初等教育

平面幾何

全

上野清編纂

訂正三版

東京

吉川半七發行

序

従來我邦ニ行ハルヽ幾何學書ハ大概ゆーくりつどニ據ルモノ多シトス而シテ其簡ニシテ要ヲ得タルモノ甚ダ少ナシ輓近うゐるそん氏ノ幾何學書大ニ世ニ行ハルヽニ至レリ是レ他無シ同氏ノ幾何學書ハゆーくりつどノ組織ヲ甚シク改變セズシテ其繁ヲ去リ粹ヲ取リ折衷其宜シキヲ得タルヲ以テナリ.

余カ本書ヲ編纂スルモ亦其基本ハゆーくりつどニ據リ大ニうゐるそん氏ノ編輯方法ニ準ゼリ而シテ尙ホ其改メ得ベキモノハ之ヲ改メ簡ニシ得ヘキモノハ壹層之ヲ簡ニシ定理ノ項數ヲ減シ例題ノ配置ニ注意ヲ加ヘ以テ初學者カ本書ニ就キテ幾何學ヲ修ムルニ方リ其腦裡ニ困難無ク幾何學ノ思想ヲ浸入セシメンコヲ力メタリ且ツ總論ニハ首トシテ設題ノ目ヲ設ケ論理學ノ必要ナル條件ヲ約述シ幾何學ノ本旨ヲ示シタリ.

本書ハ初等ノ名ヲ附スルト雖モ小學ノ程度ノモノニアラズ乃チ普通敎科用書中ノ初歩ナルモノナリ.

本書ノ順序及ヒ例題配置等ハ他書ト頗ル異ナル處アリト雖𪜈是レ余ガ淺劣ナル經驗上ニ照ヲシテ編成セシモノニシテ其材料ハ次ノ數書ヨリ選取セシニ過ギザルナリ.

Robinson,———Geometry.
Garnett,———Geometry.
Henrici,———Geometry, Congruent Figures.
Wilson,———Plane geometry.
Chauvenet,———Treatise on geometry.
Todhunter,———Elements of Euclid.
Nixon,———Euclid Revised.
Wright,———Plane geometry.
Watson,———Elements of geometry.
Davies,———Nature and utility of Mathematics.
Wentworth,———Plane geometry.

本書ノ出版ニ付キ校正ノ勞ヲ取リ且ツ深切ナル注意ヲ加ヘラレタルハ原濱吉氏ナリ今ヤ本書ハ將サニ世ニ出デントス今後ハ江湖諸君ノ叱正ヲ乞ハンノミ.

明治廿三年十二月下浣東京ニ於テ

上野 清識ス

目次

總論

設題, 設題之解拆, 設題之種類, 定義……1—2
公理, 普通公理, 定理及同解拆, 推論, 問題……3—4

第壹本

直線

定義, 幾何公理……5—7

第壹節 角

定義, 定理(壹ヨリ三ニ至ル)……8—11
例題……11—12

第貳節 三角形

定義, 定理(四ヨリ拾五ニ至ル)……13—23
例題……23—24

第三節 平行線

定義, 幾何公理, 定理(拾六ヨリ廿四ニ至ル)……25—33
例題……33—35

第四節 等勢圖形
定義，定理（廿四ヨリ廿五ニ至ル）……36—38
例題……39

第五節 軌跡
定義，定理（廿六ヨリ廿八ニ至ル）……40—41
定義，定理（廿九ヨリ三拾ニ至ル），例題……42—43

第貳本
圓
定義及圓之性質……44—45

第壹節 根原之性質
定義（壹ヨリ貳ニ至ル）……46—47
例題……47

第貳節 弦
定理（三ヨリ七ニ至ル）……48—51
例題……52

第三節 欠圓之角
定義，定理（八ヨリ拾壹ニ至ル）……53—55
例題……56

第四節 切線
定義，定理（拾貳ヨリ拾五ニ至ル）……57—60
題例……60

第五節 兩圓之關係
定理（拾六ヨリ拾八ニ至ル）……61—62
例題……63—64

第六節 問題
公法，問題（壹ヨリ拾八ニ至ル）……65—75
解拆及總合法，問題（拾九）……76
例題……76—78

第三本
面積
定義……79—82

第壹節 面積之相等
定理（壹ヨリ拾四ニ至ル）……80—89
例題……90—91

第貳節 問題
問題（壹ヨリ八ニ至ル）……92—97
例題……97—98

第四本
比例
定義，問題，比例之公設題……99—1[illegible]

第壹節 根原之比例

定理(壹ヨリ三ニ至ル)..102—104

第貳節 相似形

定義,定理(四ヨリ九ニ至ル)..105—109

第三節 面積

定理(拾ヨリ拾六ニ至ル)..110—114

第四節 軌跡及問題

定理(拾七ヨリ拾八ニ至ル)..115—116
問題(壹ヨリ五ニ至ル)..116—119
例題..120—121

初等
平面幾何

總論

1. 設題 (Propositions) トハ壹事項ノ陳述ナリ.

例ヘハ日本人ハ亞細亞人種デあるトイフガ如キハ設題ニシテ日本人,亞細亞人種,及ビあるトイヘル三部分ヨリ成レル壹事項ナリ.

2. 設題之解拆 ヲ次ニ示ス.

(第壹) 設題ノ公述ハ次ノ如シ,

即チ　A ハ B デある..............................(1)

上ノ設題ハ A, B 及ビあるヲ三部トス即チ

A = 日本人, B = 亞細亞人種トスレハ前例ヲ得.

(第貳) (1) ノ設題ノ意義ハ A 種ノ事物ハ凡ヘテ B 種ノ事物ノ内ニ含有セラレ他ノ種ノ内ニハ含有セラレザルヿヲ述ヘシモノナリ故ニ之ヲ換言スレバ B デ無キモノハ A デ無キモノナリトイフヿナリ之ニ由テ (1) ガ眞ナル片ハ次ノ (2) モ必ラス眞ナルヿ明ラカナリ. (但シ便利ノ爲メ B デ無キモノトイフ語ノ代リニ not B ヲ用フ.)

not B ハ not A デある........................(2)

(1)ト(2) ハ互ヒニ反否 (Contra-Positive) 設題ヲナストイフ.

(第三) 前述ノ如ク (1) ノ意義ハ凡ヘテノ A 種ガ B 種ノ內ニ含有セラルヽガ故ニ次ノ如ク換言スルヿヲ得ベシ,

B ノ或部分ハ A デある,

之ニ由テ若シ B ノ或部分デ無ク凡ヘテノ B ガ A デあるトキハ

(1) 即チ上ノ換言ハ次ノ如クナルベシ,

即チ　B ノ凡ベテハ A デある,

之ヲ畧シテ　B ハ A デある……………………(3)

(1) ト (3) ハ互ヒニ反 (Converse) 設題ヲナストイフ即チ A ト B ガ全ク壹致シタルトキニアラザレハ (1), (3) ノ內其壹ガ眞ナルモ他ノ壹ハ恒ニ眞ナル能ハズ.

(第四) (3) ノ反否設題ハ次ノ如シ,

not A ハ not B デある……………………(4)

(1) ト (4) ハ互ヒニ否 (Obverse) 設題ヲナストイフ即チ (3) ガ眞ナルトキハ (4) ハ恒ニ眞ナレドモ (1) ト (4) ハ其壹ツガ眞ナルモ (A ト B ガ壹致スルニアラザレバ)他ノ壹ハ恒ニ眞ナル能ハズ.

(第五) (1), (2), (3) 及ビ (4) ニ於テ (1), (2) ノ內其壹ガ眞ナレハ他ノ壹ハ恒ニ眞ナリ又 (3), (4) ニ於テモ同様ナリ之ニ由テ或壹事項ノ設題ノ眞否ヲ撿センニハ本設題ト反設題ノ貳ツ丈ケヲ確知スレバ充分ナリトス.

3. 設題之種類 ヲ分チテ定義, 公理, 定理, 推論及ヒ問題ノ五種トス.

4. 定義 (Definitions) トハ壹事物ノ特別ナル性質ヲ表示スル所ノ設題ニシテ巳ニ其事物ヲ他ノ事物ト區別シ得ルトキハ其他ノ附屬事項ヲ陳述セザルモノトス.

例ヘハ風ハ空氣ノ流動デあるトイヘル設題ハ風ノ定義ニシテ其他ニ風ニ關スル事項ヲ述ブベカラザルモノトス.

故ニ定義ノ公述 A ハ B デあるニ於テ B ナル性質ハ凡ヘテ A ニ屬セザルベカラズ故ニ B ハ A デあるトイフヿヲ得ベシ.

5. 公理 (Axioms) トハ人ノ感覺上ニ於テ自然ニ了解シ得ヘキ眞理ニシテ其眞理ハ自然ノ感覺ノ外ハ如何ナル方法ニテモ推究スル能ハサルモノナリ.

例ヘハ A ハ B デあるトイヘル設題ニ於テ A ガ B ナル理由ヲ自然ノ感覺ニテ知リ得ヘキトキ其設題ヲ公理トイフ.

6. 普通公理 ヲ下ニ示ス.

(*a*) 全キ物ハ其部分ヨリ大デある.

(*b*) 全キ物ハ其部分ノ和ニ等シクある.

(*c*) 同壹ノ物ニ等シキ諸物ハ互ヒニ相等シクある.

(*d*) 等シキ諸物ノ各ニ等シキ物ヲ加ヘタル和ハ互ニ相等シクある.

(*e*) 等シキ諸物ノ各ヨリ等シキ物ヲ減ジタル差ハ互ニ相等シクある

(*f*) 等シカラザル諸物ノ各ニ等シキ物ヲ加ヘタル和ハ等シカラズ而シテ其內大ナル物ヨリ得タル和ハ大デある.

(*g*) 等シカラザル諸物ノ各ヨリ等シキ物ヲ減ジタル差ハ等シカラズ而シテ其內大ナル物ヨリ得タル差ハ大デある.

(*h*) 等シキ諸物ノ貳倍及ヒ半ハ相等シクある.

7. 定理 (Theorems) トハ公理或ハ既知ノ定理ヨリ推究シテ了解シ得ヘキ所ノ眞理ヲイフ.

例ヘバ設題 A ハ B デあるニ於テ A ナル性質ヲ有スルモノハ必ラス B ナル性質ヲ有スヘキヿヲ推究シ得ヘキトキ之ヲ定理トイフナリ而シテ A ハ既知ノ項ニシテ B ハ推究スヘキノ項ナリ此推究ノ方法ハ公理或ハ既知ノ定理ヲ適用スヘキモノトス之ニテ定理ヲ次ノ三部ニ分ツ.

(第壹) 既知ノ項ヲ定理ノ假設 (Hypothesis) トイフ即チ A ハ假設ナリ.

(第貳) 既知ノ項ニヨリテ公理或ハ定理ヲ適用シテ推究スルノ方法ヲ證明 (Proof) トイフ.

(第三) 證明ニヨリテ推究シ得タル項ヲ終決 (Couclusion) トイフ即チ B ハ終決ナリ.

又證明ノ際ニ他ノ形チヲ構成シテ其推究ヲ助クルノ方法ヲ作法 (Construction) トイヒ又定理ノ題意ノ公述ヲ汎説 (General enunciation) トイヒ題意ノ壹例ヲ示スヲ特説 (Particular enunciation) トイフ.

8. 定理之解拆

モ亦タ 2. ノ如ク反定理, 否定理, 反否定理ニ分解シ得ベシ即チ 2. ノ (1), (2), (3), (4) ノ公述ノ如シ.

反定理ヲ得ヘキ定理ヲ撿査スルモ 2. ノ塲合ノ如クナレ𪜈今屢々起ル所ノ塲合ヲ次ニ示ス.

壹事物ノ性質ヲ推究スルトキ其事物ニ付キ起ルヘキ塲合ノ假設ヲ掲ゲ之ニ應ジテ若干ノ終決ヲ生スルヿアリ然ルトキハ其壹事物ニ付キ若干ノ定理ヲ得ベシ.

右ノ諸定理ニ於テ其内ノ貳ツ或ハ貳ツヨリ多キ假設ガ同壹ノ終決ヲ得ザルトキ其諸定理ハ凡ヘテ反定理ヲ得ベシ.

今 A, C, E ヲ凡ヘテノ塲合ヲ掲ゲタル假設トシ順次ニ B, D, F ナル各異ノ終決ヲ得ルモノトス,

即チ
$$\left.\begin{array}{lllll} A & \text{ハ} & B & \text{デ} & \text{ある,} \\ C & \text{ハ} & D & \text{デ} & \text{ある,} \\ E & \text{ハ} & F & \text{デ} & \text{ある.} \end{array}\right\}\text{本定理,}$$

然ルトキ順次ニ
$$\left.\begin{array}{lllll} B & \text{ハ} & A & \text{デ} & \text{ある.} \\ D & \text{ハ} & C & \text{デ} & \text{ある.} \\ F & \text{ハ} & E & \text{デ} & \text{ある.} \end{array}\right\}\text{反定理.}$$

例ヘバ或練兵塲ニ於テ拾人ノ騎兵ト拾頭ノ馬ヲ視タルトキ各ノ騎兵カ馬ヲ有スルトキ各ノ馬ハ各ノ騎兵ノ所有ナルヿノ反定理ヲ得ベシ,

若シ貳人或ハ貳人以上ノ騎兵ガ同シ壹馬ヲ共有スルトイヘル定理ガ眞ナルトキハ各ノ馬ハ各ノ騎兵ノ所有ナリトイヘル反定理ハ眞ナルヤ否ヤヲ知ル能ハズ.

9. 推論 (Corollaries)

トハ定理ヨリ推究シ得ヘキ所ノ眞理ナリ.

10. 問題 (Problems)

トハ物ノ或性質ヲ求メ而シテ之ヲ證明スル所ノ設題ナリ.

第壹本

直線

定義

1. 點 (Point) トハ位置アリテ大サ無キモノヲイフ.

2. 線 (Line) トハ位置及ヒ長サアリテ幅及ヒ厚サ無キモノヲイフ.

線ノ端界ハ點ナリ又貳線ノ交處ハ點ナリ.

3. 表面 (Surface) トハ位置及ヒ長,幅アリテ厚サ無キモノヲイフ.

表面ノ端界ハ線ナリ又兩表面ノ交處ハ線ナリ.

4. 體 (Solid) トハ位置及ヒ長,幅,厚ヲ有スルモノヲイフ.

體ノ端界ハ表面ナリ.

5. 直線 (Straight Line) トハ其壹部分ヲ取リテ他ノ壹部ノ上ニ置ク片恒ニ全ク相重ナル線ヲイフ.

6. 平面 (Plane) トハ其中ニ於テ或貳點ヲ取リ之ヲ連結スル直線ガ全ク其中ニ相合スル所ノ表面ヲイフ.

7. 平面圖 (Plane Figure) トハ同平面中ニアル所ノ點或ハ線ノ壹羣ヲイフ.

8. 幾何學 (Geometry) トハ體,表面及ヒ線ノ性質及ヒ搆成ヲ論スル所ノ學問ヲイフ.

9. 平面幾何學 (Plane Geometry) トハ平面圖ノ性質及ヒ搆成ヲ論スル所ノ學問ヲイフ.

本書ハ初等平面幾何學ナルガ故ニ直線及ヒ後本ニ記サントスル圓ノ性質及ヒ搆成ノミヲ論スルモノトス.

幾何公理

10. 幾何公理 (Geometrical Axioms) ヲ示ス.

(1) 全ク相重ナリ合フ所ノ諸量ハ其大サ相等シ.

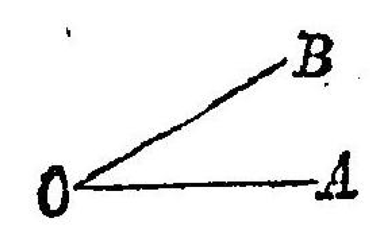
(2) 貳點ヲ過ギテ唯壹ツノ直線ヲ引クコヲ得.

第壹節　角

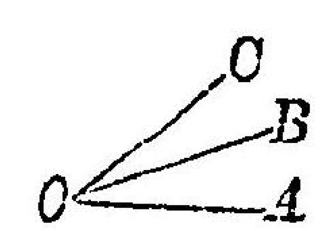
定義

11. 角 (Angle) 即チ平面角トハ貳直線ガ同壹點ニ會シテ成レル平面圖ヲイフ.

例ヘバ OA, OB ノ貳直線ガ同點 O ニ會シテ壹角ヲ成ス而シテ O ヲ角頂トイヒ OA, OB ヲ角ノ貳邊トイフ又角頂ノ壹字 O ヲ取リテ此角ヲ O 角即チ $\angle O$ ト稱シ或ハ貳邊ノ各壹字ヲ其兩端ニ附シテ AOB 角即チ $\angle AOB$ ト稱ス.



若シ三直線ガ同壹點ニ會シ其中間ノ壹直線ヲ共通ノ邊トスル兩角ヲナス時其兩角ヲ隣角 (Adjacent angles) トイフ例ヘバ $\angle AOB$, $\angle BOC$ ノ如シ.

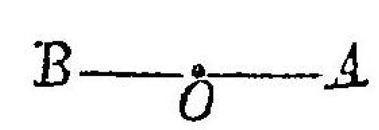


而シテ　$\angle AOB+\angle BOC=\angle AOC$,

又　$\angle AOC-\angle BOC=\angle AOB$.

12. 壹線角 (Straight angle) トハ角ノ貳邊ハ角頂ノ反對ニアリテ壹直線ヲナス角ヲイフ.

例ヘバ OA ト OB トハ壹直線ヲナス故ニ $\angle AOB$ ハ壹線角ナリ.



13. 等角 即チ兩角ノ大サガ相等シトイフコハ其壹角ノ頂ヲ他ノ壹角ノ頂ノ上ニ置キ其兩邊ガ他ノ兩邊ト相合スルコヲ得ヘキモノヲイフ(即チ幾何公理 (1) ト同理)

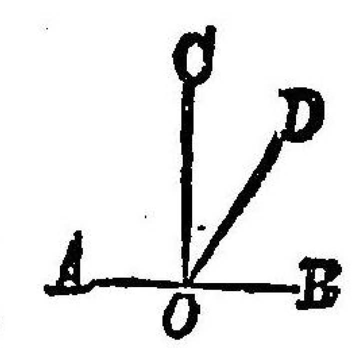
故ニ角ノ大小ハ其角邊ノ長短ニ關セズ例ヘバ前圖ニ於テ $\angle AOB$ ハ $\angle AOC$ ヨリ小ナリ.

14. 直角 (Right Angle) 壹直線ガ他ノ壹直線ノ上ニ立チ其兩隣角ガ相等シキ時其各ヲ直角トイフ.

例ヘハ OC ガ AB ノ上ニ立チ $\angle BOC=\angle COA$ ナル時此兩角ヲ直角トイフ.

故ニ直角ハ壹線角ノ半ニ等シ,

即チ　$\angle BOC=\angle COA=\frac{1}{2}\angle BOA.$



15. 垂線 (Perpendicular) 即チ壹直線上ノ垂線トハ其直線ト直角ヲ成ス所ノ壹直線ヲイフ.

例ヘバ OC ハ AB ノ垂線ナリ,

又 AB ト直角ヲ成サザル他ノ直線 OD ノ如キハ AB ノ斜線 (Obulique Line) トイフ.

16. 鋭角 (Acute Angle) トハ直角ヨリ小ナル角ヲイフ例ヘバ $\angle BOD$ ノ如シ.

17. 鈍角 (Obtuse Angle) トハ直角ヨリ大ナル角ヲイフ例ヘバ $\angle AOD$ ノ如シ.

18. 餘角 (Complement) 兩角ノ和ガ直角ニ等シキ時ハ其兩角ハ互ヒニ其餘角トイフ.

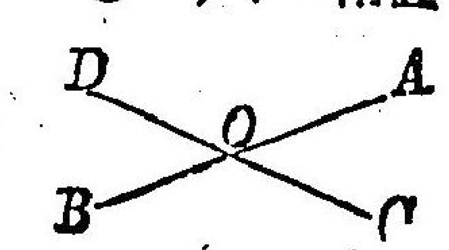
例ヘハ $\angle BOD+\angle DOC=R\llcorner$ ナル時 $\angle BOD$ ヲ $\angle DOC$ ノ餘角トイヒ又 $\angle DOC$ ヲ $\angle BOD$ ノ餘角トイフ.

19. 補角 (Supplement) 兩角ノ和ガ貳直角ニ等シキ時ハ其兩角ハ互ヒニ其補角トイフ.

例ヘバ $\angle BOD+\angle DOA=2R\llcorner$ ナル時 $\angle BOD$ ヲ $\angle DOA$ ノ補角トイヒ $\angle DOA$ ヲ $\angle BOD$ ノ補角トイフ.

20. 對頂角 (Vertically Opposite angles) トハ兩直線ガ相交ハリテ成ス所ノ對角ヲイフ.

AB, CD ガ O ニ交ハル時 $\angle AOC$, $\angle BOD$ 或ハ $\angle AOD$, $\angle BOC$ ハ對頂角ナリ.



定理壹

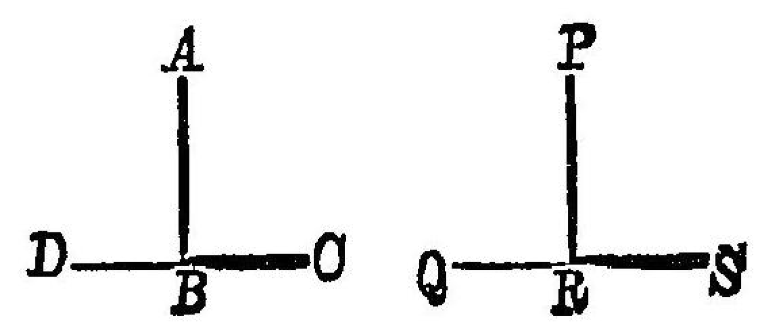
21. 凡ヘテノ直角ハ相等シ.

(特説) $\angle ABC$, $\angle PRS$ ヲ直角トス,

然ルキ $\angle ABC=\angle PRS$.

(證明) B ヲ R ノ上ニ置キ

BC ヲ RS ニ合セシム,



然ルキ CD, SQ ヲ CB, SR

ノ引長線トスレハ BD ハ RQ ニ合スベシ,

$\therefore\ \angle DBC=\angle QRS$. (公理(1))

又 $\angle ABC=\frac{1}{2}\angle DBC$ 及ヒ $\angle PRS=\frac{1}{2}\angle QRS$. (14.)

(終決) $\therefore\ \angle ABC=\angle PRS$.

22. 推論壹 定直線中ノ壹點ニ於テ其線ニ唯壹ツ垂線ヲ作リ得.

23. 推論貳 等角ノ餘角ハ相等シ.

24. 推論三 等角ノ補角ハ相等シ.

定理貳

25. 壹直線ガ他ノ壹直線ノ上ニ立ツキ其兩隣角ノ和ハ貳直角ニ等シ.

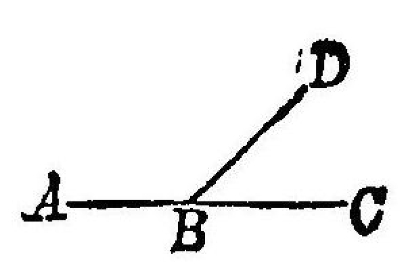
(反定理) 壹直線ガ他ノ壹直線ト相會シ其兩隣角ノ和貳直角ニ等シキキ其貳直線ハ壹直線ヲナス.

(特説) DB ガ AC ノ上ニ立ツ,

然ルキ $\angle ABD+\angle DBC=2R\llcorner$.

(證明) ABC ハ壹直線ナリ, (假設)

故ニ $\angle ABC=2R\llcorner$. (12.)



但 $\angle ABD+\angle DBC=\angle ABC$, (11.)

(終決) $\therefore\ \angle ABD+\angle DBC=2R\llcorner$.

(反定理) $\angle ABD+\angle DBC=2R\llcorner$, (假設)

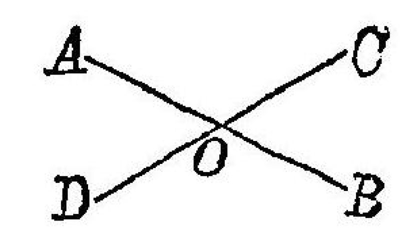
$\therefore\ \angle ABC=2R\llcorner$,

故ニ AB, BC ハ壹直線ヲナス.

定理三

26. 貳直線ガ相交ハルキ其對頂角ハ相等シ.

(特説) 貳直線 AB, CD ガ O ニ於テ相交ルキ,



$\angle AOD=\angle BOC$.

(證明) AOB ハ壹直線ナリ; (假設)

故ニ $\angle AOB=\angle AOC+\angle BOC=2R\llcorner$, (定理貳)

同理 $\angle COD=\angle AOC+\angle AOD=2R\llcorner$.

(終決) $\therefore\ \angle BOC=\angle AOD$.

27. 推論 諸直線ガ同壹點ニ會スルキ其凡ヘテノ角ノ和ハ四直角ニ等シ.

例　題

1. 貳直線ガ相交ハルキ其四角ノ壹ツガ直角ニ等シキキハ他ノ三角ノ各モ直角ニ等シ.

2. 四直線ガ壹點ニ會シ其四角ノ各ガ直角ヲ成スキハ其四直線ハ貳ヅツ壹直線ヲ成ス.

3. 五直線ガ壹點ニ會シ相等シキ五角ヲ成スキ其各角ハ直角ノ五分ノ四ニ等シ.

4. 互ニ補角ヲ成ス貳隣角ノ貳等分線ハ直角ニ於テ相交ハル又貳隣角ガ餘角ヲ成スキハ半直角ニ於テ相交ハル

5. OA, OB, OC, OD ノ四直線カ順次ニ O 點ニ會シ而シテ $\angle AOB=\angle COD$, $\angle BOC=\angle DOA$ ナルヰ AOC 及ヒ BOD ハ各壹直線ヲナス.

6. 貳直線ガ相交リテ成レル對頂角ノ各ヲ貳等分スル兩直線ハ壹直線ヲナス.

7. 壹直線 AB ニ於テ壹點 O ヲ取リ O ヨリ AB ノ反對ノ方ニ OC, OD ヲ引キ $\angle AOC=\angle BOD$ ナルヰ OC, OD ハ壹直線ヲナス.

8. $\angle ACB$, $\angle DCE$ ガ角頂 C ヲ共有シ CA, CE ノ間ダニ CB, CD ヲ置ク然ルヰ此兩角ノ貳等分ニテ成レル角ノ貳等分線 CO ガ $\angle ACE$ 或ハ $\angle BCD$ ヲ貳等分スレバ $\angle ACB=\angle DCE$.

9. 定角 ACB ノ貳等分線ヲ CO トシ此角ノ内ニ CM ヲ引クヰ $\angle MCA$ ト $\angle MCB$ ノ差ハ $2\angle MCO$ ナリ.

10. 若シ又 CM ヲ $\angle ACB$ ノ外ニ引クヰハ $\angle MCA$ ト $\angle MCB$ ノ和ハ $2\angle MCO$ ニ等シ.

11. 書籍ノ壹枚ノ隅ヲ折リ返スヰ紙ノ壹邊ニテ角ヲ成ス而シテ此角ノ貳等分線ハ折リ目ニ直角ヲ成ス.

第貳節　三角形

定　義

28. 平面直線形 (Plane Rectilineal Figure) トハ諸直線ニ由テ圍マレタル平面ノ壹部分ヲイフ.

29. 三角形 (Triangle) トハ三直線ニ由テ圍マレタル平面直線形ヲイフ.

三角形ハ三邊及ヒ三角ノ六部分ヲ有ス而シテ三角形ノ壹邊ヲ底邊 (base) ト稱スルヰハ之ニ對スル壹角ヲ頂角 (vertex) ト稱ス.

30. 等邊三角形 (Equilateral Triangle) トハ三邊相等シキ三角形ヲイフ.

31. 等脚三角形 (Isosceles Triangle) トハ貳邊相等シキ三角形ヲイフ.

等脚三角形ノ底邊トハ等シカラザル壹邊ヲイフ.

32. 直角三角形 (Right-angled Triangle) トハ壹角カ直角ナル三角形ヲイフ.

直角三角形ノ直角ニ對スル壹邊ヲ斜邊 (Hypotenuse) ト稱ス.

33. 鋭角三角形 (Acute-angled Triangle) トハ各角ガ鋭角ナル三角形ヲイフ.

34. 鈍角三角形 (Obtuse-angled Triangle) トハ壹角ガ鈍角ナル三角形ヲイフ.

35. 全等形　即チ兩形ノ全等形トハ兩形ガ全ク相重ナリ合フモノヲイフ.

定理四

36. 兩三角形ガ各貳邊及夾角相等シキトキハ全等形ナリ.

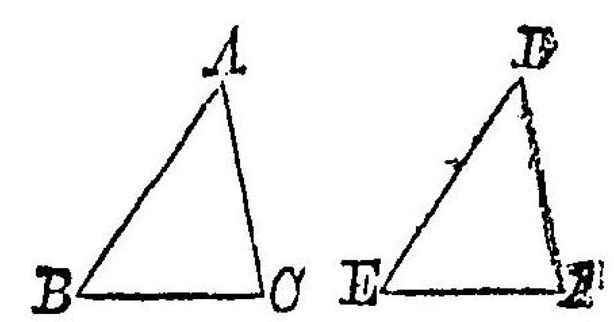
(特說) $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ

$AB=DE$, $AC=DF$,

$\angle BAC=\angle EDF$,

然ルトキ

$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$.



(證明) A 點ヲ D 點ノ上ニ置キ AB ヲ DE ニ合セシム,

然ルニ $\angle BAC=\angle EDF$, (假設)

故ニ AC 線ハ DF 線ニ合スベシ.

而シテ $AB=DE$, $AC=DF$, (假設)

故ニ B 點ハ E 點ニ合シ C 點ハ F 點ニ合スベシ.

(終決) $\therefore$ $BC=EF$, (10. 公理 2)

而シテ B, E 兩角ハ全ク相合スルガ故ニ

$\angle B=\angle E$, (10. 公理 1)

同理 $\angle C=\angle F$.

之ニ由テ $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$.

定理五

37. 兩三角形ガ各壹邊及ヒ其兩端ノ各貳角相等シキトキハ全等形ナリ.

(特說) $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ $BC=EF$, $\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$, 然ルトキ $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$.

(證明) B 點ヲ E 點ノ上ニ置キ BC ヲ EF ニ合セシム,

而シテ $BC=EF$, (假設)

故ニ C 點ハ F 點ニ合スベシ.

而シテ $\angle B=\angle E$, (假設)

故ニ BA ハ ED ニ合スベシ,

又 $\angle C=\angle F$, (假設)

故ニ CA ハ FD ニ合スベシ,

而シテ貳直線ハ唯壹點ニ於テ交ハル, (公理 2)

故ニ A 點ハ D 點ニ合スベシ.

(終決) 之ニ由テ $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$.

定理六

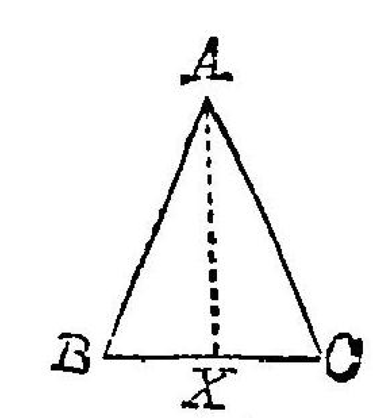
38. 等脚三角形ノ底邊ニ於ケル兩角ハ相等シ.

(反定理) 三角形ガ底邊ノ貳角相等シキトキハ等脚三角形ナリ.

(特說) $\triangle ABC$ ヲ等脚三角形トス

即チ $AB=AC$,

然ルトキ $\angle B=\angle C$.



(證明) AX ヲ以テ BAC 角ヲ貳等分シ X ニ於テ BC ニ交ハラシム.

然ルトキ $\triangle BAX$, $\triangle CAX$ ニ於テ

$$\left.\begin{aligned} &BA=CA \quad (假設)\\ &AX ハ共通邊\\ &\angle BAX=\angle CAX \quad (作法)\end{aligned}\right\}$$

$\therefore$ $\triangle BAX\equiv\triangle CAX$ (定理四)

(終決) $\therefore$ $\angle B=\angle C$

(反定理) $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle B=\angle C$, 然ルトキ $AB=AC$ ナルコトヲ證スベシ.

$\triangle ABC$ ヲ置キ返ヘシテ CB ヲ元ノ BC ニ合セシム,

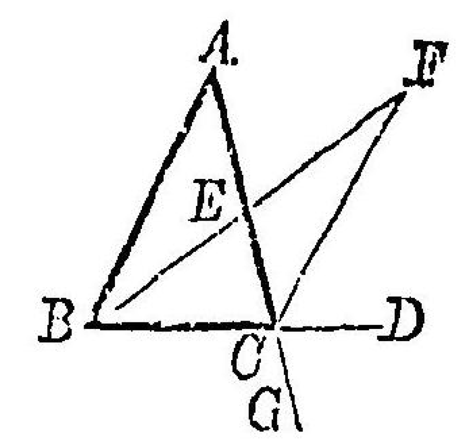
然ルヰ B ハ元ノ C ニ合シ C ハ元ノ B ニ合スベシ,
而シテ $\angle B=\angle C$ (假設)
故ニ AB ハ元ノ CA ニ合シ CA ハ元ノ BA ニ合スベシ.
故ニ定理五ニヨリ $BA=CA$

39. 推論 等邊三角形ノ各角ハ相等シ又反定理ヲ得.

定理七

40. 三角形ノ壹邊ヲ引長シテ成レル外角ハ他ノ内對角ノ各ヨリモ大ナリ.

(特設) $\triangle ABC$ ノ壹邊 BC ヲ D 迄引長ス,
然ルヰ外角 $\angle ACD$ ハ内對角 $\angle CAB$ 或ハ $\angle ABC$ ヨリモ大ナリ.



(證明) AC ヲ E ニ於テ貳等分シ BE ヲ連結シ $BE=EF$ ニ作ル而シテ CF ヲ連結ス,然ルヰ $\triangle AEB$. $\triangle CEF$ ニ於テ

$AE=CE$, (作法)
$BE=EF$, (作法)
$\angle AEB=\angle CEF$, (定理三)
$\therefore \triangle AEB\equiv\triangle CEF$,

$\therefore EAB=\angle ECF$, 但 $\angle ECD>\angle ECF$, $\therefore \angle ECD>\angle EAB$.
又 AC ヲ G 迄引長シ BC ヲ貳等分スレハ同法ニヨリテ $\angle BCG>\angle ABC$, 但 $\angle BCG=\angle ACD$.
(終決) 之ニ由テ $\angle ACD$ ハ $\angle BAC$ 或ハ $\angle ABC$ ヨリ大ナリ.

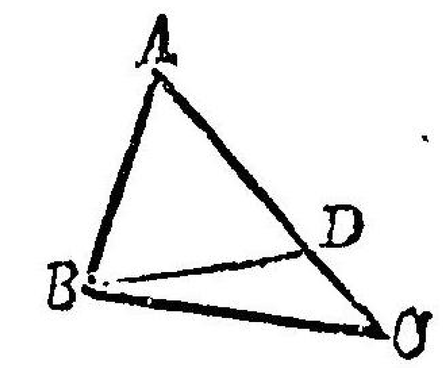
41. 推論壹 三角形ノ兩角ノ和ハ貳直角ヨリ小ナリ.

42. 推論貳 三角形ノ壹角ガ直角或ハ鈍角ナルヰ他ノ貳角ハ鋭角ナリ.

定理八

43. 三角形ノ大邊ハ大角ニ對ス,又反定理ヲ得.

(特設) $\triangle ABC$ ニ於テ $AC>AB$,
然ルヰ $\angle ABC>\angle ACB$.



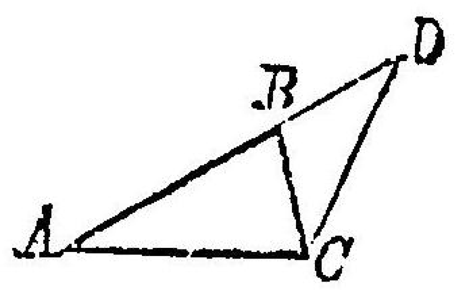
(證明) AC ヲ截リ $AD=AB$ トス,
又 DB ヲ連結ス,
然ルヰ $\angle ABD=\angle ADB$. (定理六)
但シ $\angle ADB$ ハ $\triangle BDC$ ノ外角ナリ,
$\therefore \angle ADB>\angle ACB$, (定理七)
$\therefore \angle ABD>\angle ACB$,
但 $\angle ABC>\angle ABD$,
(終決) $\therefore \angle ABC>\angle ACB$.
(反定理) $\angle ABC>\angle ACB$ ナルヰ $AC>AB$ ヲ證スベシ.
AC ハ AB ヨリ小ナルカ等シキカ大ナルカノ三ツノ場合ヨリ外ニ無シ.
然ルニ $AC<AB$ ナラズ何トナレバ若シ $AC<AB$ トスレバ $\angle ABC<\angle ACB$ ヲ得,假設ニ反スレハナリ. (本定理)
又 $AC=AB$ ナラズ何トナレバ若シ然ルヰハ $\angle ABC=\angle ACB$ トナルヲ以テナリ. (定理六)
$\therefore AC>AB$.

定理九

44. 三角形ノ貳邊ノ和ハ他ノ壹邊ヨリ大ナリ.
(特設) $\triangle ABC$ ニ於テ $AB+BC>AC$.
(證明) AB ヲ D 迄引長シ $BD=BC$ トシ DC ヲ連結ス

然ルキ $BD=BC$,　（作法）

$\therefore$ $\angle BCD=\angle BDC$.　（定理六）



但シ　$\angle ACD>\angle BCD$,

$\therefore$ $\angle ACD>\angle BDC$,

$\therefore$ $AD>AC$.　（定理八）

但シ $AD=AB+BD$

$=AB+BC$.　（作法）

（終決）　$\therefore$ $AB+BC>AC$.

45. 推論 三角形ノ貳邊ノ差ハ他ノ壹邊ヨリ小ナリ.

定　理　拾

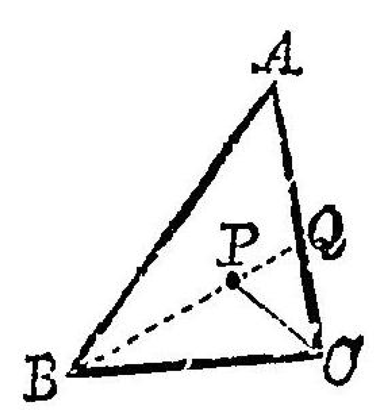
46. 三角形ノ底邊ノ兩端ヨリ形內ノ壹點ニ引ク兩直線ノ和ハ他ノ貳邊ノ和ヨリ小ニシテ頂角ヨリ大ナル角ヲ有ツ.

（特說）$\triangle ABC$ ノ形內壹點ヲ P トス,

然ルキ

$PB+PC<AB+AC$,

及ヒ　$\angle BPC>\angle A$.



