+d)^3+(c+d)^3$ **ヲ因數ニ分解セヨ。**

〔解〕 所題ノ式ハ a, b, c, d ノ三次ノ同次對稱式ナルモ $a=0,$ 或ハ $b,$ 或ハ $-b$ トオクモ 0 トナラズ故ニ $a,\ a-b,\ a+b$ 等ノ因數ヲ有セズ然ルニ $a+b=-(c+d)$ トオケバ 0 トナル故ニ $a+b+c+d$ ナル因數ヲ有スルコトヲ知ル、コノ因數ハ又 a, b, c, d ノ一次ノ同次對稱式ナル故ニ殘ル因數ハ二次ノ同次對稱式

$$L(a^2+b^2+c^2+d^2)+M(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

ナラザルベカラズ、L, M ヲ決定スルタメニ　$a=b=c=0\ \ d=1$　トオケバ　$L=3$

$a=b=0,\ \ c=d=1$　トオケバ　$12=2(2L+M) \qquad \therefore\ M=0$

依ツテ所要ノ因數ハ

$$3(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

32. $x^3(x+1)(y-z)+y^3(y+1)(z-x)+z^3(z+1)(x-y)$ **ヲ因數ニ分解セヨ。**

〔解〕 所題ノ式ハ x, y, z ノ五次ノ同次ナラザル交代式ニシテ問 27 ニヨリ $(x-y)(y-z)(z-x)$ ナル因數ヲ有ス、此因數ハ又三次ノ同次交代式ナル故ニ殘ル因數ハ基本定理 IV ニヨリ二次ノ對稱式

$$A(x^2+y^2+z^2)+B(xy+yz+zx)+C(x+y+z)+D$$

ナラザルベカラズ、x^4y ノ係數ヲ比較シテ $A=-1,$ x^3y^2 ノ係數ヲ比較シテ $A-B=0 \quad \therefore\ B=-1,$ x^3y ノ係數ヲ比較シテ $C=-1,$ x^2y ノ係數ヲ比較シテ $D=0,$ 依ツテ所要ノ因數ハ

$$(x-y)(y-z)(x-z)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx+x+y+z).$$

33. a, b, c **間ニ如何ナル關係アルトキ** $(ax+by+cz)\{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z\}$ **ハ** y, z **ニ關シテ對稱トナルカ。**

〔解〕 $ax+by+cz=A,\quad (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=B$

トオク, A, B ガ y, z ニ關シテ共ニ對稱式ナルカ或ハ共ニ交代式ナルトキハ A, B ノ積ナル所題ノ式ハ y, z ニ關シテ對稱トナルベシ然ルニ A, B ノ双方ガ y, z ニ關シテ對稱ナルタメニハ

$b=c$

共ニ交代式ナルタメニハ

$a=0, \qquad b=-c$

ナルヲ要ス　即チ　$b=c$, 或ハ　$a=o$, $b=-c$　ナルトキ A, B ハ共ニ y, z ニ關スル對稱式或ハ交代式トナリ從ツテ所題ノ式ハ y, z ニ關シテ對稱式トナル。

34. $\dfrac{b^2(a-c)(a-d)}{(b-c)(b-d)}+\dfrac{c^2(a-d)(a-b)}{(c-d)(c-b)}+\dfrac{d^2(a-b)(a-c)}{(d-b)(d-c)}$ **ヲ簡單ニセヨ。**

〔解〕 所題ノ分數式ヲ通分スレバ

$$\frac{b^2(a-c)(a-d)(c-d)+c^2(a-d)(a-b)(d-b)+d^2(a-b)(a-c)(b-c)}{(b-c)(b-d)(c-d)}$$

コノ分子ハ b, c, d ノ交代式ナルコト明カナル故ニ　問 27 ニヨリ $(b-c)(c-d)(d-b)$ ナル因數ヲ有ス而シテ a, b, c, d ニツイテ五次ニシテ同次ナル故ニ殘ル因數ハ

$$Aa^2+Ba(b+c+d)+C(b^2+d^2+c^2)+D(bc+cd+db)$$

ナル形ナラザルベカラズ但シ A, B, C, D ハ a, b, c, d ヲ含マザル定數トス a^2b^2c ノ係數ヲ比較スレバ $A=-1$, ab^3c ノ係數ヲ比較スレバ $B=0$, b^4d ノ係數ヲ比較スレバ $C=0$, b^3c^2 ノ係數ヲ比較スレバ $D=0$, 依ツテ分子ハ $-(b-c)(c-d)(d-b)a^2$ トナル從ツテ所題ノ式ハ a^2 ニ等シ。

35. $\dfrac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\dfrac{acd}{(b-a)(b-c)(b-d)}$

$+\dfrac{abd}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\dfrac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)}$ **ヲ簡單ニセヨ。**

〔解〕 所題ノ分數式ヲ通分スレバ

$$\frac{bcd(b-c)(b-d)(c-d)-acd(a-c)(a-d)(c-d)+abd(a-b)(a-d)(b-d)-abc(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}$$

コノ分子ハ a, b, c, d ノ六次ノ同次交代式ナル故ニ問 27 ニヨリ $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ ナル六次ノ因數ヲ有ス從ツテ殘ル因數ハ a, b, c, d ノ

何レヲモ含マザル定數 L ナラザルベカラズ, a^3b^2c ノ係數ヲ比較スレバ $L=-1$ 依ツテ所題ノ式ハ -1 ニ等シ。

36. $\dfrac{a_1^r}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots\ldots(a_1-a_n)}+\dfrac{a_2^r}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots\ldots(a_2-a_n)}$

$+\ldots\ldots+\dfrac{a_n^r}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}$ **ハ $r<n-1$ ナラバ 0 ニ等シク $r=n-1$ ナラバ 1 ニ等シク $r=n$ ナラバ $a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n$ ニ等シキコトヲ證セヨ。但シ r ハ正ノ整數トス。**

〔解〕 所題ノ分數式ヲ通分スレバ分母分子共ニ夫々 $a_1, a_2\ldots\ldots a_n$ ニ關スル同次交代式トナルコト明カナリ、而シテ分母ノ因數ハ a_1 ヲ a_2 以下ニ組ミ合セタルモノ $n-1$ 個, a_2 ヲ a_3 以下ニ組ミ合シタルモノ $n-2$ 個等追ツテ斯クノ如ク $n-3, n-4, \ldots\ldots 2$ 1 個ナル故ニ總數ハ

$$(n-1)+(n-2)+\ldots\ldots+3+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

依ツテ分母ノ次數ハ $\dfrac{n(n-1)}{2}$

分母ノ第一項ノ因數ハ a_1 ガ r 個, a_2 ヲ a_3 以下ニ組ミ合シタルモノ $n-2$ 個、a_3 ヲ a_4 以下ニ組ミ合シタルモノ $n-3$ 個等追ツテ斯ノ如ク $n-4, n-5; \ldots\ldots 2$ 1 個ナル故ニ總數ハ

$$r+(n-2)+(n-3)+\ldots\ldots+3+2+1=r+\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

第二項以下モ同樣ナル故ニ分子ノ次數ハ $r+\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$,

故ニ $r=n-1$ ナラバ分子ノ次數ハ

$$n-1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

ニシテ分母ト同次トナル, 依ツテ問 27 ニヨリ分子ハ分母ト同ジ因數ニ或定數ヲ乘シタルモノニ等シキヲ知ル, 而シテ同類項ノ係數ヲ比較シテ其定數ハ 1 ニ等シキヲ知ル。

$r<n-1$ ナラバ分子ハ分母ヨリ低次ナルモ而モ交代式ナル故ニ問 27 ニヨリ分母ト同ジ因數ヲ有セザルベカラズコレガタメニハ分子ハ 0 ナラザルベカラズ從ツテ所

題ノ式ハ此場合ニハ 0 ニ等シ。

最後ニ $r=n$ ナルトキハ分子ハ分母ヨリ一次高シ從ツテ分母ト同ジ因數ノ外ニ尚 $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ ニツキテ一次ノ因數ヲ有セザルベカラズ而シテ其因數ハ基本定理 IV ニヨリ $a_1\ a_2 \ldots\ldots a_n$ ノ對稱式ナルヲ要ス依ツテ其因數ヲ

$$L(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n)$$

ト假定シ同類項ノ係數ヲ比較スルコトニ由ツテ $L=1$ ナルヲ知ル從ツテ此場合ニハ所題ノ式ハ $a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n$ ニ等シ。

37. $\boldsymbol{a}$ ト $\boldsymbol{b}$ トヲ交換スルモ

$$a+\frac{bc-a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

ノ値ガ不變ナラバ a ト c トヲ交換スルモ亦此式ノ値ハ不變ニシテコノトキ若シ $a+b+c=1$ ナラバ其不變ノ値ハ 0 ニ等シキコトヲ証セヨ。但シ a, b, c ハ總テ不等ナリトス。

〔解〕 題意ニヨリ

$$a+\frac{bc-a^2}{a^2+b^2+c^2}=b+\frac{ac-b^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\therefore\quad (a-b)(a^2+b^2+c^2-a-b-c)=0$$

然ルニ　$a \neq b$,　$\therefore\ a^2+b^2+c^2=a+b+c$,

次ニ a ト c トヲ交換スレバ

$$c+\frac{ba-c^2}{a^2+b^2+c^2}=c+\frac{ab-c^2}{a+b+c}=\frac{ac+bc+ab}{a+b+c}$$

$$=a+\frac{bc-a^2}{a+b+c}=a+\frac{bc-a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

即チ a ト b トヲ交換シテ不變ナラバ a ト c トヲ交換スルモ亦不變ナルヲ知ル

次ニ a ト b トヲ交換シテ不變ニシテ且ツ $a+b+c=1$ ナラバ上ノ關係式ヨリ

$a^2+b^2+c^2=1$　又　$(a+b+c)^2=1$,　$\therefore\ ab+bc+ca=0$

$$\therefore\quad a+\frac{bc-a^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{ac+bc+ab}{a+b+c}=0,$$

38. $\boldsymbol{a+b+c=0}$ **ナラバ**

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}+\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{bc(b-c)+ac(c-a)+ab(a-b)}{abc}$

分子ハ a, b, c ノ三次ノ同次交代式ナル故ニ $L(a-b)(b-c)(c-a)$ トシテ a^2b ノ係數ヲ比較スレバ $L=-1$ 又

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=\frac{a(a-b)(c-a)+b(b-c)(a-b)+c(c-a)(b-c)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

コノ分子ハ a, b, c ノ三次ノ同次對稱式ナル故ニ

$$L(a^3+b^3+c^3)+M\{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\}+Nabc$$

トオキ a^3, a^2b, abc ノ係數ヲ比較シテ $L=-1, M=1, N=-3$ ヲ得、從ツテ所題ノ式ノ左邊ハ

$$\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\times\frac{-a^3-b^3-c^3+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)-3abc}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

$$=\frac{a^3+b^3+c^3-a^2(b+c)-b^2(c+a)-c^2(a+b)+3abc}{abc}$$

然ルニ　$a+b+c=0$　$\therefore\ b+c=-a,\ c+a=-b,\ a+b=-c$

故ニ上ノ分子ハ $2(a^3+b^3+c^3)+3abc$ ニ等シ

又 $a+b+c=0$

$\therefore\ (a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)+6abc=0$

$\therefore\ -2(a^3+b^3+c^3)+6abc=0$　　$\therefore\ 2(a^3+b^3+c^3)+3abc=9abc$

故ニ所題ノ式ノ左邊ハ $\dfrac{9abc}{abc}=9$ ニ等シ。

39. $\boldsymbol{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}}$ **ナルトキ** $\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^{2n+1}=\dfrac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}}$ **ナルコトヲ証セヨ。但シ n ハ正ノ整數トス。**

〔解〕 假設ニヨリ

$$(bc+ca+ab)(a+b+c)=abc$$

$$\therefore \quad a^2(b+c)+a(b^2+c^2+2bc)+b^2c+bc^2=0$$

$$\therefore \quad (b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}=0$$

$$\therefore \quad (b+c)(a+b)(a+c)=0$$

$$\therefore \quad b=-c, \ \text{or} \ a=-b, \ \text{or} \ a=-c$$

$b=-c$ トスレバ $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0,\qquad b^{2n+1}+c^{2n+1}=0,$

故ニ所題ノ式ノ兩邊ハ $\left(\frac{1}{a}\right)^{2n+1}=\frac{1}{a^{2n+1}}$ トナリテ成立ス $a=-b$, $a=-c$ ナルトキモ同様ナリ。

40. x, y, z ガ不等ニシテ

$$x^3+y^3-m(x^2+y^2)=y^3+z^3-m(y^2+z^2)=z^3+x^3-m(z^2+x^2)$$

ナルトキハ此等各式ハ何レモ $2xyz$ ニ等シク且ツ $x+y+z=m$ ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $x^3+y^3-m(x^2+y^2)=y^3+z^3-m(y^2+z^2)$

$\therefore \ x^3-z^3-m(x^2-z^2)=0 \qquad \therefore \ (x-z)\{x^2+xz+z^2-m(x+z)\}=0$

x ハ z ニ等シカラザル故ニ

$$x^2+xz+z^2-m(x+z)=0 \qquad (1)$$

同様ニ
$$z^2+zy+y^2-m(z+y)=0 \qquad (2)$$

(1) ヨリ (2) ヲ引ケバ

$$x^2+xz-y^2-yz-m(x-y)=0$$

$$\therefore \quad (x-y)\{x+y+z-m\}=0$$

x ハ y ニ等シカラザルガ故ニ

$$x+y+z=m$$

從ツテ (1) ヨリ

$$x^2+xz+z^2-(x+y+z)(x+z)=0$$

$$\therefore \quad xy+xz+yz=0$$

$$\therefore \quad x^3+y^3-m(x^2+y^2)=x^3+y^3-(x+y+z)(x^2+y^2)$$

$$=-(x^2y+x^2z+xy^2+y^2z)=-x(xy+xz)-y(xy+yz)$$

$$=-x(-yz)-y(-xz)=2xyz,$$

41. $ax+by+cz=0,\qquad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ ナルトキ

$$ax^3+by^3+cz^3+(a+b+c)(x+y)(y+z)(z+x)=0$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 假設ノ二式ヨリ a, b, c ニ比例スルモノヲ求ムレバ

$$\frac{a}{\frac{y}{z}-\frac{z}{y}}=\frac{b}{\frac{z}{x}-\frac{x}{z}}=\frac{c}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}},$$

コノ比ノ値ヲ k トスレバ

$$k=\frac{a+b+c}{\frac{y}{z}-\frac{z}{y}+\frac{z}{x}-\frac{x}{z}+\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}=\frac{ax^3+by^3+cz^3}{x^3\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{y}\right)+y^3\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{z}\right)+z^3\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)}$$

$$\therefore \quad \frac{ax^3+by^3+cz^3}{a+b+c}=\frac{x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)}{x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)}$$

右邊ノ分母ハ x, y, z ノ交代式ニシテ分子ハ x^2, y^2, z^2 ノ交代式ナリ

$$\therefore \quad \frac{ax^3+by^3+cz^3}{a+b+c}=\frac{-(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=-(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\therefore \quad ax^3+by^3+cz^3+(a+b+c)(x+y)(y+z)(z+x)=0,$$

42. $x^2=y^2+z^2+2ayz,\qquad y^2=z^2+x^2+2bzx,\qquad z^2=x^2+y^2+2cxy$ ナルトキハ

$$\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}$$ ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 假設ノ第一式ヨリ

$(x^2-y^2-z^2)^2=4a^2y^2z^2 \qquad \therefore \ (x^2-y^2-z^2)^2-4y^2z^2=4(a^2-1)y^2z^2,$

$$\therefore \quad \frac{a^2-1}{x^2}=\frac{(x^2-y^2-z^2)^2-4y^2z^2}{4x^2y^2z^2}=\frac{x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2x^2z^2}{4x^2y^2z^2}$$

同様ニ
$$\frac{b^2-1}{y^2}=\frac{c^2-1}{z^2}=\frac{x^4+y^4+z^4-2x^2y-2y^2z^2-2x^2z^2}{4x^2y^2z^2}$$

$$\therefore\quad \frac{a^2-1}{x^2}=\frac{b^2-1}{y^2}=\frac{c^2-1}{z^2},$$

43. $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$ **ガ調和級數ヲナストキハ**

$$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\ldots\ldots+a_{n-1}a_n=(n-1)a_1a_n$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$ ハ調和級數ヲナス故ニ $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots\ldots \frac{1}{a_n}$ ハ等差級數ヲナス、

故ニ其公差ヲ d トスレバ

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}=\ldots\ldots=\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}=d$$

即チ $d=\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}=\frac{a_3-a_2}{a_2a_3}=\ldots\ldots=\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}a_n}$

然ルニ $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}-(n-1)d \quad \therefore\quad d=\frac{a_n-a_1}{(n-1)a_1a_n}$

$$\therefore\quad \frac{a_2-a_1}{a_1a_2}=\frac{a_3-a_2}{a_2a_3}=\ldots\ldots=\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}a_n}=\frac{a_n-a_1}{(n-1)a_1a_n}$$

$$=\frac{(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots\ldots+(a_n-a_{n-1})}{a_1a_2+a_2a_3+\ldots\ldots+a_{n-1}a_n}$$

$$=\frac{a_n-a_1}{a_1a_2+a_2a_3+\ldots\ldots+a_{n-1}a_n}$$

$$\therefore\quad a_1a_2+a_2a_3+\ldots\ldots+a_{n-1}a_n=(n-1)a_1a_n,$$

44. 二ツノ式ノ平方ノ和ヨリナル若干ノ因數ノ積ハ又二ツノ式ノ平方ノ和ニ等シキコトヲ証セヨ。

〔解〕 a, b, c, d ヲ任意ノ式トスレバ

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

即チ二ツノ式ノ平方ノ和ヨリナル二ツノ因數ノ積ハ又二ツノ式ノ平方ノ和ニ等シ

從ツテ $e, f, \ldots\ldots h, k$ ヲ他ノ任意ノ式トスレバ

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)=(A^2+B^2)(e^2+f^2)=(Ae+Bf)^2+(Af-Be)^2,$

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ldots\ldots(h^2+k^2)=(P^2+Q^2)(h^2+k^2)=(Ph+Qk)^2+(Pk-Qh)^2,$

即チ二ツノ式ノ平方ノ和ヨリナル任意ノ數ノ因數ノ積ハ常ニ又二ツノ式ノ平方ノ和トナル。

45. 次ノ等式ヲ証セヨ。

$$a_1+(1-a_1)a_2+(1-a_1)(1-a_2)a_3+\ldots\ldots+(1-a_1)(1-a_2)\ldots\ldots(1-a_{n-1})a_n$$
$$=1-(1-a_1)(1-a_2)\ldots\ldots(1-a_n)$$

〔解〕 $a_1=1-(1-a_1)$

兩邊ニ $(1-a_1)a_2$ ヲ加フレバ

$\therefore\quad a_1+(1-a_1)a_2=1-(1-a_1)(1-a_2)$

再ビ兩邊ニ $(1-a_1)(1-a_2)a_3$ ヲ加フレバ

$a_1+(1-a_1)a_2+(1-a_1)(1-a_2)a_3=1-(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)$

以下同様ニシテ一般ニ

$a_1+(1-a_1)a_2+(1-a_1)(1-a_2)a_3+\ldots\ldots+(1-a_1)(1-a_2)\ldots\ldots(1-a_{n-1})a_n$
$=1-(1-a_1)(1-a_2)\ldots\ldots(1-a_n)$

ナルヲ知ル。

46. 5 ハ素數ニシテ 1^4+4 ニ等シ 5 ノ外ニ或整數ノ四乘ニ 4 ヲ加ヘタルモノニ等シキ素數アルカ否カヲ吟味セヨ。

〔解〕 P ヲ素數, x ヲ或整數トシ

$$P=x^4+4$$

ト假定スレバ

$$P=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

P ハ素數ナル故ニ

$x^2+2x+2=1 \qquad (1)$

或ハ $x^2-2x+2=1 \qquad (2)$

ナラザルベカラズ,

(1) ヨリ $x=-1 \qquad \therefore\quad P=5,$

(2) ヨリ $x=1 \qquad \therefore\quad P=5,$

故ニ 5 ノ外ニ斯ノ如キ素數ナシ。

47. **任意ノ連續二整數間ニハ次ノ二ツノ數列ノ何レカニ屬スル只一ツノ數ガ常ニ存在スルコトヲ証セヨ。　但シ X ハ任意ノ正ノ無理數ニシテ Y ハ其逆數ナリ。**

$$1+X,\quad 2(1+X),\quad 3(1+X),\dots\dots$$

$$1+Y,\quad 2(1+Y),\quad 3(1+Y),\dots\dots$$

〔解〕 X, Y ガ共ニ無理數ナル故ニ二數列ノ各數ハ從テ又無理數ナリ今任意ノ正ノ整數ヲ N トスレバ N ヨリ小ニシテ第一數列ニ屬スル數ノ個數ハ $\frac{N}{1+X}$ ノ整數部分ニ等シク同樣ニ N ヨリ小ニシテ第二數列ニ屬スル數ノ個數ハ $\frac{N}{1+Y}$ ノ整數部分ニ等シ，然ルニ

$$\frac{N}{1+X}+\frac{N}{1+Y}=\frac{N}{1+X}+\frac{NX}{1+X}=N,$$

即チ $\frac{N}{1+X}$ ト $\frac{N}{1+Y}$ トノ和ハ整數ナル故ニ各ノ分數部分ノ和ハ 1 ニ等シク從ツテ各ノ整數部分ノ和ハ $N-1$ ニ等シ、故ニ所題ノ二數列ノ各數ノ中 N ヨリ小ナルモノノ個數ハ $N-1$ ニ等シ、同樣ニ兩數列ノ各數ノ中 $N+1$ ヨリ小ナルモノ、個數ハ N ニ等シ從ツテ $N, N+1$ 間ニ兩數列ノ何レカニ屬スル只一ツノ數ガ介在セザルベカラズ、即チ任意ノ連續セル二ツノ整數間ニハ兩數列中ノ何レカ只一ツノ數ガ常ニ存在ス。

48. **$x^4+5x^3-10x+5$ ハ整數ヲ係數トスル因數ニ分解シ得ザルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 今若シ整數ヲ係數トスル一次或ハ三次ノ因數ヲ有スト假定セバ

$$x^4+5x^3-10x+5=(x+a)(x^3+b_1x^2+b_2x+b_3)$$
$$=x^4+(a+b_1)x^3+(ab_1+b_2)x^2+(ab_2+b_3)x+ab_3$$

但シ a, b_1, b_2, b_3 ヲ整數トス

然ルトキハ

$a+b_1=5$ (1),　$ab_1+b_2=0$ (2)　$ab_2+b_3=-10$ (3),　$ab_3=5$ (4)

(4) ヨリ 5 ハ素數ナル故ニ a, b_3 ノ何レカ一方ガ 5 ニシテ他ガ 1 ナラザルベカラズ今 $b_3=5, a=1$ トスレバ (3) ヨリ b_2 ガ 5 ノ倍數トナリ從ツテ (2) ヨリ b_1 モ

5 ノ倍數トナリ從ツテ (1) ヨリ a ガ又 5 ノ倍數トナリ假定ニ反ス

若シ $a=5, b_3=1$ トスレバ (3) ヨリ b_2 ハ分數トナル，故ニ所題ノ四次式ハ整數係數ノ一次或ハ三次ノ因數ヲ有セズ

次ニ二次ノ因數ヲ有スト假定スレバ

$$x^4+5x^3-10x+5=(x^2+a_1x+a_2)(x^2+b_1x+b_2)$$
$$=x^4+(a_1+b_1)x^3+(a_2+a_1b_1+b_2)x^2+(a_1b_2+a_2b_1)x+a_2b_2$$

但シ a_1, a_2, b_1, b_2 ハ整數ナリ。

然ルトキハ

$a_1+b_1=5,$　$a_2+a_1b_1+b_2=0,$　$a_1b_2+a_2b_1=-10,$　$a_2b_2=5,$

依リテ前ノ場合ト同樣ニ最後ノ式ヨリ考ヘテ斯ル分解ノ不可能ナルヲ知ル、即チ所題ノ式ハ整數係數ノ因數ニ分解スルコト能ハズ。

49. **次ノ恒等式ガ成立スルトキ $a_0\ a_1\ a_2\dots\dots a_n$ ハ等差級數ヲナシ且ツ $A+B+C+D=0$ ナルコトヲ証セヨ。**

$$\frac{A+Bx+Cx^{n+1}+Dx^{n+2}}{1-2x+x^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots\dots+a_nx^n,$$

〔解〕 所題ノ恒等式ノ分母ヲ去レバ

$$A+Bx+Cx^{n+1}+Dx^{n+2}=(1-2x+x^2)(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots\dots+a_nx^n)$$
$$=a_0+(a_1-2a_0)x+(a_2-2a_1+a_0)x^2+(a_3-2a_2+a_1)x^3+\dots\dots$$
$$+(a_n-2a_{n-1}+a_{n-2})x^n+(-2a_n+a_{n-1})x^{n+1}+a_nx^{n+2}$$

兩邊ノ各次ノ係數ヲ相等シトオケバ

$a_0=A,$　$a_1-2a_0=B,$　$\therefore\ a_1=2A+B=a_0+(A+B)$

$a_2-2a_1+a_0=0$　$\therefore\ a_2=2a_1-a_0=3A+2B=a_1+(A+B)$

$a_3-2a_2+a_1=0$　$\therefore\ a_3=2a_2-a_1=4A+3B=a_2+(A+B)$

一般ニ　$a_r-2a_{r-1}+a_{r-2}=0$　$\therefore\ a_r=2a_{r-1}-a_{r-2}=a_{r-1}+(A+B),$

故ニ　$a_0, a_1, a_2,\dots\dots a_n$ ハ初項 A, 公差 $A+B$ ナル等差級數ヲナス。

故ニ　$a_{n-1}=A+(n-1)(A+B),$　$a_n=A+n(A+B),$

然ルニ $C=-2a_n+a_{n-1}$ $\qquad D=a_n=A+n(A+B)$

$$\therefore \quad C=-2A-2n(A+B)+A+(n-1)(A+B)=-A-(n+1)(A+B)$$

$$=-D-(A+B)$$

$$\therefore \quad A+B+C+D=0,$$

50. 次ノ方程式ヲ滿足セシムル $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n$ ノ實數値ハ只一組ニ限ルコトヲ證セヨ。

$$x_1^2+x_2^2+\ldots\ldots+x_n^2-(x_1x_2+x_2x_3+\ldots\ldots+x_{n-1}x_n+x_n)+\frac{n}{2(n+1)}=0$$

〔解〕 所題ノ方程式ハ次ノ如ク書キ直スコトヲ得、

$$\left(x_1-\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}\left(x_2-\frac{2}{3}x_3\right)^2+\ldots\ldots+\frac{i+1}{2i}\left(x_i-\frac{i}{i+1}x_{i+1}\right)^2$$

$$+\ldots\ldots+\frac{n}{2(n-1)}\left(x_{n-1}-\frac{n-1}{n}x_n\right)^2+\frac{n+1}{2n}\left(x_n-\frac{n}{n+1}\right)^2=0$$

故ニ $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n$ ガ實數ナルトキ此方程式ヲ滿足セシムル $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ ノ値ハ

$$x_1=\frac{1}{2}x_2, \quad x_2=\frac{2}{3}x_3, \ldots\ldots, x_i=\frac{i}{i+1}x_{i+1}$$

$$\ldots\ldots x_{n-1}=\frac{n-1}{n}x_n, \quad x_n=\frac{n}{n+1}$$

ニ限ル即チ

$$x_n=\frac{n}{n+1}, \quad x_{n-1}=\frac{n-1}{n+1}, \quad x_{n-2}=\frac{n-2}{n+1}, \quad \ldots\ldots, x_i=\frac{i}{n+1}, \quad \ldots\ldots x_1=\frac{1}{n+1}$$

ニ限ル即チ只一組アルノミ。

51. 方程式 $y^2=1+x+x^2+x^3+x^4$ ヲ滿足セシムル x, y ノ整數値ハ

$x=-1,\ y=\pm1;\quad x=0,\ y=\pm1;\quad x=3,\ y=\pm1$ ニ限ルコトヲ證セヨ。

〔解〕 所題ノ方程式ヲ變形スレバ

$$\left\{x^2+\frac{x}{2}+1\right\}^2=y^2+\frac{5}{4}x^2, \qquad (1)$$

$$\left\{x^2+\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right\}^2=y^2-\frac{5-2\sqrt{5}}{4}\left(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$\therefore \quad x^2+\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\leqq|y|\leqq x^2+\frac{x}{2}+1$$

$$\therefore \quad |y|=x^2+\frac{x+a}{2} \qquad 0<a\leqq2,$$

ナラザルベカラズ然ルニ x, y ガ整數ナル故ニ x ガ偶數ナルトキハ $a=2$

$$\therefore \quad y^2=\left(x^2+\frac{x+2}{2}\right)^2$$

故ニ (1) ヨリ $x=0$, 從ツテ $y=\pm1$,

x ガ奇數ナルトキハ $a=1$,

$$\therefore \quad y^2=\left(x^2+\frac{x+1}{2}\right)^2, \qquad (2)$$

然ルニ (1) ヨリ

$$y^2=\left(x^2+\frac{x+1}{2}\right)^2-\frac{(x-3\ (x+1)}{4}$$

$$\therefore \quad x=-1 \text{ or } 3,$$

$x=-1$ トスレバ (2) ヨリ $y=\pm1$, $\qquad x=3$ トスレバ $y=\pm11$,

即チ所題ノ方程式ヲ滿足セシムル x, y ノ整數値ハ上ノ六組ニ限ル。

52. x ノ或整式ガ完全平方ナルトキハ其平方根ハ始メノ r 項ヲ求ムレバ次ノ r 項ハ割リ算ニヨリテ求メ得ルコトヲ證セヨ。

〔解〕 完全平方ナル x ノ整式ヲ P^2 トシ P ノ次數ヲ n トシ、P ノ始メノ r 項ヲ Q, 其以下ヲ R トスレバ Q ハ x ニツキ n 次ニシテ R ハ多クトモ $n-r$ 次ナリ、而シテ $P=Q+R$ $\qquad \therefore\ P^2=Q^2+2QR+R^2$

$$\therefore \quad \frac{P^2-Q^2}{2Q}=R+\frac{R^2}{2Q},$$

R ハ x ニツキ多クトモ $n-r$ 次ナル故ニ R^2 ハ多クトモ $2(n-r)$ 次 $2Q$ ハ n 次, 故ニ $\dfrac{R^2}{2Q}$ ハ多クトモ $2(n-r)-n=n-2r$ 次ナリ故ニ左邊ニ於ケル x ノ $(n-r)$ 次ヨリ $(n-2r+1)$ 次マデノ項ハ R ノソレト一致ス從ツテ左邊ノ割リ算ヲ實施スルコトニ由ツテ得ベキ x ノ $(n-r)$ 次ヨリ $(n-2r+1)$ 次マデノ項ハ即チ R ノソ

等ノ項ナリ即チ P ノ始メノ r 項 Q ヲ知レバ P^2-Q^2 ヲ $2Q$ ニテ割ルコトニヨツテ P ノ Q ニ續ク r 項ヲ求ムルコトヲ得。

53. 或整數ノ平方根ガ $2n-1$ 桁ナルトキ其始メノ n 桁ヲ知ルトキハ殘ル $n-1$ 桁ハ割リ算ニヨリテ求メ得ベキコトヲ証セヨ。

〔解〕 平方根ガ $2n-1$ 桁ナル如キ整數ヲ N トシ其平方根ノ始メノ n 個ノ數字ニ $n-1$ 個ノ 0 ヲ附シタル整數ヲ p トシ殘ル $n-1$ 個ノ數字ヨリナル整數ヲ q トスレバ

$$\sqrt{N}=p+q \qquad \therefore \quad N=p^2+2pq+q^2$$

$$\therefore \quad \frac{N-p^2}{2p}=q+\frac{q^2}{2p},$$

然ルニ $\qquad 2p\geqq 2.10^{2n-2}, \qquad q^2<10^{2n-2}$

$$\therefore \quad \frac{q^2}{2p}<1,$$

依ツテ $N-p^2$ ヲ $2p$ ニテ割リタルトキノ整數部分ハ即チ q ナリ即チ $2n-1$ 個ノ數字ヨリナル平方根ノ始メノ n 個ノ數字 p ヲ知レバ殘ル $n-1$ 個ノ數字 q ハ上ノ如キ割リ算ニ由ツテ求ムルコトヲ得。

54. 平方根ガ $2n-1$ 桁ヨリ多キ整數ニツキテ前問ノ割リ算ヲ施シテ得タル $n-1$ 個ノ數字ハ平方根ノ一部分トナリ得ルカ否カヲ吟味セヨ。

〔解〕 與ヘラレタル整數 N ノ平方根ノ數字ノ數ヲ m トシ m ヲ $2n-1$ ヨリ大ナリトス今 N ノ平方根ノ始メノ n 個ノ數字ニ $m-n$ 個ノ 0 ヲ付シタル數ヲ p トシ次ノ $n-1$ 個ノ數字ニ $m-2n+1$ 個ノ 0 ヲ付シタル數ヲ q トシ殘ル $m-2n+1$ 個ノ數字ヨリナル數ヲ r トスレバ

$$N=(p+q+r)^2 \qquad \therefore \quad \frac{N-p^2}{2p}=q+\frac{q^2+r^2+2qr}{2p}+r,$$

然ルニ $\qquad p\geqq 10^{m-1} \qquad \therefore \quad 2p>10^{m-1}$

$$q<10^{m-n} \qquad \therefore \quad q^2<10^{2m-2n}$$

$$r<10^{m-2n+1} \qquad \therefore \quad r^2<10^{2m-4n+2}$$

$$qr<10^{2m-3n+1} \qquad \therefore \quad 2qr<10^{2m-3n+2}$$

故ニ $n>2$ ナラバ

$$q^2+r^2+2qr<2.10^{2m-2n}$$

$$\therefore \quad \frac{q^2+r^2+2qr}{2p}<2.10^{m-2n+1}$$

$$\therefore \quad \frac{q^2+r^2+2qr}{2p}+r<3.10^{m-2n+1}$$

故ニ今 $\quad Q=\dfrac{q^2+r^2+2qr}{2p}+r$ トオケバ次ノ三ツノ場合生ズ

i, $\quad 3.10^{m-2n+1}>Q\geqq 2.10^{m-2n+1}$

ii, $\quad 2.10^{m-2n+1}>Q\geqq 10^{m-2n+1}$

iii, $\quad 10^{m-2n+1}>Q$

q ハ $n-1$ 個ノ數字ニ $m-2n+1$ 個ノ 0 ヲ付シタル數ナル故ニ (i) ニ於テハ $N-p^2$ ヲ $2p$ ニテ割リタルトキノ始メヨリ $n-2$ 個ノ數字ハ N ノ平方根ノ數字ト一致シ次ノ一個ハ N ノ平方根ノ數字ヨリ 2 ダケ大トナリ (ii) ニ於テハ始メヨリ $n-2$ 個ノ數字ハ N ノ平方根ノ數字ト一致シ次ノ一個ハ 1 ダケ大トナリ (iii) ニ於テハ $n-1$ 個全部ガ N ノ平方根ノ數字ト一致スルコトヲ知ル。

第二章　不等式

基本定理 I. 不等式ノ兩邊ニ正或ハ負ノ同ジ數ヲ加ヘ或ハ引クモ不等號ノ向キハ變ラズ。

II. 不等式ノ兩邊ニ正ノ同ジ數ヲ掛ケ或ハ割ルモ不等號ノ向キハ變ラズ。負ノ同ジ數ヲ掛ケ或ハ割レバ不等號ノ向キハ變ズ。

III. $a>b,\ c>d$ ナルトキハ $a+c>b+d,\ a-d>b-c$

又 $a>b>o,\ c>d>o$ ナルトキハ $ac>bd$.

$ac>bd$.

IV. $a>b>o$ ナルトキハ $\frac{1}{a}<\frac{1}{b},\ a^n>b^n\ \ \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$

但シ n ハ正ノ整數ニシテ $\sqrt[n]{a},\ \sqrt[n]{b}$ ハ正ノ實數ヲ表ハスモノトス。

V. n 個ノ正ノ數ノ相加平均ハ其相乘平均ヨリ小ナラズ，凡テノ數ガ相等シキトキニノミ此二ツノ平均ハ相等シクナル。

〔注意〕 不等式ヲ取扱フ場合ニハ文字ハ皆實數ヲ表ハスモノトス。

演習問題

1. $3x-\frac{x+2}{4}<\frac{2x+3}{5}$ ヲ解ケ。

〔解〕 兩邊ニ 20 ヲ乘ズレバ基本定理 II ニヨリ

$$60x-5x-10<8x+12$$

兩邊ニ $10-8x$ ヲ加フレバ基本定理 I ニヨリ

$$60x-5x-8x<12+10 \qquad \therefore\ 47x<22$$

故ニ基本定理 II ニヨリ

$$x<\frac{22}{47}$$

2. $6x+\frac{5}{7}>4x+7,\ 8x+3<4x+50$ ニ適合スル x ノ正ノ整數ノ値ヲ求メヨ。

〔解〕 $6x+\frac{5}{7}>4x+7$ ヨリ前同ト同樣ニ $42x+5>28x+49$

$$\therefore\ 14x>44 \qquad \therefore\ x>\frac{44}{14}$$

又　$8x+3<4x+50$ ヨリ $4x<47 \qquad \therefore\ x<\frac{47}{4}$

故ニ兩不等式ヲ滿足セシムル x ノ値ハ

$$\frac{44}{14}<x<\frac{47}{4} \quad 即チ \quad 3\frac{2}{14}<x<11\frac{3}{4}$$

依ツテ題意ニ適スル x ノ値ハ 4, 5, 6......10, 11 ナリ。

3. $5x+3>2x^2$ ヲ解ケ。

〔解〕 所題ノ不等式ヨリ　$2x^2-5x-3<0 \qquad \therefore\ (2x+1)(x-3)<0$

$$\therefore\ -\frac{1}{2}<x<3.$$

4. $\frac{4x^2-20x+18}{x^2-5x+4}>3$ ヲ解ケ。

〔解〕 基本定理 I ニヨリ

$$\frac{4x^2-20x+18}{x^2-5x+4}-3>0 \qquad \therefore\ \frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+4}>0 \qquad \therefore\ \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-4)}>0.$$

依ツテ今 (i) $x<1$, (ii) $1<x<2$, (iii) $2<x<3$, (iv) $3<x<4$ (v) $4<x$ ナル五ツノ場合ヲ考ヘルニ (i) ノ場合ニハ上ノ分數ノ分子分母ノ四ツノ因數ハ皆負ナル故ニ分數ハ正トナリ不等式ニ適シ (ii) ノ場合ニハ一ツハ正ニシテ殘ル三ツハ負トナル故ニ分數ハ負トナリ不等式ニ適セズ同樣ニ (iii) 及ビ (v) ノ場合ハ不等式ニ適シ (iv) ノ場合ハ適セズ、依ツテ所題ノ不等式ヲ滿足セシムル x ノ値ハ

$$x<1, \quad 2<x<3, \quad 4<x$$

5. $1+x-x^3-x^4>0$ ヲ解ケ。

〔解〕 $1+x-x^3-x^4=(1+x)(1-x)(1+x+x^2)$ ニシテ $1+x+x^2$ ハ x ノ如何ニ拘ラズ常ニ正ナル故ニ所題ノ不等式ハ基本定理 II ニシテ

$$(1+x)(1-x)>0$$

ト等値ナリ、依ツテ $-1<x<1$,

6. $\dfrac{2}{7(x-2)}>\dfrac{1}{4(x-1)}+\dfrac{x+9}{28(x^2+3)}$ ヲ解ケ。

〔解〕 移項シテ通分スレバ

$$\frac{28x}{28(x-2)(x-1)(x^2+3)}>0 \quad 即チ \quad \frac{x}{(x-2)(x-1)(x^2+3)}>0$$

x^2+3 ハ常ニ正ナル故ニ

$$\frac{x}{(x-2)(x-1)}>0$$

故ニ今 (i) $x<0$, (ii) $0<x<1$, (iii) $1<x<2$ (iv) $2<x$ ナル四ツノ場合ヲ考フルニ (i) ニ於テハ分母、分子ノ三ツノ因數ガ皆負トナル故ニ分數ハ負トナリ所題ノ不等式ニ適セズ (ii) ニ於テハ分子ハ正、分母ノ兩因數ハ負トナル故ニ分數ハ正トナリ所題ノ不等式ニ適ス、同樣ニ (iii) ハ適セズシテ (iv) ハ適合ス、依ツテ所要ノ値ハ

$$0<x<1 \quad 及ビ \quad 2<x$$

7. 次ノ二ツノ不等式ヲ同時ニ滿足セシムル x ノ値ノ限界ヲ求メヨ。

$$3x^2-8x-3<0 \qquad 8x^2+2x-3<0,$$

〔解〕 $3x^2-8x-3=(3x+1)(x-3)<0$ 　故ニ第一ノ不等式ヲ滿足セシムル x ノ値ノ

限界ハ　$-\dfrac{1}{3}<x<3$

又　$8x^2+2x-3=(4x+3)(2x-1)<0$

故ニ第二ノ不等式ヲ滿足セシムル x ノ値ノ限界ハ

$$-\frac{3}{4}<x<\frac{1}{2}.$$

故ニ双方ヲ同時ニ滿足セシムル x ノ値ハ上ノ兩限界ニ共通セル値即チ

$$-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2} \quad ナリ。$$

8. 次ノ方程式ト不等式トヲ同時ニ滿足セシムル x ノ値ヲ求メヨ。

$$x^2+x-6=0, \qquad x^2+3x-4>0,$$

〔解〕 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0$

故ニ方程式ヲ滿足セシムル x ノ値ハ -3 及ビ 2

又、　$x^2+3x-4=(x+4)(x-1)>0$

故ニ不等式ヲ滿足セシムル x ノ値ハ $x<-4$ 或ハ $x>1$,

故ニ双方ヲ滿足セシムル値ハ $x=2$ ナリ。

9. 次ノ方程式ト不等式トヲ同時ニ滿足セシムル x, y ノ値ヲ求メヨ。

$$7x+4y=168, \qquad 5x+3y>121,$$

〔解〕 方程式ヨリ　$y=\dfrac{168-7x}{4}$

不等式ニ代入スレバ

$$5x+\frac{3(168-7x)}{4}>121$$

分母ヲ去リ整頓スレバ　$x<20$,

同樣ニ方程式ヨリ x ヲ y ニテ表ハシ不等式ニ代入シテ解ケバ

$$y>7,$$

即チ所題ノ方程式ト不等式トヲ同時ニ成立セシムルタメニハ $x<20$, $y>7$ ナラザルベカラズ、サレド其逆ハ眞ナラズ依ツテ所要ノ値ハ $x<20$, $7x+4y=168$ ヨリ決定スル x, y ノ値或ハ $y>7$, $7x+4y=168$ ヨリ決定スル x, y ノ値ヲ以テセザルベカラズ

10. m ガ如何ナル値ノトキ二次方程式 $x^2-(2m+3)x+m^2-1=0$ ハ正根ノミヲ有スルカ。

〔解〕 二根ヲ α, β トシ $\alpha>0, \beta>0$ トスレバ

$$\alpha+\beta=2m+3>0, \qquad \alpha\beta=m^2-1>0,$$

又 α, β ハ實數ナラザルベカラザルガ故ニ

$$(2m+3)^2-4(m^2-1)=12m+13\geqq 0,$$

以上三ツノ不等式ガ同時ニ成立スルトキ α, β ハ共ニ正ナルコト明カナリ

依ツテ此三ツノ不等式ヲ解ケバ

$$(1),\ m>-\frac{3}{2}, \qquad (2),\ m<-1 \ \ or \ \ m>1, \qquad (3),\ m\geqq -\frac{13}{12}$$

(1), (2), (3) ヲ同時ニ滿足セシムル m ノ値ハ

$$-\frac{13}{12}\leqq m<-1 \quad or \quad 1<m,$$

コレ即チ所要ノ m ノ値ナリ。

11. **m ガ如何ナル値ノトキ x ノ總テノ正ノ値ニ對シテ $(5-m)x^2-6x+m+5$ ガ常ニ正トナルカ。**

〔解〕 先ヅ $5-m=0$ 即チ $m=5$ ナラバ所題ノ式ハ $10-6x$ トナリ $x\geqq\frac{5}{3}$ ナルトキ 0 或ハ負トナル故ニ $m=5$ ナル能ハズ

次ニ $5-m<0$ ナラバ x ノ非常ニ大ナル正ノ値ニ對シ所題ノ式ハ負トナル

(第十章, 問 16 參照)

故ニ $5<m$ ナル能ハズ

次ニ $5-m>0$ ナラバ判別式

$$3^2-(5-m)(m+5)=m^2-16<0$$

ナラバ x ノ正負如何ニ拘ラズ所題ノ式ハ正トナル即チ

$$-4<m<4$$

ナルトキ x ノ正負如何ニ係ラズ所題ノ式ハ正トナル

次ニ $5-m>0$ ニシテ判別式ガ負ナラザレバ, 題意ニ適スルタメニハ

$$(5-m)x^2-6x+m+5=0$$

ノ二ツノ實根ハ何レモ正トナルヲ得ズ何ントナレバ若シ正トナレバ x ノ其値ノトキ所題ノ式ハ 0 トナリテ正トナラザレバナリ　故ニ二根ハ 0 又ハ負ナラザルベカラズ從ツテ其積ハ正又ハ 0, 和ハ負又ハ 0 ナラザルベカラズ　即チ

$$\frac{m+5}{5-m}\geqq 0, \qquad \frac{6}{5-m}\leqq 0,$$

然ルニ $5-m>0$ ナル故ニ上ノ第二式ハ成立セズ

依ツテ所要ノ m ノ値ハ $-4<m<4$ ナリ。

12. **次ノ二ツノ不等式ヲ同時ニ滿足セシムル x, y ノ値ノ限界ヲ定メヨ。**

$$\frac{3y-2x+6}{3}>\frac{4y-3x}{5}, \qquad \frac{x-y}{4}-\frac{x}{6}>2+y$$

〔解〕 兩不等式ヲ整頓スレバ

$$-x+3y>-30 \qquad x-15y>24$$

基本定理 III ニヨリ邊々相加フレバ　$-12y>-6$　$\therefore\ y<\frac{1}{2},$

又前式ヲ 5 倍シテ後式ト相加フレバ　$-4x>-126$　$\therefore\ x<\frac{63}{2}$

即チ所題ノ二ツノ不等式ヲ同時ニ滿足セシムルタメニハ $x<\frac{63}{2}$, $y<\frac{1}{2}$ ナルヲ要ス, 是即チ所要ノ限界ナリ, サレド此逆ハ必ズシモ眞ナラザル故ニ此限界内ノ x 或ハ y ノ任意ノ値ヲ定ムレバ其値ニ對スル y 或ハ x ノ限界ハ初ノ二ツノ不等式ヨリ決定セザルベカラズ。　即チ

$$x<\frac{63}{2}, \qquad \frac{x-24}{15}>y>\frac{x-30}{3}$$

或ハ　$y<\frac{1}{2}$,　$3y+30>x>15y+24.$

13. **次ノ二ツノ不等式ヲ同時ニ滿足セシムル x, y ノ値ノ限界ヲ定メヨ。**

$$6x-7y>10, \qquad 3x+5y<9.$$

〔解〕 第一式ヨリ $-6x+7y<-10$, 第二式ノ 2 倍ト邊々相加ヘテ

$$17y<8, \qquad \therefore\ y<\frac{8}{17},$$

次ニ y ヲ消去スルコト能ハズ, サレド兩不等式ヨリ

$$x>\frac{7y+10}{6}, \qquad x<\frac{9-5y}{3} \qquad \therefore\ \frac{7y+10}{6}<x<\frac{9-5y}{3}$$

故ニ y ノ上ノ限界内ノ任意ノ値ニ對スル x ノ限界ハ此不等式ヨリ定ムルコトヲ得依ツテ所要ノ限界ハ次ノ如シ

$$y<\frac{8}{17}, \qquad \frac{7y+10}{6}<x<\frac{9-5y}{3}.$$

14. **次ノ兩不等式ヲ同時ニ滿足セシムル x, y ノ値ノ限界ヲ定メヨ。**

$$2x-3y>5, \qquad x-y>3,$$

〔解〕 所題ノ不等式ニアツテハ x, y 双方トモ消去スルコト能ハズ, 然レドモ兩不等式ヨリ

$$x>\frac{3y+5}{2}, \qquad x>y+3.$$

故ニ　$\frac{3y+5}{2}>y+3$　即チ　$y>1$　ナラバ　$x>\frac{3y+5}{2}$

$$\frac{3y+5}{2}=y+3 \quad \text{即チ} \quad y=1 \quad \text{ナラバ} \quad x>\frac{3y+5}{2}=y+3=4$$

$$\frac{3y+5}{2}<y+3 \quad \text{即チ} \quad y<1 \quad \text{ナラバ} \quad x>y+3$$

コレニ由ツテ y ノ任意ノ値ニ對應スル x ノ値ノ限界ヲ定ムルコトヲ得。

15. **次ノ一ツノ方程式ト二ツノ不等式トヲ同時ニ滿足セシムル x, y ノ値ノ限界ヲ定メヨ。**

$$3x+2y=6, \qquad x^2+y^2>4, \qquad xy<1.$$

〔解〕 方程式ヨリ

$$y=\frac{6-3x}{2}$$

不等式ニ代入シテ整頓スレバ

$$13x^2-36x+20>0, \qquad 3x^2-6x+2>0$$

前式ヨリ　$x<\dfrac{10}{13}$　or　$x>2,$

後式ヨリ　$x<\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$　or　$x>\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

然ルニ　$\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}<\dfrac{10}{13}<\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}<2$

故ニ上ノ双方ニ共通スル限界ハ

$$x<\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \quad \text{及ビ} \quad x>2$$

コレ即チ所要ノ限界ニシテ之ニ對スル y ノ値ハ次ノ如シ

$$y=\frac{6-3x}{2}$$

16. **二次方程式 $x^2+2pqx+p^2+q^2-1=0$ ノ二根ガ實數ニシテ絶對値ガ 1 ヨリ小ナルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求メヨ。**

〔解〕 實根ヲ有スルタメニハ判別式ガ 0 又ハ正ナラザルベカラズ即チ

$$(pq)^2-(p^2+q^2-1)=(p^2-1)(q^2-1)\geqq 0$$

$$\therefore \quad p^2\geqq 1, \quad q^2\geqq 1 \quad \text{或ハ} \quad p^2\leqq 1, \quad q^2\leqq 1 \qquad (1)$$

次ニ二根ヲ α, β トスレバ

$$x^2+2pqx+p^2+q^2-1=(x-\alpha)(x-\beta)$$

故ニ　$-1<\alpha, \quad -1<\beta$ ナルタメニハ

$$1-2pq+p^2+q^2-1>0, \qquad -2<\alpha+\beta=-2pq$$

又 $1>\alpha, \ 1>\beta$ ナルタメニハ

$$1+2pq+p^2+q^2-1>0, \qquad 2>\alpha+\beta=-2pq$$

即チ α, β ノ絶對値ガ 1 ヨリ小ナルタメニハ

$$(p-q)^2>0 \quad (p+q)^2>0, \quad -1<pq<1 \qquad (2)$$

ナルヲ要ス、然ルニ (1) ノ最初ノ關係ハ (2) ノ最後ト矛盾スル故ニ之ヲ捨ツ、又 $p\neq q$ ナラバ (2) ノ初メノ二ツノ不等式ハ成立ス、依ツテ所要ノ必要條件ハ

$$p\neq q, \quad p^2\leqq 1, \quad q^2\leqq 1, \qquad (3)$$

ナリ逆ニ (3) ガ成立スルトキ (1), (2) ガ成立スル故ニ所題ノ方程式ハ絶對値ガ 1 ヨリ小ナル二ツノ實根ヲ有スルコト明カナリ，依ツテ所要ノ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ (3) ナリ。

17. **次ノ一ツノ不等式ヲ滿足セシムル x, y ノ限界ヲ求メヨ。**

$$2x^2-5xy+3y^2<0$$

〔解〕 $y=0$ ナルトキハ所題ノ不等式ハ成立セズ故ニ $y\neq 0$ トシ y^2 ニテ兩邊ヲ割レバ

$$2\frac{x^2}{y^2}-5\frac{x}{y}+3<0 \qquad \therefore \left(2\frac{x}{y}-3\right)\left(\frac{x}{y}-1\right)<0$$

$$\therefore \qquad 1<\frac{x}{y}<\frac{3}{2}$$

コレ即チ所要ノ限界ニシテ所題ノ不等式ハ x, y ノ比ノ値ニヨリテ定マリ x, y 各自ノ値ニ關係セズ。

18. **$2x^2+2y^2-5xy+3(x-y)+1<0$ ヲ解ケ。**

〔解〕 所題ノ不等式ヨリ

$$(2x-y)(x-2y)+3(x-y)+1<0$$

$$\therefore \quad (2x-y+1)(x-2y+1)<0$$

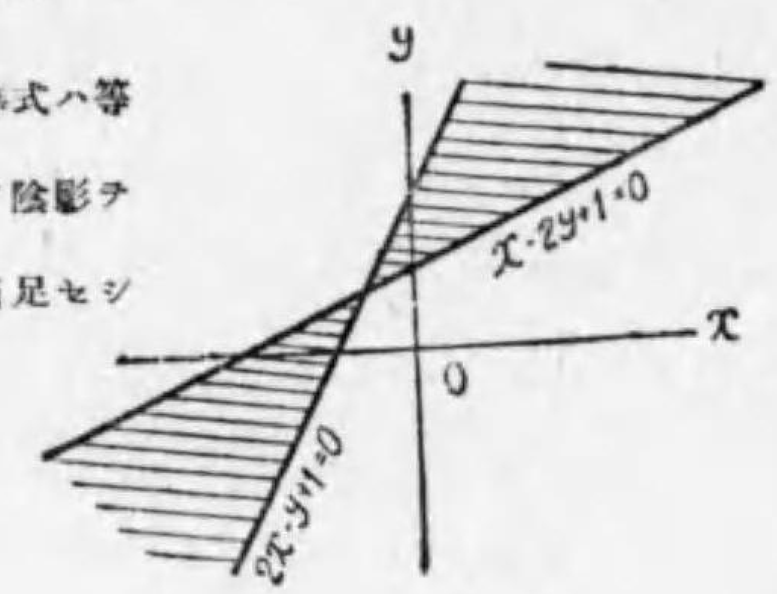
$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l}2x-y+1>0\\ x-2y+1<0\end{array}\right\}(1) \quad \text{或ハ} \quad \left.\begin{array}{l}2x-y+1<0\\ x-2y+1>0\end{array}\right\}(2)$$

(1) ヨリ $x>-\frac{1}{3}$, $y>\frac{1}{3}$,

(2) ヨリ $x<-\frac{1}{3}$, $y<\frac{1}{3}$

即チ $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{3}$ 以外ノ x 或ハ y ノ任意ノ値＝對應スル y 或ハ x ノ値ノ限界ハ問12ト同樣＝所題ノ不等式ヨリ定マル

$x=-\frac{1}{3}$ $y=\frac{1}{3}$ ノトキハ所題ノ不等式ハ等式トナル尙之ヲ幾何學的＝イヘバ圖ノ陰影ヲ附シタル部分ガ即チ所題ノ不等式ヲ滿足セシムル者ナリ　　（第十章參照）



19. $\boldsymbol{ax+b>cx+d}$ **ヲ解ケ。**

〔解〕 兩邊ヨリ $b+cx$ ヲ引ケバ $(a-c)x>d-b$,

$\therefore$ $a>c$ ナラバ $x>\frac{d-b}{a-c}$,

$a<c$ 〃 $x<\frac{d-b}{a-c}$,

$a=c$ ＝シテ $d<b$ ナラバ x ノ値ノ如何＝拘ラズ所題ノ不等式ハ成立シ $a=c$ ニシテ $d=b$ 又ハ $d>b$ ナラバ x ノ値ノ如何＝拘ラズ所題ノ不等式ハ成立セズ。

20. $\boldsymbol{x+\frac{1}{ax}>1+\frac{1}{a}}$ **ヲ解ケ, 但シ $\boldsymbol{a>0}$ トス**

〔解〕 移項シテ通分スレバ

$$\frac{ax^2-(a+1)x+1}{ax}>0 \quad 即チ \quad \frac{(x-1)\left(x-\frac{1}{a}\right)}{x}>0$$

而シテ $0<a<1$ ナラバ $1<\frac{1}{a}$, $a=1$ ナラバ $\frac{1}{a}=1$, $1<a$ ナラバ $\frac{1}{a}<1$ ナル故＝

$0<a<1$ ナラバ $0<x<1$, $\frac{1}{a}<x$, $a=1$ ナラバ $0<x$

$1<a$ ナラバ $0<x<\frac{1}{a}$, $1<x$ ガ所要ノ値ナリ。

21. $\boldsymbol{ax^2+bx+c>0}$ **ヲ解ケ。但シ $\boldsymbol{a\neq 0}$ トス。**

〔解〕 (i) $a>0$, $b^2-4ac>0$ ナルトキ $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ノ中大ナル方ヲ α トシ小ナル方ヲ β トスレバ所題ノ不等式ハ $a(x-\alpha)(x-\beta)>0$ トナル故＝所要ノ値ハ

$x<\beta$ 及ビ $\alpha<x$

(ii) $a>0$, $b^2-4ac=0$ ナルトキハ所題ノ不等式ハ $a(x-\alpha)^2>0$ トナル故＝ x ノ α 以外ノ總テノ値(實數)＝テ成立ス

(iii) $a>0$, $b^2-4ac<0$ ナルトキハ所題ノ不等式ハ

$a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}>0$ トナルガ故＝ x ノ總テノ値(實數)＝對シテ成立ス。

(iv) $a<0$, $b^2-4ac>0$ ナルトキハ (i) ノ場合ト同樣＝所要ノ値ハ $\beta<x<\alpha$.

