

大學用書

風洞干涉

曹鶴蓀編著

正中書局印行

大學用書

風 洞 干 涉

曹 鶴 蓀 編 著



正 中 書 局 印 行

版權所有
翻印必究

中華民國三十三年六月渝初版
中華民國三十六年七月滬一版

風 洞 干 涉

全一册 定價國幣三元四角

(外埠酌加運費匯費)

編	著	者	曹	鶴	孫
發	行	人	吳	秉	常
印	刷	所	正	中	書
發	行	所	正	中	書

(1769)

弁 言

昔水動力學係根據數項假定，致所得結論，有不切實際者，如達倫貝爾之矛盾是。於是水力學繼之而興，對於每一項工程，作一實驗，如無可靠之理論為其根據，則實驗結果，是否即能應用，每令人懷疑。

近代空氣動力學，純自水動力學演變而成。其結論之是否切於實際，須自風洞實驗證明之。使理論與實際，相輔而行，打成一片，而免過去水動力學與水力學各走極端之弊。

於飛行時，常假定空氣靜止，飛機以某定速度前進。於作風洞實驗時，為便利計，常使飛機模型固定不動，使空氣在反飛行方向流過模型。故欲使實驗結果，與實際飛行時者相符合，須考慮及（一）飛機模型之大小，風洞實驗段空氣之速度及密度；（二）風洞洞壁等對於升力係數及阻力係數等之影響。前者曰尺度影響，後者曰風洞干涉，本書所討論者，僅限於風洞干涉。

計算風洞干涉，所習用之方法有二：一為影像法，一為同形變化法。前者較為簡單而明顯，易於初學，本書對以上兩法均將述及之。

本書假定讀者已讀過空氣動力學，故所引用關於空氣動力學上之常用名詞及公式等，不復詳加解釋。

三十一年六月識於重慶國立交通大學

目 次

第一章 總論	1
1. 開露式風洞與封閉式風洞	1
2. 格氏定理	5
3. 風洞干涉因數	9
第二章 長方形風洞之干涉	11
1. 影像法	11
2. 旋渦串與偶串之感應流速	14
3. 長方形風洞之干涉	19
4. 長方形風洞對於長翼展機型之干涉	25
第三章 圓形及橢圓形風洞之干涉	31
1. 旋渦對於面形流線及等勢線之影像	31
2. 圓形風洞之干涉	35
3. 橢圓形風洞之干涉	40
第四章 任意形狀風洞之干涉	44
1. 竇赫路法(一)——有二對稱軸之任意形風洞	44
2. 竇赫路法(二)——任意形之風洞	52

第五章	干涉因數與風洞式樣及與模型置 放方向之關係	16
1.	各式長方形風洞干涉因數間之關係	56
2.	風洞干涉因數圖	58
第六章	風洞與螺旋槳	62
1.	風洞對於螺旋槳之干涉	62
2.	風洞螺旋槳	66

第一章 總論

1. 開露式風洞與封閉式風洞

當飛機模型，置於風洞中作實驗時，在風洞洞壁外之空氣，仍在靜止狀態，在此區域內，任何點之流速等於零，任何點之壓力等於大氣壓力。換言之，風洞洞壁對於風洞內之空氣流動場，產生一種影響。使由飛機模型而產生之流速與壓力上之變化，不達於洞外。

風洞洞壁對於洞內空氣流動場所產生之變化，使自風洞實驗所得之升力係數與阻力係數，與其真值，略有差誤，此種差誤，謂之風洞干涉 (Wind Tunnel Interference)

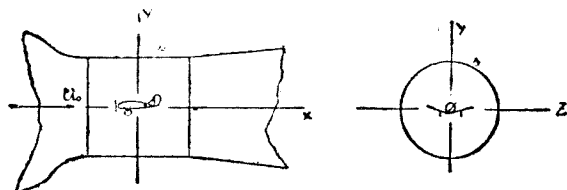
命 ϕ_t 為受風洞限制時之流速勢 (Velocity Potential), ϕ_0 為未受任何限制時之流速勢，前者可以視為後者與一補助流速勢 (Complementary Velocity Potential) ϕ_e 之和，

$$\phi_t = \phi_0 + \phi_e \quad (1.1)$$

ϕ_e 代表因風洞影響而產生之流速勢之變化。

ϕ_e 之值，隨風洞實驗段之式樣與形狀而變。若實驗之四周，被風洞洞壁包圍者，謂之封閉式 (Constrained Stream Type) 風洞。若實驗段之四壁，均係開露者，謂之開露式 (Open Jet Type) 風洞。若一部分開露，一部分封閉者，謂之半封閉式 (Semi-Constrained Stream Type)。

(甲) 封閉式風洞 命風洞之軸為 x 軸，於實驗段之垂直截面上，沿飛機翼展之軸為 z 軸，垂直翼展之軸為 y 軸(圖 1.1)。



(圖 1.1)

因風洞係封閉式，故於其洞壁上任意點，垂直於洞壁之流速 V_n 為零。換言之，風洞洞壁與 $y-z$ 平面之交線 s (圖 1.1)，係流動場中之一流線。因

$$V_n = \frac{\partial \phi_l}{\partial n} = 0 \quad (1.2)$$

自(1.1)式，得

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial n} = - \frac{\partial \phi_c}{\partial n} \quad (1.3)$$

封閉式風洞之補助流速勢 ϕ_c ，應適合於(1.3)式之條件。

命 U_0 為無飛機模型時，於風洞實驗段沿 x 軸向空氣之流速。此流動之流速勢應為 $U_0 x$ ，更命 ϕ' 為替代飛機模型之流速勢，故得

$$\phi_0 = U_0 x + \phi' \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} (U_0 x + \phi') = \frac{\partial \phi'}{\partial n}$$

代入(1.3)式，得

$$- \frac{\partial \phi_c}{\partial n} = \frac{\partial \phi'}{\partial n} \quad (1.5)$$

上式中 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 為垂直於洞壁方向，受機型之影響而產生之流速。此項流速，必須與補助流速勢 ϕ_0 於同一點同一方向之流速互相抵消。

(乙)開露式風洞 開露式風洞之條件，為於風洞實驗段中氣流最外層之壓力，必須等於大氣壓力 p_0 。若 V_x, V_y, V_z 為因機型而產生之分速，自柏努利定理(Bernoulli's Theorem)，得此等分速，必須適合於

$$p + \frac{1}{2} \rho [(U_0 + V_x)^2 + V_y^2 + V_z^2] = p_0 + \frac{1}{2} \rho U_0^2 \quad (1.6)$$

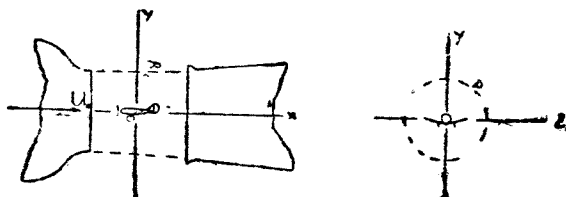
式。沿 s 面(圖 1.2) $p = p_0$ ，故得

$$V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 + 2U_0V_x = 0$$

設以 V_x, V_y, V_z 與 U_0 相比較，前者可以視為後者之第一次無限小值。故於上式中，若略去 V_x^2, V_y^2, V_z^2 各項，得

$$V_x = 0 \quad (1.7)$$

因 s 面約略為一柱形面，其母線 (Generatrix) 與 x 軸相平行，故得



(圖 1.2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} = U_0 \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial y} = V_y \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial z} = V_z \end{array} \right. \quad (1.8)$$

$$\phi_l = U_0 x + V_y y + V_z z + C \cong U_0 x + C \quad (1.9)$$

上式中, C 為一定數, 若命此定數為零, 自(1.1)式, 得

$$\phi_0 - U_0 x = -\phi_0 \quad (1.10)$$

再自(1.4)式, 得

$$\phi' = -\phi_0 \quad (1.11)$$

若模型係一機翼, 則 ϕ' 為機翼之附着旋渦線 (Bounding Vortex Line) 及尾隨旋渦線 (Trailing Vortex Line) 之流速勢, 又因尾隨旋渦線之感應流速與 x 軸相垂直, 故於 s 面上, 因模型而產生之感應分速 V_x , 均屬於附着旋渦者. 與 $x=0$ 平面對稱之任何二點, 此感應分速均相等, 故於 $x=0$ 平面上 ϕ' 之值, 祇等於 $x=-\infty$ 時 ϕ' 值之半.

自(1.5)及(1.11)兩式, 得結論如下:

(一) 假設風洞係封閉式, 則沿 s 面

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial n} + \frac{\partial \phi'}{\partial n} = 0$$

或

$$\sum \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (1.12)$$

故該面必係一流管面。沿該面之流函數 (Stream Function) ψ ，必係一定數。

(二) 假設風洞係開露式，則沿 s 面

$$\phi' + \phi_e = 0$$

或

$$\Sigma \phi = 0 \tag{1.13}$$

故若將等速流動 U_0 除外， s 面係一等勢面，沿該面之流速勢為零。

2. 格氏定理

格氏 (Glauert) 假定飛機之翼展甚小，故其一索之尾隨旋渦線之流動場，可約略以一偶線 (Doublet) 之流動場替代之。

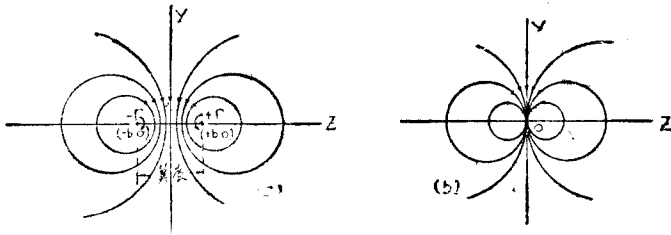


圖 2.1

圖 2.1(a) 示於機翼下流無窮遠處，垂直於尾隨旋渦線之一平面。假定沿翼展之升力平均分布時，其尾隨旋渦線，祇有自翼端折出之兩直線，其於 $y-z$ 平面之複勢 (Complex Potential) 為

$$W = \frac{i\Gamma}{2\pi} \left[\log_e(z + iy + b) - \log_e(z + iy - b) \right] \tag{2.1}$$

因

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right] = f'(t) \tag{2.2}$$

若命

$$\begin{cases} z + iy = t \\ b = \Delta t \end{cases}$$

代入(2.1)式,得當翼展 $2b$ 縮短至零時,

$$W = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{2b}{z + iy} \quad (2.3)$$

自古德·裘高斯基 (Kutta-Joukowski) 定理,得作用於機翼之升力為

$$L = \rho U_0 \Gamma \cdot 2b$$

若當翼展縮短至零時,總升力 L 維持不變,則

$$\lim_{2b \rightarrow 0} \Gamma \cdot 2b = M \quad (2.4)$$

M 為一定數,代入(2.3)式,得

$$W = \frac{iM}{2\pi(z + iy)} = \frac{M(y + iz)}{2\pi(y^2 + z^2)} \quad (2.5)$$

(2.5) 式係一偶之複勢,其強度為 M ,其偶軸沿 y 軸之負向。

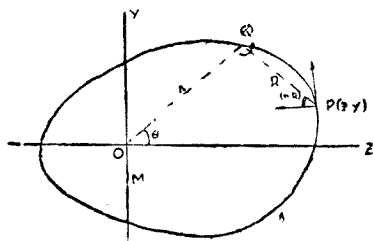


圖 2.2.