（證明）BP ヲ引長シ Q ニ於テ AC ニ會セシム.

然ルキ $\triangle ABQ$ ニ於テ

$AB+AQ>QP+PB$,　（定理九）

又 $\triangle CPQ$ ニ於テ $QP+QC>PC$,　（定理九）

$\therefore$ $AB+AQ+QC+QP>PB+PC+QP$,

但シ　$AQ+QC=AC$,

$\therefore$ $AB+AC>PB+PC$.

又 $\triangle BAQ$ ニ於テ $\angle PQC>\angle A$,　及ビ

$\triangle PQC$ ニ於テ $\angle BPC>\angle PQC$.　（定理七）

$\therefore$ $\angle BPC>\angle A$.

定理拾壹

47. 兩三角形ノ各兩邊ガ相等シキキ其頂角ノ大ナルモノハ其底邊大ナリ,又反定理ヲ得.

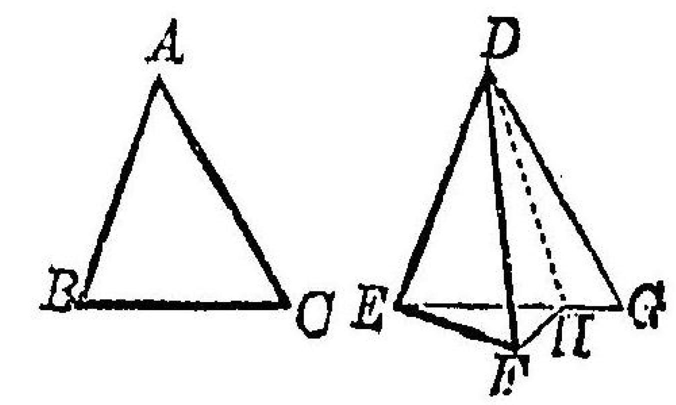
（特說）$\triangle ABC$, $\triangle DEF$

ニ於テ　$AB=DE$,

$AC=DF$,

$\angle BAC>\angle EDF$,

然ルキ　$BC>EF$.



（證明）D 點ノ上ニ A 點ヲ置キ AB ヲ DE ニ合セシム,

而シテ　$AB=DE$,　（假設）

故ニ B 點ハ E 點ニ合ス.

而シテ　$\angle BAC>\angle EDF$,　（假設）

故ニ AC ハ DF ノ外ニ於テ DG ニ落ツ而シテ BC ハ EG ニ落ツ

DH ヲ以テ $\angle FDG$ ヲ貳等分シ H ニ於テ EG ニ會セシム,

而シテ FH ヲ連結ス.

然ルキ $\triangle FDH$, $\triangle GDH$ ニ於テ

$DF=DG$　（假設）

DH ハ共通

$\angle FDH=\angle GDH$,　（作法）

$\therefore$ $\triangle FDH\equiv\triangle GDH$,　（定理四）

$\therefore$ $HF=HG$.

$\triangle EHF$ ニ於テ　$EH+HF>EF$.　（定理九）

即　$EG>EF$.

（終決）　$\therefore$ $BC>EF$.

（反定理）$AB=DE$, $AC=DF$, $BC>EF$,

然ルトキ $\angle BAC>\angle EDF$ ナルヿヲ證スベシ.

$\angle BAC$ ハ $\angle EDF$ ヨリ小ナルカ或ハ等シキカ或ハ大ナラザルベカラズ.

然ルニ $\angle BAC<\angle EDF$ ナラズ何トナレバ若シ然ルトキハ $BC<EF$ ナルヲ以テナリ, (本定理)

又 $\angle BAC=\angle EDF$ ナラズ何トナレバ若シ然ルトキハ $BC=EF$ ナルヲ以テナリ, (定理四)

$\therefore\quad BAC>\angle EDF.$

定理拾貳

48. 兩三角形ガ三邊各相等シキトキハ全等形ナリ.

(特說) $\triangle ABC,\triangle DEF$ ニ於テ $AB=DE, AC=DF, BC=EF,$ 然ルトキ $\triangle ABC\equiv\triangle DEF.$

(證明) $\angle A$ ハ $\angle D$ ヨリ大ナルカ或ハ小ナルカ或ハ等シカラザルベカラズ.

然ルニ $\angle A>\angle D$ ナラズ何トナレバ若シ然ルトキハ

$BC>EF,$ (定理拾壹)

又 $\angle A<\angle D$ ナラズ何トナレバ若シ然ルトキハ

$BC<EF,$ (定理拾壹)

$\therefore\quad \angle A=\angle D.$

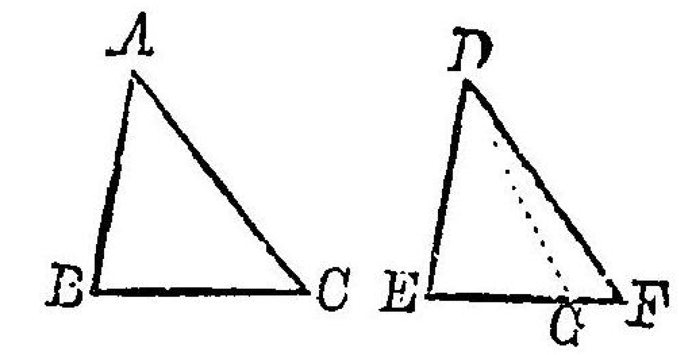
(終決) $\therefore\quad \triangle ABC\equiv\triangle DEF.$ (定理四)

定理拾三

49. 兩三角形ガ各兩角相等シク又等角ニ對スル各壹邊相等シキトキハ全等形ナリ.

(特說) $\triangle ABC,\triangle DEF$ ニ於テ $\angle B=\angle E, \angle C=\angle F, AB=DE,$

然ルトキ $\triangle ABC\equiv\triangle DEF.$



(證明) A 點ヲ D 點ノ上ニ置キ AB ヲ DE ニ合セシム,

而シテ $AB=DE,$ (假設)

故ニ B ハ E ニ合ス.

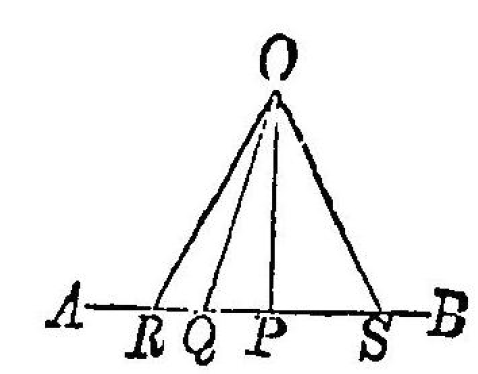
而シテ $\angle B=\angle E,$ (假設)

故ニ BC ハ EF ニ合スベシ, 而シテ C ハ F ニ合スベシ何トナレバ C ガ若シ G ノ如キ處ニ落ツルトキハ $\angle ACB=\angle DFE,$ (假設) ナルガ故ニ $\angle DGE=\angle DFE$ トナリテ不合理ナレバナリ. (定理七)

(終決) $\therefore\quad \triangle ABC\equiv\triangle DEF.$

定理拾四

50. 壹定點ヨリ定直線ニ會スル諸直線ノ內.垂線ガ最モ短カク,垂線ト等角ヲナス直線ハ相等シク,垂線ト大ナル角ヲナス直線ハ小ナル角ヲナス直線ヨリ大ナリ.



(特說) O ヲ定點. AB ヲ定直線トシ OP ヲ垂線トシ OQ ヲ斜線トス,

然ルトキ第壹ニ $OP<OQ$ ヲ證ス.

(證明) $\triangle OPQ$ ニ於テ

$\angle OQP<\angle OPS,$ (定理七)

但 $\angle OPS=\angle OPQ,$ (假設)

$\therefore\ \angle OQP<\angle OPQ,\quad \therefore\ OP<OQ.$ (定理八)

第貳ニ $\angle POR=\angle POS$ ナルトキ $OR=OS$ ヲ證ス.

$\triangle OPR, \triangle OPS$ ニ於テ $\angle POR=\angle POS, \angle OPR=\angle OPS$ 及ヒ OP ハ共通ナリ $\therefore\ \triangle OPR\equiv\triangle OPS,$ (定理五)

$\therefore\quad OR=OS.$

第三ニ OR ハ OQ ヨリモ垂線ト大ナル角ヲナス𬼀
$OR>OQ$ ヲ證ス.

$\triangle OQP$ ニ於テ $\angle OQR>\angle OPQ=R\llcorner$,　（定理七）
又 $\triangle ORP$ ニ於テ $\angle ORQ<\angle OPS=R\llcorner$,　（定理七）
$\therefore\quad OQR>\angle ORQ,\quad \therefore\quad OR>OQ.$

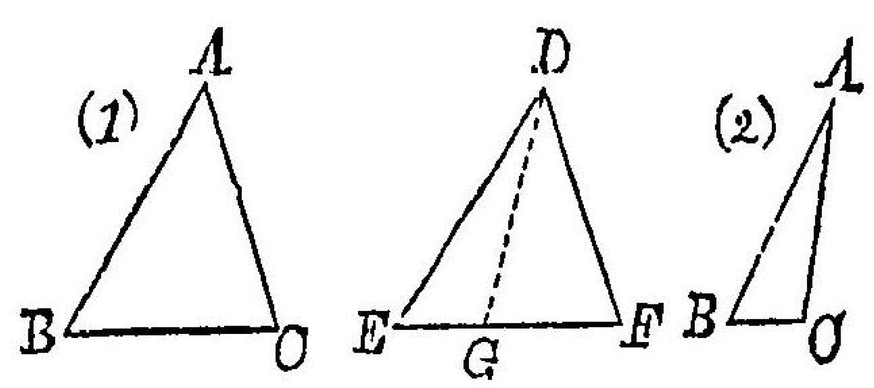
51. 推論壹　直線外ノ壹點ヨリ其線ニ唯壹ツノ垂線ヲ引クヿヲ得.

52. 推論貳　直線外ノ壹點ヨリ其線ニ唯貳ツノ相等シキ斜線ヲ引クヿヲ得.

53. 推論三　等脚三角形ノ頂角ヨリ底邊ニ引ク垂線ハ底邊及ヒ頂角ヲ貳等分ス.

定理拾五

54. 兩三角形ガ各貳邊相等シク其各壹等邊ニ對スル各壹角相等シキ𬼀他ノ壹等邊ニ對スル各角ハ相等シキカ或ハ補角ヲナス而シテ最初ノ場合ニ於テハ兩形ハ全等形ナリ.



（特規）　$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ $BA=ED$, $CA=FD$, $\angle B=\angle E$,
然ル𬼀 $\angle C=\angle F$ 或ハ $\angle C+\angle F=2R\llcorner$.

（證明）　$\angle A$ ハ $\angle D$ ニ等シキカ或ハ等シカラザルカノ他ニ無シ.

（1）圖ノ如ク $\angle A=\angle D$ ナル𬼀ハ定理四ニヨリテ
$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$,　即　$\angle C=\angle F$.

（2）圖ノ如ク $\angle A$ ガ $\angle D$ ニ等シカラザル𬼀ハ A 點ヲ D 點ノ上ニ置キ AB ヲ DE ニ合セシム然ル𬼀假設ニヨリ
$AB=DE$ ナルガ故ニ B 點ハ E 點ニ合ス,
而シテ假設ニヨリ $\angle B=\angle E$ ナルガ故ニ BC ハ EF ニ合シ而シテ F 點ハ G ノ如キ點ニ於テ EF ニ落ツベシ,
而シテ假設ニヨリ $AC=DF$　$\therefore\ DG=DF$,
$\therefore\quad \angle DFG=\angle DGF$　（定理六）
但シ $\angle DGF$ ハ $\angle DGE$ ト補角ヲナス即チ $\angle ACB$ ト補角ヲナス,　$\therefore\quad \angle F+\angle C=2R\llcorner$.

55. 推論　本定理ニ於テ兩三角形ガ全等形ナル𬼀ノ假設ハ次ノ如シ,

（1）　既知兩等角ガ直角カ或ハ鈍角ナル𬼀.
何トナレバ然ル𬼀ニ他ノ角ハ鋭角ナラザルベカラズ (42.) 故ニ他ノ兩角ハ鋭角ナルヲ以テ補角ヲナス能ハズシテ乃チ相等シカラザルヲ得ズ.

（2）　兩等邊ニ對スル兩角ガ雙方鋭角或ハ鈍角ナルカ或ハ其壹ツガ直角ナル𬼀.

（3）　既知角ニ對スル壹邊ガ他ノ既知壹邊ヨリ小ナラザル𬼀.
何トナレバ然ル𬼀既知角ハ他ノ各角ヨリモ必ズ小ナルコト無キヲ以テ他ノ兩角ハ雙方鋭角トナリ互ヒニ補角ヲナス能ハズ故ニ相等シカラザルヲ得ズ.

例　題

1. 等脚三角形ノ底邊ノ兩端ヨリ兩邊ノ中央點ニ引ク貳直線ハ相等シ.

2. 等脚三角形ノ底角ヲ貳等分シテ對邊ニ會スル貳線相等シ.

3. 等脚三角形ノ底角ノ貳等分線ト底邊ニテ成レル三角形モ亦タ等脚三角形ナリ.

4. 貳ツノ直角三角形ガ各貳邊相等シケレバ全等形ナリ.

5. 直線 AB ノ中央點 D ニ立ツル垂線ノ外ニ壹點 P ヲ設ケ PA, PB ヲ連結ス然ルキ PA ガ垂線ヲ截レバ $PA>PB$.

6. 同底ナル貳ツノ等脚三角形ノ兩頂角ノ連結線ヲ引長シテ底邊ニ會セシムレバ底邊ト直角ヲナス.

7. 四直線ニテ圍ミタル圖形ノ壹邊ハ他ノ三邊ノ和ヨリ小ナリ.

8. 三角形ノ底邊ノ中央點ト頂點ノ連結線ハ他ノ貳邊ノ半和ヨリ小ナリ.

9. 三角形ノ三ツノ中央線ノ和ハ周邊ヨリ小ナリ.

(註) 三角形ノ中央線 (Medial Line) トハ壹角頂ヨリ對邊ノ中央點ニ引ク直線ヲイフ.

10. 三角形ノ各角ノ貳等分線ハ壹點ニ會ス.

11. 三角形ノ各邊ノ中央點ニ立ツル垂線ハ壹點ニ會ス.

12. 三角形內ノ壹點ヨリ各角ニ引ク三直線ノ和ハ周邊ヨリハ小ニシテ周邊ノ半和ヨリ大ナリ.

(註) 直線形ノ周邊 (Perimeter) トハ其邊ノ和ヲイフ.

13. AB, BC. CD, DA ノ四邊ニテ圍ム直線形ニ於テ其周邊ハ $AC+BD$ ヨリ大ニシテ $2(AC+BD)$ ヨリ小ナリ.

14. $\triangle ABC$ ノ壹邊 BC ノ中央點ヲ D トス而シテ $AB>AC$ ナルキハ $\angle ADB>R\llcorner$.

15. $\triangle ABC$ ノ A 角ヲ貳等分シ BC ニ D ニ於テ會セシム而 $AB>AC$ ナルキハ $DB>DC$.

第三節 平行線

定 義

56. 平行線 (Parallel lines) 同平面ニアル諸直線ガ其各ノ雙方ヲ引長スルモ相交ハラザルキ此諸直線ハ互ヒニ平行ストイフ.

57. 多角形 (Polygon) トハ三ツヨリ多キ直線ニテ平面ヲ圍ミタル直線形ヲイフ.

多角形ノ邊ノ引長線ガ常ニ其形ノ同側ニアルキ之ヲ凸多角形トイヒ否ラザルモノハ凹多角形トイフ.

多角形ガ各角相等シク又各邊相等シキキ正多角形トイフ.

四角形 (Quadrilateral) トハ四邊ヲ有スル多角形ヲイフ.

五角形 (Pentagon) トハ五邊ヲ有スル多角形ヲイフ.

六角形 (Hexagon) トハ六邊ヲ有スル多角形ヲイフ.

58. 對角線 (Diagonal) トハ共通邊ヲ有セザル多角形ノ兩角頂ヲ連結スル直線ヲイフ.

59. 面積 (Area) 即チ圖形ノ面積トハ其圖形ガ圍ミタル平面ノ空間ヲイフ.

60. 兩平行四邊形 (Trapezium) トハ對邊ノ壹對ガ平行スル四角形ヲイフ.

61. 平行四邊形 (Parallelogram) トハ對邊ガ凡ベテ平行スル四角形ヲイフ.

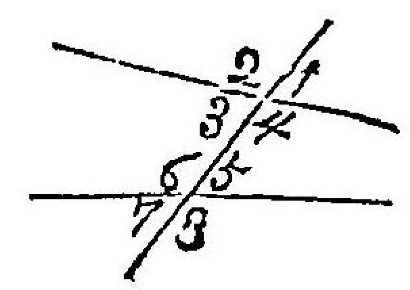
直方形 (Rectangle) トハ各角ガ直角ナル平行四邊形ヲイフ.

正方形 (Square) トハ各邊ガ等シキ直方形ヲイフ.

斜形 (Rhombus) トハ各邊ガ等シキ平行四邊形ヲイフ.

62. 壹直線ガ他ノ貳直線ヲ截ルトキ八ツノ角ヲナス而シテ其關係ノ名稱ヲ次ノ如ク定ム.

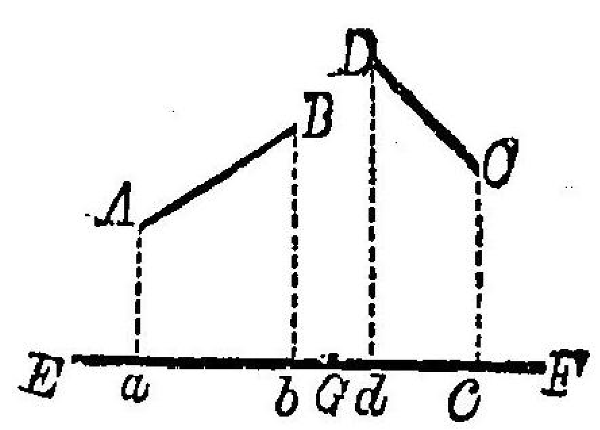
1, 2, 7, 8 ノ四角ヲ外角 (Exterior angles), 3, 4, 5, 6 ノ四角ヲ內角 (Interior angles) トイフ.



又 4, 6 或ハ 3, 5 ヲ錯角 (Alternate angles) トイヒ 1, 5 或ハ 2, 6, 或ハ 3, 7 或ハ 4, 8 ヲ臨角 (Corresponding angles) トイフ.

63. **正射影** (Orthogonal projection) 壹直線ガ他ノ壹直線上ニ於ケル正射影トハ其直線ノ兩端ヨリ他ノ直線ニ引ク兩垂線ニヨリテ他ノ直線ヲ分ツ所ノ部分ヲイフ.

Aa, Bb 及ヒ Dd, Cc ガ EF ノ垂線ナルトキ ab ハ EF 上ニ於ケル AB ノ正射影ニシテ dc ハ EF 上ニ於ケル DC ノ正射影ナリ.



但シ EF 線ハ無限長ノ直線ナリトス何トナレバ EF ガ若シ FG ノ如キ有限ノ線トスレハ EF 上ニ於ケル AB ノ正射影ヲ作ル能ハザルヲ以テナリ,

故ニ EF ハ任意ニ引長シ得ベキ直線ナリ.

幾何公理

64. (3) 壹定點ヲ過ギテ壹定直線ニ平行スル直線ハ唯壹ツノミナリ.

定理拾六

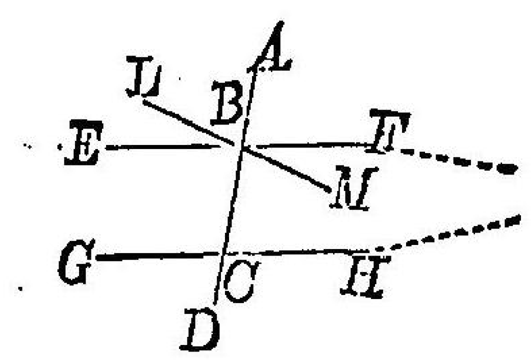
65. 貳直線ガ他ノ壹直線ニテ截ラレ其錯角相等シキハ其貳直線ハ平行ス.

(反定理)　又其貳直線ガ平行スルトキハ其錯角ハ相等シ.

(特說)　EF 及ヒ GH ガ壹直線 $ABCD$ ニテ截ラレ

$\angle EBC = \angle BCH$,

然ルトキ　$EF \parallel GH$.



(證明)　何トナレバ若シモ EF, GH ガ平行セザルトキ即チ F, H ノ方ニ於テ相會スルトスレハ此貳直線ハ BC ト共ニ三角形ヲナスベシ,

然ルトキハ　外角 $EBC >$ 內對角 BCH.　(定理七)

然ルニ　$\angle EBC = \angle BCH$,　(假設)

故ニ EF 及ヒ GH ハ F, H ノ方ニ於テ相會セズ.

同法ニヨリ此貳直線ハ E, G ノ方ニ於テモ相會セザルコトヲ知ル,

$\therefore \quad EF \parallel GH$.　(56.)

(反定理)　EF 及ヒ GH ガ $ABCD$ ニテ截ラレ $EF \parallel GH$ ナルトキ $\angle EBC = \angle BCH$ ナル證ヲ求ムベシ.

若シ $\angle EBC = \angle BCH$ ナラザルトスレバ B ヲ過ギテ LM ヲ引キ $\angle LBC = \angle BCH$ ニ作ルベシ,

然ルトキハ本定理ニヨリ　$LM \parallel GH$.

但シ　$EF \parallel GH$,　(假設)

是レ不合理ナリ.　(公理3)

$\therefore \quad \angle FBC = \angle BCH$.

66. **推論壹**　壹直線ガ平行貳直線ヲ截ルトキハ

(1) 應角ハ相等シ,

(2) 壹直線ノ同側ニアル兩內角或ハ兩外角ノ和ハ $2R\llcorner$ ニ等シ.

又此反定理ヲ得.

67. 推論貳 壹直線ガ他ノ貳直線ヲ截ルトキ錯角或ハ應角ノ壹對ガ相等シキカ或ハ兩內角ノ和或ハ兩外角ノ和ガ $2R\llcorner$ ニ等シキカ四場合ノ內其壹ツノ場合ナルトキハ他ノ場合ヲ得ベシ.

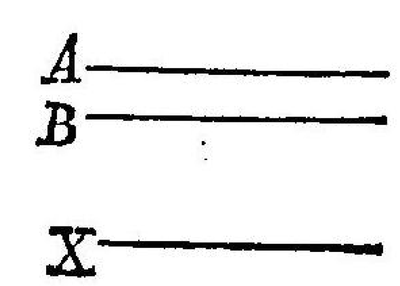
定理拾七

68. 同ジ直線ニ平行スル兩直線ハ互ヒニ平行ス.

(特說) A 及ヒ B ノ兩直線ガ X ニ平行スルトキ A 及ヒ B ハ互ヒニ平行ス.

(證明) 若シ A, B ガ平行セザルトキハ壹點ニ於テ相交ハルベシ,

然ルニ A 及ヒ B ハ X ニ平行ス, (假設) 是レ不合理ナリ,



(幾何公理3)

$\therefore$ A ハ B ニ平行ス.

69. 餘論 兩平行線及ヒ之ヲ截ル所ノ壹直線ハ三角形ノ特別ナル場合ト考フルヿヲ得ベシ即チ壹直線ヲ底邊トシ兩平行線ヲ貳邊トシ其頂角ハ無限大ノ距離ニアル三角形ト考フルヿヲ得ルナリ.

三角形ノ外角ハ內對角ヨリ大ナリトイフ定理七ヨリシテ直チニ外角ガ內對角ト等シキ三角形ヲナサズトイフ反否定理ヲ得ベシ即チ此反否定理ハ三角形ノ兩邊ガ平行スル特別ノ場合ナリ.

定理拾八

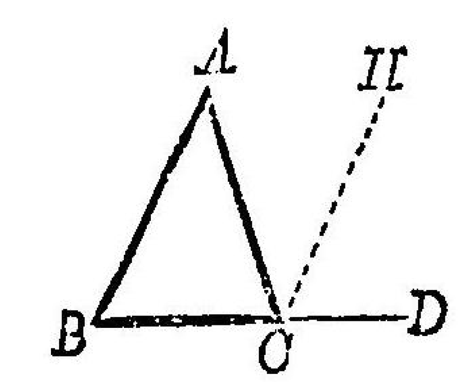
70. 三角形ノ外角ハ他ノ兩內角ノ和ニ等シ又三角形ノ內角ノ和ハ貳直角ニ等シ.

(特說) $\triangle ABC$ ニ於テ

$\angle ACD=\angle A+\angle B,$

又

$\angle A+\angle B+\angle ACB=2R\llcorner.$



(證明) AB ニ平行シテ CH ヲ引ク然ルトキ $\angle ACH=\angle A,$ (定理拾六反定理)

又 $\angle HCD=\angle B$ (66. 推論)

$\therefore \angle ACH+\angle HCD=\angle A+\angle B,$

$\therefore \angle ACD=\angle A+\angle B.$

又 $\angle A+\angle B+\angle ACB=\angle ACD+\angle ACB$

$\therefore \angle A+\angle B+\angle ACB=2R\llcorner.$ (定理貳)

71. 推論 直角三角形ノ兩銳角ノ和ハ直角ニ等シ.

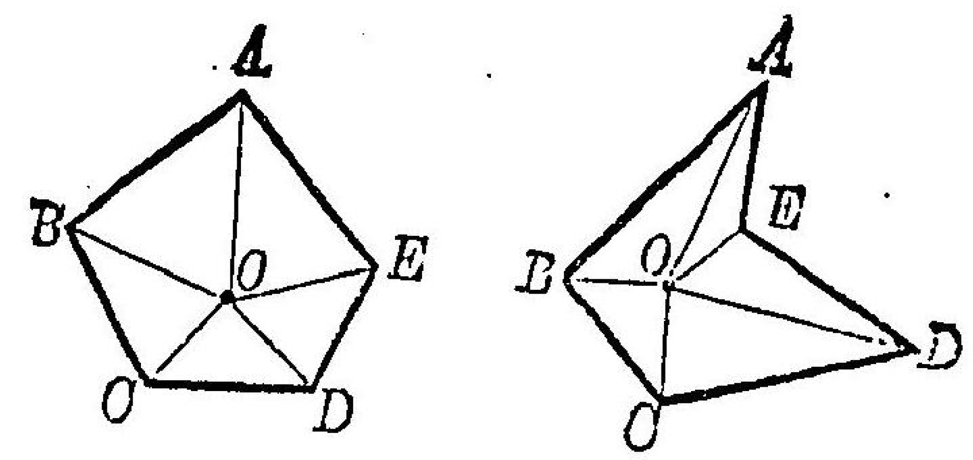
定理拾九

72. 或多角形ノ內角ノ和ハ其邊數 2 倍ヨリ 4 少ナキ直角ニ等シ.

(特說) $ABCDE$ ナル多角形ニ於テ邊數ヲ n トスレバ

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=(2n-4)R\llcorner.$

(證明) 多角形內ニ於テ或壹點 O ヲ設ケ OA, OB, OC, OD, OE ヲ連結スレバ O ヲ共通ノ頂角トスル三角形ヲ得ベシ其三角形ノ數ハ邊數丈ケニ等シ.



而シテ各三角形ノ內角ノ和ハ $2R∟$ ニ等シ，　　　　(定理拾八)
故ニ凡ヘテノ三角形ノ內角ノ和 $=2nR∟$.
又 O ニ於テ頂角ノ和 $=4R∟$.　　　　(27. 推論)

$\therefore$ 多角形內角ノ和 $=2nR∟-4R∟$.

73. 推論 凸多角形ノ外角ノ和ハ $4R∟$ ニ等シ.

凸多角形ノ各邊ノ各壹方ヲ引長スレハ外角ヲ生ズベシ而シテ各內角ト外角ノ和ハ $2R∟$ ニ等シ，

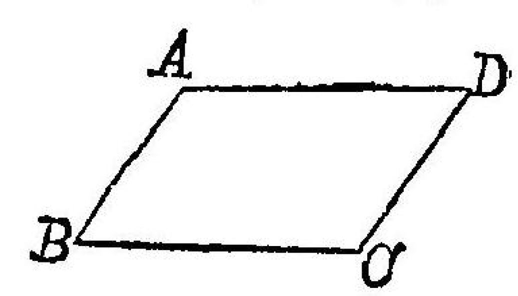
$\therefore$ 內角ト外角ノ總和 $=2nR∟$,

本定理ニヨリ　　內角ノ和 $=2nR∟-4R∟$,

$\therefore$ 外角ノ和 $=4R∟$.

定理貳拾

74. 平行四邊形ノ隣接角ハ補角ヲナス而シテ對角ハ相等シ



(特說)　平行四邊形 $ABCD$ ニ於テ
$\angle A+\angle B=2R∟$,　$\angle A=\angle C$.

(證明)　$AD \parallel BC$,　　　　(假設)

$\therefore$ $\angle A+\angle B=2R∟$.

又　　$AB \parallel CD$,　　　　(假設)

$\therefore$ $\angle B+\angle C=2R∟$,　$\therefore$ $\angle B+\angle C=\angle A+\angle B$,

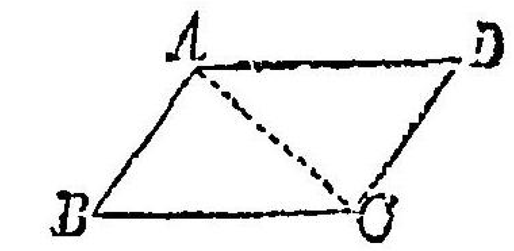
$\therefore$ $\angle C=\angle A$.

75. 推論 各貳邊平行スル兩角ハ相等シキカ或ハ補角ヲナス

定理廿壹

76. 平行四邊形ノ對邊ハ相等シ.

(反定理)　各對邊相等シキ四角形ハ平行四邊形ナリ.



(特說)　平行四邊形 $ABCD$ ニ於テ $AB=CD$, $AD=BC$.

(證明)　AC ヲ連結ス，

然ルトキ $\triangle ABC$, $\triangle CDA$ ニ於テ

$$\left.\begin{array}{ll}\angle BAC=\angle DCA, & (65.\text{反定理})\\ \angle BCA=\angle DAC, & (65.\text{反定理})\\ AC\ \text{ハ共通} & \end{array}\right\}\ \therefore \triangle ABC\equiv\triangle ACD,\ (\text{定理五})$$

$\therefore$ $AB=CD$,　$BC=AD$.

(反定理)　$AB=CD$ 及ヒ $BC=AD$ ナルトキ□$ABCD$ ハ平行四邊形ナルコトヲ證スベシ.

$\triangle ABC$, $\triangle CDA$ ニ於テ三邊各相等シ，　　　　(假設)

$\therefore$ $\triangle ABC\equiv\triangle CDA$,　　　　(定理拾貳)

$\therefore$ $\angle BAC=\angle DCA$,　$\therefore$ $AB \parallel CD$,　　(定理拾六)

又　$\angle BCA=\angle DAC$,　$\therefore$ $BC \parallel AD$.　　(定理拾六)

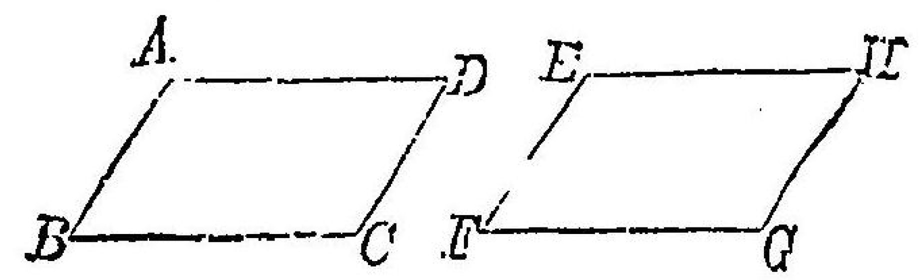
77. 推論 平行四邊形ノ對角線ハ全形ヲ貳等分ス.

定理廿貳

78. 貳ツノ平行四邊形カ隣接貳邊ト其夾角各相等シキトキハ全等形ナリ.

(特說)　$ABCD$, $EFGH$ ナル貳ツノ平行四邊形ニ於テ
$AB=EF$, $BC=FG$, $\angle B=\angle F$,

然ルトキ　　□$ABCD\equiv$□$EFGH$.



(證明) B 點ヲ F 點ノ上ニ置キ BA ヲ FE ニ合セシムレバ假設ニヨリ $BA=FE$ ナルガ故ニ A ハ E ニ合スベシ,
又 $\angle B=\angle F$ ニシテ $BC=FG$ ナルガ故ニ BC ハ FG ニ合シ C ハ G ノ上ニ落ツベシ.

假設ニヨリ $AD \parallel BC$ ナルガ故ニ AD ハ EH ニ合スベシ. (公理3)

同法ニヨリ CD ハ GH ニ合スベシ.

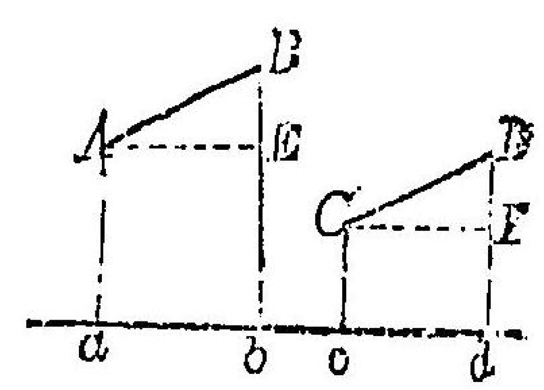
(終決) $\therefore$ $\square ABCD \cong \square EFGH$.

定理廿三

79. 兩直線ガ相等シク且ツ平行スルトキ他ノ壹直線上ニ於ケル其正射影ハ相等シ.

(反定理) 平行貳直線ガ他ノ壹直線上ニ於ケル正射影相等シキトキハ其貳直線ハ相等シ.

(特設) $AB=CD$,
$AB \parallel CD$,
然ルトキ $ab=cd$.



(證明) 壹直線 $abcd$ ニ平行シテ AE, CF ヲ引ク
然ルトキ $AB \parallel CD$ ナルガ故ニ $\angle BAE=\angle DCF$ (75.)

又 $BE \parallel DF$, (假設) $\therefore$ $\angle ABE=\angle CDF$; 故ニ定理五ニヨリ $AE=CF$ $\therefore$ $ab=cd$.

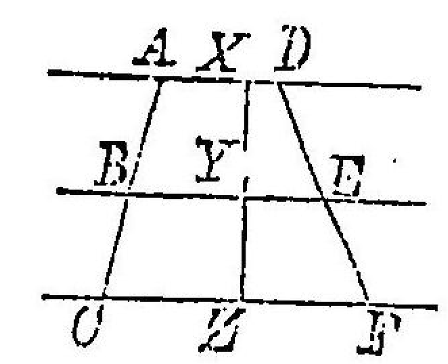
反定理モ同法ニヨリテ得ラルベシ.

定理廿四

80. 壹直線ガ平行三直線ニヨリテ等長ニ截ラルヽトキハ他ノ直線モ其平行三直線ニテ等長ニ截ラル.

(特設) ABC ガ AD, BE 及ヒ CF ノ平行三直線ニヨリテ截ラレ $AB=BC$, 然ルトキ DEF ナル他ノ直線モ

$DE=EF$.



(證明) 平行線ニ垂線 XYZ ヲ引ク,
然ルトキ $AB=BC$, (假設)
$\therefore$ $XY=YZ$, (定理廿三)
$\therefore$ $DE=EF$. (同反定理)

81. 推論 三角形ノ壹邊ノ中央點ヨリ底邊ニ平行シテ引ク直線ハ他ノ壹邊ヲ貳等分ス.

例 題

1. 等脚三角形ノ頂角ノ外角ノ貳等分線ハ底邊ニ平行ス.

2. 兩平行四邊形ノ平行セザル貳邊ガ相等シキトキハ其對角ハ互ヒニ補角ヲナス.

3. 平行四邊形ノ兩對角線ハ互ヒニ相交リテ貳等分トナル.

4. 菱形ノ兩對角線ハ直角ニ相交ハリ互ヒニ貳等分トナル.

5. 平行四邊形ノ鈍角ヲ連結スル對角線ハ鋭角ヲ連結スル對兩線ヨリ小ナリ.

6. 平行四邊形ノ兩對角線ノ交點ヲ過ギテ對邊ニ界セラルヽ直線ハ交點ニテ貳等分セラル.

7. 直方形ノ兩對角線ハ相等シ.

8. 直角三角形ノ直角點ト斜邊ノ中央點ヲ連結スル直線ハ斜邊ノ半ニ等シ.

9. 直角三角形 ABC ノ直角點ヲ C トシ BC ニ垂直ニ BD ヲ引キ又 AD ヲ引キ E ニ於テ BC ニ交ハラシム而シテ $ED=2AB$ ナルヰ $\angle DAC=\frac{1}{3}\angle BAC$ ナリ.

10. 兩平行四邊形ノ平行セザル貳邊ノ中央點ヲ連結スル直線ハ他ノ貳邊ニ平行シ且ツ他ノ貳邊ノ半和ニ等シ.

11. 三角形ノ貳邊ノ中央點ヲ連結スル直線ハ底邊ニ平行シ且ツ底邊ノ半ニ等シ.

12. 平行四邊形 $ABCD$ ノ AD 邊ノ中央點ヲ E トシ BC 邊ノ中央點ヲ F トスレハ BE, FD ハ對角線 AC ヲ三等分ス.

13. 三角形ノ三中央線ハ壹點ニ於テ相會ス.

14. 四角形ノ各隣邊ノ中央點ノ連結線ハ平行四邊形ヲナス.

15. 四角形ノ各對邊ノ中央點ノ連結線ハ兩對角線ノ中央點ノ連結線ノ中央點ニ於テ相交ハル.

16. 等脚三角形ノ底邊ニ於ケル或壹點ヨリ各邊ニ平行シテ各邊ニ會スル兩直線ノ和ハ壹邊ノ長ニ等シ.

17. 等脚三角形ノ底邊ニ於ケル壹點ヨリ各邊ニ引ク兩垂線ノ和ハ常數ナリ.

18. 同上底邊ノ引長線ノ壹點ヨリ各邊ニ引ク兩垂線ノ差モ常數ナリ.

19. 等邊三角形ノ内ノ或壹點ヨリ三邊ニ引ク垂線ノ和ハ常數ナリ.

20. 等脚三角形ノ頂角ガ底角ノ 2 倍ナルヰハ其頂角ハ直角ニ等シ.

21. 等邊三角形ノ兩底角ノ貳等分線ノ交點ヨリ他ノ貳邊ニ平行シテ引キタル貳直線ハ底邊ニ會シテ等邊三角形ヲナス.

22. 三角形ノ外角ノ貳等分線ト內對角ノ貳等分線ハ他ノ壹角ノ半ニ等シキ角ヲ以テ相交ハル.