(v) $a<0$, $b^2-4ac=0$ ナルトキハ (ii) ノ場合ト同樣＝ x ノ値(實數)ノ如何＝拘ラズ所題ノ不等式ハ成立セズ。

(vi) $a<0$, $b^2-4ac<0$ ナルトキハ (iii) ノ場合ト同樣＝ x ノ値(實數)ノ如何＝拘ラズ所題ノ不等式ハ成立セズ。

22. $\boldsymbol{\frac{b^2}{(a-b)(x-b)}>\frac{a^2}{(a-b)(x-a)}+1}$ **ヲ解ケ。**

〔解〕 移項シテ通分スレバ

$$\frac{-x^2(a-b)}{(a-b)(x-a)(x-b)}>0 \quad 即チ \quad \frac{x^2}{(x-a)(x-b)}<0$$

$x\neq 0$ ナルトキ x^2 ハ常＝正ナル故＝ $(x-a)(x-b)<0$ ナルヲ要ス, 依ツテ

$a>b$ ナラバ $b<x<a$,

$a<b$ 〃 $a<x<b$,

即チ ab 間ノ 0 ヲ除ク總テノ値＝ヨツテ所題ノ不等式ハ成立ス, 但シ題意＝ヨリテ $a\neq b$ ナルコト勿論ナリ。

23. $\boldsymbol{x}$ **ノ値ノ如何ニ拘ラズ常ニ**

$$\frac{(a+1)x^2+(a-2)x+a+1}{x^2+x+1}>b$$

ナルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ $a>b$ ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 x ノ如何ニ拘ラズ $x^2+x+1>0$ ナル故ニ所題ノ不等式ガ成立スルタメニハ

$$(a+1)x^2+(a-2)x+a+1>b(x^2+x+1)$$

即チ $$(a-b+1)x^2+(a-b-2)x+a-b+1>0$$

ナルヲ要ス, 此不等式ガ x ノ如何ニ拘ラズ成立スルタメニハ

$$a-b+1>0,\qquad (a-b-2)^2-4(a-b+1)^2<0$$

ナルヲ要ス, (問.21), 此第二ノ不等式ヲ變形スレバ

$$3(a-b)(a-b+4)>0 \qquad \therefore\ a-b>0 \text{ 或ハ } a-b<-4$$

然ルニ $a-b<-4$ ハ第一ノ不等式 $a-b+1>0$ ト矛盾ス, 依ツテ $a-b>0$ ナルヲ要ス逆ニ $a-b>0$ ナルトキハ $a-b+1>0$, $(a-b-2)^2-4(a-b+1)^2<0$ トナル故ニ所題ノ不等式ハ x ノ値ノ如何ニ拘ラズ常ニ成立ス即チ $a-b>0$ ハ所要ノ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ナリ。

24. $\sqrt{x^2+2}>2x^2$ **ヲ解ケ。**

〔解〕 兩邊ハ常ニ正ナル故ニ基本定理 IV ニヨリ二乘スレバ

$$x^2+2>4x^4 \qquad \therefore\ 4x^4-x^2-2<0 \qquad \therefore\ 4\left(x^2+\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)\left(x^2-\frac{\sqrt{33}+1}{8}\right)<0$$

然ルニ $4\left(x^2+\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)$ ハ常ニ正ナル故ニ基本定理 II ニヨリ上ノ不等式ハ

$$x^2-\frac{\sqrt{33}+1}{8}<0$$

ト等値ナリ. 故ニ所要ノ値ハ

$$-\sqrt{\frac{\sqrt{33}+1}{8}}<x<\sqrt{\frac{\sqrt{33}+1}{8}},$$

25. $\sqrt{3-x}>x-2$ **ヲ解ケ。**

〔解〕 實數ト虚數トハ相比較シ得ザルガ故ニ所題ノ不等式ガ成立スルタメニハ根號內ハ正或ハ 0 ナルヲ要ス, 即チ $x\leqq 3$ ナルヲ要ス, 然ルニ $x=3$ ハ適合セザルコト明カナル故ニ結局 $x<3$ ナルヲ要ス, 又 $x\leqq 2$ ナルトキハ左邊ハ正, 右邊ハ負又ハ 0 トナリテ所題ノ不等式ハ成立ス, 依ツテ今 $2<x<3$ ナル範圍ヲ考フルニ此範圍內ニテハ兩邊ハ正ナル故ニ基本定理 IV ニヨリ二乘スレバ

$$3-x>(x-2)^2, \qquad \therefore\ x^2-3x+1<0$$

$$\therefore\ \left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)<0, \qquad \therefore\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

然ルニ $$\frac{3-\sqrt{5}}{2}<2, \qquad 2<\frac{3+\sqrt{5}}{2}<3$$

故ニ $2<x<3$ ナル範圍內ニテ所題ノ不等式ヲ滿足セシムル値ハ

$$2<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

ナリ從ツテ所要ノ x ノ値ノ總テハ次ノ如シ

$$x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

26. $3\sqrt{6-x-x^2}+2(2x+1)>0$ **ヲ解ケ。**

〔解〕 $6-x-x^2=-(x+3)(x-2)$ ナル故ニ $\sqrt{6-x-x^2}$ ガ實數ナルタメニハ $-3\leqq x\leqq 2$ ナルヲ要ス, 然ルニ $x=-3$ ナルトキハ所題ノ不等式ハ明カニ成立セズ又 $-\frac{1}{2}\leqq x\leqq 2$ ナルトキハ左邊ノ兩項ハ何レモ正或ハ 0 トナリテ不等式ハ成立ス, 依ツテ吟味ヲ要スルハ $-3<x<-\frac{1}{2}$ ナル範圍ナリ然ルニ此範圍內ノ値ニ對シテ

$$3\sqrt{6-x-x^2}>-2(2x+1)$$

ノ兩邊ハ共ニ正トナル故ニ基本定理 IV ニヨリ二乘スレバ

$$9(6-x-x^2)>4(2x+1)^2 \qquad \therefore\ -25(x^2+x-2)>0$$

$$\therefore\ (x+2)(x-1)<0 \qquad \therefore\ -2<x<1$$

即チ $-3<x<-\frac{1}{2}$ ナル範圍內ニテ所題ノ不等式ヲ滿足セシムル x ノ値ハ $-2<x<-\frac{1}{2}$ ナリ, 依ツテ所題ノ不等式ヲ滿足セシムル x ノ總テノ値ハ

$$-2<x\leqq 2$$

27. $\dfrac{x+1}{x-4}\sqrt{\dfrac{x+3}{1-x}}<0$ **ヲ解ケ。**

〔解〕 $\frac{x+3}{1-x}>0$ ナルヲ要スル故ニ所題ノ不等式ヲ滿足セシムル x ノ値ハ

$$-3<x<1$$

ナル範圍內ニアルヲ要ス然ルニ $-1<x<1$ ナルトキ左邊ノ第一因數ハ負トナル故

ニ所題ノ不等式ハ成立シ $-3<x<-1$ ナルトキハ左邊ハ正トナル故ニ成立セズ依ツテ所要ノ x ノ値ハ $-1<x<1$ ナリ

28. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}<3$ **ヲ解ケ。**

〔解〕 $2x+1\geqq 0,\ x+1\geqq 0$ ナルヲ要スル故ニ $-\frac{1}{2}\leqq x$

移項スレバ $\sqrt{2x+1}<\sqrt{x+1}+3$

兩邊ガ正ナル故ニ二乘スレバ

$$2x+1<x+1+9+6\sqrt{x+1} \qquad \therefore\ x-9<6\sqrt{x+1}$$

故ニ $-\frac{1}{2}\leqq x\leqq 9$ ナル場合ニハ所題ノ不等式ハ成立ス

$9<x$ ナル場合ヲ吟味スルタメニ上ノ不等式ノ兩邊ヲ二乘スレバ

$$(x-9)^2<36(x+1) \qquad \therefore\ x^2-54x+45<0$$

$\therefore\ (x-27-6\sqrt{19})(x-27+6\sqrt{19})<0 \qquad \therefore\ 27-6\sqrt{19}<x<27+6\sqrt{19}$

然ルニ $27-6\sqrt{19}<9<27+6\sqrt{19} \qquad \therefore\ 9<x<27+6\sqrt{19}$

依ツテ所要ノ x ノ總テノ値ハ

$$-\frac{1}{2}\leqq x<27+6\sqrt{19}$$

29. $\sqrt{a(a-2x)}>x-b$ **ヲ解ケ，但シ** a, b **ヲ正トス。**

〔解〕 $a>0$ ナル故ニ $a-2x\geqq 0$ 即チ $\frac{a}{2}\geqq x$ ナルヲ要ス，依ツテ

(i) $\frac{a}{2}<b$ ナル場合ニハ $x\leqq\frac{a}{2}$ ナルトキ右邊ハ負トナル故ニ所題ノ不等式ハ成立ス

(ii) $\frac{a}{2}=b$ ナル場合ニハ同樣ニ $x<\frac{a}{2}$ ナル總テノ値ニヨリテ所題ノ不等式ハ成立ス

(iii) $\frac{a}{2}>b$ ナル場合ニハ $x\leqq b$ ナル總テノ値ハ所題ノ不等式ヲ滿足セシメ

$x=\frac{a}{2}$ ハ滿足セシメズ，依ツテ

$b<x<\frac{a}{2}$ ナル範圍ヲ吟味セシニ此場合ニハ兩邊ハ正ナル故ニ二乘スレバ

$$a(a-2x)>(x-b)^2 \qquad \therefore\ x^2+2(a-b)x+b^2-a^2<0$$

$$\therefore\ \{x-(b-a+\sqrt{2a^2-2ab})\}\{x-(b-a-\sqrt{2a^2-2ab})\}<0$$

$$\therefore\ b-a-\sqrt{2a^2-2ab}<x<b-a+\sqrt{2a^2-2ab},$$

然ルニ $b-a-\sqrt{2a^2-2ab}<b$

又 $b-a+\sqrt{2a^2-2ab}=\frac{a}{2}-\left(\sqrt{a-b}-\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^2<\frac{a}{2}$

故ニ $b<x<b-a+\sqrt{2a^2-2ab}$ ハ所題ノ不等式ヲ滿足セシム，

而シテ $\frac{a}{2}=b$ ナルトキハ $b-a+\sqrt{2a^2-2ab}=\frac{a}{2}$ トナル故ニ結局所要ノ x ノ値ハ

$$\frac{a}{2}<b \text{ ナラバ } x\leqq\frac{a}{2},$$

$$\frac{a}{2}\geqq b \text{ ナラバ } x<b-a+\sqrt{2a^2-2ab}.$$

30. $\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}}>\dfrac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}}$ **ヲ解ケ，但シ** $a>b>0$ **トス。**

〔解〕 $a>b>0$ ナル故ニ $-a<-b<0$，依ツテ先ヅ (i) $x>-b$ ナル場合ヲ考フルニ此場合ニハ $x+b>0,\ x+a>0$ ナル故ニ兩邊ヲ二乘シ分母ヲ去レバ

$(x+a)^2(x^2+b^2)-(x+b)^2(x^2+a^2)>0 \qquad \therefore\ 2(a-b)x^3-2ab(a-b)x>0$

$2(a-b)>0 \qquad \therefore\ x^3-abx>0 \qquad \therefore\ x(x-\sqrt{ab})(x+\sqrt{ab})>0$

$$\therefore\ -\sqrt{ab}<x<0, \qquad \sqrt{ab}<x$$

然ルニ $a>b$ 故ニ $-\sqrt{ab}<-b$，故ニ $x>-b$ ナル範圍內ニテ所題ノ不等式ヲ滿足セシムル値ハ $-b<x<0$ 及ビ $\sqrt{ab}<x$ 次ニ (ii) $-a\leqq x\leqq -b$ ナル場合ヲ考フルニ此場合ニハ左邊ハ 0 或ハ正ニシテ右邊ハ負或ハ 0 ナル故ニ所題ノ不等式ハ成立ス，最後ニ (iii) $x<-a$ ナル場合ヲ考フルニ此場合ニハ兩邊ハ共ニ負ナル故ニ二乘スレバ不等號ノ向キハ變ルベシ即チ

$(x+a)^2(x^2+b^2)-(x+b)^2(x^2+a^2)<0 \qquad \therefore\ x(x-\sqrt{ab})(x+\sqrt{ab})<0$

$$\therefore\ x<-\sqrt{ab}, \qquad 0<x<\sqrt{ab},$$

然ルニ $-\sqrt{ab}>-a$ 故ニ $x<-a$ ナル範圍內ニテ所題ノ不等式ヲ滿足セシムル値ハ $x<-a$ ナリ

之ニ由ツテ所要ノ x ノ値ハ $\sqrt{ab}<x,\ -b<x<0,\ -a\leqq x\leqq -b,\ x<-a$

即チ $\sqrt{ab}<x$ 及ビ $x<0$ ナリ。

31. $\sqrt{\dfrac{3x+a}{x-a}}>a-1$ **ヲ解ケ。**

〔解〕 $\dfrac{3x+a}{x-a}>0$ ナルヲ要スル故ニ $a>0$ ナラバ $x<-\dfrac{a}{3}$ 及ビ $a<x$, $a<0$ ナラバ $x<a$ 及ビ $-\dfrac{a}{3}<x$ ナルヲ要ス。

(i) $a>0$,　　$0<a\leqq 1$ ナラバ $x<-\dfrac{a}{3}$ 或ハ $a<x$ ナルトキ左邊ハ正右邊ハ 0 又ハ負ナル故ニ所題ノ不等式ヲ滿足セシムル x ノ値ハ $x<-\dfrac{a}{3}$, 及ビ $a<x$ ナリ, $1<a$ ナラバ兩邊ハ正ナル故ニ二乘シテ通分スレバ

$$\frac{(a^2-2a-2)x-(a^2-2a+2)a}{x-a}<0$$

故ニ $a^2-2a-2>0$ 即チ $1+\sqrt{3}<a$ ナラバ

$$\frac{x-\dfrac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a}{x-a}<0$$

然ルニコノ場合ニ $\dfrac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a=a+\dfrac{4a}{a^2-2a-2}>a$

$$\therefore \quad a<x<\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a,$$

コレ $1+\sqrt{3}<a$ ナル場合ノ所要ノ x ノ値ナリ

次ニ $a^2-2a-2<0$ 即チ $1<a<1+\sqrt{3}$ ナラバ

$$\frac{x-\dfrac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a}{x-a}>0$$

然ルニコノ場合ニ $\dfrac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a=a+\dfrac{4a}{a^2-2a-2}<a$

$$\therefore \quad x<\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a \quad 又ハ \quad a<x$$

又 $-\dfrac{a}{3}-\dfrac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a=-\dfrac{4a(a-1)^2}{3(a^2-2a-2)}>0$ $\quad\therefore\quad -\dfrac{a}{3}>\dfrac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a$

故ニ $1<a<1+\sqrt{3}$ ナル場合ノ所要ノ x ノ値ハ

$$x<\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2} \quad 及ビ \quad a<x$$

次ニ $a^2-2a-2=0$ 即チ $a=1+\sqrt{3}$ ナラバ

$$\frac{(a^2-2a+2)a}{x-a}>0 \quad 即チ \quad \frac{4a}{x-a}>0$$

故ニコノ場合ノ x ノ値ハ $a<x$ ナリ。

(ii) $a<0$,　　$x<a$ 及ビ $-\dfrac{a}{3}\leqq x$ ナルトキ所題ノ不等式ノ左邊ハ 0 或ハ正, 右邊ハ負ナル故ニ所要ノ x ノ値ハ $x<a$ 及ビ $-\dfrac{a}{3}\leqq x$ ナリ。

以上ノ結果ヲ要約スレバ次ノ如シ

$a>1+\sqrt{3}$	ナラバ	$a<x<\dfrac{(a^2-2a+2)a}{a^2-2a-2}$
$a=1+\sqrt{3}$	〃	$a<x$
$1<a<1+\sqrt{3}$	〃	$a<x$ 及ビ $x<\dfrac{(a^2-2a+2)a}{a^2-2a-2}$
$0<a\leqq 1$	〃	$a<x$ 及ビ $x<-\dfrac{a}{3}$
$a=0$	〃	x ノ如何ニ拘ラズ
$a<0$	〃	$a>x$ 及ビ $x\geqq -\dfrac{a}{3}$

32. **x ガ 0 ヨリ 1 マデ變ズルトキ不等式**

$$1-kx\leqq\frac{1}{\sqrt{1+x}}\leqq 1-lx$$

ガ常ニ成立スルヤウニ k, l ノ値ノ限界ヲ定メヨ。

〔解〕 $1-kx\leqq\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ $\quad\therefore\quad kx\geqq\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}\,(\sqrt{1+x}+1)}$

x ハ正ナル故ニ　　$k\geqq\dfrac{1}{1+x+\sqrt{1+x}}$

故ニ k ハ此右邊ノ分數ノ最大値ヨリ小ナルヲ得ズ, 然ルニ x ガ 0 ヨリ 1 マデ變ズルトキ其最大値ハ明カニ $x=0$ ノトキノ値 $\dfrac{1}{2}$ ナリ依ツテ　$k\geqq\dfrac{1}{2}$, コレ即チ k ノ限界ナリ。

同樣ニ $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\leqq 1-lx$ ヨリ $l\leqq\dfrac{1}{1+x+\sqrt{1+x}}$

從ツテ l ハ同ジ分數ノ最小値ヨリ大ナルヲ得ズ, 然ルニ其最小値ハ $x=1$ ノトキノ値 $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$ ナリ　依ツテ　$l\leqq\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$

コレ即チ l ノ限界ナリ。

33. **三ツノ無限等比級數** $A=1+r_1+r_1^2+r_1^3+\ldots\ldots+r_1^n+\ldots\ldots$

$$B=1+r_2+r_2^2+r_2^3+\ldots\ldots+r_2^n+\ldots\ldots$$

$$C=1+r_1r_2+(r_1r_2)^2+\ldots\ldots+(r_1r_2)^n+\ldots\ldots$$

ノ間ニ $AB=C$ ナル關係ガ成立スルタメニ r_1 及ビ r_2 ノ取リ得ベキ値ノ限界ヲ定メヨ。但シ $|r_1|<1,\ |r_2|<1$ トス。

〔解〕 $|r_1|<1,\ |r_2|<1$ ナル故ニ

$$A=\frac{1}{1-r_1},\qquad B=\frac{1}{1-r_2},\qquad C=\frac{1}{1-r_1r_2}.$$

故ニ $AB=C$ ナルタメニハ

$$\frac{1}{1-r_1}\times\frac{1}{1-r_2}=\frac{1}{1-r_1r_2}\qquad\therefore\quad \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=2$$

而シテ $|r_1|<1, |r_2|<1$ ナル故ニ r_1, r_2 ハ同符號ナル能ハズ, 又

$$\frac{1}{r_2}=2-\frac{1}{r_1}$$

ナル故ニ r_1 ガ -1 ヨリ 0 マデ連續的ニ增加スルトキ $\frac{1}{r_2}$ ハ 3 ヨリ $+\infty$ マデ連續的ニ增加ス從ツテコノトキ r_2 ハ $\frac{1}{3}$ ヨリ 0 マデ減少ス, 即チ $-1<r_1<0$ ナルトキ $0<r_2<\frac{1}{3}$, 次ニ r_1 ガ 0 ヨリ $\frac{1}{3}$ マデ連續的ニ增加スルトキ $\frac{1}{r_2}$ ハ $-\infty$ ヨリ -1 マデ連續的ニ增加シ從ツテ r_2 ハ 0 ヨリ -1 マデ減ズ、r_1 ガ $\frac{1}{3}$ ヨリ尙增加シテ $+1$ ニ達スルトキ $\frac{1}{r_2}$ ハ -1 ヨリ尙增加シテ $+1$ ニ達スル 故ニ r_2 ノ絕對値ハ 1 ヨリ大トナリテ題意ニ適セズ故ニ上ノ關係ヲ滿足セシムル r_1, r_2 ノ値ハ次ノ如シ

$$\begin{cases}-1<r_1<0,\\ 0<r_2<\frac{1}{3}\end{cases}\qquad\begin{cases}0<r_1<\frac{1}{3}\\ -1<r_2<0\end{cases}$$

即チ　　$AB=C$ ナルタメニハ結局

$$-1<r_1<\frac{1}{3},\qquad -1<r_2<\frac{1}{3}$$

ナルヲ要ス, コレ即チ所要ノ限界ナリ。

34. **次ノ方程式ガ根ヲ有スルタメニハ a ノ値ハ如何ナル範圍內ニアルヲ要スルカ。但シ a ハ實數ナリ。**

$$x=a+\sqrt{x^2+2(a+1)x+4a}\qquad(1)$$

〔解〕 (1) ヲ移項シテ二乘スレバ　$(x-a)^2=x^2+2(a+1)x+4a,$

即チ　　$2(2a+1)x=a(a-4),$

故ニ (1) ガ根ヲ有スルタメニハ　　$2a+1\neq0,$　　(2)

ナルヲ要ス然ルトキ其根ハ　　$x=\dfrac{a(a-4)}{2(2a+1)}$　　(3)

ナリ, a ハ實數ナル故ニ (3) ノ右邊モ亦實數ニシテ從ツテ此値ガ (1) ヲ滿足セシムルタメニハ　　$x-a=\dfrac{a(a-4)}{2(2a+1)}-a=\dfrac{-3a(a+2)}{2(2a+1)}\geqq0$　　(4)

ナラザルベカラズ逆ニ (2), (4) ガ成立スルトキハ (3) ハ (1) ヲ滿足セシムルコト明カナリ

(4) ヨリ次ノ四ツノ場合ヲ考フ

(i) $a\leqq-2,$　　(ii) $-2<a<-\frac{1}{2},\ \left(a\neq-\frac{1}{2}\right)$

(iii) $-\frac{1}{2}<a\leqq0,$　　(iv) $0<a,$

(i) ニ於テハ分母分子ハ共ニ負ナル故ニ (4) ハ成立ス

(ii) ニ於テハ分母ハ負, 分子ハ正ナル故ニ (4) ハ成立セズ

(iii) ニ於テハ分母, 分子ハ共ニ正ナル故ニ (4) ハ成立ス

(iv) ニ於テハ分母ハ正, 分子ハ負ナル故ニ (4) ハ成立セズ

故ニ所要ノ a ノ範圍ハ次ノ如シ

$$a\leqq-2,\qquad -\frac{1}{2}<a\leqq0.$$

35. **x ノ實數値ニ對シテ分數式 $\dfrac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}$ ガ總テノ實數値ヲ取リ得ルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求メヨ。但シ a, b, c ヲ實數トス。**

〔解〕 任意ノ實數ヲ k トシ　$\dfrac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}=k$

トオキ此方程式ガ實根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ムレバ可

ナリ分母ヲ去リ整頓スレバ　$(a-ck)x^2+b(1-k)x+c-ak=0$

之ガ實根ヲ有スルタメニハ判別式ガ正或ハ 0 ナルヲ要ス，即チ

$$b^2(1-k)^2-4(a-ck)(c-ak)\geqq 0$$

$$\therefore\quad (b^2-4ac)k^2+2(2a^2+2c^2-b^2)k+b^2-4ac\geqq 0, \qquad (1)$$

k ノ總テノ實數値ニ對シテ常ニ (1) ガ成立スルタメニハ

$$(2a^2+2c^2-b^2)^2-(b^2-4ac)^2\leqq 0 \qquad b^2-4ac\geqq 0$$

ナラザルベカラズ（問. 21），故ニ

$b^2-4ac>0$　ナラバ　$|2a^2+2c^2-b^2|\leqq b^2-4ac$

$b^2-4ac=0$　ナラバ　$2a^2+2c^2-b^2=0,$

コレ即チ所要ノ條件ナリ。

36. $\boldsymbol{a^2+b^2+c^2\geqq bc+ca+ab}$　**ヲ証明セヨ。**

〔解〕 $2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

a, b, c ハ實數ナル故ニ此右邊ハ一般ニ正ニシテ $a=b=c$ ノトキニノミ 0 ニ等シ

$$\therefore\quad a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\geqq 0$$

$$\therefore\quad a^2+b^2+c^2\geqq bc+ca+ab$$

37. $\boldsymbol{a, b, c}$ **ガ悉クハ相等シカラズトスレバ**

$$\boldsymbol{a^4+b^4+c^4>abc(a+b+c)}$$

ナルコトヲ証明セヨ。

〔解〕 a^2, b^2, c^2 ハ悉クハ相等シカラザルガ故ニ前問ニヨリ

$$a^4+b^4+c^4>b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2$$

然ルニ　$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab>0$　$\therefore\ a^2+b^2>2ab$　$\therefore\ c^2(a^2+b^2)>2abc^2$

同様ニ　$a^2(b^2+c^2)>2a^2bc,$　$b^2(c^2+a^2)>2ab^2c$

$$\therefore\quad 2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)>2abc(a+b+c)$$

$$\therefore\quad b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2>abc(a+b+c)$$

$$\therefore\quad a^4+b^4+c^4>abc(a+b+c)$$

38. $\boldsymbol{x\neq 1}$　**ナルトキ**　$\boldsymbol{3(1+x^2+x^4)>(1+x+x^2)^2}$　**ナルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 $3(1+x^2+x^4)-(1+x+x^2)^2=2(1+x^2+x^4)-2(x+x^2+x^3)$

$$=2(1-x)(1-x^3)=2(1-x)^2(1+x+x^2)$$

然ルニ　$x\neq 1$　ナルトキ　$(1-x)^2>0,$

又 x ノ如何ニ係ラズ　$1+x+x^2>0$

$\therefore\ 3(1+x^2+x^4)-(1+x+x^2)^2>0,$　$\therefore\ 3(1+x^2+x^4)>(1+x+x^2)^2,$

39. $\boldsymbol{a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2=1}$ **ナラバ** $\boldsymbol{ax+by+cz}$ **ノ絶對値ハ 1 ヲ超過シ得ザルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 ヨク知ラレタル公式ニヨリ

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2,$$

依ツテ此左邊ハ正或ハ 0 ナリ

故ニ假設ニヨリ

$1-(ax+by+cz)^2\geqq 0$　　$\therefore\ (ax+by+cz)^2\leqq 1$

$$\therefore\quad -1\leqq ax+by+cz\leqq 1$$

40. $\boldsymbol{2x^3}$ **ト** $\boldsymbol{x-1}$ **トノ大小ヲ比較セヨ。**

〔解〕 $2x^3-(x-1)=2x^3-x+1$

$x=-1$ トオケバ此式ハ 0 トナル故ニ $x+1$ ナル因數ヲ有ス依ツテ割リ算ニヨリ

$$2x^3-(x-1)=(x+1)(2x^2-2x+1)=(x+1)\left\{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right\},$$

第二ノ因數ハ x ノ如何ニ拘ラズ常ニ正ナル故ニ

$x>-1$　ナラバ　$2x^3-(x-1)>0,$

故ニ此場合ニハ　$2x^3>x-1$

$x<-1$　ナラバ同様ニ　$2x^3<x-1$

$x=-1$　ナラバ　$2x^3=x-1.$

41. $\boldsymbol{a^2=b^2+c^2}$　**ニシテ**　$\boldsymbol{a, b, c}$ **ガ皆正ナルトキ** $\boldsymbol{n\geqq 2}$ **ナルニ從ヒテ** $\boldsymbol{a^n\geqq b^n+c^n}$ **ナルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 $a^2=b^2+c^2$　ニシテ　a, b, c ハ正ナル故ニ　　$a>b,$　$a>c,$

故ニ $n\geqq 2$ ナルニ從ツテ

$a^{n-2} \geqq b^{n-2}, \qquad a^{n-2} \geqq c^{n-2}$

故＝ $n \geqq 2$ ナル＝從ツテ

$$a^2b^2(a^{n-2}-b^{n-2})+a^2c^2(a^{n-2}-c^{n-2}) \geqq 0$$

即チ $a^n(b^2+c^2) \geqq a^2(b^n+c^n)$

即チ $a^n \geqq b^n+c^n$

42. $0<a<1$ ニシテ $\sqrt{1-a}<x<\sqrt{1-a^2}$ ナルトキ

$\dfrac{a^2}{2}<1-x<a$ ナルコトヲ證セヨ。

〔解〕 假設＝ヨリ $\sqrt{1-a}<x$ $\quad\therefore\ 1-a<x^2 \quad \therefore\ a>1-x^2$

又 $x<\sqrt{1-a^2} \quad \therefore\ x^2<1-a^2 \quad \therefore\ a^2<1-x^2 \quad \therefore\ |x|<1,$

而シテ $0<x, \quad \therefore\ 1-x^2>1-x, \quad \therefore\ a>1-x$

次＝ $\dfrac{1-x^2}{2}>\dfrac{a^2}{2}$ 　又 $1-x>\dfrac{1-x^2}{2}$ 何ントナレバ $x \neq 1$ ＝シテ且ツ

$1-x-\dfrac{1-x^2}{2}=\dfrac{1}{2}(1-x)^2$ ナレバナリ故＝ $\dfrac{a^2}{2}<1-x$

43. a, b, c, d ガ皆正ナルトキ

$a^2cd+b^2ad+c^2ab+d^2bc \geqq 4abcd$ ナルコトヲ證セヨ。

〔解〕 基本定理 V ＝ヨリ

$$\frac{a^2cd+b^2ad+c^2ab+d^2bc}{4} \geqq \sqrt[4]{(a^2cd)(b^2ad)(c^2ab)(d^2bc)}=abcd$$

$\therefore \quad a^2cd+b^2ad+c^2ab+d^2bc \geqq 4abcd$

44. 1 ヨリ $2n-1$ ニ至ル n 個ノ連續奇數ノ連乘積ハ n^n ヨリ小ナルコトヲ證セヨ 但シ $n>1$ トス。

〔解〕 基本定理 V ＝ヨリ a, b ガ相異ナル正數ナルトキ

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab} \qquad \therefore \left(\frac{a+b}{2}\right)^2>ab$$

故＝ $a=1, \quad b=2n-1$ トオケバ

$n^2>1\,(2n-1)$

同樣＝ $a=3, \ b=2n-3; \quad a=5, \ b=2n-5;$ 等トオケバ

$n^2 \geqq 3(2n-3), \qquad n^2>5(2n-5), \ldots\ldots$

$n^2 \geqq (2m-1)(2n-2m+1)\ldots\ldots, \qquad n^2>(2n-1)1$

邊々相乘ズ $\quad (n^2)^n>\{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)\}^2$

$\therefore \quad n^n>1.3.5\ldots\ldots(2n-1)$

45. a, b, c ガ正ナルトキ $\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{2}{b+c}+\dfrac{2}{c+a} \geqq \dfrac{9}{a+b+c}$ ナルコトヲ證セヨ。

〔解〕 基本定理 V ＝ヨリ

$$\frac{1}{3}\left\{\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\right\} \geqq \sqrt[3]{\frac{8}{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

同樣＝又

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3} \geqq \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

邊々相乘ズレバ

$$\frac{1}{3}\left\{\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\right\}\frac{2(a+b+c)}{3} \geqq 2$$

$$\therefore \ \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a} \geqq \frac{9}{a+b+c},$$

46. $x>0$ ナルトキ $1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{2n} \geqq (2n+1)x^n$ ナルコトヲ證セヨ。

〔解〕 基本定理 V ＝ヨリ

$$\frac{1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{2n}}{2n+1} \geqq (x.x^2.x^3\ldots\ldots x^{2n})^{\frac{1}{2n+1}}$$

然ル＝ $x.x^2.x^3\ldots\ldots x^{2n}=x^{1+2+\ldots\ldots+2n}=x^{n(2n+1)}$

$$\therefore \quad \frac{1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{2n}}{2n+1} \geqq x^n$$

$\therefore \quad 1+x+x^2\ldots\ldots+x^{2n} \geqq (2n+1)x^n$

47. $S=a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n$ ニシテ $a_1, a_2\ldots\ldots a_n$ ガ悉クハ相等シカラザル正數トスレバ

$$\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+\ldots\ldots+\frac{s}{s-a_n}>\frac{n^2}{n-1}$$

ナルコトヲ證セヨ。

〔解〕 $a_1\,a_2\ldots\ldots a_n$ ガ悉クハ相等シカラザル正數ナラバ

$$\frac{s}{s-a_1},\quad \frac{s}{s-a_2}\cdots\cdots\frac{s}{s-a_n}$$

モ亦悉クハ相等シカラザル正數ナルガ故ニ基本定理 V ニヨリ

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+\cdots\cdots+\frac{s}{s-a_n}\right\}>\frac{s}{\sqrt[n]{(s-a_1)(s-a_2)\cdots\cdots(s-a_n)}}$$

又 $$\frac{(s-a_1)+(s-a_2)+\cdots\cdots+(s-a_n)}{n}>\sqrt[n]{(s-a_1)(s-a_2)\cdots\cdots(s-a_n)}$$

而シテ $(s-a_1)+(s-a_2)+\cdots\cdots+(s-a_n)=ns-s=(n-1)s$

ナル故ニ上ノ兩式ヲ邊々相乘ズレバ

$$\frac{(n-1)}{n^2}\left\{\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+\cdots\cdots+\frac{s}{s-a_n}\right\}>1$$

$$\therefore\quad \frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+\cdots\cdots+\frac{s}{s-a_n}>\frac{n^2}{n-1},$$

48. $a_1, a_2\cdots\cdots a_n$ **ガ皆正ニシテ公差 0 ナラザル等差級數ヲナストキ**

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}>\frac{2n}{a_1+a_n}$$ **ナルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 $a_1, a_2,\cdots\cdots a_n$ ハ皆正ニシテ不等ナル故ニ基本定理 V ニヨリ

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)>\left(\frac{1}{a_1a_2\cdots\cdots a_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}>(a_1a_2\cdots\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

$a_1, a_2,\cdots\cdots a_n$ ハ等差級數ヲナス故ニ第二式ハ次ノ如クナル

$$\frac{a_1+a_n}{2}>(a_1a_2\cdots\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

此式ト第一式トヲ邊々相乘ズレバ

$$\frac{(a_1+a_n)}{2n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)>1$$

$$\therefore\quad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}>\frac{2n}{a_1+a_n}$$

49. $n>1$ **ナルトキ** $n!<\left\{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right\}^{\frac{n}{2}}$ **ナルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 基本定理 V ニヨリ

$$\frac{1}{n}(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)>(1^2.2^2\cdots\cdots n^2)^{\frac{1}{n}}$$

然ルニ $1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ （第六章基本定理 IV）

$$\therefore\quad \frac{(n+1)(2n+1)}{6}>(n!)^{\frac{2}{n}}$$

$$\therefore\quad \left\{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right\}^{\frac{n}{2}}>n!$$

50. n **ガ 1 ヨリ大ナル正ノ整數ナルトキ** $2^n>1+n\sqrt{2}^{\,n-1}$ **ナルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 基本定理 V ニヨリ

$$\frac{1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}}{n}>(1.2.2^2\cdots\cdots2^{n-1})^{\frac{1}{n}}$$

然ルニ $1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$

$$\therefore\quad \frac{2^n-1}{n}>2^{\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n}}=2^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\therefore\quad 2^n-1>n2^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\therefore\quad 2^n>1+n\sqrt{2}^{\,n-1}$$

51. $(abcd)^{\frac{1}{p+q+r+s}}$ **ハ** $a^{\frac{1}{p}},\ b^{\frac{1}{q}},\ c^{\frac{1}{r}},\ d^{\frac{1}{s}}$ **ノ中ノ最大ナルモノヨリ大ナラズシテ最小ナルモノヨリ小ナラザルコトヲ證セヨ。但シ文字ハ皆正數ヲ表ハスモノトス。**

〔解〕 $a^{\frac{1}{p}}, b^{\frac{1}{q}}, c^{\frac{1}{r}}, d^{\frac{1}{s}}$ 中ノ最大ノモノヲ $a^{\frac{1}{p}}$ トシ其値ヲ λ トスレバ

$$a=\lambda^p,\quad b\leqq\lambda^q,\quad c\leqq\lambda^r,\quad d\leqq\lambda^s$$

$$\therefore\quad abcd\leqq\lambda^{p+q+r+s}\qquad \therefore\quad (abcd)^{\frac{1}{p+q+r+s}}\leqq\lambda,$$

同様ニ $d^{\frac{1}{s}}$ ヲ最小ノモノトシ其値ヲ μ トスレバ

$$a\geqq\mu^p,\quad b\geqq\mu^q,\quad c\geqq\mu^r,\quad d=\mu^s,$$

$$\therefore\quad abcd\geqq\mu^{p+q+r+s}\qquad \therefore\quad (abcd)^{\frac{1}{p+q+r+s}}\geqq\mu,$$

即チ　$\mu \leqq (abcd)^{\frac{1}{p+q+r+s}} \leqq \lambda$

52. $b_1, b_2 \ldots\ldots b_n$ **ガ皆正ナルトキハ** $\dfrac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots\ldots+b_n}$

ハ $\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}, \ldots\ldots \dfrac{a_n}{b_n}$ **中ノ最大ノモノヨリ大ナラズ最小ノモノヨリ小ナラザルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 今 $\dfrac{a_1}{b_1}=k$ ヲ最大トスレバ $\dfrac{a_2}{b_2} \leqq k,\ \dfrac{a_3}{b_3} \leqq k, \ldots\ldots \dfrac{a_n}{b_n} \leqq k,$

$b_1, b_2, \ldots\ldots b_n$ ハ正ナル故ニ

$$a_1=kb_1,\quad a_2 \leqq kb_2\quad a_3 \leqq kb_3, \ldots\ldots a_n \leqq kb_n$$

$$\therefore\quad a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n \leqq k(b_1+b_2+\ldots\ldots+b_n)$$

$$\therefore\quad \frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots\ldots+b_n} \leqq k,$$

次ニ　$\dfrac{a_n}{b_n}=l$ ヲ最小トスレバ $\dfrac{a_1}{b_1} \geqq l,\ \dfrac{a_2}{b_2} \geqq l, \ldots\ldots \dfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \geqq l,$

$$\therefore\quad a_1 \geqq lb_1,\quad a_2 \geqq lb_2, \ldots\ldots a_{n-1} \geqq la_{n-1},\qquad a_n=la_n$$

$$\therefore\quad a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n \geqq l(b_1+b_2+\ldots\ldots+b_n)$$

$$\therefore\quad \frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots\ldots+b_n} \geqq l,$$

53. $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n;\ b_1, b_2, \ldots\ldots b_n$ **及ビ** $l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ **ガ　正ナルトキ**

$$\left\{\frac{l_1a_1{}^m+l_2a_2{}^m+\ldots\ldots+l_na_n{}^m}{l_1b_1{}^m+l_2b_2{}^m+\ldots\ldots+l_nb_n{}^m}\right\}^{\frac{1}{m}} \text{ 及ビ } \left\{\frac{a_1a_2\ldots\ldots a_n}{b_1b_2\ldots\ldots b_n}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

ハ $\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2} \ldots\ldots \dfrac{a^n}{b_n}$ **中ノ最大ノモノヨリ大ナラズ最小ノモノリ小ナラザルコトヲ証セヨ。　但シ** $m>0$ **トス。**

〔解〕 前問ノ如ク $\dfrac{a_1}{b_1}=k$ ヲ最大トスレバ

$$a_1=b_1k_1,\quad a_2 \leqq b_2k,\quad a_3 \leqq b_3k,\quad \ldots\ldots a_n \leqq b_nk, \qquad (A)$$

$a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ ハ皆正ナル故ニ

$$a_1{}^m=b_1{}^mk^m,\quad a_2{}^m \leqq b_2{}^mk^m,\quad \ldots\ldots a_n{}^m \leqq b_n{}^mk^m$$

$l_1, l_2 \ldots\ldots l_n$ ハ皆正ナル故ニ

$$l_1a_1{}^m=l_1b_1{}^mk^m,\qquad l_2a_2{}^m \leqq l_2b_2{}^mk^m,\qquad \ldots\ldots l_na_n{}^m \geqq l_nb_n{}^mk^m.$$

$$\therefore\quad l_1a_1{}^m+l_2a_2{}^m+\ldots\ldots+l_na_n{}^m \leqq k^m(l_1b_1+l_2b_2{}^m+\ldots\ldots+l_nb_n{}^m)$$

$$\therefore\quad \frac{l_1a_1{}^m+l_2a_2{}^m+\ldots\ldots+l_na_n{}^m}{l_1b_1{}^m+l_2b_2{}^m+\ldots\ldots+l_nb_n{}^m} \leqq k^m$$

$$\therefore\quad \left\{\frac{l_1a_1{}^m+l_2a_2{}^m+\ldots\ldots+l_na_n{}^m}{l_1b_1{}^m+l_2b_2{}^m+\ldots\ldots+l_nb_n{}^m}\right\}^{\frac{1}{m}} \leqq k,$$

次ニ　$\dfrac{a_n}{b_n}=l$ ヲ最小トスレバ上ト同様ニ

$$\left\{\frac{l_1a_1{}^m+l_2a_2{}^m+\ldots\ldots+l_na_n{}^m}{l_1b_1{}^m+l_2b_2{}^m+\ldots\ldots+l_nb_n{}^m}\right\}^{\frac{1}{m}} \geqq l.$$

次ニ (A) ノ各式ノ兩邊ハ皆正ナル故ニ邊々相乘スレバ

$$a_1a_2\ldots\ldots a_n \leqq (b_1b_2\ldots\ldots b_n)k^n$$

$$\therefore\quad \frac{a_1a_2\ldots\ldots a_n}{b_1b_2\ldots\ldots b_n} \leqq k^n \qquad \therefore\quad \left\{\frac{a_1a_2\ldots\ldots a_n}{b_1b_2\ldots\ldots b_n}\right\}^{\frac{1}{n}} \leqq k$$

同様ニ　$\left\{\dfrac{a_1a_2\ldots\ldots a_n}{b_1b_2\ldots\ldots b_n}\right\}^{\frac{1}{n}} \geqq l$

54. $a, b, c\ldots\ldots$ **ガ正ノ有理數ニシテ** $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ **ガ正ノ實數ナルトキ**

$$\left(\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots\ldots}{a+b+c\ldots\ldots}\right)^{a+b+c+\ldots\ldots} \geqq \alpha^a\beta^b\gamma^c\ldots\ldots$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $a, b, c\ldots\ldots$ ノ分母ノ最小公倍數ヲ m トスレバ $ma, mb, mc, \ldots\ldots$ ハ皆正ノ整數ナリ，故ニ基本定理 V ニヨリ

$$\frac{ma\alpha+mb\beta+mc\gamma+\ldots\ldots}{ma+mb+mc\ldots\ldots} \geqq (\alpha^{ma}\cdot\beta^{mb}\cdot\gamma^{mc}\ldots\ldots)^{\frac{1}{ma+mb+mc+\cdots}}$$

即　$\left(\dfrac{a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots\ldots}{a+b+c+\ldots\ldots}\right)^{a+b+c+\cdots} \geqq \alpha^a\cdot\beta^b\cdot\gamma^c\ldots\ldots$

55. $(n!)^3<n^n\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n}$　**ナルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 基本定理 V ニヨリ

$$\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+n^3}{n} > (n!)^{\frac{3}{n}}$$

然ル＝ $1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

∴ $\frac{n(n+1)^2}{4}>(n!)^{\frac{3}{n}}$

∴ $n^n\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}>(n!)^3$

56. $A=\frac{1.3.5\dots\dots(2n-1)}{2.4.6\dots\dots(2n)}$, $B=\frac{3.5.7\dots\dots(2n+1)}{2.4.6\dots\dots(2n)}$

トスレバ $A<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $B>\sqrt{n+1}$, **及ビ** $\frac{1}{2}<AB<1$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $n>0$ ナルトキ $\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n+1}$ ナルコト明カナリ

故＝ n ヲ 2, 4, 6, ……トスレバ

$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}<\frac{6}{7}$, …… $\frac{2n-1}{2n}<\frac{2n}{2n+1}$

∴ $\frac{1.3.5\dots\dots(2n-1)}{2.4.6\dots\dots(2n)}<\frac{2.4.6\dots\dots(2n)}{3.5.7\dots\dots(2n+1)}$ (1)

∴ $\left\{\frac{1.3.5\dots\dots(2n-1)}{2.4.6\dots\dots(2n)}\right\}^2<\frac{1}{2n+1}$ ∴ $A<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

次＝ $n>0$ ナルトキ $\frac{n+1}{n}>\frac{n+2}{n+1}$ ナルコト明カナリ

故＝ n ヲ 2, 4, 6…… トスレバ

$\frac{3}{2}>\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}>\frac{6}{5}$, …… $\frac{2n+1}{2n}>\frac{2n+2}{2n+1}$.

∴ $\frac{3.5.7\dots\dots(2n+1)}{2.4.6\dots\dots(2n)}>\frac{4.6.8\dots\dots(2n+2)}{3.5.7\dots\dots(2n+1)}$ (2)

∴ $\left\{\frac{3.5.7\dots\dots(2n+1)}{2.4.6\dots\dots(2n)}\right\}^2>\frac{2n+2}{2}$ ∴ $B>\sqrt{n+1}$.

次＝ $A=\frac{1.3.5\dots\dots(2n-1)}{2.4.6\dots\dots(2n)}$, 又 (2) ヨリ

$B>\frac{4.6.8\dots\dots(2n+2)}{3.5.7\dots\dots(2n+1)}$ 相乘スレバ

$AB>\frac{2n+2}{2(2n+1)}$ ∴ $AB>\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)$

∴ $AB>\frac{1}{2}$, 又 (1) ヨリ

$A<\frac{2.4.6\dots\dots(2n)}{3.5.7\dots(2n+1)}$ $B=\frac{3.5.7\dots\dots(2n+1)}{2.4.6\dots\dots(2n)}$

相乘スレバ $AB<1$.

57. n **ガ正ノ整數ニシテ且ツ** $a>1$ **ナルトキ**

$\frac{a^{2n+1}+1}{a^{2n}-1}>\frac{a}{n(a-1)}$ **ナルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 n ガ正ノ整數＝シテ且ツ $a>1$ ナル故＝

$(a^{2n}-1)(a-1)>0$ ∴ $a^{2n+1}+1>a^{2n}+a$,

$(a^{2n-1}-1)(a^2-1)>0$ ∴ $a^{2n+1}+1>a^{2n-1}+a^2$

同樣＝ $a^{2n+1}+1>a^{2n-2}+a^3$

…………………………

$a^{2n+1}+1>a^{n+1}+a^n$

∴ $n(a^{2n+1}+1)>a^{2n}+a^{2n-1}+\dots\dots+a^{n+1}+a^n+\dots\dots+a^2+a$

$=a\frac{a^{2n}-1}{a-1}$

∴ $\frac{a^{2n+1}+1}{a^{2n}-1}>\frac{a}{n(a-1)}$.

58. **各項ガ正ナル等差級數ト等比級數トガ同ジ初項，同ジ項數，同ジ末項ヲ有スルトキハ等差級數ノ和ハ等比級數ノ和ヨリ小ナラザルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 所題ノ等比級數ヲ $a, ar, ar^2, \dots\dots, ar^{n-1}$ $(a>0,\ r>0)$ トスレバ等差級數ノ初項ハ a, 項數 n, 末項 ar^{n-1} ナル故＝其和ハ $\frac{n(a+ar^{n-1})}{2}$, ナリ故＝証明スベキコトハ次ノ不等式ナリ,

$\frac{n(a+ar^{n-1})}{2}\geqq a+ar+ar^2+\dots\dots+ar^{n-1}$.