今設有一任意形狀之封閉式風洞 (圖 2.2), 有一飛機模型置於坐標之原點, 其翼展沿 z 軸置放。

當此模型之翼展極小時，則其於下流無窮遠處，垂直於風洞軸之任意平面上之流動，相當於一偶之流動。此偶之強度為

$$M = \lim_{2b \rightarrow 0} \Gamma \cdot 2b$$

其偶軸與翼展相垂直(圖 2.2)。

設將風洞之洞壁以一旋渦面 (Vortex Surface) 替代之，命 $\gamma(y, z)$ 為此旋渦面上沿 s 線每單位長度之強度，設此旋渦面對於洞內流動場之影響，適相當於洞壁之影響，則自 (1.5) 式，可知此旋渦面於洞壁上任意點 P ，所產生之垂直於洞壁之感應分速，與自原點之偶於同一點同方向之分速之和，應等於零。

命 n, t 為 P 點之切線與內法線方向(圖 2.2)，自 (2.5) 式，得原點之偶於 P 點沿法線方向之分速 V_n 為

$$V_n = \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{My}{2\pi(y^2 + z^2)} \right] = - \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{Mz}{2\pi(y^2 + z^2)} \right] \quad (2.6)$$

命 R 為洞壁上任意二點 P, Q 間之距離， (n, R) 為 PQ 線及於 P 點之法線 n 間之夾角，則沿洞壁之旋渦分布，於 P 點沿法線方向之分速為

$$- \oint_s \frac{\gamma}{2\pi R} \sin(n, R) ds \quad (2.7)$$

自(1.5)式，得

$$V_n = \oint_s \frac{\gamma}{2\pi R} \sin(n, R) ds \quad (2.8)$$

沿 s 線之旋渦分布，於原點 O 所產生之垂直於翼展之感應分速為

$$\Delta V_y = - \oint_s \frac{\gamma}{2\pi r} \cos \theta ds \quad (2.9)$$

又設上述之風洞，係開露式者，自 (1.13) 式，可知 s 線必係一等勢線。換言之，沿該線切線方向之分速應等於零。

若將於 O 點之模型，順時針向轉過 90 度，則其複勢應為

$$W = \frac{M}{2\pi(z+iy)} = \frac{M(z-iy)}{2\pi(z^2+y^2)} \quad (2.10)$$

其於 P 點沿切線方向之分速 V_t 為

$$V_t = \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{Mz}{2\pi(z^2+y^2)} \right] = - \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{My}{2\pi(z^2+y^2)} \right] \quad (2.11)$$

今設將 s 線，以沿該線之源 (Source) 或匯 (Sink) 之分布替代之，則此源或匯之分布，沿切線方向 t 所產生之感應分速，與自原點之偶，於同一點沿同一方向之分速之和應等於零。換言之，即

$$V_t = \oint_s \frac{m}{2\pi R} \sin(n, R) ds \quad (2.12)$$

上式中

$$m = m(z, y)$$

為源或匯之分布單位長度之強度。

此源或匯之分布，於 O 點所產生之垂直於翼展之感應分速為

$$\Delta V_x = - \oint_s \frac{m}{2\pi r} \cos \theta ds \quad (2.13)$$

綜合以上兩種情形，若風洞之形狀不變，其式樣自封閉式變至開露式，並當模型順時針向轉過 90 度時，則於 s 線上之任意點 P ，

V_z 必等於 $-V_n$ (見(2.6)(2.11)兩式), 故

$$m = -\gamma \quad (2.14)$$

$$\Delta V_x = -\Delta V_y \quad (2.15)$$

自(2.14)(2.15)兩式, 得格氏定理如下: 一任意封閉式風洞, 對於一極小之飛機模型之感應作用, 與同樣之開露式風洞, 於同一飛機模型, 當該模型順時針向轉過 90 度後之感應作用, 大小相等, 而符號相反。

3. 風洞干涉因數

假定機翼上之升力, 係橢圓曲線分布, 其感應阻力係數 K_{Di} 為

$$K_{Di} = \frac{2K_L^2}{\pi R} = \frac{K_L^2}{2\pi b^2} S = \frac{K_L^2}{2} \frac{S}{S_0} \quad (3.1)$$

上式中 K_L 為升力係數, R 為形比, b 為翼展, S 為機翼面積, S_0 為以翼展為直徑之圓之面積。

同理, 若命由風洞干涉作用, 而產生之感應阻力係數 ΔK_{Di} 為

$$\Delta K_{Di} = \delta \frac{K_L^2}{C} S = \delta \cdot \frac{2S_0}{C} K_{Di} \quad (3.2)$$

上式中 δ 為風洞之干涉因數 (Interference Factor), C 為風洞之截面面積。

(3.2)式亦可以書作

$$\frac{\Delta D_i}{L} = \delta K_L \frac{S}{C} \quad (3.2a)$$

或

$$\Delta D_i = \delta \cdot \frac{2S_0}{C} D_i \quad (3.2b)$$

上式中, ΔD_i 爲因干涉作用而增加之阻力, L 爲飛機之升力, D_i 爲其感應阻力.

因干涉作用而產生之衝角之更動爲

$$\Delta \alpha_i = \frac{\Delta V_y}{U_0} = \frac{\Delta K_{D_i}}{L} = \delta \frac{S}{C} \cdot K_L \quad (3.3)$$

第二章 長方形風洞之干涉

1. 影像法

今設於 A, B 兩點, 有兩旋渦, 其循環為 $+\Gamma$ 及 $-\Gamma$ (圖 1.1), 於此兩旋渦之流動場中, AB 之垂直平分線, 係一流線。又若於 A, B 兩點之旋渦, 其循環均為 $-\Gamma$, 或均為 $+\Gamma$, 則 AB 之垂直平分線, 係一等勢線 (圖 1.2)。

反之, 若有一旋渦 B , 於該旋渦之附近, CD 線係此流動場中之一流線 (圖 1.1) 或一等勢線 (圖 1.2), CD 線對於旋渦 B 所產生之流動場之影響, 相當於旋渦 A 之影響。故旋渦 A 謂之旋渦 B 對於 CD 線之影像 (Image)。

今設有與紙面相垂直之二尾隨旋渦線 A, B (圖 1.3)。同時命 CD 線為此流動場中之一流線, 自圖 1.1 不難推知 $A(-\Gamma), B(+\Gamma)$ 對於流線

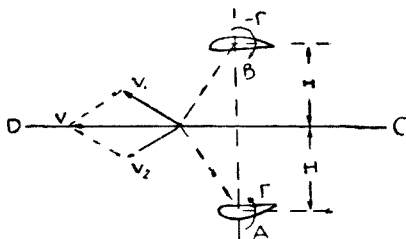


圖 1.1

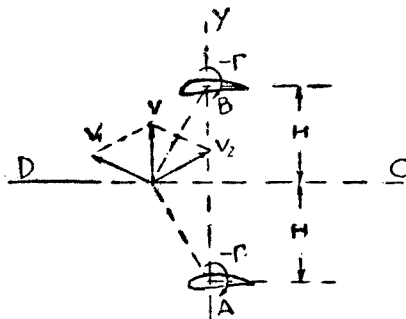


圖 1.2

CD 之影像為 $A'(+\Gamma)$, $B'(-\Gamma)$. A, A', B, B' 對於 CD 線, 互相對稱.

又若 CD 線為流動場中之一等勢線, 自圖 1.2, 可推知 $A(-\Gamma)$, $B(+\Gamma)$ 對於 CD 線之影像為 $A'(-\Gamma)$, $B'(+\Gamma)$ (圖 1.4).

若於 A, B 二尾隨旋渦線附近, 有一與翼展相垂直之流線或等勢線, 其影像見圖 1.5 及圖 1.6.

若飛機模型 (以二尾隨旋渦線替代之) 置於二水平或二垂直之等勢線或流線之間, 其影像見圖 1.7 至圖 1.12. 圖中正號表示正放之飛機模型, 負號表示反放者.