23. 三角形ノ頂角ヨリ底邊ニ引ク垂線ト頂角ノ貳等分線ノ交角ハ兩底角ノ半差ニ等シ.

24. 四角形ノ兩對角ノ貳等分線ノ交角ハ他ノ兩對角ノ半差ニ等シ.

25. 七角形ノ內角ノ和ハ $10R\llcorner$ ニ等シ.

26. 正八角形ノ各內角ハ $\frac{3}{2}R\llcorner$ ニ等シ.

27. 正五角形ノ各邊ノ引長線ノ交角ハ $\frac{2}{5}R\llcorner$ ニ等シ.

28. 兩角ノ各貳邊ガ互ヒニ垂直ヲナスヰ其兩角ハ相等シキカ或ハ互ヒニ補角ヲナス.

29. 正方形 $ABCD$ ノ四邊 AB, BC, CD, DA ニ於テ順次ニ E, F, G, H ノ四點ヲ設ケ $AE=BF=CG=DH$ トスレハ $EFGH$ ハ正方形ナリ.

30. 直方形內ノ壹定點ヨリ壹彈丸ヲ投ジ各邊ヲ打チテ再ビ原點ニ返ヘルヰ其彈道ノ長サハ對角線ノ 2 倍ナリ,
但シ彈丸ハ各邊ヲ打チテ再ヒ等角ニ反發スルモノトス.

31. 三角形ノ各角ヨリ對邊ニ引ク三垂線ハ壹點ニ會ス.

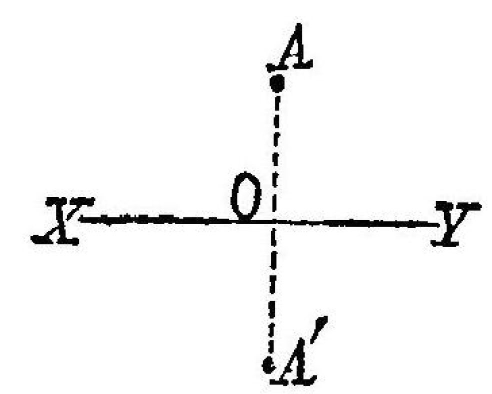
第四節 等勢圖形

定義

82. 等勢圖形 (Symmetry) ノ定義ヲ下ニ示ス.

(第壹) 軸ニ關係スル等勢圖形.

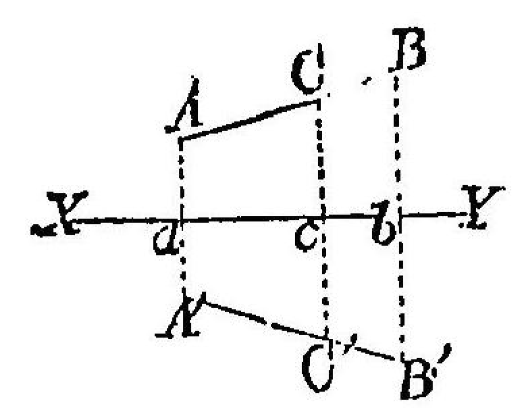
(1) 貳點ノ連結線ヲ定直線ニテ直角ニ貳等分スル片其貳點ハ其定直線ニ關係シテ等勢トイフ而シテ定直線ヲ軸トイフ.



例ヘバ A, A' 貳點ハ XY ニ關係シテ等勢ナリ何トナレバ $AA' \perp XY$ 及ヒ $AO=OA'$.

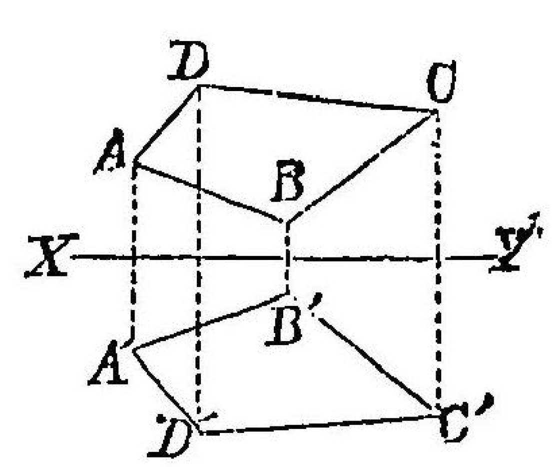
(2) 貳線ノ各點ガ定直線ニ關係シテ等勢ナル片其直線ハ其定直線ニ關係シテ等勢ナリ.

例ヘバ AB ノ各點 A, B, C ガ $A'B'$ ノ各點 A', B', C' ト XY ニ關係シテ等勢ナル片 AB, $A'B'$ ハ XY ニ關係シテ等勢ナリ.



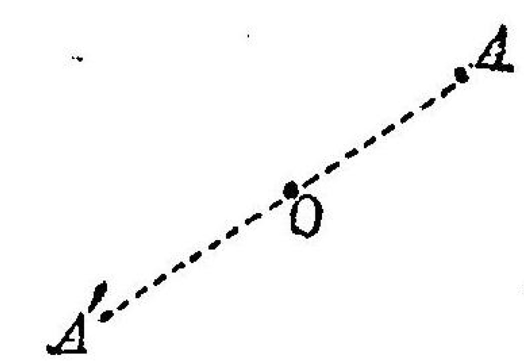
(3) 兩平面圖形ノ各邊ガ定直線ニ關シテ等勢ナル片其兩平面圖形ハ其定直線ニ關係シテ等勢ナリ.

例ヘバ AB, BC, CD, DA ガ順次ニ $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ ト XY ニ關係シテ等勢ナル片 $ABCD$ 及ヒ $A'B'C'D'$ ノ兩圖形ハ XY ニ關係シテ等勢ナリ.



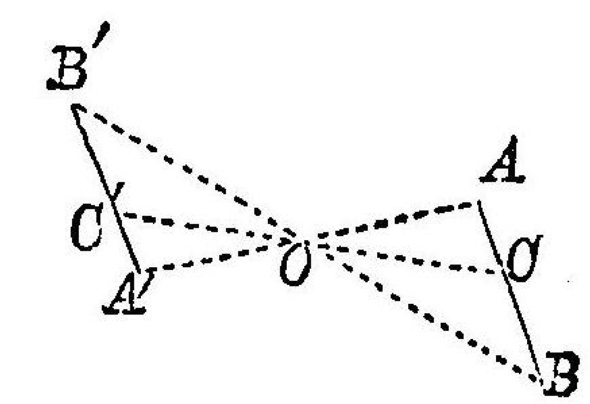
(第貳) 中心ニ關係スル等勢圖形.

(1) 兩點ノ連結線ガ壹定點ニヨリテ貳等分セラルヽ片其兩點ハ其定點ニ關係シテ等勢トイフ而シテ其定點ヲ等勢ノ中心トイフ.



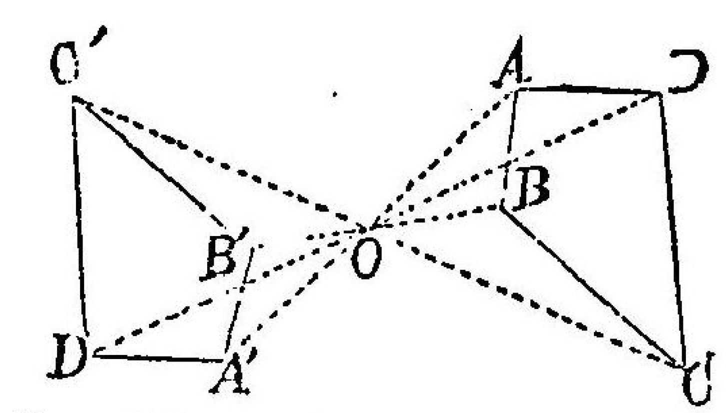
$AO=OA'$ ナル片 A, A' ハ O ニ關係シテ等勢ナリ.

(2) 兩線ノ各點ガ壹定點ニ關係シテ等勢ナル片其兩線ハ其定點ニ關係シテ等勢トイフ.



$OA=OA'$, $OB=OB'$, $OC=OC'$ ナル片 AB, $A'B'$ ハ O ニ關係シテ等勢ナリ.

(3) 兩平面圖形ノ各邊ガ壹定點ニ關係シテ等勢ナル片其兩平面圖形ハ其定點ニ關係シテ等勢トイフ.

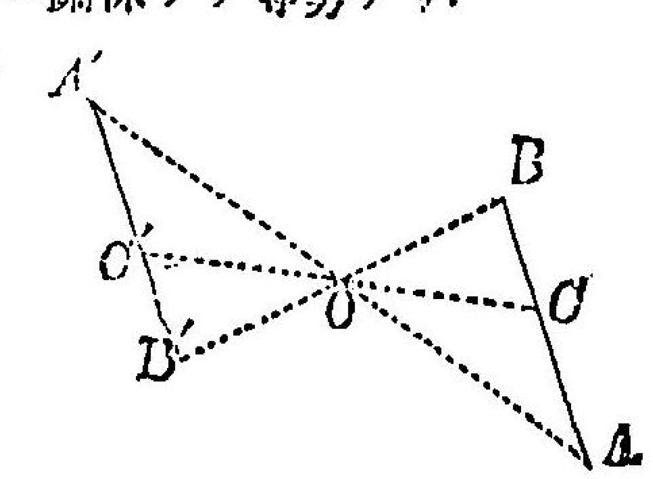


AB, BC, CD, DA ガ順次ニ $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ ト O ニ關係シテ等勢ナル片 $ABCD$ 及ヒ $A'B'C'D'$ ハ O ニ關係シテ等勢ナリ.

定理廿四

83. 等長ノ平行貳直線ハ中心ニ關係シテ等勢ナリ.

(特說) AB, $A'B'$ ヲ等長ノ平行兩直線トス然ル片此兩線ハ中心 O ニ關係シテ等勢ナリ.



(證明) AA', BB' ヲ連結シ O ヲ其交點トス,

然ル片 $\triangle AOB$, $\triangle A'OB'$ ニ於テ

$AB=A'B'$, (假設) $\angle A=\angle A'$, $\angle B=B'$, (65. 反定理)

$\therefore\ \triangle AOB\equiv\triangle A'OB'$, (定理五)

$\therefore\ OA=OA'$,

AB ノ或壹點 C ヨリ O ヲ過ギテ直線ヲ引キ $A'B'$ ニ C' ニ於テ會セシム然ルトキ $\triangle AOC$, $\triangle A'OC'$ ニ於テ

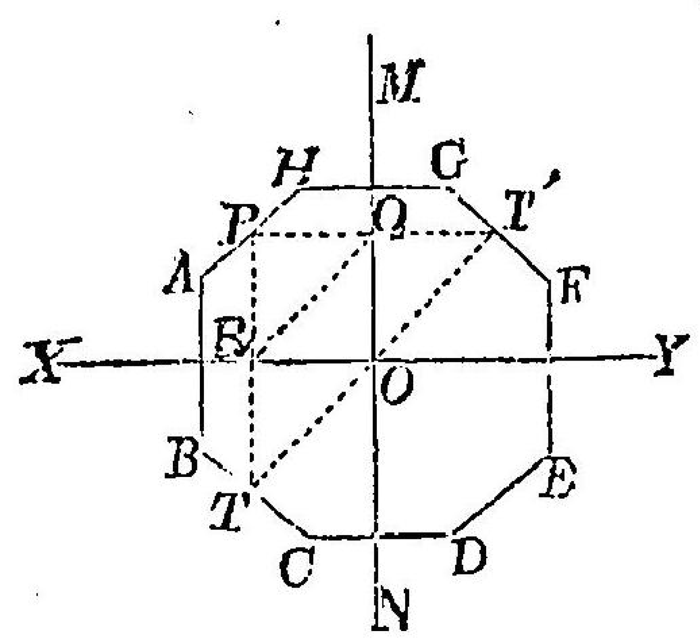
$OA=OA'$, $\angle AOC=\angle A'OC'$, 又 $\angle CAO=\angle C'A'O$,

$\therefore\ \triangle AOC\equiv\triangle A'OC'$, (定理五)

$\therefore\ CO=C'O$.

定理廿五

84. 或圖形ガ直交スル兩軸ニ關係シテ等勢ナルトキ其交點ニ關係シテ等勢ナリ.



(特說) $ABCDEFGH$ ガ直交兩軸 XY, MN ニ關係シテ等勢ナルトキ O ニ關係シテ等勢ナリ.

(證明) P ヲ圖形ノ周邊中ノ或壹點トシ此點ヨリ XY, MN ノ各ニ垂線 PR, PQ ヲ引キ之ヲ引長シテ他ノ邊ニ會セシム, 然ルトキ假設ニヨリテ

$PR=RT$, $PQ=QT'$,

又 $PR=OQ$, $\therefore\ OQ=RT$, 又 $OQ \parallel RT$, (假設)

$\therefore\ QR=OT$, 及 $QR \parallel OT$.

同法ニヨリ $QR=OT'$ 及 $QR \parallel OT'$. (76.)

$\therefore\ OT=OT'$ 且 TOT' ハ壹直線ヲナス,

例題

1. 平行四邊形ハ兩對角線ノ交點ニ關係シテ等勢ナリ.

2. 貳ツノ多角形ノ各角點ガ壹軸ニ關係シテ等勢ナルトキ其兩多角形ハ其軸ニ關係シテ等勢ナリ.

3. 軸或ハ中心ニ關係シテ等勢ナル兩平面圖形ハ全等形ナリ.

4. 四角形ガ兩對角線ノ各ニ關係シテ等勢ナルトキハ菱形ナリ.

5. A, A' 及ヒ C, C' ガ各 XY ニ關係シテ等勢ナルトキ AA', CC' ノ交角ハ XY ニヨリテ貳等分セラル.

6. 同上 AC' ト $A'C$ ハ XY ニ於テ相交ハル又其交點ヲ O トスレハ $\angle AOX=\angle COY$.

第五節　軌跡

定　義

85. 軌跡 (Locus) 壹線或ハ壹群ノ線アリテ其線中ノ各點ガ凡ベテ或既知ノ關係ニ適合シ其線ノ外ノ點ハ壹ツモ其關係ニ適合セザル片其壹線或ハ壹群ノ線ヲ稱シテ其既知ノ關係ノ點ノ軌跡トイフ.

既知ノ關係ヲ X トシ壹線或ハ壹群ノ線ヲ A トスレバ A ノ凡ベテノ點ガ X ナル關係ニ適合シ其他ノ點ハ X ナル關係ニ適合セザル片 A ヲ X ノ軌跡トイフ.

86. 軌跡之證明 A ガ X ノ軌跡ナルヿヲ確定センニハ次ノ兩定理ガ眞ナルヿヲ證明セザルベカラズ.

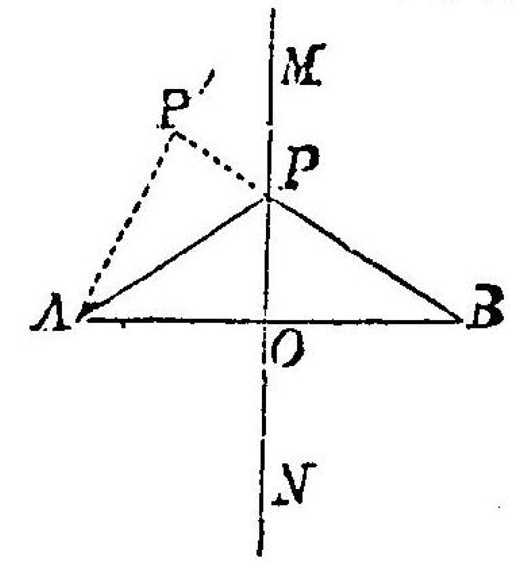
(1) 或壹點ガ A ノ中ニアル片其點ハ X ニ適合ス.

(2) 或壹點ガ A ノ中ニアラザル片其點ハ X ニ適合セズ.

(1), (2) ハ互ヒニ否定理ヲナス但シ (1), (2) ノ代リニ其反否定理ヲ證明スルモ可ナリ.

定理廿六

87. 兩定點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ其兩點ノ連結線ヲ直角ニ貳等分スル直線ナリ.



(特設) A, B 兩定點ヨリ等距ナル點ノ軌跡ハ AB ヲ直角ニ貳等分スル MN 中ニアリ.

(證明) MN 中ニ或點 P ヲ取ル,

然ル片假設ニヨリ $OA=OB$, $\angle AOP=\angle BOP$, OP ハ共通

$\therefore\quad \triangle AOP\equiv\triangle BOP,$　　(定理四)

$\therefore\quad PA=PB.$

即チ **86.** (1) ノ證ヲ得タリ.

若シ P 點ガ MN ノ外即チ P' ニアリトスレバ

$\triangle APP'$ ニ於テ　$P'A<PA+PP'$　但シ $PA=PB$

$\therefore\quad P'A<PB+PP',$

$\therefore\quad P'A<P'B.$

即チ **86.** (2) ノ證ヲ得タリ.

故ニ MN ハ所求ノ軌跡ナリ.

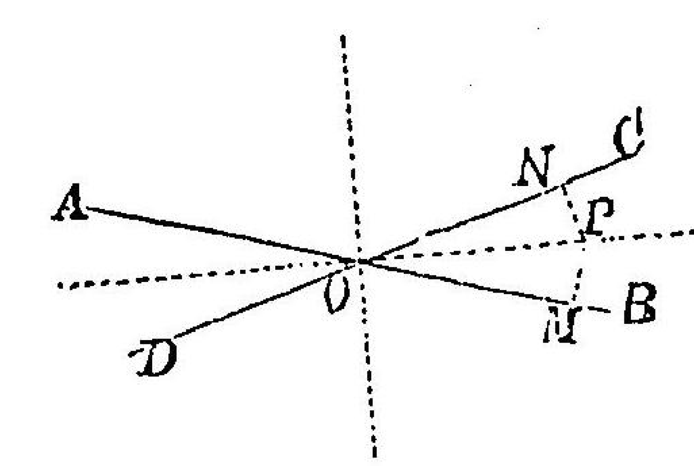
定理廿七

88. 定直線ニ等距離ヲナス點ノ軌跡ハ其直線ノ雙傍ニ於テ平行スル兩直線ナリ.

前ノ如ク **86.** (1), (2) ニヨリテ證明スベシ.

定理廿八

89. 相交ハル貳直線ヨリ等距離ナル點ノ跡軌ハ其兩直線ノ交角ヲ貳等分シテ互ヒニ直角ニ交ハル壹對ノ直線ナリ.



(證明) AB, CD ヲ兩交直線トスレバ $\angle AOC$, $\angle BOC$ ノ貳等分線ハ直角ニ交ハル.

此等分線ノ其壹ツニ於テ P 點ヲ取リ兩定直線ニ垂線 PM 及ヒ PN ヲ作レバ假設ニヨリ

$\angle NOP=\angle MOP\quad\therefore\quad PM=PN,$　(55.推論1)

又 P ガ此ノ等分線ニアルヲザル𪜈ハ PM ハ PN ニ等シカヲザルヿヲ證シ得ベシ,

又 $\angle AOC$ ノ等分線ニ於テモ同法ニテ證ヲ得ベシ.

定 義

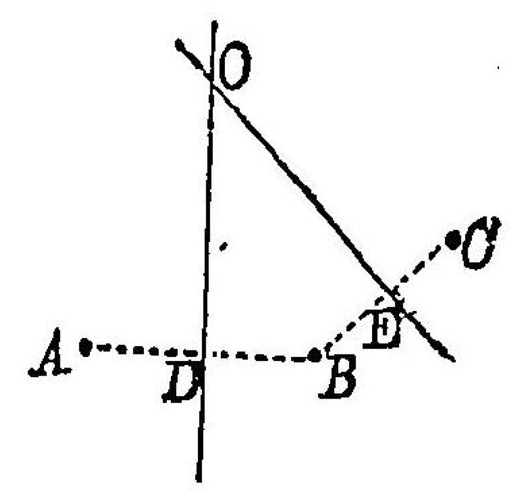
90. 軌跡之交點 (Intersecton of Loci) X ナル關係ノ點ノ軌跡ヲ A 線トシ Y ナル關係ノ點ノ軌跡ヲ B 線トスレハ A, B 兩線ノ交點ヲ稱シテ X 及ヒ Y ナル軌跡ノ交點トイフ.

91. 解說 A 及ヒ B ノ交點ヲ O トスレバ O ハ A ノ中ニアル點ナルヲ以テ X ニ適合ス又 O ハ B ノ中ニアル點ナルヲ以テ Y ニ適合ス.

故ニ O ハ X 及ヒ Y ニ適合ス.

定理廿九

92. 同壹直線中ニアラザル三定點ヨリ等距離ナル點ハ唯壹ツノミナリ.

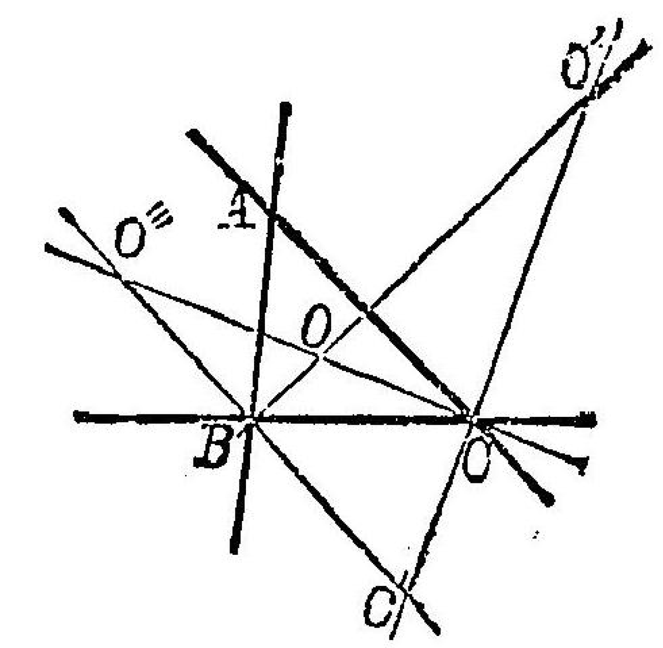


(證明) A, B, C ヲ三定點トス,
然ル𪜈 A, B 貳點ヨリ等距ナル點ノ軌跡ハ AB ヲ直角ニ貳等分スル OD ナリ, (定理廿六)
又 B, C 貳點ヨリ等距ナル軌跡ハ BC ヲ直角ニ貳等分スル OE ナリ.

然ル𪜈 AB, BC ハ同壹直線ニアラザルガ故ニ OD, OE ハ平行セズシテ相交ハルベシ, 而シテ其交點ハ唯壹ツノ O ナリ.

定理三拾

93. 平行セズ且ツ同壹點ニ交ハラザル三定直線ヨリ等距ナル點ハ唯四ツノミナリ.



(證明) AB, BC, CA ヲ三定直線トス而シテ此三直線ハ假設ニヨリテ貳ヅツ相交ハリ $A, B; C$ ノ三交點ヲ得ベシ.

然ルニ定理廿八ニヨリ AB, BC ヨリ等距ナル點ノ軌跡ハ $\angle B$ 及其外角ノ貳等分線 BO'' 及ヒ $O'O'''$ ナリ.
又 BC, CA ヨリ等距ナル點ノ軌跡ハ $\angle C$ 及ヒ其外角ノ等分線 CO''' 及ヒ $O'O''$ ナリ.

之ニ由テ $BO'', O'O''', CO''', O'O''$ ノ交點 O, O', O'', O''' ハ三直線 AB, BC, CA ヨリ等距離ノ點ナリ而シテ此唯四點ノミナリ.

例 題

1. 相交ハル貳直線ニ至ル距離ノ和ヲ常數トスル點ノ軌跡ヲ求ム.

2. 同壹直線 $ACDB$ ニ於テ $AC=DB$ ナル𪜈 $\angle APC=\angle DPB$ ナラシムベキ P 點ノ軌跡ハ AB ノ中央點ニ引ク垂線ナリ.

3. 貳定點ヨリ等距ナル壹點ヲ定直線中ニ於テ求ム.

4. 三定點ヨリ等距ナル直線ハ唯三ツナリ.

第　貳　本

圓

定　　義

1. 圓 (Circle) トハ圓周 (Circumference) ト稱スル壹線ニテ圍マレタル平面圖形ニシテ其形內ノ壹定點ヨリ其圓周中ノ何レノ點ニ直線ヲ引クモ凡ヘテ其長サ相等シキモノヲイフ而シテ其壹定點ヲ圓ノ中心 (Centre) トイフ.

2. 半徑 (Radius) 圓ノ中心ヨリ圓周ニ引ク直線ヲ圓ノ半徑トイフ.

3. 直徑 (Diameter) 圓ノ中心ヲ過ギテ圓周ニ界セラルヽ直線ヲ圓ノ直徑(或ハ單ニ圓徑)トイフ.

4. 弧 (Arc) トハ圓周ノ壹部分ヲイフ.

5. 弦 (Chord) 圓ノ弦トハ圓周ノ或貳點ヲ連結スル直線ヲイフ

6. 欠圓 (Segment) トハ弧ト弦ニテ圍マレタル平面圖形ヲイフ.

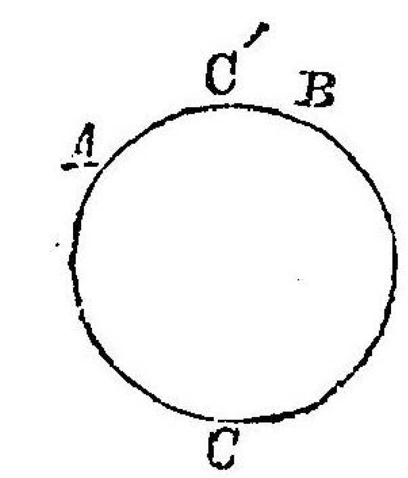
7. 割圓 (Sector) トハ弧ト其兩端ヨリ引ケル兩半徑ニテ圍マレタル平面圖形ヲイフ.

8. 共心 (Concentric) 貳ツ或ハ貳ツ以上ノ圓ガ同壹ノ中心ヲ有スルトキ之ヲ共心圓トイフ.

9. 半圓 (Semicircle) トハ圓徑ト弧ニヨリテ圍マレタル欠圓ヲイフ即チ圓ノ半ナリ.

10. 四分圓 (Quadrant) トハ互ヒニ直角ヲナセル兩半徑ト弧ニヨリテ圍マレタル割圓ヲイフ.

11. 優弧 (Major arc) トハ圓周ヲ貳點ニテ分界スルトキ其大ナル部分ノ弧ヲイフ即チ ACB ノ如シ.



12. 劣弧 (Minor arc) トハ其小ナル部分ヲイフ即チ $AC'B$ ノ如シ.

（注意）單ニ弧ト稱スルトキハ通例劣弧ノヿナリ.

圓之性質

13. 圓之性質　上ニ示ス定義ニヨリ圓ノ性質ニ付キ次ノ設題ヲ生ズ.

（a）壹圓ハ唯壹ツノ中心ヲ有ス.

（b）壹點ガ圓周ノ內或ハ圓周中或ハ圓周ノ外ニアルニ從フテ其點ガ中心ヲ距ルヿ半徑ヨリハ小或ハ半徑ニ等シク或ハ半徑ヨリ大ナリ.

（c）中心ヨリ壹點迄ノ距離ガ半徑ヨリ小或ハ半徑ニ等シク或ハ半徑ヨリ大ナルニ從フテ其壹點ハ圓周ノ內或ハ圓周中或ハ圓周ノ外ニアリ.

第壹節　根原之性質

定理壹

14. 兩圓ノ半徑相等シケレバ全等形ナリ.

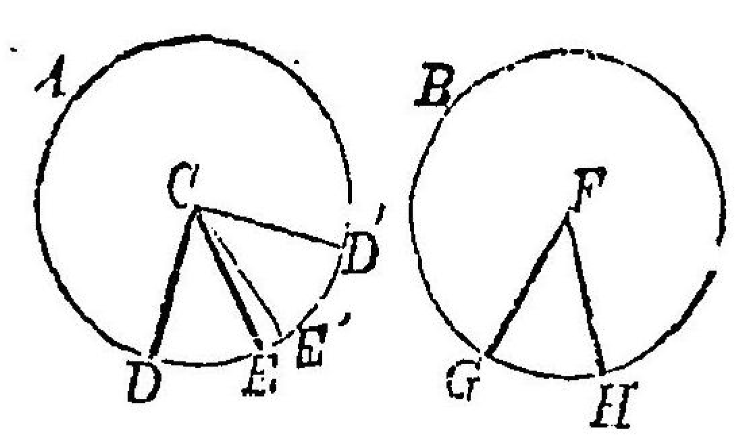
(特説) A 及ヒ B ヲ相等シキ半徑ノ兩圓トスレバ $A\equiv B$.

(證明) A 圓ノ中心ノ上ニ B 圓ノ中心ヲ置キテ兩圓ヲ合セシム而シテ兩圓ノ半徑相等シ(假設)キガ故ニ其中心ヨリ各圓周迄デ引ク直線ハ其長サ各相等シ故ニ兩圓周ハ全ク相合シ全等形トナル.

15. 推論　相異ナル兩圓周ガ共心ナル片ハ相交ラズ.

定理貳

16. 同圓或ハ等圓ニ於テ相等シキ中心ノ角ハ等弧ニ對ス又不等ノ中心角ハ不等ノ弧ニ對シ其大角ニ對スル弧ハ小角ニ對スル弧ヨリ大ナリ,又反定理ヲ得.



(特説) A, B ヲ兩等圓トシ $\angle DCE=\angle GFH$ ナル片 $\frown DE=\frown GH$,

又 $\angle DCE'>\angle GFH$ ナル片 $\frown DE'>\frown GH$.

(證明) A ノ中心 C ノ上ニ B ノ中心 F ヲ置キ CD ノ上ニ FG ヲ合スレバ $CD=FG$ ナルガ故ニ兩圓周ハ相合ス, (定理壹)

又 $\angle DCE=\angle GFH$ ナルガ故ニ H ハ E ニ合ス,

$$\therefore \quad \frown DE=\frown GH.$$

又 $\angle DCE'>\angle GFH$ ナルガ故ニ H ハ DE' ノ間ダ(即チ E)ニ落ツベシ. $\therefore \quad \frown DE'>\frown GH.$

同圓即チ A 圓ノミニ付テ本定理ヲ證スル片モ同理ナリ即テ $\angle DCE=\angle D'CE'$ ナル片 $\frown DE=\frown D'E'$,

又 $\angle DCE'>\angle D'CE'$ ナル片 $\frown DE'>\frown D'E'$.

(反定理) $\frown DE=\frown GH$ ナル片 $\angle DCE=\angle GFH$,

何トナレバ $\angle DCE>\angle GFH$ ナル片 $\frown DE<\frown GH$, (本定理)

又 $\angle DCE<\angle GFH$ ナル片 $\frown DE<\frown GH$, (〃)

$$\therefore \quad \angle DCE=\angle GFH.$$

17. 推論壹　同圓或ハ等圓ノ割圓ガ等角ヲ有スル片ハ全等形ニシテ不等ノ角ナル片ハ其大角ノ割圓ハ小角ノ割圓ヨリ大ナリ, 又反定理ヲ得.

18. 推論貳　圓徑ハ全形ヲ貳等分ス.

例　題

1. 圓ノ弧ガ其優弧ノ半ナル片其弧ハ圓周ノ何部分ナリヤ又圓ノ弧ガ其劣弧ノ三倍ナル片ハ如何.

2. 或壹圓ノ割圓ガ欠圓トナル片其形チハ何ナリヤ.

3. 等圓ノ兩割圓アリ其壹ノ中心角ガ他ノ中心角ノ m 倍ナル片其弧モ亦タ他ノ弧ノ m 倍ナリ.

4. 圓周ハ其中心或ハ其圓形ニ關シテ等勢ナリ.

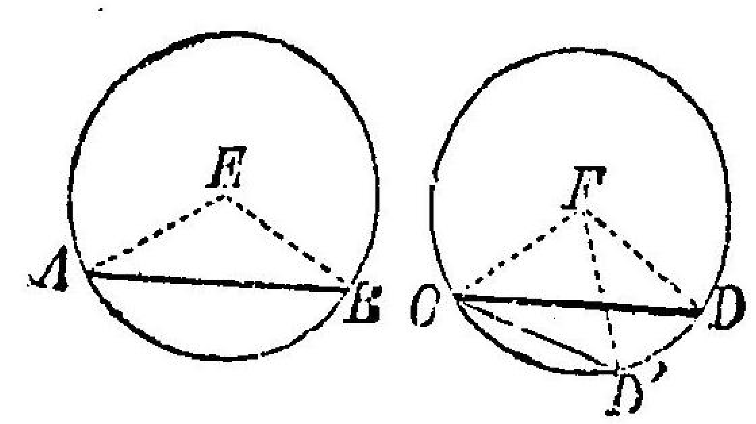
5. 四分圓ハ全圓ノ四分ノ壹ニ等シ.

第貳節 弦

定理三

19. 同圓或ハ等圓ニ於テ等弧ハ等弦ニ對向シ又兩劣弧ノ內大ナルモノハ大弦ニ對向ス，又反定理ヲ得．

（特說）$\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ ヲ同圓或ハ等圓ノ等弧トス，
然ル片弦 $AB=$ 弦 CD.



（證明）E, F ヲ兩圓ノ中心トス，AE, BE, CF, 及ビ DF ヲ連結ス．

然ル片 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ ナルガ故ニ
$\angle AEB=\angle CFD$, （定理貳）
又 $AE=CF$, $BE=DF$, （假設）

$\therefore\quad AB=CD.$ （第壹本定理四）

又 $\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{CD'}$ トスレバ $AB>CD'$,
何トナレバ $\angle AEB>\angle CFD'$ （定理貳）ナルガ故ニ第壹本定理拾壹ニヨリ $AB>CD'$.

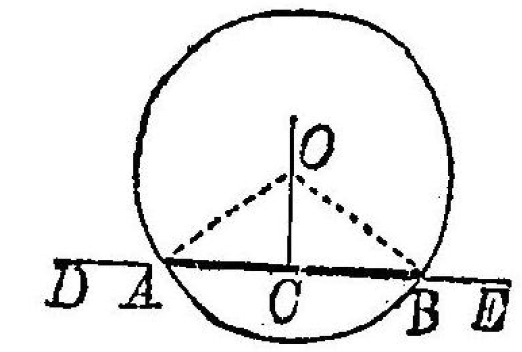
（反定理）$AB=CD$ ナル片 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$,
又 $AB>CD'$ ナル片 $\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{CD'}$.
何トナレバ $\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{CD}$ トスレバ $AB>CD$, （本定理）
又 $\overset{\frown}{AB}<\overset{\frown}{CD}$ トスレバ $AB<CD$ナルヲ以テナリ．
又 $\overset{\frown}{AB}>CD'$ ナル片 $\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{CD'}$ ナルノ證モ上ノ如シ．

20. **推論** 圓ノ直徑ハ他ノ凡ヘテノ弦ヨリ大ナリ．
此證明ハ特別ニ圖ヲ作リテ證スルモ可ナリ．

定理四

21. 圓ノ中心ヨリ弦ノ中央點ニ引ク直線ハ弦ニ垂直ナリ，
（反定理）圓ノ中心ヨリ引ク弦ノ垂線ハ弦ヲ貳等分ス，又弦ノ中央點ニ引ク弦ノ垂線ハ中心ヲ通過ス，

（特說）O ヲ圓ノ中心トシ AB ヲ弦トシ $AC=BC$ ナル片 $OC\perp AB$.



（證明）OA, OB ヲ連結ス，
然ル片 $\triangle AOC$, $\triangle BOC$ ニ於テ其三邊 AO, AC, OC ハ順次ニ BO, BC, OC ニ等シキガ故ニ全等形ナリ，（第壹本定理拾貳）

$\therefore\quad \angle ACO=\angle BCO,$

$\therefore\quad OC\perp AB.$

（反定理）$OC\perp AB$ ナル片 $AC=BC$, 又 $AC=BC$ ナル片 $OC\perp AB$ ナリ．（第壹本 **53.**）

22. **推論** 貳定點ヲ通過スル圓周ノ中心ノ軌跡ハ其貳點ノ連結線ノ中央點ノ垂線ナリ．

定理五

23. 壹直線ガ圓周ニ交ハル點ハ貳ツヨリ多カラズ．

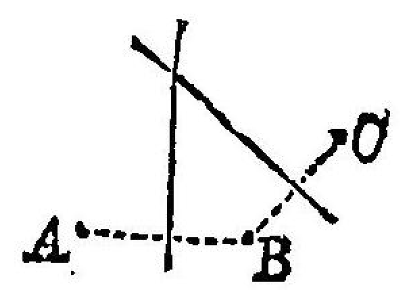
（特說）前圖ニ於テ DE ヲ直線トス然ル片 DE ガ圓周ニ交ハル點ハ A, B ヨリ多カラズ．

（證明）何トナレバ若シ DE ガ A, B ノ他ノ點即チ C ニ於テ圓ニ交ハルモノトスレバ $OA=OB=OC$ トナリ壹點 O ヨリ壹直線 DE ニ等直線三ツ引クコトヲ得ベシ是レ不合理ナリ，（第壹本 **52.**）故ニ交點ハ A, B ヨリ多カラズ．

24. **推論** 圓ノ弦ハ全ク圓内ニアリ.
此推論ハ圓周ノ各處ハ常ニ其中心ニ凹向スル性質ヲ示ス.

定　理　六

25. 壹直線中ニアラザル三點ヲ通過シテ唯壹ツノ圓周ヲ畫キ得ベシ.



(特說) A, B, C ヲ壹直線中ニアラザル三點トス,
然ル𪜈 A, B, C ヲ通過シテ唯壹ツノ圓周ヲ畫キ得ベシ.
(證明) A, B 貳點ヲ通過スル圓周ノ中心ノ軌跡ハ AB ノ中央點ノ垂線ナリ (22.) 又 B, C 貳點ニ於テモ BC ノ中央點ノ垂線ナリ,
而シテ A, B, C ハ同直線中ニアラザルガ故ニ此兩垂線ハ平行セズシテ唯壹點ニ於テ相交ハルベシ, {公理 (2)}
而シテ此交點ハ A, B, C ヲ通過スル圓周ノ中心ナリ,
故ニ A, B, C ヲ通過シテ唯壹ツノ圓周ヲ畫キ得ベシ.

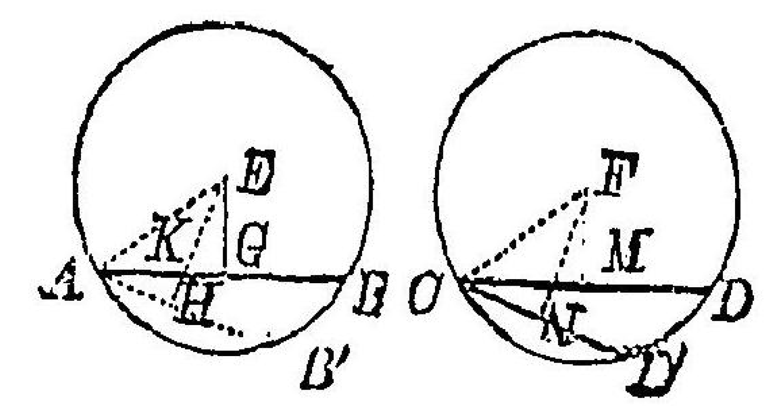
26. **推論壹** 三點ヲ通有スル兩圓周ハ全ク相合ス.
之ニ由テ圓周ハ三定點ニ由テ決定セラル.