即チ $\frac{n(1+r^{n-1})}{2}\geqq 1+r+r^2+\dots\dots+r^{n-1}$

然ルニ若シ $r=1$ ナラバ上ノ兩邊ハ相等シクナル故ニ此場合ニハ兩級數ノ和ハ相等シ

$r\neq 1$ ナラバ任意ノ正ノ整數 p, q ニ對シ

$$(1-r^p)(1-r^q)>0,$$

$$\therefore \quad 1+r^{p+q}>r^p+r^q$$

$p+q=n-1$ トナルヤウニ $p=1, 2, 3, \ldots\ldots n-2,\ q=n-2, n-3, \ldots\ldots 2, 1$ トスレバ

$$1+r^{n-1}>r+r^{n-2}$$

$$1+r^{n-1}>r^2+r^{n-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1+r^{n-1}>r^{n-2}+r$$

邊々相加フレバ

$$(n-2)(1+r^{n-1})>2(r+r^2+\ldots\ldots+r^{n-2})$$

$$\therefore \quad n(1+r^{n-1})>2(1+r+r^2+\ldots\ldots+r^{n-2}+r^{n-1}),$$

$$\therefore \quad \frac{n(1+r^{n-1})}{2}>1+r+r^2+\ldots\ldots+r^{n-1},$$

即チ $r\neq 1$ ナラバ等差級數ノ和ハ等比級數ノ和ヨリ大ナリ，即チ所題ノ如キ等差級數ノ和ハ $r=1$ ナルモ或ハ又 $r\neq 1$ ナルモ等比級數ノ和ヨリ小ナラズ。

59. $a_1, a_2, a_3\ldots\ldots$ **ハ等差級數ニシテ** $b_1, b_2, b_3\ldots\ldots$ **ハ各項ガ皆正ナル等比級數ナリ，若シ** $a_1=b_1, a_2=b_2$ **ナルトキハ** a_n **ハ** b_n **ヨリ大ナラザルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 公差ヲ d, 公比ヲ r トスレバ

$$a_n=a_1+(n-1)d, \qquad b_n=b_1r^{n-1}$$

今 m ヲ任意ノ正ノ整數トシ $n=m$ ナルトキ

$$a_m\leqq b_m \quad 即チ \quad a_1+(m-1)d\leqq b_1r^{m-1} \qquad (1)$$

ナリト假定シソレヨリ

$$a_{m+1}\leqq b_{m+1} \quad 即チ \quad a_1+md\leqq b_1r^m \qquad (2)$$

ナルコトヲ証明セシニ 假設ニヨリ

$$a_1=b_1, \quad a_2=b_2 \qquad \therefore\ a_1+d=a_1r \qquad \therefore\ 1+\frac{d}{a_1}=r$$

此兩邊ヲ (1) ノ兩邊ニ乘ズレバ $0<r$ ナル故ニ

$$\{a_1+(m-1)d\}\left(1+\frac{d}{a_1}\right)\leqq b_1r^m,$$

即チ $\quad a_1+md+(m-1)\dfrac{d^2}{a_1}\leqq b_1r^m$

然ルニ $m-1>0, \quad a_1>0$ ナル故ニ

$$a_1+md\leqq b_1r^m,$$

即チ (1) ガ成立スト假定スレバ (2) モ亦成立ス，然ルニ $m=3$ ノトキ

$$a_3=a_1+2d, \qquad b_3=a_1r^2=a_1\left(1+\frac{d}{a_1}\right)^2=a_1+2d+\frac{d^2}{a_1},$$

$$\therefore \quad a_3\leqq b_3$$

依ツテ $m=3, 4, 5, \ldots\ldots$ ノトキ (1) ハ成立ス

故ニ一般ニ $a_n\leqq b_n$,

60. n **ガ正ノ整數ナルトキ次ノ不等式ヲ証セヨ。**

$$\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots\ldots+\sqrt{n}<\frac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}}$$

〔解〕 m ヲ任意ノ正ノ整數トシ $n=m$ ノトキ

$$\frac{2}{3}m^{\frac{3}{2}}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots\ldots+\sqrt{m} \qquad (1)$$

ナリト假定シソレヨリ $\dfrac{2}{3}(m+1)^{\frac{3}{2}}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots\ldots+\sqrt{m+1} \qquad (2)$

ナルコトヲ証明センニ (1) ガ成立スル故ニ (2) ガ成立スルタメニハ

$$\frac{2}{3}(m+1)^{\frac{3}{2}}<\frac{2}{3}m^{\frac{3}{2}}+\sqrt{m+1} \qquad (3)$$

ナレバ可ナリ．然ルニ (3) ヨリ

$$\sqrt{m+1}\,(2m-1)<2m^{\frac{3}{2}}$$

$2m-1>0$ ナル故ニ兩邊ヲ二乘スレバ

$$(m+1)(2m-1)^2<4m^3 \quad 即チ \quad 0<3m-1$$

然ルニ此最後ノ不等式ハ明カニ成立ス故ニ (3) ハ成立ス，從ツテ (1) ガ成立スト假定スレバ (2) モ亦成立ス，然ルニ $m=1$ ノトキ (1) ハ $\dfrac{2}{3}<1$ トナル，依ツテ

$m=2,3,4,\ldots\ldots$ ノトキ (1) ハ成立ス　即チ n ガ任意ノ正ノ整數ナルトキ

$$\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots\ldots+\sqrt{n},$$

全ク同樣ニシテ

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots\ldots+\sqrt{n}<\frac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}}.$$

ヲ證明スルコトヲ得。

61. $a_1, a_2\ldots\ldots a_n$ **ヲ悉クハ相等シカラザル正ノ數トシ且ツ** $p>q>0$ **トスレバ** $n(a_1^p+a_2^p+\ldots\ldots+a_n^p)>(a_1^q+a_2^q+\ldots\ldots+a_n^q)(a_1^{p-q}+a_2^{p-q}+\ldots\ldots a_n^{p-q})$ **ナルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 $a_1^p+a_2^p-a_1^{p-q}a_2^q-a_1^q a_2^{p-q}=(a_1^q-a_2^q)(a_1^{p-q}-a_2^{p-q})$

q, $p-q$, ハ正ナルニ故ニ $a_1>a_2$ ナルモ或ハ又 $a_1<a_2$ ナルモ上ノ右邊ハ常ニ正ナリ故ニ $a_1\neq a_2$ ナル限リ

$$\left.\begin{array}{l} a_1^p+a_2^p>a_1^{p-q}a_2^q+a_1^q a_2^{p-q} \\ \text{同樣ニ}\quad a_1^p+a_3^p>a_1^{p-q}a_3^q+a_1^q a_3^{p-q} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^p+a_n^p>a_1^{p-q}a_n^q+a_1^q a_n^{p-q} \end{array}\right\}(n-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_2^p+a_3^p>a_2^{p-q}a_3^q+a_2^q a_3^{p-q} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_2^p+a_n^p>a_2^{p-q}a_n^q+a_2^q a_n^{p-q} \end{array}\right\}(n-2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n-1}^p+a_n^p>a_{n-1}^{p-q}a_n^q+a_{n-1}^q a_n^{p-q}$$

邊々相加フレバ

$$\begin{aligned}(n-1)(a_1^p+a_2^p+\ldots\ldots+a_n^p)>\;&a_1^{p-q}(a_2^q+a_3^q+\ldots\ldots+a_n^q)\\ &+a_2^{p-q}(a_1^q+a_3^q+\ldots\ldots+a_n^q)\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+a_n^{p-q}(a_1^q+a_2^q+\ldots\ldots+a_{n-1}^q)\end{aligned}$$

兩邊ニ $a_1^p+a_2^p+\ldots\ldots+a_n^p$ ヲ加フレバ

$$n(a_1^p+a_2^p+\ldots\ldots+a_n^p)>(a_1^q+a_2^q+\ldots\ldots+a_n^q)(a_1^{p-q}+a_2^{p-q}+\ldots\ldots+a_n^{p-q}).$$

62. $a_1\ a_2\ldots\ldots a_n$ **ハ悉クハ相等シカラザル正數トシ且ツ** p, q **ヲ正ノ數トスレバ** $n(a_1^{p-q}+a_2^{p-q}+\ldots\ldots+a_n^{p-q})<(a_1^p+a_2^p+\ldots\ldots+a_n^p)(a_1^{-q}+a_2^{-q}+\ldots\ldots+a_n^{-q})$ **ナルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 $a_1^{p-q}+a_2^{p-q}-a_1^p a_2^{-q}-a_1^{-q}a_2^p=(a_1^p-a_2^p)(a_1^{-q}-a_2^{-q})$

然ルニ p, q ハ正ナル故ニ $a_1>a_2$ ナルモ或ハ又 $a_1<a_2$ ナルモ上ノ右邊ハ負ナリ

$$\left.\begin{array}{l} \therefore\quad a_1^{p-q}+a_2^{p-q}<a_1^p a_2^{-q}+a_1^{-q}a_2^p \\ \text{同樣ニ}\quad a_1^{p-q}+a_3^{p-q}<a_1^p a_3^{-q}+a_1^{-q}a_3^p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{p-q}+a_n^{p-q}<a_1^p a_n^{-q}+a_1^{-q}a_n^p \end{array}\right\}(n-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_2^{p-q}+a_3^{p-q}<a_2^p a_3^{-q}+a_2^{-q}a_3^p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_2^{p-q}+a_n^{p-q}<a_2^p a_n^{-q}+a_2^{-q}a_n^p \end{array}\right\}(n-2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n-1}^{p-q}+a_n^{p-q}<a_{n-1}^p a_n^{-q}+a_{n-1}^{-q}a_n^p$$

邊々相加フレバ前問ト同樣ニ

$$(n-1)(a_1^{p-q}+a_2^{p-q}+\ldots\ldots+a_n^{p-q})<a_1^p a_2^{-q}+a_1^{-q}a_2^p+\ldots\ldots+a_{n-1}^{-q}a_n^p$$

兩邊ニ $a_1^{p-q}+a_2^{p-q}+\ldots\ldots+a_n^{p-q}$ ヲ加フレバ

$$n(a_1^{p-q}+a_2^{p-q}+\ldots\ldots+a_n^{p-q})<(a_1^p+a_2^p+\ldots\ldots+a_n^p)(a_1^{-q}+a_2^{-q}+\ldots\ldots+a_n^{-q})$$

〔注意〕 $p=q$ トオケバ

$$n^2<(a_1^p+a_2^p+\ldots\ldots+a_n^p)\left(\frac{1}{a_1^p}+\frac{1}{a_2^p}+\ldots\ldots+\frac{1}{a_n^p}\right)$$

又 $p=q=1$ トオケバ

$$n^2<(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$$

63. m **ガ 1 ヨリ大ナル整數ニシテ** a, b, c **ハ悉クハ相等シクラザル正數ナルトキ** $\dfrac{a^m+b^m+c^m}{3}>\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^m$ **ナルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 $$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}-\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2=\frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=\frac{1}{9}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}>0$$

$$\therefore\quad \frac{a^2+b^2+c^2}{3}>\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

即チ $m=2$ ノトキ所題ノ不等式ハ成立ス

次ニ $\dfrac{a^n+b^n+c^n}{3}>\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^n$

ナリト假定シ兩邊ニ正ノ數 $\dfrac{a+b+c}{3}$ ヲ乘ズレバ

$$\frac{(a^n+b^n+c^n)(a+b+c)}{9}>\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n+1}$$

然ルニ $(a^n+b^n+c^n)(a+b+c)=a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}+a^nb+a^nc+ab^n+b^nc+ac^n+bc^n$

又 $a^{n+1}+b^{n+1}-(a^nb+ab^n)=(a^n-b^n)(a-b)$

ニシテ此右邊ハ $a>b$ ナルモ又 $a<b$ ナルモ常ニ正ナル故ニ $a\neq b$ ナルトキ

$$a^{n+1}+b^{n+1}>a^nb+ab^n,$$

同様ニ $b\neq c$, $a\neq c$ ナルトキ

$$b^{n+1}+c^{n+1}>b^nc+bc^n, \quad a^{n+1}+c^{n+1}>a^nc+ac^n.$$

故ニ a, b, c ガ悉クハ相等シカラザルトキ

$$a^nb+a^nc+ab^n+b^nc+ac^n+bc^n<2(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1})$$

$\therefore\ (a^n+b^n+c^n)(a+b+c)<3(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1})$

$\therefore\ \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}+b^{n+1}}{3}>\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^{n+1}.$

即チ $m=n$ ナルトキ所題ノ不等式ガ眞ナリト假定スレバ $m=n+1$ ノトキモ亦眞ナリ 然ルニ $m=2$ ノトキ眞ナリ、依ツテ m ノ 3, 4,...... 等一般ニ 1 ヨリ大ナル任意ノ整數ノトキ眞ナリ。

64. **$a_1, a_2 ...... a_n$ ガ悉クハ相等シカラザル正ノ數ニシテ m ガ1ヨリ大ナル整數ナルトキハ $\dfrac{a_1^m+a_2^m+......+a_n^m}{n}>\left(\dfrac{a_1+a_2+......+a_n}{n}\right)^m$ ナルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 a_1 a_2 ガ相等シカラザル正ノ數ニシテ m ガ 1 ヨリ大ナル整數ナルトキ

$$\frac{a_1^m+a_2^m}{2}>\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^m$$

ナルコトハ數學的歸納法ニヨツテ容易ニ證明スルコトヲ得（或ハ第五章問21參照）

同様ニ $\dfrac{a_3^m+a_4^m}{2}>\left(\dfrac{a_3+a_4}{2}\right)^m$

$\therefore\ \dfrac{a_1^m+a_2^m+a_3^m+a_4^m}{2}>\left(\dfrac{a_1+a_2}{2}\right)^m+\left(\dfrac{a_3+a_4}{2}\right)^m$

然ルニ又 $\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{a_1+a_2}{2}\right)^m+\left(\dfrac{a_3+a_4}{2}\right)^m\right\}>\left(\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^m$

$\therefore\ \dfrac{a_1^m+a_2^m+a_3^m+a_4^m}{4}>\left(\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^m$

同様ニシテ n ガ 8, 16,...... 等一般ニ 2^p ニ等シキ場合ニ所題ノ不等式ハ成立スルコトヲ知ル。 今 $n=2^p-r$ 即チ $2^p=n+r$ トシ

$$\frac{a_1+a_2+......+a_n}{n}=s, \qquad a_{n+1}=a_{n+2}=......=a_{n+r}=s$$

トスレバ上ノ證明ニヨリ

$$\frac{a_1^m+a_2^m+......+a_n^m+rs^m}{n+r}>\left(\frac{a_1+a_2+......+a_n+rs}{n+r}\right)^m$$

此右邊ハ $\left(\dfrac{ns+rs}{n+r}\right)^m=s^m$ ナル故ニ

$$a_1^m+a_2^m+......+a_n^m>(n+r)s^m-rs^m=ns^m$$

$\therefore\ \dfrac{a_1^m+a_2^m+......+a_n^m}{n}>\left(\dfrac{a_1+a_2+......+a_n}{n}\right)^m$

而シテ n ガ如何ナル正ノ整數ナルモ常ニ 2^p-r トオクコトヲ得ル故ニ所題ノ不等式ハ常ニ成立ス。

65. **a ガ1ニ等シカラザル正ノ實數ニシテ, x, y, z ハ $x>y>z$ ナル如キ任意ノ有理數ナルトキ $a^x(y-z)+a^y(z-x)+a^z(x-y)>0$ ナルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 x, y, z ハ任意ノ有理數ニシテ $x>y>z$ ナル故ニ

$$x=\frac{p}{n}, \quad y=\frac{q}{n}, \quad z=\frac{r}{n}, \quad p>q>r$$

トオクコトヲ得, 但シ n, p, q, r ハ皆整數ニシテ且ツ $n>0$ トス然ルトキハ所題ノ不等式ヲ證明スルタメニハ

$$a^{\frac{p}{n}}\left(\frac{q}{n}-\frac{r}{n}\right)+a^{\frac{q}{n}}\left(\frac{r}{n}-\frac{p}{n}\right)+a^{\frac{r}{n}}\left(\frac{p}{n}-\frac{q}{n}\right)>0$$

即チ $a^{\frac{p}{n}}(q-r)+a^{\frac{q}{n}}(r-p)+a^{\frac{r}{n}}(p-q)>0$ ヲ證明スレバ可ナリ。

今 $0<a^{\frac{1}{n}}=\alpha$ トオケバ題意ニヨリ $\alpha\neq 1$. $\therefore\ (\alpha-1)^2>0$ $\therefore\ \alpha^2-\alpha>\alpha-1$

m ヲ任意ノ整數トシ兩邊ニ α^{m-2} ヲ乘ズレバ

$$\alpha^m-\alpha^{m-1}>\alpha^{m-1}-\alpha^{m-2}$$

此不等式ノ m ノ代リニ順次ニ $p, p-1, p-2, \ldots\ldots, q+1, q, q-1, \ldots\ldots, r+2$ ヲオクトキ

$$\alpha^p-\alpha^{p-1}>\alpha^{p-1}-\alpha^{p-2}>\alpha^{p-2}-\alpha^{p-3}>\ldots\ldots>\alpha^{q+1}-\alpha^q$$

$$>\alpha^q-\alpha^{q-1}>\alpha^{q-1}-\alpha^{q-2}>\ldots\ldots>\alpha^{r+1}-\alpha^r$$

此第一行ノ各數ノ平均ハ第二行ノ各數ノ平均ヨリ大ナルコト明カナリ，即チ

$$\frac{(\alpha^p-\alpha^{p-1})+(\alpha^{p-1}-\alpha^{p-2})+\ldots\ldots+(\alpha^{q+1}-\alpha^q)}{p-q}$$

$$>\frac{(\alpha^q-\alpha^{q-1})+(\alpha^{q-1}-\alpha^{q-2})+\ldots\ldots+(\alpha^{r+1}-\alpha^r)}{q-r}$$

即チ $\dfrac{\alpha^p-\alpha^q}{p-q}>\dfrac{\alpha^q-\alpha^r}{q-r}$ 分母ヲ去リ整頓スレバ

$$\alpha^p(q-r)+\alpha^q(r-p)+\alpha^r(p-q)>0$$

即チ $a^{\frac{a}{n}}(q-r)+a^{\frac{q}{n}}(r-p)+a^{\frac{r}{n}}(p-q)>0$

依ツテ所題ノ不等式ハ成立ス。

66. p, q ガ正ノ整數ニシテ x ガ 1 ニ等シカラザル正ノ數ナルトキ

$$p\geqq p \quad \text{ナルニ從ヒテ} \quad \frac{x^p-1}{p}\geqq\frac{x^q-1}{q}$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 p, q ガ正ノ整數ナル故ニ

$$x^p-1=(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots\ldots+x+1)$$

$$x^q-1=(x-1)(x^{q-1}+x^{q-2}+\ldots\ldots+x+1)$$

故ニ $p>q$ ナルトキ $\dfrac{x^p-1}{p}>\dfrac{x^q-1}{q}$ ヲ証明スルニハ

$$(x-1)\left\{\frac{x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots\ldots+x+1}{p}-\frac{x^{q-1}+x^{q-2}+\ldots\ldots+x+1}{q}\right\}>0$$

即チ $(x-1)\{q(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots\ldots+x+1)-p(x^{q-1}+\ldots\ldots+x+1)\}>0$ (1)

ヲ証明スレバ可ナリ

然ルニ $p>q$ ナルニヨリ $p=q+r$ トセバ r モ亦正ノ整數ナリ

$\therefore$ $x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots\ldots+x+1=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots\ldots+x^q+x^{q-1}+\ldots\ldots+x+1$

故ニ (1) ハ次ノ如クナル

$$(x-1)\{q(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots\ldots+x^q+x^{q-1}+\ldots\ldots+x+1)$$

$$-(q+r)(x^{q-1}+x^{q-2}+\ldots\ldots+x+1)\}$$

$$=(x-1)\{q(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots\ldots+x^q)-r(x^{q-1}+x^{q-2}+\ldots\ldots+x+1\}>0 \quad (2)$$

玆ニオイテ $x>1$ ナル場合ト $x<1$ ナル場合トヲ區別シテ考フルニ先ヅ $x>1$ トスレバ $x^{p-1}, x^{p-2}, \ldots\ldots x^{q+1}$ ハ皆 x^q ヨリ大ニシテ其數ハ $p-q-1=r-1$ ナル故ニ

$$x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots\ldots+x^q>rx^q$$

同樣ニ $x^{q-1}+x^{q-2}+\ldots\ldots+x+1<qx^{q-1}$

故ニ (2) ノ括孤内ノ第一項ヲソレヨリ小ナル rx^q ニテ置キ換ヘ第二項ヲソレヨリ大ナル qx^{q-1} ニテ置キ換ヘタルモノ，即チ

$$(x-1)\{qrx^q-rqx^{q-1}\}>0 \quad (3)$$

ガ成立スレバ (2) ハ勿論成立ス，然ルニ (3) ハ

$$(x-1)^2qrx^{q-1}>0$$

トナリ q, r, x ハ正ナル故ニ明カニ成立ス，依ツテ (1) ハ成立ス

故ニ $x>1$ ナルトキ

$$p>q \quad \text{ナラバ} \quad \frac{x^p-1}{p}>\frac{x^q-1}{q}$$

次ニ $0<x<1$ ナル場合テ考フルニ此場合ニハ

$$x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots\ldots+x^q<rx^q$$

$$x^{q-1}+x^{q-2}+\ldots\ldots+x+1>qx^{q-1}$$

而シテ (2) ガ成立スルタメニハ

$$q(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots\ldots+x^q)-r(x^{q-1}+x^{q-2}+\ldots\ldots+x+1)<0$$

ナレバ可ナルベク 從ツテ又

$$qrx^q-rqx^{q-1}<0 \quad (4)$$

ナレバ可ナルベシ 然ルニ (4) ハ

$$(x-1)qrx^{q-1}<0$$

トナリテ明カニ成立ス, 依ツテ此ノ場合ニモ (1) ハ成立ス, 故ニ $0<x<1$ ナルトキモ $p>q$ ナラバ $\dfrac{x^p-1}{p}>\dfrac{x^q-1}{q}$ トナル, 從ツテ又

$p<q$ ナラバ $\dfrac{x^p-1}{p}<\dfrac{x^q-1}{q}$ トナル。

67. m ガ有理數ニシテ a ガ 1 ニ等シカラザル正ノ數ナルトキ

$m<0$ 或ハ $m>1$ ナラバ $ma^{m-1}(a-1)>a^m-1>m(a-1)$

$0<m<1$ ナラバ $ma^{m-1}(a-1)<a^m-1<m(a-1)$

ナルコトヲ證セヨ。

〔解〕 先ヅ $m>0$ ナル場合ヲ考フルニ m ハ有理數ナル故ニ此場合ニ

$m=\dfrac{p}{q}$ 但 p, q ハ正ノ整數

トオクコトヲ得, 又 a ハ 1 ニ等シカラザル正ノ數ナル故ニ $\sqrt[q]{a}$ ノ正ノ實數ヲ x トスレバ x モ亦 1 ニ等シカラザル正ノ數ナリ, 然ルトキハ

$$a^m-1=(x^q)^{\frac{p}{q}}-1=x^p-1$$

$$m(a-1)=\frac{p}{q}(x^q-1)$$

然ルニ前問ニヨリ

$p\geqq q$ ナルヲ從ツテ $x^p-1\geqq\dfrac{p}{q}(x^q-1)$

即チ $m\geqq 1$ ナルニ從ツテ $a^m-1\geqq m(a-1)$

即チ $m>1$ ナラバ $a^m-1>m(a-1)$

$0<m<1$ ナラバ $a^m-1<m(a-1)$,

次ニコノ結果ニ於テ $a=\dfrac{1}{b}$ トオケバ

$m\geqq 1$ ナルニ從ツテ $\left(\dfrac{1}{b}\right)^m-1\geqq m\left(\dfrac{1}{b}-1\right)$

即チ $\dfrac{1-b^m}{b^m}\geqq\dfrac{m(1-b)}{b}$

即チ $b^m-1\leqq mb^{m-1}(b-1)$

即チ $m>1$ ナラバ $mb^{m-1}(b-1)>b^m-1$ (A)

$0<m<1$ ナラバ $mb^{m-1}(b-1)<b^m-1$

而シテ b モ亦 1 ニ等シカラザル正ノ數ナリ.

次ニ $m<0$ ナル場合ヲ考フルニ $m=-n\ (n>0)$ トオケバ $a^m-1>m(a-1)$ ハ次ノ如クナル

$a^{-n}-1>-n(a-1)$ 即チ $1-a^n>-na^n(a-1)$

即チ $a^n-1<na^n(a-1)$

コノ不等式ノ兩邊ニ $a^{n+1}-a^n$ ヲ加フレバ

$$a^{n+1}-1<na^{n+1}+a^{n+1}-na^n-a^n$$

即チ $a^{n+1}-1<(n+1)a^n(a-1)$,

然ルニ $n+1>1$ ナル故ニ既ニ證明シタル (A) ヨリ此不等式ハ成立ス,

依ツテ $a^{-n}-1>(-n)(a-1)$,

最後ニ此不等式ニ於テ $a=\dfrac{1}{b}$ トオケバ b モ 1 ニ等シカラザル正ノ數ニシテ

$\left(\dfrac{1}{b}\right)^{-n}-1>(-n)\left(\dfrac{1}{b}-1\right)$ 即チ $b^n-1>\dfrac{n(b-1)}{b}$

兩邊ニ $-\dfrac{1}{b^n}$ ヲ乘ズレバ

$$b^{-n}-1<(-n)b^{-n-1}(b-1)$$

故ニ $m=-n<0$ ナル場合ニモ

$$mb^{m-1}(b-1)>b^m-1>m(b-1)$$

第三章

極大，極小。最大，最小。

基本定理 **I.** **變數 x ガ或範圍內ノアラユル實數值ヲ取リテ單調ニ增加又ハ減少スルトキ x ノ函數 $f(x)$ ハ漸々增加又ハ減少シ，增加ヨリ減少ニ，又ハ減少ヨリ增加ニ移ルコトアルベシ，增加ヨリ減少ニ移ル境目ノ $f(x)$ ノ值ヲ其極大值トイヒ，減少ヨリ增加ニ移ル境目ノ $f(x)$ ノ值ヲ其極小值トイフ。**

II. **變數 x ガ或範圍內ノアラユル實數值ヲ取リテ變化スルトキ x ノ函數 $f(x)$ ノ值ノ最大ナルモノヲ其最大值トイヒ 最小ナルモノヲ其最小值トイフ。**

III. **前章基本定理 V ニヨリ若干個ノ正ノ變數ノ和ガ一定ナルトキ其連乘積ハ各變數ガ相等シキトキ最大值ヲ取リ，又其連乘積ガ一定ナルトキ其和ハ各變數ガ相等シキトキ最小值ヲ取ル。**

〔注意〕 極大，極小ノ問題ハ一般ニ微分學ニ屬ス（微分學演習第六章參照）故ニ本章ニ於テハ極メテ簡單ナルモノヽ外主トシテ最大，最小ノ問題ヲ考究スル事トスベシ。

演習問題

1. **x^2+1 ノ極大又ハ極小值ヲ求メヨ。**

〔解〕 x ガ $-\infty$ ヨリ 0 マデ連續シテ增加スルトキ x^2+1 ハ $+\infty$ ヨリ漸々減少シテ 1 トナリ，x ガ 0 ヨリ $+\infty$ マデ連續シテ增加スルトキ x^2+1 ハ 1 ヨリ漸々增加シテ $+\infty$ ニ至ル，依ツテ x^2+1 ハ $x=0$ ノトキ減少ヨリ增加ニ移ル故ニ $x=0$ ノトキノ x^2+1 ノ值 1 ハ其極小值ナリ．而シテ x ガ單調ニ增加又ハ減少スルトキ x^2+1 ハ增ヨリ減ニ移ルコトナシ，故ニ極大值ナシ。

2. **x^2+1 ノ最大又ハ最小值ヲ求メヨ，若シ x ノ值ノ範圍ガ 2 ヨリ 3 マデニ限ラルヽトキハ如何。**

〔解〕 x ノ值ニ制限ナキトキハ前問ノ考究ニ由ツテ x^2+1 ノ最小值ハ其極小值 1 ニ等シク，又 x^2+1 ハ x ノ絕對值ト共ニ如何程ニテモ增シ得ル故ニ最大值ハ存在セズ。若シ x ノ值ガ (2,3) ニ限ラルヽトキハ x ガ 2 ヨリ 3 マデ連續的ニ增ストキ x^2+1 モ亦單調ニ增ス故ニ其最小值ハ $x=2$ ニ對スル x^2+1 ノ值 5 ニシテ最大值ハ $x=3$ ニ對スル x^2+1 ノ值 10 ニ等シ。

3. **x^2-2x+4 ノ最大又ハ最小值ヲ求メヨ。**

〔解〕 $x^2-2x+4=m$ トオキタル二次方程式ヲ解ケバ

$$x=1\pm\sqrt{1-(4-m)}=1\pm\sqrt{m-3}\,,$$

x ハ實數ナル故ニ m ハ 3 ヨリ小ナルヲ得ズ，即チ x ガアラユル實數值ヲ取ルトキ x^2-2x+4 ノ值ハ 3 ヨリ小ナルコト能ハズ故ニ 3 ハ所要ノ最小值ニシテ其時ノ x ノ值ハ 1 ナリ。 而シテ m ガ 3 ヨリ大ナレバ如何程大ナルモソレニ對應スル x ノ實數值ハ常ニ存在スル故ニ m ノ最大值即チ所題ノ式ノ最大值ナシ。

4. **$9+6x-x^2$ ノ最大又ハ最小值ヲ求メヨ。**

〔解〕 $9+6x-x^2=m$ トオケバ

$$x^2-6x+m-9=0 \qquad \therefore\ x=3\pm\sqrt{18-m}\,,$$

x ハ實數ナル故ニ m ハ 18 ヨリ大ナルヲ得ズ，故ニ所要ノ最大值ハ 18 ニシテ其時ノ x ノ值ハ 3 ナリ，而シテ m ガ 18 ヨリ小ナラバ如何程小ナルモソレニ對應スル x ノ實數值ハ存在スル故所要ノ式ノ最小值ナシ。

5, **$f(x)=ax^2+bx+c$ ノ最大又ハ最小值ヲ求メヨ。**

〔解〕 先ヅ $a\neq 0$ トシテ $ax^2+bx+c=m$ トオケバ

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a(c-m)}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{4a\left(m-\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)}}{2a}.$$

x ハ實數ナル故ニ

$a>0$ ナラバ m ハ $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ ヨリ小ナルヲ得ズ，故ニ此場合ニハ m ノ最小值

即チ $f(x)$ ノ最小値ハ $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ ニシテ其時ノ x ノ値ハ $-\dfrac{b}{2a}$，而シテ最大値ナシ。

$a<0$ ナラバ m ハ $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ ヨリ大ナルヲ得ズ，故ニ此場合ニハ m ノ最大値即チ $f(x)$ ノ最大値ハ $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ ニシテ其時ノ x ノ値ハ $-\dfrac{b}{2a}$，而シテ最小値ナシ。

$a=0$ ナラバ $f(x)=bx+c$ トナリ $b\neq0$ ナラバ $f(x)$ ハ x ト共ニ $\pm\infty$ ヨリ $\mp\infty$ マデノアラユル値ヲ取リ得ル故ニ最大値モ最小値モ共ニナシ，コノトキ若シ $b=0$ ナラバ $f(x)$ ハ定數ニシテ從ツテ最大モ最小モナキコト勿論ナリ。

6. **分數式 $\dfrac{3x}{x^2+x+1}$ ノ最大又ハ最小値ヲ求メヨ。**

〔解〕 $\dfrac{3x}{x^2+x+1}=m$ トオケバ $mx^2+(m-3)x+m=0$

$$\therefore\quad x=\frac{3-m\pm\sqrt{9-6m-3m^2}}{2m},$$

然ルニ x ハ實數ナル故ニ

$9-6m-3m^2\geqq0,$ 即チ $3(m+3)(m-1)\leqq0$

$$\therefore\quad -3\leqq m\leqq1$$

ナルヲ要ス，而シテ $m=-3$ ノトキ $x=\dfrac{3-m}{2m}=-1,$ $m=1$ ノトキ

$x=\dfrac{3-m}{2m}=1$ 故ニ所題ノ分數式ハ $x=1$ ノトキ最大値 1 ヲ取リ $x=-1$ ノトキ最小値 -3 ヲ取ル。

7. **分數式 $\dfrac{x^2+3x+5}{x^2+1}$ ノ最大又ハ最小値ヲ求メヨ。**

〔解〕 $\dfrac{x^2+3x+5}{x^2+1}=m$ トオケバ $(1-m)x^2+3x+5-m=0$

$$\therefore\quad x=\frac{-3\pm\sqrt{-(2m-11)(2m-1)}}{2(1-m)},$$

x ハ實數ナル故ニ

$(2m-11)(2m-1)\leqq0$ 即チ $\dfrac{1}{2}\leqq m\leqq\dfrac{11}{2}$

ナルヲ要ス，而シテ $m=\dfrac{1}{2}$ ノトキ $x=\dfrac{-3}{2(1-m)}=-3,$ $m=\dfrac{11}{2}$ ノトキ

$x=\dfrac{-3}{2(1-m)}=\dfrac{1}{3},$ 故ニ所題ノ分數式ノ最小値ハ $\dfrac{1}{2}$ ニシテ其時ノ x ノ値ハ -3，最大値ハ $\dfrac{11}{2}$ ニシテ其時ノ x ノ値ハ $\dfrac{1}{3}$ ナリ。

8. **x ニ如何ナル實數値ヲ與フルモ分數式 $\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}$ ハ $-\sqrt{5}-2$ ト $\sqrt{5}-2$ トノ間ノ値ヲ取リ得ザルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 $\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}=m$ トオケバ $(m-1)x^2-4mx+3m-1=0$

$$\therefore\quad x=\frac{2m\pm\sqrt{m^2+4m-1}}{m-1}$$

x ハ實數ナル故ニ

$m^2+4m-1\geqq0$ 即チ $(m-\sqrt{5}+2)(m+\sqrt{5}+2)\geqq0$

$$\therefore\quad m\leqq-\sqrt{5}-2,\quad or\quad m\geqq\sqrt{5}-2$$

即チ x ガ實數ナルトキ m ハ $-\sqrt{5}-2$ ヨリ大ナラザルカ或ハ又 $\sqrt{5}-2$ ヨリ小ナルコトヲ得ズ，即チ x ガ如何ナル實數値ヲトルモ所題ノ分數式ハ $-\sqrt{5}-2$ ト $\sqrt{5}-2$ トノ間ノ値ヲ取ルコト能ハズ。

9. **分數式 $\dfrac{x^2+2x+2}{x^2-2x-3}$ ノ極大値ハ $-\dfrac{\sqrt{17}+1}{8}$ ニシテ極小値ハ $\dfrac{\sqrt{17}-1}{8}$ ナルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 $\dfrac{x^2+2x+2}{x^2-2x-3}=m$ トオケバ $(m-1)x^2-2(m+1)x-3m-2=0$

$$\therefore\quad x=\frac{m+1\pm\sqrt{4m^2+m-1}}{m-1},$$

x ハ實數ナルガ故ニ

$4m^2+m-1\geqq0,$ 即チ $4\left(m-\dfrac{\sqrt{17}-1}{8}\right)\left(m+\dfrac{\sqrt{17}+1}{8}\right)\geqq0.$

$$\therefore\quad m\leqq-\frac{\sqrt{17}+1}{8}\quad or\quad m\geqq\frac{\sqrt{17}-1}{8}$$

即チ所題ノ分數式ノ値 m ハ $-\frac{\sqrt{17}+1}{8}$ ヨリ大ナル能ハズ，而シテ

$$m=-\frac{\sqrt{17}+1}{8} \quad ノトキ \quad x=\frac{m+1}{m-1}=-\frac{7-\sqrt{17}}{\sqrt{17}+9},$$

故ニ x ノコノ値ヲ境目トシテ增加ヨリ減少ニ移ラザルベカラズ，

故ニ $-\frac{\sqrt{17}+1}{8}$ ハ其極大値ナリ。

又所題ノ分數式ノ値 m ハ $\frac{\sqrt{17}-1}{8}$ ヨリ小ナル能ハズ，而シテ

$$m=\frac{\sqrt{17}-1}{8} \quad ノトキ \quad x=\frac{m+1}{m-1}=-\frac{7+\sqrt{17}}{9-\sqrt{17}}$$

故ニ x ノ此値ヲ境目トシテ減少ヨリ增加ニ移ラザルベカラズ，

故ニ $\frac{\sqrt{71}-1}{8}$ ハ其極小値ナリ。

10. **分數式 $\frac{2ax+b}{x^2+1}$ ノ最大値ガ 4 ニシテ最小値ガ -1 ナルトキ a, b ノ値如何。**

〔解〕 $\frac{2ax+b}{x^2+1}=m$ 　トオケバ　$mx^2-2ax+m-b=0$

$$\therefore \quad x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-(m-b)m}}{m}.$$

x ガ實數ナルタメニハ　$a^2-(m-b)m\geqq 0$

$$\therefore \quad m^2-bm-a^2\leqq 0 \qquad \therefore \left(m-\frac{b+\sqrt{b^2+4a^2}}{2}\right)\left(m-\frac{b-\sqrt{b^2+4a^2}}{2}\right)\leqq 0$$

$$\therefore \quad \frac{b-\sqrt{b^2+4a^2}}{2}\leqq m\leqq\frac{b+\sqrt{b^2+4a^2}}{2}$$

故ニ m ノ最大及ビ最小値即チ所題ノ分數式ノ最大及ビ最小値ハ夫々

$$\frac{b+\sqrt{b^2+4a^2}}{2} \quad 及ビ \quad \frac{b-\sqrt{b^2+4a^2}}{2}$$

ナリ，依ツテ題意ニヨリ a, b ノ値ハ次ノ聯立方程式ヨリ決定セラルベシ

$$\frac{b+\sqrt{b^2+4a^2}}{2}=4. \qquad \frac{b-\sqrt{b^2+4a^2}}{2}=-1.$$

邊々相加フレバ　$b=3$,　　$\therefore \ a=\pm 2$,

依ツテ　$a=2, b=3$,　或ハ　$a=-2, b=3$　ノトキ所題ノ分數式ノ最大値ハ 4 ニシテ最小値ハ -1 トナル。

11. **$\frac{x^2+2ax+1}{x^2-2ax+1}$ ノ極大及ビ極小値ヲ求メヨ。**

〔解〕 $\frac{x^2+2ax+1}{x^2-2ax+1}=m$ 　トオケバ　$(1-m)x^2+2a(1+m)x+1-m=0$

$$\therefore \quad x=\frac{-a(1+m)\pm\sqrt{a^2(1+m)^2-(1-m)^2}}{1-m},$$

x ガ實數ナルタメニハ

$$a^2(1+m)^2-(1-m)^2\geqq 0 \qquad \therefore \ (a^2-1)m^2+2(a^2+1)m+a^2-1\geqq 0$$

$$\therefore \quad \left(m-\frac{1+a}{1-a}\right)\left(m-\frac{1-a}{1+a}\right)\geqq 0,$$

然ルニ　$\frac{1+a}{1-a}-\frac{1-a}{1+a}=\frac{4a}{1-a^2}$,

$\therefore$ $a<-1$ ナラバ $\frac{1+a}{1-a}>\frac{1-a}{1+a}$　　$\therefore \ m\leqq\frac{1-a}{1+a}$　又ハ　$m\geqq\frac{1+a}{1-a}$,

故ニ m ハ $\frac{1-a}{1+a}$ ヲ境目トシテ增ヨリ減ニ又 $\frac{1+a}{1-a}$ ヲ境目トシテ減ヨリ增ニ移ラザルベカラズ，故ニ極大値ハ $\frac{1-a}{1+a}$,　極小値ハ $\frac{1+a}{1-a}$ ナリ。

次ニ　$-1<a<0$　ナラバ　$\frac{1+a}{1-a}<\frac{1-a}{1+a}$　$\therefore \ m\leqq\frac{1+a}{1-a}$　又ハ　$m\geqq\frac{1-a}{1+a}$

故ニ前ノ場合ト同樣ニ極大値ハ　$\frac{1+a}{1-a}$,　極小値ハ　$\frac{1-a}{1+a}$

次ニ　$0<a<1$　ナラバ　$\frac{1+a}{1-a}>\frac{1-a}{1+a}$　$\therefore \ m\leqq\frac{1-a}{1+a}$　又ハ　$m\geqq\frac{1+a}{1-a}$,

故ニ極大値ハ　$\frac{1-a}{1+a}$,　極小値ハ　$\frac{1+a}{1-a}$,

次ニ　$1<a$　ナラバ　$\frac{1+a}{1-a}<\frac{1-a}{1+a}$,　$\therefore \ m\leqq\frac{1+a}{1-a}$,　又ハ　$m\geqq\frac{1-a}{1+a}$,

故ニ極大値ハ　$\frac{1+a}{1-a}$　極小値ハ　$\frac{1-a}{1+a}$,

最後ニ $a=\pm1$ ナルトキ x ガ實數ナルタメニハ $m\geqq0$

依ツテ極小値ハ 0

又 $a=0$ ナルトキ所題ノ分數ハ常ニ 1 トナル故ニ極大, 極小値ナシ。

12. **方程式 $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=\sqrt{d}$ ノ根ガ實數ナルトキ d ノ最大及ビ最小値如何。**

〔解〕 所題ノ方程式ノ兩邊ヲ二乘スレバ

$$2-2\sqrt{1-x^2}=d,$$

故ニ d ノ最大最小値ハ $\sqrt{1-x^2}$ ノ最小最大ナルトキノ値ナリ, 然ルニ x ハ實數ナル故ニ $\sqrt{1-x^2}$ ノ最小値ハ 0 ニシテ最大値ハ 1 ナリ, 依ツテ d ノ最大値ハ 2 ニシテ最小値ハ $2-2=0$ ナリ。

13. **$\sqrt{3-x}+\sqrt{5x-4}$ ノ最大及ビ最小値ヲ求メヨ。**

〔解〕 $\sqrt{3-x}+\sqrt{5x-4}=m$ トシ兩邊ヲ二乘シテ移項スレバ

$$2\sqrt{(3-x)(5x-4)}=m^2+1-4x \qquad (A)$$

再ビ兩邊ヲ二乘スレバ

$$36x^2-4(2m^2+21)x+m^4+2m^2+49=0$$

x ガ實數ナルタメノ條件ハ

$$4(2m^2+21)^2-36(m^4+2m^2+49)\geqq0$$

即チ　$5m^4-66m^2\leqq0$　　即チ　$5m^2\left(m+\sqrt{\frac{66}{5}}\right)\left(m-\sqrt{\frac{66}{5}}\right)\leqq0$

$$\therefore\ -\sqrt{\frac{66}{5}}\leqq m\leqq0,\quad 或ハ\quad 0\leqq m\leqq\sqrt{\frac{66}{5}}$$

然ルニ m ハ負トナル能ハザル故ニ

$$0\leqq m\leqq\sqrt{\frac{66}{5}} \qquad (B)$$

然ルニ又　$3-x\geqq0,\ \ 5x-4\geqq0$　　$\therefore\ \frac{4}{5}\leqq x\leqq3,$

而シテ (A) ヨリ

$$m^2+1-4x\geqq0 \quad \therefore\ m^2\geqq4x-1 \quad \therefore\ m\geqq\sqrt{4x-1}.$$

$\sqrt{4x-1}$ ハ x ガ增ストキ增シ $x=\frac{4}{5}$ ノトキ $\sqrt{\frac{11}{5}}$ トナル,

故ニ所題ノ式ノ値 m ハ $\sqrt{\frac{11}{5}}$ ヨリ小ナル能ハズ, 而シテ

$$0<\sqrt{\frac{11}{5}}<\sqrt{\frac{66}{5}}$$

故ニ (B) ニ於ケル $m=0$ ハ所題ノ式ノ値トナル能ハズ, 從ツテ最小値トナル能ハズ, 即チ所要ノ最小値ハ $x=\frac{4}{5}$ ニ對スル m ノ値 $\sqrt{\frac{11}{5}}$ ニシテ又 $m=\sqrt{\frac{66}{5}}$ ノトキ $x<3$ ナル故ニ最大ノ値ハ $\sqrt{\frac{66}{5}}$ ナリ。

14. **$2x+5+\sqrt{-7+20x-4x^2}$ ノ最大及最小値ヲ求メヨ。**

〔解〕 $2x+5+\sqrt{-7+20x-4x^2}=m$ トシ移項シテ二乘シ整頓スレバ

$$8x^2-4mx+m^2-10m+32=0$$

x ガ實數ナルタメニハ

$$m^2-20m+64\leqq0,\quad 即チ\quad (m-4)(m-16)\leqq0$$

$$\therefore\ 4\leqq m\leqq16, \qquad (A)$$

然ルニ　$-7+20x-4x^2\geqq0$　　$\therefore\ 4\left(x-\frac{5-3\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{5+3\sqrt{2}}{2}\right)\leqq0$

$$\therefore\ \frac{5-3\sqrt{2}}{2}\leqq x\leqq\frac{5+3\sqrt{2}}{2},$$

又　$\sqrt{-7+20x-4x^2}=m-5-2x\geqq0$

$$\therefore\ m\geqq2x+5$$

$$x=\frac{5-3\sqrt{2}}{2}\ ノトキ\quad 2x+5=10-3\sqrt{2}$$

而シテ $2x+5$ ハ x ノ値ガ增ストキ增スコト明カナル故ニ所題ノ式ノ値 m ハ $10-3\sqrt{2}$ ヨリ小ナルコト能ハズ, 而シテ

$$4<10-3\sqrt{2}<16$$

故ニ (A) ニ於ケル $m=4$ ハ所題ノ式ノ値トナル能ハズ, 從ツテ最小値トナル能ハズ即チ最小値ハ $x=\frac{5-3\sqrt{2}}{2}$ ニ對スル m ノ値 $10-3\sqrt{2}$ ニシテ又 $m=16$ ノトキ $x=4<\frac{5+3\sqrt{2}}{2}$ ナル故ニ最大値ハ 16 ナリ。

15. x^4+8x^2-9 **ノ最大，最小値ヲ求メヨ。**

〔解〕 $x^4+8x^2-9=m$ トオケバ

$$x^2=-4\pm\sqrt{25+m},$$

x ハ實數ナル故ニ x^2 ハ 0 或ハ正ノ實數ナリ。

$$\therefore\ 25+m\geqq 0 \qquad 4\leqq\sqrt{25+m}$$

$$\therefore\ -25\leqq m, \qquad -9\leqq m$$

即チ m ハ -9 ヨリ小ナルヲ得ズ，而シテ $m=-9$ ノトキ $x=0$，依ツテ $x=0$ ノトキ最小値 -9 トナル

m ガ -9 ヨリ大ナラバ如何程大ナルモ差支ナキ故ニ最大値ナシ。

16. $-x^4+8x^2-9$ **ノ最大，最小値ヲ求メヨ。**

〔解〕 $-x^4+8x^2-9=m$ トオケバ

$$x^2=4\pm\sqrt{7-m},$$

x ハ實數ナル故ニ x^2 ハ 0 或ハ正ノ實數ナリ，

$$\therefore\ 7-m\geqq 0, \qquad \therefore\ m\leqq 7$$

m ガ 7 ヨリ小ナラバ如何程小ナルモ $x^2=4+\sqrt{7-m}$ ハ正ノ實數ナリ，從フテ m ノ最小値ナシ。而シテ $m=7$ ノトキ $x=\pm2$，依ツテ所題ノ式ハ $x=\pm2$ ノトキ最大値 7 トナリ且ツ最小値ナシ。

17. $ax+by=k$ **ナルトキ** x^2+y^2 **ノ最小値ヲ求メヨ。**

〔解〕 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2=k^2+(bx-ay)^2$

故ニ $(bx-ay)^2$ ガ最小ナルトキ x^2+y^2 ハ最小トナル，

然ルニ $(bx-ay)^2$ ハ $bx=ay$ 即チ $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$ ナルトキ最小ナリ

即チ x^2+y^2 ハ

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{ax+by}{a^2+b^2}=\frac{k}{a^2+b^2} \qquad \text{ナルトキ}$$

即チ $\quad x=\dfrac{ak}{a^2+b^2}, \qquad y=\dfrac{bk}{a^2+b^2}$

ナルトキ最小ナリ，依ツテ其最小値ハ

$$\frac{a^2k^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{b^2k^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{k^2}{a^2+b^2}$$

ナリ。

18. **若干ノ變數** $x, y, z\ldots\ldots$ **ガ**

$$ax+by+cz+\ldots\ldots=k$$

ナル條件ノ下ニ變化スルトキ $x^2+y^2+z^2+\ldots\ldots$ **ハ**

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\ldots\ldots=\frac{k}{a^2+b^2+c^2+\ldots\ldots}$$

ナルトキ最小ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 今若シ $x, y, z\ldots\ldots$ ノ中ニテ $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=\ldots\ldots$ ナル關係ヲ有セザルモノアリトスレバ夫等ノ變數ヲシテ此關係ヲ有セシメ，其他ノ變數ヲソノマヽニスレバソレ等ノ變數ノ平方ノ和ハ減少シ（前問）其他ノ變數ノ平方ノ和ハ不變ナル故ニ總テノ變數ノ平方ノ和ハ減少スベシ，依ツテ總テノ變數ガ上ノ關係ヲ有スルトキ各變數ノ平方ノ和ハ最小トナラザルベカラズ。

19. $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=k$ **ナルトキ** $x+y+z$ **ノ最大又ハ最小値ヲ求メヨ。但シ** a, b, c **ヲ正トス。**

〔解〕 假設ニヨリ $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=k$ ナル故ニ

$$x+y+z=\frac{1}{k}(x+y+z)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$$

$$=\frac{1}{k}\left\{a+b+c+\left(\frac{ay}{x}+\frac{bx}{y}\right)+\left(\frac{az}{x}+\frac{cx}{z}\right)+\left(\frac{bz}{y}+\frac{cy}{z}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{k}\left\{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2+\left(\sqrt{\frac{ay}{x}}-\sqrt{\frac{bx}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{az}{x}}-\sqrt{\frac{cx}{z}}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\sqrt{\frac{bz}{y}}-\sqrt{\frac{cy}{z}}\right)^2\right\}$$

故ニ $k>0$ ナラバ

$$\frac{ay}{x}=\frac{bx}{y}, \qquad \frac{az}{x}=\frac{cx}{z}, \qquad \frac{bz}{y}=\frac{cy}{z}$$

ナルトキ，即チ

$$\frac{x}{\sqrt{a}}=\frac{y}{\sqrt{b}}=\frac{z}{\sqrt{c}}$$

ナルトキ $x+y+z$ ハ最小ニシテ其最小値ハ

$$\frac{1}{k}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$$

ニ等シク，$k<0$ ナラバ同ジ時ニ $x+y+z$ ハ最大トナリ，其最大値ハ矢張リ

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{k}$$ ニ等シ。

〔注意〕 一般ニ n 個ノ變數 $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ガ

$$\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots\ldots+\frac{a_n}{x_n}=k$$

ナル條件ノ下ニ變ズルトキ $x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n$ ハ k ガ正ナルカ負ナルカニ從ッテ

$$\frac{x_1}{\sqrt{a_1}}=\frac{x_2}{\sqrt{a_2}}=\ldots\ldots=\frac{x_n}{\sqrt{a_n}}$$

ナルトキ最小又ハ最大トナリ，其最小又ハ最大値ハ

$$\frac{(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots\ldots+\sqrt{a_n})^2}{k}$$

ニテ表ハサル。

20. 表面積ガ一定ナル直六面体ノ中最大体積ヲ有スルモノハ立方体ニシテ又体積ガ一定ナル直六面体ノ中最小表面積ヲ有スルモノハ立方体ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 直六面体ノ一頂点ニ會スル三稜ヲ x, y, z トシ表面積ヲ s 体積ヲ v トスレバ

$$s=2(xy+yz+zx),$$

$$v=xyz=\sqrt{xy.yz.zx}.$$

故ニ基本定理 III ニヨリ s ガ一定ナルトキハ

$$xy=yz=zx \quad 即チ \quad x=y=z$$

ノトキ v^2 ハ最大トナル，從ッテ v ハ最大トナル，即チ定表面積ヲ有スル直六面体ノ中最大体積ヲ有スルモノハ立方体ナリ，同様ニ v ガ一定ナルトキハ $x=y=z$ ノトキ s ハ最小トナル，即チ定体積ノ直六面体ノ中最小表面積ヲ有スルモノハ立方体ナリ。

21. 正三角形ハ定周圍ノ三角形中最大面積ヲ有シ，又定面積ノ三角形中最小周圍ヲ有スルコトヲ証セヨ。

〔解〕 三角形ノ面積ヲ △，周圍ヲ $2s$，三邊ヲ a, b, c トスレバ

$$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad 2s=a+b+c,$$

今 $s-a=x,\ s-b=y,\ s-c=z$ トオケバ

$$x+y+z=3s-(a+b+c)=s, \qquad sxyz=\triangle^2,$$

依ッテ s ガ一定ナルトキハ $x=y=z$ ノトキ △ ハ最大トナリ（基本定理 III）

又 △ ガ一定ナルトキ

$$\triangle^2=(x+y+z)xyz, \qquad s=\frac{\triangle^2}{xyz}$$

故ニ今 $x^2yz=X,\quad xy^2z=Y,\quad xyz^2=Z$ トオケバ

$$\triangle^2=X+Y+Z, \qquad s=\frac{\triangle^2}{(XYZ)^{\frac{1}{4}}},$$

故ニ $X=Y=Z$ 即チ $x=y=z$ ノトキ s ハ最小トナル，然ルニ $x=y=z$ ヨリ直チニ $a=b=c$ ヲ得ル故ニ此等ノ場合ノ三角形ハ正三角形ナリ。

22. x, y ガ正ニシテ且ツ $x+y=2a$ ナルトキ $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ノ最大値ヲ求メヨ。

〔解〕 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ヲ最大ナラシムルタメニハ $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+y+2\sqrt{xy}$ ヲ最大ナラシムレバ可ナリ，然ルニ $x+y=2a$ ナル故ニ $x+y+2\sqrt{xy}$ ヲ最大ナラシムルタメニハ結局 $\sqrt{xy}$ ヲ最大ナラシムレバ可ナリ，即チ xy ヲ最大ナラシムレバ可ナリ，然ルニ $x+y$ ガ一定ナル故ニ $x=y$ ノトキ xy ハ最大トナル，依ッテ $x=y=a$ ノトキ $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ハ最大トナリ，其最大値ハ $2\sqrt{a}$ ナリ。

23. $x>0,\ a>0$ ナルトキ $\dfrac{x^2+a^2}{x}$ ノ最小値ヲ求メヨ。

〔解〕 $\dfrac{x^2+a^2}{x}=x+\dfrac{a^2}{x}$,

然ルニ $x\times\dfrac{a^2}{x}=a^2$.