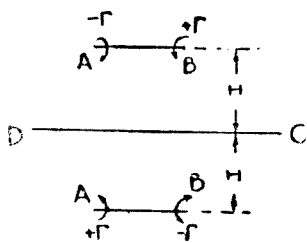


圖 1.3

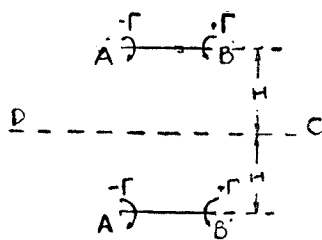


圖 1.4

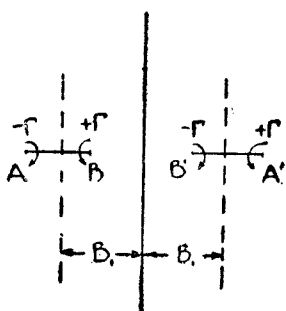


圖 1.5

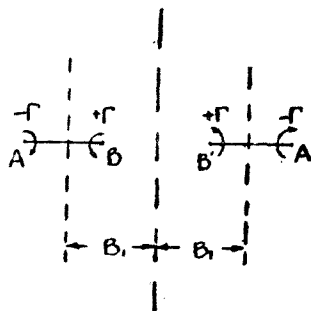


圖 1.6

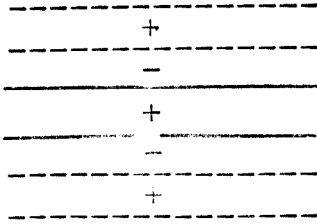


圖 1.7

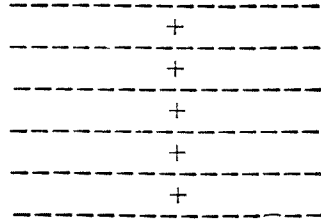


圖 1.8

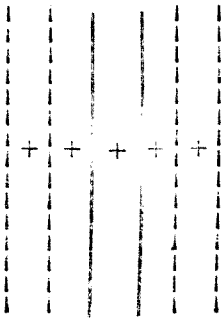


圖 1.9

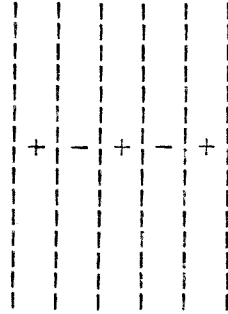


圖 1.10

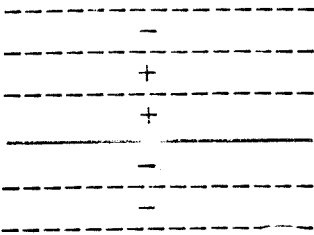


圖 1.11

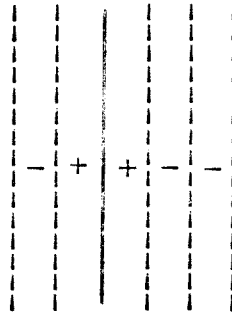


圖 1.12

2. 旋渦串與偶串之感應流速

關於旋渦串及偶串之流動場中，任意點之感應流速，分下述四段討論之。

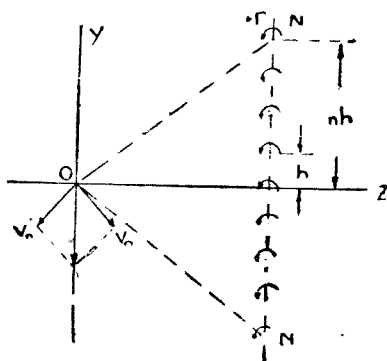


圖 2.1

(一) 今設有一串同號等距離且與 x 軸平行之旋渦線(圖 2.1)。命 h 為相鄰接之二旋渦線間之距離， z 為任意一旋渦線與平面 $z=0$ 間之距離， Γ 為其循環。

一任意旋渦線 N 於原點 O 所產生之感應流速 V 為

$$|V_n| = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{z^2 + n^2 h^2}} \quad (2.1)$$

其方向與 ON 線相垂直。此感應流速沿 y 軸之分速為

$$v_y = -|V_n| \cos \theta = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{z}{z^2 + n^2 h^2} \quad (2.2)$$

但因(註)

(註) 見 Smithsonian Mathematical Table, Smithsonian Institute.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{z}{z^2 + n^2 h^2} &= \frac{\pi}{h} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\frac{\pi z}{h}}{\left(\frac{\pi z}{h}\right)^2 + n^2 \pi^2} \\
&= \frac{\pi}{h} \left[\frac{1}{\pi z} + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\frac{\pi z}{h}}{\left(\frac{\pi z}{h}\right)^2 + n^2 \pi^2} \right] \\
&= \frac{\pi}{h} \coth \frac{\pi z}{h} \quad (2.3)
\end{aligned}$$

故得此項旋渦串於原點 O 所產生之沿 y 軸之感應流速為

$$V_T = -\frac{\Gamma}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{z}{z^2 + n^2 h^2} = -\frac{\Gamma}{4h} \coth \frac{\pi z}{h} \quad (2.4)$$

此旋渦串於原點 O ，沿 z 軸所產生之感應流速為零，因與 z 軸對稱之任意兩旋渦線，於原點 O 所產生之沿 z 軸之感應流速，恰好抵消。

若於上述之旋渦串中，位於 $x-z$ 平面上者，其循環為正，其餘則正負相間，則

$$V_T = -\frac{\Gamma}{4h} \operatorname{csch} \frac{\pi z}{h} \quad (2.5)$$

(二) 今設有互相平行之兩串旋渦線 (圖 2.2)，命 Δz 為此兩串旋渦線間之間隔，自 (1.4) 式，得於原點 O 沿 y 軸之感應流速為

$$V_T = -\frac{\Gamma}{4h} \left[\coth \frac{\pi z}{h} - \coth \frac{\pi(z + \Delta z)}{h} \right] \quad (2.6)$$

當 Δz 漸近於零時, 同時命

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} [\Gamma \cdot \Delta z] = M \quad (2.7)$$

則此兩串平行之旋渦線, 合併為一串與平面 $z=0$ 平行之偶線, 其強度為 M , 其偶軸與 y 軸同一方向, 其於原點 O 沿 y 軸之感應流速為

$$\begin{aligned} V_T &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{4h} \left[\coth \frac{\pi(z + \Delta z)}{h} - \coth \frac{\pi z}{h} \right] \\ &= - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{4h} \Delta z \left[\frac{\pi}{h} \cdot \operatorname{csch}^2 \frac{\pi z}{h} \right] \\ &= - \frac{M}{4\pi} \left(\frac{\pi}{h} \right) \operatorname{csch} \frac{\pi z}{h} \end{aligned} \quad (2.8)$$

又若於上述之偶串中, 位於 $x-z$ 平面上者, 其偶軸與 y 軸同向, 其餘則正負相間 (與 y 軸同向者為正, 異向者為負). 自 (2.5) 式得其於原點 O 沿 y 軸向之感應流速為

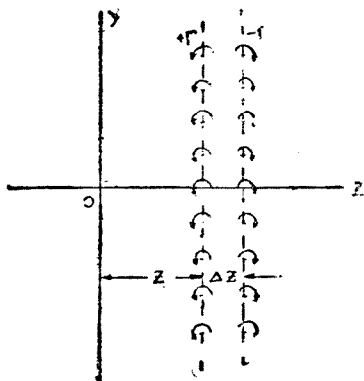


圖 2.2

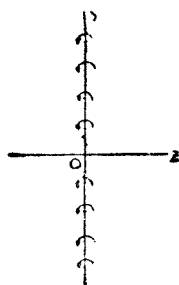


圖 2.3

$$V_T = -\frac{M}{4\pi} \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 \operatorname{csch} \frac{\pi z}{h} \coth \frac{\pi z}{h} \quad (2.9)$$

(三) 今設有於 $z=0$ 平面上, 平行於 x 軸之一串旋渦線, 唯缺去沿 x 軸者。

自(2.4)式, 命 z 等於 Δz , 再命 Δz 漸近於零, 再減去於 xz 平面上之旋渦線所產生之感應流速, 得

$$V_T = -\frac{\Gamma}{4h} \coth \frac{\pi \cdot \Delta z}{h} - \left(-\frac{\Gamma}{4\pi \cdot \Delta z}\right) \quad (2.10)$$

但因(註)

$$\coth \frac{\pi \cdot \Delta z}{h} = \frac{1}{\pi \cdot \Delta z} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi \cdot \Delta z}{h}\right)^2 - \frac{1}{45} \left(\frac{\pi \cdot \Delta z}{h}\right)^4 + \dots \right]$$

代入(2.10)式, 得

$$V_T = -\frac{\Gamma}{4h} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\pi \Delta z}{h}\right) - \frac{1}{45} \left(\frac{\pi \cdot \Delta z}{h}\right)^3 + \dots \right] \quad (2.11)$$

故得當 Δz 漸近於零時

$$V_T = 0 \quad (2.12)$$

又若此旋渦串之循環, 正負相間(圖 2.4), 則自(2.5)式, 得

$$\begin{aligned} V_T &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[-\frac{\Gamma}{4h} \operatorname{csch} \frac{\pi \Delta z}{h} - \left(-\frac{\Gamma}{4\pi \cdot \Delta z}\right) \right] \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[+\frac{\Gamma}{4h} \cdot \left\{ \frac{1}{6} \frac{\pi \Delta z}{h} - \frac{7}{360} \left(\frac{\pi \Delta z}{h}\right)^3 + \dots \right\} \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

(註) 見 P. er e's A Short Table of Integrals

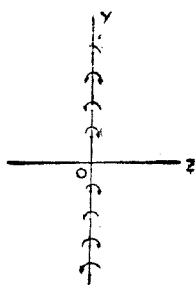


圖 2.4

(四) 設有於 $z=0$ 平面上, 平行於 x 軸之一串偶線. 唯缺去沿 x 軸者.

自(2.11)式, 得

$$\begin{aligned}
 V_T &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[-\frac{\Gamma}{4h} \left\{ \frac{1}{3} \frac{\pi \Delta z}{h} - \frac{1}{45} \left(\frac{\pi \Delta z}{h} \right)^3 + \dots \right\} \right] \\
 &\quad + \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Gamma \Delta \rightarrow M}} \left[+\frac{\Gamma}{4h} \left\{ \frac{1}{3} \frac{\pi \Delta z}{h} - \frac{1}{45} \left(\frac{\pi \Delta z}{h} \right)^3 + \dots \right\} \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{h} \right) \frac{M}{4\pi} \tag{2.14}
 \end{aligned}$$

又若上述之偶串正負號相間, 則自(2.13)式, 得

$$\begin{aligned}
 V_T &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[+\frac{\Gamma}{4h} \left\{ \frac{1}{6} \frac{\pi \Delta z}{h} - \frac{7}{360} \left(\frac{\pi \Delta z}{h} \right)^3 + \dots \right\} \right] \\
 &\quad + \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Gamma \Delta \rightarrow M}} \left[-\frac{\Gamma}{4h} \left\{ \frac{1}{6} \frac{\pi \Delta z}{h} - \frac{7}{360} \left(\frac{\pi \Delta z}{h} \right)^3 + \dots \right\} \right] \\
 &= -\frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \frac{M}{4\pi} \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

3. 長方形風洞之干涉

所習用之長方形風洞，分下述之五種：

- (一) 全風閉式
- (二) 全開露式
- (三) 上下兩面封閉，兩旁開露
- (四) 上下兩面開露，兩旁封閉
- (五) 底面封閉，其餘三面開露

茲將以上五種風洞之干涉，分述於后：

(一) 全封閉式風洞 自圖 1.7 及 1.9，可知風洞洞壁對於飛機模型之干涉，相當於無窮數旋渦串或偶串之干涉。假定飛機模型之翼展甚小時，其尾隨旋渦線，約略如一偶線，故其影像，為無窮數之偶串，如圖 3.1 所示。圖中所示之正號，表示偶軸與 y 軸同向，負號表示偶軸與 y 軸異向。換言之，正號表示模型或影像在反放時，負號則表示其在正放時。