27. **推論貳** 兩圓周ハ貳點ヨリ多キ交點ヲ有セズ.

28. **推論三** 圓內ノ壹點(中心ノ外)ヨリ圓周ニ引ク等直線ハ貳ツヨリ多カラズ.

定　理　七

29. 同圓或ハ等圓ニ於テ等弦ハ其中心ヲ距ルヿ相等シク大弦ハ中心ヲ距ルヿ小弦ヨリ大ナリ, 又反定理ヲ得.



(特說) AB, CD ヲ同圓或ハ等圓ノ等弦トシ EG, FM ヲ中心 E, F ヨリ其貳弦ニ引ク垂線トスレバ

$$EG=FM.$$

(證明) AE, CF ヲ連結ス然ル𪜈 EG, FM ハ AB, CD ノ垂線ナルガ故ニ
$AG=\frac{1}{2}AB$, $CM=\frac{1}{2}CD$, (定理四)　　$\therefore\ AG=CM$,
$\triangle AEG$, $\triangle CFM$ ニ於テ $AG=CM$ 及ビ $AE=CF$,
$\angle AGE=\angle CMF=R\llcorner$　$\therefore\ \triangle AEG\equiv\triangle CFM$, (第壹本定理拾五)　　$\therefore\ EG=FM$.
又 $AB>CD'$ ナル𪜈 AB ノ垂線 EG ハ CD' ノ垂線 FN ヨリ小ナルヿヲ證スベシ.
E ノ上ニ F ヲ置キ CF ヲ AE ニ合セシムレバ CD' ハ AB' ニ落ツベシ然ル𪜈 E ヨリ AB' ニ垂線 EH ヲ引ク𪜈 前ノ理ニヨリ $EH=FN$ 而シテ EH ガ AB ヲ截ル點ヲ K トス,
然ル𪜈 $EG<EK$, (第壹本定理拾四)
又 $EK<EH$, $\therefore\ EG<EH$, 即 $EG<FN$.
(反定理) $EG=FM$ ナル𪜈 $AB=CD$, 又 $EG<FN$ ナル𪜈 $AB>CD'$ ナルヿヲ證スベシ.
此證明ハ $\triangle AEG\equiv\triangle CFM$ ナルヿヲ知レバ $AB=CD$,
又 AB ハ CD' ニ等シカラズ又 CD' ヨリ小ナラザルヿヲ知レバ $AB>CD'$ ナルヿヲ證シ得ベシ.

30. **注意** 此定理ヨリシテ圓徑ハ最大弦ナルヿヲ證シ得ベシ,
即チ 20. ノ推論ト同意ナリ.

例 題

1. 圓ノ平行諸弦ノ中央點ノ軌跡ハ其諸弦ニ垂直ナル中徑ナリ.

2. 兩等弦ガ互ヒニ交ハルトキハ其交點ニ於ケル弦ノ各部分ハ互ヒニ相等シ.

3. 貳ツノ弦ハ相交ハリテ互ヒニ貳等分トナル能ハズ.

4. 壹ツノ曲線アリ此曲線ハ圓ノ弧ナリヤ否ヤヲ檢スルノ法ヲ示セ.

5. 共心ノ兩圓周ヲ截ル壹直線ハ其各兩圓周ニテ分界セラレタル部分相等シ.

6. 等弦ノ中央點ノ軌跡ハ圓周ナリ.

7. 圓內ノ壹定點ヨリ引ク諸弦ノ內最小ナルモノハ其壹點ノ爲メニ貳等分セラル.

8. 圓周中ノ壹點ヨリ引ク等弦ハ貳ツヨリ多カラズ.

9. 圓徑ノ兩端ヨリ弦(或ハ引長線)ニ貳垂線ヲ引クトキ其垂線ノ各底點ハ中心ヨリ等距離ナリ.

10. AB, CD ヲ不等ナル平行貳弦トス AC, BD 或ハ AD, BC ハ各相等シクシテ亦タ此貳弦ニ直交スル圓徑ト等シキ傾角ヲナス.

11. 等弦 AB, CD ノ交點ヲ E トスレバ $EA=EC$ 及ビ $EB=ED$ ナリ.

12. 圓徑ト等角ニ於テ相會スル兩弦ハ相等シ.

第三節 欠圓之角

定 義

31. **圓周角** トハ圓周ノ壹點ヨリ引ク貳弦ノ交角ヲイフ. 而シテ此角ハ貳弦ニテ分截セル弧ニ對向スルモノトイフ.

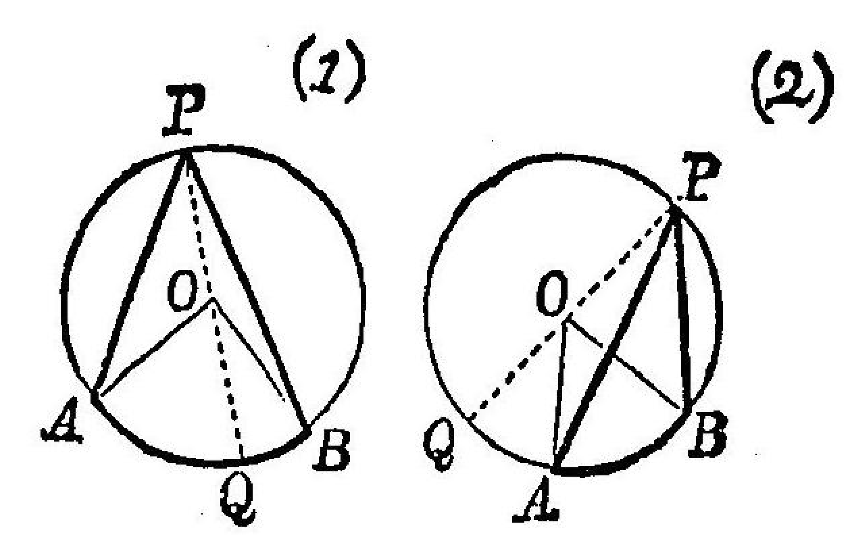
32. **欠圓之角** トハ欠圓ノ弧ノ壹點ヨリ之ノ兩端ニ引ク貳直線ノ交角ヲイフ.

定 理 八

33. 圓周角ハ之ト同弧ニ對向スル中心角ノ半ニ等シ.

(特說) AB ヲ弧トシ O ヲ圓ノ中心トシ P ヲ圓周ノ或壹點トス, 然ルトキ

$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$.



(證明) PO ヲ連結シ之ヲ引長シテ圓周ニ Q ニ於テ會セシム.

然ルトキ $\triangle AOP$ ニ於テ $AO=OP$ $\therefore$ $\angle APO=\angle PAO$.(第壹本定理六)

$\therefore$ $\angle AOQ=\angle APO+\angle PAO=2\angle APO$,(第壹本定理拾八)

同法ニヨリテ $\angle BOQ=2\angle BPQ$,

故ニ (1) 圖ニ於テ $\angle AOB=\angle AOQ+\angle BOQ$

$=2\angle APO+2\angle BPQ=2\angle APB$,

又(2)圖ニ於テ $\angle AOB=\angle BOQ-\angle AOQ=2\angle APB$,

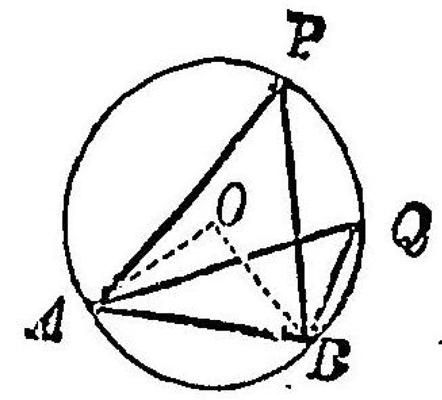
$\therefore \quad \angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB.$

定理九

34. 圓ノ同欠圓ノ角ハ互ヒニ相等シ.

(特説) APB ヲ欠圓トシ $\angle APB$ 及ビ $\angle AQB$ ヲ欠圓ノ角トスレバ

$$\angle APB=\angle AQB.$$



(證明) O ヲ圓ノ中心トスレバ

$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$, (定理八)

$\angle AQB=\frac{1}{2}\angle AOB$, (〃)

$\therefore \quad \angle APB=\angle AQB.$

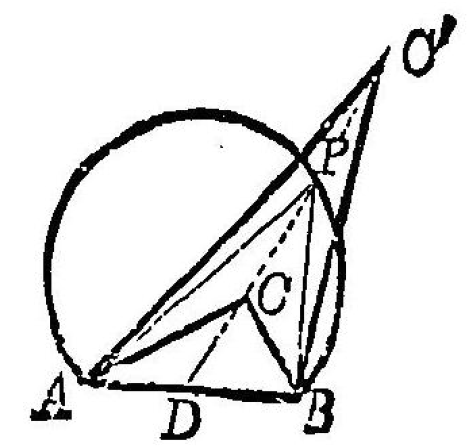
35. **推論** 欠圓内ノ壹點ニ於テ弦ニ對向スル角ハ欠圓ノ角ヨリ大ニシテ又欠圓ト共ニ弦ノ同傍ニアル所ノ欠圓外ノ壹點ニ於テ弦ニ對向スル角ハ欠圓ノ角ヨリ小ナリ.

何トナレバ C ヲ欠圓内ノ壹點トスレバ任意ニ PCD ヲ引キ P ニ於テ圓周ヲ截レバ $\triangle APB$ ニ於テ

$\angle ACB>APB.$ (壹本定理拾)

又 C' ヲ欠圓ト共ニ AB ノ同傍ニノル欠圓外ノ壹點トスレバ

$\angle AC'B<\angle APB.$

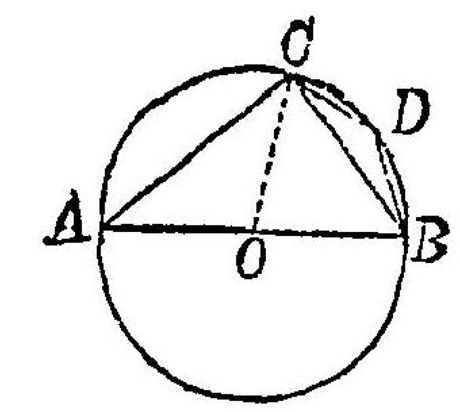


定理拾

36. 欠圓ノ角ハ欠圓ガ半圓ヨリ大ナル𪜈ハ鋭角ニシテ半圓ニ等シキ𪜈ハ直角ナリ又半圓ヨリ小ナル𪜈ハ鈍角ナリ,又反定理ヲ得.

(特説) AB ヲ圓徑トス.

然ル𪜈半圓ヨリ大ナル欠圓 CAB ノ角ハ鋭角ニシテ半圓 ACB ノ角ハ直角ナリ又半圓ヨリ小ナル欠圓 BDC ノ角ハ鈍角ナリ.



(證明) O ヲ中心トシ CO ヲ連結ス,

然ル𪜈 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$, (定理八)

但 $\triangle BOC$ ニ於テ $\angle BOC<2R\llcorner$, $\therefore \angle BAC<R\llcorner$.

又 $\angle BCA=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}(2R\llcorner)=R\llcorner$.

又 $\angle BDC=\frac{1}{2}(4R\llcorner-\angle BOC)=2R\llcorner-\frac{1}{2}\angle BOC$,

但 $\frac{1}{2}\angle BOC<R\llcorner$, $\therefore \angle BDC>R\llcorner$.

(反定理) 欠圓ノ角 $\angle BAC<R\llcorner$ ナル𪜈其欠圓ハ半圓ヨリ大ナリ,

何トナレバ若シ欠圓ヲ半圓ニ等シク或ハ半圓ヨリ小トスレバ本定理ニヨリテ $\angle BAC=R\llcorner$ 或ハ $\angle BAC<R\llcorner$ トナルヲ以テナリ.

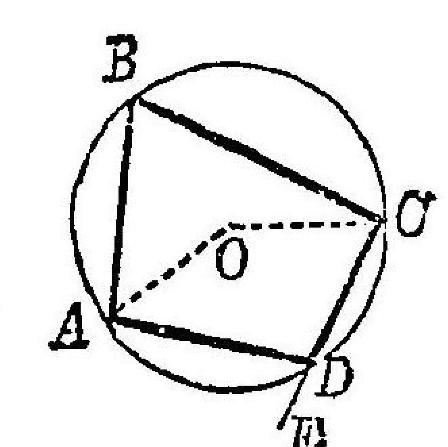
同法ニヨリ欠圓ノ角 $\angle BCA=R\llcorner$ ナル𪜈其欠圓ハ半圓ニシテ又欠圓ノ角 $\angle BDC>R\llcorner$ ナル𪜈其欠圓ハ半圓ヨリ小ナルヿヲ知ル.

定理拾壹

37. 圓ノ内切四角形ノ對角ハ互ニ補角ヲナス,又反定理ヲ得.

(特説) $ABCD$ ヲ内切四角形トス,

然ル𪜈 $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=2R\llcorner$.



(證明) O ヲ中心トス

然ル𪜈 $\angle B=\frac{1}{2}\angle AOC$, (定理八)

又 $\angle D=\frac{1}{2}(4R\llcorner-\angle AOC)$

$\therefore \quad \angle B+\angle D=\frac{1}{2}(\angle AOC+4R\llcorner-\angle AOC)$
$=2R\llcorner$.

(反定理) $\angle B+\angle D=2R\llcorner$ ナル𪜈 $ABCD$ ハ内切四角形ナリ.

38. **推論**　圓ノ內切四角形ノ壹角ハ其對角ノ外角ニ等シ, CD ヲ E 迄引長スレハ $\angle B=\angle ADE$.

例　題

1. 壹圓ノ兩等弧ノ各端ノ連結線ハ相等シキカ或ハ平行ス.

2. 貳定點ニ貳邊ヲ置キタル常數角ノ角頂ノ軌跡如何.

3. 圓ノ內切四角形ノ各對邊ガ平行スル時各角ハ $R\llcorner$ ナリ.

4. 圓ノ內切四角形ノ兩對邊相等シキ時他ノ貳邊ハ平行ス.

5. AB, CD ハ常數角ヲ以テ相交ハル圓ノ貳弦トス, 然ル時此貳弦ノ位置ガ如何ニ動クモ $\frown AC+\frown BD$ ハ常數ナリ.

6. $ABCD$ ヲ圓ノ內切四角形トシ其對角線ノ交點ヲ E トスレバ $\angle AED=\angle ABD+\angle BDC$.

7. 三角形ノ貳邊ヲ直徑トスル兩圓ノ交點ハ他壹邊中ニアリ.

8. 圓周中ノ壹點ヨリ引ク諸弦ノ中央點ノ軌跡ヲ求ム.

9. 圓ノ內切六角形ノ隔次ノ三角ノ和ハ $4R\llcorner$ ニ等シ.

10. 圓ノ內切四角形ノ各對邊ヲ引長シテ相交ハラシムレバ其交角ノ貳等分線ハ直角ニ於テ相交ハル.

11. BC 弧ノ中央點ヲ A トシ AD, AE 貳弦ヲ引キ BC 弦ヲ F, G ニ於テ截レバ $DEGF$ ハ圓ノ內切四角形ナリ.

12. 三角形ノ各角點ヨリ對邊ニ引ク三垂線ノ底點ヲ連結シテ成レル三角形ノ各角ハ各垂線ニテ貳等分セラル.

13. A, B, C ヲ圓周ノ點トシ D ヲ AB 弧ノ中央點, E ヲ AC 弧ノ中央點トシ DE 線ニテ AB ヲ F, AC ヲ G ニ截レバ $AF=AG$.

14. 圓ノ內切三角形 ABC ノ A 角ノ貳等分線ガ D ニ於テ圓周ヲ截レバ $\angle ADO=\frac{1}{2}(\angle B\sim\angle C)$, 但 O ハ中心ナリ.

15. 等邊 $\triangle ABC$ ニ於テ $MA=MB+MC$, M 點ノ軌跡如何.

16. 圓ノ內切三角形ノ各邊(或ハ引長邊)ニ迄圓周ノ壹點ヨリ垂線ヲ引ケバ其三底點ハ壹直線中ニアリ.

第四節　切線

定　義

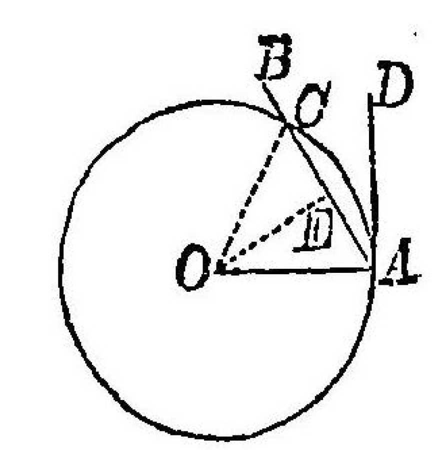
39. **割線** (Secant) トハ貳點ニ於テ圓周ヲ截ル直線ナリ.

40. **切線** (Tangent) トハ唯壹點ニ於テ圓ヲ截ル直線ナリ;

而シテ其壹點ヲ切點(Point of Contact)トイフ.

定理拾貳

41. 圓周ノ壹點ヲ通過スル各直線ハ其點ニ於ケル半徑ニ垂直ナル時ノ外ハ凡ヘテ他ノ壹點ニ於テ再ヒ圓周ヲ通過ス.



(特設)　O ヲ中心トシ AO ヲ半徑トシ AD ヲ AO ニ垂直ヲナシテ A ヲ通過スル直線トシ AB ヲ他ノ各直線トス,

然ル時 AB ハ他ノ壹點 C ニ於テ圓周ヲ通過シ AD ハ通過セズ,

(證明)　$OA\perp AD$ ナルガ故ニ O ヨリ AD ニ至ル最短線ハ AO 唯壹ツナリ, (壹本 **51.**)

而シテ AO ハ圓ノ半徑ナルガ故ニ AD ハ A ノ他ハ圓周ニ會セズ.

又 O ヨリ AC ニ垂線 OE ヲ作リ $\angle AOE=\angle COE$ トシ OC ガ AB ニ交レバ $AO=CO$, (壹本 **52.**)

故ニ OC ハ圓ノ半徑ナリ, 之ニ由テ AB ハ C ニ於テ圓周ヲ通過ス.

(注意)　AD ハ圓ノ切線ニシテ A ヲ切點トス.

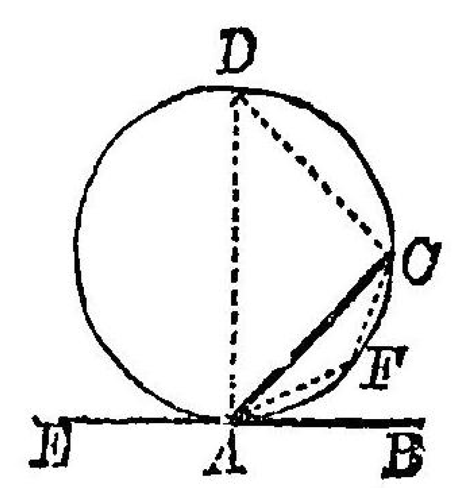
42. 推論 本定理ニヨリ次ノ定理ヲ生ズ.

(a) 壹圓周ノ壹點ニ於テ唯壹ツノ切線ヲ引キ得ベシ.
(b) 圓ノ切線ハ切點ニ於テ半徑ト直交ス.
(c) 圓ノ中心ハ切點ニ於テ切線ニ垂直ナル直線中ニアリ.
(d) 中心ヨリ切線ニ引ク垂線ハ切點ヲ通過ス.

以上ノ四定理ハ反定理ヲ得ベシ.

定理拾三

43. 切線及ヒ切點ヨリ引ケル弦ニテ成レル角ハ其相隣欠圓ノ角ニ等シ.



(特說) AB ヲ切線トシ AC ヲ切點 A ヨリ引ク弦トスレバ $\angle BAC$ ハ其相隣ノ欠圓 ADC ノ角ト相等シ又 $\angle CAE$ ハ欠圓 AFC ノ角ト相等シ.

(證明) A ヲ通過シテ圓徑 AD ヲ引クトキ $AD\perp AB$, (定理拾貳)

$\therefore\ \angle BAC+\angle DAC=R\llcorner$

又 $\angle ACD=R\llcorner$, (定理拾)

$\therefore\ \angle ADC+\angle DAC=R\llcorner$,

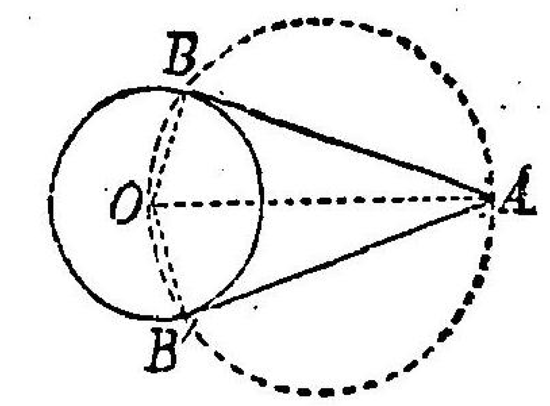
$\therefore\ \angle BAC=\angle ADC.$

同法ニヨリ $\angle CAE=\angle AFC.$

定理拾四

44. 圓外ノ壹點ヨリ其圓ニ唯貳ツノ切線ヲ引キ得ベシ.

(證明) O ヲ中心トシ A ヲ圓外ノ壹點トス.



OA ヲ連結ス而シテ OA ヲ直徑トシテ圓ヲ畫ケバ O ト A ハ原圓ノ內外ニアルヲ以テ OA ヲ直徑トスル圓周ハ原圓周ト OA ノ各傍ニ於テ相交ハルベシ即チ其交點ハ B, B' ノ唯貳ツノミナリ,

而シテ OA ハ圓徑ナルガ故ニ $\angle ABO=\angle AB'O=R\llcorner$,(定理拾)

故ニ AB, AB' ハ原圓ノ切線ナリ, {42. (b)}

而シテ A ヨリ引ク原圓ノ切線ハ此貳ツノミナリ.

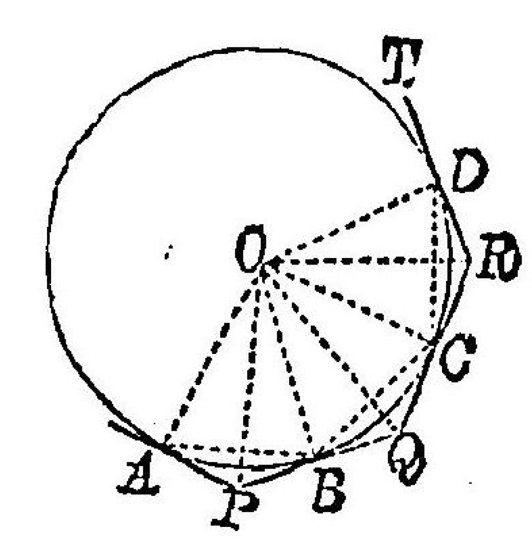
45. 推論 圓外ノ壹點ヨリ引ク兩切線ハ相等シ又其壹點ト中心ノ連結線ハ兩切線ノ交角ヲ等分ス.

$\triangle ABO$, $\triangle AB'O$ ハ全等形ナリ $\therefore\ AB=AB'$,

$\angle BAO=\angle B'AO.$

定理拾五

46. 圓周ヲ若干等分シ其等分點ノ切線ニテ成レル多角形ハ正多角形ナリ.



(證明) O ヲ中心トシ A, B, C, D…………ヲ圓周ノ等分點トシ AP, PQ, QR, RD…………ヲ切線トス,

然ルトキ **45.** ニヨリテ

$\triangle OAP\equiv\triangle OBP$,

$\therefore\ PA=PB$,

$\angle AOP=\angle BOP.$

又　$\frown AB = \frown BC = \frown CD = \ldots\ldots\ldots\ldots$　　(假設)

$\therefore \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \ldots\ldots\ldots\ldots$　　(定理八及九)

$\therefore\ AB = BC = CD = \ldots\ldots\ldots\ldots$

及ヒ　$\angle APB = \angle BQC = \angle CRD = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\therefore\ AP = BP = BQ = QC = CR = RD = \ldots\ldots\ldots\ldots$

之ニ由テ $PQRT$............ハ正多角形ナリ.

47. **推論** 正多角形ノ各邊ノ中央點ノ垂線ハ壹點ニ於テ會ス而シテ其壹點ハ各角頂ヨリ等距離ナリ,又反定理ヲ得.

例　　題

1. A ヲ圓外ノ壹點トシ AB ヲ切線トシ ACD ヲ割線トス然ル片 $\angle BAD = \frac{1}{2}(\angle BOD - \angle BOC)$. (但 O ヲ中心トス以下同ジ)

2. ABC, ADE ヲ兩割線トスレハ $\angle A = \frac{1}{2}(\angle COE - \angle BOD)$.

3. AB, AC ヲ兩切線トスレ $\angle BAC$ ハ BC ヲ弦トスル兩欠圓ノ角ノ半差ニ等シ.

4. 同上 BC 弧ノ壹點 D ニ於ケル切線ガ AB, AC ヲ E, F ニテ截レハ $\triangle AEF$ ノ周邊ハ $2AB$, 又 $\angle EOF$ ハ常數ナリ.

5. 同上 AO ハ BC ヲ直角ニ等分ス.

6. 圓ノ外切四角形ノ各對邊ノ和ハ相等シ,又反定理ヲ得

(註)　各邊ガ圓ニ切スル所ノ直線形ヲ外切形トイフ.

7. 圓ノ外切六角形ノ隔次ノ邊ノ和ハ相等シ.

8. 圓ノ外切四角形ノ兩對邊ニ對向スル中心角ノ和ハ各 $2R\llcorner$ ニ等シ.

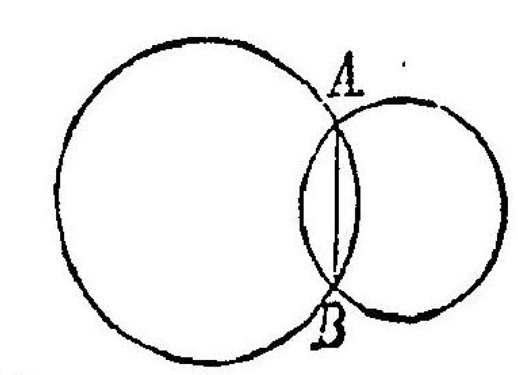
9. 切線ヲ AB, 割線ヲ ACD トスレバ $\angle BAD$ ノ等分線ハ BD

第　五　節　兩圓之關係

定理拾六

48. 相交ハル兩圓ノ中心ノ連結線ハ交點ノ連結線ヲ直角ニ貳等分ス.

(證明)　AB ヲ交點ノ連結線トス. 然ル片兩圓ノ各中心ヨリ AB ノ中央點ニ引ク直線ハ AB ニ垂直ナリ,(定理四)故ニ此兩直線ハ同壹直線ヲナス.



故ニ中心ノ連結線ハ AB ヲ直角ニ貳等分ス.

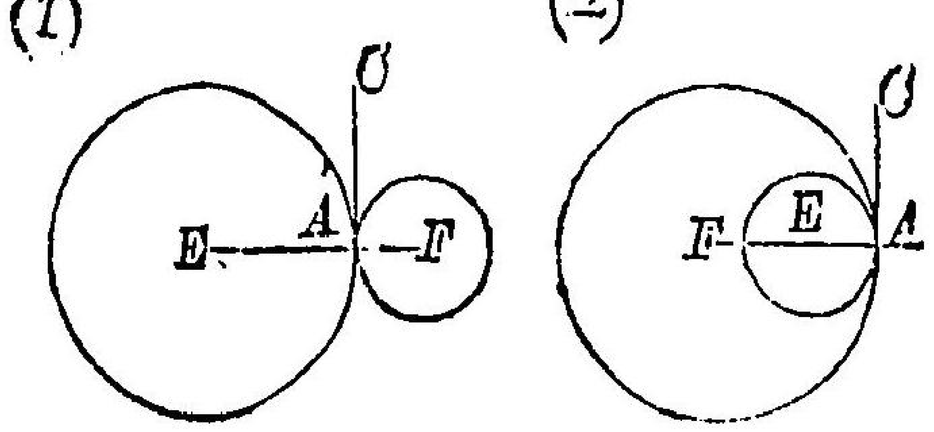
定　　義

49. **通弦** (Common chord)　AB ヲ圓ノ通弦トイフ.

定理拾七

50. 兩圓周ガ中心ノ連結線中ノ壹點ニ於テ交ハレバ此兩圓周ハ第貳ノ共通點ヲ有セズ.

(1)　　(2)



(證明) E, F ヲ各圓ノ中心トス而シテ兩圓周ノ交點 A ガ EF ノ中ニアルヰ此兩圓周ハ第貳ノ共通點ヲ有セズ.

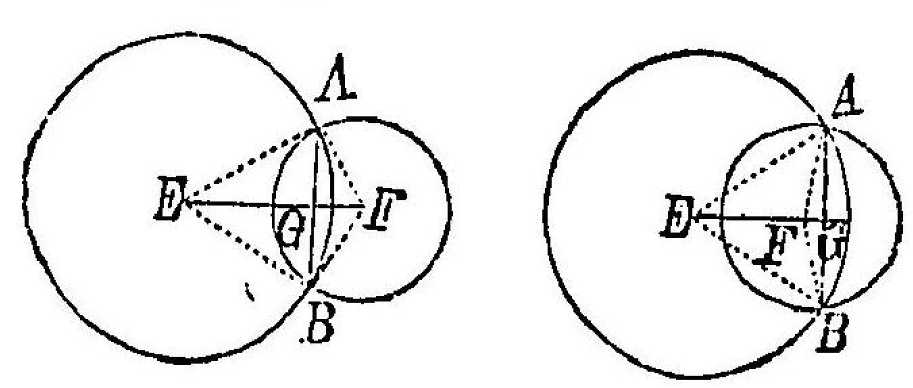
何トナレバ若シ定理拾六ノ如ク A ノ外ニ B ナル共通點ヲ有スルトセバ EF ハ AB ノ中央點ヲ通過セザルベカラズ然ルニ EF ハ A ヲ通過ス故ニ兩圓周ハ他ノ共通點ヲ有セズ.

定　義

51. 外切及內切 兩圓周ガ唯壹點ニ於テ交ハルヰ之ヲ相切ストイフ而シテ (1) 圖ノ如キヲ外切, (2) 圖ノ如キヲ內切トイヒ又 A ヲ切點トイフ.

定理拾八

52. 兩圓周ノ壹共通點ガ中心ノ連結線中ニアラザルヰ此兩圓周ハ又他ノ壹共通點ヲ有ス



(特說) E, F ヲ中心トスル兩圓周ノ壹共通點 A ガ EF 中ニアラザレバ B ナル他ノ壹共通點ヲ有ス.

(證明) A ヨリ EF ニ垂線 AG ヲ引キ之ヲ B 迄引長シテ $AG=GB$ トシ AE, BE, AF, BF ヲ連結ス然ルヰ $\triangle AGE, \triangle BGE$ ハ EG ヲ共通邊トシ $AG=BG, \angle G=R∟$ ナルガ故ニ $AE=BE$

故ニ B ハ E ヲ中心トスル圓周中ニアリ,
同法ニヨリ B ハ F ヲ中心トスル圓周中ニアルヲ知ル.
故ニ兩圓周ハ A ノ他ニ B ナル共通點ヲ有ス.

53. 推論 相切スル兩圓ノ切點ハ中心ノ連結線中ニアリ.

例　題

1. 共心圓ノ內圓ニ切スル外圓ノ弦ハ切點ニテ等分セラル.
2. 相交ハル兩圓ノ壹交點ヨリ引ケル兩圓徑ノ各端ト他ノ壹交點トハ同直線中ニアリ.
3. 外切兩圓ノ壹交點ヲ過ギテ壹直線ヲ引ケバ其對傍ニアル兩欠圓ノ角ハ相等シ.
4. 相切スル兩圓ノ切點ヲ過ギテ貳直線ヲ引キ各圓周ヲ截レバ此截點ヲ連結スル弦ハ平行ス.
5. 相交ハル兩圓ノ貳交點ヲ通過シテ兩圓周ニ界セラルヽ兩直線ノ兩端ヲ連結スル兩弦ハ平行ス.
6. 相交ハル圓ノ貳交點ヲ通過シテ兩圓周ニ界セラルヽ兩平行線ハ相等シ.
7. 相交ハル兩圓ノ壹交點ヲ過ギテ兩圓周ニ界セラルヽ兩直線ノ各端ノ連結貳直線ハ常數角ヲ以テ相交ハル.
8. 外切貳圓ノ雙方ニ外切スル種々ノ圓ハ其中心ガ原兩圓ノ中心ヲ距ルノ差常數ナリ.
9. 兩交圓ノ壹交點ヲ過ギ兩圓周ニテ界セラルヽ最長ノ直線ハ中心ヲ連結スル線ノ2倍ニ等シ.
10. 外切兩圓ニ共通ノ壹切線ヲ引ケバ兩圓ノ切點ト切線ノ兩切點ノ連結線ハ互ヒニ直角ヲ成ス.
11. 三角形ノ外方ニ於テ各邊ヲ底邊トシテ三個ノ等邊三角形ヲ畫クヰ (1) 其三個ノ三角形ノ外切圓周ハ壹點ニ會ス,(2) 其三中心ノ連結三線ハ等邊三角形ヲナス.

12. 四角形ノ各邊ヲ直徑トシテ四圓ヲ畫クﾄキ其相隣邊ヲ直徑トスル兩圓ノ各通弦ハ平行ス.

13. 兩圓ノ中心距離ヲ c トシ兩圓半徑ノ和ヲ s トシ差ヲ d トスレバ

(1) $c>s$ ナルﾄキ兩圓ハ外方ニ相離ル,

(2) $c=s$ ナルﾄキ兩圓ハ外切ス,

(3) $c<s$ ニシテ $c>d$ ナルﾄキ兩圓ハ相交ハル,

(4) $c=d$ ナルﾄキ兩圓ハ內切ス,

(5) $c<d$ ナルﾄキ兩圓ノ內其壹圓ハ他圓ノ內ニアリテ相離ル.

14. 兩圓ノ半徑 8 及 7 尺ナルﾄキ其中心距離 10 或ハ 15 或ハ 17 尺ナルﾄキノ場合ヲ示セ.

15. 同上半徑 8 及 7 尺ナルﾄキ中心距離 2 或ハ 1 或ハ $\frac{1}{2}$ 尺ナルﾄキノ場合ヲ示セ.

第六節　問題

54. 問題 (Problem) 幾何學ニ於テ作圖ノ方法ヲ求ムルコヲ問題(總論 10.)ノ解法トイフ.

問題解法ニ用フル器械ハ直線ヲ引クコニ用フル定矩及ヒ圓周ヲ畫クト直線ノ長サヲ比較スルニ用フル兩脚器ナリ.

公法

55. 公法 (Postulates) 即チ假作法トハ證明等ヲ要セズシテ作圖シ得ベキ問題ヲイフ即チ次ノ如シ.

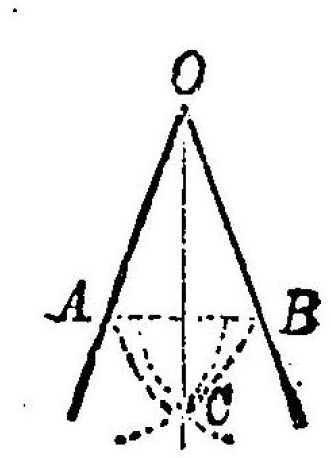
(a) 或壹點ヨリ他ノ壹點ニ直線ヲ引クコヲ得.

(b) 有限ノ直線ヲ任意ノ長サニ延長スルコヲ得.

(c) 任意ノ點ヲ中心トシ任意ノ長サヲ半徑トシテ圓ヲ畫クコヲ得.

問題壹

56. 定角ヲ貳等分セヨ.



(作法) AOB ヲ定角トス.

兩脚器ヲ用ヒテ OA, OB ヲ或等シキ長サニ度リ A 及ヒ B ヲ中心トシ AB ノ半ヨリ小ナラザル長サヲ半徑トシテ兩等圓ヲ作リ其圓周ノ交點 C ヲ得, CO ヲ連結スベシ

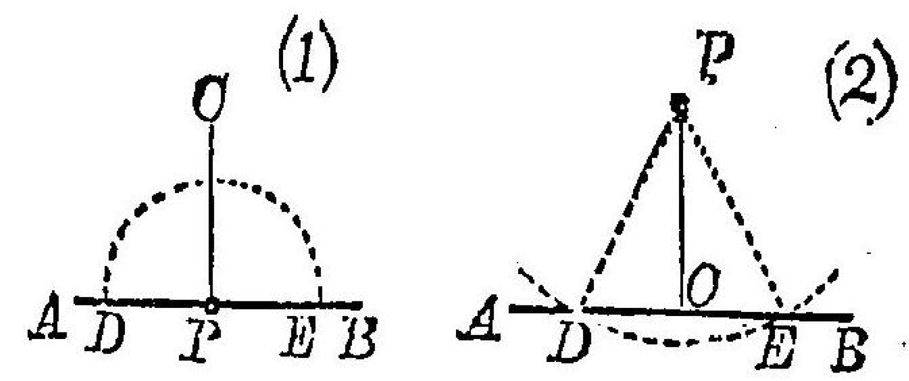
(證明) $\triangle AOC$, $\triangle BOC$ ハ三邊各相等シ, (作圖)

$\therefore \quad \angle AOC=\angle BOC.$ (壹本定理拾貳)

問題貳

57. 壹定點ヲ通過シテ壹定直線ニ垂線ヲ作レ.

(作法) AB ヲ定直線トシ P ヲ定點トス; 但シ定點 P ハ(1)ノ如ク AB 中ニアルカ, 或ハ(2)ノ如ク AB ノ外ニアリ.



P ヲ中心トシ任意ノ長ヲ半徑トシテ圓周ヲ畫キ D, E ニ於テ AB ヲ截ル而シテ問題壹ニヨリ $\angle DPE$ ヲ貳等分シテ PC ヲ引ケバ PC ハ AB ノ垂線ナリ.

(證明) (1)ニ於テ $\angle DPE=2R\llcorner$ $\therefore \angle DPC=\angle EPC=R\llcorner$

又 (2) ニ於テハ作法ニヨリ $\triangle DPC\equiv\triangle EPC$,

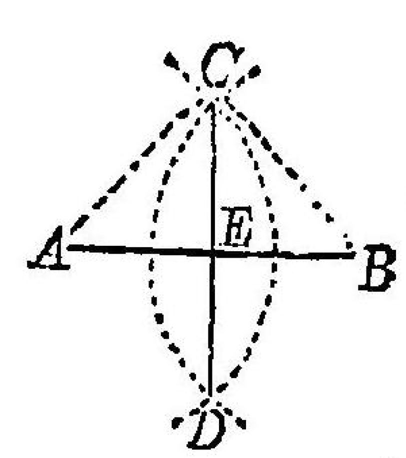
$\therefore \quad CP\perp AB.$

問題三

58. 有限ノ壹定直線ヲ貳等分セヨ.