故ニ基本定理 III ニヨリ $x=\dfrac{a^2}{x}$ ノトキ $\dfrac{x^2+a^2}{x}$ ハ最小トナル

即チ $x=a$ ノトキ $\dfrac{x^2+a^2}{x}$ ハ最小値 $2a$ トナル。

24. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ **ナルトキ xyz ノ最大値ヲ求メヨ。**

〔解〕 $\dfrac{x^2}{a^2},\ \dfrac{y^2}{b^2},\ \dfrac{z^2}{c^2}$ ハ正ニシテ其和ガ一定ナル故ニ $\dfrac{x^2}{a^2}\times\dfrac{y^2}{b^2}\times\dfrac{z^2}{c^2}$ ハ

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}$$

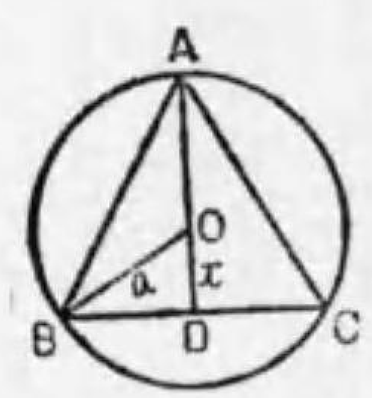
ノトキ最大トナル，從ツテコノトキ xyz モ亦最大トナル，

即チ　$x=\dfrac{a}{\sqrt{3}},\ y=\dfrac{b}{\sqrt{3}},\ z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$

ノトキ xyz ハ最大値 $\dfrac{abc}{3\sqrt{3}}$ トナル。

25. 定圓ニ內接スル三角形ノ中正三角形ハ其面積最大ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕



定圓ニ內接スル三角形ハ一邊ヲ定ムレバ他ノ二邊ガ相等シキトキ面積最大トナルコトハ容易ニ証明セラル、故ニ最大ナル內接三角形ハ二等邊三角形中ニアルベシ，依ツテ今 ABC ヲ內接二等邊三角形トシ，　頂点 A ヨリ BC ニ下ス垂線ノ足ヲ D，圓ノ中心ヲ O，半徑ヲ a，OD ヲ x トスレバ，

$$\triangle ABC=(a+x)\sqrt{a^2-x^2},$$

故ニ　$(a+x)^2(a^2-x^2)$ ヲ最大ナラシムル x ノ値ヲ求メンニ

$$(a+x)^2(a^2-x^2)=(a+x)^3(a-x),$$

$$\frac{a+x}{3}+\frac{a+x}{3}+\frac{a+x}{3}+(a-x)=2a,$$

故ニ基本定理 III ニヨリ

$$\frac{a+x}{3}=a-x \qquad \therefore\ x=\frac{a}{2}$$

ノトキ $\left(\dfrac{a+x}{3}\right)^3(a-x)$ ハ最大トナル，從ツテ $x=\dfrac{a}{2}$ ノトキ $(a+x)^3(a-x)$ ハ最大トナル，而シテコノトキ

$$BC=2\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{3}a,\quad AB=\sqrt{(a+x)^2+(a^2-x^2)}=\sqrt{3}a$$

故ニ最大ナル內接三角形ハ正三角形ナルヲ知ル。

26. $x_1x_2\ldots\ldots x_n$ **ナル n 個ノ正ノ數ガ**

$$p_1x_1+p_2x_2+\ldots\ldots+p_nx_n=k$$

ナル條件ノ下ニ變ズルトキ其積 $x_1x_2\ldots\ldots x_n$ **ハ**

$$p_1x_1=p_2x_2=\ldots\ldots=p_nx_n=\frac{k}{n}$$

ナルトキ最大トナルコトヲ証セヨ，但シ $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ ハ皆正ノ定數トス。

〔解〕 $p_1, p_2\ldots\ldots p_n$ ハ皆正ノ定數ナル故ニ

$$(p_1p_2\ldots\ldots p_n)(x_1x_2\ldots\ldots x_n)=(p_1x_1)(p_2x_2)\ldots\ldots(p_nx_n)$$

ガ最大トナルトキ $x_1x_2\ldots\ldots x_n$ モ亦最大トナル，

然ルニ $p_1x_1, p_2x_2, \ldots\ldots p_nx_n$ ハ正ニシテ其和ガ一定ナル故ニ基本定理 III ニヨリ各ガ相等シキトキ，即チ

$$p_1x_1=p_2x_2=\ldots\ldots=p_nx_n=\frac{k}{n}$$

ナルトキ其連乘積ハ最大トナル，從ツテコノト $x_1x_2\ldots\ldots x_n$ モ亦最大トナル。

27. $(x^2-1)(x-2)$ **ノ極大極小値ヲ求メヨ。**

〔解〕 $(x^2-1)(x-2)=(x+1)(x-1)(x-2)$,

故ニ　$x<-1,\ x>2$ ナルトキハ所題ノ式ハ常ニ減少或ハ增加スル故ニ此範圍內ニハ極大モ極小モナキコト明カナリ，又 $x=-1,\ x=1,\ x=2$ ノ前後ニ於テ所題ノ式ノ符號ハ變化スル故ニコレ等ノ値ニ於テモ增ヨリ減ニ或ハ減ヨリ增ニ移ルコトナク從ツテ極大又ハ極小トナラズ，　依ツテ -1 ト 1 トノ間及ビ 1 ト 2 トノ間ヲ考フレバヨシ。

i) $-1<x<1$,

今 p ヲ正ノ定數トスレバ $(p+1)(x+1),\ p(1-x),\ 2-x$ ハ皆正ニシテ其和ハ一定ナリ，依ツテ

$$(p+1)(x+1)=p(1-x)=2-x \quad 即チ\quad x=\frac{2-\sqrt{7}}{3},\ p=\frac{1+\sqrt{7}}{2}>0,$$

ノトキ $(p+1)(x+1)p(1-x)(2-x)=p(p+1)(x+1)(x-1)(x-2)$ ハ最大トナル，從ツテ $x=\frac{2-\sqrt{7}}{3}$ ヲ境目トシテ所題ノ式ハ増ヨリ減ニ移ラザルベカラズ

從ツテコノトキ所題ノ式ハ極大トナル，其極大値ハ $\frac{2(10+7\sqrt{7})}{27}$

ii) $1<x<2$.

$p>0$ トスレバ $(x+1)$, $p(x-1)$, $(p+1)(2-x)$ ハ皆正ニシテ其和ハ一定ナリ

依ツテ

$$x+1=p(x-1)=(p+1)(2-x) \quad 即チ \quad x=\frac{2+\sqrt{7}}{3},\quad p=2+\sqrt{7}>0$$

ノトキ $(x+1)p(x-1)(p+1)(2-x)=-p(p+1)(x+1)(x-1)(x-2)$ ハ最大トナル，從ツテ所題ノ式ハ最小トナル，從ツテ $x=\frac{2+\sqrt{7}}{3}$ チ境目トシテ所題ノ式ハ減ヨリ増ニ移ラザルベカラズ，故ニコノトキ所題ノ式ハ極小トナル，其極小値ハ

$\frac{2(10-7\sqrt{7})}{27}$

28. $a>0$ **ナルトキ** $x(a^2-x^2)$ **ハ** $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$ **ノトキ極大トナリ**

$x=-\frac{a}{\sqrt{3}}$ **ノトキ極小トナルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 前問ト同樣ニ $x(a^2-x^2)=x(a+x)(a-x)$

ナル故ニ所題ノ式ノ極大又ハ極小ハ $-a$ ト 0 トノ間又ハ 0 ト a トノ間ニアルベシ，依ツテ

i) $-a<x<0$

今 $0<p<1$ ナル如キ定數 p チ考フレバ

$(1-p)(a-x)$, $-px$, $a+x$

ハ皆正ニシテ且ツ其和ハ一定ナリ，依ツテ

$$(1-p)(a-x)=-px=a+x \quad ナルトキ，即チ \quad p=\sqrt{3}-1,\quad x=-\frac{a}{\sqrt{3}}$$

ナルトキ $(1-p)(a-x)(-px)(a+x)=-p(1-p)x(a+x)(a-x)$ ハ極大トナリ，從ツテ所題ノ式ハ極小トナル。

ii) $0<x<a$

$p>0$ トスレバ $(p+1)(a-x)$, px, $a+x$ ハ皆正ニシテ其和ハ一定ナリ，

依ツテ $(p+1)(a-x)=px=a+x$ ナルトキ，

即チ $p=1+\sqrt{3}$, $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$ ノトキ所題ノ式ハ極大トナル。

29. a, b, c, d **ガ皆正ノ定數ニシテ且ツ** $a-x$, $b-y$ **モ亦正ナルトキ**

$$(a-x)(b-y)(cx+dy)$$

ノ最大値ハ $\frac{(ac+bd)^3}{27cd}$ **ナルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 $c, d>0$ ナル故ニ所題ノ式ハ

$$(ac-cx)(bd-dy)(cx+dy)$$

ガ最大トナルトキ最大トナル，然ルニ

$$(ac-cx)+(bd-dy)+(cx+dy)=ac+bd$$

ニシテ一定ナル故ニ $cx+dy>0$ ナルトキハ

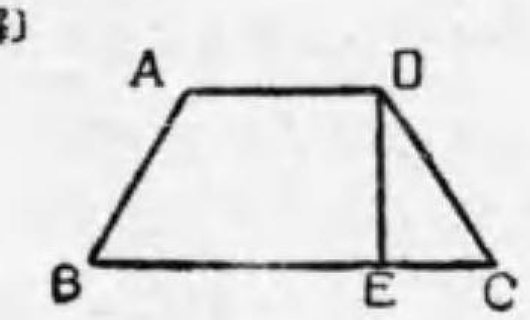
$$ac-cx=bd-dy=cx+dy=\frac{ac+bd}{3}$$

ノトキ上ノ式ハ最大トナル，而シテ $c(a-x)>0$ ナル故ニ $cx+dy>0$

依ツテ $(a-x)=\frac{ac+bd}{3c}$, $b-y=\frac{ac+bd}{3d}$ $cx+dy=\frac{ac+bd}{3}$ ノトキ所題ノ式ハ最大トナル，從ツテ其最大値ハ $\frac{(ac+bd)^3}{27cd}$ ナリ。

30. 二等邊梯形ノ二等邊ト小ナル底トガ定マレルトキ，其面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ。

〔解〕



二等邊梯形 $ABCD$ ニ於テ小ナル底 $AD=2a$, 二等邊 $AB=CD=b$ トシ D ヨリ BC ニ下ス垂線ノ足ヲ E トシ

$$EC=\frac{BC-AD}{2}=x$$

トオク，然ルトキハ

$$DE=\sqrt{b^2-x^2}$$

故＝梯形ノ面積ヲ s トスレバ

$$s=(a+a+x)\sqrt{b^2-x^2} \qquad \therefore\ s^2=(2a+x)^2(b-x)(b+x)$$

依ツテ s^2 ヲ最大ナラシムルタメ＝前々問ト同樣＝適當ナル正ノ定數 p チトレバ

$$\frac{2a+x}{2},\quad \frac{2a+x}{2},\quad p(b+x),\quad (p+1)(b-x)$$

ノ和ハ一定トナル故＝各因數ガ正ナラバ

$$\frac{2a+x}{2}=p(b+x)=(p+1)(b-x)$$

ナルトキ s^2 ハ最大トナル，コレヨリ x 及ビ p チ求ムレバ

$$x=\frac{2(a-pb)}{2p-1}=\frac{b}{2p+1}$$

$$\therefore\ 4bp^2+4(b-a)p-2a-b=0 \qquad \therefore\ p=\frac{a-b\pm\sqrt{a^2+2b^2}}{2b};$$

$p>0$ ナルヲ要スル故＝

$$p=\frac{a-b+\sqrt{a^2+2b^2}}{2b} \qquad \therefore\ x=\frac{b}{2p+1}=\frac{\sqrt{a^2+2b^2}-a}{2}<b,$$

p,x ノコノ値ノトキ $2a+x$, $p(b+x)$, $(p+1)(b-x)$ ハ皆正ナル故＝ s^2 ハ最大トナル，從ツテ s ハ最大トナル。

其最大値ハ $(2a+x)\sqrt{b^2-x^2}$ ＝ $x=\dfrac{\sqrt{a^2+2b^2}-a}{2}$ トオキテ

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(3a+\sqrt{a^2+2b^2})\sqrt{b^2-a^2+a\sqrt{a^2+2b^2}}$$

ヲ得，又コノトキ

$$DE^2=\frac{b^2-a^2+a\sqrt{a^2+2b^2}}{2}=BE\cdot CE$$

トナル故＝ $\angle BDC=90^\circ$ ナルヲ知ル。

31. **$(x-1)(x-7)(x-9)(x-15)$ ヲ極大又ハ極小ナラシムル x ノ値ヲ求メヨ。**

〔解〕 α,β,γ ヲ 0 ＝等シカラザル未知ノ定數トシ，所題ノ式チ $f(x)$ ＝テ表ハセバ

$$f(x)=\frac{(x-1)(\alpha x-7\alpha)(\beta x-9\beta)(\gamma x-15\gamma)}{\alpha\beta\gamma}.$$

今若シ $1+\alpha+\beta+\gamma=0$ (1)

ナルヤウ＝ α,β,γ チ定ムレバ

$$(x-1)+(\alpha x-7\alpha)+(\beta x-9\beta)+(\gamma x-15\gamma)$$

ハ定數トナル故＝ $x-1$, $\alpha x-7\alpha$, $\beta x-9\beta$, $\gamma x-15\gamma$ ガ皆正ナラバ $\alpha\beta\gamma$ ガ正ナルカ負ナルカ＝從ツテ基本定理 III ＝ヨリ

$$x-1=\alpha x-7\alpha=\beta x-9\beta=\gamma x-15\gamma \qquad (2)$$

ノトキ $f(x)$ ハ最大又ハ最小トナルベシ，

然ル＝ $x=7$, or 9 or 15 ノ前後＝於テ $f(x)$ ハ符號ヲ變ズル故＝増ヨリ減＝又ハ減ヨリ増＝移ルコトナキ故＝ $f(x)$ ハ極大＝モ極小＝モナラズ，故＝ (2) ヨリ

$$\alpha=\frac{x-1}{x-7},\qquad \beta=\frac{x-1}{x-9},\qquad \gamma=\frac{x-1}{x-15}, \qquad (3)$$

(1) ＝代入スレバ

$$1+\frac{x-1}{x-7}+\frac{x-1}{x-9}+\frac{x-1}{x-15}=0$$

$$\therefore\ x=3 \text{ or } 8 \text{ or } 13,$$

$x=3$ トキハ (3) ヨリ

$$\alpha=-\frac{1}{2},\ \beta=-\frac{1}{3},\ \gamma=-\frac{1}{6} \qquad \therefore\ \alpha\beta\gamma<0,$$

而シテ $x=3$ ノ附近＝於テ $f(x)$ ノ分子ノ各因數ハ皆正

依ツテ $x=3$ ノトキ $f(x)$ ハ最小トナル，從ツテ $x=3$ ヲ境目トシテ $f(x)$ ハ減ヨリ増＝移ル故＝コノトキ $f(x)$ ハ極小トナル，

$x=8$ トスレバ $\alpha=7$, $\beta=-7$, $\gamma=-1$, $\therefore\ \alpha\beta\gamma>0$,

而シテ $x=8$ ノ附近＝於テ $f(x)$ ノ分子ノ各因數ハ皆正

依ツテ $x=8$ ノトキ $f(x)$ ハ最大トナリ，從ツテコノトキ前ト同樣＝ $f(x)$ ハ極大トナル，

$x=13$ ノトキ $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=-6$ $\therefore\ \alpha\beta\gamma<0$

依ツテ $x=13$ ノトキ上ノ場合ト同樣＝ $f(x)$ ハ極小トナル。

32. **x^3+x^2 ヲ極大又ハ極小ナラシムル x ノ値ヲ求メヨ。**

〔解〕 α,β ヲ 0 ＝等シカラザル定數トスレバ

$$x^3+x^2=(x+1)x^2=\frac{\alpha x\cdot\beta x(x+1)}{\alpha\beta}$$

今若シ $1+\alpha+\beta=0$ (1)

トスレバ $\alpha x+\beta x+(x+1)$ ハ定數トナル故ニ $\alpha x,\ \beta x,\ (x+1)$ ガ皆正ナラバ $\alpha\beta$ ガ正ナルカ又ハ負ナルカニ從ツテ所題ノ式ハ

$$\alpha x=\beta x=x+1 \tag{2}$$

ナルトキ前問ト同樣ニ極大又ハ極小トナルベシ,

今 $x\neq 0$ トスレバ (2) ヨリ

$$\alpha=\beta=\frac{x+1}{x}$$

故ニ (1) ヨリ

$$1+\frac{2(x+1)}{x}=0 \qquad \therefore\ x=-\frac{2}{3}$$

從ツテ $\alpha=\beta=-\dfrac{1}{2}$ $\qquad\therefore\ \alpha\beta>0.$

而シテ $x=-\dfrac{2}{3}$ ノ附近ニ於テ $\alpha x,\ \beta x,\ (x+1)$ ハ皆正

依ツテ $x=-\dfrac{2}{3}$ ノトキ所題ノ式ハ極大トナル。

次ニ $x=0$ ヲ吟味スルニ $x=0$ ノ兩側ニ於テ所題ノ式ハ常ニ正ニシテ $x=0$ ノトキ 0 トナル故ニコノトキ極小トナルコト明カナリ,

依ツテ所題ノ式ハ $x=-\dfrac{2}{3}$ ノトキ極大トナリ, $x=0$ ノトキ極小トナル。

33. $\boldsymbol{x+y+z=k}$ **ナルトキ** $\boldsymbol{x^p y^q z^r}$ **ハ** $\boldsymbol{\dfrac{x}{p}=\dfrac{y}{q}=\dfrac{z}{r}=\dfrac{k}{p+q+r}}$ **ナルトキ最大トナルコトヲ證セヨ, 但シ** $\boldsymbol{k}$ **ハ任意ノ定數** $\boldsymbol{x, y, z}$ **ハ正ノ變數** $\boldsymbol{p, q, r}$ **ハ或定マレル正ノ有理數トス。**

〔解〕 p, q, r ハ正ノ有理數ナル故ニ

$$p=\frac{p_1}{n}, \qquad q=\frac{q_1}{n}, \qquad r=\frac{r_1}{n}, \qquad \text{但シ } n, p_1, q_1, r_1 \text{ ハ皆正ノ整數,}$$

トオクコトヲ得, 然ルトキハ

$$x^p y^q z^r=(x^{p_1}y^{q_1}z^{r_1})^{\frac{1}{n}}=\left\{p_1^{p_1}q_1^{q_1}r_1^{r_1}\left(\frac{x}{p_1}\right)^{p_1}\left(\frac{x}{q_1}\right)^{q_1}\left(\frac{z}{r_1}\right)^{r_1}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

ニシテ n 乘根ハ正ヲトリ又 $p_1^{p_1}q_1^{q_1}r_1^{r_1}>0$ ナル故ニ

$$\left(\frac{x}{p_1}\right)^{p_1}\left(\frac{y}{q_1}\right)^{q_1}\left(\frac{z}{r_1}\right)^{r_1} \tag{A}$$

ガ最大ナルトキ所題ノ式ハ最大トナル, 然ルニ假設ニヨリ

$$p_1\left(\frac{x}{p_1}\right)+q_1\left(\frac{y}{q_1}\right)+r_1\left(\frac{z}{r_1}\right)=x+y+z=k$$

ハ一定ニシテ $\dfrac{x}{p_1},\ \dfrac{y}{q_1},\ \dfrac{z}{r_1}$ ハ皆正ナル故ニ (A) ハ

$$\frac{x}{p_1}=\frac{y}{p_1}=\frac{z}{r_1} \tag{B}$$

ノトキ最大トナル, 從ツテコノトキ所題ノ式ハ最大トナル。

然ルニ $\dfrac{p}{p_1}=\dfrac{q}{q_1}=\dfrac{r}{r_1}$

故ニ (B)' ヨリ

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}=\frac{k}{p+q+r}$$

ナルトキ $x^p y^q z^r$ ハ最大トナルヲ知ル。

〔注意〕 一般ニ n 個ノ正ノ變數 $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ガ

$$x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n=k$$

ナル條件ノ下ニ變ズルトキ其連乘積 $x_1^{p_1}x_2^{p_2}\ldots\ldots x_n^{p_1}$ ハ

$$\frac{x_1}{p_1}=\frac{x_2}{p_2}=\ldots\ldots=\frac{x_n}{p_n}=\frac{k}{p_1+p_2+\ldots\ldots+p_n}$$

ナルトキ最大トナルコトヲ同樣ニ證明スルコトヲ得。

34. $\boldsymbol{lx+my+nz=k}$ **ナルトキ** $\boldsymbol{x^p y^q z^r}$ **ハ**

$$\boldsymbol{\frac{lx}{p}=\frac{my}{q}=\frac{nx}{r}=\frac{k}{p+q+r}}$$

ナルトキ最大トナルコトヲ證セヨ, 但シ $\boldsymbol{k}$ **ハ任意ノ定數,** $\boldsymbol{l, m, n}$ **ハ正ノ定數** $\boldsymbol{x, y, z}$ **ハ正ノ變數,** $\boldsymbol{p, q, r}$ **ハ或定マレル正ノ有理數トス。**

〔解〕 $lx=X,\ my=Y,\ nz=Z$ トオケバ X, Y, Z ハ正ニシテ且ツ

$$X+Y+Z=k,$$

又 $$x^p y^q z^r=\frac{X_p\ Y_q\ Z_r}{l^p m^q n^r},$$

右邊ノ分母ハ正ナル故ニ分子ガ最大トナルトキ左邊ハ最大トナル,

然ルニ p, q, r ハ正ノ有理數ニシテ且ツ X, Y, Z ノ和ハ一定ナル故ニ $X^p Y^q Z^r$ ハ前問ニヨリ

$$\frac{X}{p}=\frac{Y}{q}=\frac{Z}{r}$$

ノトキ最大トナル, 從ツテコノトキ $x^p y^q z^r$ モ亦最大トナル,

即チ $\dfrac{lx}{p}=\dfrac{my}{q}=\dfrac{nz}{r}=\dfrac{k}{p+q+r}$

ノトキ所題ノ式ハ最大トナル。

〔注意〕 一般ニ n 個ノ正ノ變數 $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ガ

$$l_1 x_1+l_2 x_2+\ldots\ldots+l_n x_n=k$$

ナル條件ノ下ニ變ズルトキ其連乘積 $x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots\ldots x_n^{p_n}$ ハ

$$\frac{l_1x_1}{p_1}=\frac{l_2x_2}{p_2}=\ldots\ldots=\frac{l_n x_n}{p_n}=\frac{k}{p_1+p_2+\ldots\ldots+p_n}$$

ナルトキ最大トナル, 問 26 ハソノ特別ノ場合ナリ。

35. $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=1$ **ナルトキ $x^p y^q z^r$ ノ最小値ヲ求メヨ, 但シ a, b, c ハ正ノ定數, x, y, z ハ正ノ變數, p, q, r ハ或定マレル正ノ有理數トス。**

〔解〕 $\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{z}$ ヲ夫々 X, Y, Z トスレバ

$$x^p y^q z^r=\frac{1}{X^p Y^q Z^r}$$

依ツテ $X^p Y^q Z^r$ ガ最大ナルトキ $x^p y^q z^r$ ハ最小トナル,

然ルニ所題ノ條件ニヨリ

$$aX+bY+cZ=1,$$

故ニ前問ニヨリ

$$\frac{aX}{p}=\frac{bY}{q}=\frac{cZ}{r}=\frac{1}{p+q+r}$$

ノトキ $X^p Y^q Z^r$ ハ最大トナル, 依ツテ所題ノ式ハ

$$\frac{a}{px}=\frac{b}{qy}=\frac{c}{rz}=\frac{1}{p+q+r}$$

ナルトキ最小トナリ其最小値ハ

$$x=\frac{a(p+q+r)}{p},\quad y=\frac{b(p+q+r)}{q},\quad z=\frac{c(p+q+r)}{r}$$

ノトキノ値 $\dfrac{a^p b^q c^r (p+q+r)^{p+q+r}}{p^p q^q r^r}$ ナリ。

〔注意〕 一般ニ n 個ノ正ノ變數 $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ ガ

$$\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\ldots\ldots+\frac{a_n}{x_n}=1$$

ナル條件ノ下ニ變化スルトキ其連乘積 $x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots\ldots x_n^{p_n}$ ハ

$$\frac{a_1}{p_1x_1}=\frac{a_2}{p_2x_2}=\ldots\ldots=\frac{a_n}{p_n x_n}=\frac{1}{p_1+p_2+\ldots\ldots+p_n}$$

ナルトキ最小トナルコトヲ同樣ニ證明スルコトヲ得。

36. $x^p y^q z^r=k$ **ナルトキ $x+y+z$ ハ $\dfrac{x}{p}=\dfrac{y}{q}=\dfrac{z}{r}$ ナルトキ最小トナルコトヲ證セヨ, 但シ k ハ任意ノ定數, x, y, z ハ正ノ變數, p, q, r ハ或定マレル正ノ有理數トス。**

〔解〕 p, q, r ハ正ノ有理數ナル故ニ n, p_1, q_1, r_1 ヲ正ノ整數トシ

$$p=\frac{p_1}{n},\quad q=\frac{q_1}{n},\quad r=\frac{r_1}{n}$$

トオクコトヲ得, 然ルトキ x_1, y_1, z_1 ヲ正ノ變數トシ,

$$x_1^{p_1} y_1^{q_1} z_1^{r_1}=k$$

ナルトキハ基本定理 III ニヨリ $p_1 x_1+q_1 y_1+r_1 z_1$ ハ $x_1=y_1=z_1$ ノトキ最小トナル

依ツテ今 $p_1 x_1=x,\ q_1 y_1=y,\ r_1 z_1=z$ トオケバ

$\dfrac{x^{p_1} y^{q_1} z^{r_1}}{p_1^{p_1} q_1^{q_1} r_1^{r_1}}=k$ 即チ $x^{p_1} y^{q_1} z^{r_1}=$一定, ナルトキ

$x+y+z$ ハ $\dfrac{x}{p_1}=\dfrac{y}{q_1}=\dfrac{z}{r_1}$ ノトキ最小トナル,

即チ $(x^{p_1} y^{q_1} z^{r_1})^{\frac{1}{n}}=x^p y^q z^r=$一定, ナルトキ

$x+y+z$ ハ $\dfrac{x}{\frac{p_1}{n}}=\dfrac{y}{\frac{q_1}{n}}=\dfrac{z}{\frac{r_1}{n}}$ 即チ $\dfrac{x}{p}=\dfrac{y}{q}=\dfrac{z}{r}$

ナルトキ最小トナル。

〔注意〕 一般ニ n 個ノ正ノ變數 $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ガ $x_1^{p_1} x_1^{p_1} \ldots\ldots x_n^{q_1}=k$ ナル條件ノ下ニ變ズルトキ

$$x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n \quad ハ \quad \frac{x_1}{p_1}=\frac{x_2}{p_2}=\ldots\ldots=\frac{x_n}{p_n}$$

ノトキ最小トナルコトヲ同様ニ證明スルコトヲ得。

37. 25 ヲ三ツノ部分ニ分チ第一ノ部分ト，第二，第三ノ部分ノ平方トノ積ヲ最大ナラシムベシ。

〔解〕 三ツノ部分ヲ x, y, z トスレバ x, y, z ハ勿論正ニシテ且ツ

$$x+y+z=25$$

故ニ xy^2z^2 ヲ最大ナシムルニハ問題 33 ニヨリ

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}=\frac{25}{5}=5$$

トスレバ可ナリ，即チ

$$x=5, \quad y=z=10$$

ナルトキ xy^2z^2 ハ $5\times10^2\times10^2=50000$ ナル最大値ヲ有ス。

38. m, n ヲ正ノ定數，x ヲ正ノ變數トスルトキ

$$x^m+\frac{1}{x^n} \quad ハ \quad x=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}} \quad \text{ナルトキ最小ナルコトヲ證セヨ。}$$

〔解〕 x, m, n ハ正ニシテ

$$\left(x^m\right)^{\frac{1}{m}}\left(\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$$

ナル故ニ問 36 ニヨリ $x^m+\dfrac{1}{x^n}$ ハ

$$\frac{\dfrac{x^m}{1}}{\dfrac{1}{m}}=\frac{\dfrac{1}{x^n}}{\dfrac{1}{n}}$$

ナルトキ最小トナル，

即チ　$mx^m=\dfrac{n}{x^n}$ $\quad\therefore\quad x^{m+n}=\dfrac{n}{m}$ $\quad\therefore\quad x=\left(\dfrac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}$

ノトキ $x^m+\dfrac{1}{x^n}$ ハ最小トナル。

39. x, y ガ互ニ獨立シテ變化スルトキ

$$f(x,y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$$

ヲシテ最大又ハ最小ナラシムル x, y ノ値及ビ其最大又ハ最小値ヲ求メヨ。

〔解〕 $f(xy)$ ヲ最大又ハ最小ナラシムル x, y ノ値ヲ x_0, y_0 トスレバ

$$f(x, y_0)=ax^2+2hxy_0+by_0^2+2gx+2fy_0+c$$
$$=ax^2+2(hy_0+g)x+by_0^2+2fy_0+c$$

ハ $x=x_0$ ノトキ最大又ハ最小トナル，然ルニ $f(xy_0)$ ハ x ノ二次式ナル故ニ（問. 5）ニヨリ

$$x=-\frac{hy_0+g}{a}$$

ノトキ $a<0$ ナラバ最大トナリ，$a>0$ ナラバ最小トナル，依ツテ

$$x_0=-\frac{hy_0+g}{a} \qquad \therefore\quad ax_0+hy_0+g=0. \qquad (1)$$

同様ニ　$f(x_0y)=ax_0^2+2hx_0y+by^2+2gx_0+2fy+c$

$$=by^2+2(hx_0+f)y+ax_0^2+2gx_0+c$$

ハ $y=y_0$ ノトキ最大又ハ最小トナル，然ルニ $f(x_0y)$ ハ y ノ二次式ナル故ニ上ト同様ニ

$$y=-\frac{hx_0+f}{b}$$

ノトキ $b<0$ ナラバ最大トナリ，$b>0$ ナラバ最小トナル，依ツテ

$$y_0=-\frac{hx_0+f}{b} \qquad \therefore\quad hx_0+by_0+f=0 \qquad (2)$$

故ニ a, b ガ同符數ヲ有スル場合ニハ $f(xy)$ ヲ最大又ハ最小ナラシムル，x, y ノ値ハ (1) (2) ヨリ決定セラル，即チ

$$x_0=-\frac{bg-hf}{ab-h^2}, \qquad y_0=-\frac{af-gh}{ab-h^2},$$

又 $f(xy)$ ノ最大又ハ最小値ハ

$$f(x_0y_0)=ax_0^2+2hx_0y_0+by_0^2+2gx_0+2fy_0+c$$
$$=x_0(ax_0+hy_0+g)+y_0(hx_0+by_0+f)+gx_0+fy_0+c$$
$$=gx_0+fy_0+c=\frac{g(hf-bg)+f(gh-af)+c(ab-h^2)}{ab-h^2}$$

$$=\frac{-af^2-bg^2-ch^2+2hgf+abc}{ab-h^2}.$$

〔注意〕 $a.\ b$ ガ異符號ヲ有スレバ最大又ハ最小ナシ。又本解ハ $x=x_0,\ y=y_0$ ノトキ最大又ハ最小ナリト假定シテ議論ヲ進メタリ。從ツテ $a,\ b$ ガ同符號ナルモ必ズシモ $f(xy)$ ハ最大最小値ヲ有スルモノニアラズ。(微分學演習第十二章參照)

40. $x^2+y^2+z^2=1,\ lx+my+nz=0$ **ナルトキ** $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$ **ノ最大又ハ最小値ハ次ノ方程式ヲ満足セシムルコトヲ証セヨ。**

$$\frac{l^2}{a^2-u}+\frac{m^2}{b^2-u}+\frac{n^2}{c^2-u}=0.$$

〔解〕 $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=k$ トスレバ $x^2+y^2+z^2=1$ ナル故ニ

$$\frac{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}{x^2+y^2+z^2}=k,$$

故ニ $\frac{x}{z}=X,\ \frac{y}{z}=Y$ トオケバ

$$\frac{a^2X^2+b^2Y^2+c^2}{X^2+Y^2+1}=k \qquad \therefore\ (a^2-k)X^2+(b^2-k)Y^2+c^2-k=0,$$

然ルニ第二ノ條件ヨリ $Y=-\frac{lX+n}{m},$

$$\therefore\ (a^2-k)X^2+\frac{(b^2-k)(lX+n)^2}{m^2}+c^2-k=0$$

$$\therefore\ \{(a^2-k)m^2+(b^2-k)l^2\}X^2+2(b^2-k)lnX+(b^2-k)n^2+(c^2-k)m^2=0$$

$$\therefore\ X=\frac{-(b^2-k)ln\pm\sqrt{\quad}}{(a^2-k)m^2+(b^2-k)l^2},$$

k ノ最大又ハ最小値ヲ k_0 トシ其時ノ x, y, z ノ値ヲ x_0, y_0, z_0 トスレバ, $k=k_0$ ノトキ上ノ根號内ハ 0 トナルガ故ニ (問. 5)

$$\frac{x_0}{z_0}=\frac{-(b^2-k_0)ln}{(a^2-k_0)m^2+(b^2-k_0)l^2}$$

同樣ニ

$$\frac{y_0}{z_0}=\frac{-(a^2-k_0)mn}{(a^2-k_0)m^2+(b^2-k_0)^2},$$

$$\therefore\ \frac{(a^2-k_0)x_0}{lz_0}=\frac{(b^2-k_0)y_0}{mz_0} \qquad \therefore\ \frac{(a^2-k_0)x_0}{l}=\frac{(b^2-k_0)y_0}{m}$$

同樣ニ

$$\frac{(b^2-k_0)y_0}{m}=\frac{(c^2-k_0)z_0}{n}$$

$$\therefore\ \frac{a^2-k_0}{l}x_0=\frac{b^2-k_0}{m}y_0=\frac{c^2-k_0}{n}z_0$$

然ルニ $lx_0+my_0+nz_0=0$

$$\therefore\ \frac{l^2}{a^2-k_0}+\frac{m^2}{b^2-k_0}+\frac{n^2}{c^2-k_0}=0$$

依ツテ所題ノ式ノ最大又ハ最小値 k_0 ハ方程式

$$\frac{l^2}{a^2-u}+\frac{m^2}{b^2-u}+\frac{n^2}{c^2-u}=0$$

ノ根ナリ。

第四章

順列, 組合セ

基本定理 I. ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$

II. $${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

III. $$\frac{n!}{p!q!r!\ldots\ldots},\quad n=p+q+r+\ldots\ldots$$

IV. ${}_n\Pi_r=n^r$

V. $${}_nH_r=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{r!}={}_{n+r-1}C_r$$

〔注意〕 相等シキ元素ヲ含ム順列組合セノ一般ノ場合ニツイテハ問 31, 33 又ハ第五章問 38, 40 等参照。

演習問題

1. 1, 2, 4, 6, 8 ナル 5 個ノ數字ヨリ 3 個ヅヽトリテ作ル三桁ノ數ハ何個アルカ, 又其中奇數ハ何個アルカ, 又其三桁ノ數ノ總和ハ如何。

〔解〕 1, 2, 4, 6, 8 ナル五個ノ數字ヨリ作ル三桁ノ數ハ　${}_5P_3=5.4.3=60$

其中奇數ハ一ノ位ガ 1 ニシテ十, 百, ノ位ガ 2, 4, 6, 8 ノ何レニテモ可ナル故ニ其數ハ ${}_4P_2=4.3=12$

ナリ, 次ニ三桁ノ數 60 個ノ總和ヲ求メンニ一ノ位ガ 1 ナル數ハ ${}_4P_2$ 個ナルト同樣ニ一ノ位ガ 2 ナル數モ ${}_4P_2$, 4, 6, 8 ナル數モ夫々 ${}_4P_2$ ナル故ニ先ヅ 60 個ノ三桁ノ數ノ一ノ位ノミヲ加フレバ　$(1+2+4+6+8){}_4P_2=21\times12=252$

又十ノ位ガ 1 ナル數ハ百ノ位ト一ノ位トガ殘ル 2, 4, 6, 8 ノ何レニテモ可ナル故ニ ${}_4P_2$ 個アリ, 同樣ニ十ノ位ガ 2, 4, 6, 8 ナル數モ皆 ${}_4P_2$ 個アリ, 故ニ 60 個ノ三桁ノ數ノ十ノ位ノ總計ハ

$$(10+20+40+60+80){}_4P_2=210\times12=2520$$

同樣ニ百ノ位ノ總計ハ

$$(100+200+400+600+800){}_4P_2=25200$$

故ニ所要ノ總和ハ

$$252+2520+25200=27972$$

2. 0, 1, 2, 3, 4 ナル五個ノ數字ヨリ任意ノ四個ヲトリテ作ル四桁ノ數ハ何個アルカ, 又其總和如何。

〔解〕 0, 1, 2, 3, 4 ヨリ任意ノ四個ヲトリテ並ベル仕方ハ ${}_5P_4$, 其中首位ガ 0 ナルモノハ ${}_4P_3$, 依ツテ所要ノ四桁ノ數ハ

${}_5P_4-{}_4P_3=96$ 個アリ

次ニ其總和ヲ求メンニ前問ト同樣ニ一ノ位ガ 1 ナルモノ $({}_4P_3-{}_3P_2)$ 個, 一ノ位ガ 2, 3, 4 ナルモノ各 $({}_4P_3-{}_3P_2)$ 個, 從ツテ一ノ位ダケノ總和ハ

$$(1+2+3+4)({}_4P_3-{}_3P_2)=180$$

同樣ニ左ヨリ第二位, 第三位, 第四位ノ總和ハ

$$(10+20+30+40)({}_4P_3-{}_3P_2)=1800$$

$$(100+200+300+400)({}_4P_3-{}_3P_2)=18000$$

$$(1000+2000+3000+4000){}_4P_3=240000$$

故ニ所要ノ總和ハ

$$180+1800+18000+240000=259980$$

3. 1, 2, 3, 4, 5 ナル五個ノ數字ヲ色々ニ列ベテ作ル五桁ノ數ノ中 23000 ヨリ大ナルモノハ何個アルカ。

〔解〕 1, 2, 3, 4, 5 ヨリ作ル五桁ノ數ノ總個數ハ ${}_5P_5$, 此中 23000 ヨリ小ナルモノハ首位ガ 1 ナルモノト首位ト其次トガ 21 ナルモノトノ二種ナリ, 首位ガ 1 ナル數ノ個數ハ ${}_4P_4$, 首位ト其次トガ 21 ナル數ノ個數ハ ${}_3P_3$, 依ツテ 23000 ヨリ大ナル五桁ノ數ハ

$${}_5P_5-{}_4P_4-{}_3P_3=90$$

個ナリ。

4. *triangle* ノ文字ヲ悉ク用ヒテ作リ得ル順列ノ中 a, n ノ何レヲモ兩端ニ有セザルモノ幾ツアルカ，又 a, n ガ偶數番目ヲ占ムルモノ幾ツアルカ。

〔解〕 文字ハ八ツアル故ニコレヲ用ヒテ作リ得ル順列ノ總數ハ ${}_8P_8$，ソノ中 a ヲ左端ニ有スルモノハ ${}_7P_7$，右端ニ有スルモノモ ${}_7P_7$，即チ a ヲ何レカノ端ニ有スル順列ノ數ハ ${}_7P_7\times2$，同樣ニ n ヲ何レカノ端ニ有スル順列ノ數モ ${}_7P_7\times2$ ナリ，併シコノ兩方ハ a ト n トヲ兩端ニ有スル順列ヲ共有ス。 而シテ a ト n トヲ兩端ニ有スル順列ノ數ハ ${}_6P_6\times2$，依ツテ a, n ノ何レヲモ兩端ニ有セザル順列ノ數ハ ${}_8P_8-({}_7P_7\times4-{}_6P_6\times2)=21600$

次ニ八個ノ位置ノ中偶數番目ハ四個アリ此四個ノ位置ニ a, n ノ何レカヲ置ク仕方ハ ${}_4P_2$ 通リアリ，而シテ殘ル六個ノ位置ヲ他ノ六個ノ文字ニテ占メル仕方ハ ${}_6P_6$ 通リアリ，依ツテ a, n ガ偶數番目ヲ占ムル順列ノ數ハ

$${}_4P_2\times{}_6P_6=8640$$

5. 300 ト 800 トノ間ニアリテ悉ク相異ナル數字ヨリナル奇數ノ數如何。

〔解〕 題意ニ適スル數ハ一ノ位ガ 1, 3, 5, 7, 9 ノ何レカニシテ百ノ位ハ 3, 4, 5, 6, 7 ノ何レカナリ，然ルニ一ノ位ガ 1 ナル奇數ノ十ノ位ガ 0, 2, 8, 9 ノ四種ノ何レカナルトキハ百ノ位ハ 3, 4, 5, 6, 7 ノ何レニテモヨク，十ノ位ガ 3, 4, 5, 6, 7 ノ五種ノ何レカナルトキハ百ノ位ハ殘ル四種ノ何レカナラザルベカラズ。 從ツテ一ノ位ガ 1 ナル題意ニ適スル奇數ハ $4\times5+5\times4=40$ 個，同樣ニ一ノ位ガ 9 ナル奇數モ 40 個，一ノ位ガ 3 ナル奇數ノ十ノ位ガ 0, 1, 2, 8, 9 ノ五種ノ何レカナルトキハ百ノ位ハ 4, 5, 6, 7 ノ何レカニシテ十ノ位ガ 4, 5, 6, 7 ノ四種ノ何レカナルトキハ百ノ位ハ殘ル三種ノ何レカナラザルベカラズ。從ツテ一ノ位ガ 3 ナル題意ニ適スル奇數ノ數ハ $5\times4+4\times3=32$ 個，一ノ位ガ夫々 5, 7 ナル奇數モ同樣ニ夫々 32，依ツテ所要ノ數ハ

$$40\times2+32\times3=176$$

6. 甲，乙，丙，丁，戊ノ五人ガ圓卓ノ周リニ着席スル仕方ハ幾通リアルカ，但シ相互ノ關係的位置ノ變ラザルモノハ總テ皆同ジ仕方ト見做スモノトス。

〔解〕 相互ノ關係的位置ノ變ラザルモノ，即チ順送リニ皆一樣ニ移動シタルモノモ同ジ並ビ方ト見做ス故ニ五人ノ中ノ任意ノ一人ハ豫メ任意ノ席ヲ定メオクコトヲ得，即チ一人ガ或席ヲ定メ，然ル後殘ル四人ガ殘リノ四個ノ席ニアラユル順序ニ着席スレバヨキナリ，然ルニ四人ガ四個ノ席ニ着席スル仕方ハ ${}_4P_4$ 通リアリ，從ツテ五人ガ圓陣ヲ作ル仕方ハ ${}_4P_4=24$ 通リアリ。

〔注意〕 一般ニ n 人ガ圓卓ノ周リニ着席スル仕方ハ ${}_{n-1}P_{n-1}=(n-1)!$ 通リアリ。

7. 10 人ガアラユル順序ニ圓陣ヲ作ルトキ其中ノ特別ノ三人ガ相隣接スル場合ハ幾通リアルカ。

〔解〕 特別ノ三人ヲ一團トシテ 10 人ガ圓陣ヲ作ル仕方ハ前問ニヨリ ${}_{8-1}P_{8-1}=7!$，此各ノ並ビ方ニ於テ一團ヲナセル三人ノ間ダケニテ順序ノ變リ方ハ ${}_3P_3=3!$ アリ，依ツテ三人ガ相隣接スル場合ノ總數ハ $7!\times3!$ ナリ。

8. 白，黒，赤等五種類ノ色ノ球五個ヲ以テ珠數ヲ作ルトキ其作リ方ハ幾通リアルベキカ。

〔解〕 五人ガ圓陣ヲ作ル仕方ハ前々問ニヨリ ${}_{5-1}P_{5-1}$ 通リアリ，コノ中ニハ或一人ヨリ見テ右廻リノ順ト同ジ左廻リノ順ガ常ニ存在スベシ，即チ右廻リト左廻リトノ同ジ順ガ常ニ對立スベシ，然ルニ珠數ノ如キモノニアツテハ，此二ツノ順序ハ只表カラ見ルカ裏カラ見ルカノ相違ニ過ギズシテ，全ク同ジモノナリ，即チ圓陣ノ場合ノ右廻リ左廻リノ二通リガ珠數ノ場合ニハ一通リトナル，依ツテ所要ノ數ハ

$$\frac{{}_{5-1}P_{5-1}}{2}=12 \quad ナリ。$$

〔注意〕 一般ニ n 個ノ異ナルモノヲ珠數ツナギニスル仕方ハ $\frac{1}{2}(n-1)!$

9. 何レノ三ツモ一点ニ會セズ，又何レノ二ツモ平行ナラザル 5 本ノ直線ニヨリテ作ラルヽアラユル種類ノ五角形ハ幾ツアルカ。

〔解〕 五本ノ中ノ何レカ一ツヲ基準トシ，コレニ殘ル四本ヲ順次ニ付ケ加ヘ行ケバ一ツノ五角形ヲ得ベク，其四本ヲ付ケ加フル順序ノ相異ニヨリテ異ナル五角形ヲ得，而シテ右廻リモ左廻リモ同一ナル故ニ前問ト同樣ニ所要ノ個數ハ

$$\frac{1}{2}(5-1)!=12 \quad ナリ。$$

10. 1ヨリ 9 マデノ 9 個ノ數ヨリ和ガ奇數ナル二數ヲ選ブ方法幾通リアルカ又和ガ偶數ナル二數ヲ選ブ方法幾通リアルカ。

〔解〕 二數ノ和ガ奇數ナルタメニハ二數ノ一ツガ奇數ニシテ，他ガ偶數ナラザルベカラズ，然ルニ 1 ヨリ 9 マデノ內ニハ 5 個ノ奇數ト 4 個ノ偶數トアリ，其 5 個ノ奇數ノ何レカト 4 個ノ偶數ノ何レカトヲ組ミ合ス方法ノ數ガ即チ所要ノ和ガ奇數トナル二數ヲ選ブ方法ノ數ナリ，然ルニ 5 個ノ奇數ノ何レカヲ 4 個ノ偶數ノ何レカニ組ミ合ス方法ノ數ハ $5\times4=20$ ナリ，依ツテ 1 ヨリ 9 マデノ數ヨリ和ガ奇數トナル二數ヲ選ブ方法ハ 20 通リアリ。

次ニ二數ノ和ガ偶數トナルタメニハ二數ハ共ニ偶數ナルカ，共ニ奇數ナラザルベカラズ，然ルニ 5 個ノ奇數ヨリ異ナル 2 個ヲ選ブ方法ノ數ハ基本定理 II ニヨリ ${}_5C_2=10$，4 個ノ偶數ヨリ異ナル 2 個ヲ選ブ方法ノ數ハ基本定理 II ニヨリ ${}_4C_2=6$ 依ツテ 1 ヨリ 9 マデノ數ヨリ和ガ偶數ナル二數ヲ選ブ方法ハ ${}_5C_2+{}_4C_2=16$ 通リアリ。

11. *figures* ノ文字ヲ悉ク用ヒテ作ル順列ノ中 i, u, e ノ順序ノ一定ナルモノヽ數如何，又 i, u, e ガ一定ノ順序ヲ保チ且ツ f, g, r, s モ亦一定ノ順序ヲ保ツモノヽ數如何。

〔解〕 文字ノ數ハ 7 個ナル故ニ總テノ順列ハ 7 個ノ坐席ヲ有スト考ヘ得ベシ，其中 i, u, e 3 個ノ順序ガ一定セルトキハ 7 個ノ坐席ヨリ任意ノ 4 個ヲ選ビ，ソレヲ色々ニ排列シテ殘ル 4 個ノ文字ヲオケバヨシ，依ツテ i, u, e ノ順序ノ一定セル順列ノ數ハ ${}_7P_4=840$ 個アリ。

次ニ尙殘ル 4 個ノ文字ノ順序モ一定セルトキハ 7 個ノ坐席ヨリ任意ノ三個ヲ選ビ出シ，ソレニ i, u, e ヲ其一定セル順序ニオキ殘ル 4 個ノ坐席ニ他ノ 4 個ノ文字ヲ又其一定セル順序ニオケバヨシ，依ツテ i, u, e モ f, g, r, s モ夫々一定ノ順序ニアル順列ノ數ハ基本定理 II ニヨリ ${}_7C_3=35$ 個アリ。

或ハ又初メノ場合ハ 7 個ノ中 3 個ガ相等シク殘ル 4 個ガ夫々相異ナルモノ，後ノ場合ハ 7 個ノ中 3 個ハ相等シク殘ル 4 個ガ又他ノ相等シキモノト考ヘ基本定理 III ヲ適用シテ夫々 $\dfrac{7!}{3!}$ 及ビ $\dfrac{7!}{3!4!}$ トスルモ可ナリ。

12. 甲組ノ候補者 5 人乙組ノ候補者 4 人ノ中ヨリ 3 人ノ委員ヲ選出スル仕方ハ幾通リアルカ，又兩組ハ少クトモ 1 人ノ委員ヲ出スモノトスレバ如何。

〔解〕 候補者合セテ 9 人，コノ中 3 人ヲ選ブ仕方ハ基本定理 II ニヨリ

$${}_9C_3=84$$

通リアリ。コノ中甲組ガ獨占スル仕方ハ同樣ニ

$${}_5C_3=10$$

通リニシテ乙組ガ獨占スル仕方モ同樣ニ

$${}_4C_3=4$$

通リナリ，依ツテ兩組ガ少クトモ一人ヲ出ス選ビ方ハ

$$84-(10+4)=70 \quad \text{通リナリ。}$$

13. 10 本ノ平行線ガ他ノ 7 本ノ平行線ト出合ヒテ作ル平行四邊形ノ總數如何。

〔解〕 10 本中ノ任意ノ 2 本ト 7 本中ノ任意ノ 2 本トニテ一ツノ平行四邊形ヲ作ル。然ルニ 10 本中ヨリ任意ノ 2 本ヲ選ブ仕方ハ基本定理 II ニヨリ

$${}_{10}C_2=45$$

通リニシテ 7 本中ヨリ任意ノ 2 本ヲ選ブ仕方モ同樣ニ

$${}_7C_2=21$$

通リアリ，依ツテ所要ノ平行四邊形ノ總數ハ

$$45\times21=945$$

14. 相異ナル n 個ノモノヨリ r 個ヅヽトリテ作リタル組合セノ中特別ナル一ツヲ含マザル組合セノ數ガ其モノヲ含ム組合セノ數ノ p 倍ナルトキハ $n=(p+1)r$ ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 相異ナル n 個ヨリ r 個トリテ作リタル組合セノ中特別ナル一ツヲ含マザル組合セノ數ハ其一ツヲ除キタル $n-1$ 個ノモノヨリ r 個トリテ作リタル組合セノ數 ${}_{n-1}C_r$ ニ等シク又其一ツヲ含ム組合セハ其一ツヲ預リオキ殘ル $n-1$ 個ノモノヨリ $r-1$ 個ヅヽノ組合セヲ作リ其組合セノ各ニ預リオキタル前ノ一個ヲ加フレバ遺漏ナク又重複ナク作リ得ルガ故ニ其數ハ ${}_{n-1}C_{r-1}$ ナリ。依ツテ題意ニヨリ

$${}_{n-1}C_r=p\times{}_{n-1}C_{r-1}$$

故ニ基本定理 II ニヨリ

$$\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}=\frac{p(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$

$$\therefore\ \frac{1}{r}=\frac{p}{n-r}\qquad \therefore\ n=(p+1)r$$

15. 相異ナル $4n$ 個ノ物ヨリ n 個ヲトリテ作リタル組合セノ中或特別ナル一ツヲ含ム組合セノ數ハ之レヲ含マザル組合セノ數ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シキコトヲ証セヨ。