命風洞之高為 h ，寬為 a ，高寬比為 λ 。

$$\lambda = \frac{h}{a} \quad (3.1)$$

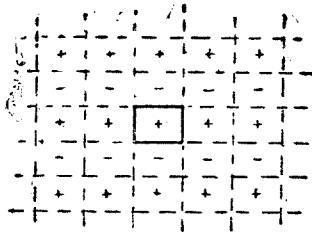


圖 3.1

自(2.9)及(2.15)兩式 得此等影像, 於原點 O 垂直於翼展之感應流速為

$$\begin{aligned}
 V_T &= \frac{M}{4\pi} \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \left[-\frac{1}{6} - 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \operatorname{csch} \frac{\pi m a}{h} \coth \frac{\pi m a}{h} \right] \\
 &= -\frac{M}{2\pi} \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \left[\frac{1}{12} + S_1 \right] \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

(二) 全開露式風洞 自圖 1.8 及 1.10, 可知風洞對於飛機模型之影像, 如圖 3.2 所示. 再自(2.8)及(2.14)式, 得此等影像於原點 O 之感應流速為

$$\begin{aligned}
 V_T &= \frac{M}{4\pi} \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \left[\frac{1}{3} - 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{\sinh \frac{\pi m a}{h}} \right] \\
 &= \frac{M}{2\pi} \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \left[\frac{1}{6} - S_2 \right] \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

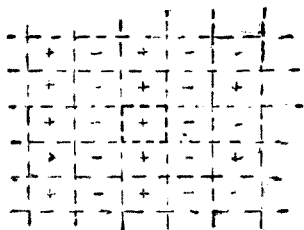


圖 3.2

(3) 上下二面封閉, 兩旁開露式風洞 自圖 1.7 及 1.10, 可知風洞對於模型之影像, 如圖 3.3 所示, 再自(2.9)及(2.15)兩式, 得此等影像於原點 O 之感應流速為

$$\begin{aligned}
 V_T &= \frac{M}{4\pi} \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \left[-\frac{1}{6} - 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m \coth \frac{\pi m a}{h} \operatorname{csch} \frac{\pi m a}{h} \right] \\
 &= -\frac{M}{2\pi} \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \left[\frac{1}{12} + S_3 \right] \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

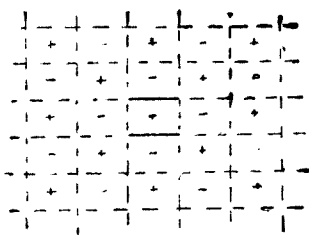


圖 3.3

(四) 上下兩面開露，兩旁封閉式風洞 自圖 1.8 及 1.9，可知風洞對於飛機模型之影像，如圖 3.4 所示。再自 (2.8) 及 (2.14) 兩式，得

$$\begin{aligned}
 V_T &= \frac{M}{4\pi} \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \left[\frac{1}{3} - 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \operatorname{csch}^2 \frac{\pi m a}{h} \right] \\
 &= \frac{M}{2\pi} \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \left[\frac{1}{6} - S_4 \right] \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

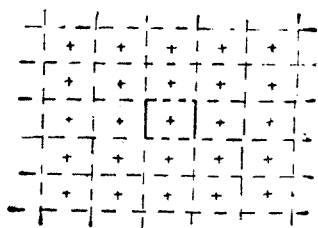


圖 3.4

(五) 底面封閉,其餘三面開露式風洞 自圖 1.10 及 1.11, 可知風洞對於飛機模型之影像,如圖 3.5 所示。風洞上下各奇數行之影像,於原點 O 之感應流速,互相抵消。

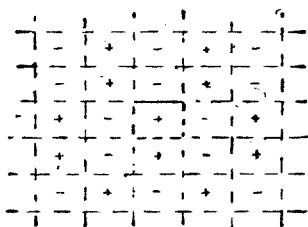


圖 3.5

其偶數行之影像,於原點 O 之感應流速,與第三種風洞同,但任意相鄰兩行間之間隔為 $2h$ 。故自(3.4)式,得

$$\begin{aligned}
 V_T &= \frac{M}{4\pi} \left(\frac{\pi}{2h} \right)^2 \left[-\frac{1}{6} - 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m \coth \frac{\pi ma}{2h} \operatorname{csch} \frac{\pi ma}{2h} \right] \\
 &= -\frac{M}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2h} \right)^2 \left[\frac{1}{12} + S'_3 \right] \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

以上(3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) 諸式,均為影像於原點 O 所產生之感應流速,其方向與機翼翼展互相垂直。

$$\text{命} \quad V_T = \frac{M}{2\pi} \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \left[a + \Sigma \right] \quad (3.7)$$

為自(3.2)式至(3.6)式之普遍式。 a 為一定數, Σ 為 S_1, S_2, S_3, S_4 , 或 S_5 。

因上述正號之偶,相當於反置之機型,又因 V_T 之向上者為正,

向下者為負，故得因風洞干涉作用，而產生之感應衝角 $\Delta\alpha_i$ 為

$$\Delta\alpha_i = \frac{V_T}{U_0} = \frac{M}{2\pi U_0} \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 [a + \Sigma] \quad (3.8)$$

又因

$$L = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ 2b \rightarrow M}} [\rho U_0 \Gamma \cdot 2b] = \rho U_0 M$$

故得

$$\frac{M}{U_0} = \frac{\Gamma}{\rho U_0^2} = K_L S \quad (3.9)$$

代入(3.8)式，得

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_i &= \frac{K_L S}{2\pi} \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 [a + \Sigma] \\ &= \frac{K_L S}{U} \frac{\pi}{2} [a + \Sigma] \end{aligned} \quad (3.10)$$

上式中 C 為風洞實驗段之截面面積， λ 為其高寬比。

將上式與第一章之(3.3)式相比較，得干涉因數 δ 之值為

$$\delta = \frac{\pi}{2\lambda} [a + \Sigma] \quad (3.11)$$

自(3.11)式，可知當小型機翼置於長方形風洞之中心，且當其翼展沿風洞截面之橫軸置放時，其干涉因數，祇隨風洞之式樣及高寬比而變。

上述之五種風洞，於不同高寬比時之干涉因數 δ ，詳列下表及圖 3.6。

λ	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5
h a	$-\frac{\pi}{2\lambda} \left(\frac{1}{12} + S_1 \right)$	$\frac{\pi}{2\lambda} \left(\frac{1}{6} - S_2 \right)$	$-\frac{\pi}{2\lambda} \left(\frac{1}{12} + S_3 \right)$	$\frac{\pi}{2\lambda} \left(\frac{1}{6} - S_4 \right)$	$-\frac{\pi}{8\lambda} \left(\frac{1}{12} + S' \right)$
∞	$-\infty$	∞	∞	$-\infty$	∞
4	-1.046	0.524	0.524	-0.746	0.524
2	-0.506	0.274	0.254	-0.024	0.262
$4/3$	-0.350	0.240	0.12	0.154	0.185
1	-0.276	0.274	0	0.250	0.124
$2/3$	-0.240	0.391	-0.115	0.303	0.056
$1/2$	-0.272	0.524	-0.352	0.524	0
$1/4$	-0.524	1.048	-0.524	0.046	-0.124
0	$-\infty$	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$

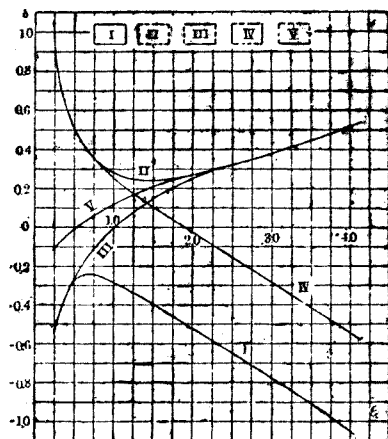


圖 3.5

4. 長方形風洞對於長翼展機型之干涉

第三節假定機型之翼展極短時，自機翼翼端折出之二尾隨旋渦線，可約略以一偶線替代之，此偶線對於風洞之影像，則為無數之偶串，如圖 3.1 至 3.5 所示。若翼展較長時，尾隨旋渦線，不能以偶線替代之，故其對於風洞之影像，為無數之旋渦串。圖 4.1 示對於長方形封閉式風洞之影像。

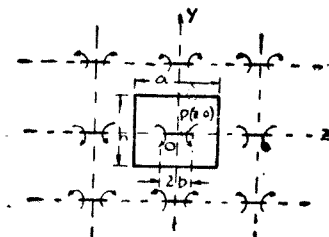


圖 4.1

自(2.5)式, 得此等影像於翼展上任意點 $P(z, 0)$ 之感應流速為

$$\Delta V_y = \frac{\Gamma}{4h} \left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \operatorname{csch} \frac{\pi(b' - z + ma)}{h} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \operatorname{csch} \frac{\pi(b' + z - ma)}{h} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{b' - z} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{b' + z} \right] \quad (4.1)$$

圖 4.2 示對於開露式風洞之影像, 自(2.4)式, 得此等影像於翼展上任意點 $P(z, 0)$ 之感應流速為

$$\Delta V_y = \frac{\Gamma}{4h} \left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \coth \frac{\pi(b' - z + ma)}{h} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \coth \frac{\pi(b' + z - ma)}{h} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{b' - z} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{b' + z} \right] \quad (4.2)$$

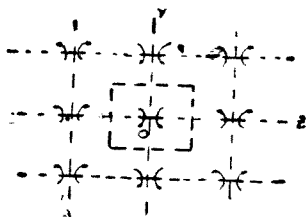


圖 4.2

以上兩式中 $2b'$ 為機型之翼展。

求得感應流速 ΔV_y 後, 再自

$$\Delta D_t = \rho \Gamma \int_{-b}^{+b} \Delta V_y \cdot dz \quad (4.3)$$

可求得自風洞干涉作用而產生之感應阻力。

因封閉式風洞之影像(圖 4.1) 與 y 軸相對稱, 故於 y 軸右方之影像, 沿機翼翼展之感應阻力, 必等於 y 軸左方者沿同一機翼翼展之感應阻力, 又因

$$\int_{-b'}^{+b'} \frac{dz}{\sinh \pi \left(\frac{b' - z + ma}{h} \right)} = -\frac{h}{\pi} \log_e \frac{\tanh \frac{\pi ma}{2h}}{\tanh \pi \left(\frac{2b' + ma}{h} \right)}$$

y 軸右方第一串之影像, 沿機翼翼展之

$$\begin{aligned} \int_{-b'}^{+b'} \Delta V_y \cdot dz &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\int_{-b'}^{+b'} \frac{dz}{\sinh \pi \left(\frac{b' - z + ma}{h} \right)} - \int_{-b'}^{+b'} \frac{dz}{\sinh \pi \left(\frac{b' - z + ma}{h} \right)} \right] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[-\frac{h}{\pi} \log_e \frac{\tanh \frac{\pi ma}{2h}}{\tanh \pi \left(\frac{2b' + ma}{h} \right)} \right] \\ &= -\frac{h}{\pi} \log_e \frac{\tanh \frac{\pi b'}{h}}{\tanh \frac{\pi b'}{h}} \end{aligned}$$