(作法) AB ヲ有限直線トス,

A 及ヒ B ヲ中心トシ AB ノ半ヨリ小ナラザル半徑ヲ以テ兩等圓ヲ畫キ C 及ヒ D ニ於テ相交ハラシメ CD ヲ連結シ E ニ於テ AB ヲ截ル,



然ルトキ E ハ AB ノ貳等分點ナリ.

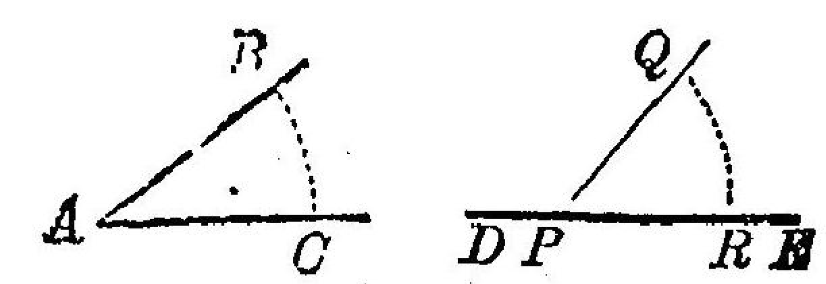
(證明) 定理拾六ニヨリ $CD\perp AB$,

又 $AC=BC$ $\therefore$ $AE=BE$ (壹本 53.)

問題四

59. 定直線中ノ定點ニ於テ定角ニ等シキ角ヲ作レ

(作圖) $\angle BAC$ ヲ定角トシ DE ヲ定直線トシ P ヲ其壹定點トス, 然ルトキ A ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ B, C ニ於テ角ノ貳邊ヲ截ル,



次ニ前ト等シキ半徑ヲ以テ P ヲ中心トシ圓ヲ畫キ $\frown BC=\frown QR$ トシ PQ ヲ連結スレバ $\angle QPR=\angle BAC$.

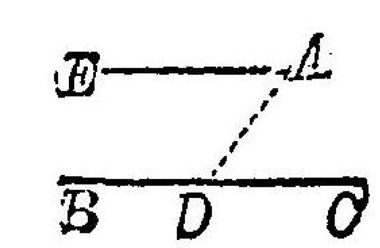
(證明) 定理貳ニヨリテ明カナリ.

問題五

60. 定直線外ノ壹定點ヨリ其直線ニ平行線ヲ作レ

(作圖) A ヲ定點トシ BC ヲ定直線トス.

A ヨリ任意ニ AD 線ヲ引キ BC ト D ニ交ハラシメ問題四ニヨリ $\angle ADC=\angle DAE$ トス.



(證明) 壹本定理拾六ニヨリ $AE\parallel BC$.

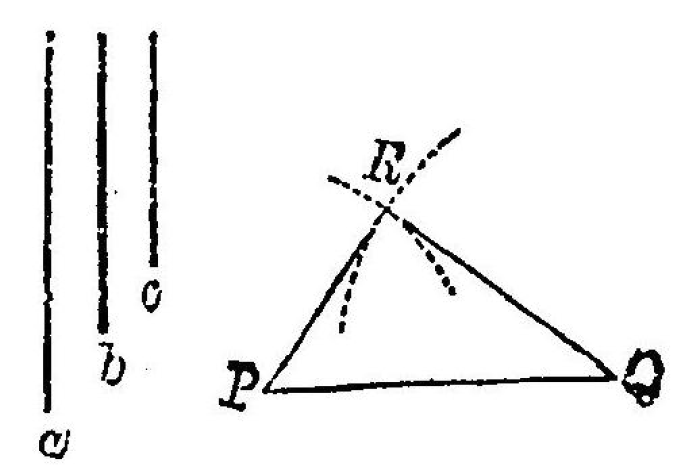
問題六

61. 三邊ノ長チ知リテ三角形チ作レ.

（作法） a, b, c チ既知ノ三邊トス.

PQ チ引キ之チ a ニ等シカラシム;

次ニ Q チ中心トシ b チ半徑トシ圓チ畫キ又 P チ中心トシ c チ半徑トシテ圓チ畫ク.



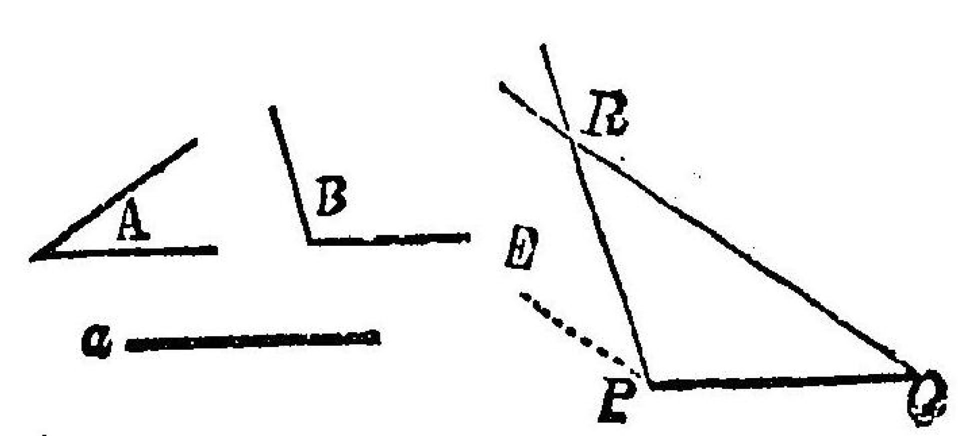
而シテ此兩圓周ノ交點 R チ得ベシ然ルヰ $\triangle PQR$ ハ所求ノ三角形ナリ

（證明） 何トナレバ $PQ=a$, $QR=b$, $PR=c$.

（界限） a, b, c ノ三線ノ其壹ツカ他ノ貳ツノ和ヨリ小ナラザルベカラズ.

問題七

62. 貳角及其壹角ノ對邊チ知リテ三角形チ作レ.



（作法） A, B チ兩角トシ a チ A 角ニ對スル壹邊トス.

$PQ=a$ ニ作リ又 $\angle RPQ=B$, $\angle RPE=A$ チ作ル, （問題四）

次ニ $QR \parallel PE$. （問題五）

然ルヰ PR ト QR ノ會點 R チ得ベシ即チ $\triangle PQR$ ハ所求ノ三角形ナリ.

（證明） $QR \parallel PE$ $\therefore$ $\angle R=\angle RPE=A$. （壹本定理拾六）

（界限） A, B 兩角ノ和ハ $2R\llcorner$ ヨリ小ナラザルベカラズ

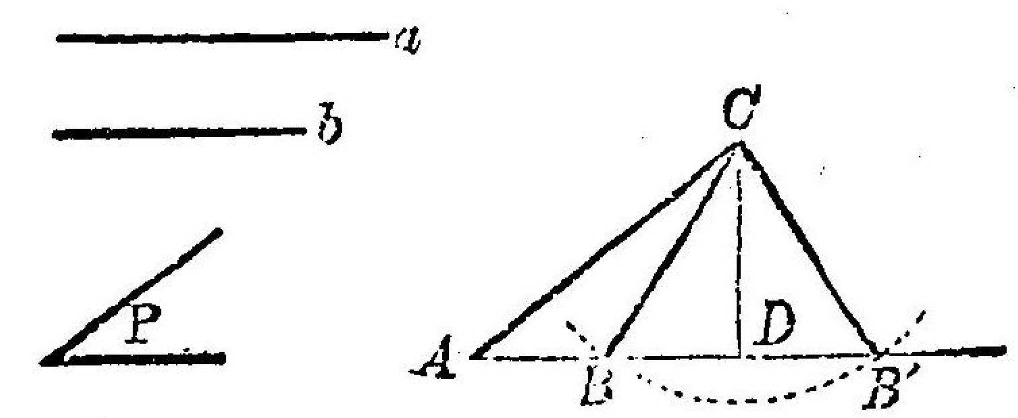
問題八

63. 貳邊及ヒ其壹對角チ知リテ三角形チ作レ.

（作法） a, b チ貳邊トシ P チ b ニ對スル壹角トス.

$\angle CAB=P$,

$AC=a$,



而シテ C チ中心トシ b チ半徑トシ圓周チ畫キ AB チ B 及ヒ B' ニ於テ截ル.

然ルヰ $\triangle ABC$, $\triangle AB'C$ ハ所求ノ三角形ナリ.

（證明） 何トナレバ $BC=B'C=b$.

（界限） CD チ AB ノ垂線トス.

(1) $a>b>CD$ ナルヰ $\triangle ABC$, $\triangle AB'C$ ノ貳ツチ得ベシ.

(2) $a>b=CD$ ナルヰ唯壹ツノ直角三角形 ADC チ得ベシ.

(3) $a>b<CD$ ナルヰ三角形チ畫キ得ル能ハズ.

(4) $a=b$ ナルヰ唯壹ツノ等脚三角形チ得ベシ,

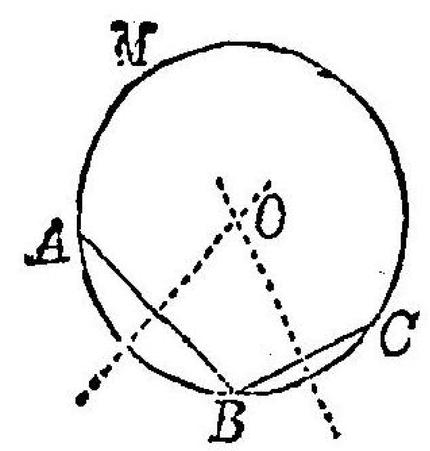
何トナレバ $BC=B'C=AC$ トナルカ故ニ圓周カ AB ト截ル兩點ノ其壹ツ B ハ A ニ合スルチ以テナリ.

(5) $a<b$ ナル片唯壹ツノ不等邊三角形ヲ得ベシ，

何トナレバ $BC=B'C>AC$ トナルガ故ニ圓周ガ AB ヲ截ル兩點ノ其壹ツ B ハ A ノ異方ニ落ツルヲ以テナリ

問題九

64. 壹圓ノ中心ヲ求メ

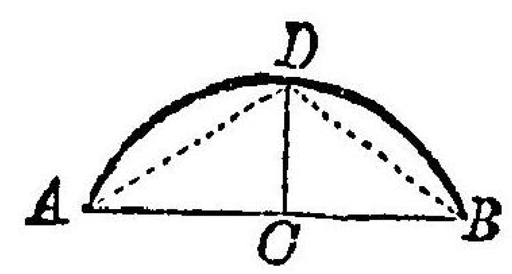


(作法) M ヲ壹圓トス，圓周中ニ任意ノ三點 A, B, C ヲ取リ AB, BC ヲ連結ス，而シテ AB, BC ヲ直角ニ貳等分スレハ其貳等分線ノ交點 O ハ中心ナリ．

(證明) 定理四ヲ視ヨ．

問題拾

65. 定弧ヲ貳等分セヨ



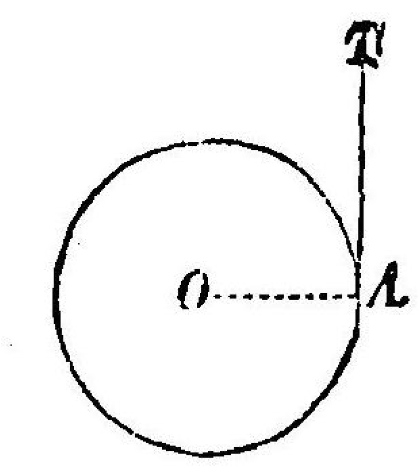
(作法) 定弧ヲ $\frown AB$ トス，AB 弦ヲ引キ之ヲ直角ニ貳等分シテ CD ヲ引キ D ニ於テ弧ヲ截ルベシ．

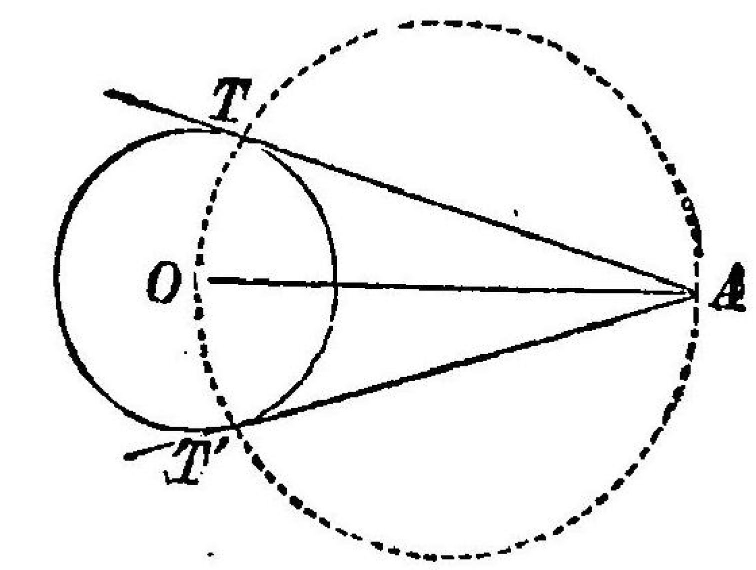
(證明) $AC=BC,\ CD\perp AB \quad \therefore\ AD=BD,$

$\frown AD=\frown BD.$ (定理三)

問題拾壹

66. 壹定點ヲ過ギテ壹定圓ニ切線ヲ作レ．





(作法) O ヲ中心トシ A ヲ定點トス．

第壹ニ定點ガ圓周ニアル片 AO ヲ連結シ $\angle OAT=R\llcorner$，(問題四) 然ル片 AT ハ所求ノ切線ナリ．

第貳ニ定點ガ圓外ニアル片 AO ヲ中徑トシ圓ヲ畫キ T 及ヒ T' ニ於テ定圓周ヲ截ル而シテ AT, AT' ノ兩ツガ所求ノ切線ナリ．

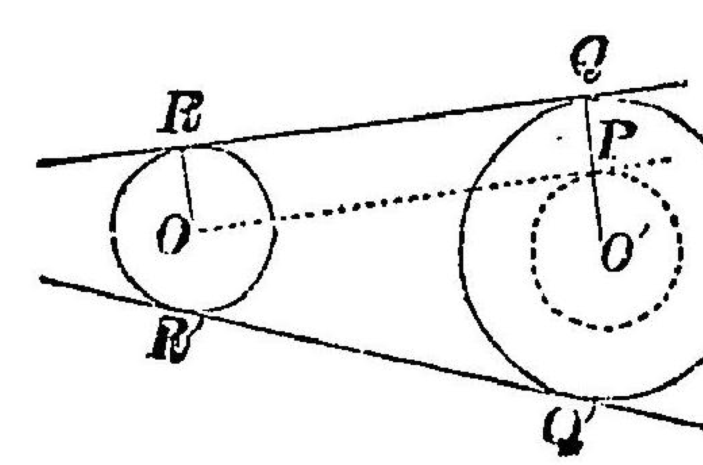
(證明) 第壹ニ於テハ $OA\perp AT$，又第貳ニ於テハ AO ハ圓徑ナルガ故ニ定理拾ニヨリ $\angle ATO=\angle AT'O=R\llcorner$．

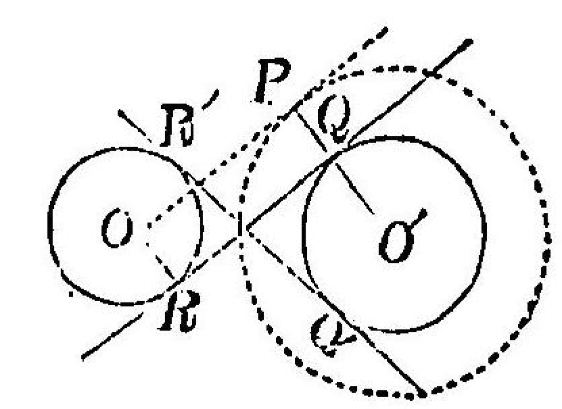
之ニ由テ **42.** (b) ニヨリ AT, AT' ハ切線ナルコヲ知ル．

(界限) 定點 A ガ圓内ニアル片ハ作圖ヲ得ル能ハズ．

問題拾貳

67. 兩定圓ニ通切線ヲ作レ．





（作法） O, O' ヲ兩圓ノ中心トス．

O ヲ中心トシ $O'Q-OR$ 或ハ $O'Q+OR$ ヲ半徑トシテ圓ヲ畫ク而シテ O ヨリ此圓周ニ切線 OP ヲ畫ク． （問題拾壹）

$O'P$ 或ハ其引長線ト O' ヲ中心トスル定圓周ト Q ニ於テ相交ハリ又 $\angle O'QR=R\llcorner$ ニ作レバ RQ ハ所求ノ通切線ナリ．

（證明） $O'P=O'Q-OR=O'Q-PQ$,

或ハ $O'P=O'Q+OR=O'Q+PQ$,

$\therefore \quad OR=PQ.$

又 $OPQR$ 四角形ニ於テ $\angle P=\angle R=R\llcorner$ 且ツ $OR=PQ$ ナルガ故ニ此四角形ハ直方形ナリ $\therefore \angle Q=R\llcorner$.

（界限） 本題ハ切線ガ兩圓ノ同側ニアル片ト異側ニアル片ノ兩ツノ場合アリ．

(1) 兩圓ガ相離レヽ片兩圓ノ同側及ヒ異側ニ於テ貳ツヽ(即チ RQ, $R'Q'$)都合四ツノ切線ヲ作リ得ベシ．

(2) 兩圓ガ外切スル片兩圓ノ同側ノ切線貳ツ異側ノ切線壹ツ都合三ツノ切線ヲ作リ得ベシ．

(3) 兩圓ガ相交ハル片兩圓ノ同側ノ切線貳ツノミヲ作リ得ベシ．

(4) 兩圓ガ內切スル片兩圓ノ同側ノ切線唯壹ツノミヲ作リ得ベシ

(5) 壹圓ガ他圓ノ內ニ入リテ相離ルヽ片切線ヲ作ルコ能ハズ．

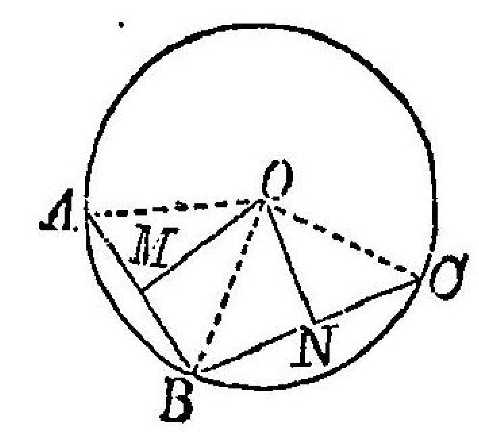
問題拾三

68. 三定點ヲ通過シテ圓ヲ作レ．

（作法） A, B, C ヲ三定點トス．

AB, BC ヲ連結シ MO, NO ヲ以テ AB, BC ヲ直角ニ貳等分ス

而シテ MO, NO ノ交點 O ハ所求ノ圓ノ中心ナリ．



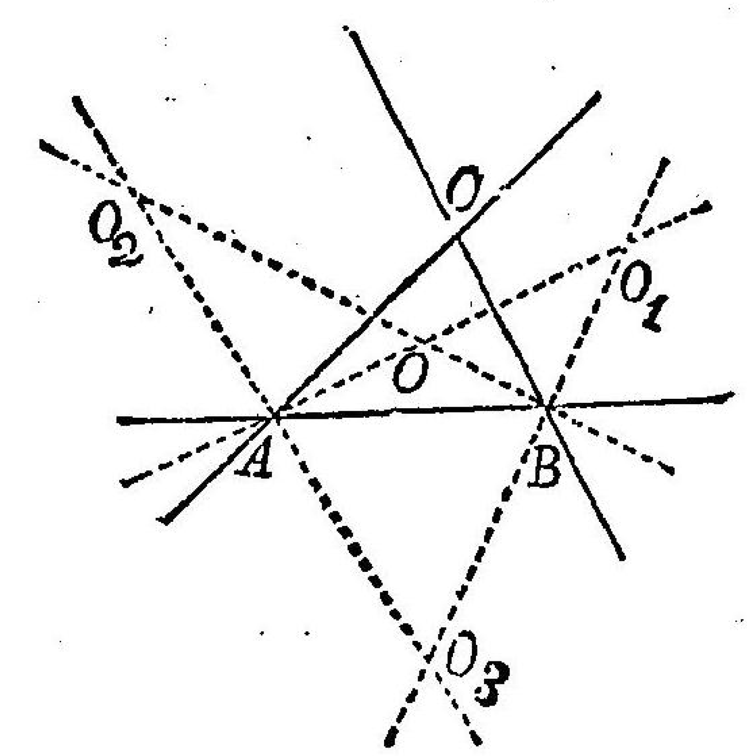
（證明） 定理六ニヨリ

$AO=BO=CO.$

界限） A, B, C 三點ガ壹直線ニアル片ハ作圖ヲ得ル能ハズ

問題拾四

69. 同壹點ニ於テ相交ラザル三直線ニ切シテ圓ヲ作レ．



（作法） AB, BC, CA ヲ三直線トシ A, B, C ヲ各貳直線ノ交點トス．

AO_1, O_2O_3 ヲ以テ A 角及ヒ其外角ヲ貳等分シ又 BO_2, O_1O_3 ヲ以テ B 角及ヒ其外角ヲ貳等分ス，

而シテ此等ノ等分線ノ交點 O, O_1, O_2, O_3 ノ四點ハ所求ノ圓ノ中心ナリ．

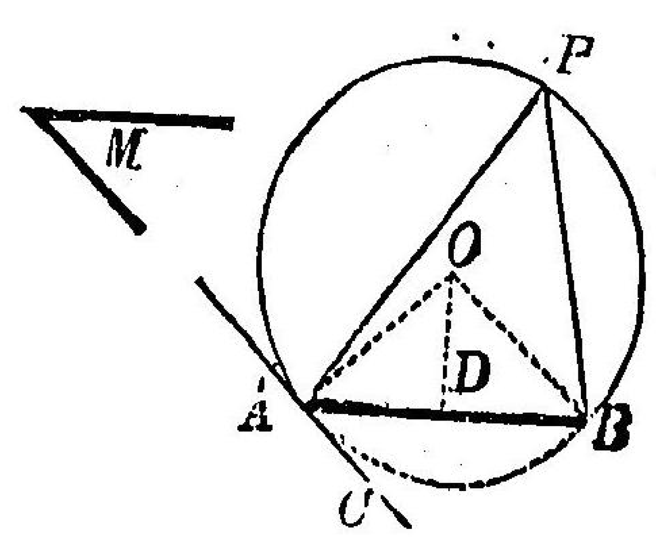
(證明) 第壹本定理三拾ヲ視ヨ.

(界限) 三直線ノ兩ツガ平行スルトキハ唯貳圓ノミヲ畫キ得ベシ又三直線ガ凡ベテ平行スルトキハ圓ヲ畫ク能ハズ.

問題拾五

70. 定直線ヲ弦トシ定角ヲ有スル欠圓ヲ作レ.

(作法) AB ヲ定直線トシ M ヲ定角トス.



AB ニ於テ $\angle BAC=M$ ヲ作ル, 次ニ $AC\perp AO$ トシ OD ヲ以テ AB ヲ直角ニ貳等分ス然レトキ AO 及ヒ DO ノ交點 O ヲ中心トシ AO ヲ半徑トシ APB ナル弧ヲ畫ケバ APB ハ所求ノ欠圓ナリ.

(證明) 作法ニヨリ $AO=BO$, 又 AC ハ APB 弧ノ切線ナルコトヲ知ル.

又 P ヲ欠圓周ノ或壹點トスレハ定理拾三ニヨリテ

$$\angle APB=\angle BAC=M.$$

問題拾六

71. 定圓ヲ截リテ定角ヲ有スル欠圓ヲ作レ.

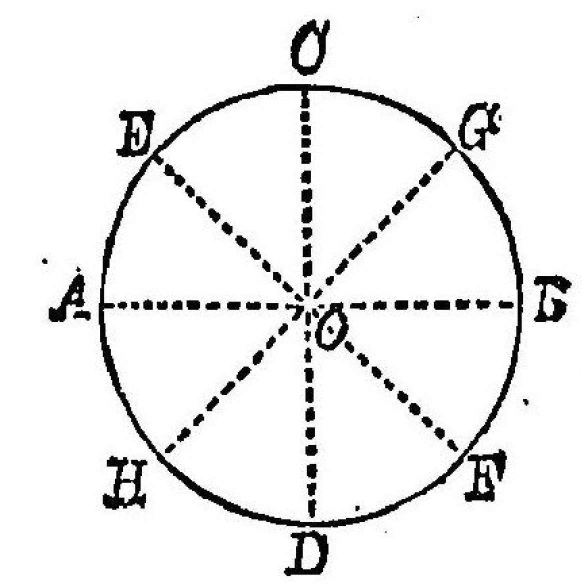
(作法) 前圖ニ於テ O ヲ定圓ノ中心トシ M ヲ定角トス.

定圓周ニ於テ任意ノ點 A ヲ取リ切線 AC ヲ引キ $\angle BAC=M$ ニ作レバ前ノ理ニヨリ APB ハ所求ノ欠圓ナリ.

問題拾七

72. 定圓ニ內切或ハ外切 4,8,16,32……ノ正多角形ヲ作レ.

(作法) O ヲ定圓ノ中心トス



$AB\perp CD$ ヲ作ル然ルトキ $\angle AOC=\angle BOC=\angle BOD=\angle DOA=R\llcorner$ ナルガ故ニ $\frown AC, \frown BC, \frown BD, \frown DA$ ハ相等シ, (定理貳) 又此四等弧ヲ各 E, G, F, H ニ於テ貳等分スレハ圓周ヲ八等分シ得ベシ以下此ノ如ク 16, 32 等ニ等分スルコトヲ得ベシ.

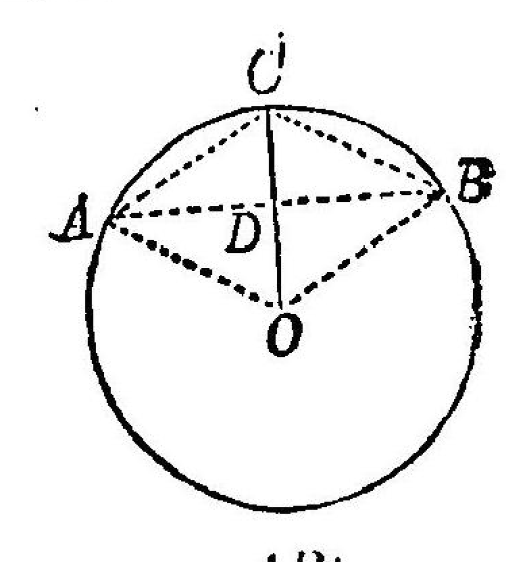
而シテ此圓周ノ等分點ヲ通過シテ外切多角形ヲ作レバ正多角形ヲ得,(定理拾五) 內切多角形ヲ作レバ亦タ正多角形ヲ得ベシ.

(47. 推論)

問題拾八

73. 定圓周ヲ 3, 6, 12, 24……等分セヨ.

(作法) O ヲ中心トス, 半徑 CO ヲ AB ニ於テ直角ニ貳等分ス,



然ルトキ $\frown AB$ ハ圓周ノ $\frac{1}{3}$ ニシテ $\frown AC$ ハ $\frac{1}{6}$ ナリ又 $\frown AC$ ヲ貳等分スレバ $\frac{1}{12}$ ヲ得ベシ.

(證明) 作法ニヨリ $\triangle AOC, \triangle BOC$ ハ等邊三角形ナリ故ニ $\angle AOB=\frac{4R\llcorner}{3}$, $\angle AOC=\frac{4R\llcorner}{6}$.

解析及總合法

74. 解析法 (Ânalysis) トハ問題ノ作法ガ已ニ求メ得タルモノトシ之ニヨリテ作法ノ關係ヲ推求スル法ナリ.

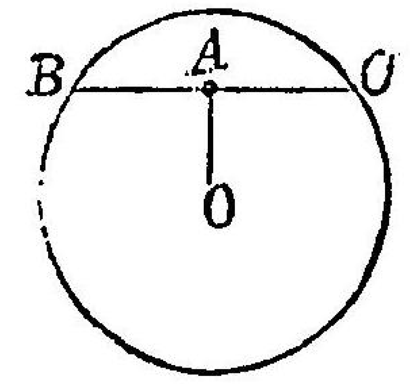
75. 總合法 (Synthesis) トハ解析法ニヨリテ得タル關係ニヨリテ作法ヲ施スノ法ナリ.

此兩法ヲ用ヒテ問題ヲ解スルハ普通ノ解法ニハアラザレ𪜈學生ガ之ヲ用フルコニヨリ屢々解シ難キ問題ヲ推求シ得ルコアリテ甚ダ便利ナリトス

問題拾九

76. 圓內ノ壹定點ヲ通過シ且ツ其定點ニテ貳等分セラルベキ弦ヲ作レ.

O ヲ圓ノ中心トシ A ヲ定點トス.



(解析法)　作法ガ已ニ成リタルモノトシ BC ヲ弦トスレバ

$$AB=AC,$$

$$\therefore\ BC\perp AO. \qquad \text{(定理四)}$$

(總合法)　之ニ由テ先ヅ定點 A ト O ヲ連結スベシ,次ニ A ヲ過ギテ BC ヲ引キ $\angle BAO=R\llcorner$ ニ作ルベシ,然ルЕ BC ハ所求ノ弦ナリ.

例　題

1. 直線ノ壹端ニ垂線ヲ作レ.

2. 直角ヲ三等分セヨ.　　3. 有限直線ヲ三等分セヨ.

4. 貳定點ヨリ等距離ナル壹點ヲ壹定直線中ニ求メヨ.

5. 貳定點ヨリ貳直線ヲ引キ壹定直線ニ會シテ其定直線ト等角ヲナスコヲ求ム.

6. 壹定角內ノ壹定點ヲ通過シテ壹直線ヲ引キ角ノ貳邊ト等角ヲナサシムルコヲ求ム.

7. 壹定角內ノ壹定點ヲ通過シテ壹直線ヲ引キ角ノ貳邊ニ分界セラレ而シテ其定點ニ於テ貳等分トナルコヲ求ム,但シ此解法ハ兩ツアルコヲ示セ.

8. 壹點ヨリ貳定直線ニ至ル距離ノ和ヲ知リテ其壹點ヲ求ム,但シ此解法ハ幾ツアリヤ又界限ヲ示セ.

9. 三定點ヨリ等距離ナル壹直線ヲ作レ,但シ此解法ハ三ツアルコヲ示セ.

10. 貳邊及ヒ壹角ヲ知リテ平行四邊形ヲ作レ.

11. 壹邊ヲ知リテ正方形ヲ作レ.

12. 周邊及ヒ兩角ヲ知リテ三角形ヲ作レ,又界限ヲ示セ.

13. 貳邊ノ差或ハ和及ヒ底邊,頂角ヲ知リテ三角形ヲ作レ.

14. 底邊,頂角及ヒ頂角ヨリ底邊ニ至ル垂線ヲ知リテ三角形ヲ作レ.

15. $\triangle ABC$ ノ BC ニ平行シテ DE ヲ引キ D ニ於テ AB ヲ截リ E ニ於テ AC ヲ截リ $DE=DB+EC$ 及ヒ $DE=DB\sim EC$ ナラシムルコヲ求ム.

16. 直交兩定直線ニ貳邊ヲ置キ他ノ既知壹直線ニ壹角ヲ置キテ正方形ヲ作レ,但シ此解法幾ツアリヤ.

17. 菱形ニ內切正方形ヲ作レ.

18. 對角線ト壹邊ノ和或ハ差ヲ知リテ正方形ヲ作レ.

19. 三角形ノ各角ヨリ對邊ニ引ケル三垂線ノ底點ノ位置ヲ知リテ三角形ヲ作レ.

20. 各邊ノ中央點ノ位置ヲ知リテ三角形ヲ作レ.

21. 三中央線ヲ知リテ三角形ヲ作レ.

22. 底邊ト底邊ノ中央線及ヒ頂角ヲ知リテ三角形ヲ作レ.

23. 壹底角,底邊及ヒ他貳邊ノ和或ハ差ヲ知リテ三角形ヲ作レ.

24. 貳定點ヨリ壹定直線ニ迄貳直線ヲ引キ其壹交角ヲ他ノ壹交角ノ貳倍ニ等シクスルヿヲ求ム.

25. 兩定圓ノ各ニ切線ヲ引キ壹定直線ニ會シ之ト等角ヲナサシムルヿヲ求ム.

26. 定圓ノ內切三角形ヲ作レ,但シ兩角ヲ知ル.

27. 同上,底邊及ヒ頂角ヨリ底邊ニ引ク垂線ヲ知ル.

28. 同上,頂角ノ中央線及ヒ頂角ヨリ引ク垂線ヲ知ル.

29. 同上,頂角ノ貳等分線及ヒ兩底角ノ差ヲ知ル.

30. 同上,頂角及ヒ其垂線ニテ分ツ底邊ノ兩部分ノ差ヲ知ル

31. 定圓ノ外切三角形ヲ作レ,但シ兩角ヲ知ル.

32. 同上,頂角及ヒ底邊ヲ知ル.

33. 同上,周邊及ヒ頂角ヨリ引ク垂線ヲ知ル.

34. 圓外ノ壹定點ヨリ圓周ニ最大及ヒ最小ノ直線ヲ引ケ.

35. 共心貳定圓ニ壹直線ヲ引キ各圓周ニテ三等分トナルヿヲ求ム.

36. 四邊ト對邊ノ各中央點ノ連結壹線ヲ知リテ四角形ヲ作レ.

37. 有限直線上ニ等邊三角形及ヒ正六角形ヲ作レ.

38. 兩交圓周ニ止マリ且壹交點ニテ貳等分セラルヽ直線ヲ作レ.

39. 兩交圓周ニ止マリ且壹交點ヲ過キテ定長ノ直線ヲ引ケ,但シ界限ヲ求ム.

40. 兩圓ヲ截リテ a 及ヒ b ナル長サノ弦ヲ有タシムベキ壹直線ヲ作レ,又界限ヲ示セ.

第　三　本

面　　積

定　　義

1. 面積 (Area) トハ表面ガ有ツ所ノ量ヲイフ.

此ニ示ス所ハ平面直線圖形ノ面積ナリ.

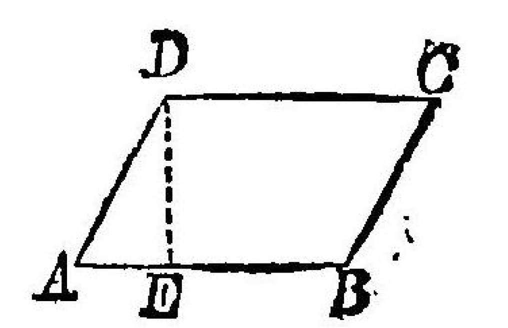
兩ツノ圖形ガ全等形ナルヿヲ示スニハ其兩形ガ全ク相合スルヿノ場合ナルハ已ニ示セシ所ナリ,(壹本35.)

兩ツノ圖形ガ全ク相合セザルモ面積相等シキ時ハ其大サハ相等シ然レ圧全等形ニアラズ.

以下示ス所ニ於テ兩圖形ガ相等シトイフヿハ前ニ示セシ如ク全等形ノモノニ限ラザルナリ.

2. 高 (Altitude) 平行四邊形ノ壹邊ヲ底邊トスレバ之ト其對邊トヘ間ノ距離ヲ高トイフ,

例ヘバ $AB \perp DE \quad \therefore \quad DE$ ハ高ナリ.



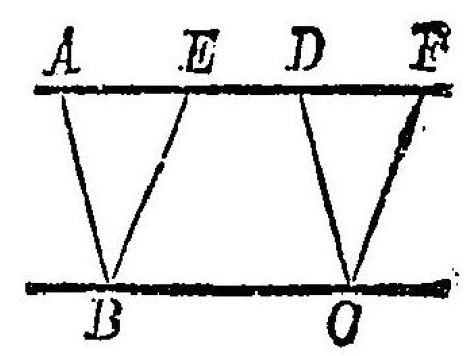
三角形ノ高ハ頂角ヨリ底邊ニ引ク垂線ヲイフ.

第壹節 面積之相等

定理壹

3. 同平行兩直線ノ間ニアル同底ノ平行四邊形ハ相等シ.

(特說) $ABCD$, $EBCF$ ヲ同底 BC ヲ有シ同平行線 AF, BC ノ間ニアル平行四邊トス, 然ルキ $\square ABCD=\square EBCF$.



(證明) $\square ABCD$, $\square EBCF$ ハ平行四邊形ナリ故ニ

$AB=CD$, $BE=CF$,

$AD=BC=EF$, (壹本定理廿壹)

即チ $AE=DF$,

故ニ壹本定理拾貳ニヨリテ

$\triangle ABE\equiv\triangle DCF$.

$\therefore$ $\square ABCF-\triangle ABE=\square ABCF-\triangle DCF$, (普通公理 c)

即 $\square ABCD=\square EBCF$.

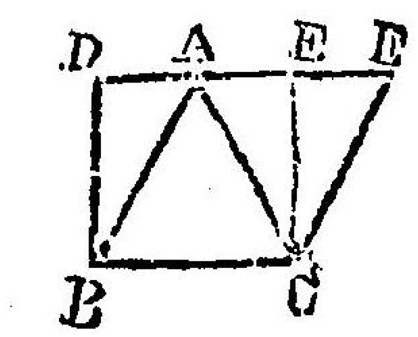
4. **推論壹** 平行四邊形ノ積ハ其底及ヒ高ヲ兩邊トスル直方形ノ積ニ等シ.

5. **推論貳** 貳ツノ平行四邊形ガ底邊及ヒ高サ相等シキトキハ其面積相等シ,又高サ相等シキトキハ底邊ノ大ナルモノガ其面積大ニシテ底邊相等シキトキハ高サノ大ナルモノガ其面積大ナリ.

定理貳

6. 三角形ノ面積ハ之ト等底.等高ノ直方形ノ半ニ等シ.

(特說) $\triangle ABC$ ト直方形 $DBCE$ ト同底及ビ同高ヲ有スルモノトス然ルキ $\triangle ABC=\frac{1}{2}\square DBCE$.



(證明) C ヲ通過シテ CF ヲ引キ AB ニ平行セシム而シテ DE ノ引長線ト F ニ會セシム.

然ルキ $\square ABCF$ ハ平行四邊形ナルガ故ニ壹本定理廿壹ニヨリテ

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\square ABCF$.

又 $\square DBCE=\square ABCF$, (4.) $\therefore$ $\triangle ABC=\frac{1}{2}\square DBCE$.