〔解〕 相異ナル $4n$ 個ノモノヨリ n 個ヲトリテ作リタル組合セノ數ハ ${}_{4n}C_n$ ニシテ

コノ中特別ノ一個ヲ含ム組合セノ數ハ前問ト同樣ニ

$${}_{4n-1}C_{n-1}=\frac{(4n-1)!}{(n-1)!(4n-1-n+1)!}=\frac{(4n-1)!}{(n-1)!(3n)!}$$

$$=\frac{(4n)!}{4n!(3n)!}=\frac{1}{4}\times{}_{4n}C_n$$

從ツテ其一個ヲ含マザル組合セノ數ハ

$$\frac{3}{4}\times{}_{4n}C_n$$

依ツテ特別ナル一個ヲ含ム組合セノ數ハ之ヲ含マザルモノヽ $\frac{1}{3}$ ニ等シ。

16. $2n$ 人ガ二個ノ圓卓ヲ圍ミテ各 n 人ヅヽ着席スル仕方ハ $\frac{(2n)!}{n^2}$ 通リアルコトヲ証セヨ。

〔解〕 先ヅ各圓卓ノ n 人ヲ選ブ仕方ハ

$${}_{2n}C_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

通リアリ，コノ組合セノ各ニ對シテ一方ノ圓卓ノ圍リニ着席スル仕方ハ(問 6.)ニヨリ $(n-1)!$ 通リアリ，此仕方ノ各ニ對シテ他ノ圓卓ノ圍リノ着席ノ仕方モ亦 $(n-1)!$ 通リアリ，依ツテ總テノ着席ノ仕方ハ

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2}\times(n-1)!(n-1)!=\frac{(2n)!}{n^2}$$

通リアルベシ。

17. 相異ナルモノ mn 個ヲ m 個ヅヽ n 人ニ分配スル仕方ハ幾通リアルカ。

〔解〕 n 人中ノ第一ノ人ニ m 個ヲ與フル仕方ハ ${}_{mn}C_m$ 通リアリ，其各ニ對シテ第二ノ人ニ與フル仕方ハ ${}_{mn-m}C_m$ 通リアリ。從ツテ第一，第二ノ兩人ニ與フル仕方ハ ${}_{mn}C_m\times{}_{mn-m}C_m$ 通リアリ。同樣ニ第一，第二，第三ノ人ニ與フル仕方ハ ${}_{mn}C_m\times{}_{mn-m}C_m\times{}_{mn-2m}C_m$ 通リアルベク從ツテ n 人ノ總テニ m 個ヅヽ與フル仕方ハ ${}_{mn}C_m\cdot{}_{(n-1)m}C_m\cdot{}_{(n-2)m}C_m\cdots\cdots{}_{2m}\cdot C_m$

$$=\frac{(mn)!}{m!\{(n-1)m\}!}\cdot\frac{\{(n-1)m\}!}{m!\{(n-2)m\}!}\cdot\frac{\{(n-2)m\}!}{m!\{(n-3)m\}!}\cdots\cdots\frac{(2m)!}{m!\,m!}$$

$$=\frac{(mn)!}{(m!)^n}$$

通リアルベシ。

18. 相異ナルモノ mn 個ヲ m 個ヅヽ n 組ニ分ツ仕方ハ幾通リアルカ。

〔解〕 n 組ノ順序ハ問フヲ要セザルガ故ニ前問ノ結果ヲ $n!$ ニテ割レバ可ナリ。即チ所要ノ數ハ

$$\frac{(mn)!}{(m!)^n n!}\quad ナリ。$$

19. n 人ノ中ヨリ r 人ノ當番ヲ定ムルニ各人平等ニ之ニ當ル義務アルモノトスレバ或特別ナル二人ハ $n(n-1)$ 回毎ニ $r(r-1)$ 回同時ニ當番トナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 n 人ノ中ヨリ r 人ヲ選ブ總テノ組合セ ${}_nC_r$ 中ニ於テ或特別ナル二人ヲ含ム組合セノ數ハ ${}_{n-2}C_{r-2}$ ナリ。由ツテ各人平等ニ當番トナルトキハ ${}_nC_r$ 回殊ニ或特別ナル二人ハ ${}_{n-2}C_{r-2}$ 回同時ニ之ニ當ルコトヽナルベシ。從ツテ $n(n-1)$ 回毎ニハ $\frac{n(n-1)}{{}_nC_r}\times{}_{n-2}C_{r-2}=r(r-1)$ 回

同時ニ當番トナル。

白球 4個，赤球 5個，黒球 6個ヲ一列ニ並ベル仕方ハ幾通リアルカ。

〔解〕 總數 15 個ノ中同ジモノ 4 個，5 個，6 個アル故ニコレヲ一列ニ並ベル仕方ハ基本定理 III ニヨリ

$$\frac{15!}{4!\,5!\,6!}=630630$$

21. 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3 ナル七個ノ數字ヲ用キテ作ル七桁ノ整數ハ何個アルカ。

〔解〕 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3 ヲ一列ニ並ベル仕方ハ基本定理 III ニヨリ

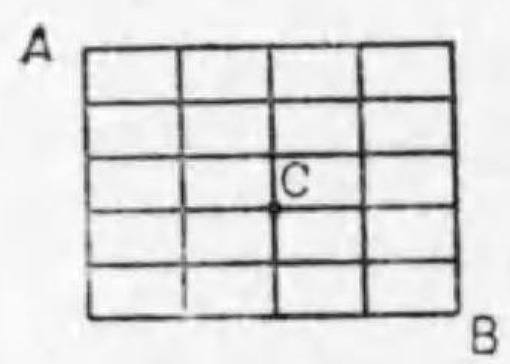
$$\frac{7!}{2!\ 3!}=420$$

コノ中首位ガ 0 ナルモノハ

$$\frac{6!}{2!\ 3!}=60$$

依ツテ所要ノ七桁ノ數ハ 420−60=360 個アリ。

22. **圖ノ如ク東西六條，南北五條ノ道路ニヨリテ碁盤形ニ區劃セラレタル市街ノ東北隅 A ヨリ迂廻セズニ西南隅 B ニ至ル仕方幾通リアルカ，又途中必ズ C 点ヲ通過スルモノトスレバ如何。**



〔解〕 A ヨリ迂廻セズニ B ニ至ルニハ東西ノ道路 4個ト南北ノ道路 5個ト合セテ9個ノ道路ヲ通ラザルベカラズ。 其東西ト南北トノ二種ノ道路ノ取リ方ノ順序ニヨリテ A ヨリ B ニ行ク仕方ハ異ナル，然ルニ東西 4個ト南北 5個トヲ一列ニ並ベル仕方ハ

$$\frac{9!}{4!\ 5!}=126$$

通リアリ，依ツテ A ヨリ B ニ至ル仕方モ亦 126 通リアリ，次ニ途中必ズ C ヲ通過スルモノトスレバ A ヨリ C ニ至ル仕方ハ上ト同樣ニ

$$\frac{5!}{2!\ 3!}=10$$

C ヨリ B ニ至ル仕方ハ

$$\frac{4!}{2!\ 2!}=6$$

從ツテ所要ノ仕方ハ 10×6=60 通リアリ。

23. n 個ノ數字ヨリナル純循環小數アリ，n 個ノ中 p 個ハ a，q 個ハ b 等トス。コレ等ノ數字ヲ色々ニ並ベカヘテ得ル總テノ循環小數ノ和ヲ求メヨ。

〔解〕 n 個ノ數字ノ中 a ガ p 個，b ガ q 個等アル故ニコレ等 n 個ノ數字ヲ色々ニ並ベカヘテ得ル總テノ純循環小數ノ中小數第一位ガ a ナルモノハ基本定理 III ニヨリ $\dfrac{(n-1)!}{(p-1)!\,q!\ldots\ldots}$ 個アリ，從ツテ第一位ニアル a ノ値ノ和ヲ S トスレバ

$$S=\frac{(n-1)!}{(p-1)!\ q!\ldots\ldots}\left\{\frac{a}{10}+\frac{a}{10^{n+1}}+\frac{a}{10^{2n+1}}+\ldots\ldots\right\}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(p-1)!\ q!\ldots\ldots}\times\frac{a}{10}\times\frac{1}{1-\dfrac{1}{10^n}}$$

同樣ニ第二位ニアル a ノ値ノ和ハ $\dfrac{S}{10}$，第三，第四，…… 第 n 位ニアル a ノ値ノ和ハ夫々 $\dfrac{S}{10^2}$，$\dfrac{S}{10^3}$，……$\dfrac{S}{10^{n-1}}$ ナリ。依ツテ a ノ値ノ總和ハ

$$S+\frac{S}{10}+\frac{S}{10^2}+\ldots\ldots+\frac{S}{10^{n-1}}=S\times\frac{1-\dfrac{1}{10^n}}{1-\dfrac{1}{10}}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(p-1)!\ q!\ldots\ldots}\times\frac{a}{10}\times\frac{1}{1-\dfrac{1}{10^n}}\times\frac{1-\dfrac{1}{10^n}}{1-\dfrac{1}{10}}$$

$$=\frac{(n-1)!}{p!\ q!\ldots\ldots}\times\frac{pa}{9}$$

同樣ニ b ノ値ノ總和ハ

$$\frac{(n-1)!}{p!\ q!\ldots\ldots}\times\frac{qb}{9}$$

以下總テ同樣ナル故ニ斯ル循環小數總テノ和ハ

$$\frac{(n-1)!}{p!\ q!\ldots\ldots}\times\frac{pa+qb+\ldots\ldots}{9}$$

24. 白珠 4 個，黑珠 6 個，赤珠 1 個ヲ以テ珠數ヲ作ラントス，幾種類作リ得ベキカ。

〔解〕 4 個ノ白珠ト 6 個ノ黑珠トヲ種々ノ順序ニ並ベテ其兩端ヲ 1 個ノ赤珠ノ兩側ニ續クヤウニ折リ曲ゲテ環狀ニスレバ所要ノ珠數ヲ得ベシ。 然ルニ 4個 ノ白珠ト 6個ノ黑珠トヲ種々ノ順序ニ並ベル仕方ハ基本定理 III ニヨリ

$$\frac{10!}{4!\,6!}=210$$

通リアリ，コノ内中央ニ對シテ左右對稱ナルモノノ外ハ右ヨリノ順序ト左ヨリノ順序ト全ク相等シキモノガ二ツヅヽ一對トナリテ存在ス。此一對ハ上ノ如ク環狀ニシテ裏返セバ全ク同ジモノトナル。依ツテ所要ノ珠數ノ數ハ上ノ 210 通リノ内中央ニ對シテ左右對稱ナルモノヽ數ト其殘リノ $\frac{1}{2}$ トノ和ニ等シ。然ルニ中央ニ對シテ對稱ナル並ベ方ハ中央ノ左右ニ各白珠 2 個ト黑珠 3 個トヲ同ジ順序ニ排列シタルモノニシテ白珠 2 個ト黑珠 3 個トヲ色々ノ順序ニ排列スル仕方ハ

$$\frac{5!}{2!\,3!}=10$$

通リアリ，故ニ中央ニ對シテ對稱ナル並ベ方ハ 10 通リナリ，依ツテ所要ノ珠數ノ數ハ $\frac{210-10}{2}+10=110$ ナリ。

25. 1 ヨリ 9 マデノ有効數字ノミヨリナル三桁ノ整數ハ幾ツアルカ，又 0 ヲモ加フレバ如何。

〔解〕 一ノ位ハ 1 ヨリ 9 マデノ 9 通リアリ，其各ニ對シテ十ノ位，百ノ位モ亦皆 9 通リアル故ニ有効數字ノミヨリナル三桁ノ整數ハ

$$9^3=729$$

個アリ，即チ 1 ヨリ 9 ニ至ル 9 種ノ數字ヲ重複ヲ許シテ三ツヅヽトリタル順列 ${}_9\Pi_3$ ニ等シ。次ニ 0 ヲモ加フルトキハ一ノ位及ビ十ノ位ハ 0 ヨリ 9 マデノ 10 通リナルモ百ノ位ハ 1 ヨリ 9 マデノ 9 通リナル故ニ所要ノ個數ハ

$$9\times10^2=900$$

ナリ，或ハ 10 種ノ數字ヲ重複ヲ許シテ三ツヅヽトリタル順列ハ ${}_{10}\Pi_3$ ソノ中首位ガ 0 ナル數ハ ${}_{10}\Pi_2$，依ツテ所要ノ數ハ

$${}_{10}\Pi_3-{}_{10}\Pi_2=900$$ ト考フルモ可ナリ。

26. 日，英，米三ケ國ヨリ 5 人ノ委員ヲ選ブ仕方ハ幾通リアルカ。

〔解〕 所要ノ仕方ハ日，英，米三種類ノ人ヨリ重複ヲ許シテ 5 人ヅヽトル組合セノ數 ${}_3H_5$ ニ等シ，依ツテ基本定理 V ニヨリ

$${}_3H_5=\frac{3.4.5.6.7}{5!}=21$$

27. 5 個ノ同ジモノヲ 3 人ニ與フル仕方ハ幾通リアルカ，又若シ異ナル 5 個ノモノナラバ如何。

〔解〕 5 個ノ同ジモノヲ x, y, z ナル三人ニ與フル仕方ノ數ハ x, y, z ヨリ作ル 5 次ノ同次積ノ數ニ等シキヤ明カナリ、依ツテ其與ヘ方ハ

$${}_3H_5=\frac{3.4.5.6.7}{5!}=21$$

通リアリ，次ニ相異ナル 5 個ナラバ第一ノモノヲ三人ノ何レカニ與フル仕方ハ 3 通リ，其各ニ對シテ第二ノモノヲ與フル仕方モ 3 通リ，其又各ニ對シテ第三ノモノヲ與フル仕方モ 3 通リ等ナル故ニ結局

$$3^5=243$$

通リアルベシ。或ハコノ場合ノ分配方法ノ數ハ $(x+y+z)^5$ ノ各項ノ係數ノ和即 $x=y=z=1$ トオキテ 3^5 ナリト考フルモ可ナリ。

28. 林檎 10 個ト梨 8 個トヲ 4 人ノ子供ニ與フル仕方ハ幾通リアルカ。

〔解〕 林檎 10 個ヲ 4 人ニ與フル仕方ハ前問ト同様ニ

$${}_4H_{10}=\frac{4.5.6\ldots\ldots12.13}{10!}=286$$

同様ニ梨 8 個ヲ 4 人ニ與フル仕方ハ

$${}_4H_8=\frac{4.5\ldots\ldots10.11}{8!}=165$$

依ツテ双方ヲ 4 人ニ與フル仕方ハ 286×165 通リアリ。

29. 1 瓦，2 瓦，4 瓦，8 瓦，16 瓦ナル 5 種ノ分銅 5 個ヲ以テ幾種ノ目方ヲ作リ得ルカ，又其目方ノ總計如何。

〔解〕 各分銅ハ取ルカ取ラヌカ二ツノ中ノ何レカナリ，即チ取捨二樣ノ仕方アリ。依ツテ 5 種ノ總テニツイテハ取捨 2^5 通リノ仕方アリテ其何レノ二ツモ重複セズ，而シテコノ中總テヲ取ラザル場合一ツアル故ニ實際コノ 5 種ノ分銅ニテ作リ得ル目方ノ種類ハ $2^5-1=31$

ナリ。次ニ此 31 種ノ目方ノ總計ヲ求メンニ此 31 種ノ中 1 瓦分銅ノ加入セル目方ハ他ノ四種ノ分銅ニテ作ル總テノ目方ト 1 瓦自身トナリ，然ルニ前者ハ 4 種ノ分銅ニテ作リ得ル目方ノ數ナル故ニ 5 種ノ場合ト同樣ニ 2^4-1 種，後者ハ明カニ 1 種，依ツテ 1 瓦分銅ヲ用フル場合ノ數ハ 2^4，從ツテ其目方ノ和ハ 1 瓦×2^4，同樣ニ他ノ分銅ヲ用フル場合モソレゾレ 2^4，從ツテ 31 種ノ目方ノ總計ハ

$$(1+2+4+8+16)2^4=496 \text{ 瓦}$$

30.　1 錢銅貨 5 個，10 錢銀貨 4 個，50 錢銀貨 9 個ニテ幾種類ノ金高ヲ作リ得ルカ。

〔解〕 1 錢銅貨 5 個ニテ作リ得ル相異ナル金高ハ 0 錢 1 錢 2 錢 3 錢 4 錢 5 錢ノ 6 種即チ (5+1) 種，同樣ニ 10 錢銀貨 4 個ニテ作リ得ル異ナル金高ハ (4+1) 種，50 錢銀貨 9 個ニテ作リ得ル異ナル金高ハ (9+1) 種，依ツテ此三種ノ貨幣ニテ作リ得ル相異ナル金高ハ 0 錢ヲ省キテ

$$(5+1)(4+1)(9+1)-1=299 \quad \text{種アリ。}$$

31.　50 錢銀貨 4 個，10 錢銀貨 2 個，5 錢白銅貨 1 個，1 錢銅貨 1 個ヲ入レタル財布ヨリ 3 個ノ貨幣ヲ取リ出ス方法幾通リアルカ。

〔解〕 3 個ノ貨幣ヲ取リ出ス仕方ヲ次ノ場合ニ分チテ考フ。

1) 3 個總テ同種。

2) 2 個ハ同種，殘ル 1 個ハ異種。

3) 3 個總テ異種。

(1) ハ 50 錢銀貨ヲ取リ出スノミナル故ニ其方法ハ唯一通リナリ。

(2) ハ同種ノモノ 2 個ハ 50 錢銀貨ニテモ 10 錢銀貨ニテモ可ナルベク，而シテ其各ニ對シ殘ル 1 個ヲ選ブ方法ハ殘ル 3 種ノ貨幣ノ何レカ 1 種即チ ${}_3C_1$，故ニ (2) ノ總テノ方法ハ $2\cdot{}_3C_1$

(3) ハ 4 種ノ貨幣ヨリ 1 種ヅヽ 3 個ヲトル仕方 ${}_4C_3$ 通リアリ，依ツテ所要ノ數ハ

$$1+2\cdot{}_3C_1+{}_4C_3=11$$

（注意） 此種問題ノ一般的解法ハ第五章問題 38 以下ヲ參照スベシ。

32.　*Proportion* トイフ語ノ文字ヨリ任意ノ四ツヲトリテ作ル組合セノ數如何。

〔解〕 所題ノ語ノ文字ハ $o, o, o, p, p, r, r, t, i, n$ ナリ，依ツテ前問ノ如ク

1) 3 個同種ニシテ殘ル 1 個異種。

2) 2 個同種ニシテ他ノ 2 個モ他ノ同種。

3) 2 個同種ニシテ他ノ 2 個ハ異種。

4) 總テ異種。

ナル四ツノ場合ニ分チテ考フルニ

(1) ハ同種ノ 3 個ハ o 殘ル 1 個ハ殘ル 5 種中ノ一種即 ${}_5C_1$，依ツテ (1) ノ組合セハ ${}_5C_1$

(2) ハ 2 個ヅヽ同種ノモノ二組ハ o, p, r ノ三種中ノ二種ナル故ニ其組合セノ數ハ ${}_3C_2$

(3) ハ同種ノ 2 個ノ取リ方ハ ${}_3C_1$，ソノ各ニ對シテ殘ル 2 個ヲ殘ル 5 種中ノ任意ノ 2 種即チ ${}_5C_2$，依ツテ (3) ノ組合セノ數ハ ${}_3C_1\cdot{}_5C_2$

(4) ハ 6 種中ヨリ任意ノ 4 種即 ${}_6C_4$，依ツテ所要ノ總數ハ

$${}_5C_1+{}_3C_2+{}_3C_1\times{}_5C_2+{}_6C_4=53 \qquad \text{（第五章問 39 參照）}$$

33.　1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5 ナル 9 個ノ數字ニテ 6 桁ノ整數幾種ヲ作リ得ルカ。

〔解〕 所題ノ 9 個ノ數字ヨリ作ル 6 個ヅヽノ組合セヲ考ヘ其組合セノ各ヨリ生ズル順列ノ數ヲ計算セントス。而シテ所題ノ 9 數字ヨリ作ル 6 個ヅヽノ組合セヲ次ノ 5 種ニ分類シテ考フ。

1) 3 個同數字，2 個ガ他ノ同數字，殘ル 1 個ガ又他ノ數字ナルモノ。

此種ノ組合セハ 3 個ノ同數字ハ 1 只一通リ，2 個ノ他ノ同數字ハ 2 又ハ 3 ノ 2 通リ，殘ル 1 個ハ殘ル 3 種ノ數字 3（或ハ 2），4，5 ノ 3 通リナル故ニ其數ハ

$$1\times2\times3=6$$

依ツテコレヨリ作ル順列ノ數ハ基本定理 III ニヨリ

$$\frac{6!}{2!\,3!}\times6=360$$

2) 3個同數字他ノ 3個ガ皆異數字ナルモノ。

此種ノ組合セハ 3個ノ 1ト 2, 3, 4, 5 中ノ何レカ 3個ヨリナル故ニ其數ハ $1\times{}_4C_3$, 依ツテコレヨリ作ル順列ノ數ハ

$$\frac{6!}{3!}\times{}_4C_3=480$$

3) 2個同數字, 次ノ 2個ガ他ノ同數字, 次ノ 2個ガ又他ノ同數字ナルモノ。

此種ノ組合セハ 2個ノ 1ト 2個ノ 2ト 2個ノ 3トヨリナルモノ只一ツナル故ニ其順列ノ數ハ

$$\frac{6!}{2!\,2!\,2!}=90$$

4) 2個同數字, 次ノ 2個ガ他ノ同數字, 殘ル 2個ガ異數字ナルモノ。

此種ノ組合セハ 2個ヅヽ二組ノ同數字ハ 1, 2, 3 ノ中ノ何レカナル故ニ其取リ方ハ ${}_3C_2$, 殘ル 2個ノ異數字ハ殘ル 3種ノ數字中ノ何レカ 2種ナル故ニ其取リ方ハ ${}_3C_2$, 從ツテ組合セノ數ハ ${}_3C_2\times{}_3C_2$ 依ツテ順列ノ數ハ

$$\frac{6!}{2!\,2!}\times{}_3C_2\times{}_3C_2=1620$$

5) 2個同數字, 殘ル 4個異數字ノモノ。

此種ノ組合セハ 2個ノ同數字ハ 1, 2, 3 中ノ任意ノ一種ナル故其取リ方ハ ${}_3C_1$, 殘ル 4個ハ殘ル 4種ヨリ各一種ナル故其取リ方ハ 1, 從ツテ組合セノ數ハ ${}_3C_1$ 依ツテ順列ノ數ハ

$$\frac{6!}{2!}\times{}_3C_1=1080$$

是ニ由ツテ總順列即チ所要ノ 6桁ノ整數ノ個數ハ

$$360+480+90+1620+1080=3630,$$　(第五章問 40 參照)

34. *Expression* ナル語ノ中ノ任意ノ 4 文字ヲトリテ幾種ノ語ガ作ラレ得ルカ。

〔解〕 *Expression* ナル語ニハ $e, e, s, s, i, n, o, p, r, x$ ナル 10個ノ文字アリ, 是等 10個ノ文字ヨリ 4個ヅヽ取リテ作ル順列ノ數ガ所要ノ語ノ數ナリ。今カヽル順列ノ數ヲ求ムルタメニ前問ト同樣ニ先ヅ 4個ヅヽヨリナル組合セヲ考ヘ然ル後其各ノ組合セヨリ所要ノ順列ヲ作ラントス。然ルニ所題ノ 10個ノ文字ヨリ 4個ヅヽ取リテ作ル組合セハ次ノ三種ニ分類スルコトヲ得。

1) 2 文字ガ同種類ニシテ他ノ 2文字モ亦他ノ同種類ナルモノ。

此種類ノ組合セハ e, e, s, s 只一ツナル故ニコレヨリ生ズル順列ハ

$$\frac{4!}{2!\,2!}=6$$

2) 2 文字ガ同種類ニシテ他ノ 2文字ガ異種類ナルモノ。

此種類ノ組合セノ同種類ノ 2 文字ハ e, e 又ハ s, s ノ二通リニシテ他ノ 2文字ハ殘ル 7種類中ノ任意ノ 2種ナル故ニ ${}_7C_2$ 通リ, 從ツテ此類ノ組合セノ數ハ $2\times{}_7C_2$, 依ツテ其順列ノ數ハ

$$2\times{}_7C_2\times\frac{4!}{2!}=504$$

3) 4 文字皆異種類ナルモノ。

此種類ノ組合セハ 8種類中ノ任意ノ 4種類ナル故ニ其數ハ ${}_8C_4$, 依ツテ其順列ノ數ハ　${}_8C_4\times4!=1680$

依ツテ總順列ノ數即チ所要ノ異ナル語ノ數ハ

$$6+504+1680=2190$$　(第五章問 40 參照)

35. 有效數字ノミヨリナル 5桁ノ整數ノ中ニ數字ノ和ガ 8ニ等シキモノハ幾何アルカ。

〔解〕 所題ノ 5桁ノ整數ヲ 1 ヲ以テ始マルモノ, 2 ヲ以テ始マルモノ, 3 ヲ以テ始マルモノ等ニ分チテ考フ。1 ヲ以テ始マルモノハ 1 ヨリ 9 ニ至ル任意ノ數字ニテ作ル 4桁ノ整數中其數字ノ和ガ 7 ニ等シキモノノ左端ニ 1 ヲ付ケ加ヘタルモノニシテ, 2 ヲ以テ始マルモノハ 1 ヨリ 9 ニ至ル任意ノ數字ニテ作ル 4 桁ノ整數ノ中其數字ノ和ガ 6 ニ等シキモノノ左端ニ 2 ヲ付ケ加ヘタルモノニシテ一般ニ任意ノ數字 m ヲ以テ始マルモノハ 1ヨリ 9 ニ至ル任意ノ數字ニテ作ル 4 桁ノ整數中其數字ノ和ガ $8-m$ ニ等シキモノヽ左端ニ m ヲ付ケ加ヘタルモノナリ。依ツテ今數字ノ和ガ n ニ等シキ r 桁ノ整數ノ個數ヲ $f_r(n)$ ニテ表ハセバ所要ノ數ハ $f_5(8)$ ニシテ數字ノ和ガ例ヘバ 7 ニ等シキ 4桁ノ數ノ個數ハ $f_4(7)$ ニテ表ハサル, 從ツテ上ニ考ヘタル處ヨリ次ノ關係ヲ得。

$$f_5(8)=f_4(7)+f_4(6)+f_4(5)+f_4(4)$$

同樣ニ $f_4(7)=f_3(6)+f_3(5)+f_3(4)+f_3(3)$

$$f_3(6)=f_2(5)+f_2(4)+f_2(3)+f_2(2)$$

$$f_2(5)=f_1(4)+f_1(3)+f_1(2)+f_1(1),$$

然ルニ $f_1(4)=f_1(3)=f_1(2)=f_1(1)=1,$

$\therefore\ f_2(5)=4={}_4C_1$

從ツテ $f_2(4)={}_3C_1,\quad f_2(3)={}_2C_1,\quad f_2(2)={}_1C_1$

$\therefore\ f_3(6)={}_4C_1+{}_3C_1+{}_2C_1+{}_1C_1={}_5C_2$ (問 40)

從ツテ $f_3(5)={}_4C_2,\quad f_3(4)={}_3C_2,\quad f_3(3)={}_2C_2$

$\therefore\ f_4(7)={}_5C_2+{}_4C_2+{}_3C_2+{}_2C_2={}_6C_3$

從ツテ $f_4(6)={}_5C_3,\quad f_4(5)={}_4C_3,\quad f_4(4)={}_3C_3$

$\therefore\ f_5(8)={}_6C_3+{}_5C_3+{}_4C_3+{}_3C_3={}_7C_4=35$

即チ所定ノ數ハ 35 個アリ。

(注意 1) 有效數字ノミヨリナリ其數字ノ和ガ 8 ナル整數ノ個數ハ數字ノ和ガ 8 ナル 1 桁乃至 8 桁ノ整數ノ個數ノ和ニ等シガ故ニ本問ノ結果ヨリ

$${}_7C_7+{}_7C_6+{}_7C_5+{}_7C_4+{}_7C_3+{}_7C_2+{}_7C_1+{}_7C_0=2^7=128 \qquad \text{(第五章問 6)}$$

ナルヲ知ル。

(注意 2) 別解第五章問 42 ニアリ。

36. 15 ノ同ジモノヲ 3 組ニ分ツ方法ハ幾通リアルカ。

〔解〕 15 ノ同ジモノヲ 3 組ニ分ツトキハ各組ノ數ハ 1 ヨリ 13 ニ至ル或數ナリ, 今此ノ 3 組ヲ第 1 組ノ數ハ第 2 組ノ數ヨリ大ナラズ, 第 2 組ノ數ハ第 3 組ノ數ヨリ大ナラザルヤウニ排列シタリトスレバ所要ノ 3 組ノ總テハ次ノ如ク分類セラルベシ。

1) 第 1 組ノ數ガ 1 ニシテ第 2, 第 3 組ノ數ガ 1 或ハソノ以上ニシテ其和ガ 14 ナルモノ。

2) 第 1 組ノ數ガ 2 ニシテ第 2, 第 3 組ノ數ガ 2 或ハソノ以上ニシテ其和ガ 13 ナルモノ。

3) 第 1 組ノ數ガ 3 ニシテ第 2, 第 3 組ノ數ガ 3 或ハソノ以上ニシテ其和ガ 12 ナルモノ。

4) 第 1 組ノ數ガ 4 ニシテ第 2, 第 3 組ノ數ガ 4 或ハソノ以上ニシテ其和ガ 11 ナルモノ。

5) 第 1 組ノ數ガ 5 ニシテ第 2, 第 3 組ノ數ガ 5 或ハソノ以上ニシテ其和ガ 10 ナルモノ。

然ルニ第 2, 第 3 組ノ數ガ 2 或ハソノ以上ニシテ其和ガ 13 ナルモノヽ數ハ第 2 第 3 組ノ數ガ 1 或ハソノ以上ニシテ其和ガ 11 ナルモノヽ數ニ等シ。何ントナレバ兩組ヨリ 1 ツヅヽ引ケバ和ハ 2 ツ減ズレバナリ。從ツテ (2) ニ屬スルモノヽ數ハ第 2, 第 3 組ノ數ガ 1 或ハソノ以上ニシテ其和ガ 11 ナルモノノ數ニ等シ。同樣ニ (3) ニ屬スルモノヽ數モ第 2, 第 3 組ノ數ガ 1 又ハソノ以上ニシテ其和ガ 8 ナルモノノ數ニ等シク (4) ニ屬スルモノノ數モ第 2, 第 3 組ノ數ガ 1 又ハソノ以上ニシテ其和ガ 5 ナルモノノ數ニ等シク (5) ニ屬スルモノノ數モ第 2, 第 3 組ノ數ガ 1 又ハソノ以上ニシテ其和ガ 2 ナルモノヽ數ニ等シ。

依ツテ今所要ノ數ヲ $f_3(15)$ ニテ表ハセバ

$$f_3(15)=f_2(14)+f_2(11)+f_2(8)+f_2(5)+f_2(2)$$

然ルニ 14 ヲ 2 組ニ分ツ仕方ハ明カニ 7 ナル故ニ $f_2(14)=7$, 11 ヲ 2 組ニ分ツ仕方ハ 5 ナル故ニ $f_2(11)=5$, 同樣ニ $f_2(8)=4$, $f_2(5)=2$, $f_2(2)=1$

$\therefore\ f_3(15)=7+5+4+2+1=19$

37. 同上 4 組ニ分ツ方法ハ幾通リアルカ。

〔解〕 前問ト同樣ニ

$$f_4(15)=f_3(14)+f_3(10)+f_3(6)$$

$$f_3(14)=f_2(13)+f_2(10)+f_2(7)+f_2(4)=6+5+3+2=16$$

$$f_3(10)=f_2(9)+f_2(6)+f_2(3)=4+3+1=8$$

$$f_3(6)=f_2(5)+f_2(2)=2+1=3$$

$\therefore\ f_4(15)=27$

38. 15 人ヲ 4 組ニ分ツ方法幾通リアルカ。

〔解〕 今先ヅ 15 人ヲ A, B, C, D 四室ニ入ルヽ方法幾通リアルカヲ考フルニ 15 人ノ各ハ四室ノ何レニ入ルモ可ナル故ニ各人ニツキ 4 通リノ方法アリ。故ニ 15 人ノ總テニ就テハ 4^{15} 通リアリ，但シ此 4^{15} 通リノ中ニハ四室ノ中ニ空室アル場合ヲモ含ムコト明カナリ。依ツテ此 4^{15} 通リノ方法ヲ次ノ四種ニ分類シテ考フ。

1) 空室ナキ場合， 此場合ノ數 1

2) 1 室空ナル場合，此場合ノ數 ${}_4C_1=4$

3) 2 室空ナル場合，此場合ノ數 ${}_4C_2=6$

4) 3 室空ナル場合，此場合ノ數 ${}_4C_3=4$

玆ニ於テ 15 人ヲ 4 組ニ分ツ所要ノ數ヲ ${}_{15}f_4$ ニテ表ハセバ此各ヲ 4 室ニ配當スル仕方ハ 4! 通リアル故ニ (1) ニ屬スル入レ方ハ ${}_{15}f_4\times4!$ 次ニ 15 人ヲ 3 組ニ分ツ方法ノ數ハ ${}_{15}f_3$ ニシテ此各ヲ (2) ノ一ツノ場合ノ 3 室ニ配當スル仕方ハ 3! 通リアル故ニ (2) ニ屬スル入レ方ハ ${}_{15}f_3\times3!\times4$，同樣ニ (3) ニ屬スル入レ方ハ ${}_{15}f_2\times2!\times6$，(4) ニ屬スル入レ方ハ ${}_{15}f_1\times4$，依ツテ次ノ關係ヲ得。

$$4^{15}={}_{15}f_4\times4!+{}_{15}f_3\times3!\times4+{}_{15}f_2\times2!\times6+{}_{15}f_1\times4$$

從ツテ又

$$3^{15}={}_{15}f_3\times3!+{}_{15}f_2\times2!\times3+{}_{15}f_1\times3$$

$$2^{15}={}_{15}f_2\times2!+{}_{15}f_1\times2$$

然ルニ ${}_{15}f_1=1$， $\therefore\ {}_{15}f_2=\dfrac{2^{15}-2}{2!}$ $\therefore\ {}_{15}f_3=\dfrac{3^{15}-3(2^{15}-2)-3}{3!}$

$$\therefore\ {}_{15}f_4=\frac{1}{4!}\{4^{15}-4[3^{15}-3(2^{15}-2)-3]-6(2^{15}-2)-4\}$$

$$=\frac{1}{4!}(4^{15}-4.3^{15}+6.2^{15}-4)$$

（注意） 從ツテ 15 人ヲ 4 室ニ入レル方法ノ數ハ

$${}_{15}f_4\times4!=4^{15}-4.3^{15}+6.2^{15}-4$$

39. n ガ定マレル正ノ整數ナルトキ ${}_nC_r$ ヲ最大ナラシムル r ノ値ヲ定メヨ。

〔解〕 ${}_nC_r=\dfrac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}={}_nC_{r-1}\times\dfrac{n-r+1}{r}$

故ニ $\dfrac{n-r+1}{r}$ ガ 1 ヨリ大ナルカ，等シキカ，小ナルカニ從ツテ ${}_nC_r$ ハ ${}_nC_{r-1}$ ヨリ大ナルカ，等シキカ，小ナルカナリ。然ルニ

$$\frac{n-r+1}{r}\substack{\geqq\\<}1 \quad ヨリ \quad r\substack{\leqq\\>}\frac{n+1}{2}$$

故ニ $r\substack{\leqq\\>}\dfrac{n+1}{2}$ ナルニ從ツテ ${}_nC_{r-1}\substack{\leqq\\>}{}_nC_r$

即チ r ガ $\dfrac{n+1}{2}$ ヨリ小ナル間ハ r ガ增スト共ニ ${}_nC_r$ ハ增シ r ガ $\dfrac{n+1}{2}$ ヨリ大トナレバ r ガ增スニ從ツテ ${}_nC_r$ ハ減少ス，即チ ${}_nC_r$ ハ $r=\dfrac{n+1}{2}$ ヲ境目トシテ增ヨリ減ニ移ル，故ニ ${}_nC_r$ ヲ最大ナラシムルニハ $r=\dfrac{n+1}{2}$ トスルカ，若シソレガ不能ナラバ(r ハ正ノ整數ナル故) r ヲシテ出來得ル限リ $\dfrac{n+1}{2}$ ニ接近セシムレバ可ナリ，依ツテ n ガ奇數ニシテ $2m+1$ ニ等シケレバ

$$r=m+1=\frac{n+1}{2}$$

ナルトキ ${}_nC_{r-1}={}_nC_r$ ニシテ此二ツガ最大トナリ，n ガ偶數ニシテ $2m$ ニ等シケレバ $m<\dfrac{n+1}{2}$ $\therefore\ {}_nC_{m-1}<{}_nC_m$

$$m+1>\frac{n+1}{2} \qquad \therefore\ {}_nC_m>{}_nC_{m+1}$$

ナル故ニ $r=m=\dfrac{n}{2}$

ノトキ ${}_nC_r$ ハ最大トナル。

40. 次ノ二ツノ關係ヲ證セヨ。

$${}_{n-1}C_r+{}_{n-2}C_{r-1}+\ldots\ldots+{}_{n-r+1}C_2+{}_{n-r}C_1+1={}_nC_r,$$

$${}_nC_r+{}_{n-1}C_r+{}_{n-2}C_r+\ldots\ldots+{}_{r+1}C_r+{}_rC_r={}_{n+1}C_{r+1}$$

〔解〕 n 個ノ相異ナルモノヨリ r 個取リテ作ル組合セノ數 ${}_nC_r$ ハ或特別ナル 1 ツヲ含ム組合セノ數 ${}_{n-1}C_{r-1}$ ト其一ツヲ含マザル組合セノ數 ${}_{n-1}C_r$ トノ和ニ等シキ故ニ ${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$ (A)

n ヲ $n-1, n-2, \ldots\ldots n-r+1$ トスルト同時ニ r ヲ $r-1, r-2, \ldots\ldots 2, 1$ トセバ

$${}_{n-1}C_{r-1}={}_{n-2}C_{r-1}+{}_{n-2}C_{r-2}$$

$${}_{n-2}C_{r-2}={}_{n-3}C_{r-2}+{}_{n-3}C_{r-3}$$

....

$${}_{n-r+2}C_2={}_{n-r+1}C_2+{}_{n-r+1}C_1$$

$${}_{n-r+1}C_1={}_{n-r}C_1+{}_{n-r}C_0={}_{n-r}C_1+1$$

邊々相加フレバ

$${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-2}C_{r-1}+{}_{n-3}C_{r-2}+\ldots\ldots+{}_{n-r+1}C_2+{}_{n-r}C_1+1$$

次ニ又 (A) ヨリ

$${}_{n+1}C_{r+1}={}_nC_{r+1}+{}_nC_r$$

n ヲ $n-1,\ n-2, \ldots\ldots r+1$ トオケバ

$${}_nC_{r+1}={}_{n-1}C_{r+1}+{}_{n-1}C_r$$

$${}_{n-1}C_{r+1}={}_{n-2}C_{r+1}+{}_{n-2}C_r$$

....

$${}_{r+3}C_{r+1}={}_{r+2}C_{r+1}+{}_{r+2}C_r$$

$${}_{r+2}C_{r+1}={}_{r+1}C_{r+1}+{}_{r+1}C_r$$

$$={}_rC_r+{}_{r+1}C_r$$

邊々相加フレバ

$${}_{n+1}C_{r+1}={}_nC_r+{}_{n-1}C_r+{}_{n-2}C_r+\ldots\ldots+{}_{r+2}C_r+{}_{r+1}C_r+{}_rC_r$$

41. **n ガ正ノ整數ニシテ x, y ガ任意ノ數ナルトキ**

$$(x+y)_n=x_n+n_1x_{n-1}y_1+\frac{n_2}{2!}x_{n-2}y_2+\ldots\ldots+\frac{n_r}{r!}x_{n-r}y_r+\ldots\ldots+y_n$$

ナルコトヲ証セヨ。 但シ $x_r=x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-r+1)$ トス。

〔解〕 先ヅ x, y ガ共ニ正ノ整數ニシテ n ヨリ大ナリトスレバ

$${}_{x+y}C_n={}_xC_n+{}_xC_{n-1}\cdot{}_yC_1+{}_xC_{n-2}\cdot{}_yC_2+\ldots\ldots+{}_xC_1\cdot{}_yC_{n-1}+{}_yC_n$$

何ントナレバ $x+y$ 中ヨリ n 個ヲトリテ作ル組合セノ數ハ x 中ヨリ n 個トリタル組合セノ數 ${}_xC_n$, x 中ヨリ $n-1$ 個, y 中ヨリ 1 個トリタル組合セノ數 ${}_xC_{n-1}\cdot{}_yC_1$, x 中ヨリ $n-2$ 個, y 中ヨリ 2 個トリタル組合セノ數 ${}_xC_{n-2}\cdot{}_yC_2$,

等ノ和ニ等シキコト明カナレバナリ，故ニ

$$\frac{(x+y)_n}{n!}=\frac{x_n}{n!}+\frac{x_{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{y_1}{1!}+\frac{x_{n-2}}{(n-2)!}\cdot\frac{y_2}{2!}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{x_{n-r}}{(n-r)!}\cdot\frac{y_r}{r!}+\ldots\ldots+\frac{y_n}{n!}$$

兩邊ニ $n!$ ヲ乘ズレバ

$$(x+y)_n=x_n+n_1x_{n-1}y_1+\frac{n_2}{2!}x_{n-2}y_2+\ldots\ldots+\frac{n_r}{r!}x_{n-r}y_r+\ldots\ldots+y_n$$

即チ x, y ガ正ノ整數ニシテ n ヨリ大ナルトキ所題ノ式ハ成立ス。 次ニ一般ノ場合ヲ証明センニ，所題ノ式ノ兩邊ハ x, y ニツキ共ニ n 次ノ整式ナリ。 然ルニ今 y ヲ n ヨリ大ナル整數トスレバ x ノ n ヨリ大ナル總テノ整數値ニ對シテ兩邊ハ相等シクナルコトヲ知レリ。 依ツテ第一章基本定理 II ニヨリ所題ノ式ノ兩邊ハ x ニツイテ恒等的ニ相等シ。 同樣ニ y ニツイテモ恒等的ニ相等シ。 故ニ x, y ノ如何ナル値ニテモ成立ス。

之ヲ *Vandermond* ノ定理トイフ。

42. **次ノ關係ヲ証セヨ。**

$${}_nH_r={}_nH_{r-1}+{}_{n-1}H_{r-1}+{}_{n-2}H_{r-1}+\ldots\ldots+{}_2H_{r-1}+{}_1H_{r-1}$$

$$={}_{n-1}H_r+{}_{n-1}H_{r-1}+{}_{n-1}H_{r-2}+\ldots\ldots+{}_{n-1}H_2+{}_{n-1}H_1+1$$

〔解〕 $${}_nH_r=\frac{n(n+1)\ldots\ldots(n+r-1)}{1.2\ldots\ldots r}={}_nH_{r-1}\times\frac{n+r-1}{r}={}_nH_{r-1}\left(1+\frac{n-1}{r}\right)$$

$$={}_nH_{r-1}+{}_nH_{r-1}\times\frac{n-1}{r}={}_nH_{r-1}+{}_{n-1}H_r$$

即チ　${}_nH_r={}_nH_{r-1}+{}_{n-1}H_r$　　　(A)

コノ關係ハ n, r ノ任意ノ正ノ整數値ニ對シテ成立ス，故ニ今 n ヲ $n-1, n-2\ldots\ldots$ トスレバ

$${}_{n-1}H_r={}_{n-1}H_{r-1}+{}_{n-2}H_r$$

$${}_{n-2}H_r={}_{n-2}H_{r-1}+{}_{n-3}H_r$$

....

$${}_2H_r = {}_2H_{r-1} + {}_1H_r$$

$${}_1H_r = {}_1H_{r-1}$$

邊々相加フレバ

$${}_nH_r = {}_nH_{r-1} + {}_{n-1}H_{r-1} + {}_{n-2}H_{r-1} + \ldots\ldots + {}_1H_{r-1}$$

次ニ (A) ニ於テ r ヲ $r-1$, $r-2$, ... トオケバ

$${}_nH_{r-1} = {}_nH_{r-2} + {}_{n-1}H_{r-1}$$

$${}_nH_{r-2} = {}_nH_{r-3} + {}_{n-1}H_{r-2}$$

....

$${}_nH_2 = {}_nH_1 + {}_{n-1}H_2 = {}_{n-1}H_1 + 1 + {}_{n-1}H_2$$

邊々相加フレバ

$${}_nH_r = {}_{n-1}H_r + {}_{n-1}H_{r-1} + {}_{n-1}H_{r-2} + \ldots\ldots + {}_{n-1}H_2 + {}_{n-1}H_1 + 1$$

43. $\boldsymbol{1 - {}_nC_1 \cdot {}_nH_1 + {}_nC_2 \cdot {}_nH_2 + \ldots\ldots + (-1)^n\, {}_nC_n \cdot {}_nH_n = 0}$

ヲ証セヨ。

〔解〕 $${}_nC_r \cdot {}_nH_r = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!} \cdot \frac{n(n+1)\ldots\ldots(n+r-1)}{r!}$$

$$= \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\ldots\{(n^2-(r-1)^2\}}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \ldots\ldots r^2}$$

$$\therefore\ 1 - {}_nC_1 \cdot {}_nH_1 + {}_nC_2 \cdot {}_nH_2 + \ldots\ldots + (-1)^n\, {}_nC_n \cdot {}_nH_n$$

$$= 1 - \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + - \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^n \frac{n^2(n^2-1^2)\ldots\ldots\{n^2-(n-1)^2\}}{1^2 \cdot 2^2 \ldots\ldots n^2}$$

然ルニ $$1 - \frac{n^2}{1^2} = -\frac{n^2-1^2}{1^2}$$

$$\therefore\ 1 - \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2 \cdot 2^2} = -\frac{n^2-1^2}{1^2} + \frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2 \cdot 2^2} = \frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2 \cdot 2^2}$$

$$1 - \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}$$

$$= -\frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}$$

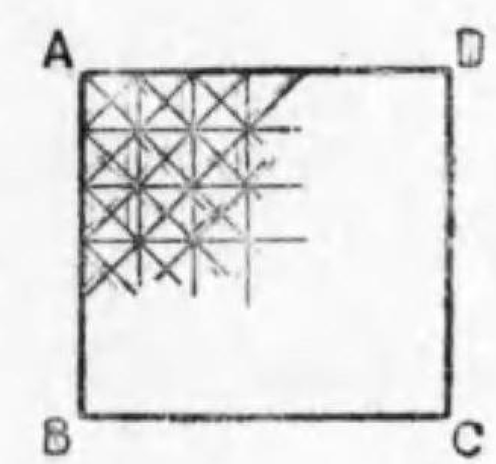
一般ニ初メヨリ r 項ノ和ハ

$$(-1)^{r-1} \frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\ldots\{n^2-(r-1)^2\}}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \ldots\ldots (r-1)^2}$$

依ツテ總テノ項ノ和即チ初メヨリ $n+1$ 項ノ和ハ

$$(-1)^n \frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\ldots(n^2-n^2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \ldots\ldots n^2} = 0$$

44. 一ツノ正方形ヲ n^2 個ノ小正方形ニ分チ各正方形ノ對角線ヲ作ルトキ由ツテ生ズル總テノ直角三角形ノ數ヲ求メヨ。



〔解〕 $ABCD$ ヲ初メノ正方形トス。先ヅ AB, AD ニ平行ナル斜邊ヲ有スル直角三角形ノ數ヲ求メンニ其最小ナルモノハ各小正方形ニツキ四ツアル故ニ總數 $4n^2$, 次ノ大サノモノハ AB ニ平行ナル斜邊ヲ有スルモノ $2(n-1)n$ 個, AD ニ平行ナル斜邊ヲ有スルモノ $2(n-1)n$ 個, 依ツテ其總數ハ $4(n-1)n$, 第三番目ノ大サノモノモ AB ニ平行ナル斜邊ヲ有スルモノ $2(n-2)(n-1)$個, AD ニ平行ナル斜邊ヲ有スルモノ $2(n-2)(n-1)$ 個, 依ツテ其總數 $4(n-2)(n-1)$, 第四番目ノ大サノモノモ同様ニ $4(n-3)(n-1)$

一般ニ $(2k+1)$ 番目ノ大サモノヽ數ハ $4(n-2k)(n-k)$, $(2k+2)$ 番目ノ大サノモノヽ數ハ $4(n-2k-1)(n-k)$ アリ, 但シ k ハ n ガ偶數ナラバ 0 ヨリ $\frac{n}{2}-1$ マデ, n ガ奇數ナラバ 0 ヨリ $\frac{n-1}{2}$ マデナルコト明カナリ。故ニ AB, AD ニ平行ナル斜邊ヲ有スル三角形ノ總數ヲ N_1 トレバ

$$N_1 = 4\left\{\sum_{k=0}^{k=r}(n-2k)(n-k) + \sum_{k=0}^{k=r}(n-2k-1)(n-k)\right\}$$

$$= 4\left\{\sum_{k=0}^{r}(n^2-3kn+2k^2) + \sum_{k=0}^{r}(n^2-3kn-n+2k^2+k)\right\}$$

$$= 4\left\{\sum_{k=0}^{r}(2n^2-n) - \sum_{k=0}^{r}(6n-1)k + 4\sum_{k=0}^{r}k^2\right\}$$

但シ n ガ偶數ナラバ $r = \frac{n}{2}-1$, n ガ奇數ナラバ $r = \frac{n-1}{2}$,

故ニ n ガ偶數ナラバ

$$N_1=4\left\{(2n^2-n)\frac{n}{2}-(6n-1)\frac{n}{4}\left(\frac{n}{2}-1\right)+\frac{4}{6}\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2}(n-1)\right\}$$

（第六章基本定理 IV）

n ガ奇數ナラバ

$$N_1=4\left\{(2n^2-n)\frac{n+1}{2}-(6n-1)\left(\frac{n+1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{4}{6}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)n\right\}$$

次ニ各對角線ヲ斜邊トスル直角三角形ノ數ヲ求メンニ其最小ナルモノハ $4n^2$ 個，次ハ $4(n-1)^2$ 個，一般ニ k 番目ノ大サノモノハ $4(n-k+1)^2$ 個アルコト明カナリ，依ツテ其總數ヲ N_2 トスレバ

$$N_2=4\{n^2+(n-1)^2+\dots\dots+3^2+2^2+1^2\}=\frac{4}{6}n(n+1)(2n+1),$$

故ニ所要ノ總數ヲ N トスレバ

$$N=N_1+N_2,$$

故ニ n ハ偶數ナラバ

$$N=3n^3+\frac{9}{2}n^2+n,$$

n ハ奇數ナラバ

$$N=2n^3+\frac{9}{2}n^2+n-\frac{1}{2}$$

之レヲ一ツニマトムレバ

$$N=3n^3+\frac{9}{2}n^2+n-\frac{1}{4}\{1+(-1)^{n+1}\}$$

45. 一平面上ニ何レノ三ツモ同一直線上ニアラズ何レノ四ツモ同一圓周上ニアラザル n 個ノ点アリ，今夫等 n 点ノ中任意ノ三点ヲ過ルアラユル圓ヲ畫クトキ何レノ三ツノ圓モ n 点以外ノ一点ヲ共有セズ，又何レノ圓モ他ノ各ノ圓ト常ニ二点ニテ交ルモノトスレバ n 点以外ノ各圓ノ交点ノ數ハ