代入(4.3)式, 得封閉式風洞之感應阻力為

$$\begin{aligned} [\Delta D_i]_1 &= -\frac{\rho \Gamma^2}{2\pi} \left[\sum_{m=1}^{m=\infty} \log_e \frac{\tanh \pi \frac{ma + 2b'}{2h}}{\tanh^2 \frac{\pi m a}{2h}} \right. \\ &\quad \left. + \log_e \frac{\tanh \frac{\pi b'}{h}}{\tanh \frac{\pi b'}{h}} \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

同理得開露式風洞之感應阻力為

$$[\Delta D_i]_2 = \frac{\rho \Gamma^2}{2\pi} \left[\sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m \log_e \frac{\sinh \pi \frac{ma+2b'}{h} \sinh \pi \frac{ma-2b'}{h}}{\sinh^2 \frac{\pi ma}{h}} + \log_e \frac{\sinh \frac{2\pi b'}{h}}{2\pi} \right] \quad (45)$$

自第一章(3.2a)式,得風洞干涉因數 δ 為

$$\delta = \frac{\lambda}{2\pi\sigma^2} \cdot \frac{\Delta D_i}{\rho \Gamma^2} \quad (4.6)$$

上式中

$$\begin{cases} \lambda = \frac{h}{a} \\ \sigma = \frac{2b'}{a} \end{cases} \quad (4.7)$$

將(4.4)(4.5)兩式,代入(4.6)式,得

$$\begin{aligned} \delta_1 = & -\frac{\lambda}{2\pi\sigma^2} \left[\log_e \frac{\tanh \frac{\pi\sigma}{2\lambda}}{\frac{\pi\sigma}{2\lambda}} - 8 \left\{ \frac{1}{e^{\frac{\pi}{\lambda}} - 1} - \frac{\sinh^2 \frac{\pi\sigma}{2\lambda}}{2\lambda} \right. \right. \\ & + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{3\pi}{\lambda}} - 1} \sinh^2 \frac{3\pi\sigma}{2\lambda} \\ & \left. \left. + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{5\pi}{\lambda}} - 1} \sinh^2 \frac{5\pi\sigma}{2\lambda} + \dots \right\} \right] \quad (4.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_2 = & \frac{\lambda}{2\pi\sigma^2} \left[\log_e \frac{\sinh \frac{\pi\sigma}{\lambda}}{\frac{\pi\sigma}{\lambda}} + 4 \left\{ \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\lambda}} - 1} \sinh^2 \frac{\pi\sigma}{\lambda} \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} \frac{1}{e^{\frac{4\pi}{\lambda}} - 1} \sinh^2 \frac{2\pi\sigma}{\lambda} \\
& \left. \left. + \frac{1}{3} \frac{1}{e^{\frac{6\pi}{\lambda}} - 1} \sinh^2 \frac{3\pi\sigma}{\lambda} + \dots \right\} \right] \quad (4.9)
\end{aligned}$$

當 $\lambda=1$ 時

$$\begin{aligned}
\delta_1 = & -\frac{1}{2\pi\sigma_2} \left[\log_e \frac{\tanh \frac{\pi\sigma}{2}}{\frac{\pi\sigma}{2}} - 8 \left\{ 0.0452 \sinh^2 \frac{\pi\sigma}{2} \right. \right. \\
& + 2.69 \times 10^{-6} \sinh^2 \frac{3\pi\sigma}{2} \\
& \left. \left. + 3.015 \times 10^{-8} \sinh^2 \frac{5\pi\sigma}{2} + \dots \right\} \right] \quad (4.8a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_2 = & \frac{1}{2\pi\sigma^2} \left[\log_e \frac{\sinh \pi\sigma}{\pi\sigma} + 4 \left\{ 0.00187 \sinh^2 \pi\sigma \right. \right. \\
& + 1.744 \times 10^{-6} \sinh^2 2\pi\sigma \\
& \left. \left. + 2.1715 \times 10^{-9} \sinh^2 3\pi\sigma + \dots \right\} \right] \quad (4.9a)
\end{aligned}$$

以上兩式之收斂性均極大。

當 $\lambda = \frac{1}{2}$ 時

$$\delta_1 = -\frac{1}{4\pi\sigma^2} \left[\log_e \frac{\tanh \pi\sigma}{\pi\sigma} - 8 \left\{ 0.00187 \sinh^2 \pi\sigma \right. \right. \\ \left. \left. + 2.1715 \times 10^{-9} \sinh^2 3\pi\sigma \right. \right. \\ \left. \left. + 4.545 \times 10^{-15} \sinh^2 5\pi\sigma + \dots \right\} \right] \quad (4.8b)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{4\pi\sigma^2} \left[\log_e \frac{\sinh 2\pi\sigma}{2\pi\sigma} + 4 \left\{ 3.488 \times 10^{-6} \sinh^2 2\pi\sigma \right. \right. \\ \left. \left. + 6.083 \times 10^{-12} \sinh^2 4\pi\sigma + \dots \right\} \right] \quad (4.9b)$$

以上兩式之收斂性更大。

干涉因數 δ_1, δ_2 與 σ 及 λ 兩值之變化，見圖 4.3 及 4.4。

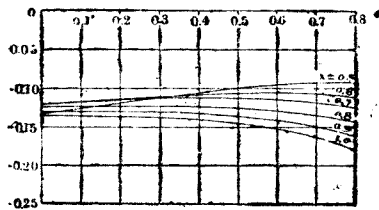
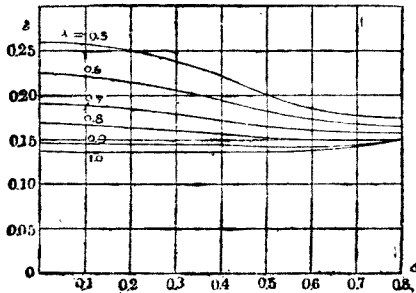


圖 4.4

第三章

圓形及橢圓形風洞之干涉

1. 旋渦對於圓形流線及等勢線之影像

今設於原點 O 有一旋渦，其循環為 Γ ，於 z 軸之 A, B 兩點，有兩旋渦，其循環為 $-\Gamma$ 及 $+\Gamma$ (圖 1.1)。

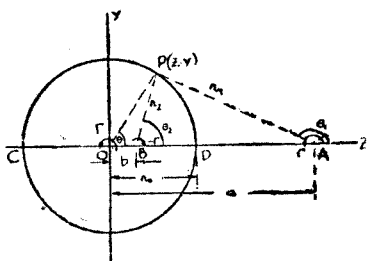


圖 1.1

命

$$OB = b, \quad OA = a,$$

此三旋渦之複勢為

$$W = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left[\log(z + iy - a) - \log(z + iy - b) + \log(z + iy) \right] \quad (1.1)$$

若命

$$\begin{cases} z + iy - a = r_1 e^{i\theta_1} \\ z + iy - b = r_2 e^{i\theta_2} \\ z + iy = r e^{i\theta} \end{cases} \quad (1.2)$$

代入(1.1)式,得

$$\begin{aligned} W &= -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left[\log r_1 e^{i\theta_1} - \log r_2 e^{i\theta_2} + \log r e^{i\theta} \right] \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\theta_1 - \theta_2 + \theta \right] + \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1 r} \end{aligned} \quad (1.3)$$

分析其實虛兩部,得

$$\begin{cases} \phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\theta_1 - \theta_2 + \theta \right] \\ \psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1 r} \end{cases} \quad (1.3a)$$

上式中, ϕ 爲流速勢, ψ 爲流函數。

今設以原點爲中心,以

$$r_0 = \sqrt{ab} \quad (1.4)$$

爲半徑,作一圓。命 $P(z, y)$ 爲此圓圓周上之一任意點,則

$$\begin{aligned} \frac{r_2^2}{r_1^2} &= \frac{(z-b)^2 + y^2}{(a-z)^2 + y^2} = \frac{r_0^2 + b^2 - 2bz}{r_0^2 + a^2 - 2az} \\ &= \frac{r_0^2 + b^2 - 2bz}{b^2 + r_0^2 - 2bz} = \frac{r^2}{r_0^2} = \frac{r_1^2}{a^2} \end{aligned}$$

或

$$\frac{r_2}{r_1 r_0} = \frac{1}{a} = \text{定數} \quad (1.5)$$

代入(1.3a)之第二式, 可知圓周 DPC 爲此流動場中之一流線。

於 O, A 兩點之循環 $+\Gamma, +\Gamma$, 可以視爲於 B 點之循環 $-\Gamma$ 對於 DPC 圓周之影像。反之, 於 B 點之循環 $-\Gamma$, 可以視爲於 O, A 兩點之循環 $+\Gamma, +\Gamma$ 對於該圓周之影像。

今設於 x 軸之 N, B 兩點, 有兩旋渦, 其循環爲 $-\Gamma, +\Gamma$ (圖 1.2)。若圓周 CPD 爲此流動場中之一流線, 則其影像爲於 M, A 兩點之循環 $+\Gamma, -\Gamma$ 。命圓周 CPD 之半徑爲 r_0 , N, B 兩點與原點 O 間之距離爲 b , 則 M, A 兩點與原點間之距離應爲

$$a = \frac{r_0^2}{b}$$

於原點 O 之影像, 其循環一爲 $+\Gamma$, 一爲 $-\Gamma$, 故互相抵消。

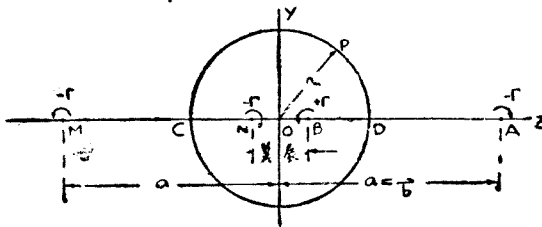


圖 1.2

命圓周 CPD 爲一封闭式圓形風洞之洞壁, $NB=2b$ 爲飛機模型之翼展, 若沿 NB 線之升力爲平均分布時, 其尾隨旋渦, 祇有於翼端 N, B 兩點析出之二線, 其循環爲 $-\Gamma, +\Gamma$, 恰如圖 1.2 所示。故其對於洞壁之影像, 爲經 M, A 兩點且平行於 x 軸之兩旋渦線, 其循環

爲 $+\Gamma, -\Gamma$.