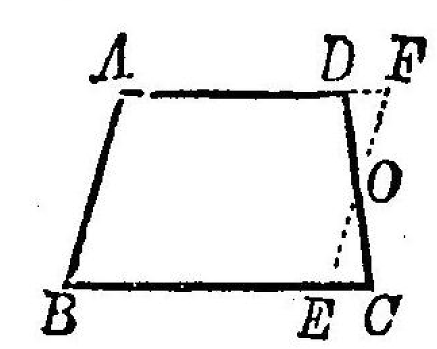
7. **推論壹** 等底等高ノ兩三角形ハ相等シ.

8. **推論貳** 同直線ニ於テ等底ヲ有スル等積ノ兩三角形ノ頂點ノ連結線ハ底邊ニ平行ス.

定理三

9. 兩平行四邊形ノ面積ハ平行貳邊ノ半和ト其兩邊ノ垂直距離トヲ兩邊トスル平行四邊形ノ面積ニ等シ.

(特說) $\square ABCD$ ヲ兩平行四邊形トシ, AD, BC ヲ平行貳邊トス然ルキ其面積ハ $\frac{1}{2}(AD+BC$ ヲ底邊トシ AD BC 間ノ垂線ヲ高トスル平行四邊形ノ面積ニ等シ.



(證明) DC ノ中央點 O ヲ通過シ且ツ AB ニ平行シテ EF ヲ引ク, 然ルキ $\triangle DOF$, $\triangle EOC$ ニ於テ

$DO=CO$, 又 $AF\parallel BC$ ナルガ故ニ $\angle FDO=\angle C$,

又 $\angle DOF=\angle EOC$ $\therefore$ $\triangle DOF\equiv\triangle COE$. (壹本定理拾五)

$\therefore$ 五角形 $ABEOD+\triangle COE=$ 五角形 $ABEOD+\triangle DOF$,

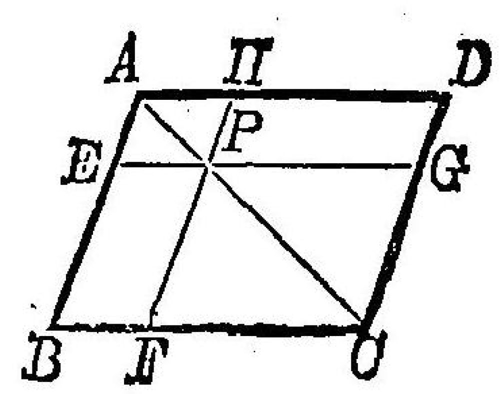
$\therefore$ $\square ABCD=\square ABEF$.

定義

10. 平行四邊形ノ兩邊ノ各ニ平行シテ兩直線ヲ引キ原形ヲ四ツノ平行四邊形ニ分ツ片原形ノ對角線ニ沿ヒタル兩形ノ他ノ兩形ヲ名ツケテ前ノ兩形ノ餘形トイフ.

定理四

11. 平行四邊形ノ對角線ニ沿ヒタル貳ツノ平行四邊形ノ餘形ハ互ヒニ相等シ.



(特說) $\square EBFP$, $\square HPGD$ ヲ $\square AEPH$,$\square PFCG$ ノ餘形トス, 然ル片

$$\square EBFP=\square HPGD.$$

(證明) $\square ABCD$ ハ平行四邊形ナルガ故ニ壹本 77. ニヨリテ

$$\triangle ABC=\triangle ACD,$$

又 $\triangle AEP=\triangle AHP$, 及 $\triangle PFC=\triangle PGC$,

$$\therefore \triangle ABC-\triangle AEP-\triangle PFC=\triangle ACD-\triangle AHP-\triangle PGC,$$

即 $\square EBFP=\square HPGD$.

定義

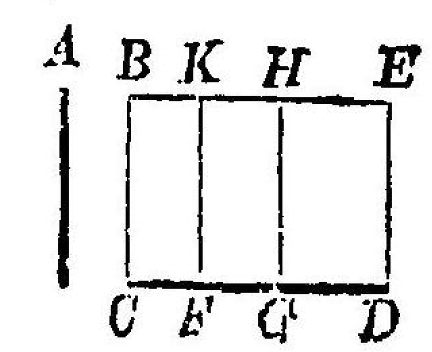
12. 既知兩直線ヲ隣邊トスル直方形ヲ稱シテ其兩直線ニテ有タレタル直方形トイフ.

同法ニヨリ既知壹直線ヲ壹邊トスル正方形ヲ其直線ニテ有タレタル正方形トイフ又單ニ其直線上ノ正方形トイフ.

13. 壹直線中ノ壹點ハ其直線ヲ內部ニ分ツ（或ハ單ニ其直線ヲ分ツ）トイフ,又其點ガ直線ノ引長線中ニアル片ハ其直線ヲ外部ニ分ツトイフ.

定理五

14. 貳定直線ニテ有タレタル直方形ハ其壹直線ト他ノ壹直線ノ若干分トニテ有タレタル若干直方形ノ和ニ等シ.



(特說) A, CD ヲ貳定直線トシ F, G ヲ CD ノ分點トス, 然ル片 A 及ビ CD ニテ有タレタル直方形ハ A 及ヒ CF, FG, GD ノ各ニテ有タレタル直方形ノ和ニ等シ.

(證明) BC ヲ引キ $BC\perp CD$, 及ビ $BC=A$ トナシ FK, GH ヲ CD ニ垂直ニ畫キ直方形 $BCDE$ ヲ分ツ片ハ

$$\square BCDE=\square BCFK+\square KFGH+\square HGDE,$$

即チ A 及ヒ CD ニテ有タレタル直方形ハ A 及ビ CF, FG, GD ノ各ニテ有タレタル直方形ノ和ニ等シ

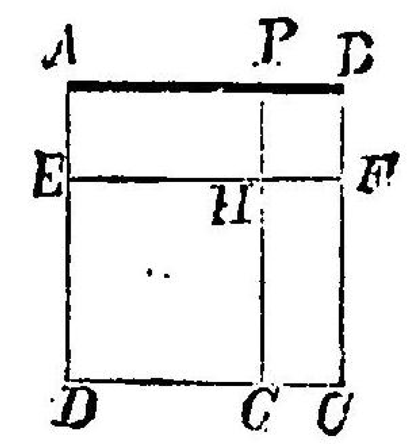
15. 推論 壹直線ヲ貳分スル片其壹分ト全線ニテ有タレタル直方形ハ其壹分上ノ正方形ト兩分線ニテ有タレタル直方形ノ和ニ等シ.

定理六

16. 貳直線ノ和ノ正方形ハ各直線ノ正方形ノ和ヨリ大ナルヿ兩直線ニテ有タレタル直方形ノ貳倍丈ケナリ.

(特說) AP, BP チ貳直線トスレバ AB ハ其和ナリ，然ルト

$$AB^2=AP^2+BP^2+2AP\times BP$$



(註) AB 上ノ正方形トイフ代リニ AB^2 又 AP, BP ニテ有タレタル直方形トイフ代リニ $AP\times BP$ チ用フ以下之ニ倣ヘ.

(證明) AB ノ上ニ $ABCD$ 正方形チ作リ $BP=BF$ トシ P 及ビ F チ通過シテ AB 及ビ BC ニ垂線 PG 及ビ FE チ作レバ $AB=BC, BP=BF$ ナルガ故ニ $AP=CF$，即チ $EH=HG$,

$$\therefore\ \square ABCD=AB^2,\ \square EHGD=AP^2,\ \square PBFH=BP^2$$

$$\square APHE=\square HFCG=AP\times BP$$

但 $\square ABCD=\square EHGD+\square PBFH+\square APHE+\square HFCG$

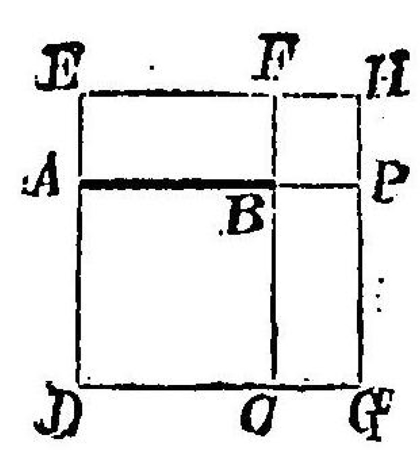
$$\therefore\ AB^2=AP^2+BP^2+2AP\times BP.$$

定理七

17. 貳直線ノ差ノ正方形ハ各直線ノ正方形ノ和ヨリ小ナルコ貳直線ノ直方形ノ貳倍丈ケナリ

(特說) AB チ AP, BP 貳直線ノ差トス，然ルト

$$AB^2=AP^2+BP^2-2AP\times BP$$



(證明) 正方形 $ABCD$ チ作リ $BP=BF$ トシ P 及ビ F チ過ギテ AD 及ビ CF ニ垂線 GH 及ビ EH チ引ク，然ルト $AB=BC, BP=BF$ ナルガ故ニ $AP=CF$ 又 $PH=FH$ $\therefore\ \square EAPH=\square FCGH$.

$$\therefore\ \square ADCB=\square EDGH+\square FBPH-\square EAPH-\square FCGH$$

$$\therefore\ AB^2=AP^2+BP^2-AP\times BP-AP\times BP$$

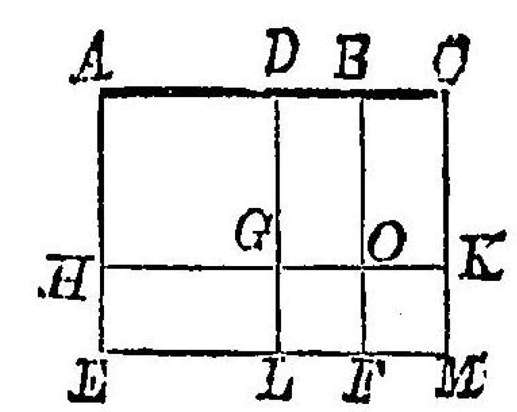
$$=AP^2+BP^2-2AP\times BP.$$

定理八

18. 貳直線上ノ各正方形ノ差ハ其貳線ノ和ト差ノ直方形ニ等シ.

(特說) AB, BC チ貳直線トス，然ルト

$$AB^2-BC^2=(AB+BC)(AB-BC).$$



(證明) $BD=BC$ ニ作リ而シテ正方形 $AEFB$ 及ビ $AHGD$ チ作ル，而シテ $CM\perp AC$ ニ作レバ

$GH=GD, AB=BF$ $\therefore$ $GL=GO$,

即チ $\square GLFO$, 及 $\square OFMK$ ハ DB 即チ BC 上ノ正方形ニ等シ：又 $\square HELG, \square DGOB$ 及ビ $\square BOKC$ ハ相等シ，

$$\therefore\ \square AEFB-\square GLFO=\square AHGD+\square HELG+\square DGOB$$

$$=\square AHGD+\square BOKC+\square DGOB$$

$$=\square AHKC=AH\times AC$$

故 $AB^2-BC^2=(AB-BC)(AB+BC)$.

19. **推論** 壹直線ガ壹點ニヨリテ貳等分セラレ又或壹點ニヨリテ内部或ハ外部ニ兩分セラルヽ片其兩部分ノ直方形ハ全線ノ半ノ正方形ト貳ツノ分點間ノ距離ノ正方形ノ差ニ等シ

$AC=BC$ トス然ルト定理八ニヨリ

$$CB^2-CP^2 \text{ 或ハ } CP^2-CB^2=(CB+CP)(CB-CP)$$

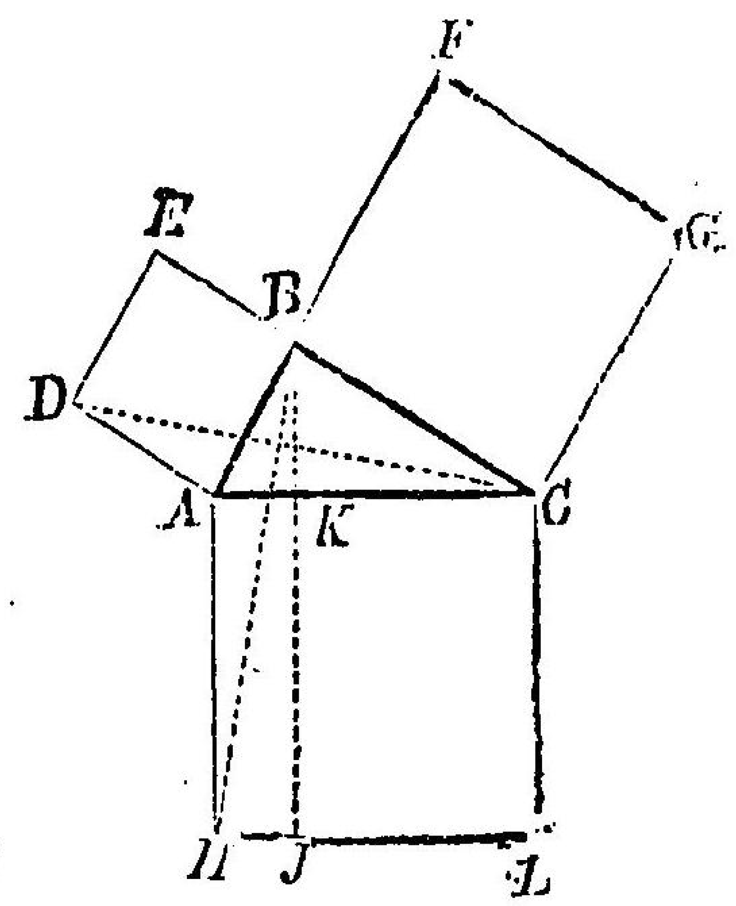
或ハ $(CP+CB)(CP-CB)$,

$\therefore$ CB^2-CP^2 或ハ $CP^2-CB^2=(CA+CP)(CB-CP)$
或ハ $(CA+CP)(CP-CB)$ $=AP\times BP.$

定 理 九

20. 直角三角形ノ斜邊上ノ正方形ハ他貳邊上ノ正方形ノ和ニ等シ.

（特說） $\triangle ABC$ ヲ直角三角形トシ $\angle B=R\llcorner$ トス,
然ルトキ $AC^2=AB^2+BC^2.$



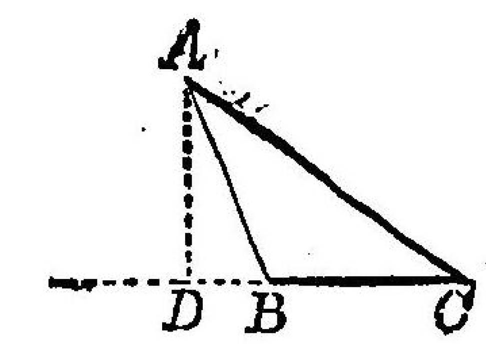
（證明） 正方形 $ABED$, $ACLH$ 及ビ $BCGF$ ヲ作ル
而シテ $BJ\perp HL$ トス,
然ルトキ $\triangle ABH, \triangle DAC$ ニ於テ $AB=AD, AH=AC,$
又 $\angle BAH=\angle BAC+\angle CAH$
$=\angle BAC+R\llcorner$
及ビ $\angle DAC=\angle BAC+\angle DAB$
$=\angle BAC+R\llcorner,$
故ニ $\angle BAH=\angle DAC,$
$\therefore$ $\triangle ABH\equiv\triangle DAC,$ （壹本定理四）
而シテ $\triangle DAC=\frac{1}{2}\square ABED,$ $\triangle ABH=\frac{1}{2}\square AKJH,$（定理貳）
$\therefore$ $\square AKJH=\square ABED=AB^2,$
同理ニヨリ $\square KCLJ=\square BCGF=BC^2,$
但シ $\square AKJH+\square KCLJ=\square ACLH=AC^2,$
$\therefore$ $AC^2=AB^2+BC^2.$

21. 推論 $\triangle ABC$ 直角三角形ニ於テ
$AB^2=AC^2-BC^2$ 及ビ $BC^2=AC^2-AB^2,$

定 理 拾

22. 鈍角三角形ニ於テ鈍角ニ對スル壹邊ノ正方形ハ他貳邊ノ正方形ノ和ヨリ大ナルコト他壹邊ト其邊上ニ於ケル其他邊ノ正射影トノ直方形貳倍丈ケナリ.

（特說） $\triangle ABC$ ニ於テ B ヲ鈍角トシ DB ヲ BC 上ニ於ケル AB ノ正射影トス, 然ルトキ
$AC^2=AB^2+BC^2+2BC\times BD.$

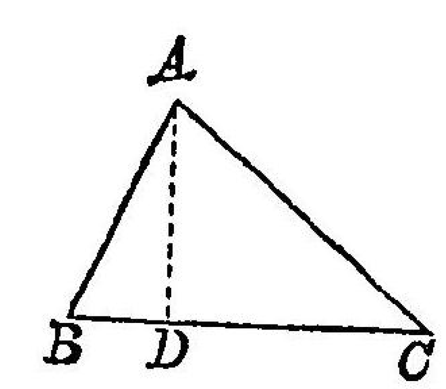


（證明） 定理九ニヨリ
$AC^2=AD^2+DC^2,$
又 $AD^2=AB^2-BD^2,$
$DC^2=CB^2+BD^2+2CB\times BD,$ （定理六）
$\therefore$ $AC^2=AB^2+BC^2+2CB\times BD.$

定 理 拾 壹

23. 三角形ノ銳角ニ對スル壹邊ノ正方形ハ他貳邊ノ正方形ノ和ヨリ小ナルコト他壹邊ト其邊上ニ於ケル其他邊ノ正射影トノ直方形貳倍丈ケナリ.

（特說） $\triangle ABC$ ニ於テ B ヲ銳角トシ BD ヲ BC 上ニ於ケル AB ノ正射影トス, 然ルトキ
$AC^2=AB^2+BC^2-2BC\times BD.$



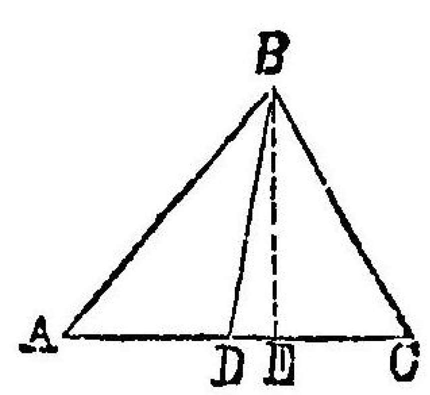
（證明） $AC^2=AD^2+DC^2,$
$AD^2=AB^2-BD^2,$ $DC^2=BC^2+BD^2-2CB\times BD,$ （定理七）
$\therefore$ $AC^2=AB^2+BC^2-2CB\times BD.$

24. 推論 三角形ノ壹邊ノ正方形ガ他貳邊ノ正方形ノ和ヨリ小ナルカ之ニ等シキカ或ハ之ヨリ大ナルニ從フテ其壹邊ノ對角ハ鋭角,直角或ハ鈍角ナリ (定理九.拾.拾壹ノ反論)

定理拾貳

25. 三角形ノ貳邊ノ正方形ノ和ハ底邊ノ半ノ正方形ト其中央線ノ正方形ノ和ノ貳倍ニ等シ.

(特説) AC ヲ底邊トシ BD ヲ其線トスレバ.



$AB^2+BC^2=2AD^2+2BD^2$.

(證明) $AC\perp BE$ トス.

然ルキ

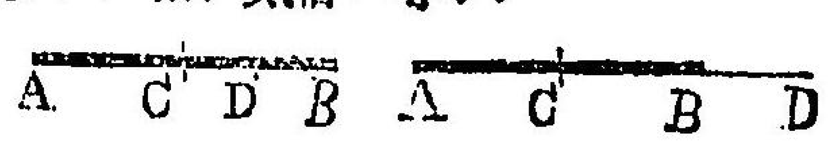
$AB^2=AD^2+BD^2+2AD.\,DE$, (定理拾)

$BC^2=CD^2+DB^2-2CD.\,DE$. (定理拾壹) 但 $AD=DC$

$\therefore\ AB^2+BC^2=2AD^2+2DB^2$.

定理拾三

26. 壹直線ヲ貳等分シ又或壹點ニテ內部或ハ外部ニ貳分スルキ其兩部分ノ正方形ノ和ハ原直線ノ半ノ正方形ト貳ツノ分點間ノ距離ノ正方形トノ和ノ貳倍ニ等シ.



(特説) AB ヲ壹直線トシ C ヲ貳等分點トシ D ヲ或貳分點トスレバ $AD^2+DB^2=2AC^2+2CD^2$.

(證明) $AD^2=AC^2+CD^2+2AC\times CD$, (定理六)

又 $DB^2=CB^2+CD^2-2CB\times CD$, (定理七)

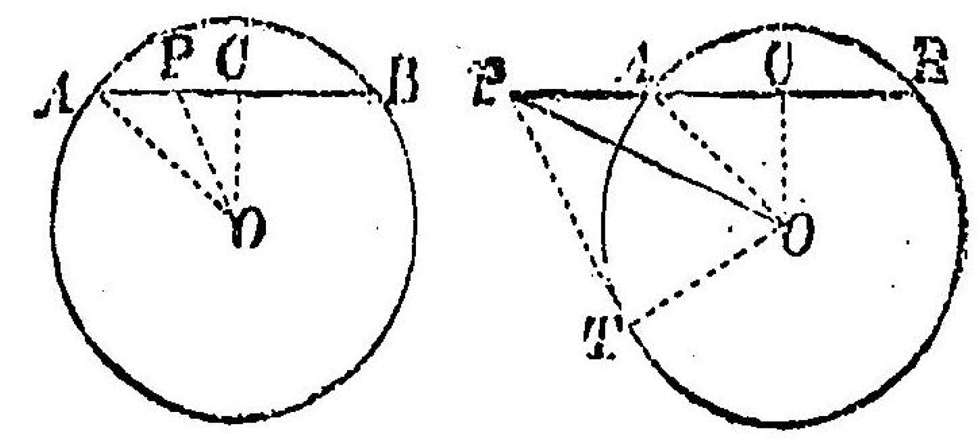
但シ $AC=CB$ $\therefore\ AC\times CD=BC\times CD$,

$\therefore\ AD^2+DB^2=2AC^2+2CD^2$.

定理拾四

27. 圓ノ弦ヲ或壹點ニテ內部或ハ外部ニ貳分スルキ其貳分ノ直方形ハ半徑ノ正方形ト分點ト中心ノ連結線ノ正方形トノ差ニ等シ.

(特説) O ヲ圓ノ中心トシ AB ヲ弦トシ P ヲ貳分點トス然ルキ $PA\times PB=AO^2\sim PO^2$.



(證明) $AC=CB$ トス,

然ルキ $AO^2=CO^2+AC^2$, 及ビ $PO^2=CO^2+PC^2$, (定理九)

$\therefore\ AO^2\sim PO^2=AC^2\sim PC^2=(AC+PC)(AC\sim PC)$, (定理八)

但 $AC=BC$ $\therefore\ AC+PC=BC+PC=BP$.

$AC\sim PC=AP$,

$\therefore\ AO^2\sim PO^2=AP\times BP$.

28. 推論壹 壹點ヲ通過シテ引ケル兩弦ハ其點ニテ貳分セラレタル各分ノ直方形相等シ.

29. 推論貳 圓外ノ壹點ヨリ割線ヲ引キ其點ヨリ割線ガ圓周ニ會スル兩點迄ノ長サノ直方形ハ其點ヨリ引ク切線ノ正方形等シ,又反定理ヲ得.

ニ上圖ニ於テ $PA\times PB=PO^2-AO^2=PO^2-TO^2=PT^2$.

例　題

1. 同底等積ノ三角形ノ頂點ノ軌跡如何.

2. 平行四邊形ノ兩對角線ノ交點ヲ通過スル直線ハ原形ヲ貳等分ス.

3. 平行四邊形 $ABCD$ ノ對角線 AC 或ハ其引長ニ於テ P 點ヲ取レバ $\triangle PBC=\triangle PCD$.

4. 三角形ノ三邊 3, 4, 5 寸ナル時或ハ 3, 5, 7 寸或ハ 4, 6, 7 寸ナル時ノ各場合ニ於テ其形ヲ如何ナリヤ.

5. 同頂角ヲ有シ底邊ガ壹定點ヲ通過スル諸三角形ニ於テ最小ナルモノハ其底邊ガ定點ニテ等分セラル.

6. 同底ニシテ周邊等シキ諸三角形ニ於テ最大ナルモノハ等脚三角形ナリ.

7. 頂角及ビ高サ相等シキ諸三角形ニ於テ最小ナルモノハ等脚三角形ナリ.

8. 平行四邊形 $ABCD$ ノ形內或ハ形外ニ P 點ヲ取レバ $\triangle PBD=\triangle PAB\sim\triangle PBC$, 或ハ $\triangle PAB+\triangle PBC$.

9. 直角三角形ノ直角點ヨリ斜邊ニ引キタル垂線上ノ正方形ハ垂線ニテ分タレタル斜邊ノ兩部分ノ直方形ニ等シ.

10. 直角三角形ノ直角邊ノ正方形ハ斜邊上ニ於ケル其邊ノ正射影ト斜邊トノ直方形ニ等シ.

11. 三角形ノ高サニテ貳分シタル底邊ノ各部分ノ正方形ノ差ハ他ノ貳邊ノ正方形ノ差ニ等シ.

12. 直方形 $ABCD$ 內ノ壹點ヲ O トスレバ $AO^2+CO^2=BO^2+DO^2$.

13. 平行四邊形ノ兩對角線ノ正方形ノ和ハ各邊ノ正方形ノ和ニ等シ.

14. 三角形ノ三中央線ノ正方形ノ和ハ各邊ノ正方形ノ和ノ四分ノ三ニ等シ.

15. 四角形 $ABCD$ ノ對角線 AC 及ビ BD ノ中央點ヲ E 及ビ F トスレハ　各邊ノ正方形ノ和$=A\quad+BD^2+4EF^2$,
又本題ヨリシテ 13. 題ヲ解セヨ.

16. 相交ハル兩圓ノ通切線ハ兩交點ヲ連結スル直線ニテ貳等分セラル.

17. AB, CD ガ O ニ於テ交ハリ $AO\times BO=CO\times DO$ ナル時 A, B, C, D ハ同圓中ニアリ.

18. 兩定點ニ於テ交ハル諸圓ニ其通弦ノ引長線中ノ壹點ヨリ切線ヲ引ケバ其切點ノ軌跡ハ圓ナリ.

19. 圓內或ハ圓外ノ壹點 P ヨリ直交兩直線ヲ引キ A, B 及ビ C, D ノ各貳點ニ於テ圓周ヲ截レバ $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$ ハ圓徑ノ正方形ニ等シ.

20. 等脚三角形 ABC ノ頂角 A ヨリ壹直線ヲ引キ底邊ヲ D ニ於テ截リ外切圓周ヲ E ニ於テ截レバ AE, AD ノ直方形ハ常數ナリ.

21. 圓ノ平行貳弦ノ正方形ノ差ハ中心ヨリ各弦迄ノ距離ノ正方形ノ差四倍ニ等シ.

22. 共心貳圓ニ中徑 $ABCD$ ヲ引キ P, Q 貳點ヲ各圓周ニ取レバ　$PB^2+PC^2=QA^2+QD^2$.

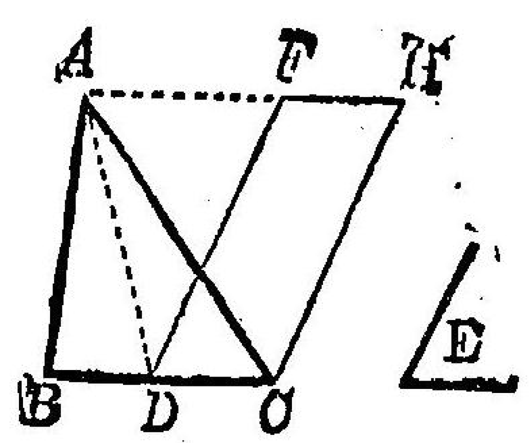
23. A, B ヲ貳定點トシ PA^2 ト PB^2 ノ和或ハ差ヲ常數トスレバ P 點ノ軌跡如何.

24. A, B, C ヲ三定點トシ $PA^2+PB^2+PC^2$ ヲ常數トスレバ P 點ノ軌跡如何.

第貳節　問題

問題壹

30. 既知三角形ニ等シク且ツ壹定角ヲ有スル平行四邊形ヲ作レ.



（作法）$\triangle ABC$ ヲ既知三角形トシ E ヲ既知角トス.

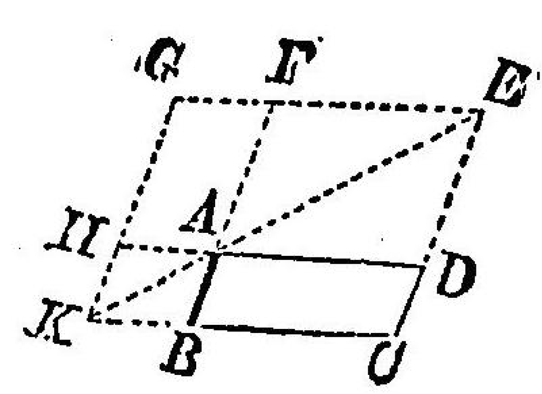
然ルトキ $BD=CD$ トシ $\angle CDF=E$ ニ作リ $CH \parallel DF$, $AH \parallel BC$ トスレバ $\square FDCH$ ハ所求ノ平行四邊形ナリ.

（證明）$BD=DC$ $\therefore$ $\triangle ABD=\triangle ADC$ (7.)

又 $\square FDCH=2\triangle ADC$, （定理貳）$=\triangle ABC$.

問題貳

31. 既知三角形ニ等シク且ツ壹定角ヲ有スル平行四邊形ヲ既知底邊上ニ作レ.



（作法）AB ヲ既知底邊トス

問題壹ノ如ク定角ヲ有シ且ツ既知三角形ニ等シキ平行四邊形 $GHAF$ ヲ作リ FA ノ引長線ニ於テ既知底邊 AB ヲ作ル.

而シテ平行四邊形 $GKBA$ ヲ作リ KA ノ引長線ト GF ノ引長線ト E ニ交ハラシム,

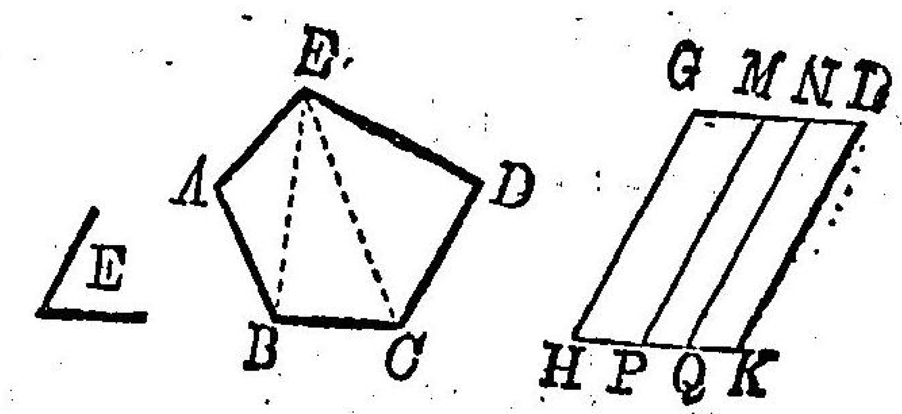
次ニ平行四邊形 $GKCE$ ヲ作リ HA ヲ D 迄引長スルトキ $\square ABCD$ ハ所求ノ平行四邊形ナリ

（證明）定理四ニヨリテ $\square ABCD=\square GHAF=$既知三角形,

又 $\angle B$ ハ $\square GHAF$ ノ壹角ニ等シク即チ定角ニ等シ

問題三

32. 既知直線圖形ニ等シク且ツ既知角ヲ有スル所ノ平行四邊形ヲ作レ.



（作法）E ヲ既知角トシ $ABCDE$ ヲ既知直線圖形トス、

$ABCDE$ 形ノ壹角點ヨリ對角線 EB, EC ヲ引キ全形ヲ分チテ三角形トス,

而シテ問題壹ニヨリ E 角ヲ有チ且ツ $\triangle ABE$ ニ等シキ平行四邊形 $GHPM$ ヲ作ル,

又問題貳ニヨリ MP 線上ニ $\triangle BEC$ ト等シク且ツ E 角ヲ有ツ平行四邊形 $MPQN$ ヲ作リ又同法ニテ $\triangle ECD$ ニ等シキ平行四邊形 $\square NQKL$ ヲ作ル.

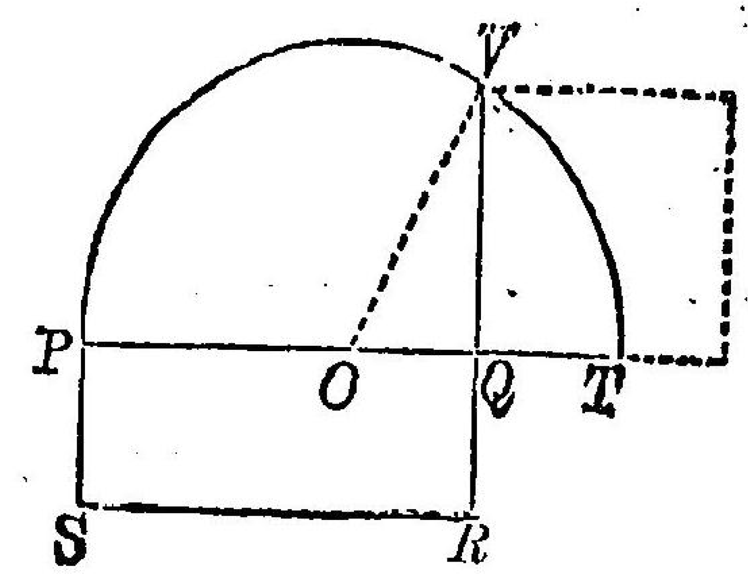
（證明）然ルトキ $\square GHKL=\square GHPM+\square MPQN+\square NQKL$

即チ $\square GHKL=\triangle ABE+\triangle EBC+\triangle ECD=$直線形 $ABCDE$.

問題四

33. 既知直線圖形ニ等シキ正方形ヲ作レ.

(作法) 前題ノ $ABCDE$ 直線圖形ヲ既知形トス,
前題ニヨリ $ABCDE$ ニ等シク且ツ直角ヲ有ツ平行形即チ直方形 $PQRS$ ヲ作ル,
PQ ヲ引長シテ $QR=QT$ トシ PT ヲ中徑トシ半圓ヲ作リ Q ヨリ PT ニ垂線 VQ ヲ作リレバ VQ ハ所求ノ正方形ノ壹邊ナリ.



(證明) O ヲ圓ノ中心トス, 然ルキ定理拾四ニヨリテ

$$PQ\times QT=VO^2-OQ^2,$$

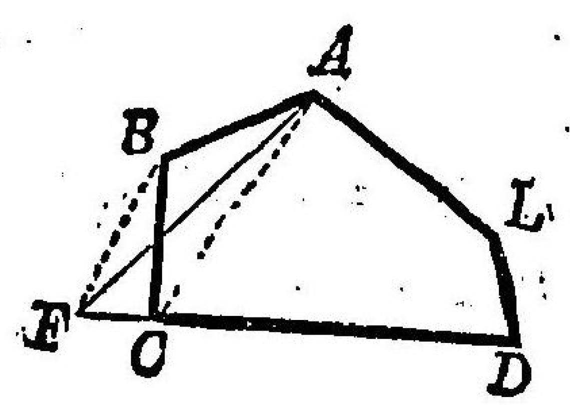
即チ $$PQ\times QT=VQ^2 \qquad \text{(定理九)}$$

問 題 五

34. 定直線圖形ト等積ニシテ之ヨリ壹邊少ナキ直線圖形ヲ作レ. 之ニ由テ定直線圖形ニ等シキ三角形ヲ作レ.

(作法) $ABCDE$ ヲ定直線圖形トス.

AC ヲ連結シ原形ヲ $\triangle ABC$ ニ截リ B ヨリ AC ニ平行シテ BF ヲ引キ DC ノ引長線ト F ニ會セシム,
然ルキ $AFDE$ ハ原形ト等積ニシテ原形ヨリ壹邊少キ直線圖形ナリ, 此法ヲ繰リ返シテ施スキハ終ニ三角形ヲ得ベシ.



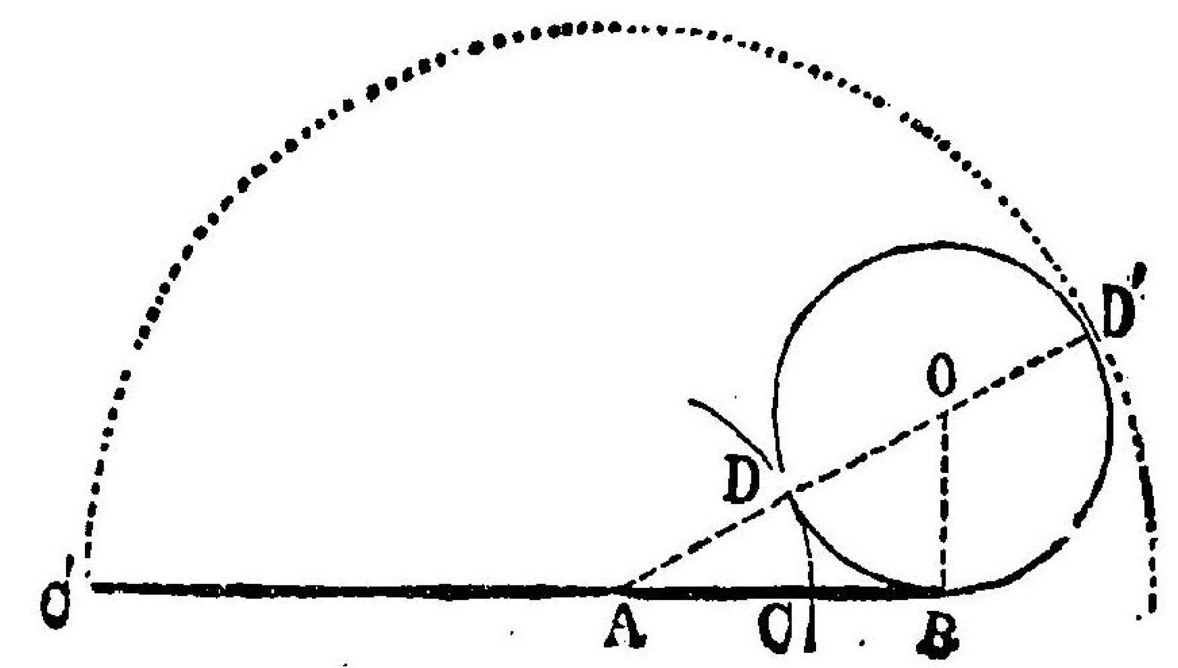
(證明) $AC=BF$ $\therefore$ $\triangle ABC=\square ACF$, (7.)

$\therefore$ 直線圖形 $ACDE+\triangle AFC=$ 直線圖形 $ACDE+\triangle ABC$,

即 直線圖形 $AFDE=$ 直線圖形 $ABCDE$.

問 題 六

35. 定直線ヲ內部或ハ外部ニ貳分シ其壹分ノ正方形ヲ他ノ壹分ト原線ノ直方形ニ等シカラシムルヿヲ求ム.