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(2n-1)}{72}$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 何レノ三ツモ同一直線上ニアラズ又何レノ四ツモ同一圓周上ニアラザル故ニ n 点中ノ任意ノ三点ヲ過ル圓ノ總數ハ ${}_nC_3$ ナリ。其中ノ任意ノ一ツヲ K トシ K ノ過ル n 点中ノ三点ヲ P, Q, R トスレバ ${}_nC_3$ ノ中 K ト P ヲ共有シ Q, R ヲ共有セザル圓ノ數ハ ${}_{n-3}C_2$ ニシテ K ハ之等ノ各圓ト常ニ P ノ外尚他ノ一点ニテ交ル故ニ P 以外ノ交点ハ ${}_{n-3}C_2$ アリ，即チ K ト P ヲ共有スル總テノ圓ト K トノ交点ノ中 n 点以外ノモノハ ${}_{n-3}C_2$ 個アリ，同様ニ K ト n 点中ノ Q 又ハ R ノミヲ共有スル總テノ圓ト K トノ交点ノ中 Q 又ハ R 以外ノモノハ夫々 ${}_{n-3}C_2$ 個アリ，故ニ ${}_nC_3$ 中ノ任意ノ一ツガ n 点中ノ何レカ一ツヲ共有スル他ノ圓トノ交点ノ中 n 点以外ノモノハ $3{}_{n-3}C_2$ 個アリ，從ツテ ${}_nC_3$ ノ總テニツイテハ斯ル点ハ $3{}_{n-3}C_2\times{}_nC_3$ 個アルガ如クナルモ，併シカク考フルトキハ各ノ圓ハ常ニ二度ヅヽ重複シテ考ヘラルヽガ故ニ實際ノ數ハ其半分ナリ，即チ ${}_nC_3$ 個ノ圓ノ總テガ n 点中ノ何レカ一点ヲ共有スル他ノ總テノ圓トノ交点ノ中 n 点以外ノモノハ $\frac{3}{2}{}_{n-3}C_2\cdot{}_nC_3=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{8}$

個ナリ。

次ニ總テノ圓 ${}_nC_3$ 個ノ中 K ト n 点中ノ何レヲモ共有セザルモノノ數ハ ${}_{n-3}C_3$ ニシテ K ハ之等ノ圓ト常ニ二点ニテ交ル故ニ其交点ノ數ハ $2{}_{n-3}C_3$ ニシテ而モ皆 n 点以外ノモノナリ。從ツテ ${}_nC_3$ 個ノ總テガ n 点中ノ何レヲモ共有セザル他ノ總テノ圓トノ交点ノ中 n 点以外ノモノハ前ノ場合ト同様ニ

$$\frac{2}{2}{}_{n-3}C_3\cdot{}_nC_3=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{36}$$

ナリ，依ツテ所要ノ數ハ

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{8}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{36}$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(2n-1)}{72}$$

46. 一平面上ニアル n 個ノ直線ハ其何レノ二ツモ平行セズ，又何レノ三ツモ一点ニ會セザルトキハ其平面ヲ $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ 個ノ部分ニ分ツコトヲ証セヨ。

〔解〕 題意ニヨリ第 n 直線ハ他ノ $n-1$ 個ノ直線ト $n-1$ 個ノ點ニテ交リ n 個ノ部分ニ分タル，而シテコノ n 個ノ部分ハ何レモ皆平面ヲ分ツ部分ノ境界トナル故ニ若シコノ第 n 直線ヲ除クトキハ平面ヲ分ツ部分ノ n 個ノ境界線ヲ除クコトヽナル故ニ平面ノ部分ハ n 個減少スベシ，即チ $n-1$ 個ノ直線ニヨツテ分タルヽ部分ノ數ハ n 個ノ直線ニヨツテ分タルヽ部分ノ數ヨリ n 個少ナシ，依ツテ今 x 個ノ直線ニ由ツテ分タルヽ平面ノ部分ノ數ヲ $f(x)$ トスレバ

$$f(n)=f(n-1)+n,$$

此關係ハ n ノ任意ノ正ノ整數値ニ對シテ成立スル故ニ n ヲ順次 1 ヅツ遞減スレバ

$$f(n-1)=f(n-2)+n-1$$

$$f(n-2)=f(n-3)+n-2$$

....

$$f(3)=f(2)+3$$

$$f(2)=f(1)+2$$

邊々相加フレバ

$$f(n)=n+(n-1)+(n-2)+\ldots\ldots+3+2+f(1)$$

然ルニ一個ノ直線ニ由ツテ平面ハ二ツノ部分ニ分タルヽコト明カナル故ニ

$$f(1)=2$$

$$\therefore\ f(n)=n+(n-1)+\ldots\ldots+3+2+2$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+1$$

即チ n 個ノ直線ニ由ツテ分タルヽ部分ノ數ハ $\frac{n(n+1)}{2}+1$ ナリ。

47. 一ツノ球ノ中心ヲ過ル n 個ノ平面ハ其何レノ三ツモ同一ノ直線ニテ交ラザルトキハ球面ヲ n^2-n+2 個ノ部分ニ分ツコトヲ証セヨ。

〔解〕 第 n 平面上ノ大圓ハ題意ニヨリ他ノ $n-1$ 個ノ大圓ニヨツテ $2(n-1)$ 個ノ部分ニ分タル，而シテ此 $2(n-1)$ 個ノ部分ハ何レモ皆球面ヲ分ツ部分ノ境界トナル故ニ若シ此第 n 平面ヲ除クトキハ球面ノ部分ハ $2(n-1)$ 個減少スベシ，即チ $(n-1)$ 個ノ平面ニテ分タル球面ノ部分ノ數ハ n 個ノ平面ニテ分タルヽ部分ノ數ヨ

リ $2(n-1)$ 個少ナシ，依ツテ今 n 個ノ平面ニテ分タルヽ球面ノ部分ノ數ヲ $f(n)$ トスレバ $f(n)=f(n-1)+2(n-1)$

此關係ハ n ノ任意ノ正ノ整數値ニ對シテ成立スベキガ故ニ n ヲ順次 1 ツヽ遞減スレバ $f(n-1)=f(n-2)+2(n-2)$

$$f(n-2)=f(n-3)+2(n-3)$$

....

$$f(3)=f(2)+2\cdot2$$

$$f(2)=f(1)+2\cdot1$$

然ルニ一ツノ平面ニヨツテ球面ハ二ツノ部分ニ分タルヽコト明カナル故ニ

$$f(1)=2$$

依ツテ上ノ各式ヲ邊々相加フレバ

$$f(n)=2\{(n-1)+(n-2)+\ldots\ldots+2+1\}+2$$

$$=n^2-n+2$$

即チ所題ノ如キ n 個ノ平面ニヨツテ球面ハ n^2-n+2 個ノ部分ニ分タル。

48. 一ツノ平面上ノ一点ヲ通過スル m 個ノ直線ト他ノ一点ヲ通過スル n 個ノ直線トガ何レノ二ツモ平行セズ又相合セザルトキハ此平面ハコレ等 $m+n$ 個ノ直線ニ由ツテ $mn+2m+2n-1$ 個ノ部分ニ分タルヽコトヲ証セヨ。

〔解〕 m 個ノ直線ノ各ハ他ノ n 個ノ直線ト自己ノ通過スル点トニ由ツテ $n+2$ 個ノ部分ニ分タル，而シテ此 $n+2$ 個ノ部分ハ何レモ皆平面ヲ分ツ部分ノ境界トナル故ニ若シ此第 m 直線ヲ除クトキハ平面ヲ分ツ部分ノ $n+2$ 個ノ境界線ヲ除クコトヽナル故ニ平面ノ部分ハ $n+2$ 個減少スベシ，依ツテ今所要ノ數ヲ $f(m,n)$ トスレバ $f(m,n)=f(m-1,n)+n+2$

此關係ハ m ガ 2 以上ニシテ n ガ任意ノ正ノ整數値ナルトキ成立ス，$m=1$ ナルトキハ自己ノ通過スル点ハ境界線トシテノ分点トナラズシテ他ノ n 個ノ直線ニヨツテ分タルヽ $n+1$ 個ノ部分ガ境界線トナル故ニコレヲ除クコトニ由ツテ平面ノ部分ノ數ハ $n+1$ 個減ズベシ。即チ

$$f(1,\ n)=f(0,\ n)+n+1$$

依ツテ次ノ m 個ノ關係ヲ得。

$$f(m,\ n)=f(m-1,\ n)+n+2$$

$$f(m-1,\ n\ =f(m-2,\ n)+n+2$$

....

$$f(3,\ n)=f(2,\ n)+n+2$$

$$f(2,\ n)=(f1,\ n)+n+2$$

$$f(1,\ n)=f(0,\ n)+n+1$$

邊々相加フレバ $f(m,\ n)=f(o,n)+(m-1)(n+2)+n+1.$

然ルニ $f(0,\ n)=2n$ ナルコト明カナリ。

$$\therefore\ f(m,\ n)=2n+(m-1)(n+2)+n+1=mn+2m+2n-1$$

49. 何レノ二ツモ平行ナラズ又何レノ四ツモ一点ニ會スルコトナキ n 個ノ平面ハ空間ヲ $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$ 個ノ部分ニ分ツコトヲ証セヨ。

〔解〕 第 n 平面ハ他ノ $n-1$ 個ノ平面ト $n-1$ 個ノ直線ニテ交ル．而シテソレ等 $n-1$ 個ノ直線ハ題意ニヨリ何レノ二ツモ平行ナラズ,又何レノ三ツモ一点ニ會スルコトナシ，故ニソレ等 $n-1$ 個ノ直線ハ問46ニヨリ第 n 平面ヲ $1+\frac{1}{2}n(n-1)$ 個ノ部分ニ分ツ，而シテ此各部分ハ空間ノ部分ノ境界トナル故ニ此第 n 平面ヲ除ケバ空間ノ部分ノ數ハ $1+\frac{1}{2}n(n-1)$ 個減ズ，依ツテ所要ノ數ヲ $f(n)$ トスレバ

$$f(n)=f(n-1)+\frac{1}{2}n(n-1)+1$$

コノ關係ハ n ノ任意ノ正ノ整數値ニテ成立スベキガ故ニ

$$f(n-1)=f(n-2)+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$$

$$f(n-2)=f(n-3)+\frac{1}{2}(n-2)(n-3)+1$$

....

$$f(2)=f(1)+\frac{1}{2}2.1+1$$

$$\therefore\ f(n)=\frac{1}{2}\{n(n-1)+(n-1)(n-2)+\ldots\ldots+3.2+2.1\}+n-1+f(1)$$

而シテ $f(1)=2$ ナルコト明カナリ

$$\therefore\ f(n)=\frac{1}{2}\{1.2+2.3+\ldots\ldots+(n-1)(n-2)+n(n-1)\}+n+1$$

$$=\frac{1}{2}\{2^2-2+3^2-3+\ldots\ldots+n^2-n\}+n+1$$

$$=\frac{1}{2}\{2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2-(2+3+\ldots\ldots+n)\}+n+1$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-1-\frac{1}{2}(n+2)(n-1)\right\}+n+1$$

$$=\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$$

第 五 章

二 項 定 理

基本定理 **I.** $(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\ldots\ldots$

$$+{}_nC_r\,a^{n-r}b^r+\ldots\ldots+b^n$$

$$=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\ldots\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r+\ldots\ldots+b^n$$

但シ n ハ正ノ整數

II. $(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots\ldots$

$$+\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}x^r+\ldots\ldots$$

但シ $|x|<1$, n ハ任意ノ實數 (問. 26 參照)

III. $(a+b+c+\ldots\ldots)^n=\Sigma\frac{n!}{p!\,q!\,r!\ldots\ldots}a^pb^qc^r\ldots\ldots$

但シ $p+q+r+\ldots\ldots=n=$ 正ノ整數

演習問題

1. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ ニ於ケル x^{2p} ノ係數ヲ求メヨ。

〔解〕 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ ノ展開式ニ於ケル第 $r+1$ 番目ノ項ハ

$${}_{2n}C_r\,x^{2n-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^r\,{}_{2n}C_r\,x^{2n-2r}$$

今 $2n-2r=2p$ トスレバ $r=n-p$ 故ニ x^{2p} ノ係數ハ

$$(-1)^{n-p}{}_{2n}C_{n-p}=(-1)^{n-p}\frac{(2n)!}{(n-p)!\,(n+p)!}$$

2. $(a+\sqrt{a-1})^6+(a-\sqrt{a-1})^6$ ヲ a ノ降冪ノ順ニ排列セヨ。

〔解〕 $\sqrt{a^2-1}=x$ トオケバ

$$(a+\sqrt{a^2-1})^6+(a-\sqrt{a^2-1})^6=(a+x)^6+(a-x)^6$$

$$=a^6+{}_6C_1a^5x+{}_6C_2a^4x^2+{}_6C_3a^3x^3+{}_6C_4a^2x^4+{}_6C_5ax^5+x^6$$

$$+a^6-{}_6C_1a^5x+{}_6C_2a^4x^2-{}_6C_3a^3x^3+{}_6C_4a^2x^4-{}_6C_5ax^5+x^6$$

$$=2(a^6+{}_6C_2a^4x^2+{}_6C_4a^2x^4+x^6)$$

$$=2\{a^6+{}_6C_2a^4(a^2-1)+{}_6C_4a^2(a^2-1)^2+(a^2-1)^3\}$$

$$=64\,a^6-96\,a^4+36\,a^2-2$$

3. $(1+x)^n$ ノ展開式ニ於テ第 16 番目ノ係數ト第 26 番目ノ係數トガ相等シトイフ, n ノ値如何。

〔解〕 第 16 番目ノ係數ハ ${}_nC_{15}$, 第 26 番目ノ係數ハ ${}_nC_{25}$, 故ニ題意ニヨリ

$${}_nC_{15}={}_nC_{25}$$

然ルニ ${}_nC_{25}={}_nC_{n-25}$

$\therefore\ {}_nC_{15}={}_nC_{n-25}$ $\qquad\therefore\ 15=n-25$ $\qquad\therefore\ n=40$

4. $(x+y)^n$ ノ展開式ニ於ケル第六項ハ 112, 第七項ハ 7, 第八項ハ $\frac{1}{4}$ ナリトイフ x, y, 及ビ n ノ値如何。

〔解〕 $(x+y)^n$ ノ展開式ニ於ケル第 $r+1$ 項ハ ${}_nC_r\,x^{n-r}y^r$ ナルヲ以テ題意ニヨリ次ノ三ツノ方程式ヲ得。

$${}_nC_5x^{n-5}y^5=112,\quad {}_nC_6x^{n-6}y^6=7,\quad {}_nC_7x^{n-7}y^7=\frac{1}{4}$$

第一式ヲ第二式ニテ割レバ

$$\frac{x}{y}=\frac{8(n-5)}{3}$$

又第二式ヲ第三式ニテ割レバ

$$\frac{x}{y}=4(n-6)$$

コノ兩式ヨリ x, y ヲ消去スレバ

$$4(n-6)=\frac{8(n-5)}{3}\qquad\therefore\ n=8$$

n ノコノ値ヲ上ノ式ニ代入スレバ

$${}_8C_5x^3y^5=112, \qquad \frac{x}{y}=8,$$

$$\therefore\ x^3y^5=2, \qquad x=8y \qquad \therefore\ y=\frac{1}{2}, \qquad x=4$$

5. $(x+a)^n$ **ノ展開式ニ於ケル各項ヲ** $u_0,\ u_1\ u_2 \ldots\ldots u_n$ **トスルトキ**

$$(x^2+a^2)^n=(u_0-u_2+u_4-+\ldots\ldots)^2+(u_1-u_3+u_5-+\ldots\ldots)^2$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $x^2+a^2=(x+ai)(x-ai)$ 　但シ $i=\sqrt{-1}$ 　又

$$(x+ai)^n=x^n+naix^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}(ai)^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(ai)^3x^{n-3}+\ldots\ldots+(ai)^n$$

$$=x^n+naix^{n-1}-\frac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3ix^{n-3}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}a^4x^{n-4}-+\ldots\ldots$$

$$=u_0+u_1i-u_2-u_3i+u_4-+\ldots\ldots$$

$$=(u_0-u_2+u_4-+\ldots\ldots)+i(u_1-u_3+u_5-+\ldots\ldots)$$

同樣ニ

$$(x-ai)^n=(u_0-u_2+u_4-+\ldots\ldots)-i(u_1-u_3+u_5-+\ldots\ldots)$$

$$\therefore\ (x^2+a^2)^n=(u_0-u_2+u_4-+\ldots\ldots)^2+(u_1-u_3+u_5-+\ldots\ldots)^2$$

6. $(a+b)^n$ **ノ展開式ニ於ケル各項ノ係數ノ和ヲ求メヨ，又其奇數番目ノ係數ノ和ト偶數番目ノ係數ノ和トハ何レモ** 2^{n-1} **ニ等シキコトヲ証セヨ。**

〔解〕 $(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\ldots\ldots+{}_nC_r\,a^{n-r}b^r+\ldots\ldots+b^n$

兩邊ニ於テ $a=b=1$ トオケバ

$$2^n=1+{}_nC_1+{}_nC_2+\ldots\ldots+{}_nC_r+\ldots\ldots+1 \qquad (A)$$

即チ各係數ノ和ハ 2^n ニ等シ，

次ニ $a=1,\ b=-1$ トオケバ

$$0=1-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\ldots\ldots+(-1)^r\,{}_nC_r+\ldots\ldots+(-1)^n$$

$$\therefore\ 1+{}_nC_2+{}_nC_4+\ldots\ldots={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\ldots\ldots$$

故ニ (A) ヨリ此双方ハ何レモ $\frac{2^n}{2}=2^{n-1}$ ニ等シ。

7. 次ノ二式ヲ証セヨ。

$${}_nC_1+2\,{}_nC_2+3\,{}_nC_3+\ldots\ldots+n\,{}_nC_n=n\,2^{n-1}$$

$${}_nC_1-2\,{}_nC_2+3\,{}_nC_3-+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}n\,{}_nC_n=0$$

〔解〕 $k={}_nC_1+2\,{}_nC_2+3\,{}_nC_3+\ldots\ldots+(n-1)\,{}_nC_{n-1}+n\,{}_nC_n$ 　(1)

トスレバ ${}_nC_r={}_nC_{n-r},\ {}_nC_0=1$ ナル故ニ

$$k={}_nC_{n-1}+2\,{}_nC_{n-2}+3\,{}_nC_{n-3}+\ldots\ldots+(n-1)\,{}_nC_1+n\,{}_nC_0$$

$$=n\,{}_nC_0+(n-1)\,{}_nC_1+(n-2)\,{}_nC_2+\ldots\ldots+{}_nC_{n-1} \qquad (2)$$

(1), (2) ヨリ

$$\therefore\ 2k=n\{{}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\ldots\ldots+{}_nC_n\}$$

然ルニ前問ニヨリ 　${}_nC_0+{}_nC_1+\ldots\ldots+{}_nC_n=2^n$

$$\therefore\ 2k=n.2^n \qquad \therefore\ k=n.2^{n-1}$$

次ニ 　$k'={}_nC_1-2\,{}_nC_2+3\,{}_nC_3-+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\,n\,{}_nC_n$

トスレバ上ト同樣ニ n ガ偶數ナラバ

$$2k'=n\{-{}_nC_0+{}_nC_1-{}_nC_2+{}_nC_3-+\ldots\ldots\}$$

然ルニ前問ニヨリ右邊ノ括弧内ハ 0, 從ツテ $k'=0$, 又一般ニ $r\,{}_nC_r=n_{n-1}C_{r-1}$

ナル故ニ n ガ奇數ナルトキハ

$$k'=n\{{}_{n-1}C_0-{}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2-{}_{n-1}C_3+-\ldots\ldots\}$$

右邊ノ括弧内ハ前問ニヨリ 0 ナル故ニ $k'=0$

8. 次ノ二式ヲ証セヨ，但シ ${}_nC_0=1$ **トス。**

$${}_nC_0^2+{}_nC_1^2+{}_nC_2^2+\ldots\ldots+{}_nC_n^2=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$${}_nC_0\,{}_nC_r+{}_nC_1\,{}_nC_{r+1}+\ldots\ldots+{}_nC_{n-r}\,{}_nC_n=\frac{(2n)!}{(n+r)!(n-r)!}$$

〔解〕 $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\ldots\ldots+{}_nC_r\,x^r+\ldots\ldots+{}_nC_nx^n$ 　(1)

然ルニ ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ ナル故ニ

$$(1+x)^n={}_nC_n+{}_nC_{n-1}x+{}_nC_{n-2}x^2+\ldots\ldots+{}_nC_{n-r}x^r+\ldots\ldots+{}_nC_0x^n \qquad (2)$$

此二式ヲ邊々相乘シタルトキ右邊ノ x^n ノ係數ハ

$$ {}_nC_0{}^2+{}_nC_1{}^2+{}_nC_2{}^2+\ldots\ldots+{}_nC_n{}^2 $$

ニシテ左邊ノ x^n ノ係數ハ $(1+x)^{2n}$ ノ展開式ニ於ケル x^n ノ係數

$$ {}_{2n}C_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2} $$

ナリ，依ツテ所題ノ式ノ兩邊ハ相等シ。

次ニ (1), (2) ヲ邊々相乘ジテ兩邊ノ x^{n-r} ノ係數ヲ求ムレバ右邊ヨリハ

$$ {}_nC_0\,{}_nC_r+{}_nC_1\,{}_nC_{r+1}+\ldots\ldots+{}_nC_{n-r}\,{}_nC_n $$

左邊ヨリハ $(1+x)^{2n}$ ノ展開式ニ於ケル x^{n-r} ノ係數

$$ {}_{2n}C_{n-r}=\frac{(2n)!}{(n-r)!\,(n+r)!} $$

ヲ得，依ツテ

$$ {}_nC_0\,{}_nC_r+{}_nC_1\,{}_nC_{r+1}+\ldots\ldots+{}_nC_{n-r}\,{}_nC_n=\frac{(2n)!}{(n-r)!\,(n+r)!} $$

9. 次ノ關係ヲ證セヨ。

$$ \mathbf{1^2\,{}_nC_1+2^2\,{}_nC_2+3^2\,{}_nC_3+\ldots\ldots+n^2\,{}_nC_n=n(n+1)2^{n-2}} $$

〔解〕 $(1+x)^{n-2}=1+(n-2)x+\dfrac{(n-2)(n-3)}{2!}x^2+\ldots\ldots+x^{n-2}$

$$ \therefore\ n(1+x)^{n-2}=n+n(n-2)x+\frac{n(n-2)(n-3)}{2!}x^2+\ldots\ldots+nx^{n-2} $$

兩邊ニ $1+nx$ ヲ乘ズレバ

$$ \begin{aligned} n(1+x)^{n-2}(1+nx)&=n+n(n-2)x+\frac{n(n-2)(n-3)}{2!}x^2+\ldots\ldots+nx^{n-2}\\ &\quad+n^2x+n^2(n-2)x^2+\ldots\ldots+n^2(n-2)x^{n-2}+n^2x^{n-1}\\ &=n+2n(n-1)x+\frac{3n(n-1)(n-2)}{2!}x^2+\ldots\ldots\\ &\quad+(n-1)^2nx^{n-2}+n^2x^{n-1}\\ &={}_nC_1+2^2\,{}_nC_2x+3^2\,{}_nC_3x^2+\ldots\ldots\\ &\quad+(n-1)^2\,{}_nC_{n-1}x^{n-2}+n^2\,{}_nC_nx^{n-1} \end{aligned} $$

兩邊ノ x ヲ 1 トオケバ

$$ n2^{n-2}(1+n)={}_nC_1+2^2\,{}_nC_2+3^2\,{}_nC_3+\ldots\ldots+n^2\,{}_nC_n $$

或ハ次ノ如クスルモ可ナリ。

所題ノ式ノ左邊ヲ K トスレバ

$$ K=1^2.n+2^2.\frac{n(n-1)}{2!}+3^2\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\ldots\ldots+(n-1)^2n+n^2.1 $$

順序ヲ逆ニスレバ

$$ K=n^2.1+(n-1)^2n+(n-2)^2\frac{n(n-1)}{2!}+\ldots\ldots+2^2\frac{n(n-1)}{2!}+1^2.n $$

$$ \begin{aligned} \therefore\ 2K&=n^2+n+n(n-1)(n+1)+n(n-1)(n-2)\frac{n+1}{2!}+\ldots\ldots\\ &=n(n+1)\left\{1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}+\ldots\ldots+(n-1)+1\right\}\\ &=n(n+1)(1+1)^{n-1}=n(n+1)2^{n-1} \end{aligned} $$

$$ \therefore\ K=n(n+1)2^{n-2} $$

10. 次ノ關係ヲ證セヨ。

$$ \mathbf{1^3\,{}_nC_1+2^3\,{}_nC_2+3^3\,{}_nC_3+\ldots\ldots+n^3\,{}_nC_n=n^2(n+3)2^{n-3}} $$

〔解〕 前問ニ於テ計算シタル所ニヨリ

$$ \begin{aligned} n(1+x)^{n-2}(1+nx)&=n+2n(n-1)x+\frac{3n(n-1)(n-2)}{2!}x^2+\ldots\ldots\\ &\quad+(n-1)^2nx^{n-2}+n^2x^{n-1} \end{aligned} $$

同樣ニ

$$ \begin{aligned} n(n-1)x(1+x)^{n-3}(2+nx)&=2n(n-1)x+\frac{6n(n-1)(n-2)}{2!}x^2+\ldots\ldots\\ &\quad+n(n-1)^2(n-2)x^{n-2}+n^2(n-1)x^{n-1} \end{aligned} $$

此兩式ヲ邊々相加フレバ

$$ \begin{aligned} &n(1+x)^{n-2}(1+nx)+n(n-1)x(1+x)^{n-3}(2+nx)\\ &\quad=n+4n(n-1)x+\frac{9n(n-1)(n-2)}{2!}x^2+\ldots\ldots+n(n-1)^3x^{n-2}+n^3x^{n-1}\\ &\quad={}_nC_1+2^3\,{}_nC_2x+3^3\,{}_nC_3x^2+\ldots\ldots+(n-1)^3\,{}_nC_{n-1}x^{n-2}+n^3\,{}_nC_nx^{n-1} \end{aligned} $$

茲ニ於テ $x=1$ トオケバ左邊ハ

$$ n2^{n-2}(1+n)+n(n-1)2^{n-3}(2+n)=n^2(n+3)2^{n-3} $$

トナル故ニ

$$ n^2(n+3)2^{n-3}=1^3\,{}_nC_1+2^3\,{}_nC_2+3^3\,{}_nC_3+\ldots\ldots+n^2\,{}_nC_n $$

或ハ次ノ如クスルモ可ナリ，前問ニヨリ

$$1^2{}_nC_1+2^2{}_nC_2+3^2{}_nC_3+\ldots\ldots+(n-1)^2{}_nC_{n-1}+n^2{}_nC_n=n(n+1)2^{n-2}$$

$$\therefore\ 1^2{}_{n-1}C_1+2^2{}_{n-1}C_2+3^2{}_{n-1}C_3+\ldots\ldots+(n-1)^2{}_{n-1}C_{n-1}\ =(n-1)n\,2^{n-3}$$

然ルニ ${}_nC_r-{}_{n-1}C_r={}_{n-1}C_{r-1}$, ${}_nC_0=1$ ナル故ニ上ノ二式ヲ邊々相引ケバ

$$1^2{}_{n-1}C_0+2^2{}_{n-1}C_1+3^2{}_{n-1}C_2+\ldots\ldots+(n-1)^2{}_{n-1}C_{n-2}+n^2{}_nC_n=n(n+3)2^{n-3}$$

$$\therefore\ 1^2n_{n-1}C_0+2^2n_{n-1}C_1+3^2n_{n-1}C_2+\ldots\ldots+(n-1)^2n_{n-1}C_{n-2}+n^3{}_nC_n=n^2(n+3)2^{n-3}$$

然ルニ $n_{n-1}C_{r-1}=r\,{}_nC_r$,

$$\therefore\ 1^3{}_nC_1+2^3{}_nC_2+3^3{}_nC_3+\ldots\ldots+(n-1)^3{}_nC_{n-1}+n^3{}_nC_n=n^2(n+3)2^{n-3}$$

11. 次ノ關係ヲ証セヨ。

$$\frac{{}_nC_1}{1}-\frac{{}_nC_2}{2}+\frac{{}_nC_3}{3}-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{{}_nC_n}{n}$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}$$

〔解〕 $n=1$ ノトキ成立スルコト明カナル故ニ $n=m$ ノトキ成立スト假定シソレヨリ $n=m+1$ ノトキモ亦成立スルコトヲ証セントス，

$n=m$ ノトキノ左邊ノ値ヲ S_m トスレバ

$$S_{m+1}=\frac{{}_{m+1}C_1}{1}-\frac{{}_{m+1}C_2}{2}+\frac{{}_{m+1}C_3}{3}-\ldots\ldots+(-1)^{m-1}\frac{{}_{m+1}C_m}{m}$$

$$+(-1)^m\frac{{}_{m+1}C_{m+1}}{m+1}$$

$$S_m=\frac{{}_mC_1}{1}-\frac{{}_mC_2}{2}+\frac{{}_mC_3}{3}-\ldots\ldots+(-1)^{m-1}\frac{{}_mC_m}{m}$$

然ルニ ${}_{m+1}C_r-{}_mC_r={}_mC_{r-1}$, ${}_mC_0=1$,

$$\therefore\ S_{m+1}-S_m=\frac{{}_mC_0}{1}-\frac{{}_mC_1}{2}+\frac{{}_mC_2}{3}-\ldots\ldots+(-1)^{m-1}\frac{{}_mC_{m-1}}{m}$$

$$+(-1)^m\frac{{}_{m+1}C_{m+1}}{m+1}$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{m}{2!}+\frac{m(m-1)}{3!}-\frac{m(m-1)(m-2)}{4!}+\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{m-1}+(-1)^m\frac{1}{m+1}$$

$$=-\frac{1}{m+1}\left\{1-\frac{m+1}{1}+\frac{(m+1)m}{2!}-\frac{(m+1)m(m-1)}{3!}+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+(-1)^m(m+1)+(-1)^{m+1}-1\right\}$$

$$=-\frac{1}{m+1}\left\{(1-1)^{m+1}-1\right\}=\frac{1}{m+1}$$

$$\therefore\ S_{m+1}=S_m+\frac{1}{m+1}$$

然ルニ假定ニヨリ

$$S_m=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{m}$$

$$\therefore\ S_{m+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{m+1}$$

依ツテ n ノ總テノ正ノ整數ノトキ所題ノ關係ハ成立ス。

12. n ガ如何ナル正ノ整數ナルトキ $(1+x)^n$ ノ展開式ニ於ケル相連接スル或三項ノ係數ガ等差級數，又ハ等比級數，又ハ調和級數トナルカ。

〔解〕 相連接セル三項ノ係數ヲ ${}_nC_{r-1}$, ${}_nC_r$, ${}_nC_{r+1}$ トス，之レガ等差級數ヲナスタメニハ $2\,{}_nC_r={}_nC_{r-1}+{}_nC_{r+1}$

ナラザルベカラズ，即チ

$$\frac{2n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}=\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+2)}{(r-1)!}$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r)}{(r+1)!}$$

$$\therefore\ 2(r+1)(n-r+1)=r(r+1)+(n-r+1)(n-r)$$

$$\therefore\ n^2-4nr+4r^2-n-2=0\qquad\therefore\ (n-2r)^2=n+2$$

r ハ正ノ整數ナルヲ要スル故ニ $n+2$ ハ完全平方ナラザルベカラズ故ニ $n+2=p^2$ トオケバ

$$n-2r=\pm p,\qquad\therefore\ r=\frac{p^2\pm p-2}{2}=\frac{p(p\pm1)-2}{2}$$

r ハ正ノ整數ナルヲ要スル故ニ p ハ 0 又ハ 1 ナル能ハズ， 又 p ガ 1 ヨリ大ナル整數ナラバ $p(p\pm1)$ ハ偶數ナル故ニ上ノ r ハ正ノ整數ナリ， 逆ニ $n=p^2-2$

ナルトキハ第 $\frac{p(p\pm1)}{2}-1$ 番目ヨリ引續ケル三項ノ係數ハ等差級數ヲナス。即チ等差級數ヲナス三項ハ二組アリ，

次ニ等比級數ヲナスタメニハ

$$({}_nC_r)^2={}_nC_{r-1}\cdot{}_nC_{r+1}$$

即チ $\quad \dfrac{n-r+1}{r}=\dfrac{n-r}{r+1} \qquad \therefore\ n+1=0$

n ガ正ノ整數ナルトキハ此關係ハ成立セズ即チ n ガ如何ナル正ノ整數ナルモ相連接セル三項ノ係數ハ等比級數ヲナサズ，サレド若シ n ガ負數ニテモ可ナリトスレバ $n=-1$ ノトキニ限リ連接セル三項ノ係數ハ等比級數ヲナス，而シテコノ時 r ニ關係セザルガ故ニ此場合ニハ總テノ係數ガ等比級數ヲナス。

最後ニ調和級數トナルタメニハ

$$\frac{2}{{}_nC_r}=\frac{1}{{}_nC_{r-1}}+\frac{1}{{}_nC_{r+1}}$$

ナラザルベカラズ，即チ

$$\frac{2r}{n-r+1}=1+\frac{r(r+1)}{(n-r+1)(n-r)}$$

$\therefore\ 2r(n-r)=(n-r+1)(n-r)+r(r+1) \qquad \therefore\ (n-2r)^2+n=0$

n ガ正ノ整數ナルトキハ此關係ヲ成立セシムル r ノ値ナシ，依ッテ n ガ如何ナル正ノ整數ナルモ相連接セル三項ノ係數ハ調和級數ヲナサズ，若シ n ヲ負數トスルモ上ノ關係ヲ滿足セシムル r ノ正ノ整數値ナキコトハ容易ニ證明セラルヽ故ニ n ガ如何ナル數ナルモ相連接セル三項ノ係數ハ調和級數ヲナサズ。

13. ***n* ガ正ノ整數ナルトキ $(5\sqrt{2}+7)^{2n+1}$ ノ整數部分ヲ *I*，小數部分ヲ *F* ニテ表ハセバ $(I+F)F=1$ ナルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 $(5\sqrt{2}+7)^{2n+1}=(5\sqrt{2})^{2n+1}+{}_{2n+1}C_1(5\sqrt{2})^{2n}.7+{}_{2n+1}C_2(5\sqrt{2})^{2n-1}.7^2$

$\qquad +{}_{2n+1}C_3(5\sqrt{2})^{2n-2}.7^3+\ldots\ldots$

又 $(5\sqrt{2}-7)^{2n+1}=(5\sqrt{2})^{2n+1}-{}_{2n+1}C_1(5\sqrt{2})^{2n}.7+{}_{2n+1}C_2(5\sqrt{2})^{2n-1}.7^2$

$\qquad -{}_{2n+1}C_3(5\sqrt{2})^{2n-2}.7^3+\ldots\ldots$

兩邊ヲ相減ジ，且ツ $(5\sqrt{2})^{2n}=\{(5\sqrt{2})^2\}^n=50^n$ トスレバ

$$(5\sqrt{2}+7)^{2n+1}-(5\sqrt{2}-7)^{2n+1}$$
$$=2\{{}_{2n+1}C_1 50^n.7+{}_{2n+1}C_3 50^{n-1}.7^3+\ldots\ldots\}$$

右邊ノ括弧內ヲ m トスレバ m ハ正ノ整數ナリ，然ルトキハ

$$(5\sqrt{2}+7)^{2n+1}-(5\sqrt{2}-7)^{2n+1}=2m$$

然ルニ $\quad (5\sqrt{2}+7)^{2n+1}=I+F$

$\therefore\ I+F-(5\sqrt{2}-7)^{2n+1}=2m, \qquad \therefore\ F-(5\sqrt{2}-7)^{2n+1}=2m-I$

然ルニ $\quad 0<5\sqrt{2}-7<1, \qquad \therefore\ 0<(5\sqrt{2}-7)^{2n+1}<1 \quad$ 又 $0<F<1$

故ニ左邊ハ整數トナルコト能ハズ，故ニ上ノ等式ガ成立スルタメニハ

$2m-I=0, \qquad$ 即チ $F=(5\sqrt{2}-7)^{2n+1}$,

$\therefore\ (I+F)F=(5\sqrt{2}+7)^{2n+1}(5\sqrt{2}-7)^{2n+1}$

$\qquad =\{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)\}^{2n+1}=(50-49)^{2n+1}=1,$

14. ***n* ガ 1 ヨリ大ナル正ノ整數ナルトキ $(3+\sqrt{7})^n$ ノ整數部分ハ奇數ナルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 前問ノ如ク $(3+\sqrt{7})^n$ ノ整數部分ヲ I，小數部分ヲ F ニテ表ハセバ

$$I+F=3^n+{}_nC_1 3^{n-1}\sqrt{7}+{}_nC_2 3^{n-2}.7+\ldots\ldots$$

今 $(3-\sqrt{7})^n=G$ トスレバ $3-\sqrt{7}$ ハ 1 ヨリ小ナル故ニ G モ亦 1 ヨリ小ナリ，而シテ

$$G=3^n-{}_nC_1 3^{n-1}\sqrt{7}+{}_nC_2 3^{n-2}.7-+\ldots\ldots$$

$$\therefore\ I+F+G=2\{3^n+{}_nC_2 3^{n-2}.7+{}_nC_4 3^{n-4}.7^2+\ldots\ldots\}$$

右邊ノ括弧內ヲ m トオケバ m ハ正ノ整數ナリ，然ルトキハ

$$F+G=2m-I,$$

然ルニ $\quad 0<F<1,\ 0<G<1 \qquad \therefore\ F+G<2$

即チ正ノ數 $F+G$ ハ 2 ヨリ小ニシテ而モ整數 $2m-I$ ニ等シキヲ以テ

$$F+G=1$$

ナラザルベカラズ，即チ $2m-I=1$ ナラザルベカラズ

$\therefore\ I=2m-1$　　即チ I ハ奇數ナリ。

15. n ガ 1 ヨリ大ナル正ノ整數ナルトキ $3^{3n}-26n-1$ ハ $(26)^2$ ニテ割リ切レルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $3^{3n}=(3^3)^n=(27)^n=(1+26)^n$

$$=1+{}_nC_1 26+{}_nC_2(26)^2+{}_nC_3(26)^3+\ldots\ldots+(26)^n$$

$$\therefore\ 3^{3n}-26n-1={}_nC_2(26)^2+{}_nC_3(26)^3+\ldots\ldots+(26)^n$$

$$=26^2\{{}_nC_2+{}_nC_3 26+\ldots\ldots+(26)^{n-2}\},$$

右邊ノ括弧內ハ整數ナル故ニ所題ノ數ハ 26^2 ノ倍數ナルヲ知ル。

16. n ガ正ノ整數ナルトキ

$$\frac{{}_nC_0}{x}-\frac{{}_nC_1}{x+1}+\frac{{}_nC_2}{x+2}-\ldots\ldots+(-1)^n\frac{{}_nC_n}{x+n}=\frac{n!}{x(x+1)\ldots\ldots(x+n)}$$

ナルコトヲ証セヨ，但シ ${}_nC_0=1$ トス。

〔解〕 $n=1$ ナルトキ

$$\frac{{}_1C_0}{x}-\frac{{}_1C_1}{x+1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1!}{x(x+1)}$$

ナル故ニ x ノ如何ニ係ラズ所題ノ式ハ成立ス。

今 n ノ或特別ナル値ノトキ x ノ如何ニ係ラズ

$$\frac{{}_nC_0}{x}-\frac{{}_nC_1}{x+1}+\frac{{}_nC_2}{x+2}-\ldots\ldots+(-1)^n\frac{{}_nC_n}{x+n}=\frac{n!}{x(x+1)\ldots\ldots(x+n)}\qquad(1)$$

ナリト假定スレバ x ヲ $x+1$ トオクモ此關係ハ成立スベシ，即チ

$$\frac{{}_nC_0}{x+1}-\frac{{}_nC_1}{x+2}+\frac{{}_nC_2}{x+3}-\ldots\ldots(-1)^n\frac{{}_nC_n}{x+n+1}$$

$$=\frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+n+1)}\qquad(2)$$

(1) ヨリ (2) ヲ引ケバ

$$\frac{{}_nC_0}{x}-\frac{{}_nC_1+{}_nC_0}{x+1}+\frac{{}_nC_2+{}_nC_1}{x+2}-\ldots\ldots+(-1)^r\frac{{}_nC_r+{}_nC_{r-1}}{x+r}+\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{{}_nC_n}{x+n+1}=\frac{(n+1)!}{x(x+1)\ldots\ldots(x+n+1)}$$

然ルニ ${}_nC_0={}_{n+1}C_0$　${}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$，${}_nC_n={}_{n+1}C_{n+1}$

$$\therefore\ \frac{{}_{n+1}C_0}{x}-\frac{{}_{n+1}C_2}{x+1}+\frac{{}_{n+1}C_2}{x+2}-\ldots\ldots+(-1)^r\frac{{}_{n+1}C_r}{x+r}+\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{{}_{n+1}C_{n+1}}{x+n+1}=\frac{(n+1)!}{x(x+1)\ldots\ldots(x+n+1)}\qquad(3)$$

(1), (2) ハ x ノ如何ニ係ラズ成立スト假定セシ故ニ (3) モ亦 x ノ如何ニ係ラズ成立ス。即チ n ノ或特別ナル値ノトキ x ノ如何ニ係ラズ所題ノ關係ガ成立スト假定スレバソレヨリ 1 ダケ大ナル n ノ値ノトキモ同ジ關係ノ成立スルコトヲ知ル。然ルニ $n=1$ ノトキ x ノ如何ニ係ラズ成立ス，故ニ n ノ任意ノ正ノ整數ニ對シテ所題ノ式ハ成立ス。

17. $(1-x^2)^n=(1+x)^{2n}-2nx(1+x)^{2n-1}$

$$+\frac{2n(2n-2)}{2!}x^2(1+x)^{2n-2}-\frac{2n(2n-2)(2n-4)}{3!}x^3(1+x)^{2n-3}+\ldots\ldots$$

ヲ証セヨ。但シ n ヲ正ノ整數トス。

〔解〕 $1-x^2=(1+x)^2-2x(1+x)$,

$$\therefore\ (1-x^2)^n=\{(1+x)^2-2x(1+x)\}^n=(1+x)^{2n}-n(1+x)^{2n-2}.2x(1+x)$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}(1+x)^{2n-4}2^2x^2(1+x)^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(1+x)^{2n-6}2^3x^3(1+x)^3$$

$$+\ldots\ldots$$

$$=(1+x)^{2n}-2nx(1+x)^{2n-1}+\frac{2n(2n-2)}{2!}x^2(1+x)^{2n-2}-\frac{2n(2n-2)(2n-4)}{3}$$

$$x^3(1+x)^{2n-3}+\ldots\ldots$$

18. p ガ正ノ整數ナルトキ　$(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n)^p-x^n$ ヲ二ツノ因數ニ分解セヨ。

〔解〕 先ヅ $p>1$ ナル場合ヲ考フ

$$1+x+x^2+\ldots\ldots x^{n-1}=y$$

トオケバ

$$1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n=1+xy,$$

$$1-x^n=(1-x)(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{n-1})=(1-x)y,$$

故ニ所題ノ式ヲ P トスレバ

$$P=(1+xy)^p-x^n=1+pxy+\frac{p(p-1)}{2!}x^2y^2+\ldots\ldots+x^py^p-x^n$$

$$=(1-x)y+pxy+\frac{p(p-1)}{2!}x^2y^2+\ldots\ldots+x^py^p$$

$$=y\left\{1-x+px+\frac{p(p-1)}{2!}x^2y+\ldots\ldots+x^py^{p-1}\right\}$$

$$=(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{n-1})\left\{1+(p-1)x+\frac{p(p-1)}{2!}x^2(1+x+x^2+\ldots\right.$$

$$\left.+x^{n-1})+\ldots\ldots+x^p(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{n-1})^{p-1}\right\}$$

次ニ $p=1$ ナラバ

$$P=1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}$$

n ガ素數ニアラズシテ $n=mk$ ナラバ

$$P=\frac{1-x^k}{1-x}\times\frac{1-(x^k)^m}{1-x^k}=(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{k-1})(1+x^k+x^{2k}+\ldots\ldots$$

$$+x^{(m-1)k})$$

n ガ素數ナルトキハ P ハ二ツノ有理整式ノ因數ニ分解スルコト能ハズ。

19. $(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+n)$ **ノ展開式ニ於ケル** x^{n-2}, **及** x^{n-3} **ノ係數ヲ求メヨ。**

〔解〕 x^{n-2} ノ係數ハ 1, 2, 3……, n 中ヨリ相異ナル任意ノ二數ヲ取リテ作ルアラユル乘積ノ和ニ等シク x^{n-3} ノ係數ハ同ジクアラユル三數ノ乘積ノ和ニ等シ, 今ソレ等ヲ A 及ビ B トスレバ

$$(1+2+3+\ldots\ldots+n)^2=1^2+2^2+\ldots\ldots+n^2+2A,$$

即チ
$$\left\{\frac{n(1+n)}{2}\right\}^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2A \qquad (第六章基本定理\ IV)$$

$$\therefore\ A=\frac{1}{2}\left\{\frac{n^2(1+n)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}=\frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24},$$

又
$$A(1+2+3+\ldots\ldots+n)=(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2)(1+2+3+\ldots\ldots+n)$$

$$-(1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+n^3)+3B,$$

$$\therefore\ A\frac{n(1+n)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times\frac{n(1+n)}{2}-\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+3B$$

(第六章基本定理 IV)

$$\therefore\ B=\frac{1}{3}\left\{\frac{(n-1)n^2(n+1)^2(3n+2)}{48}-\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}+\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right\}$$

$$=\frac{(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2}{48}$$

20. $(x+a)(x+a^2)\ldots\ldots(x+a^n)$ **ノ展開式ニ於ケル** x^{n-2} **及ビ** x^{n-3} **ノ係數ヲ求メヨ。**

〔解〕 $f(x)=(x+a)(x+a^2)\ldots\ldots(x+a^n)$

トオキ x ノ代リニ $\dfrac{x}{a}$ ヲ代入スレバ

$$f\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{(x+a^2)(x+a^3)\ldots\ldots(x+a^{n+1})}{a^n}$$

兩邊ニ $a^n(x+a)$ ヲ乘ズレバ

$$a^n(x+a)f\left(\frac{x}{a}\right)=(x+a^{n+1})f(x)$$

$f(x)$ ノ展開式ニオケル x^r ノ係數ヲ A_r トシ上ノ式ノ兩邊ノ x^r ノ係數ヲ等シトオケバ

$$a^n\left(\frac{A_{r-1}}{a^{r-1}}+a\frac{A_r}{a^r}\right)=A_{r-1}+a^{n+1}A_r$$

$$\therefore\ A_{r-1}=\frac{a^{n+1}-a^{n-r+1}}{a^{n-r+1}-1}A_r$$

$r=n-1,\ n$ トオケバ

$$A_{n-2}=\frac{a^{n+1}-a^2}{a^2-1}A_{n-1},\quad A_{n-1}=\frac{a^{n+1}-a}{a-1}A_n$$

然ルニ $A_n=1$　　$\therefore\ A_{n-1}=\dfrac{a^{n+1}-a}{a-1}$

$$\therefore\ A_{n-2}=\frac{(a^{n+1}-a)(a^{n+1}-a^2)}{(a-1)(a^2-1)},$$

又 $r=n-2$ トオケバ

$$A_{n-3}=\frac{a^{n+1}-a^3}{a^3-1}A_{n-2}=\frac{(a^{n+1}-a)(a^{n+1}-a^2)(a^{n+1}-a^3)}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)}$$

21. a **ト** b **トガ相等シカラザル正ノ數ニシテ,** m **ガ 1 ヨリ大ナル整數ナルトキ** $\dfrac{a^m+b^m}{2}>\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^m$ **ナルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 今 $a+b=2S,\ a-b=2d$ トスレバ $a=S+d,\ b=S-d$

$$\therefore\ a^m=(S+d)^m=S^m+mS^{m-1}d+\frac{m(m-1)}{2!}S^{m-2}d^2+\dots\dots+d^m,$$

$$b^m=(S-d)^m=S^m-mS^{m-1}d+\frac{m(m-1)}{2!}S^{m-2}d^2-+\dots\dots+(-1)^m d^m,$$

$$\therefore\ a^m+b^m=2\left\{S^m+\frac{m(m-1)}{2!}S^{m-2}d^2+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}S^{m-4}d^4\right.$$

$$\left.+\dots\dots\right\}$$

然ルニ假設ニヨリ S ハ正ニシテ d ハ 0 ナラザル故ニ上ノ右邊ノ各項ハ皆正ナリ

$$\therefore\ a^m+b^m>2S^m$$

$$\therefore\ \frac{a^m+b^m}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^m,$$

22. $(x+a)^n$ **ノ展開式ニ於ケル絶對値ノ最大ナル項ヲ求メヨ，但シ n ヲ正ノ整數トス。**

〔解〕 第 r 番目ノ項ヲ u_r トスレバ

$$|u_r|=\left|\frac{n(n-1)\dots\dots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{r-1}x^{n-r+1}\right|$$

$$|u_{r+1}|=\frac{n-r+1}{r}\left|\frac{a}{x}\right|\cdot|u_r|$$

故ニ $\quad \dfrac{n-r+1}{r}\left|\dfrac{a}{x}\right|>1$

ナラバ $|u_{r+1}|$ ハ $|u_r|$ ヨリ大ナリ，即チ

$$\frac{n+1}{r}-1>\left|\frac{x}{a}\right|$$

ナル間ハ r ガ増スト共ニ u_r ノ絶對値ハ増ス，即チ

$$\frac{n+1}{1+\left|\frac{x}{a}\right|}>r$$

ナル間ハ r ト共ニ u_r ノ絶對値ハ増ス，依ッテ $\dfrac{n+1}{1+\left|\frac{x}{a}\right|}$ ガ整數ナラバ

$$r=\frac{n+1}{1+\left|\frac{x}{a}\right|}$$

ノトキ $|u_r|,\ |u_{r+1}|$ ハ相等シクシテ共ニ最大項トナリ，$\dfrac{n+1}{1+\left|\frac{x}{a}\right|}$ ガ整數ナラザレバ之レニ最モ近キ整數，即チ

$$\frac{n+1}{1+\left|\frac{x}{a}\right|}-1<r<\frac{n+1}{1+\left|\frac{x}{a}\right|}$$

ヲ滿足セシムル正ノ整數 r ノトキ $|u_{r+1}|$ ハ最大トナル。

23. $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^9$ **ノ展開式ニ於ケル絶對値ノ最大ナル項ヲ求メヨ。**

〔解〕 前問ノ結果ニ於テ $x=\frac{1}{2},\ a=-\frac{1}{3},\ n=9$ トスレバ

$$\frac{n+1}{1+\left|\frac{x}{a}\right|}=\frac{10}{1+\frac{3}{2}}=4$$

故ニ第四，第五項ガ相等シクシテ絶對値最大ナリ，而シテ其値ハ

$${}_9C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{7}{144},$$

24. $(4-2x)^7$ **ノ展開式ニ於テ絶對値ノ最大ナル係數ヲ有スルハ第何項ナルカ。**

〔解〕 所要ノ項ハ $(4-2)^7$ ニ於ケル最大絶對値ノ項ナリ，依ッテ前々問ノ結果ニ於テ $x=4,\ a=-2,\ n=7$ トスレバ

$$\frac{n+1}{1+\left|\frac{x}{a}\right|}=\frac{8}{1+2}=\frac{8}{3}$$

$\frac{8}{3}$ ニ最モ近キ整數ハ 2 ナリ，依ッテ第 3 項ガ所要ノ項ナリ。

25. n **ガ正ノ整數ナルトキ** $(1+x)^n$ **ノ展開式ニ於ケル絶對値ノ最大ナル項ガ最大ナル係數ヲ有スルタメニハ x ノ絶對値ガ** $\dfrac{n}{n+2}$ **ト** $\dfrac{n+2}{n}$ **トノ間ニアルカ或ハ** $\dfrac{n-1}{n+3}$ **ト** $\dfrac{n+3}{n-1}$ **トノ間ニアラザルベカラザルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 n ガ偶數ナル場合ニハ ${}_nC_{\frac{n}{2}}$ ガ最大係數ナル故ニ（第四章問 39）題意ニ適スルタメニハ

$${}_nC_{\frac{n}{2}-1}\left|x^{\frac{n}{2}-1}\right|<{}_nC_{\frac{n}{2}}\left|x^{\frac{n}{2}}\right|>{}_nC_{\frac{n}{2}+1}\left|x^{\frac{n}{2}+1}\right|$$

ナラザルベカラズ，即チ

$$1<\frac{n-\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}}|x|,\qquad 1>\frac{n-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+1}|x|$$