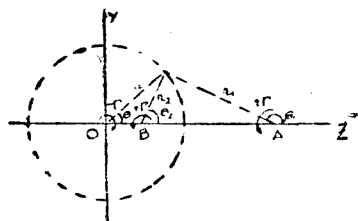


圖 1.3

今設有於 A, B 兩點之旋渦，其循環爲 $+\Gamma, +\Gamma$ ，及於原點 O 之旋渦，其循環爲 $-\Gamma$ （圖 1.3）。此三旋渦之複勢爲

$$\begin{aligned}
 W &= -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left[\log(z+iy-a) + \log(z+iy-b) - \log(z+iy) \right] \\
 &= -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left[\log r_1 e^{i\theta_1} + \log r_2 e^{i\theta_2} - \log r e^{i\theta} \right] \\
 &= \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\theta_1 + \theta_2 - \theta \right] + \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \frac{r}{r_1 r_2}
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

分析其實虛兩部，得

$$\begin{cases} \phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\theta_1 + \theta_2 - \theta \right] \\ \psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{r}{r_1 r_2} \end{cases} \tag{1.6a}$$

以原點 O 爲中心，以

$$r_0 = \sqrt{a^2}$$

爲半徑，作一圓。命 $P(z, y)$ 爲此圓圓周上之一任意點。自正弦定律得

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_0}{\sin(\pi - \theta_2)} &= \frac{r_2}{\sin \theta} \\ \frac{r_1}{\sin \theta} &= \frac{a}{\sin(\theta_1 - \theta)} \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

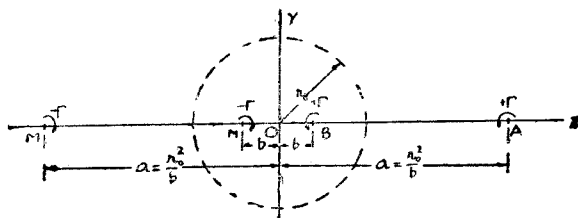
再自(1.5)式解之，得

$$\theta_1 + \theta_2 - \theta = \pi \quad (1.8)$$

代入(1.6a)之第一式。可知圓周 CPD 爲此流動場中之一等勢線。

若風洞係開露式者，其外周必係一等勢線（見第一章第一節結論）。又若 N, B 兩點表示與紙面相垂直之二尾隨旋渦線，其循環爲 $-\Gamma, +\Gamma$ 。其對於風洞之影像，爲經 M, A 兩點與紙面相垂直之二旋渦線，其循環仍爲 $-\Gamma, +\Gamma$ （圖 1.4）。

求得尾隨旋渦線對於洞壁之影像後，此等影像對於飛機模型之干涉，即等於洞壁之干涉。



1.4

2. 圓形風洞之干涉

(甲) 封閉式圓形風洞 (1) 假定沿機翼翼展之升力平均分布，並假定於翼展中點之感應流速 V_T ，即等於沿翼展各點感應流速之平

均值。

$$V_T = 2 \cdot \frac{\Gamma}{4\pi a} = \frac{\Gamma b}{2\pi R} = \frac{\Gamma b}{2C} = \frac{M}{4C} \quad (2.1)$$

上式中 R 為風洞之半徑， C 為風洞之截面面積，

$$M = 2\Gamma b = \frac{K_L S \rho U_0^2}{\rho U_0} = K_L S U_0 \quad (2.2)$$

故得

$$\Delta \alpha_i = \frac{V_T}{U_0} = \frac{K_L S}{4C} \quad (2.3)$$

$$\Delta K_{Di} = K_L \cdot \Delta \alpha_i = \frac{K_L^2 S}{4C} \quad (2.4)$$

試將以上兩式，與第一章(3.3)(3.2a)兩式相比較，得封閉式圓形風洞之干涉因數 δ 為

$$\delta = 0.25 \quad (2.5)$$

(2) 假定沿機翼翼展之升力平均分布，但於翼展中點之感應流速，不能代表沿翼展各點感應流速之平均值。

沿翼展任意點 $P(z, 0)$ 之感應流速為

$$V_T = \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\frac{1}{a-z} + \frac{1}{a+z} \right] \quad (2.6)$$

若機翼翼展為極小時，於 N, B 兩點之旋渦(圖 1.2)，合併而成一偶，因

$$|z| \leq b, \quad b \rightarrow 0$$

$$a = \frac{R^2}{b} \rightarrow \infty$$

$$\lim_{b \rightarrow 0} \Gamma \cdot 2b = M.$$

故自(2.6)式得

$$\begin{aligned} V_T &= \lim_{b \rightarrow 1} \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{2a}{a^2 - z^2} = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{\Gamma}{2\pi a} \\ &= \lim_{b \rightarrow 1} \frac{\Gamma b}{2\pi R^2} = \frac{M}{4C} \end{aligned} \quad (2.7)$$

所得結果與(2.1)式同。

若命 $\frac{z}{a} = \xi \quad (\xi \ll 1)$

代入(2.6)式得

$$\begin{aligned} V_T &= \frac{\Gamma}{4\pi a} \left[\frac{1}{1-\xi} - \frac{1}{1+\xi} \right] = \frac{\Gamma b}{4\pi R^2} \cdot \frac{2}{1-\xi^2} \\ &= \frac{K_L S U_0}{4C} \left[1 + \xi^2 + \xi^4 + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

命 ΔD_i 為沿翼展每單位長度之平均感應阻力。

$$\begin{aligned} \Delta D_i &= \frac{1}{2l} \int_{-b}^{+b} L \frac{V_T}{U_0} dz \\ &= \frac{\Gamma}{2 U_0} \int_{-b}^{+b} \frac{\Gamma \cdot 2b}{4\pi R^2} \frac{dz}{1 - \left(\frac{z}{a}\right)^2} \\ &= \frac{\Gamma^2}{2 \rho U_0^3} \frac{1}{4C} \int_{-b}^{+b} \frac{dz}{1 - \left(\frac{bz}{R^2}\right)^2} \\ &= \frac{\Gamma^2}{4b^2 \rho U_0^3} \frac{R^2}{2C} \log_e \frac{1 - \left(\frac{b}{R}\right)^2}{1 - \left(\frac{b}{R}\right)^2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

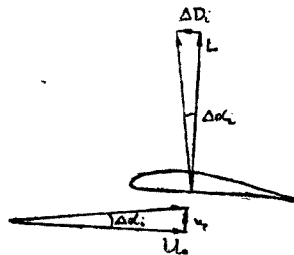
$$\begin{aligned}\Delta K_{Di} &= \frac{\Delta D_i}{S\rho U_0^2} \\ &= \frac{K_L^2 S}{4C} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{b}{R} \right)^4 + \frac{1}{5} \left(\frac{b}{R} \right)^8 + \dots \right] \quad (2.10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta \alpha_i &= \frac{\Delta K_{Di}}{K_L} \\ &= \frac{K_L S}{4C} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{b}{R} \right)^4 + \frac{1}{5} \left(\frac{b}{R} \right)^8 + \dots \right] \quad (2.11)\end{aligned}$$

$$\delta = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{b}{R} \right)^4 + \frac{1}{5} \left(\frac{b}{R} \right)^8 + \dots \right] \quad (2.12)$$

當機翼翼展極小時，換言之，即當 $\frac{b}{R}$ 之值漸近於零時，干涉因數之值為 0.25。與自(2.5)式所得結論同。

因 V_T 之方向向上，故 $\Delta \alpha_i$ 為因干涉作用而增加之衝角。自空氣動力與流速之二類似三角形(圖 2.1)，得感應阻力 ΔD_i 與風洞內風速之方向相反。故自風洞實驗所量得之阻力，較實際上之阻力為小。



■ 2.1

(3) 若沿機翼翼展之升力，依一任意曲線分布時，則自機翼後緣折出之尾隨旋渦，不僅為自翼端所折出之二線，而為沿翼展後部平鋪之一旋渦面（圖 2.2）。命 N, B 為翼展之兩端， M, A 為 N, B 對於風洞洞壁之影像，則翼展後之旋渦面對於洞壁之影像，為自 M 及 A 兩點，延長至 $z = \pm \infty$ 之二旋渦面（圖 2.2）。

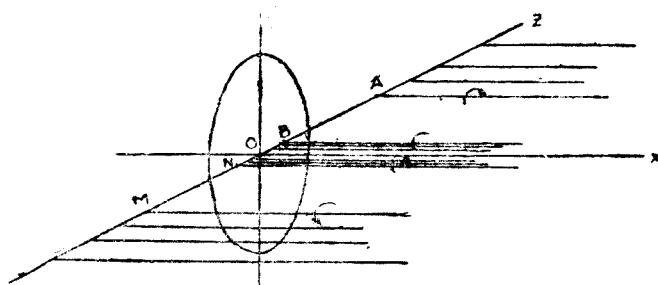


圖 2.2

自上述之二影像旋渦面，可求得其於機翼翼展上之感應流速，再自感應流速，求其感應阻力。

(乙) 開露式圓形風洞 自上節所得結論，開露式圓形風洞之影像，與同樣大小之封閉式風洞之影像，地位相同，其循環之符號相反，故開露式風洞之干涉作用，與封閉式者大小相等符號相反。

今設有一風洞，封閉與開露兩用，自該風洞所得之二 $K_L - K_D$ 曲線（圖 2.3a）得於同一升力係數時，其阻力係數之差，應等於 ΔK_{D_i} 之二倍。若將於同一升力係數時之二阻力係數平均之，其值應等於無風洞干涉時之阻力係數（圖 2.3a 之曲線 z ）。