(作法) AB ヲ定直線トス.
AB ニ垂直ニ BO ヲ引キ $BO=\frac{1}{2}AB$ トシ之ヲ半徑トシ O ヲ中心トシテ圓ヲ畫キ AO ヲ引キ D 及ビ D' ニ於テ圓周ニ交ハラシム,
而シテ AD 或ハ AD' ヲ半徑トシ A ヲ中心トシテ圓周ヲ作リ C 或ハ C' ニ於テ AB 或ハ AB ノ引長線ヲ截ル,
然ルキ C 及ビ C' ハ所求ノ點ナリ.

(證明) 作法ニヨリ AB ハ O ヲ中心トスル圓ノ切線ナリ,
又 $DD'=AB$, 故ニ定理拾四ニヨリ

$$AD\times AD'=AO^2-BO^2=AB^2,$$

但 $AD\times AD'=AC\times(AD+DD')$ 或ハ $(AD'-DD')\times AC'$
$=AC\times AD+AC\times DD'$ 或ハ
$AD'\times AC'-DD'\times AC'$
$=AC^2+AC\times AB$ 或ハ $AC'^2-AB\times AC'$

$\therefore$ $AB^2=AC^2+AC\times AB$, 或ハ $AC'^2-AB\times AC'$,

∴ $AB(AB-AC)=AC^2$, 或ハ $AB(AB+AC')=AC'^2$,

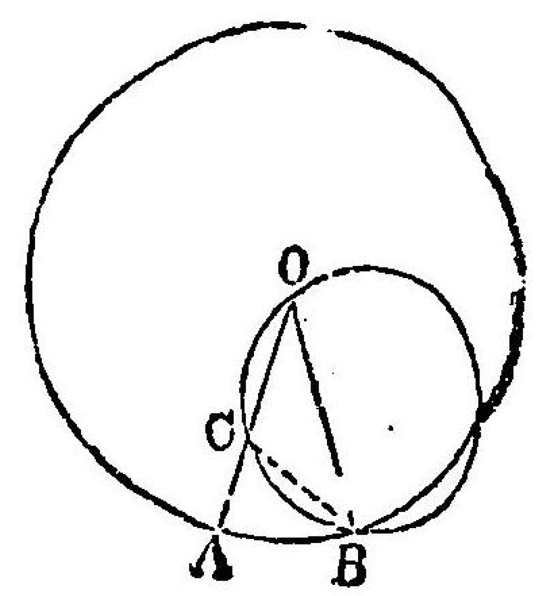
∴ $AB\times BC=AC^2$, 或ハ $AB\times BC'=AC'^2$,

即チ C ハ內部ノ分點ニシテ C' ハ外部ノ分點ナリ.

問題七

36. 定圓ニ內切正拾角形ヲ畫ケ.

(作法) O ヲ中心トス.
OA ヲ C ニ於テ貳分シ
$OC^2=OA\times AC$ トス.(問題六)
然ルトキ $OC=AB$ ニ作レバ弧 AB ハ即チ圓周ノ拾分ノ壹ナリ.



(證明) $\triangle OBC$ ニ外切圓ヲ畫ク
然ルトキ作法ニヨリ

$AB^2=AO\times AC$,

∴ AB ハ BCO 圓ノ切線ナリ,(29.)

∴ $\angle ABC=\angle BOC$, (第貳本定理拾三)

又 $\angle BAC$ ハ $\triangle BCA$ 及ビ $\triangle AOB$ ノ共通ノ角ナリ,

∴ $\angle ACB=\angle ABO$,

又 $OA=OB$ ∴ $\angle ABO=\angle BAO$,

∴ $\angle ACB=\angle BAO$,

∴ $AB=BC=CO$,

∴ $\angle ACB=2\angle BOC=\angle BAO=\angle ABO$,

又 $\angle BAO+\angle ABO+\angle BOC=2R\llcorner$,

即 $2\angle BOC+2\angle BOC+\angle BOC=2R\llcorner$,

∴ $\angle BOC=\frac{2R\llcorner}{5}=\frac{4R\llcorner}{10}$,

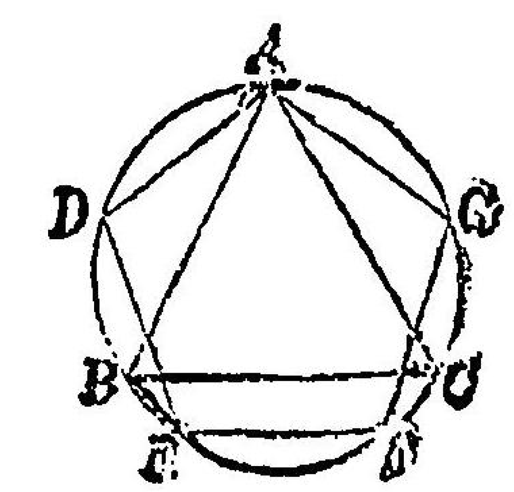
即チ AB 弧ハ圓周ノ拾分之壹ニ等シ.

(注意) 此問題ニヨリテ定圓ニ內切正 5, 10, 20 40.............角形ヲ畫キ得ベシ.

問題八

37. 定圓ニ內切正拾五角ヲ作レ.

(作法) 內切正三角形 ABC 及ビ內切正五角形 $ADEFG$ ヲ畫ク,
然ルトキ BE ハ內切正拾五角形ノ壹邊ナリ.



(證明) 作法ニヨリ

$\overset{\frown}{ADE}=\overset{\frown}{AGF}$,

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$,

∴ $\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CF}$.

又 $\overset{\frown}{BC}=\frac{4R\llcorner}{3}$, $\overset{\frown}{EF}=\frac{4R\llcorner}{5}$.

∴ $\overset{\frown}{BE}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{EF})$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{4R\llcorner}{3}-\frac{4R\llcorner}{5}\right)=\frac{4R\llcorner}{15}$.

例 題

1. 既知正方形ノ貳倍ナル正方形ヲ作レ
2. 兩ツノ正方形ノ和或ハ差ニ等シキ正方形ヲ作レ.
3. 壹直線ヲ貳分シ其壹分ノ正方形ヲ全線ノ正方形ノ半ニ等シクスルヿヲ求ム.
4. 底角,底邊及ビ積ヲ知リテ三角形ヲ作レ
5. 定正方形ニ等シキ等邊三角形ヲ作レ.

6. 三角形ノ壹邊中ノ壹定點ヨリ壹直線ヲ引キ原形ヲ貳等分セヨ.

7. 四邊形ノ壹角點ヨリ壹直線ヲ引キ原形ヲ貳等分セヨ.

8. 五角形ノ壹角點ヨリ壹直線ヲ引キ原形ヲ貳等分セヨ.

9. 五角形ト等積ナル正方形ヲ作レ.

10. 各底角ガ頂角ニ2倍スル等脚三角形ヲ作レ.

11. 定直線ヲ引長シ其引長線ノ正方形ヲ原線ノ正方形ノ2倍ニ等シカラシムルヿヲ求ム.

12. 定直線ヲ引長シ原線ト引長線ノ和ノ正方形ヲシテ或定長ノ直線ノ正方形ノ2倍トセヨ.

13. 定直線ヲ貳分シ其壹分ノ正方形ヲ他ノ壹分ノ正方形ノ3倍ニ等シクセヨ.

14. 定直線ヲ外部ニ貳分シ兩部分ノ直方形ヲ原線ノ正方形ニ等シクセヨ.

15. 周邊,積及ビ頂角ヲ知リテ三角形ヲ作レ.

16. 貳定點及ビ壹定直線ニ切シテ圓ヲ作レ.

17. 貳定點及ビ壹定圓ニ切シテ圓ヲ作レ.

18. 壹定點,壹定直線及ビ壹定圓ニ切シテ圓ヲ作レ.

19. 壹定直線及ビ貳定圓ニ切シテ圓ヲ形レ.

第 四 本

比 例

定 義

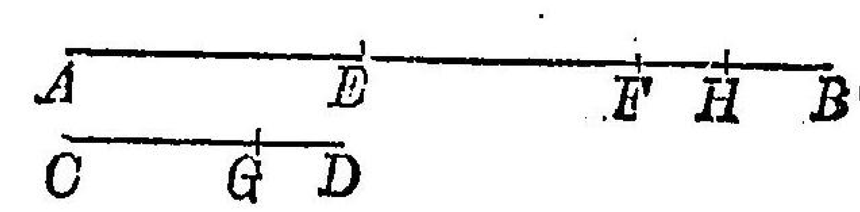
1. 倍數 (Multiple) 壹量ガ恰モ他ノ壹量ノ若干倍ニ等シキ𪜈其量ヲ他ノ量ノ倍數トイフ

2. 約數 (Measure) 壹量ノ若干倍ガ恰モ他ノ壹量ニ等シキ𪜈其量ヲ他ノ量ノ約數トイフ.

3. 可通度 (Commensurable) 貳ツ或ハ貳ツ以上ノ量ガ恰モ或壹量ノ若干倍ナル𪜈其諸量ハ互ヒニ可通度ノモノトイフ又其或壹量ヲ稱シテ其諸量ノ公約數トイフ.

問 題

4. 貳直線ガ可通度ナル𪜈其最大公約數ヲ求ム.



AB, CD ヲ貳直線トス.

CD ヲ以テ AB ヲ度ルニ CD ノ貳倍ヲ得テ FB ヲ殘ス,
又 FB ヲ以テ CD ヲ度ルニ FB ヲ壹ツ得テ GD ヲ殘ス,
GD ヲ以テ FB ヲ度ルニ GD ノ貳倍ヲ得テ殘リナシ,
之ニ由テ

$$FB=2GD,$$
$$CD=FB+GD=2GD+GD=3GD,$$
$$AB=2CD+FB=6GD+2GD=8GD.$$

AB ハ GD ノ 8 倍ニシテ CD ハ GD ノ 3 倍ナルガ故ニ GD ハ AB 及ビ CD ノ公約數ナルヿ明カナリ,

而シテ GD ハ AB 及ビ CD ノ公約數中ノ最大ナルモノナリ何トナレバ試ミニ GD ヨリ大ナル公約數ヲ M トスレハ M ハ AB 及ビ CD ノ約數ナルガ故ニ FB ノ約數ナリ故ニ亦タ GD ノ約數ナラザルベカラズ然ルニ $M>GD$ ナルヲ以テ不合理ナリ.

5. 註 前ノ如ク AB, CD ノ公約數ヲ求ムルニ當リ GD ヲ以テ FB ヲ度リ尚ホ殘リアル片ハ再ビ其殘ヲ以テ GD ヲ度ルベシ此ノ如クシテ幾回度ルモ殘リアル片ハ AB ト CD ハ可通度ニアラザルモノ即チ不可通度 (In-Commensurable) トイフ然レ圧不可通度ノ兩直線ヲ無限ニ度ル片ハ殆ンド貳公約數ニ近キ數ヲ得ベシ然レ圧正當ノモノニアラズ.

定　義

6. 比 (Ratio) 壹量ガ之ト同種ナル他壹量ノ若干倍或ハ若干分或ハ若干分ノ若干倍ナルヿヲ示スモノヲ壹量ガ他量ニ於ケル比ト稱ス.

壹量ヲ A トシ他量ヲ B トスレバ A ガ B ニ於ケル比ヲ示スニハ $A:B$ ヲ以テス而シテ A ガ B ノ m 倍ナル片 $A:B=m$ ナリ A ガ B ノ $\frac{1}{m}$ ナル片 $A:B=\frac{1}{m}$ 又 A ガ B ノ $\frac{1}{m}$ ノ n 倍ナル片 $A:B=\frac{n}{m}$ ナリ A ヲ前項, B ヲ後項トイフ.

7. 比例 (Proportion) 兩比ノ相等シキヿヲ示ス式ヲ比例トイフ.

例ヘバ $A:B$ ト $C:D$ ガ相等シキ $A:B=C:D$ 即チ A, B, C, D ハ比例ヲナストイフ.

又 A, C ヲ相應ノ量トイフ B, D モ亦タ然リ又 B, C ヲ比例ノ中項トイヒ A, D ヲ外項トイフ.

8. 中比例 (Mean Proportion) A, B, C ノ三量ガ比例ヲナス片即チ $A:B=B:C$ ナル片之ヲ中比例トイフ.

比例之公設題

9. 比例之公設題 (General Propositions on Proportion) 代數的ノ證ニ於テ壹般ニ明了ナル設題ヲ示スヿ次ノ如シ.

(1) 同比ニ等シキ兩比ハ相等シ.

例ヘバ　$A:B=X:Y$, $C:D=X:Y$　$\therefore$ $A:B=C:D$.

(2) 兩量ノ比ハ其各若干倍或ハ各若干分ノ比ニ等シ.

例ヘバ　$A:B=mA:mB=\frac{A}{m}:\frac{B}{m}$.

(3) $A:B=P:Q$ ナル片 $B:A=Q:P$.

(4) $A:B=C:D$ ナル片 $A:C=B:D$.

(5) $A:B=P:Q$ ナル片
$A+B:B=P+Q:Q$, 及ヒ $A-B:B=P-Q:Q$.

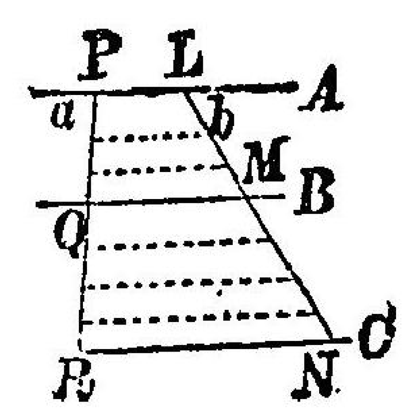
(6) $A:B=C:D=E:F$ ナル片
$A+C+E:B+D+F=A:B$.

(7) $A:B=P:Q$ 及ヒ $B:C=Q:R$ ナル片
$$A:C=P:R.$$

第壹節　根原之比例

定理壹

10. 貳直線ガ三平行線ニテ分截セラルルトキ其相應各分ハ比例ヲナス.



(特設) A, B, C ヲ三平行線トシ PR, LN ヲ貳直線トスレバ

$PQ:QR=LM:MN.$

(證明) PQ, QR ハ可通度ノモノトシ其最大公約數ヲ a トシ

$PQ=ma,\ QR=na$ トス. (4.)

然ルトキ PR ノ各分點ヨリ三平行線ニ平行スル諸直線ヲ引ケバ LM, MN モ亦タ PQ, QR ノ如ク若干等分トナルベシ, (壹本定理廿四)

而シテ其壹分ヲ b トスレバ $LM=mb,\ MN=nb.$

$\therefore\quad PQ:QR=ma:na=m:n,$ (9. (1) 及ビ (2))

又　$LM:MN=mb:nb=m:n,$

$\therefore\quad PQ:QR=LM:MN.$

次ニ PQ, QR ヲ不可通度トシ即チ QR ハ a ノ n 倍ニ R ヲ加ヘタルモノトスレバ

$$PQ:QR=ma:na+R=m:n+\frac{R}{a},$$

同法ニヨリ MN モ亦タ b ノ n 倍ニ R' ヲ加ヘタルモノトス,

$$LM:MN=mb:nb+R'=m:n+\frac{R'}{b}.$$

然ルニ $R<a$ 及ビ $R'<b$ $\therefore$ $\frac{R}{a}<1$ 及ビ $\frac{R'}{b}<1,$

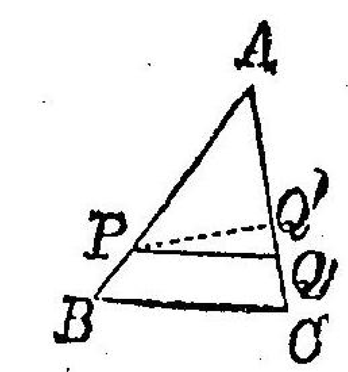
故ニ PQ, QR 及ビ LM, MN ノ各通度ヲ限リ無ク度ルトキハ最後ノ殘 R 及ビ R' ハ極メテ微小ナルモノトナルベシ故ニ極限ニ至レバ殆ンド $\frac{R}{a}=1,\ \frac{R'}{b}=1$ トナルニ至ルベシ之ニ由テ

$$PQ:QR=m:n+1,$$

$$LM:MN=m:n+1,$$

即　$PQ:QR=LM:MN.$

11. 推論　三角形ノ底邊ニ平行スル壹直線ハ他ノ貳邊ヲ分チテ比例ヲナサシム, 又反定理ヲ得.



$PQ \parallel BC$, 然ルトキ

$AP:PB=AQ:QC.$

又反定理ニ於テ

$AP:PB=AQ:QC$ ナルトキ

$PQ \parallel BC.$

何トナレバ PQ ガ BC ニ平行セザルモノトスレバ P ヨリ BC ニ平行シテ PQ' ヲ引キ得ベシ然ルトキ本定理ニヨリ

$AP:PB=AQ':Q'C,$

$\therefore\quad AQ:QC=AQ':Q'C,$

$\because\quad AQ+QC:QC=AQ'+Q'C:Q'C,$ (9. (5))

即　$AC:QC=AC:Q'C,$

$\therefore\quad AC:AC=QC:Q'C,$ (9. (4))

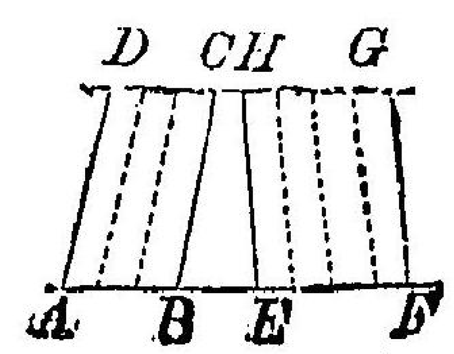
$\therefore\quad QC=Q'C,$

之ニ由テ Q' 點ハ Q ニ合スベシ

12. 注意　前ノ反定理ニヨリ壹定直線ヲ或定比ニ分ツ壹點ハ唯壹ツナルコトヲ知ル.

定理貳

13. 等高ノ平行四邊形ノ比ハ其底ノ比ニ等シ.



(特說) $\square ABCD$ 及ビ $\square EFGH$ ヲ式ツノ等高平行四邊形トス,

然ルヰ

$\square ABCD : \square EFGH = AB : EF.$

(證明) 定理壹ノ如ク AB, EF ガ可通度ナルヰハ

$AB = ma$, $EF = na$ $\quad \therefore$ $AB : EF = m : n.$

又 AB, EF ノ各分點ヨリ AD, EH ニ各平行線ヲ引ケバ $\square ABCD$ 及ビ $\square EFGH$ ハ小平行四邊形 m 個及ビ n 個ヲ得ベシ故ニ $\square ABCD : \square EFGH = m : n,$

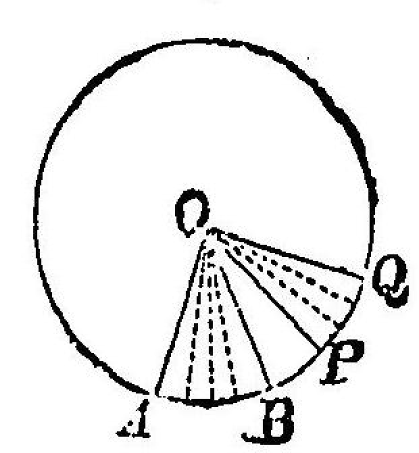
$\therefore$ $\square ABCD : \square EFGH = AB : EF.$

又 AB, EF ガ不可通度ナルヰハ無限ニ其通度ヲ度レバ定理壹ノ如ク證明ヲ得ベシ.

14. **推論** 等高ノ兩三角形ハ其底邊ノ比ニ等シ.

定理三

15. 同圓或ハ等圓ノ中心角及ビ割圓ハ其對弧ニ比例ス.



(特說) O ヲ中心トスレバ

$\angle AOB : \angle POQ = \frown AB : \frown PQ.$

(證明) 同圓或ハ等圓ニ於テハ其各割圓ハ其弧ノ長サ等シケレバ全等形ナルガ故ニ定理壹ノ如ク兩弧ノ通度ヲ度リテ證スベシ

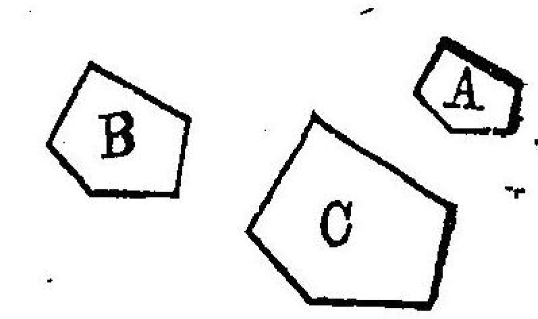
第貳節　相似形

定義

16. **相似形** (Similar Figures) 貳ツ或ハ貳ツ以上ノ圖形ガ各角相等シク且ツ等角ニ沿フ所ノ邊ガ凡ベテ比例スルヰハ之ヲ相似形トイフ.

定理四

17. 同シ圖形ト相似ナル兩圖形ハ互ヒニ相似形ナリ.



(特說) A, B, C ヲ三ツノ圖形トシ

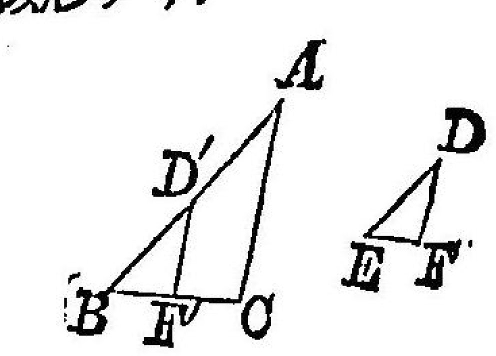
$A \propto C$, $B \propto C$ ナルヰ $A \propto B.$

(證明) A, B ノ各ガ C ト等角ナルガ故ニ A ハ B ト等角ナリ,

又 A, B ノ各ガ C ト其等角ニ沿ヒタル邊ガ比例スルガ故ニ A ト B ハ其等角ニ沿ヒタル邊比例スベシ故ニ $A \propto B.$ (16.)

定理五

18. 兩三角形ガ等角ナルヰハ相似形ナリ.



(特說) $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$,

然ルヰ

$\triangle ABC \propto \triangle DEF.$

(證明) B ノ上ニ E ヲ置キ EF, ED ヲ BC, BA ニ合セシムレバ F ハ F' ニ落チ D ハ D' ニ落ツベシ,

然ル𪜈 $AD':BD'=CF':BF'$, (11.)

∴ $AD'+BD':BD'=CF'+BF':BF'$ (9. (5))

即 $AB:DE=BC:EF$,

又同法ニヨリ C ノ上ニ F ヲ置ク𪜈ハ

$AC:DF=BC:EF$,

之ニ由テ $\triangle ABC\propto\triangle DEF$. (16.)

19. 推論 兩三角形ノ三邊ガ比例スル𪜈ハ相似形ナリ.

定理六

20. 兩三角形ノ各壹角相等シク夾邊比例スル𪜈相似形ナリ.

(特說) 前圖ニ於テ $\angle B=\angle E$, $AB:BC=DE:EF$,

然ル𪜈 $\triangle ABC\propto\triangle DEF$.

(證明) B ノ上ニ E ヲ置キ前ノ如ク兩邊ヲ重ヌレバ

$AB:BD'=BC:BF'$, (假設)

∴ $D'F'\parallel BC$

∴ $\triangle ABC\propto\triangle BD'F'$,

即 $\triangle ABC\propto\triangle EDF$.

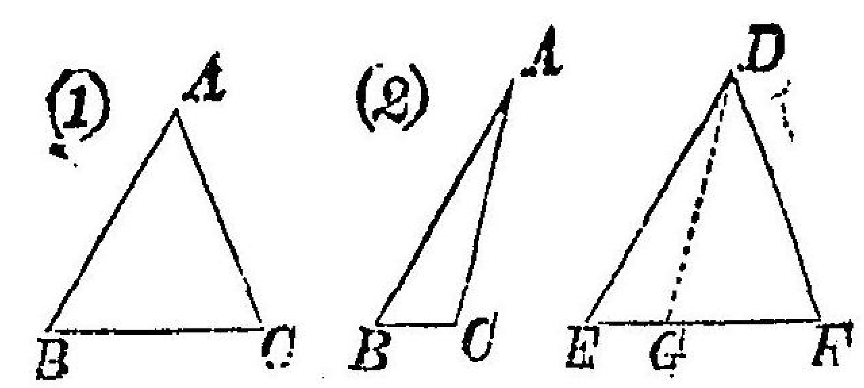
定理七

21. 兩三角形ノ壹角各相等シク其夾邊ノ壹ツガ其對邊ト各比例スル𪜈兩 角形ハ相似形ナルカ或ハ壹夾邊ニ對スル他ノ各角ハ互ヒニ補角ヲナス.

(特說) $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ $\angle B=\angle E$,

$BA:AC=ED:DF$ ナル𪜈 $\triangle ABC\propto\triangle DEF$,

或ハ $\angle C+\angle F=2R$∟.



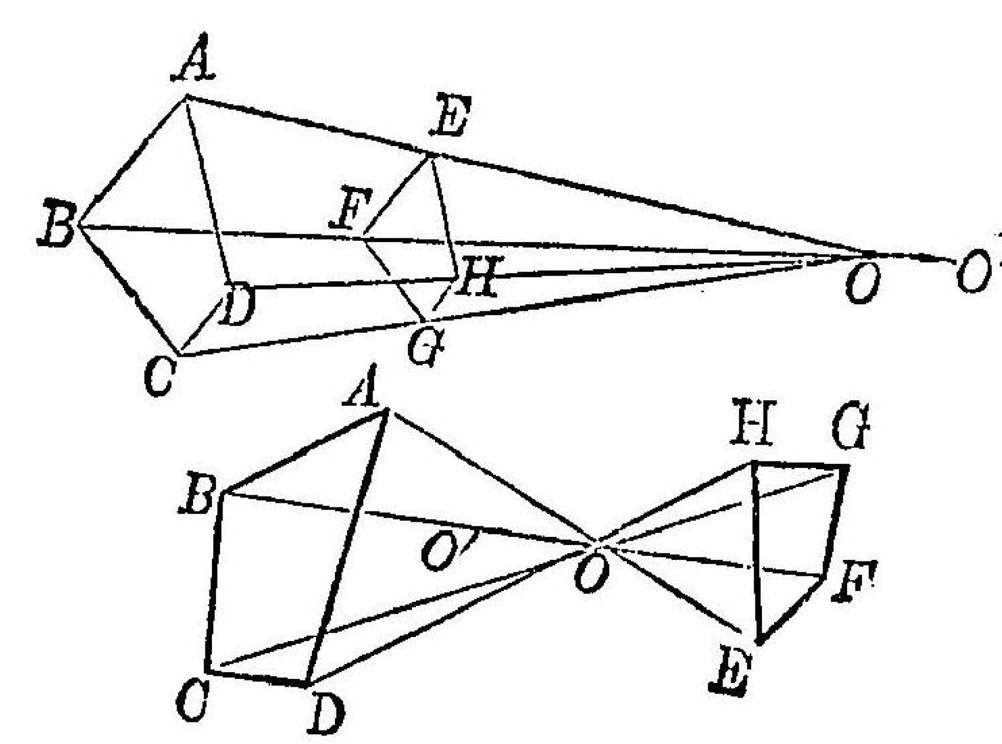
(證明) 三角形ノ壹角壹邊及ヒ其角ノ對邊ヲ既知スル𪜈兩ツノ形チヲ作リ得ベシ, (壹本定理拾五)

故ニ $\triangle ABC$ ニ於テ (1), (2) ノ兩形ヲ得ベシ,

之ニ由テ (1) ヲ $\triangle DEF$ ニ比シ $\triangle DEF$ ト相似形トナルモノトスレバ (2) ハ $\triangle DEG$ ト相似形トナリ $\angle C+\angle F=2R$∟ トナルナリ.

定理八

22. 相似兩直線圖形ノ各相應邊ガ平行スル𪜈其各相應角ノ連結線ハ壹點ニ會ス.



(特說) □$ABCD$, □$EFGH$ ナル兩相似形ニ於テ其平行各邊ノ各相應角點ノ連結線 O ニ於テ會ス.

(證明) AE, BF ノ交點ヲ O トスレバ $AB \parallel EF$ ナルガ故ニ

$$AB:EF=BO:FO, \text{ (定理五)}$$

又 BF, CG ノ交點ヲ O' トスレバ $BC \parallel FG$ ナルガ故ニ

$$BC:FG=BO':FO'.$$

但シ假設ニヨリ $AB:EF=BC:FG,$

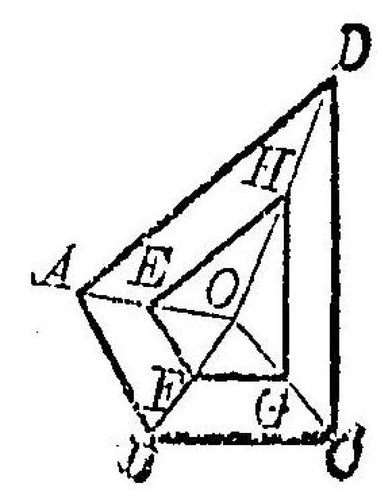
$$\therefore \quad BO:FO=BO':FO',$$

即チ O, O' ハ相合シテ壹點トナル. (12.)

故ニ此理ヲ推ス片ハ其他 DH モ亦タ O 點ニ於テ會スルコヲ知リ得ベシ.

23. 推論 兩相似多角形ハ同數ノ相似三角形ニ分ツコヲ得ベシ.

$ABCD, EFGH$ ナル相似形ノ相應邊ヲ平行セシメ其壹形ヲ他形ノ内ニ置ク片其各相應角ノ連結線ハ壹點ニ O ニ會シ同數ノ相似三角形ニ分ツコヲ得ベシ.



24. 相似中心 (Centre of Similarity) 定理八ノ O 點ヲ兩相似形ノ相似中心トイフ.

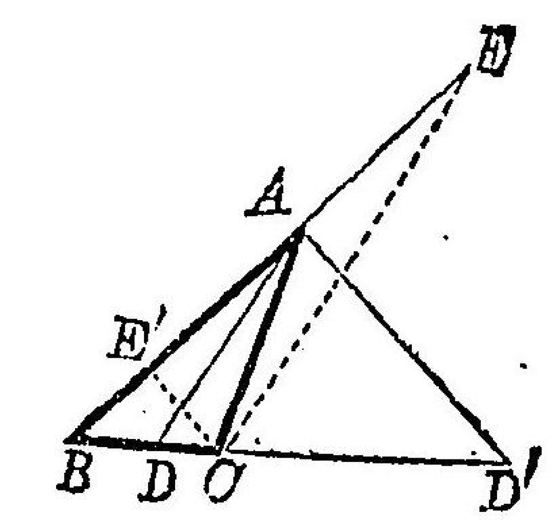
定 理 九

25. 三角形ノ頂角或ハ其外角ノ貳等分ニテ底邊ヲ内部或ハ外部ニ分ツ片其分線ノ比ハ兩邊ノ比ニ等シ,又反定理ヲ得.

(特說) $\triangle ABC$ ニ於テ AD 及ビ AD' ヲ A 角及ビ其外角ノ貳等分線トス.

然ル片

$$AB:AC=BD:CD$$
$$=BD':CD'.$$



(證明) AD ニ平行シテ CE ヲ引キ BA ノ引長線ニ E ニ於テ會セシム或ハ $CE' \parallel AD'$ ニ作ル.

然ル片

$\angle CAD=\angle ACE,$ 或ハ $\angle CAD'=\angle ACE',$ (壹本定理拾六)

$\angle BAD=\angle BEC,$ 或ハ $\angle BAD'=\angle BE'C,$ (壹本定理拾六)

但 $\angle CAD=\angle BAD \therefore \angle ACE=\angle BEC$ 或ハ $\angle ACE'=\angle AE'C$

$\therefore \quad AC=AE,$ 或ハ $AC=AE'.$

又 $AB:AE=BD:DC,$ 或ハ $AB:AE'=BD':CD',$ (10.)

即 $AB:AC=BD:DC,$ 或ハ $AB:AC=BD':CD'.$

(反定理) $AB:AC=BD:DC=BD':CD'$ ナル片 AD 及ビ AD' ハ A 角及ヒ其外角ヲ貳等分ス.

何トナレハ A 角ノ貳等分線ヲ AG トスレバ本定理ニヨリテ

$AB:AC=BG:CG \quad \therefore \; AB+AC:AC=BG+CG:CG$

即 $AB+AC:AC=BC:CG,$

又 $AB:AC=BD:CD$ ナルニヨリ

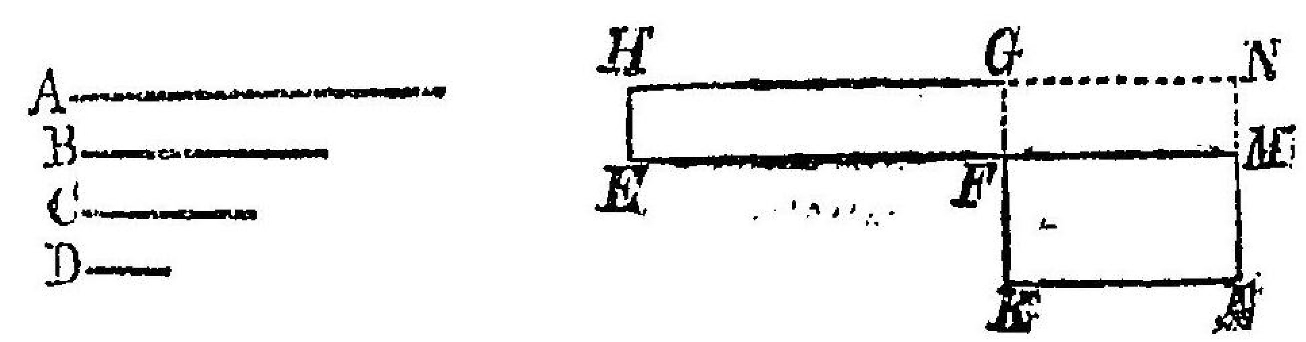
$AB+AC:AC=BC:CD, \quad \therefore \; CD=CG.$

之ニ由テ G ハ D ニ合スベシ又 A ノ外角ノ貳等分線モ AD' ノ他ニナキコヲ知リ得ベシ

第三節 面積

定理拾

26. 比例ヲナス所ノ四直線ハ其外項ノ直方形ト中項ノ直方形相等シ，又反定理ヲ得.



（特說） $A:B=C:D$ ナル時 $A\times D=B\times C.$

（證明） $HG=A,\ FM=B,\ FK=C,\ HE=D$ トシテ $\square HEFG,\ \square FKLM$ ノ兩方直形ヲ作リ EF ト FM 及ビ FK ト FG ヲ同壹直線ニアラシメ $HG,\ LM$ ノ引長線ノ交點ヲ N トスレバ定理貳ニヨリテ

$\square HEFG:\square GFMN=HG:GN=A:B,$

又 $\square FKLM:\square GFMN=FK:GF=C:D,$

但 $A:B=C:D,$

$\therefore\ \square HEFG=\square FKLM,$

即 $A\times D=B\times C.$

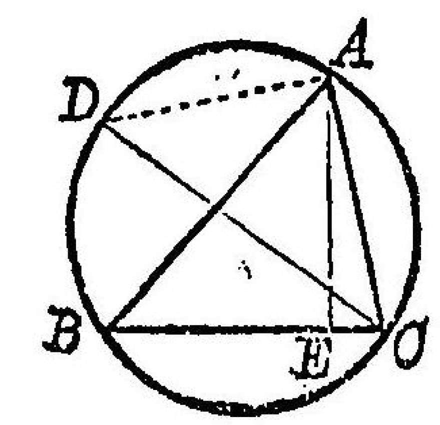
（反定理） $A\times D=B\times C$ ナル時 $A:B=C:D$ ナルコモ證スルコ容易ナリ.

27. **推論壹** 三直線ガ中比例ヲナス時其中項ノ正方形ハ外項ノ直方形ニ等シ.

何トナレハ $A:B=B:C$ ナル時 $B^2=A\times C$

定理拾壹

28. 圓ノ內切三角形ノ頂角ヨリ底邊ニ引ク垂線ト圓徑ノ直方形ハ兩邊ノ直方形ニ等シ.



（特說） CD ヲ圓徑トシ AE ヲ垂線トスレバ

$AE\times CD=AB\times AC.$

（證明） AD ヲ連結ス，

然ル時貳本定理貳ニヨリテ

$\angle ADC=\angle ABE,$

又 $\angle DAC=\angle AEB=R\llcorner,$

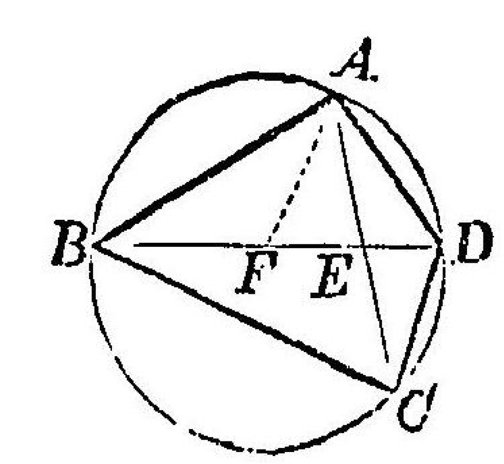
故ニ $\triangle ADC\propto\triangle ABE,$ （定理五）

$\therefore\ AC:AE=CD\cdot AB,$

即 $AE\times CD=AC\times AB.$ （定理拾）

定理拾貳

29. 圓ノ內切四角形ノ兩對邊ノ直方形ノ和ハ兩對角線ノ直方形ニ等シ，又反定理ヲ得.



（特說） $\square ABCD$ ニ於テ

$AB\times CD+AD\times BC=AC\times BD.$

（證明） $\angle DAE=\angle BAF$ ニ作ル然ル時 $\angle ABF=\angle ACD$ ナルガ故ニ $\triangle ABF\propto\triangle ACD,$

$\therefore\ AB:AC=BF:CD,$

即 $AB\times CD=AC\times BF.$

又 $\angle BAE=\angle DAF$, 及ビ $\angle ACB=\angle ADB$ ナルガ故ニ
$\triangle ABC \propto \triangle ADF$ $\therefore$ $BC:FD=AC:AD$,

即チ $BC\times AD=AC\times FD$.

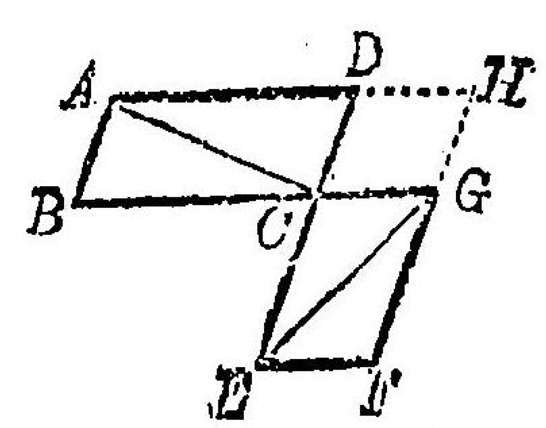
$$\therefore \quad AB\times CD+BC\times AD=AC\times BF+AC\times FD$$
$$=AC\times(BF+FD)$$
$$=AC\times BD.$$

(反定理) $AB\times CD+BC\times AD=AC\times BD$ ナル時 $\square ABCD$ ハ圓ノ內切四角形ナリ.