即チ $$\frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+1}<|x|,\qquad \frac{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}}>|x|$$

$$\therefore\ \frac{n}{n+2}<|x|<\frac{n+2}{n}$$

ナラザルベカラズ，n ガ奇數ナラバ ${}_nC_{\frac{n-1}{2}}$ 及 ${}_nC_{\frac{n+1}{2}}$ ガ相等シキ最大係數ナル故ニ題意ニ適スルタメニハ

$${}_nC_{\frac{n-3}{2}}\left|x^{\frac{n-3}{2}}\right|<{}_nC_{\frac{n-1}{2}}\left|x^{\frac{n-1}{2}}\right|={}_nC_{\frac{n+1}{2}}\left|x^{\frac{n+1}{2}}\right|>{}_nC_{\frac{n+3}{2}}\left|x^{\frac{n+3}{2}}\right|$$

ナラザルベカラズ，即チ

$$1<\frac{n-\frac{n-1}{2}+1}{\frac{n-1}{2}}|x|,\qquad 1>\frac{n-\frac{n-3}{2}+1}{\frac{n-3}{2}}|x|$$

$$\therefore\ \frac{n-1}{n+3}<|x|<\frac{n+3}{n-1}$$

ナラザルベカラズ。

26. $|x|<1$ **ナルトキハ** n **ガ分數又ハ負數ナルモ**

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\dots\dots+\frac{n(n-1)\dots\dots(n-r+1)}{r!}x^r+\dots\dots$$

ナルコトヲ證セヨ。

〔解〕 n ガ分數又ハ負數ナルトキハ所題ノ式ノ右邊ハ無限ニ續ク故ニ x ノ或値ニ對スル其値ハ一般ニ無限大又ハ不定トナルベシ，然ルニ假設ノ如ク $|x|<1$ ナルトキハ n ノ如何ニ拘ラズ此無限ニ續ク右邊ノ式ノ値ハ常ニ有限確定ノ値トナルナリ（微分學演習第 11 章參照）。

依ツテ今 x ヲ絶對値ガ 1 ヨリ小ナル或一定數トシ，n ノ任意ノ分數又負數ノ値ナ n トシタルトキノ所題ノ式ノ右邊ノ値ヲ $f(n)$ ニテ表ハセバ

$$f(n)=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\dots\dots+\frac{n(n-1)\dots\dots(n-r+1)}{r!}x^r+\dots\dots$$

尙簡單ニ表ハサンガタメニ

$$n=n_1,\quad n(n-1)=n_2,\ \dots\dots n(n-1)\dots\dots(n-r+1)=n_r$$

トオケバ

$$f(n)=1+n_1x+\frac{n_2}{2!}x^2+\dots\dots+\frac{n_r}{r!}x^r+\dots\dots \qquad (1)$$

$$\therefore\ f(m)=1+m_1x+\frac{m_2}{2!}x^2+\dots\dots+\frac{m_r}{r!}x^r+\dots\dots \qquad (2)$$

$$f(n+m)=1+(n+m)_1x+\frac{(n+m)_2}{2!}x^2+\dots\dots+\frac{(n+m)_r}{r!}x^r+\dots\dots \qquad (3)$$

但シ m ハ任意ノ分數又ハ負數ナリ。

(1), (2) ノ右邊ハ多項式ト同様ニ相乘ズルコトヲ得（微分學演習第 11 章參照）ル故ニ (1), (2) ノ兩邊ヲ相乘ジテ右邊ノ x^r ノ係數ヲ求ムレバ

$$\frac{m_r}{r!}+\frac{m_{r-1}}{(r-1)!}\cdot\frac{n_1}{1!}+\frac{m_{r-2}}{(r-2)!}\cdot\frac{n_2}{2!}+\dots\dots+\frac{m_1}{1!}\cdot\frac{n_{r-1}}{(r-1)!}+\frac{n_r}{r!}$$

然ルニコレハ第四章問 41 ニヨリ (3) ノ x^r ノ係數 $\frac{(m+n)_r}{r!}$ ニ等シ，而シテ此ノ關係ハ r ノ如何ニ拘ラズ即チ (1), (2) ノ右邊ノ積ノ x ノ各次ノ係數ハ (3) ノ右邊ノ x ノ各次ノ係數ニ等シ，即チ (1) (2) ノ右邊ノ積ハ (3) ノ右邊ニ等シ，從ツテ (1) (2) ノ左邊ノ積ハ (3) ノ左邊ニ等シ，即チ

$$f(n)\times f(m)=f(n+m),$$

$$\therefore\ f(n)\cdot f(m)\cdot f(p)=f(n+m)\cdot f(p)=f(n+m+p),$$

一般ニ $$f(n)\cdot f(m)\cdot f(p)\cdot\dots\dots=f(n+m+p+\dots\dots), \qquad (4)$$

玆ニ於テ n ガ正ノ分數ニシテ $\frac{h}{k}$ (h, k 正整數) ニ等シキ場合ニ所題ノ關係ノ成立スルコトヲ證明セシニ (4) ニ於ケル $n, m, p......$ ハ任意ノ分數又ハ負數ニテ可ナル故ニ總テ皆 $\frac{h}{k}$ トスレバ

$$f\left(\frac{h}{k}\right)\cdot f\left(\frac{h}{k}\right)......k\ \text{因數マデ}=f\left(\frac{h}{k}+\frac{h}{k}+......k\ \text{項マデ}\right)$$

即チ $\left[f\left(\frac{h}{k}\right)\right]^k=f(h)$

然ルニ h ハ正ノ整數ナル故ニ基本定理 I ニヨリ

$$f(h)=1+h_1x+\frac{h_2}{2!}x^2+......+x^h=(1+x)^h,$$

$$\therefore\ \left[f\left(\frac{h}{k}\right)\right]^k=(1+x)^h \qquad \therefore\ f\left(\frac{h}{k}\right)=(1+x)^{\frac{h}{k}}$$

$$\therefore\ (1+x)^{\frac{h}{k}}=f\left(\frac{h}{k}\right)=1+\left(\frac{h}{k}\right)_1x+\frac{\left(\frac{h}{k}\right)_2}{2!}x^2+......+\frac{\left(\frac{h}{k}\right)_r}{r!}x^r+......$$

即チ n ガ正ノ分數ナルトキハ

$$(1+x)^n=1+n_1x+\frac{n_2}{2!}x^2+......+\frac{n_r}{r!}x^r+......$$

次ニ n ガ負ノ整數或ハ分數ニシテ $-S$ ($S>0$) ニ等シキ場合ヲ證明セシニ (4) ヨリ $f(-S)\times f(S)=f(-S+S)=f(0)=1,\quad \therefore\ f(-S)=\frac{1}{f(S)}$

然ルニ $S>0$ ナル故ニ上ノ證明ニヨリ

$$f(-S)=\frac{1}{f(S)}=\frac{1}{(1+x)^s}=(1+x)^{-s}$$

然ルニ (1) ニヨリ

$$f(-S)=1+(-S)_1x+\frac{(-S)_2}{2!}x^2+......+\frac{(-S)_r}{r!}x^r+......$$

$$\therefore\ (1+x)^{-s}=1+(-S)_1x+\frac{(-S)_2}{2!}x^2+......+\frac{(-S)_r}{r!}x^r+......$$

即チ n ガ負數ノトキニモ所題ノ關係ハ成立ス,

即チ n ガ正ノ整數ノ場合ノ二項定理ハ $|x|<1$ ナラバ n ノ分數負數ノ場合ニモ成立スルコトヲ知ル, 是即チ基本定理 II ナリ。

27. $|x|<1$ **ナルトキ次ノ式ヲ證セヨ。**

$$\frac{1}{(1-x)^3}=1+3x+\frac{3.4}{2!}x^2+\frac{3.4.5}{3!}x^3+......$$
$$+\frac{3.4......(n+2)}{n!}x^n+......$$

〔解〕 $|x|<1$ ナル故ニ基本定理 II ニヨリ

$$\frac{1}{(1-x)^3}=(1-x)^{-3}=1+(-3)(-x)+\frac{(-3)(-4)}{2!}(-x)^2$$
$$+\frac{(-3)(-4)(-5)}{3!}(-x)^3+......$$
$$+\frac{-3(-4)......(-n-2)}{n!}(-x)^n+......$$
$$=1+3x+\frac{3.4}{2!}x^2+\frac{3.4.5}{3!}x^3+......+\frac{3.4......(n+2)}{n!}x^n+......$$

28. $|x|<\frac{1}{2}$ **ナルトキ** $(1+2x)^{\frac{3}{2}}$ **ノ展開式ニ於ケル第** $r+1$ **番目ノ項ヲ求メヨ。**

〔解〕 基本定理 II ニヨリ第 $(r+1)$ 番目ノ項ハ次ノ如シ

$$\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)......\left(\frac{3}{2}-r+1\right)}{r!}(2x)^r$$
$$=\frac{3(1)(-1)(-3)(-5)......(-2r+5)}{r!\,2^r}(2x)^r$$
$$=(-1)^{r-2}3\frac{1.3.5......(2r-5)}{r!}x^r \qquad \text{但シ}\ r>2\ \text{トス。}$$

29. $\left(1+\frac{6}{7}\right)^{\frac{7}{2}}$ **ノ展開式ニ於テ最大値ヲ有スル項ハ何番目ナルカ。**

〔解〕 第 $(r+1)$ 番目ガ他ノ如何ナル項ヨリモ小ナラズトスレバ問 22 ト同樣ニ

$$\frac{\frac{7}{2}-r+1}{r}\cdot\frac{6}{7}\geqq 1,\quad \text{及ビ}\quad \frac{\frac{7}{2}-r}{r+1}\cdot\frac{6}{7}\leqq 1,$$

$$\therefore\ 13r\leqq 27, \qquad 13r\geqq 14$$

即チ $\frac{14}{13}\leqq r\leqq\frac{27}{13}, \qquad \therefore\ r=2,$

依ツテ第 3 番目ノ項ガ最大ナルヲ知ル。

30. $\dfrac{5(1-x)}{1-x-6x^2}$ **ノ展開式ニ於ケル x^n ノ係數ヲ求メヨ。**

〔解〕 $\dfrac{5(1-x)}{1-x-6x^2}=\dfrac{5(1-x)}{(1-3x)(1+2x)}=\dfrac{A}{1-3x}+\dfrac{B}{1+2x}$ トオケバ

$$5-5x=A(1+2x)+B(1-3x)$$

$x=\dfrac{1}{3}$ トスレバ $\dfrac{10}{3}=\dfrac{5}{3}A$ $\therefore\ A=2,$

$x=-\dfrac{1}{2}$ トスレバ $\dfrac{15}{2}=\dfrac{5}{2}B$ $\therefore\ B=3,$

$$\therefore\ \frac{5(1-x)}{1-x-6x^2}=\frac{2}{1-3x}+\frac{3}{1+2x}=2(1-3x)^{-1}+3(1+2x)^{-1}$$

$$=2(1+3x+3^2x^2+\ldots\ldots+3^nx^n+\ldots\ldots)$$

$$+3(1-2x+2^2x^2-+\ldots\ldots+(-1)^n2^nx^n+\ldots\ldots)$$

故ニ x^n ノ係數ハ

$$2\cdot3^n+(-1)^n3\cdot2^n,$$

31. $\sqrt{2}$ **ノ近似値ヲ求メヨ。**

〔解〕 $\sqrt{2}=\dfrac{7}{5}\sqrt{\dfrac{50}{49}}=\dfrac{7}{5}\left(\dfrac{49}{50}\right)^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{7}{5}\left(1-\dfrac{1}{50}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$=\frac{7}{5}\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{50}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(-\frac{1}{50}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}\left(-\frac{1}{50}\right)^3+\ldots\ldots\right\}$$

$$=\frac{7}{5}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{50}\right)+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{50}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{1}{50}\right)^3+\ldots\ldots\right\}$$

$$=\frac{7}{5}\left\{1+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1.3}{1.2}\left(\frac{1}{10}\right)^4+\frac{1.3.5}{1.2.3}\left(\frac{1}{10}\right)^6+\ldots\ldots\right\}$$

$$=\frac{7}{5}+\frac{7}{5}\left(\frac{1}{10}\right)^2+\frac{21}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^4+\frac{7}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^6+\ldots\ldots$$

$$=1.4+0.014+0.00021+0.0000035+\ldots\ldots$$

$$\fallingdotseq1.414214,$$

32. $\sqrt[3]{25}$ **ノ近似値ヲ求メヨ。**

〔解〕 $\sqrt[3]{25}=3\sqrt[3]{\dfrac{25}{27}}=3\left(\dfrac{27}{25}\right)^{-\frac{1}{3}}=3\left(1+\dfrac{2}{25}\right)^{-\frac{1}{3}}=3\left(1+\dfrac{8}{100}\right)^{-\frac{1}{3}}$

$$=3\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{8}{100}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}{2!}\left(\frac{8}{100}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{3!}\left(\frac{8}{100}\right)^3+\ldots\ldots\right\}$$

$$=3\left\{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{100}+\frac{1.4}{3.6}\left(\frac{8}{100}\right)^2-\frac{1.4.7}{3.6.9}\left(\frac{8}{100}\right)^3+\ldots\ldots\right\}$$

$$=3-\frac{8}{100}+\frac{2}{3}\left(\frac{8}{100}\right)^2-\frac{14}{27}\left(\frac{8}{100}\right)^3+\ldots\ldots$$

$$=3-0.08+0.004266-0.0002654$$

$$=2.92400$$

33. $\sqrt[5]{8}$ **ノ近似値ヲ求メヨ。**

〔解〕 $\sqrt[5]{8}=\dfrac{3}{2}\sqrt[5]{\dfrac{8\times2^5}{3^5}}=\dfrac{3}{2}\sqrt[5]{\dfrac{256}{243}}=\dfrac{3}{2}\left(1+\dfrac{13}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$

$$=\frac{3}{2}\left\{1+\frac{1}{5}\cdot\frac{13}{243}+\frac{\left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)}{2!}\left(\frac{13}{243}\right)^2+\ldots\ldots\right\}$$

$$=\frac{3}{2}\left\{1+\frac{1}{5}\cdot\frac{13}{243}-\frac{4}{5.10}\left(\frac{13}{243}\right)^2+\ldots\ldots\right\}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{13}{810}-\frac{6}{50}\left(\frac{13}{243}\right)^2+\ldots\ldots$$

$$=1.5+0.01604-0.00024+\ldots\ldots$$

$$=1.5158,$$

34. $(a-x)^n$ **ヲ** $\dfrac{x}{a-x}$ **ノ昇羃ニ展開セヨ。**

〔解〕 $a-x=a\left(1-\dfrac{x}{a}\right)=a\left(\dfrac{a}{a-x}\right)^{-1}=a\left(1+\dfrac{x}{a-x}\right)^{-1}$

$$\therefore\ (a-x)^n=a^n\left(1+\frac{x}{a-x}\right)^{-n}$$

$$=a^n\left\{1+(-n)\frac{x}{a-x}+\frac{(-n)(-n-1)}{2!}\left(\frac{x}{a-x}\right)^2+\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{3!}\left(\frac{x}{a-x}\right)^3+\ldots\ldots\right\}$$

$$=a^n\left\{1-\frac{nx}{a-x}+\frac{n(n+1)}{2!}\left(\frac{x}{a-x}\right)^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\left(\frac{x}{a-x}\right)^3+\ldots\ldots\right\},$$

35. $(1-x+x^2)^{-1}$ **及ビ** $(1-x-2x^2)^{-1}$ **ノ展開式ニ於ケル** x^n **ノ係數ヲ夫々** p_n, **及ビ** q_n **トスレバ**

$$3q_n-p_{3n}=2^{n+1}$$

ナルコトヲ證セヨ。

〔解〕 $(1-x+x^2)^{-1}=\dfrac{1}{1-x+x^2}=\dfrac{1+x}{1+x^3}=(1+x)(1+x^3)^{-1}$

$$=(1+x)(1-x^3+x^6-x^9+\ldots\ldots+(-1)^nx^{3n}+\ldots\ldots)$$

$$=1+x-x^3-x^4+x^6+x^7-\ldots\ldots+(-1)^nx^{3n}+\ldots\ldots$$

$$\therefore\ p_{3n}=(-1)^n$$

又　$(1-x-2x^2)^{-1}=(1+x)^{-1}(1-2x)^{-1}$

$$=(1-x+x^2-x^3+\ldots\ldots+(-1)^nx^n+\ldots\ldots)(1+2x+2^2x^2+\ldots\ldots+2^nx^n+\ldots\ldots)$$

$$\therefore\ q_n=2^n-2^{n-1}+2^{n-2}-\ldots\ldots+(-1)^n$$

$$=2^n\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\left(2^{n+1}+(-1)^n\right)$$

$$\therefore\ 3q_n-p_{3n}=2^{n+1}+(-1)^n-(-1)^n=2^{n+1},$$

36. x **及ビ** m **ガ共ニ正ニシテ且ツ** x **及ビ** mx **ガ共ニ1ヨリ小ナルトキハ**

$(1+x)^m-1<\dfrac{mx}{1-mx}$　**ナルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 所題ノ不等式ヲ書キ改ムレバ

$$(1+x)^m<\frac{1}{1-mx}\qquad\therefore\ 1-mx<(1+x)^{-m},$$

然ルニ　$(1+x)^{-m}=1-mx+\dfrac{m(m+1)}{2!}x^2-\dfrac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3+\ldots\ldots$

右邊ノ第三項ト第四項トヲ比較スルニ假定ニヨリ

$$x<1,\ mx<1\qquad\therefore\ mx+2x<3$$

$$\therefore\ \frac{(m+2)x}{3}<1\qquad\therefore\ \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3<\frac{m(m+1)}{2!}x^2,$$

同樣ニ第五項ハ第六項ヨリ大ナリ，第七項以下ニツイテモ同樣ナル故ニ

$(1+x)^{-m}=1-mx+$(或正數),

$$\therefore\ (1+x)^{-m}>1-mx\qquad\therefore\ (1+x)^m-1<\frac{mx}{1-mx},$$

37. x **ガ負ニシテ** -1 **ヨリモ大，** m **ガ正ニシテ** 1 **ヨリモ小ナルトキ**

$$\frac{mx}{1+x}<(1+x)^m-1$$

ナルコトヲ證セヨ。

〔解〕 $1+x>0$ ナル故ニ所題ノ不等式ヲ書キ改ムレバ

$$mx<(1+x)^{m+1}-(1+x)$$

然ルニ　$(1+x)^{m+1}=1+(m+1)x+\dfrac{(m+1)m}{2!}x^2+\dfrac{(m+1)m(m-1)}{3!}x^3+\ldots\ldots$

$$\therefore\ (1+x)^{m+1}-(1+x)=mx+\frac{(m+1)m}{2!}x^2+\frac{(m+1)m(m-1)}{3!}x^3+\ldots\ldots$$

$0<m<1$,　$x<0$,　ナル故ニ此右邊ノ第二項以下ハ皆正ナリ

$\therefore\ (1+x)^{m+1}-(1+x)=mx+$(或正數),

$$\therefore\ (1+x)^{m+1}-(1+x)>mx\qquad\therefore\ (1+x)^m-1>\frac{mx}{1+x},$$

38. 同ジ種類ノモノ p **個，他ノ同ジ種類ノモノ** q **個，又他ノ同ジ種類ノモノ** r **個，合セテ** $p+q+r$ **個ヨリ** s **個ヅヽノ組合セ幾種ヲ作リ得ルカ，但シ同種類ノモノハ皆同ジモノト見做ス。**

〔解〕 p, q, r ガ皆 s ニ等シキカ又ハ s ヨリ大ナラバ所要ノ數ハ ${}_3H_s$ ナルコト明カナリ。 p, q, r ノ何レカガ s ヨリ小ナルトキハ各組合セハ第一種ニ屬スルモノヲ 0, 1, 2……p 個 ($p>s$ ナラバ最後ハ s) ノ何レカ, 第二種ニ屬スルモノヲ 0, 1, 2……q 個 ($q>s$ ナラバ最後ハ s) ノ何レカ, 第三種ニ屬スルモノヲ 0, 1, 2……r 個 ($r>s$ ナラバ最後ハ s) ノ何レカヲ含ミ各一組ノ個數ハ s ナル故ニ所要ノ組合セノ數ハ

$$(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^p)(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^q)(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^r) \qquad (A)$$

ノ展開式ニ於ケル x^s ノ係數ニ等シキコト明カナリ,

然ルニ (A) ハ次ノ如クナル

$$\frac{1-x^{p+1}}{1-x}\times\frac{1-x^{q+1}}{1-x}\times\frac{1-x^{r+1}}{1-x}=(1-x^{p+1})(1-x^{q+1})(1-x^{r+1})(1-x)^{-3}$$

$$=(1-x^{p+1}-x^{q+1}-x^{r+1}+x^{p+q+2}+x^{q+r+2}+x^{r+p+2}-x^{p+q+r+3})$$

$$\times\left(1+3x+\frac{3.4}{2!}x^2+\frac{3.4.5}{3!}x^3+\ldots\ldots+\frac{3.4\ldots\ldots(s+2)}{s!}x^s+\ldots\ldots\right),$$

依ツテ x^s ノ係數ヲ求ムレバ

$$\frac{3.4\ldots\ldots(s+2)}{s!}-\frac{3.4\ldots\ldots(s-p+1)}{(s-p-1)!}-\frac{3.4\ldots\ldots(s-q+1)}{(s-q-1)!}-\frac{3.4\ldots\ldots(s-r+1)}{(s-r-1)!}$$

$$+\frac{3.4\ldots\ldots(s-p-q)}{(s-p-q-2)!}+\frac{3.4\ldots\ldots(s-q-r)}{(s-q-r-2)!}+\frac{3.4\ldots\ldots(s-r-p)}{(s-r-p-2)!}$$

是レ即チ所要ノ組合セノ數ナリ, 但シ各分數ノ分母ノ括弧内ガ 0 トナラバ其分數ノ値ヲ 1 トシ負トナラバ其分數ノ値ヲ 0 トスルモノトス。 尙コレヲ第四章基本定理 V ニヨリ書キ直セバ次ノ如シ

$${}_3H_s-{}_3H_{s-p-1}-{}_3H_{s-q-1}-{}_3H_{s-r-1}+{}_3H_{s-p-q-2}+{}_3H_{s-q-r-2}+{}_3H_{s-r-p-2}$$

〔注意〕 此結果ハ 3 種以上ノ場合ニモ成立スルコト明カナリ。

39. 米國人 5 人, 英國人 4 人, 日本人 3 人ヨリ 4 人ノ委員ヲ選出スル方法幾通リアルカ, 但シ同國人ハ皆同ジモノト見做ス。

〔解〕 前問ト同樣ニ所要ノ數ハ次ノ式ノ x^4 ノ係數ニ等シ

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3)$$

$$=\frac{1-x^6}{1-x}\times\frac{1-x^5}{1-x}\times\frac{1-x^4}{1-x}=(1-x^6)(1-x^5)(1-x^4)(1-x)^{-3}$$

$$=(1-x^4-x^5-x^6+\ldots\ldots\ldots\ldots)\left(1+3x+\frac{3.4}{1.2}x^2+\frac{3.4.5}{1.2.3}x^3\right.$$

$$\left.+\frac{3.4.5.6}{1.2.3.4}x^4+\ldots\ldots\right)$$

此積ノ x^4 ノ係數ハ $\dfrac{3.4.5.6}{1.2.3.4}-1=14,$

依ツテ所要ノ數ハ 14 通リナリ。

40. 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5 ナル 9 個ノ數字ニテ 6 桁ノ整數幾通リ作リ得ルカ。

〔解〕 所題ノ 9 數字ヨリ作ル 6 數字ノ組合セノ數ハ前問ニヨリ

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)^2(1+x)^2$$

ノ展開式ニ於ケル x^6 ノ係數ニ等シ, 而シテコレ等ノ各組合セヨリ作ル總テノ順列ノ數ハ即チ所要ノ 6 桁ノ整數ノ數ニ等シ, 然ルニ上ノ組合セノ各ヨリ作ル順列ノ數ハ何レモ皆次ノ形ニテ表ハサル $\dfrac{6!}{m!n!\ldots\ldots}$

但シ m, n 等ハソレ等組合セノ中ニ含マルヽ同數字ノ數ニシテソノ和ハ 6 ニ等シキモノナリ, 依ツテ總テノ順列ノ數即チ所要ノ 6 桁ノ整數ノ數ハ

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}\right)^2$$

ノ展開式ニ於ケル x^6 ノ係數ニ 6! ヲ乘ジタルモノニ等シ, 實際計算シテ x^6 ノ係數ハ $\dfrac{121}{24}$ ナルヲ知ル, 從ツテ所要ノ數ハ $\dfrac{121}{24}\times 6!=3630$ (第四章問 33)

〔注意〕 一般ニ相等シキ元素ガ p 個, q 個, r 個等アル場合ニ s 個ヅヽ取リタル順列ノ數ハ

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots\ldots+\frac{x^p}{p!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\ldots\ldots+\frac{x^q}{q!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\ldots\ldots+\frac{x^r}{r!}\right)\ldots\ldots$$

ノ展開式ニ於ケル x^s ノ係數ニ $s!$ ヲ乘ジタルモノニ等シ。

41. 密柑 4 個, 柿 3 個, 梨 2 個, 林檎 1 個ヲ甲乙二人ニ分配スル方法幾通リアルカ, 又コレ等 10 個ノ中ヨリ任意ノ 5 個ヲ選ビテ 1 個ヅツ 5 人ノ子供ニ與フル方法幾通リアルカ。

〔解〕 總數 10 個ヲ兩人ニ分配セントスル故ニ甲ノ所得ハ何物カ 1 個又ハ 2 個又ハ 3 個, ...又ハ 9 個ナラザルベカラズ, 而シテ甲ノ所得ガ定マレバ其殘リハ乙ノ所得ナリ, 依ツテ分配ノ仕方ハ甲ニ何物カ 1 個乃至 9 個與フル仕方ノ數ナリ然ルニコノ仕方ノ數ハ上ノ 10 個ヨリ作ル 1 個乃至 9 個ノ組合セノ數ニ等シク從ツテ前問ニヨリ

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3)((1+x+x^2)(1+x)$$

ノ展開式ニ於ケル x ノ各次ノ係數ノ和ヨリ x^0 ノ係數 1 ト x^{10} ノ係數 1 ト合セテ 2 ヲ減ジタルモノニ等シ, 然ルニ上ノ展開式ノ各次ノ係數ノ和ハ $x=1$ トオキタルトキノ上ノ式ノ值 5,4,3,2=120 ニ等シキガ故ニ甲乙二人ニ分配スル仕方ノ數ハ 120−2=118

次ニ 10 個ノ中ヨリ 5 個ヲ選ビテ 5 人ニ等分スル仕方ハ明カニ之レ等 10 個ヨリ作ル 5 個ノ順列ノ數ニ等シ 故ニ所要ノ數ハ前問ニヨリ

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}\right)$$

ノ展開式ニ於ケル x^5 ノ係數ニ 5! ヲ乘ジタルモノナリ, 實際計算スレバ x^5 ノ係數ハ $\frac{107}{24}$, 故ニ所要ノ數ハ $\frac{107}{24}\times 5!=535$

42. 有效數字ノミヨリナル 5 桁ノ整數ノ中ニ數字ノ和ガ 8 ニ等シキモノ幾何アルカ。

〔解〕 有效數字ノミヨリナル 5 桁ノ整數ノ主位ハ 1.2.3......9 ノ何レニテモヨク第二位, 第三, 第四モ皆同樣ナル故ニ數字ノ和ガ 8 ニ等シキ所要ノ數ハ $(x+x^2+......+x^9)^5$ ノ展開式ニ於ケル x^8 ノ係數ニ等シキコト明カナリ, 然ルニ

$$(x+x^2+......+x^9)^5=x^5\left(\frac{1-x^9}{1-x}\right)^5=x^5(1-x^9)^5(1-x)^{-5}$$

$$=x^5(1-5x^9+......)\left(1+5x+\frac{5.6}{2!}+\frac{5.6.7}{3!}x^3+......\right)$$

x^8 ノ係數ハ第二, 第三因數ノ積ノ x^3 ノ係數 $\frac{5.6.7}{3!}$ ナリ, 依ツテ所要ノ數ハ

$$\frac{5.6.7}{3!}=35$$

（注意） 別解第四章問 35 ニアリ。

43. 數字ノ和ガ 17 ニ等シキ 10000 以下ノ整數幾何アルカ。

〔解〕 10000 ヲ超過セザル整數ハ 1 桁乃至 4 桁ナル故ニ所要ノ數ハ前問ト同樣ニ有效數字ノ外ニ 0 ヲ加ヘテ

$$(x^0+x+x^2+......+x^9)^4=\left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^4=(1-x^{10})^4(1-x)^{-4}$$

$$=(1-4x^{10}+6x^{20}+......)\left(1+4x+\frac{4.5}{2!}x^2+......+\frac{4.5......20}{17!}x^{17}+......\right)$$

ノ展開式ニ於ケル x^{17} ノ係數ニ等シキコト明カナリ, 然ルニ此右邊ノ積ニ於ケル x^{17} ノ係數ハ

$$\frac{4.5......20}{17!}-4\times\frac{4.5......10}{7!}=\frac{1}{6}(18.19.20-4.8.9.10)=660,$$

44. a, b, c ナル三種ノ文字ヨリ作ル r 次ノ同次積ノ和ハ

$$\frac{\boldsymbol{a^{r+2}(b-c)+b^{r+2}(c-a)+c^{r+2}(a-b)}}{\boldsymbol{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}}$$

ニ等シキコトヲ証セヨ。

〔解〕 所要ノ同次積ノ和ハ

$$(1+ax+a^2x^2+......)(1+bx+b^2x^2+......)(1+cx+c^2x^2+......)$$

$$=\frac{1}{1-ax}\times\frac{1}{1-bx}\times\frac{1}{1-cx}$$

ノ x^r ノ係數ナルコト明カナリ, 然ルニ此式ハ次ノ如ク變形スルコトヲ得

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}=\frac{A}{1-ax}+\frac{B}{1-bx}+\frac{C}{1-cx}$$

トオキ分母ヲ去レバ

$$1=A(1-bx)(1-cx)+B(1-ax)(1-cx)+C(1-ax)(1-bx)$$

$x=\frac{1}{a}$ トオケバ $1=A\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{c}{a}\right)$ $\quad\therefore\ A=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$

同様ニ　$x=\frac{1}{b},\ \frac{1}{c}$　トオキテ

$$B=\frac{b^2}{(b-c)(b-a)},\qquad C=\frac{c^2}{(c-a)(c-b)},$$

$$\therefore\ \frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}(1-ax)^{-1}$$

$$+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}(1-bx)^{-1}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}(1-cx)^{-1}$$

依ツテ x^r ノ係數ハ次ノ如シ

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}a^r+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}b^r+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}c^r$$

$$=\frac{a^{r+2}(b-c)-b^{r+2}(a-c)+c^{r+2}(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{a^{r+2}(b-c)+b^{r+2}(c-a)+c^{r+2}(a-b)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)},$$

45. $a+b+c=0$ **ナルトキハ** $a,\ b,\ c$ **ヨリ作ル 5 次ノ同次積ノ和ハ** $abc(a^2+b^2+c^2)$ **ニ等シキコトヲ証セヨ。**

〔解〕 前問ニヨリ 5 次ノ同次積ノ和ハ次ノ如クナル

$$\frac{a^7(b-c)+b^7(c-a)+c^7(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

然ルニ　$a+b+c=0$

$$\therefore\ \frac{a^7(b-c)+b^7(c-a)+c^7(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=-\frac{a^6(b+c)(b-c)+b^6(c+a)(c-a)+c^6(a+b)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=-\frac{a^6(b^2-c^2)+b^6(c^2-a^2)+c^6(a^2-b^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=-\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)(a^2+b^2+c^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=-(a+b)(a+c)(b+c)(a^2+b^2+c^2)=abc(a^2+b^2+c^2),$$

46. 3 個ノ骰子ヲ投ゲルトキ三ツノ目ノ和ガ 12 トナル場合ハ幾通リアルカ。

〔解〕 1 ツノ骰子ニハ 1 ヨリ 6 マデノ 6 種ノ目アル故ニ 3 個ノ骰子ノ目ノ和ガ 12 トナル場合ノ數ハ

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3=x^3\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^3=x^3(1-x^6)^3(1-x)^{-3}$$

$$=x^3(1-3x^6+3x^{12}-x^{18})\left(1+3x+\frac{3.4}{2!}x^2+\frac{3.4.5}{3!}x^3+\ldots\ldots\right)$$

ニ於ケル x^{12} ノ係數ニ等シキコト明カナリ

依ツテ所要ノ數ハ

$$\frac{3.4.5\ldots\ldots11}{9!}-3\frac{3.4.5}{3!}=\frac{10.11}{2}-\frac{3.4.5}{2}=25$$

47. 或試驗ニ於テ問題數 4，其中 3 題ハ滿点 20 点，殘ル 1 題ハ滿点 40 点ナリトイフ，受驗者ガ 60 点ヲ得ル場合ハ幾通リアルカ，但シ各題ニハ 1 点未滿ノ端數ヲ付セザルモノトス。

〔解〕 四題ノ中三題ハ 0 点乃至 20 点殘ル一題ハ 0 点乃至 40 点ナル故ニ總点 60 点ヲ得ル場合ノ數ハ

$$(x^0+x^1+x^2+\ldots\ldots+x^{20})^3(x^0+x^1+x^2+\ldots\ldots+x^{40})$$

$$=\left(\frac{1-x^{21}}{1-x}\right)^3\frac{1-x^{41}}{1-x}=(1-x^{21})^3(1-x^{41})(1-x)^{-4}$$

$$=(1-3x^{21}+3x^{42}-x^{63})(1-x^{41})\left(1+4x+\frac{4.5}{2!}x^2+\ldots\ldots\right)$$

$$=(1-3x^{21}-x^{41}+3x^{42}+\ldots\ldots)\left(1+4x+\frac{4.5}{2!}x^2+\ldots\ldots+\frac{4.5\ldots\ldots63}{60!}x^{60}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots\right),$$

ニ於ケル x^{60} ノ係數ニ等シ，依ツテ所要ノ數ハ

$$\frac{4.5.6\ldots\ldots63}{60!}-3\frac{4.5.6\ldots\ldots42}{39!}-\frac{4.5.6\ldots\ldots22}{19!}+3\frac{4.5.6\ldots\ldots21}{18!}$$

$$=\frac{61.62.63}{6}-\frac{40.41.42}{2}-\frac{20.21.22}{6}+\frac{19.20.21}{2}=7721,$$

48. $(a-b-c)^7$ **ニ於ケル** $a^3b^2c^2$ **ノ係數ヲ求メヨ。**

〔解〕 基本定理 III ニヨリ $a^3b^2c^2$ ノ項ハ次ノ如シ

$$\frac{7!}{3!\,2!\,2!}(a^3(-b)^2(-c)^2=210\,a^3b^2c^2,$$

依ツテ所要ノ係數ハ 210 ナリ。

49. $(1+x+x^2)^8$ **ノ展開式ニ於ケル** x^5 **ノ係數ヲ求メヨ。**

〔解〕 基本定理 III ニヨリ x^5 ヲ含メル項ハ

$$\alpha+\beta+\gamma=8, \quad \beta+2\gamma=5 \tag{1}$$

ナル條件ニ適スル α, β, γ, ノ 0 或ハ正整數値ニ對スル

$$\frac{8!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}1^\alpha \cdot x^\beta \cdot x^{2\gamma} \tag{2}$$

ノ和ナリ，(1) ヨリ

$$\alpha=\gamma+3, \quad \beta=5-2\gamma,$$

β ハ 0 或ハ正ノ整數ナル故ニ

$$\gamma=0,1,2,$$

故ニ (1) ニ適スル α, β, γ ノ値ハ次ノ三組ナリ

$$\left.\begin{array}{l}\gamma=0\\ \beta=5\\ \alpha=3\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}1\\ 3\\ 4\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}2\\ 1\\ 5\end{array}\right\}$$

依ツテ (1) ニ適スル (2) ノ總テノ和ハ

$$\left(\frac{8!}{3!\,5!\,0!}+\frac{8!}{4!\,3!\,1!}+\frac{8!}{5!\,1!\,2!}\right)x^5=504\,x^5$$

即チ x^5 ノ係數ハ 504 ナリ。

50. $(1-2x+3x^2)^5$ **ノ展開式ニ於ケル** x^7 **ノ係數ヲ求メヨ。**

〔解〕 前問ト同樣ニ

$$\alpha+\beta+\gamma=5, \quad \beta+2\gamma=7 \tag{1}$$

ニ適スル α, β, γ ノ 0 或ハ正ノ整數値ニ對スル

$$\frac{5!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}1^\alpha \cdot (-2x)^\beta \cdot (3x^2)^\gamma=\frac{5!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}(-2)^\beta \cdot 3^\gamma x^{\beta+2\gamma}$$

ノ和ナリ，然ルニ (1) ヨリ

$$\alpha=\gamma-2, \quad \beta=7-2\gamma, \qquad \therefore\ \gamma=2,\ 3,$$

依ツテ (1) ニ適スル α, β, γ ノ値ハ次ノ二組ナリ

$$\gamma=2 \qquad \gamma=3$$

$$\beta=3 \qquad \beta=1$$

$$\alpha=0 \qquad \alpha=1$$

$\therefore$ x^7 ノ係數ハ

$$\frac{5!}{2!\,3!}(-2)^3 3^2+\frac{5!}{3!\,1!}(-2)3^3=-1800,$$

51. $(a+bx+cx^2+dx^3)^4$ **ノ展開式ニ於ケル** x^8 **ノ係數ヲ求メヨ。**

〔解〕 x^8 ヲ含ム項ハ前問ト同樣ニ

$$\Sigma\frac{4!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!}a^\alpha(bx)^\beta(cx^2)^\gamma(dx^3)^\delta$$

$$=\Sigma\frac{4!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!}a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta x^{\beta+2\gamma+3\delta} \tag{1}$$

但シ　$\alpha+\beta+\gamma+\delta=4, \quad \beta+2\gamma+3\delta=8$　　(2)

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ハ何レモ 0 或ハ正ノ整數ナルヲ要スル故ニ (2) ノ第二式ヨリ

$$\delta=0,\ 1,\ 2.$$

$\delta=0$ ナラバ $\beta+2\gamma=8$, $\quad\therefore\ \gamma=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$\delta=0$, $\gamma=0$ ナラバ $\beta=8$, 從ツテ $\alpha=-4$

$\delta=0$, $\gamma=1$ ナラバ $\beta=6$, 從ツテ $\alpha=-3$,

以下同樣ニシテ (2) ニ適スル $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ノ値トシテ次ノ 10 組ヲ得

δ	γ	β	α
0	0	8	−4
0	1	6	−3
0	2	4	−2
0	3	2	−1
0	4	0	0
1	0	5	−2
1	1	3	−1
1	2	1	0
2	0	2	0
2	1	0	1

此中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ガ皆負ナラザル 4 組ノ値ヲ (1) ニ代入スレバ

$$\left\{\frac{4!}{0!\,0!\,4!\,0!}a^0b^0c^4d^0+\frac{4!}{0!\,1!\,2!\,1!}a^0b^1c^2d^1+\frac{4!}{0!\,2!\,0!\,2!}a^0b^2c^0d^2\right.$$

$$\left.+\frac{4!}{1!\,0!\,1!\,2!}a^1b^0c^1d^2\right\}x^8$$

$$=(c^4+12\,bc^2d+6\,b^2d^2+12\,acd^2)x^8$$

依ツテ x^8 ノ係數ハ　$c^4+12\,bc^2d+6\,b^2d^2+12\,acd^2$,

52. $(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^m)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_{mn}x^{mn}$

トスルトキ

$$a_1+2\,a_2+3\,a_3+\ldots\ldots+mna_{mn}=\frac{1}{2}mn(m+1)^n$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔**解**〕 所題ノ式ノ兩邊ニ於テ x ヲ $x+1$ トオケバ

$$\{1+(x+1)+(x+1)^2+\ldots\ldots+(x+1)^m\}^n$$

$$=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\ldots\ldots+a_{mn}(x+1)^{mn} \qquad (A)$$

左邊ノ括弧內ノ各項ヲ展開スレバ

$$1=1$$

$$1+x=1+x$$

$$(1+x)^2=1+2\,x+x^2$$

$$(1+x)^3=1+3\,x+3\,x^2+x^3$$

……………………………………

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots\ldots+x^m$$

$$\therefore\ 1+(1+x)+(1+x)^2+\ldots\ldots+(1+x)^m=(m+1)+(1+2+3+\ldots\ldots+m)x+P$$

$$=(m+1)+\frac{m(m+1)}{2}x+P$$

但シ P ハ x ノ二次以上ノ項ヲ表ハス

依ツテ (A) ノ左邊ハ

$$\left\{(m+1)+\frac{m(m+1)}{2}x+P\right\}^n=(m+1)^n\left(1+\frac{m}{2}x+\frac{P}{m+1}\right)^n$$

x ノ一次ノ項ハ

$$(m+1)^n\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}1^\alpha\left(\frac{mx}{2}\right)^\beta\left(\frac{P}{m+1}\right)^\gamma$$

ニ於テ $\gamma=0,\ \beta=1$, 從ツテ $\alpha=n-1$ トオキタルモノナル故ニ其係數ハ

$$\frac{(m+1)^n nm}{2}$$

又 (A) ノ右邊ノ x ノ一次ノ係數ハ

$$a_1+2\,a_2+3\,a_3+\ldots\ldots+mna_{mn}$$

$$\therefore\ a_1+2\,a_2+\ldots\ldots+mn\,a_{mn}=\frac{1}{2}mn(m+1)^n$$

53. $(1+x)(1+x+x^2)\ldots\ldots(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n)$ **ノ展開式ニ於テ初メト終リトヨリ同ジ番目ノ項ノ係數ハ相等シク，又初メヨリ奇數番目ノ項ノ係數ノ和ト偶數番目ノ項ノ係數ノ和トハ何レモ** $\frac{1}{2}(n+1)!$ **ニ等シキコトヲ証セヨ。**

〔**解**〕 $(1+x)(1+x+x^2)\ldots\ldots(1+x+\ldots\ldots+x^n)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_mx^m \qquad (1)$

トオク, 但シ $m=1+2+3+\ldots\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$,

此兩邊ノ x ノ代リニ $\dfrac{1}{x}$ ヲオクトキハ

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{1}{x}+\ldots\ldots+\frac{1}{x^n}\right)$$

$$=a_0+\frac{a^1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots\ldots+\frac{a_m}{x^m}$$

分母ヲ去レバ

$$(1+x)(1+x+x^2)\ldots\ldots(1+x+\ldots\ldots+x^n)$$

$$=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots\ldots+a_{m-1}x+a_m \qquad (2)$$

(1), (2) ノ左邊ハ全ク相等シキ故ニ右邊モ亦全ク相等シカラザルベカラズ, 依ツテ

$$a_0=a_m,\qquad a_1=a_{m-1},\qquad a_2=a_{m-2},\ \ldots\ldots$$

即チ初メト終リトヨリ同ジ番目ノ係數ハ相等シ

次ニ (1) ノ右邊ノ初メヨリ奇數番目ノ係數ノ和ヲ P, 偶數番目ノ係數ノ和ヲ Q トシ (1) ニ於テ $x=1$, 及ビ $x=-1$ トオケバ

$$2.3.4\ \ldots\ldots(n+1)=P+Q,\qquad 0=P-Q$$

$\therefore\ P=Q,$ 而シテ $P+Q=(n+1)!$

$\therefore\ P=Q=\frac{1}{2}(n+1)!$

54. $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_{2n}x^{2n}$ **トスレバ**

$a_0a_1-a_1a_2+a_2a_3-+\ldots\ldots=0$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 所題ノ式ノ兩邊ノ x ノ符號ヲ換エレバ

$$(1-x+x^2)^n=a_0-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+\ldots\ldots+a_{2n}x^{2n},$$

$$\therefore\ (1+x+x^2)^n(1-x+x^2)^n=(a_0+a_1x+\ldots\ldots+a_{2n}x^{2n})(a_0-a_1x+\ldots\ldots$$
$$+a_{2n}x^{2n})$$

右邊ノ x^{2n-1} ノ係數ハ

$$-a_0a_{2n-1}+a_1a_{2n-2}-a_2a_{2n-3}+-\ldots\ldots+a_{2n-1}a_0$$

然ルニ左邊ハ $(1+x^2+x^4)^n$ ナル故ニ x^{2n-1} ノ係數ハ 0

$$\therefore\ a_0a_{2n-1}-a_1a_{2n-2}+a_2a_{2n-3}-+\ldots\ldots-a_{2n-1}a_0=0$$

然ルニ前問ト同樣ニ

$$a_0=a_{2n},\quad a_1=a_{2n-1},\quad a_2=a_{2n-2},\ \ldots\ldots$$

$$\therefore\ a_0a_1-a_1a_2+a_2a_3-+\ldots\ldots-a_{2n-1}a_{2n}=0,$$

55. $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_{2n}x^{2n}$ **トスルトキ**

$a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2+\ldots\ldots+a_{2n}^2=a_n,$

$a_0a_2-a_1a_3+a_2a_4-\ldots\ldots+a_{2n-2}a_{2n}=a_{n+1}$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 前問ト同樣ニ

$$(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_{2n}x^{2n},$$

$$(1-x+x^2)^n=a_{2n}-a_{2n-1}x+a_{2n-2}x^2-+\ldots\ldots+a_0x^{2n}$$

$$\therefore\ (1+x^2+x^4)^n=(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_{2n}x^{2n})(a_{2n}-a_{2n-1}x+a_{2n-2}x^2$$
$$-+\ldots\ldots+a_0x^{2n}) \qquad (2)$$

(2) 右邊ノ x^{2n} ノ係數ハ $a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2+\ldots\ldots+a_{2n}^2$

然ルニ (1) ノ兩邊ノ x ヲ x^2 トオケバ

$$(1+x^2+x^4)^n=a_0+a_1x^2+a_2x^4+\ldots\ldots+a_{2n}x^{4n} \qquad (3)$$

故ニ (2) ノ左邊ノ x^{2n} ノ係數ハ a_n ニ等シ

$$\therefore\ a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2+\ldots\ldots+a_{2n}^2=a_n$$

又 (2) ノ右邊ノ x^{2n-2} ノ係數ハ $a_0a_2-a_1a_3+a_2a_4-\ldots\ldots+a_{2n-2}a_{2n}$

左邊ノ x^{2n-2} ノ係數ハ (3) ヨリ a_{n-1} ニ等シ, 然ルニ

$$a_{n-1}=a_{2n-(n-1)}=a_{n+1}$$

$$\therefore\ a_0a_2-a_1a_3+a_2a_4-\ldots\ldots+a_{2n-2}a_{2n}=a_{n+1},$$

56. $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_{2n}x^{2n}$

トオクトキ r ガ 3 ノ倍數ナラザレバ

$a_r-{}_nC_1a_{r-1}+{}_nC_2a_{r-2}-\ldots\ldots+(-1)^r{}_nC_r\,a_0=0$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_{2n}x^{2n}$

$$(1-x)^n=1-{}_nC_1x+{}_nC_2x^2-\ldots\ldots+(-1)^r{}_nC_r\,x^r+\ldots\ldots+(-1)^nx^n$$

邊々相乘ズレバ

$$(1-x^3)^n=a_0+(a_1-{}_nC_1a_0)x+(a_2-{}_nC_1a_1+{}_nC_2a_0)x^2+\ldots\ldots$$
$$+(a_r-{}_nC_1a_{r-1}+{}_nC_2a_{r-2}-\ldots\ldots+(-1)^r{}_nC_r\,a_0)x^r+\ldots\ldots$$

然ルニ左邊ノ展開式ハ x^3 ノ羃ノミニシテ其他ノ項ヲ含マズ故ニ右邊ニ於テモ x^3 ノ羃以外ハ 0 ナラザルベカラズ, 即チ

$$a_1-{}_nC_1a_0=0,\quad a_2-{}_nC_1a_1+{}_nC_2a_0=0,\ldots\ldots$$

一般ニ r ガ 3 ノ倍數ナラザレバ

$$a_r-{}_nC_1a_{r-1}+{}_nC_2a_{r-2}-\ldots\ldots+(-1)^r{}_nC_r\,a_0=0,$$

57. n ガ素數ナルトキ $(a+b+c+\ldots\ldots+k)^n$ ノ展展式ニ於ケル $a^n, b^n, c^n,$ $\ldots\ldots k^n$ 以外ノ總テノ項ノ係數ハ n ノ倍數ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $b+c+\ldots\ldots+k=A$ トオケバ

$$(a+b+c+\ldots\ldots+k)^n=(a+A)^n=a^n+nAa^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}A^2a^{n-2}+\ldots\ldots+A^n$$

n ハ素數ナル故ニ此右邊ノ a^n, A^n 以外ノ各項ノ係數ハ n ノ倍數ナルコト明カナリ

次ニ　$c+d+\ldots\ldots+k=B$　トオケバ

$$A^n=(b+B)^n=b^n+nBb^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}B^2b^{n-2}+\ldots\ldots+B^n,$$

此右邊ノ b^n, B^n 以外ノ各項ノ係數モ同様ニ n ノ倍數ナリ，以下同様ニシテ n ガ素數ナルトキハ $(a+b+c+\ldots\ldots+k)^n$ ノ展開式ニ於ケル a^n, b^n, c^n, $\ldots\ldots k^n$ 以外ノ各項ノ係數ハ總テ n ノ倍數ナルヲ知ル。

58. n ガ素數ニシテ N ハ n ノ倍數ナラザル整數ナルトキハ $N^{n-1}-1$ ハ n ノ倍數ナルコトヲ證セヨ。(*fermat* ノ定理)

〔解〕 前問ニヨリ n ガ素數ナルトキ

$$(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_N)^n=a_1^n+a_2^n+\ldots\ldots+a_N^n+(n\text{ ノ倍數})$$

$a_1=a_2=\ldots\ldots=a_N=1$　トオケバ

$$N^n=N+(n\text{ ノ倍數}),$$

$$\therefore\ N(N^{n-1}-1)=n\text{ ノ倍數},$$

然ルニ N ハ n ノ倍數ナラザル故ニ

$$N^{n-1}-1=n\text{ ノ倍數},$$

59. p, q, r ガ素數ナルトキ $p(q^r-r^q)+q(r^p-p^r)+r(p^q-q^p)$ ハ pqr ノ倍數ナルコトヲ證セヨ。

〔解〕 所題ノ式ヲ P トスレバ

$$P=p(q^r-r^q)+qr(r^{p-1}-q^{p-1})+(rp^q-qp^r),$$

右邊ノ第一項及ビ第三項ハ p ノ倍數ニシテ又第二項ハ

$$qr\{(r^{p-1}-1)-(q^{p-1}-1)\}$$

ナル故ニ前問ニヨリ p ノ倍數ナリ，故ニ P ハ p ノ倍數ナリ

同様ニ　$P=q(r^p-p^r)+(pq^r-rq^p)+rp(p^{q-1}-r^{q-1})$

$$P=r(p^q-q^p)+(qr^p-pr^q)+pq(q^{r-1}-p^{r-1})$$

ヨリ P ハ又 q 及ビ r ノ倍數ナルヲ知ル，而シテ p, q, r ハ素數ナリ，故ニ P ハ pqr ノ倍數ナリ。

60. n ガ 5 以外ノ素數ナルトキ $(1+x+x^2+x^3+x^4)^{n-1}$ ノ展開式ニ於ケル奇數羃ノ係數ノ和ハ n ノ倍數ナルコトヲ證セヨ，但シ $n>1$ トス。

〔解〕 n ガ 1 ヨリ大ナル素數ナル故ニ $n-1$ ハ正ノ整數ナリ，依ツテ

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)^{n-1}=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots\ldots+C_{4n-4}x^{4n-4}$$

トオク，$x=1$ 及ビ -1 トオケバ

$$5^{n-1}=C_0+C_1+C_2+C_3+\ldots\ldots+C_{4n-4}$$

$$1^{n-1}=C_0-C_1+C_2-C_3+\ldots\ldots+C_{4n-4}$$

$$\therefore\ 5^{n-1}-1=2(C_1+C_3+C_5+\ldots\ldots+C_{4n-5})$$

n ハ 5 以外ノ素數ナル故ニ 5 ト n トハ公約數ヲ有セズ，故ニ *fermat* ノ定理(問 58) ニヨリ $5^{n-1}-1$ ハ n ノ倍數ナリ，從ツテ右邊モ亦 n ノ倍數ナリ，故ニ n ガ 2 ナラザルトキハ

$$C_1+C_3+C_5+\ldots\ldots+C_{4n-5}$$

ハ n ノ倍數ナリ，然ルニ $n=2$ ナルトキハ $C_1+C_3=2$ ニシテ矢張リ n ノ倍數トナル，故ニ n ガ 1 ヨリ大ニシテ 5 ニ等シカラザル素數ナルトキハ所題ノ式ノ奇數羃ノ係數ノ和ハ常ニ n ノ倍數トナル。

第六章

級數ノ和

基本定理 I. $a+(a+d)+(a+2d)+\ldots\ldots+\{a+(n-1)d\}$

$$=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{n(a+l)}{2}$$

但シ $l=a+(n-1)d,$

II. $a+ar+ar^2+\ldots\ldots+ar^{n-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

III. $(1+x)^n=1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2!}x^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots\ldots$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}x^r+\ldots\ldots$$