同理，自上述風洞之二 $K_L - \alpha$ 曲線，若將於同一升力係數時之

衝角 α 平均之，其值應等於無風洞干涉時之衝角（圖 2.3 之曲線 2）。

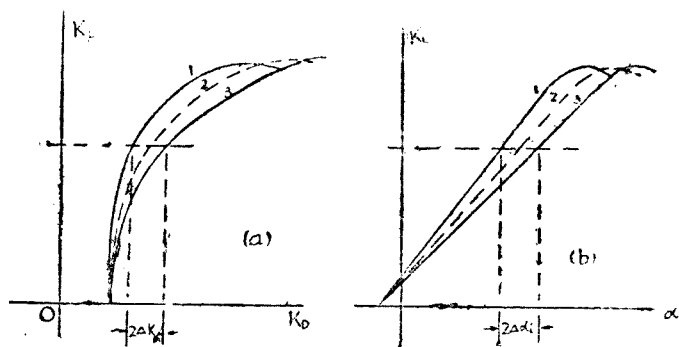


圖 2.3. 1. 封閉式；2. 無干涉時；3. 開露式。

3. 橢圓形風洞之干涉

橢圓形風洞對於任何大小之飛機模型於任何位置放置時之干涉作用，迄未有普遍之解答。下述者僅係假定因干涉作用而產生之垂直於翼展之感應流速，係平均分布時之特例。

當沿機翼翼展之升力，係依橢圓曲線分布時，垂直於該翼展之感應流速，必平均分布，此時於平面 $z-y$ 上之複勢為

$$W = iV_0 \left[z + iy - \sqrt{(z + iy)^2 - b^2} \right] \quad (3.1)$$

上式中 V_0 為垂直於機翼翼展之感應流速。

此流動場之複勢為

$$V_y - iV_z = iV_0 \left[1 - \frac{z + iy}{\sqrt{(z + iy)^2 - b^2}} \right] \quad (3.2)$$

命 $P(0, z)$ 爲翼展上之一任意點。於該點之感應流速爲：

$$\begin{cases} V_x = \mp \frac{V_0 z}{\sqrt{b^2 - z^2}} \\ V_y = -V_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

於機翼之上邊， V_x 之號爲負，下邊爲正。

受風洞干涉之影響後，若 V_x 保持不變（見(3.3)式）， V_y 增加 $-V_0'$ 。換言之，即因風洞干涉而產生之感應流速，沿機翼翼展之值爲定數 V_0' ，其方向與翼展相垂直。

若命 $\Delta\alpha i$ 爲因干涉作用而產生之感應衝角。則

$$\Delta\alpha i = \frac{V_0'}{U_0} \quad (3.4)$$

自(3.1)式，得有干涉作用後，於 $z-y$ 平面上之複勢爲

$$W = \phi + i\psi - i(V_0 + V_0')(z + iy) - iV_0\sqrt{(z + iy)^2 - b^2} \quad (3.5)$$

若命

$$\begin{aligned} z + iy &= b \cosh \zeta = b \cosh(\xi + i\eta) \\ &= b \left[\cosh \xi \cos \eta + i \sinh \xi \sin \eta \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

代入(3.5)式，得拆其實虛兩部，得

$$\begin{cases} \phi = - \left[(V_0 - V_0') \sinh \xi - V_0 \cosh \xi \right] \cdot b \sin \eta \\ \psi = \left[(V_0 - V_0') \cosh \xi - V_0 \sinh \xi \right] \cdot b \cos \eta \end{cases} \quad (3.7)$$

自第一章第一節，可知若風洞係封閉式，則沿其外圍， ψ 爲定

數. 假定此定數爲零, 則

$$V_0 \sinh \xi = (V_0 - V_0') \cosh \xi \quad (3.8)$$

若風洞係開露式, 則沿其外圍, ϕ 爲定數. 假定此定數爲零, 則

$$V_0 \cosh \xi = (V_0 - V_0') \sinh \xi \quad (3.9)$$

今設有一封閉式橢圓形風洞(圖 3.1), 其長軸爲

$$A = b \cosh \xi,$$

短軸爲

$$B = b \sinh \xi$$

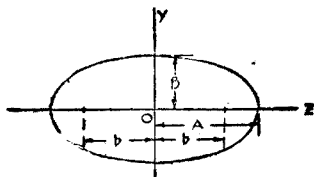


圖 3.1

故得

$$\tanh \xi = \frac{B}{A} \quad (3.10)$$

再自(3.8)式得

$$\tanh \xi = \frac{V_0 - V_0'}{V_0} \quad (3.11)$$

比較以上兩式, 得

$$\frac{V_0'}{V_0} = \frac{A - B}{A} \quad (3.12)$$

若上述之橢圓形風洞係開露式 則自(3.11), (3.9)兩式, 得

$$\frac{V_0'}{V_0} = -\frac{A - B}{B} \quad (3.13)$$

自第一章(3.3), (3.1) 兩式, 得

$$\left\{ \begin{aligned} \delta &= -\alpha_i \cdot \frac{C}{SK_L} = \frac{V_0'}{U_0} \cdot \frac{C}{K_L S} \\ \frac{V_0'}{U_0} &= \frac{K_{Di}}{K_L} = \frac{K_L S}{2\pi b^2} \end{aligned} \right. \quad (3.14)$$

又因

$$\left\{ \begin{aligned} C &= \pi AB \\ b &= \sqrt{A^2 - B^2} \end{aligned} \right. \quad (3.15)$$

故得封閉式橢圓風洞之干涉因數 δ 為

$$\delta = \frac{V_0'}{V_0} \cdot \frac{V_0}{U_0} \cdot \frac{C}{SK_L} = \frac{B}{2(A+B)} \quad (3.16)$$

上式中, 假定飛機模型之翼展, 恰等於橢圓風洞兩焦點間之距離 (見(3.15)第二式), 且當沿翼展之感應衝角, 係一定數。

同理, 若風洞係開露式者,

$$\delta = -\frac{A}{2(A+B)} \quad (3.17)$$

風洞干涉因數 δ 與寬高比 A/B 之關係, 見 3.2 圖。自該圖可見閉封式風洞 δ 之絕對值, 較同樣大小開露式者為小。

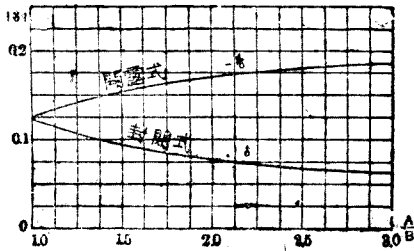


圖 3.2

第四章 任意形狀風洞之干涉

1. 賈赫路法(一)——有二對稱軸之任意形風洞

賈赫路(De Haller)氏利用同形變化(Conformal Transformation)法,自一圓形風洞,變至一任意形狀之風洞。

機翼之感應阻力為

$$D_i = \rho \int_{-b}^{+b} \Gamma V_\infty dz \quad (1.1)$$

命

$$\gamma = - \frac{d\Gamma}{dz}$$

因得於翼展上任意點 $P(0, z)$ 之循環為

$$\Gamma = - \int_{-b}^z \gamma dz \quad (1.2)$$

代入(1.1)式,得

$$D_i = - \rho \int_{-b}^{+b} V_\infty dz \int_{-b}^z \gamma dz \quad (1.3)$$

經同形變化後,其邊界條件(Boundary Condition)不變。換言之,即圓形之封閉式風洞,經同形變化後,得任意形狀之封閉式風洞。

因於同形變化時, $V_\infty dz$ 與 $\gamma \cdot dz$ 均屬不變量(Invariant),故自1.3)式,可知於同形變化時,沿機翼翼展之總感應阻力,係一不變量。

命 $z+iy=f(\zeta+i\eta)$ (1.4)

為自 $\zeta-\eta$ 平面變至 $z-y$ 平面時之同形變化式 (圖 1.1). 並命前者之 ζ 軸, 經同形變化後, 即為後者之 z 軸. 故得沿該軸時

$$z=f(\zeta) \quad (1.4a)$$

設 $\Gamma(z)$ 為沿機翼 A 之循環分布, 自 (1.4a) 式得沿 A' 者為

$$\Gamma[f(\zeta)] \quad (1.5)$$

今試舉一特殊情形即當 (一), z, y 兩軸為任意風洞之對稱軸.

(二) 沿機翼 A 之升力, 係依橢圓曲線分布.

自上述第二條件 得沿翼展 A 循環之分布為

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{z^2}{b^2}} = \Gamma_0 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{b} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{z}{b} \right)^4 - \frac{1}{16} \left(\frac{z}{b} \right)^6 + \dots \right] \quad (1.6)$$

自上述之第一條件 得

$$\frac{\zeta+i\eta}{c} = \alpha \frac{z+iy}{c} + \beta \left(\frac{z+iy}{c} \right)^2 + \gamma \left(\frac{z+iy}{c} \right)^3 + \dots \quad (1.7)$$

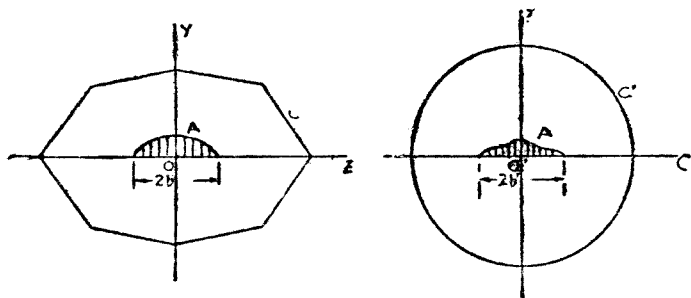


圖 1.1

上式中 c 為風洞之一任意長度(取風洞之高, 或寬, 或周線均可)。

命 $2b'$ 為機翼 A' 之翼展, 故得

$$\frac{\zeta}{b'} = \alpha_1 \frac{z}{c} + \beta_1 \left(\frac{z}{c}\right)^3 + \gamma_1 \left(\frac{z}{c}\right)^5 + \dots \quad (1.8)$$

自(1.4a), (1.7), (1.8)三式, 可知

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha \frac{b}{b'} \\ \beta_1 = \beta \frac{b}{b'} \left(\frac{b}{c}\right)^2 \\ \gamma_1 = \gamma \frac{b}{b'} \left(\frac{b}{c}\right)^4 \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (1.9)$$

沿機翼 A' 之循環分布為

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\zeta}{b'}\right)^2} \left[A_0 + A_1 \left(\frac{\zeta}{b'}\right)^2 + A_2 \left(\frac{\zeta}{b'}\right)^4 + \dots \right] \\ &= \Gamma \left[A_0 + \left(A_1 - \frac{1}{2} A_0\right) \left(\frac{\zeta}{b'}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(A_2 - \frac{1}{2} A_1 - \frac{1}{8} A_0\right) \left(\frac{\zeta}{b'}\right)^4 + \dots \right] \quad (1.10) \end{aligned}$$