定理拾三

30. 貳ツノ三角形或ハ平行四邊形ガ壹角等シキ時其比ハ其夾邊ノ直方形ノ比ニ等シ.

(特說) $\square ABCD$, $\square CEFG$ ヲ平行四邊形トシ $\angle BCD=\angle ECG$ ナル時兩形ノ比ハ $CB\times CD : CE\times CG$ ニ等シ.



(證明) CG, CE ヲ CB, CD ト同壹直線ニアラシメ AD, FG ノ交點ヲ H トスレバ定理貳ニヨリテ

$$\square ABCD:\square DCGH=CB:CG,$$
$$\square DCGH:\square CEFG=CD:CE,$$
$$\therefore \quad \square ABCD:\square CEFG=CB\times CD:CG\times CE.$$

同法ニヨリ $\triangle BCA:\triangle ECG=CB\times CD:CG\times CE$.

31. **推論** 貳ツノ三角形或ハ平行四邊形ガ各壹角互ヒニ補角ヲナス時其比ハ其角ノ夾邊ノ直方形ノ比ニ等シ.

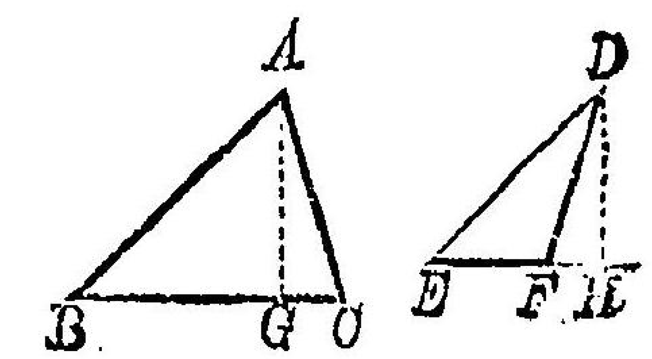
例ヘバ $\triangle ACD:\triangle CEG=DA\times DC:CE\times CG$.

定理拾四

32. 貳ツノ三角形或ハ平行四邊形ノ比ハ底邊ト高ノ直方形ノ比ニ等シ.

(特說) $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ノ底邊ヲ BC, EF トシ高ヲ AG, DH トスレバ兩形ノ比ハ

$BC\times AG : EF\times DH$ ナリ



(證明) AG, BC ノ直方形$=2\triangle ABC$, (三本定理貳)
DH, EF 〃 $=2\triangle DEF$. (〃 〃)

而シテ此兩直方形ノ比ハ $AG\times BC:DH\times EF$ ニ等シ.(定理拾三)

$\therefore$ $\triangle ABC:\triangle DEF=AG\times BC:DH\times EF$.

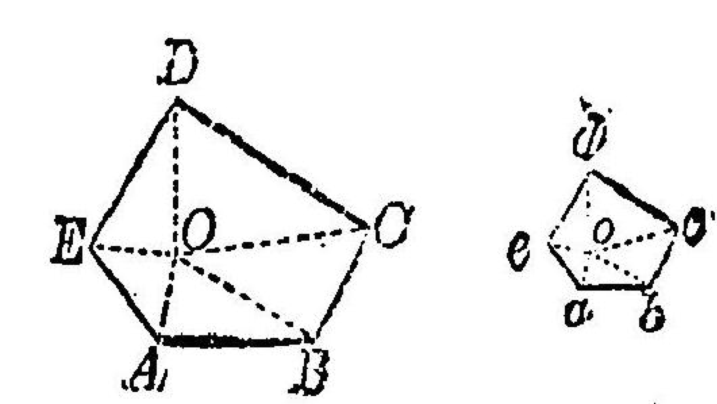
又平行四邊形ハ三角形ノ2倍ナルガ故ニ三角形ト同比ナリ.

定理拾五

33. 相似兩直線圖形ノ比ハ其相應邊ノ正方形ノ比ニ等シ,

(特說) $ABCDE$ 及ビ $abcde$ ヲ相似形トシ AB, ab ヲ相應邊トスレバ其比ハ

$AB^2:ab^2$.



(證明) $ABCDE$ 及ビ $abcde$ 兩形ヲ相似三角形ニ分ツ, (23.)

然ル時 $\triangle AOB \backsim \triangle aob$ ナルガ故ニ $\angle BAO=\angle bao$,

又 $\angle BAE=\angle DAF$, 及ビ $\angle ACB=\angle ADB$ ナルガ故ニ
$\triangle ABC \propto \triangle ADF$ $\therefore$ $BC:FD=AC:AD$,
即チ $BC\times AD=AC\times FD$.

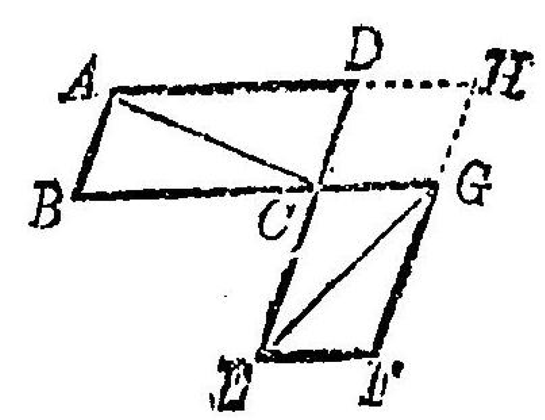
$$\therefore \quad AB\times CD+BC\times AD=AC\times BF+AC\times FD$$
$$=AC\times(BF+FD)$$
$$=AC\times BD.$$

(反定理) $AB\times CD+BC\times AD=AC\times BD$ ナルトキ $\square ABCD$ ハ圓ノ内切四角形ナリ.

定理拾三

30. 貳ツノ三角形或ハ平行四邊形ガ壹角等シキトキ其比ハ其夾邊ノ直方形ノ比ニ等シ.

(特說) $\square ABCD$, $\square CEFG$ ヲ平行四邊形トシ $\angle BCD=\angle ECG$ ナルトキ兩形ノ比ハ $CB\times CD : CE\times CG$ ニ等シ.



(證明) CG, CE ヲ CB, CD ト同壹直線ニアラシメ AD, FG ノ交點ヲ H トスレバ定理貳ニヨリテ

$$\square ABCD:\square DCGH=CB:CG,$$
$$\square DCGH:\square CEFG=CD:CE,$$
$$\therefore \quad \square ABCD:\square CEFG=CB\times CD:CG\times CE.$$

同法ニヨリ $\triangle BCA:\triangle ECG=CB\times CD:CG\times CE.$

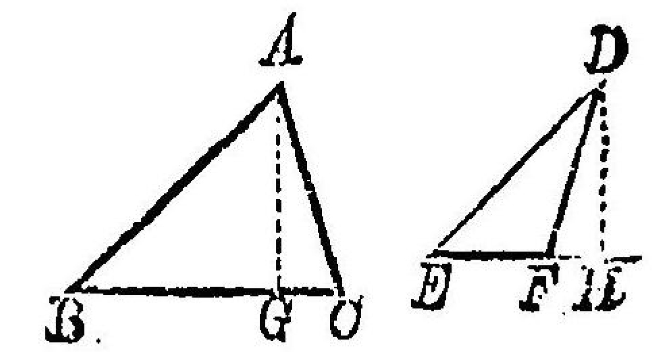
31. **推論** 貳ツノ三角形或ハ平行四邊形ガ各壹角互ヒニ補角ヲナストキ其比ハ其角ノ夾邊ノ直方形ノ比ニ等シ.

例ヘバ $\triangle ACD:\triangle CEG=DA\times DC:CE\times CG.$

定理拾四

32. 貳ツノ三角形或ハ平行四邊形ノ比ハ底邊ト高ノ直方形ノ比ニ等シ.

(特說) $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ノ底邊ヲ BC, EF トシ高ヲ AG, DH トスレバ兩形ノ比ハ



$BC\times AG:EF\times DH$ ナリ

(證明) AG, BC ノ直方形$=2\triangle ABC$, (三本定理貳)
DH, EF 〃 $=2\triangle DEF$; (〃 〃)

而シテ此兩直方形ノ比ハ $AG\times BC:DH\times EF$ ニ等シ.(定理拾三)

$$\therefore \quad \triangle ABC:\triangle DEF=AG\times BC:DH\times EF.$$

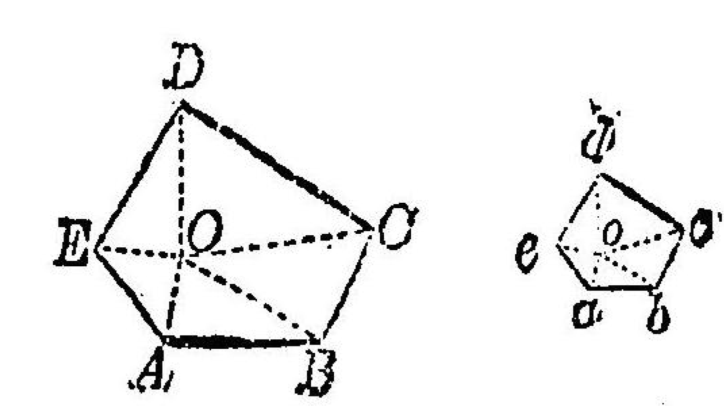
又平行四邊形ハ三角形ノ2倍ナルガ故ニ三角形ト同比ナリ.

定理拾五

33. 相似兩直線圖形ノ比ハ其相應邊ノ正方形ノ比ニ等シ,

(特說) $ABCDE$ 及ビ $abcde$ ヲ相似形トシ AB, ab ヲ相應邊トスレバ其比ハ

$AB^2:ab^2.$



(證明) $ABCDE$ 及ビ $abcde$ 兩形ヲ相似三角形ニ分ツ, (23.)

然ルトキ $\triangle AOB \backsim \triangle aob$ ナルガ故ニ $\angle BAO=\angle bao$,

$\therefore\ \triangle AOB:\triangle aob=AB\times AO:ab\times ao,$ (定理拾三)

但シ假設ニヨリ $AB:ab=AO:ao.$

$\therefore\ \triangle AOB:\triangle aob=AB^2:ab^2,$

又 $\triangle BOC:\triangle boc=BC^2:bc^2,$

但シ $BC:bc=AB:ab,$

$\therefore\ \triangle BOC:\triangle boc=AB^2:ab^2,$

同理ニヨリ $\triangle COD:\triangle cod=AB^2:ab^2,$

$\triangle DOE:\triangle doe=AB^2:ab^2,$

$\therefore\ ABCDE:abcde=AB^2:ab^2.$

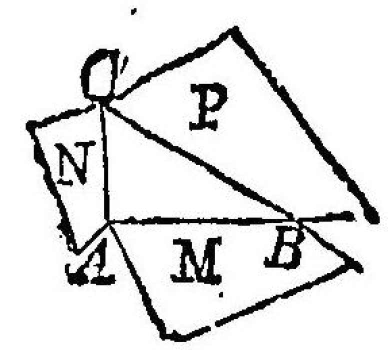
定理拾六

34. 直角三角形ノ各邊ヲ相應邊トシテ作レル三ツノ相似形ニ於テ直角貳邊上ニ作リシ兩形ノ和ハ斜邊上ニ作リシ形ニ等シ.

(特説) $\triangle ABC$ ヲ直角三角形トシ

M, N, P ヲ相似形トス,

然ルトキ $M+N=P.$



(證明) 定理拾五ニヨリ

$M:N=AB^2:AC^2,$

9. ノ (6) ニヨリテ

$M+N:N=AB^2+AC^2:AC^2,$

但シ $AB^2+AC^2=BC^2,$

$\therefore\ M+N:N=BC^2:AC^2,$

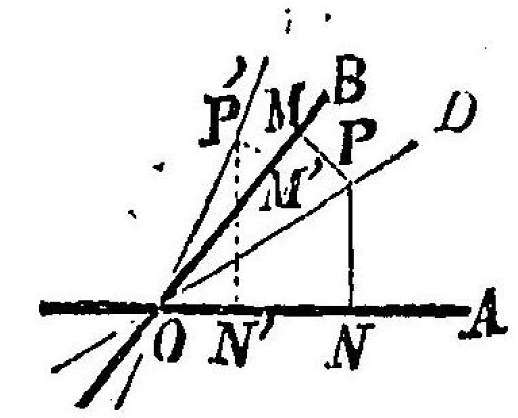
又 $P:N=BC^2:AC^2,$

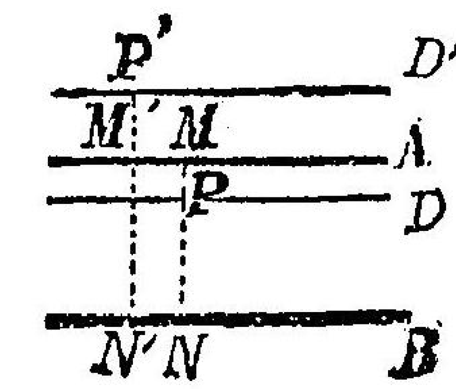
$\therefore\ M+N=P.$

第四節 軌跡及問題

定理拾七

35. 貳定直線ヲ距ルコ常數比ナル點ノ軌跡ハ其貳直線ガ交ハル片其交點ヲ通過スル所ノ壹雙ノ直線ニシテ若シ其貳直線ガ平行スル片ハ之ニ平行スル壹雙ノ直線ナリ.





(特説) A, B ヲ貳定直線トス,

然ルトキ $MP:NP$ ガ常數比ナルトキ P ノ軌跡ハ A, B ガ O 點ニ交ハルトキ O ヲ通過スル兩直線 D, D' ニシテ A, B ガ平行スルトキ亦タ之ニ平行スル兩直線 D, D' ナリ.

(證明) 何トナレバ P 點ハ D 線中ニ於テ動クトキハ A, B ガ交ハルトキ $\triangle PMO$ ハ常ニ相似ナル直角三角形ヲ以テ動キ $\triangle PNO$ モ亦タ同様ナルガ故ニ $\square MONP$ モ亦タ相似形ヲ以テ動クベシ故ニ $MP:PN$ ハ常數比トナルナリ,

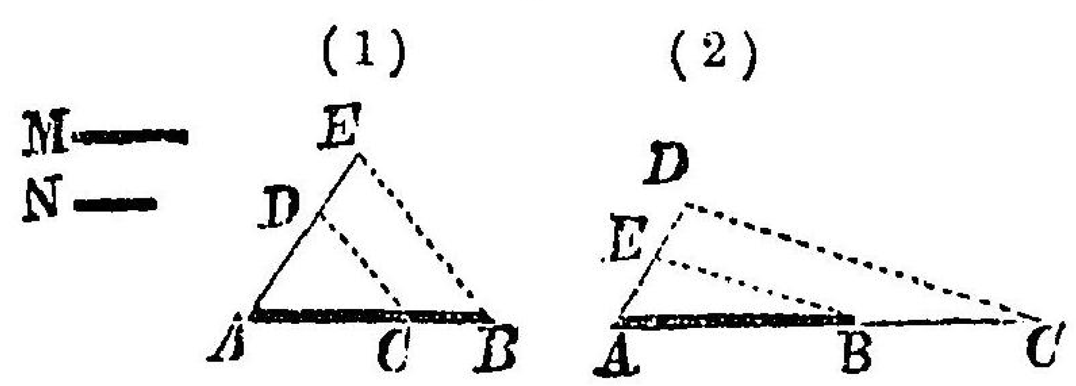
又 A, B ガ平行スルトキハ其垂線 MP, NP ハ常數ナルガ故ニ P ノ軌跡ハ D ナルコ明ラカナリ.

又所求ノ軌跡ハ $PM:PN$ ト等シキ $P'M':P'N'$ ナル D' 線ナリ.

又 A, B ニ關シテ D, D' 兩直線ト等勢位置ニ於ケル壹變ノ直線モ亦タ所求ノ軌跡ナリ.

問題壹

36. 有限ノ直線ヲ定比ニ分ツコトヲ求ム.



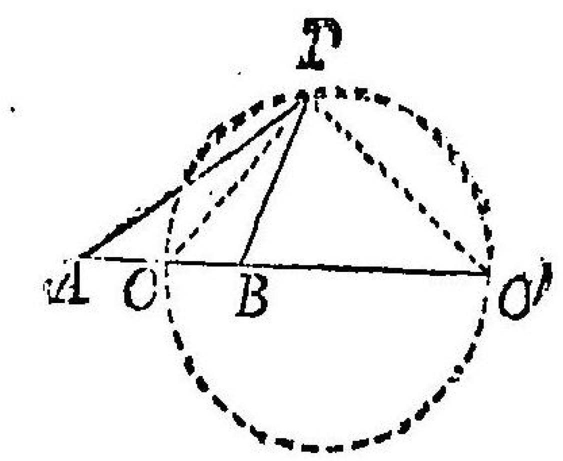
(作法) $M:N$ ヲ定比トシ AB ヲ定直線トス.
AB ト任意ノ角ヲナシテ AE ヲ引キ $AD=M$, $DE=N$ ニ作リ EB ヲ連結シ之ニ平行シテ DC ヲ引ケハ C ハ所求ノ分點ナリ.
(1) ハ內部ニ分チ (2) ハ外部ニ分ツモノナリ.
(證明) 何トナレハ

$$AC:BC=AD:DE, \quad (11.)$$
$$=M:N.$$

定理拾八

37. 貳定點ヲ距ルコト定比ナル點ノ軌跡ハ圓ナリ.
A, B ヲ貳定點トシ $M:N$ ヲ定比トス.
AB ヲ連結シ之ヲ C 及ヒ C' ニ於テ內部及ヒ外部ニ貳分ス即チ $AC:BC=M:N$, 及ヒ $AC':BC'=M:N$. (問題壹)
而シテ $AP=M$, $BP=N$ ニ作ルトキハ P 點ハ CC' ヲ直徑トスル所ノ圓周中ニアリ故ニ此圓周ハ所求ノ軌跡ナリ.

(證明) 何トナレハ作法ニヨリテ

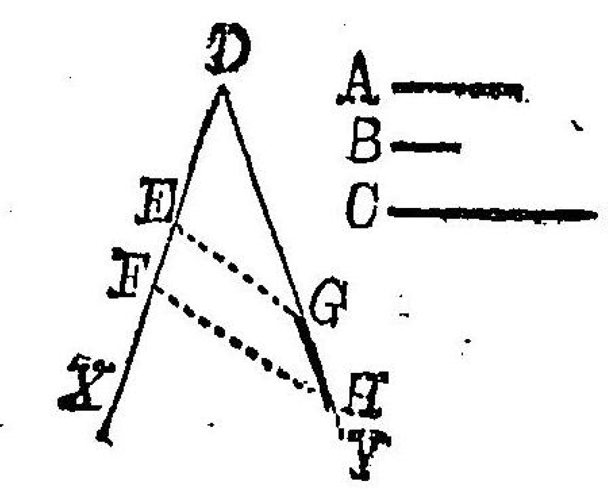


$$PA:PB=AC:BC$$
$$=AC':BC'$$

ナルカ故ニ定理九ニヨリテ PC ハ $\angle APB$ ヲ貳等分シ PC' ハ其外角ヲ貳等分スルカ故ニ $\angle CPC'=R$∟, 故ニ P ハ圓周中ニアリ.

問題貳

38. 三定直線ニ比例スル第四項ノ直線ヲ求ム.

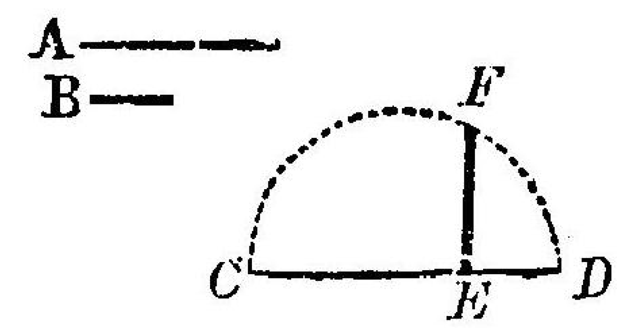


(作法) A, B, C ヲ三定直線トス, 然ルトキ DX, DY ナル任意ノ兩交直線ヲ引キ $DE=A$, $EF=B$, $DG=C$ ニ作リ EG ヲ連結シ之ニ平行シテ FH ヲ引ケハ GH ハ所求ノ直線ナリ.
(證明) 定理壹ニヨリテ
$DE:EF=DG:GH$ 即チ $A:B=C:GH$.

問題三

39. 兩定直線ト中比例ヲナス所ノ中項ヲ求ム.
(作法) A, B ヲ兩定直線トス, 然ルトキ CD ヲ引キ $CE=A$, $ED=B$ ニ作リ $CD\perp EF$ トナシ CD ヲ直徑トシテ半圓ヲ畫ク然ルトキ EF ハ所求ノ線ナリ.

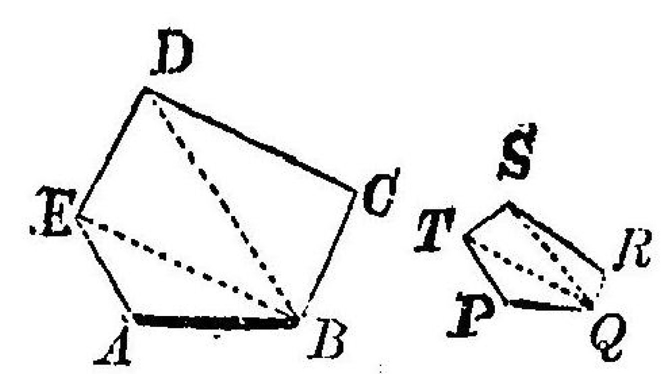
（證明） 何トナレバ
三本 33. ニヨリ
$EF^2 = CE \times DE$
$= A \times B,$
$\therefore A : EF = EF : B.$



問 題 四

40. 壹定直線上ニ於テ定直線圖形ト相似ナル直線圖形チ作ルコチ求ム.

（作法） AB チ定直線トシ $PQRST$ チ定直線圖形トス, 然ルトキ $PQRST$ 形ノ壹角點ヨリ對角線チ引キ全形チ三角形ニ分ツ

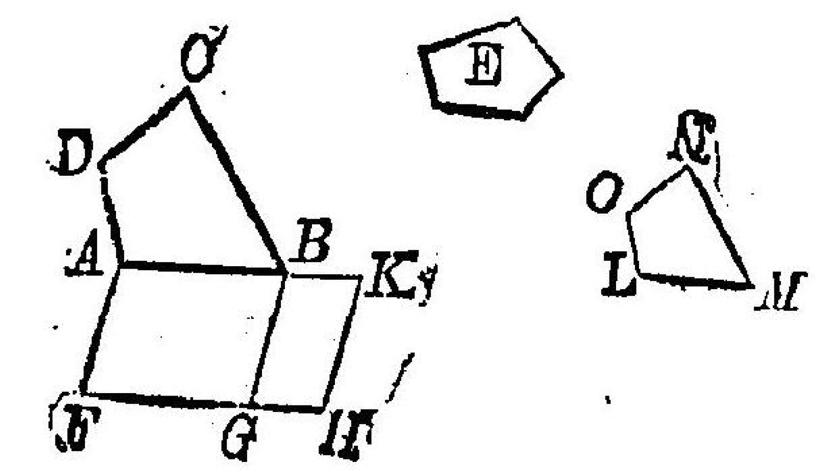


而シテ
$\angle ABE = \angle PQT$, $\angle BAE = \angle P$ ニ作レバ $\triangle ABE \propto \triangle PQT$,
又 $\angle EBD = \angle TQR$, $\angle BED = \angle QTS$ ニ作レバ
$\triangle EBD \propto \triangle TQR,$
同法ニヨリ $\triangle DBC \propto \triangle SSR,$
$\therefore ABCDE$ 形 $\propto PQRST$ 形. (23.)

問 題 五

41. 定直線圖形ト等積ニシテ且ツ他ノ定直線圖形ト相似ナル直線圖形チ作ルコチ求ム.

（作法） $ABCD$ チ所求ノ圖形ト相似ナル定直線圖形トシ E チ所求ノ圖形ト等積ナル定直線圖形トス.



ト AB ノ上ニ $ABCD$ ト等積ナル平行四邊形 $AFGB$ チ作リ又 BG ノ上ニ E ト等積ナル平行四邊形 $BGHK$ チ作リ
$\angle GBK = \angle FAB$ ナラシム. (三本問題貳)
LM ノ長チ $AB : LM :: LM : BK$ ナラシム. (問題三)
而シテ LM 上ニ $ABCD$ ト相似形ナル $LMNO$ チ作ル, (問題四)
然ルトキ $LMNO$ ハ所求ノ直線圖形ナリ.

（證明） 何トナレバ $AB : LM :: LM : BK$ ナルガ故ニ
$AB : BK = AB^2 : LM^2.$
又 $AB : BK = \square AFGB : \square BGHK,$ (定理貳)
$= ABCD$ 形 $: E.$
$\therefore$ $ABCD$ 形 $: E = AB^2 : LM^2,$
即 $ABCD$ 形 $: LMNO$ 形 $= AB^2 : LM^2,$
之ニ由テ $ABCD$ 形 $\propto LMNO$ 形. (定理拾五)

例 題

1. 三角形ノ各角ノ貳等分線ハ壹點ニ會ス.

2. ABC, PQR チ平行兩直線トシ $AB : BC = PQ : QR$ ナルトキ AP, BQ, CR ハ平行スルカ或ハ壹點ニ會ス.

3. $\triangle ABC$ ノ各邊ノ中央點チ D, E, F トスレバ $\triangle DEF \propto \triangle ABC$ ニシテ且ツ $\triangle DEF = \frac{1}{4}\triangle ABC.$

4. 底邊ニ平行スル壹直線ニテ三角形ヲ貳等分セヨ.

5. 三角形ノ底邊ニ壹邊ヲ置キテ内切正方形ヲ作レ.

6. 定正方形ト等積ナル等邊三角形ヲ作レ.

7. 三角形ノ壹邊中ノ或壹點ヨリ他貳邊ニ平行兩直線ヲ引キテ成レル平行四邊形ノ對角線ノ交點ノ軌跡如何.

8. 定直線 AB ト定距離ニ於テ平行スル既知長ノ直線ヲ CD トスレバ AD 及ビ BC ノ交點ノ軌跡如何.

9. 三平行線 AA', BB', CC' ガ他ノ貳直線 ABC, $A'B'C'$ ヲ截リテ $AB:BC=A'B':B'C'=m:n$ トナルヰ
$(m+n)BB'=nAA'+mCC'$ ナリ.

10. $\triangle ABC$ ノ AC 邊中ノ壹點ヲ A' トシ CB 邊ノ引長線中ノ壹點ヲ B' トシ $AA'=BB'$ トスルヰ $A'B'$ ハ AB ヲ截リテ其貳部分ヲ $CA:CB$ ノ比トナス.

11. $\triangle ABC$ ノ BC ノ中央點ヲ O トシ A 角ノ貳等分線ガ BC ニ交ハル點ヲ D トスレバ $OB:OD=AB+AC:AB\sim AC$.

12. 頂角, 底邊及ビ他貳邊ノ比ヲ知リテ三角形ヲ作レ.

13. AEF 及ビ BEG ヲ圓徑 AB ノ兩端ヨリ引ク貳弦トシ CED ヲ AB ニ垂直ナル弦トスレバ $CF:DF=GC:GD$.

14. 三角形 ABC ノ三高 AD, BE, CF ノ交點ヲ O トシ EF ヲ以テ AD ヲ H ニテ分ツヰ $DO:OH=DA:HA$.

15. $\triangle ABC \propto \triangle DEF$ ナルヰ各形ノ相應角點ヨリ AM, DN ヲ引キ相應邊 BC, EF ヲ M 及ビ N ニテ截リ $\angle AMB=\angle DNE$ ナルヰ $\triangle ABC:\triangle DEF=AM^2:DN^2$.

16. BC 及ビ DE ヲ壹圓ノ貳等弦トシ A ヲ其圓周中ノ壹點トスレバ $\triangle ABC:\triangle ADE=AB\times AC:AD\times AE$.

17. 三角形ノ面積ト其外切圓徑2倍ノ積ハ三邊ノ連乘積ニ等シ.

18. □$ABCD$ ヲ圓ノ内切四角形トシ兩對角線ノ交點ヲ E トスレバ $AD\times AB:CB\times CD=AE:CE$.

19. 平行四邊 $ABCD$ ノ A 角ヲ通過シテ任意ノ圓周ヲ畫キ AB, AD, AC ヲ F, H, G ニ於テ截ルヰ
$$AF\times AB+AH\times AD=AG\times AC.$$

20. 三角形 ABC ノ C 角ノ等分線ニテ AB ヲ P 及ビ Q ニテ内部及ビ外部ニ貳分シ PQ ノ中央點ヲ O トスレバ $AO\times BO=OP^2$.

21. $\triangle ABC$ ノ BC ヲ D 迄延バシ DA ガ外切圓ノ切線トナルヰ $CD:BD=CA^2:BA^2$.

22. AB, AC ヲ壹圓ノ切線トシ弦 BC ヲ E ニ於テ貳等分シテ AF ヲ引キ D 及ビ F ニ於テ圓周ヲ截ルヰ
$$AD:DE=AF:EF.$$

23. 同上 $AD'E'F'$ ヲ引キ D' 及ビ F' ニ於テ圓周ヲ截リ E' ニ於テ BC ヲ截ルヰ $\angle D'EE'=\angle F'EE'$
及ビ　$AD':D'E'=AF':E'F'$.

24. 貳定直線及ビ壹定點ニ切シテ圓ヲ作レ.

25. 貳定圓及ビ壹定點ニ切シテ圓ヲ作レ.

26. 三定圓ニ切シテ圓ヲ作レ.

27. AB, CD ナル平行貳線ノ A 點ヨリ AP 線ヲ引キ C ニ於テ CD ヲ截リ $AP:CP$ ガ定比ナルヰ P ノ軌跡如何.

28. 圓徑 AB ノ壹端ヨリ AP 線ヲ引キ C ニ於テ圓周ヲ截リ $AP:CP$ ガ定比ナルヰ P ノ軌跡如何.

29. 三角形ノ内或ハ外ノ壹點ヨリ壹直線ヲ引キ全積ヲ貳等分セヨ.

30. 共心ノ三定圓ノ各周ニ各角點ヲ置キテ定角ヲ有スル三角形ヲ作レ.

(完了)

(正價金貳拾五錢)
明治二十九年十一月二十日訂正四版發行
明治二十九年十一月十五日訂正四版印刷
明治二十九年八月十日訂正三版發行
明治二十九年八月一日訂正三版印刷
明治二十七年五月廿一日訂正再版發行
明治二十七年五月十六日訂正再版印刷
明治二十四年一月五日出版
明治二十四年一月四日印刷
(初等教育 平面幾何)

版權所有

印刷者　京橋區元數寄屋町四丁目二番地
杉原辨次郎

關西大販賣所　大坂南區心齋橋筋
松村九兵衞

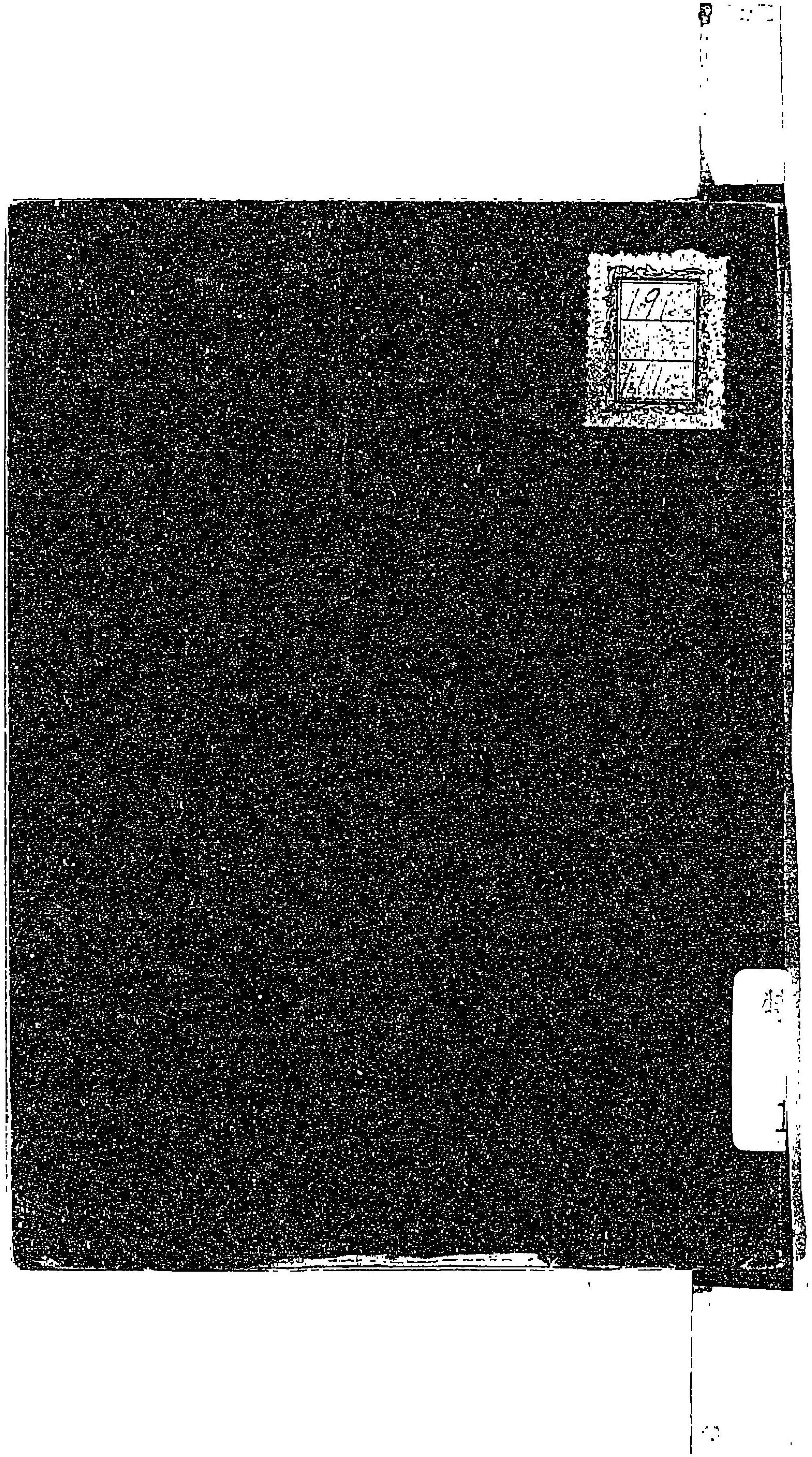
販賣者　日本橋區通三丁目六番地
林平次郎

販賣者　小石川區大門町二十五番地
青山淸吉

發行者　京橋區南傳馬町一丁目十二番地
吉川半七

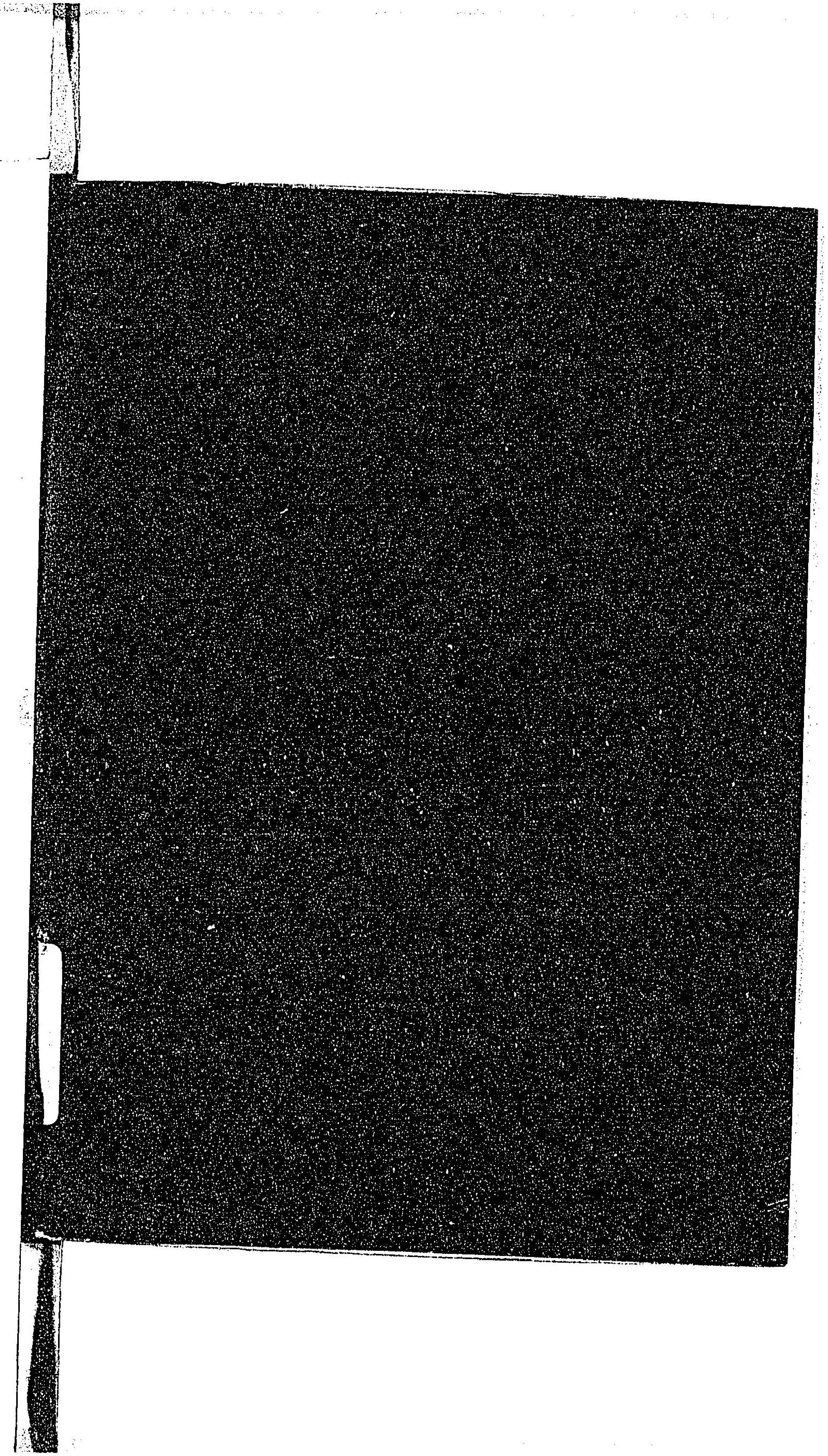
編纂者　神田區北神保町十五番地
上野淸

印刷所　京橋區元數寄屋町　杉原活版所


19

平面幾何

上野　清／著



[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]