但シ $|x|<1,$

IV. $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2,$$

演習問題

1. $1+2x+3x^2+\ldots\ldots+nx^{n-1}$ ノ和ヲ求メヨ。

〔解〕 所要ノ和ヲ S トスレバ

$$S=1+2x+3x^2+\ldots\ldots+nx^{n-1}$$

$$\therefore\ Sx=x+2x^2+\ldots\ldots+(n-1)x^{n-1}+nx^n$$

邊々相減ズレバ

$$S(1-x)=1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{n-1}-nx^n$$

$$=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n=\frac{1-x^n-nx^n+nx^{n+1}}{1-x}$$

$$\therefore\ S=\frac{1-x^n-nx^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2},$$

（注意） 本問ノ方法ニヨリテ一般ニ等差級數ノ各項ヲ等比級數ノ對應スル各項ニ乘ジタルモノヽ和ヲ求ムルコトヲ得。

2. $1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\ldots\ldots+n\cdot2^{n-1}$ ヲ求メヨ。

〔解〕 前問ノ如ク所要ノ和ヲ S トスレバ

$$S=1+2.2+3.2^2+\ldots\ldots+n.2^{n-1}$$

$$\therefore\ 2S=2+2.2^2+\ldots\ldots+(n-1)2^{n-1}+n.2^n$$

$$\therefore\ -S=1+2+2^2+\ldots\ldots+2^{n-1}-n.2^n$$

$$=\frac{2^n-1}{2-1}-n2^n=2^n(1-n)-1$$

$$\therefore\ S=(n-1)2^n+1,$$

3. $1+3x+5x^2+7x^3+\ldots\ldots+(2n+1)x^n$ 求ヲ求メヨ。

〔解〕 前問ト同樣ニ

$$S=1+3x+5x^2+7x^3+\ldots\ldots+(2n+1)x^n$$

$$xS=x+3x^2+5x^3+\ldots\ldots+(2n-1)x^n+(2n+1)x^{n+1}$$

$$\therefore\ (1-x)S=1+2(x+x^2+x^3+\ldots\ldots+x^n)-(2n+1)x^{n+1}$$

$$=1+\frac{2x(1-x^n)}{1-x}-(2n+1)x^{n+1}$$

$$\therefore\ S=\frac{1+x-(2n+3)x^{n+1}+(2n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2},$$

4. $1-\dfrac{5}{2}+\dfrac{9}{2^2}-\dfrac{13}{2^3}+\ldots\ldots+(-1)^n\dfrac{1+4n}{2^n}$ ヲ求メヨ。

〔解〕 $S=1-\dfrac{5}{2}+\dfrac{9}{2^2}-\dfrac{13}{2^3}+\ldots\ldots+(-1)^n\dfrac{1+4n}{2^n}$

$$-\frac{1}{2}S=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2^2}-\frac{9}{2^3}+\ldots\ldots+(-1)^n\frac{1+4(n-1)}{2^n}+(-1)^{n+1}\frac{1+4n}{2^{n+1}}$$

邊々相減ズレバ

$$\frac{3}{2}S=1-4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\ldots\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}\right)-(-1)^{n+1}\frac{1+4n}{2^{n+1}},$$

$$=1-\frac{2\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1+\frac{1}{2}}+(-1)^n\frac{1+4n}{2^{n+1}}$$

$$\therefore\ S=\frac{(-1)^n(12n+11)-2^{n+1}}{9.2^n}$$

5. 次ノ級數 n 項ノ和ヲ求メヨ。

$$1+(1+2)x+(1+2+3)x^2+(1+2+3+4)x^3+\ldots\ldots$$

〔解〕 所要ノ和ヲ S トスレバ

$$\begin{aligned}S=1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots+x^{n-1}\\ +2x+2x^2+2x^3+\ldots\ldots+2x^{n-1}\\ +3x^2+3x^3+\ldots\ldots+3x^{n-1}\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+nx^{n-1}\end{aligned}$$

$$=\frac{1-x^n}{1-x}+\frac{2x(1-x^{n-1})}{1-x}+\frac{3x^2(1-x^{n-2})}{1-x}+\ldots\ldots+\frac{nx^{n-1}(1-x)}{1-x}$$

$$=\frac{1}{1-x}\{1+2x+3x^2+\ldots\ldots+nx^{n-1}-x^n(1+2+3+\ldots\ldots+n)\}$$

$$=\frac{1}{1-x}\left\{\frac{1-(1+n)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}-\frac{n(n+1)}{2}x^n\right\} \qquad (\text{問}.\ 1)$$

$$=\frac{2-(n+1)(n+2)x^n+2n(n+2)x^{n+1}-n(n+1)x^{n+2}}{2(1-x)^3}$$

6. m, n ガ正ノ整數ニシテ $m<n$ ナルトキ m ト n トノ間ニアリテ 3 ヲ分母トスル總テノ分母ノ中整數ニ等シカラザルモノヽ和ハ n^2-m^2 ニ等シキコトヲ証セヨ。

〔解〕 正ノ整數 m ト n トノ間ニ 3 ヲ分母トスル總テノ分數ヲ挿入スレバ

$$m,\quad m+\frac{1}{3},\quad m+\frac{2}{3},\quad m+1,\quad m+\frac{4}{3},\quad \ldots\ldots n, \qquad (1)$$

ナル級數ヲ得ベク此級數ノ中ニ含マルヽ整數ハ

$$m,\quad m+1,\quad m+2,\quad \ldots\ldots n \qquad (2)$$

ナリ，故ニ (1) ノ和 S_1 ヨリ (2) ノ和 S_2 ヲ引ケバ所要ノ和ヲ得ベシ．然ルニ (1) ハ初項 n 公差 $\frac{1}{3}$ 末項 n ナル等差級數ナル故ニ其項數ヲ p トスレバ

$$n=m+\frac{1}{3}(p-1) \qquad \therefore\ p=3n-3m+1$$

$$\therefore\ S_1=\frac{1}{2}(m+n)p=\frac{1}{2}(m+n)(3n-3m+1)$$

又　$S_2=\frac{1}{2}(m+n)(n-m+1)$

故ニ所要ノ和ハ

$$S_1-S_2=\frac{m+n}{2}(2n-2m)=n^2-m^2,$$

7. $2^{\frac{1}{4}}\cdot 4^{\frac{1}{8}}\cdot 8^{\frac{1}{16}}\cdot\ldots\ldots\cdot(2^n)^{\frac{1}{2^{n+1}}}$ ヲ求メヨ。

〔解〕 所要ノ積ヲ P トスレバ

$$P=2^{\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}}$$

次ニ　$S=\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\ldots\ldots+\frac{n}{2^{n+1}}$　トスレバ

$$S=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\left(\frac{1}{2}\right)^4+\ldots\ldots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\frac{1}{2}S=\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\left(\frac{1}{2}\right)^4+\ldots\ldots+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

邊々相減ズレバ

$$\frac{1}{2}S=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

$$\therefore\ S=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^{n+1}} \qquad \therefore\ P=2^{\frac{2^{n+1}-n-2}{2^{n+1}}},$$

8. $1^2+3^2+5^2+\ldots\ldots+(2n-1)^2$ ヲ求メヨ。

〔解〕 $S=1^2+3^2+5^2+\ldots\ldots+(2n-1)^2$

$$=1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots\ldots+(2n-1)^2+(2n)^2$$
$$-(2^2+4^2+\ldots\ldots+(2n)^2)$$

$$=1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+(2n)^2-4(1^2+2^2+\ldots\ldots+n^2)$$

$$=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{1}{3}n(4n^2-1),$$

9. $a^2+(a+b)^2+(a+2b)^2+\ldots\ldots+\{a+(n-1)b\}^2$ ヲ求メヨ。

〔解〕 $S=a^2+(a+b)^2+(a+2b)^2+\ldots\ldots+\{a+(n-1)b\}^2$

$$=na^2+2ab\{1+2+3+\ldots\ldots+(n-1)\}+b^2\{1+2^2+3^2+\ldots\ldots+(n-1)^2\}$$

$$=na^2+2ab\frac{(n-1)n}{2}+b^2\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$

$$=na^2+n(n-1)ab+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}b^2,$$

10. 第 r 番目ノ項ガ $(3r-2)(r+3)$ ニ等シキ級數 n 項ノ和ヲ求メヨ。

〔解〕 所要ノ和ヲ S トスレバ

$$S=\sum_{r=1}^{n}(3r-2)(r+3)=\sum_{r=1}^{n}(3r^2+7r-6)=3\sum_{r=1}^{n}r^2+7\sum_{r=1}^{n}r-6n$$

$$=3(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2)+7(1+2+3+\ldots\ldots+n)-6n$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}+\frac{7n(n+1)}{2}-6n=n(n^2+5n-2),$$

11. $1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+\ldots\ldots+n(n+1)^2$ ヲ求メヨ。

〔解〕 $S=1.2^2+2.3^2+3.4^2+\ldots\ldots+n(n+1)^2$

$$=1(1+1)^2+2(2+1)^2+3(3+1)^2+\ldots\ldots+n(n+1)^2$$

$$=1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+n^3+2(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2)+1+2+3+\ldots\ldots+n$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5),$$

12. 次ノ級數 n 項ノ和ヲ求メヨ。

$$1\cdot2\cdot5+2\cdot3\cdot6+3\cdot4\cdot7+\ldots\ldots$$

〔解〕 第 r 番目ノ項ハ

$$r(r+1)(r+4)=r^3+5r^2+4r$$

$$S=\sum_{r=1}^{n}(r^3+5r^2+4r)=\sum_{r=1}^{n}r^3+5\sum_{r=1}^{n}r^2+4\sum_{r=1}^{n}r$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{5n(n+1)(2n+1)}{6}+4\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)+10(2n+1)+24\}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+17),$$

13. 次ノ級數 n 項ノ和ヲ求メヨ。

$$2\cdot4+5\cdot9+8\cdot14+\ldots\ldots$$

〔解〕 第一因數 2, 5, 8,...... ハ初項 2, 公差 3 ナル等差級數ニシテ第二因數 4, 9, 14...... ハ初項 4, 公差 5 ナル故ニ所題ノ級數ノ第 $r+1$ 番目ノ項ハ

$$(2+3r)(4+5r)=8+22r+15r^2,$$

$$\therefore\ S=\sum_{r=0}^{n-1}(8+22r+15r^2)=8n+22\sum_{r=0}^{n-1}r+15\sum_{r=0}^{n-1}r^2$$

$$=8n+22.\frac{(n-1)n}{2}+15.\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$=\frac{1}{2}n(10n^2+7n-1),$$

14. 次ノ級數 n 項ノ和ヲ求メヨ。

$$1\cdot3\cdot7+2\cdot4\cdot8+3\cdot5\cdot9+\ldots\ldots$$

〔解〕 前問ト同樣ニ第 r 番ノ項ハ

$$r(r+2)(r+6)=r^3+8r^2+12r$$

ナル故ニ

$$S=\sum_{r=1}^{n}r^3+8\sum_{r=1}^{n}r^2+12\sum_{r=1}^{n}r=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+8.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+12.\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+35n+88),$$

15. $1^4+2^4+3^4+\ldots\ldots+n^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$ ヲ證セヨ。

〔解〕 $(n+1)^5-n^5=5n^4+10n^3+10n^2+5n+1$

n ヲ $n-1,\ n-2,\ \ldots\ldots2,\ 1$ トオケバ

$$n^5-(n-1)^5=5(n-1)^4+10(n-1)^3+10(n-1)^2+5(n-1)+1$$

$$(n-1)^5-(n-2)^5=5(n-2)^4+10(n-2)^3+10(n-2)^2+5(n-2)+1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$3^5-2^5=5.2^4+10.2^3+10.2^2+5.2+1$$

$$2^5-1^5=5.1^4+10.1^3+10.1^2+5.1+1$$

邊々相加フレバ

$$(n+1)^5-1^5=5\{n^4+(n-1)^4+\cdots\cdots+2^4+1^4\}+10\{n^3+(n-1)^3+\cdots\cdots+2^3+1^3\}$$
$$+10\{n^2+(n-1)^2+\cdots\cdots+2^2+1^2\}+5\{n+(n-1)+\cdots\cdots+2+1\}+n$$

故ニ所要ノ和ヲ S トスレバ

$$(n+1)^5-1=5S+10\frac{n^2(n+1)^2}{4}+10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+5\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$\therefore\ 5S=(n+1)\left\{(n+1)^4-\frac{5n^2(n+1)}{2}-\frac{5n(2n+1)}{3}-\frac{5n}{2}-1\right\}$$

$$=(n+1)\frac{12n^4+18n^2+2n^2-2n}{12}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{6}$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

16. $\boldsymbol{1^4-2^4+3^4-\cdots\cdots+(-1)^n(n-1)^4=(-1)^n\left(\frac{n^4}{2}-n^3+\frac{n}{2}\right)}$

ヲ証セヨ。

〔解〕 所題ノ式ノ左邊ノ和ヲ S トスレバ

n ガ奇數ナラバ

$$S=1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+(n-1)^4-2\{2^4+4^4+6^4+\cdots\cdots+(n-1)^4\}$$

$$=1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+(n-1)^4-2.2^4\left\{1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+\left(\frac{n-1}{2}\right)^4\right\}.$$

$$=\frac{1}{30}(n-1)n(2n-1)(3n^2-3n-1)-\frac{2.2^4}{30}\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot n\frac{3n^2-7}{4}$$

$$=-\frac{1}{2}n(n-1)(n^2-n-1)=-\left(\frac{n^4}{2}-n^3+\frac{n}{2}\right),$$

n ガ偶數ナラバ

$$S=1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+(n-1)^4-2\{2^4+4^4+6^4+\cdots\cdots+(n-2)^4\}$$

$$=\frac{1}{30}(n-1)n(2n-1)(3n^2-3n-1)$$

$$-\frac{2.2^4}{30}\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdot(n-1)\frac{3n^2-6n-4}{4}$$

$$=\frac{1}{2}n(n-1)(n^2-n-1)=\frac{n^4}{2}-n^3+\frac{n}{2}$$

17. $\boldsymbol{1^5-3^5+5^5-7^5+\cdots\cdots-(4n-1)^5=-2n(16n^2-5)^2}$ **ヲ証セヨ。**

〔解〕 先ヅ $S=1^5+5^5+9^5+\cdots\cdots+(4n-3)^5$ ヲ求メンニ其第 r 番目ノ項ヲ u_r トスレバ $u_r=(4r-3)^5=4^5r^5-5.3.4^4.r^4+10.3^2.4^3.r^3-10.3^3.4^2.r^2+5.3^4.4r-3^5$

$$\therefore\ S=4^5\sum_1^n r^5-5.3.4^4\sum_1^n r^4+10.3^2.4^3\sum_1^n r^3-10.3^3.4^2\sum_1^n r^2+5.3^4.4\sum_1^n r-3^5n,$$

次ニ $S'=3^5+7^5+\cdots\cdots+(4n-1)^5$ ヲ求メンニ其第 r 番目ノ項ヲ v_r トスレバ

$$v_r=(4r-1)^5=4^5r^5-5.4^4r^4+10.4^3r^3-10.4^2r^2+5.4r-1$$

$$\therefore\ S'=4^5\sum_1^n r^5-5.4^4\sum_1^n r^4+10.4^3\sum_1^n r^3-10.4^2\sum_1^n r^2+5.4\sum_1^n r-n,$$

$$\therefore\ 1^5-3^5+5^5-7^5+9^5+\cdots\cdots-(4n-1)^5=S-S'$$

$$=-10.4^4\sum_1^n r^4+80.4^3\sum_1^n r^3-260.4^2\sum_1^n r^2+400.4\sum_1^n r-242n$$

然ルニ $\displaystyle\sum_1^n r=\frac{n(n+1)}{2},\quad \sum_1^n r^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad \sum_1^n r^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$$\sum_1^n r^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30},$$

之等ノ値ヲ代入シテ計算スレバ所題ノ級數ノ値ハ $-2n(16n^2-5)^2$ トナル。

18. $\boldsymbol{1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)}$ **ヲ求メヨ。**

〔解〕 $S=1.2.3+2.3.4+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)$

トシ又別ニ次ノ和ヲ考フ

$$S'=1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$S'=\qquad 1.2.3.4+2.3.4.5+\cdots\cdots+(n-1)n(n+1)(n+2)+n(n+1)(n+2)(n+3)$$

邊々相減ズレバ

$$0=1.2.3.4+2.3.4(5-1)+3.4.5(6-2)+\ldots\ldots+n(n+1)(n+2)(n+3-\overline{n-1})$$
$$-n(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$=4\{1.2.3+2.3.4+3.4.5+\ldots\ldots+n(n+1)(n+2)\}-n(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$=4S-n(n+1)(n+2)(n+3),$$
$$\therefore\ S=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},$$

19. **第 r 番目ノ項ガ**

$$(a+\overline{r-1}b)(a+rb)(a+\overline{r+1}b)\ldots\ldots(a+\overline{r+s-2}b)$$

ナル級數 n 項ノ和ヲ求メヨ。

〔解〕 本問ハ前問ノ一般ノ場合ニシテ即チ本問ニ於ケル a, b ヲ 1 トシ s ヲ 3 トスレバ前問トナル

今 $u_r=(a+\overline{r-1}b)(a+rb)\ldots\ldots(a+\overline{r+s-2}b)$

トシ, 別ニ又一因數ヲ增シタル次ノ積ヲ考フ

$$v_r=(a+\overline{r-1}b)(a+rb)\ldots\ldots(a+\overline{r+s-2}b)(a+\overline{r+s-1}b),$$

r ヲ $r-1$ トスレバ

$$v_{r-1}=(a+\overline{r-2}b)(a+\overline{r-1}b)\ldots\ldots(a+\overline{r+s-3}b)(a+\overline{r+s-2}b),$$

v_r ト v_{r-1} トニ共通ノ因數ハ

$$(a+\overline{r-1}b)(a+rb)\ldots\ldots(a+\overline{r+s-2}b)$$

ニシテ即チ u_r ナリ

$$\therefore\ v_r-v_{r-1}=u_r\{(a+\overline{r+s-1}b)-(a+\overline{r-2}b)\}=u_r(s+1)b$$

r ヲ n, $n-1$, $n-2$, ……2, 1 トオケバ

$$v_n-v_{n-1}=u_n(s+1)b$$
$$v_{n-1}-v_{n-2}=u_{n-1}(s+1)b$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_3-v_2=u_3(s+1)b$$
$$v_2-v_1=u_2(s+1)b$$
$$\therefore\ v_n-v_1=(s+1)b\{u_n+u_{n-1}+\ldots\ldots+u_3+u_2\}$$

依ツテ所要ノ和ヲ S トスレバ

$$v_n-v_1=(s+1)bS-(s+1)bu_1$$
$$\therefore\ S=\frac{v_n-v_1}{(s+1)b}+u_1=\frac{1}{(s+1)b}\{(a+\overline{n-1}b)(a+nb)\ldots\ldots(a+\overline{n+s-1}b)$$
$$-(a-b)a(a+b)\ldots\ldots(a+\overline{s-1}b)\},$$

20. $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}$ **ヲ求メヨ。**

〔解〕 $S=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1},$$

21. **次ノ級數 n 項ノ和ヲ求メヨ。**

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots\ldots$$

〔解〕 $S=\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$S'=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

トスレバ

$$S'=\qquad\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

邊々相減ズレバ

$$0=\frac{1}{1.2}-\left\{\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}\right)+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right\}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{1}{1.2}-\left\{\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{2.3.4}+\ldots\ldots+\frac{2}{n(n+1)(n+2)}\right\}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{1}{1.2}-2S-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$\therefore\ S=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)};$$

22. **第 r 番目ノ項ガ** $\dfrac{1}{(a+\overline{r-1}b)(a+rb).\,....(a+\overline{r+s-2}b)}$

ナル級數 n 項ノ和ヲ求メヨ。

〔解〕 前二問ハ本問ノ特別ノ場合ニシテ即チ　$a=b=1$

$s=2$ ナル場合ガ前々問ニシテ又　$a=b=1$

$s=3$ ナル場合ガ前問ナリ，

今此一般ノ場合ノ和ヲ求ムルタメニ

$$u_r=(a+\overline{r-1}b)(a+rb)\ldots\ldots(a+\overline{r+s-2}b)$$

$$v_r=(a+\overline{r-1}b)(a+rb)\ldots\ldots(a+\overline{r+s-3}b)$$

トスレバ

$$v_{r+1}=(a+rb)(a+\overline{r+1}b)\ldots\ldots(a+\overline{r+s-2}b)$$

v_r，v_{r+1} ノ最小公倍數ハ

$$(a+\overline{r-1}b)(a+rb)\ldots\ldots(a+\overline{r+s-2}b)=u_r$$

$$\therefore\quad \frac{1}{v_r}-\frac{1}{v_{r+1}}=\frac{(s-1)b}{u_r}$$

r ヲ $n,\ n-1,\ n-2,\ \ldots\ldots 2,\ 1$ トスレバ

$$\frac{1}{v_n}-\frac{1}{v_{n+1}}=\frac{(s-1)b}{u_n}$$

$$\frac{1}{v_{n-1}}-\frac{1}{v_n}=\frac{(s-1)b}{u_n}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_3}=\frac{(s-1)b}{u_2}$$

$$\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}=\frac{(s-1)b}{u_1}$$

邊々相加フレバ

$$\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_{n+1}}=(s-1)b\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n-1}}+\ldots\ldots+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_1}\right)$$

依ツテ所要ノ和ヲ S トスレバ

$$\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_{n+1}}=(s-1)bS$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{(s-1)b}\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{(s-1)b}\left\{\frac{1}{a(a+b)(a+2b)\ldots\ldots(a+\overline{s-2}b)}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(a+nb)(a+\overline{n+1}b)\ldots\ldots(a+\overline{s+n-2}b)}\right\}$$

23. **次ノ級數 n 項ノ和ヲ求メヨ。**

$$\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\ldots\ldots$$

〔解〕 第 r 番目ノ項ヲ u_r トスレバ

$$u_r=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2r)}$$

今 u_r ニ對シテ次ノ如キ v_r ナルモノヲ考フ

$$v_r=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)(2r+1)}{2.4.6\ldots\ldots(2r)}$$

然ルトキハ

$$v_{r-1}=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2r-2)}$$

$$\therefore\quad v_r-v_{r-1}=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2r-2)}\left(\frac{2r+1}{2r}-1\right)=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2r)}=u_r$$

r ヲ $n,\ n-1,\ n-2,\ \ldots\ldots 3,\ 2$ トオケバ

$$v_n-v_{n-1}=u_n$$

$$v_{n-1}-u_{n-2}=u_{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_3-v_2=u_3$$

$$v_2-v_1=u_2$$

$$\therefore\quad v_n-v_1+u_1=u_n+u_{n-1}+\ldots\ldots+u_2+u_1=S$$

$$\therefore\quad S=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)}-\frac{1.3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)}-1$$

24. **次ノ級數 n 項ノ和ヲ求メヨ。**

$$\frac{(1+x)(1+2x)}{2(2+x)(2+2x)}+\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)}{2(2+x)(2+2x)(2+3x)}+\ldots\ldots$$

〔解〕 前問ト同樣ニ第 r 番目ノ項ヲ u_r トスレバ

$$u_r=\frac{(1+x)(1+2x)\ldots\ldots(1+\overline{r+1}x)}{2(2+x)(2+2x)\ldots\ldots(2+\overline{r+1}x)}$$

之ニ對シテ

$$v_r=\frac{(1+x)(1+2x)\ldots\ldots(1+\overline{r+1}x)(1+\overline{r+2}x)}{2(2+x)(2+2x)\ldots\ldots(2+\overline{r+1}x)}$$

ヲ考フレバ

$$v_r-v_{r-1}=\frac{(1+x)(1+2x)\ldots\ldots(1+\overline{r+1}x)}{2(2+x)(2+2x)\ldots\ldots(2+\overline{r+1}x)}\{1+(r+2)x-(2+\overline{r+1}x)\}$$

$$=u_r(x-1)$$

r ヲ $n, n-1, n-2, \ldots\ldots 3, 2$ トオキテ邊々相加フレバ

$$v_n-v_1+u_1(x-1)=(u_n+u_{n-1}+\ldots\ldots+u_2+u_1)(x-1)=(x-1)S$$

$$\therefore\ S=\frac{v_n-v_1}{x-1}+u_1=\frac{(1+x)(1+2x)\ldots\ldots(1+\overline{n+2}x)}{(x-1)2(2+x)(2+2x)\ldots\ldots(2+\overline{n+1}x)}$$

$$-\frac{(1+x)(1+2x)}{(x-1)2(2+x)},$$

25. $\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{3^2-1}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{n^2-1}$ **ヲ求メヨ。**

〔解〕 所要ノ和ヲ S トスレバ

$$S=\frac{1}{(2-1)(2+1)}+\frac{1}{(3-1)(3+1)}+\ldots\ldots+\frac{1}{(n-1)(n+1)}$$

$$=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\ldots\ldots+\frac{1}{(n-1)(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n-1}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots\ldots-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3n^2-n-2}{4n(n+1)}.$$

26. **無限級數** $\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{3^k}+\dfrac{1}{4^k}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{n^k}+\ldots\ldots$ **ノ和ヲ** S_k **ニテ表ハストキ無限級數** $S_2+S_4+S_6+\ldots\ldots+S_{2m}+\ldots\ldots$ **ノ和ヲ求メヨ。**

〔解〕 $S_2=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{n^2}+\ldots\ldots$

$$S_4=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^4}+\ldots\ldots$$

$$S_6=\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^6}+\ldots\ldots$$

....　........

$$S_{2m}=\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{4^{2m}}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^{2m}}+\ldots\ldots$$

依ツテ　$S_2+S_4+S_6+\ldots\ldots+S_{2m}+\ldots\ldots=S$　トスレバ

$$S=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{2m}}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\ldots\ldots+\frac{1}{3^{2m}}+\ldots\ldots$$

$$+\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^{2m}}+\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{2^2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}+\frac{1}{3^2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}+\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^2-1}+\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\ldots\ldots+\frac{1}{(n-1)(n+1)}+\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots\ldots\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-+\ldots\ldots\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}.$$

27. **次ノ級數 n 項ノ和ヲ求メヨ。**

$$\frac{4}{2\cdot3\cdot4}+\frac{7}{3\cdot4\cdot5}+\frac{10}{4\cdot5\cdot6}+\cdots\cdot$$

〔解〕 第 r 番目ノ項ハ

$$\frac{3r+1}{(r+1)(r+2)(r+3)}=\frac{-1}{r+1}+\frac{5}{r+2}+\frac{-4}{r+3}$$

$$=-\frac{1}{r+1}+\frac{1}{r+2}+\frac{4}{r+2}-\frac{4}{r+3}$$

依ツテ所要ノ和ヲ S トスレバ

$$S=\sum_{r=1}^{n}\left(-\frac{1}{r+1}+\frac{1}{r+2}+\frac{4}{r+2}-\frac{4}{r+3}\right)$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\left(-\frac{1}{r+1}+\frac{1}{r+2}\right)+\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{4}{r+2}-\frac{4}{r+3}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$+\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{4}\right)+\left(\frac{4}{4}-\frac{4}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{4}{n+2}-\frac{4}{n+3}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}+\frac{4}{3}-\frac{4}{n+3}=\frac{n(5n+7)}{6(n+2)(n+3)}$$

28. $\dfrac{n}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{n-1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ **ヲ求メヨ。**

〔解〕 前問ト同樣ニ第 r 番目ノ項ハ

$$\frac{n-r+1}{r(r+1)(r+2)}=\frac{n+1}{2r}-\frac{n+2}{r+1}+\frac{n+3}{2(r+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{r}-\frac{n+1}{r+1}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{n+3}{r+1}+\frac{n+3}{r+2}\right)$$

$$\therefore\ S=\sum_{r=1}^{n}\frac{n-r+1}{r(r+1)(r+2)}=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{n+1}{r}-\frac{n+1}{r+1}\right)+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\left(-\frac{n+3}{r+1}+\frac{n+3}{r+2}\right)$$

$$=\frac{n+1}{2}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}\right)-\frac{n+3}{2}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r+2}\right)$$

$$=\frac{n+1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{n+3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{n(n+1)}{4(n+2)}.$$

29. **次ノ級數 n 項ノ和ヲ求メヨ。**

$$\frac{7}{1\cdot3}+\frac{11}{3\cdot5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{15}{5\cdot7}\cdot\frac{1}{5^2}+\frac{19}{7\cdot9}\cdot\frac{1}{5^3}+\cdots\cdots$$

〔解〕 第 r 番目ノ項ハ

$$\frac{3+4r}{(2r-1)(2r+1)}\cdot\frac{1}{5^{-1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2r-1}-\frac{1}{2r+1}\right)\frac{1}{5^{r-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2r-1}\cdot\frac{1}{5^{r-2}}-\frac{1}{2r+1}\cdot\frac{1}{5^{r-1}}\right)$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{2r-1}\cdot\frac{1}{5^{r-2}}-\frac{1}{2r+1}\cdot\frac{1}{5^{r-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{5^{-1}}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^2}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{5^{n-2}}-\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{5^{n-1}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{5^{-1}}-\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{5^{n-1}}\right\}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2(2n+1)5^{n-1}}$$

30. **次ノ級數 $n+1$ 項ノ和ヲ求メヨ。**

$$\frac{3}{1\cdot3}+\frac{7}{2\cdot4}3+\frac{11}{3\cdot5}3^2+\frac{15}{4\cdot6}3^3+\cdots\cdots$$

〔解〕 $\dfrac{3+4k}{(k+1)(k+3)}=\dfrac{A}{k+1}+\dfrac{B}{k+3}$

トオケバ $3+4k=A(k+3)+B(k+1)$,

$\therefore$ $k=-1$ トスレバ $-1=2A$ $\qquad\therefore$ $A=-\dfrac{1}{2}$

$k=-3$ トスレバ $-9=-2B$ $\qquad\therefore$ $B=\dfrac{9}{2}$,

$$\therefore\ \frac{3+4k}{(k+1)(k+3)}3^k=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{k+3}-\frac{1}{k+1}\right)3^k=\frac{1}{2}\left(\frac{3^{k+2}}{k+3}-\frac{3^k}{k+1}\right)$$

k ヲ 0, 1, 2, 3,……n トオケバ

$$\frac{3}{1.3}=\frac{1}{2}\left(\frac{3^2}{3}-\frac{1}{1}\right)$$

$$\frac{7}{2.4}3=\frac{1}{2}\left(\frac{3^3}{4}-\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{11}{3.5}3^2=\frac{1}{2}\left(\frac{3^4}{5}-\frac{3^2}{3}\right)$$

$$\frac{15}{3.5}3^3=\frac{1}{2}\left(\frac{3^5}{6}-\frac{3^3}{4}\right)$$

....

$$\frac{3+4(n-1)}{n(n+2)}3^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{3^{n+1}}{n+2}-\frac{3^{n-1}}{n}\right)$$

$$\frac{3+4n}{(n+1)(n+3)}3^n=\frac{1}{2}\left(\frac{3^{n+2}}{n+3}-\frac{3^n}{n+1}\right)$$

故ニ所要ノ和ヲ S トスレバ

$$S=\frac{1}{2}\left\{\frac{3^{n+1}}{n+2}+\frac{3^{n+2}}{n+3}-\frac{1}{1}-\frac{3}{2}\right\}=\frac{(4n+9)3^{n+1}}{2(n+2)(n+3)}-\frac{5}{4},$$

31. 次ノ級數 n 項ノ和ヲ求メヨ。

$$\frac{a}{(1+a)(1+a^2)}+\frac{a^2}{(1-a^2)(1-a^3)}+\frac{a^3}{(1-a^3)(1-a^4)}+\dots\dots$$

〔解〕 $$\frac{a^k}{(1-a^k)(1-a^{k+1})}=\frac{1-a^{k+1}-(1-a^k)+a^{k+1}}{(1-a^k)(1-a^{k+1})}$$

$$=\frac{1}{1-a^k}-\frac{1}{1-a^{k+1}}+\frac{a^{k+1}}{(1-a^k)(1-a^{k+1})}$$

k ヲ 1, 2, 3, ...n トオケバ

$$\frac{a}{(1-a)(1-a^2)}=\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-a^2}+\frac{a^2}{(1-a)(1-a^2)}$$

$$\frac{a^2}{(1-a^2)(1-a^3)}=\frac{1}{1-a^2}-\frac{1}{1-a^3}+\frac{a^3}{(1-a^2)(1-a^3)}$$

$$\frac{a^3}{(1-a^3)(1-a^4)}=\frac{1}{1-a^3}-\frac{1}{1-a^4}+\frac{a^4}{(1-a^3)(1-a^4)}.$$

....

$$\frac{a^n}{(1-a^n)(1-a^{n+1})}=\frac{1}{1-a^n}-\frac{1}{1-a^{n+1}}+\frac{a^{n+1}}{(1-a^n)(1-a^{n+1})}$$

邊々相加ヘ所要ノ和ヲ S トスレバ

$$S=\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-a^{n+1}}+aS$$

$$\therefore\ (1-a)S=\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-a^{n+1}}\qquad\therefore\ S=\frac{1}{(1-a)^2}-\frac{1}{(1-a)(1-a^{n+1})},$$

32. 數列 $u_1\ u_2\ u_3\dots\dots$ ニ於テ

$$u_{r+2}-3u_{r+1}+2u_r=0\qquad(r=1,\ 2,\ 3,\dots\dots)$$

ナルトキ u_n ヲ $u_1\ u_2$ ニテ表ハセ。

〔解〕 所題ノ關係式ヨリ

$$u_{r+2}-u_{r+1}=2(u_{r+1}-u_r)$$

r ヲ 1, 2, 3...... $n-2$ トスレバ

$$u_3-u_2=2(u_2-u_1)$$

$$u_4-u_3=2(u_3-u_2)=2^2(u_2-u_1)$$

$$u_5-u_4=2(u_4-u_3)=2^3(u_2-u_1)$$

....

$$u_n-u_{n-1}=2(u_{n-1}-u_{n-2})=2^{n-2}(u_2-u_1)$$

邊々相加フレバ

$$u_n-u_2=(2+2^2+2^3+\dots\dots+2^{n-2})(u_2-u_1)$$

$$=(2^{n-1}-2)(u_2-u_1)$$

$$\therefore\ u_n=(2^{n-1}-1)u_2-(2^{n-1}-2)u_1,$$

33. 1, 3, 5,......$(2n-1)$ ナル連續奇數 n 個ノ中ヨリ任意ノ二個ヲトリテ作ルアラユル積ノ和ヲ求メヨ。

〔解〕 $$(a_1+a_3+a_5+\dots\dots+a_{2n-1})^2=\Sigma a^2_i+2\sum_{i\neq k}a_i\,a_k$$

今 $a_1=1,\ a_3=3,\ \dots\dots a_{2n-1}=2n-1$ トオケバ

$$(1+3+5+\dots\dots+(2n-1))^2=\sum_{i=1}^{n}(2r-1)^2+2\sum_{i\neq k}(2i-1)(2k-1)$$

故ニ所要ノ和ヲ S トスレバ

$$\left\{\frac{n(2n-1+1)}{2}\right\}^2=1^2+3^2+5^2+\dots\dots+(2n-1)^2+2S$$

然ルニ $1^2+3^2+5^2+\dots\dots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$ （問 8）

$$\therefore\ n^4=\frac{1}{3}n(4n^2-1)+2S$$

$$\therefore\ S=\frac{n(n-1)(3n^2-n-1)}{6}$$

34. $1^2, 2^2, 3^2, \ldots\ldots n^2$, **ヨリ任意ノ二個ヲトリテ作ルアラユル積ノ和ヲ求メヨ。**

〔解〕 所要ノ和ヲ S トスレバ前問ト同樣ニ

$$(1^2+2^2+\ldots\ldots+n^2)^2=1^4+2^4+\ldots\ldots+n^4+2S$$

然ルニ $$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^4+2^4+3^4+\ldots\ldots+n^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \quad (問\ 15)$$

$$\therefore\ \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36}=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)+2S$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{3n^2+3n-1}{5}\right\}$$

$$=\frac{1}{360}n(n^2-1)(4n^2-1)(5n+6).$$

35. 1 ヨリ n ニ至ル n 個ノ整數ヨリ任意ノ三ツヲトリテ作ルアラユル積ノ和ハ $\frac{1}{48}n^2(n+1)^2(n-1)(n-2)$ **ニ等シキコトヲ証セヨ。**

〔解〕 $(a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n)^3$ ハ a_1^3, $a_1^2a_2$, $a_1a_2a_3$ ナル如キ三種類ノ項ヨリナルコト明カナリ。

而シテ多項式定理（前章基本定理 III）ニヨリ a_1^3 ノ如キ項ノ係數ハ何レモ $\frac{3!}{3!}=1$, $a_1^2a_2$ ノ如キ項ノ係數ハ何レモ $\frac{3!}{2!\,1!}=3$, $a_1a_2a_3$ ノ如キ項ノ係數ハ何レモ $\frac{3!}{1!\,1!\,1!}=6$ ナリ，依ツテ

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n)^3=\Sigma a_1^3+3\Sigma a_1^2a_2+6\Sigma a_1a_2a_3$$

然ルニ

$$\Sigma a_1^2a_2=a_1^2(a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n)+a_2^2(a_1+a_3+\ldots\ldots+a_n)+\ldots\ldots$$

$$=a_1^2(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n)-a_1^3+a_2^2(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n)-a_2^3+\ldots\ldots$$

$$=(a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n)(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots\ldots+a_n^2)-a_1^3-a_2^3-\ldots\ldots-a_n^3$$

$$=\Sigma a_1\Sigma a_1^2-\Sigma a_1^3$$

$$\therefore\ (a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n)^3=3\Sigma a_1\Sigma a_1^2-2\Sigma a_1^3+6\Sigma a_1a_2a_3$$

今 $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ ヲ夫々 $1, 2, \ldots\ldots n$ トオキ所要ノ和ヲ S トスレバ

$$(1+2+3+\ldots\ldots+n)^3=3(1+2+\ldots\ldots+n)(1^2+2^2+\ldots\ldots+n^2)$$
$$-2(1^3+2^3+\ldots\ldots+n^3)+6S$$

$$\therefore\ \frac{n^3(n+1)^3}{8}=3\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}+6S$$

$$\therefore\ 48S=n^3(n+1)^3-2n^2(n+1)^2(2n+1)+4n^2(n+1)^2$$

$$=n^2(n+1)^2(n^2-3n+2)$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{48}n^2(n+1)^2(n-1)(n-2).$$

36. 1 ヨリ初マル連續 n 個ノ奇數ノ中ヨリ r 個ヲトリテ作ルアラユル乘積ノ和ヲ P_r トシ 2 ヨリ初マル連續 n 個ノ偶數ノ中ヨリ r 個ヲトリテ作ルアラユル乘積ノ和ヲ Q_r トスレバ

$$1+P_1+P_2+\ldots\ldots+P_n=2\cdot4\cdot6\ldots\ldots(2n)$$

$$1+Q_1+Q_2+\ldots\ldots+Q_n=1\cdot3\cdot5\ldots\ldots(2n+1)$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots\ldots(1+a_n)$

$$=1+\Sigma a_1+\Sigma a_1a_2+\Sigma a_1a_2a_3+\ldots\ldots+(a_1a_2\ldots\ldots a_n),$$

今 $a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=5,\ \ldots\ldots a_n=2n-1$ トスレバ左邊ハ

$$(1+1)(1+3)(1+5)\ldots\ldots(1+2n-1)=2\cdot4\cdot6\ldots\ldots(2n)$$

トナリ右邊ニ於テハ

$$\Sigma a_1=1+3+5+\ldots\ldots+(2n-1)=P_1$$

$$\Sigma a_1a_2=1\cdot3+1\cdot5+3\cdot5+\ldots\ldots=P_2$$

$$\Sigma a_1a_2a_3=1\cdot3\cdot5+1\cdot3\cdot7+\ldots\ldots=P_3$$

………………………………

トナル故ニ

$$2\cdot4\cdot6\ldots\ldots(2n)=1+P_1+P_2+P_3+\ldots\ldots+P_n,$$

次ニ $a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=6,\ \ldots\ldots a_n=2n$ トスレバ上ト同樣ニ

$$3\cdot5\cdot7\ldots\ldots(2n+1)=1+Q_1+Q_2+Q_3+\ldots\ldots+Q_n,$$

37. 二項定理ヲ用ヒテ $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ ヲ展開スルコトニ由ツテ次ノ級數 n 項ノ和ヲ求メヨ。(問 23 參照)

$$\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\ldots\ldots$$

〔解〕 $(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-x)^2$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-x)^3+\ldots\ldots$$

$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\ldots\ldots$$

又 $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n+\ldots\ldots$

此兩式ヲ相乘スルトキ右邊ノ x^n ノ係數ハ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{1.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\ldots\ldots+\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)}$$

ニシテ，即チ所要ノ和ヲ S トスレバ $S+1$ ニ等シ

左邊ノ x^n ノ係數ハ

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-1}=(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

ノ展開式ニ於ケル x^n ノ係數，即チ

$$\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\ldots\left(-\frac{2n+1}{2}\right)}{n!}(-1)^n=\frac{3.5.7\ldots\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)}$$

ナリ，依ツテ

$$S+1=\frac{3.5.7\ldots\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)} \qquad \therefore\ S=\frac{3.5.7\ldots\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)}-1,$$

38. $\frac{1}{1-2x-3x^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots$

トスルトキ

$$a_0+a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{n-1}=\frac{1}{8}\{3^{n+1}-2+(-1)^{n-1}\}$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $\frac{1}{1-2x-3x^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots$

$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{n-1}+\ldots\ldots$

邊々相乘ズレバ右邊ノ x^{n-1} ノ係數ハ

$$a_0+a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{n-1},$$

又左邊ノ x^{n-1} ノ係數ハ $\frac{1}{(1-2x-3x^2)}\times\frac{1}{1-x}$ ノ展開式ニ於ケル x^{n-1} ノ係數ナリ

然ルニ $\frac{1}{(1-2x-3x^2)(1-x)}=\frac{1}{(1+x)(1-3x)(1-x)}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{1-3x}+\frac{C}{1-x}$

トオケバ $A=\frac{1}{8},\quad B=\frac{9}{8},\quad C=-\frac{1}{4},$

故ニ其展開式ノ x^{n-1}, 係數ハ

$$\frac{1}{8}(1+x)^{-1}+\frac{9}{8}(1-3x)^{-1}-\frac{1}{4}(1-x)^{-1}$$

ノ展開式ニ於ケル x^{n-1} ノ係數，即

$$\frac{1}{8}(-1)^{n-1}+\frac{9}{8}3^{n-1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}\{3^{n+1}-2+(-1)^{n-1}\}$$

$$\therefore\ a_0+a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{n-1}=\frac{1}{8}\{3^{n+1}-2+(-1)^{n-1}\},$$

39. 次式ヲ証セヨ。

$$n\cdot1\cdot2+(n-1)\cdot2\cdot3+(n-2)\cdot3\cdot4+\ldots\ldots+2\cdot(n-1)n$$
$$+1\cdot n(n+1)=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(n+3),$$

〔解〕 $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+\ldots\ldots+nx^{n-1}+\ldots\ldots$

$(1-x)^{-3}=\frac{1}{2}\{1.2+2.3x+3.4x^2+\ldots\ldots+n(n+1)x^{n-1}+\ldots\ldots\}$

邊々相乘ズレバ右邊ノ x^{n-1} ノ係數ハ所題ノ式ノ左邊ノ半分ニシテ左邊ノ x^{n-1} ノ係數ハ

$$(1-x)^{-2}(1-x)^{-3}=(1-x)^{-5}$$

ノ展開式ニ於ケル x^{n-1} ノ係數，即チ

$$\frac{(-5)(-6)\ldots\ldots(-5-n+2)}{(n-1)!}(-1)^{n-1}=\frac{5.6.7\ldots\ldots(n+3)}{(n-1)!}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$$

$$\therefore\ n.1.2+(n-1).2.3+\ldots\ldots+2(n-1)n+1.n(n+1)$$

$$=2\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

40. $A_r=\dfrac{1\cdot3\cdot5\ldots\ldots(2r-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots\ldots(2r)}$ **ナルトキ次ノ二ツノ式ヲ證セヨ。**

$$A_n+A_{n-1}A_1+A_{n-2}A_2+\ldots\ldots+A_1A_{n-1}+A_n=1,$$

$$A_{2n+1}+A_{2n}A_1+\ldots\ldots+A_{n+2}A_{n-1}+A_{n+1}A_n=\frac{1}{2},$$

〔解〕

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}(-x)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-x)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-x)^3+\ldots\ldots$$

$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\ldots\ldots$$

$$=1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots\ldots+A_nx^n+\ldots\ldots$$

又 $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n+\ldots\ldots$

然ルニ $\{(1-x)^{-\frac{1}{2}}\}^2=(1-x)^{-1}$

$$\therefore\ (1+A_1x+A_2x^2+\ldots\ldots+A^nx^n+\ldots\ldots)^2=1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n+\ldots\ldots$$

兩邊ニ於ケル x^n ノ係數ヲ相等シトオケバ

$$A_n+A_{n-1}A_1+A_{n-2}A_2+\ldots\ldots+A_1A_{n-1}+A_n=1,$$

次ニ x^{2n+1} ノ係數ヲ相等シトオケバ

$$1=A_{2n+1}+A_{2n}A_1+A_{2n-1}A_2+\ldots\ldots+A_{n+1}A_n$$

$$+A_nA_{n+1}+A_{n-1}A_{n+2}+\ldots\ldots+A_1A_{2n}+A_{2n+1}$$

$$=2(A_{2n+1}+A_{2n}A_1+A_{2n-1}A_2+\ldots\ldots+A_{n+1}A_n)$$

$$\therefore\ A_{2n+1}+A_{2n}A_1+A_{2n-1}A_2+\ldots\ldots+A_{n+1}A_n=\frac{1}{2}$$

41. $(1-x)^{-n}$ **ノ展開式ニオケル** x^n **ヨリ** x^{n+r} **迄ノ係數ノ和ヲ求メヨ。**

〔解〕 $(1-x)^{-n}=1+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\ldots\ldots+a_{n+r}x^{n+r}+\ldots\ldots$

$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n+x^{n+1}+\ldots\ldots+x^{n+r}+\ldots\ldots$

邊々相乘ジテ x^{n-1} 及ビ x^{n+r} ノ係數ヲ等シトオカントスルニ $(1-x)^{-(n+1)}$ ノ x^{n-1} 及ビ x^{n+r}, ノ係數ハ夫々,

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots\ldots(2n-1)}{(n-1)!}\quad 及ビ\quad \frac{(n+1)(n+2)\ldots\ldots(2n+r)}{(n+r)!}$$

ナル故ニ

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots\ldots(2n-1)}{(n-1)!}=1+a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{n-1}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots\ldots(2n+r)}{(n+r)!}=1+a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{n-1}+a_n+\ldots\ldots+a_{n+r}$$

$$\therefore\ a_n+a_{n+1}+\ldots\ldots+a_{n+r}=\frac{(n+1)(n+2)\ldots\ldots(2n+r)}{(n+r)!}-\frac{(n+1)(n+2)\ldots\ldots(2n-1)}{(n-1)!}$$

$$=\frac{(2n+r)!}{n!(n+r)!}-\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}$$

42. 次ノ級數 n **項ノ和ヲ求メヨ。**

7, 17, 31, 49, 71, ...

〔解〕 所題ノ級數ノ各項ヲ夫々 $u_1, u_2, u_3\ldots\ldots$ トスレバ

$$u_2-u_1=10,\quad u_3-u_2=14,\quad u_4-u_3=18,\quad u_5-u_4=22,\ldots\ldots$$

即チ連接二項ノ差ハ初項 10, 公差 4 ナル等差級數ヲ作ル,

從ツテ其第 $n-1$ 項ハ

$$10+(n-2)4=4n+2$$

故ニ $u_n-u_{n-1}=4n+2$

從ツテ $u_{n-1}-u_{n-2}=4(n-1)+2$

$u_{n-2}-u_{n-3}=4(n-2)+2$

....

$u_2-u_1=4(2)+2$

$$\therefore\ u_n-u_1=4(2+3+4+\ldots\ldots+n)+2(n-1)=2(n^2+2n-3)$$

$$\therefore\ u_n=2n^2+4n+1$$

$$\therefore\ S=\Sigma u_n=2\Sigma n^2+4\Sigma n+n=2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$=\frac{1}{3}n(n+2)(2n+5),$$

43. 次ノ級數ノ第 n **項ヲ見出シ然ル後此級數** n **項ノ和ヲ求メヨ。**

6, 17, 34, 57, 86, ...

〔解〕 前問ト同様ニ所題ノ級數ノ各項ヲ $u_1\,u_2\ldots\ldots u_n$ トスレバ

$$u_2-u_1=11,\quad u_3-u_2=17,\quad u_4-u_3=23,\quad u_5-u_4=29,$$

$$\therefore\ u_n-u_{n-1}=11+(n-2)6=6n-1$$

$$\therefore\ u_n-u_1=6(2+3+\ldots\ldots+n)-(n-1)=(n-1)(3n+5),$$

$$\therefore\ u_n=(n-1)(3n+5)+6=3n^2+2n+1,$$

$$\therefore\ S=\sum_{n=1}^{n}u_n=3\Sigma n^2+2\Sigma n+n$$

$$=3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2.\frac{n(n+1)}{2}+n=\frac{n}{2}(2n^2+5n+5)$$

44. 次ノ級數 n 項ノ和ヲ求メヨ。

$$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

〔解〕 所題ノ級數ノ各項ヲ夫々 $u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots\ldots$ トスレバ前問ト同様ニ連續二項ノ差ハ次ノ如クナル

$$3,\ 6,\ 10,\ 15,\ldots\ldots$$

此第二ノ級數ノ各項ヲ夫々 $\triangle u_1,\ \triangle u_2,\ \triangle u_3,\ldots\ldots$ トスレバ

$$\triangle u_2-\triangle u_1=3,\quad \triangle u_3-\triangle u_2=4,\quad \triangle u_4-\triangle u_3=5,\ldots\ldots$$

從ツテ $\triangle u_n-\triangle u_{n-1}=n+1,$

$$\therefore\ \triangle u_{n-1}-\triangle u_{n-2}=n$$

$$\triangle u_{n-2}-\triangle u_{n-3}=n-1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\triangle u_2-\triangle u_1=3$$

$$\therefore\ \triangle u_{n-1}=3+4+5+\ldots\ldots+n+\triangle u_1$$

$$=\frac{(n-2)(n+3)}{2}+3=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$\therefore\ u_n-u_{n-1}=\triangle u_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}$$

從ツテ $u_{n-1}-u_{n-2}=\dfrac{(n-1)n}{2}$

$$u_{n-2}-u_{n-3}=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_2-u_1=\frac{2.3}{2}$$

$$\therefore\ u_n=\frac{1}{2}\{(2.3+3.4+4.5+\ldots\ldots+n(n+1)\}+u_1$$

$$=\frac{1}{2}\{(2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2)+(2+3+\ldots\ldots+n)\}+1$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1+\frac{(n-1)(n+2)}{2}\right\}+1$$

$$=\frac{1}{6}(n^3+3n^2+2n),\quad \therefore\ S=\sum_{n=1}^{n}u_n=\frac{1}{6}\{\Sigma n^3+3\Sigma n^2+2\Sigma n\}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}+n(n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3),$$

45. 次ノ級數 n 項ノ和ヲ求メヨ。

$$\frac{1}{1+1^2+1^4}+\frac{2}{1+2^2+2^4}+\frac{3}{1+3^2+3^4}+\frac{4}{1+4^2+4^4}+\ldots\ldots$$

〔解〕 $\dfrac{x}{1+x^2+x^4}=\dfrac{x}{(1+x+x^2)(1-x+x^2)}=\dfrac{Ax+B}{1+x+x^2}+\dfrac{Cx+D}{1-x+x^2}$

トオキ分母ヲ去レバ

$$x=(Ax+B)(1-x+x^2)+(Cx+D)(1+x+x^2)$$

$x^2=-x-1$ トオケバ

$$x=(Ax+B)(-2x)=-2Ax^2-2Bx=2A(x+1)-2Bx$$

x ハ複素數ナル故ニ

$$1=2A-2B,\quad 2A=0\qquad \therefore\ A=0,\quad B=-\frac{1}{2}$$

$x^2=x-1$ トオケバ

$$x=(Cx+D)(2x)=2Cx^2+2Dx=2C(x-1)+2Dx$$

x ハ複素數ナル故ニ

$$1=2C+2D,\quad 2C=0\qquad \therefore\ C=0,\quad D=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{x}{1+x^2+x^4}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-x+x^2}-\frac{1}{1+x+x^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+x(x-1)}-\frac{1}{1+x(x+1)}\right\}$$