將(1.8)式代入(1.10)式, 展開之, 再與(1.6)式相比較, 得

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = 1 \\ \alpha_1^2 \left(A_1 - \frac{1}{2} A_0 \right) = -\frac{1}{2} \\ 2\alpha_1 \beta_1 \left(A_1 - \frac{1}{2} A_0 \right) + \alpha_1^4 \left(A_2 - \frac{1}{2} A_1 - \frac{1}{8} A_0 \right) = -\frac{1}{8} \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

解之，得

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = 1 \\ A_1 = \frac{1}{2} - \frac{b'^2}{2\alpha_1^2 b^2} \\ A_2 = \frac{b^4}{8\alpha_1' b^4} \left[8 \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{b}{b'} \right)^3 + 2\alpha \left(\frac{b}{b'} \right)^4 - 2\alpha' \left(\frac{b}{b'} \right)^3 - 1 \right] \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (1.11)$$

自(1.10)式，得

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{\Gamma_0}{b'} \frac{\frac{\xi}{b'}}{\left[1 - \left(\frac{\xi}{b'} \right)^2 \right]} \left[a_0 + a_1 \left(\frac{\xi}{b'} \right)^2 + a \left(\frac{\xi}{b'} \right)^4 + \dots \dots \right] \quad (1.12)$$

上式中

$$\begin{cases} a_0 = A_0 - 2A_1 \\ a_1 = 3A_1 - 4A_2 \\ a_2 = 5A_2 - 6A_3 \\ \dots \\ \dots \end{cases} \quad (1.13)$$

垂直於機翼 A' 之干涉感應流速 ΔV_η 爲

$$\Delta V_\eta = \frac{\Gamma b'}{4R^2} [B_0 + B_1 \zeta^2 + B_2 \zeta^4 + \dots] \quad (1.14)$$

上式中 R 爲圓形洞風之半徑, B_0, B_1, \dots 之值爲

$$\begin{cases} B_0 = p_1 a_0 + p_2 a_1 + p_3 a_2 + \dots + p_{n+1} a_n + \dots \\ B_1 = p_2 a_0 + p_3 a_1 + p_4 a_2 + \dots + p_{n+2} a_n + \dots \\ B_2 = p_3 a_0 + p_4 a_1 + p_5 a_2 + \dots + p_{n+3} a_n + \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases} \quad (1.15)$$

其中

$$p_m = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2m}$$

求得 V_η 後, 代入(1.1)式, 得於機翼 A' 之干涉感應阻力爲

$$\begin{aligned} \Delta D_i &= \frac{\pi \rho \Gamma_0^2 b'^3}{4R^2} \\ &\times \left[B_0 \left(\frac{1}{2} A_0 + \frac{1}{8} A_1 + \dots + q_n A_n + \dots \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \dots \dots \dots \\
 & + B_i \left(q_i^{-1} + q_{i+1} A_1 + \dots \dots + q_{i+n} A_n + \dots \right) \\
 & + \dots \dots \dots \left. \right] \quad (1.21)
 \end{aligned}$$

假定機翼之翼展甚小, (1.7) 可以簡化為

$$\begin{aligned}
 \frac{b'}{b} &= \alpha + \beta \left(\frac{b}{c} \right) \quad (1.7a) \\
 \gamma &= \delta \dots = 0.
 \end{aligned}$$

(1.11)(1.13), (1.15), (1.16), (1.18) 諸式, 可以簡化為

$$\left\{ \begin{aligned}
 A_0 &= 1 \\
 A_1 &= -\frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{b}{c} \right)^2 \\
 A_2 &= A_3 = \dots = 0
 \end{aligned} \right. \quad (1.11a)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 a_0 &= 1 + \frac{2\beta}{\alpha} \left(\frac{b}{c} \right)^2 \\
 a_1 &= -\frac{3\beta}{\alpha} \left(\frac{b}{c} \right)^2 \\
 a_2 &= a_3 = \dots = 0
 \end{aligned} \right. \quad (1.13a)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 B_0 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{b}{c} \right)^2 \\
 B_1 &= \dots \dots \dots \\
 B_2 &= \dots \dots \dots \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned} \right. \quad (1.15a)$$

$$\Delta D_i = \frac{\pi \rho \Gamma_0^2 b'^2}{4R} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{b}{c} \right) \right] \quad (1.16a)$$

$$D_i = \frac{\pi \rho \Gamma_0^2}{8} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{b}{c} \right)^2 \right] \quad (1.8a)$$

代入(1.21)式, 得

$$\Delta D_i' = \frac{\pi \rho \Gamma_0^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{b}{c} \right)^2 \left[-\frac{\beta}{\alpha} + \alpha^2 \frac{c^2}{R^2} \right] \quad (1.21a)$$

自第一章(3.2b)式 得干涉因數爲

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\Delta D_i'}{D_i} \cdot \frac{C}{2S_0} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{b}{c} \right)^2 \left[-\frac{\beta}{\alpha} + \alpha^2 \frac{c^2}{R^2} \right]}{1 - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{b}{c} \right)} \cdot \frac{C}{2\pi b^2} \\ &\approx \frac{C}{4\pi c^2} \left[-\frac{\beta}{\alpha} + \alpha^2 \frac{c^2}{R^2} \right] \end{aligned} \quad (1.22)$$

2. 寶赫路法(二)——任意形之風洞

假定有一翼展極小之機型, 置於任意風洞 C 內 (圖 2.1), 並假定沿翼展之升力係平均分布, 其尾隨旋渦, 僅有自 M, N 兩點所折出之二線, 其循環爲 $+\Gamma, -\Gamma$.

經同形變化後, M, N 兩點變至 M', N' . 其循環仍爲 $+\Gamma, -\Gamma$. 此兩旋渦線及其對於風洞之影像, 於原點 O' 之感應流速爲

$$V_T' = \frac{\Gamma}{4\pi} \left[\frac{1}{b_2'} - \frac{1}{b_1'} \mp \frac{b_2'}{R} \pm \frac{b_1'}{R^2} \right] \quad (2.1)$$

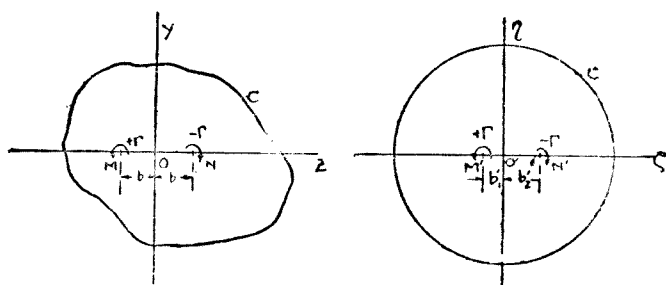


圖 2.1

上式中 b'_1, b'_2 為 M', N' 與原點 O' 間之距離。假定風洞係封閉式者，

$$V_T' = \frac{\Gamma}{4\pi} \left[\frac{1}{b'_2} - \frac{1}{b'_1} - \frac{b'_2}{R^2} + \frac{b'_1}{R^2} \right] \quad (2.1a)$$

假定係開露式者，

$$V_T' = \frac{\Gamma}{\pi} \left[\frac{1}{b'_2} - \frac{1}{b'_1} + \frac{b'_2}{R^2} - \frac{b'_1}{R^2} \right] \quad (2.1b)$$

於 $z-y$ 平面上原點 O 之感應流速為

$$V_T = V_T' \left[\frac{d(\xi + i\eta)}{d(z + iy)} \right]_{z+iy=0} \quad (2.2)$$

設

$$\frac{\xi + i\eta}{R} = a_1 \frac{z + iy}{c} + a \left(\frac{z + iy}{c} \right)^2 + \dots \quad (2.3)$$

為自 $z-y$ 平面上之任意形風洞，變至 $\xi-\eta$ 平面上之圓形風洞之同形變化式。該式中 c 為 $z-y$ 平面上風洞之一任意長度， a_1 為一真 (real) 正 (positive) 數。微分之，得

$$\left[\frac{d(\xi + i\eta)}{d(z + iy)} \right]_{z+iy=0} = a_1 \frac{R}{c} \quad (2.4)$$

自(2.3)式,得

$$\begin{cases} \frac{b'_1}{R} = -a_1 \frac{b}{c} + a_2 \frac{b^2}{c^2} - a_3 \frac{b^3}{c^3} + \dots \\ \frac{b'_2}{R} = a_1 \frac{b}{c} + a_2 \frac{b^2}{c^2} + a_3 \frac{b^3}{c^3} + \dots \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \frac{1}{b'_1} = -\frac{c}{a_1 R b} \left[1 - \frac{a_2}{a_1} \frac{b}{c} - \left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) \frac{b^2}{c^2} + \dots \right] \\ \frac{1}{b'_2} = \frac{c}{a_1 R b} \left[1 + \frac{a_2}{a_1} \frac{b}{c} - \left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) \frac{b^2}{c^2} + \dots \right] \end{cases} \quad (2.5)$$

將(2.5)式代入(2.1)式,再將(2.1)及(2.4)式代入(2.2)式,得

$$V_T = + \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\frac{1 - \left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) \frac{b^2}{c^2}}{a_1 R \frac{b}{c}} \mp \frac{a_2 \frac{b}{c} + a_1 \left(\frac{b}{c} \right)^2}{R} \right] \cdot \frac{a_1 R}{c} \quad (2.6)$$

又因自 M, N 兩點所折出之尾隨旋渦線,於原點 O 之感應流速為

$$V_{T_0} = \frac{\Gamma}{2\pi b} \quad (2.7)$$

自(2.6)式減去(2.7)式,得因干涉作用而產生之垂直於翼展之感應流速為

$$\Delta V_T = V_T - V_{T_0} \cong \frac{\Gamma b}{2\pi c} \left[-\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_2^2}{a_1^2} \mp a_1^2 \right] \quad (2.8)$$

因所假定之機翼翼展極小,故上式中略 b 之平方及平方以上之各項,

因干涉作用而產生之感應阻力為

$$\Delta D_i = 2\rho\Gamma \cdot \Delta V_T \cdot b \Rightarrow \rho \frac{\Gamma}{\pi} \frac{b^2}{c^2} \left[-\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_2^2}{a_1^2} \mp a_1^2 \right] \quad (2.9)$$

作用於機型上之升力為

$$L = 2\rho U_0 \Gamma b \quad (2.10)$$

代入(2.9)式得

$$\Delta D_i = \frac{L^2}{4\pi\rho c U_0^2} \left[-\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_2^2}{a_1^2} \mp a_1^2 \right] \quad (2.11)$$

或

$$\Delta K_{D_i} = \frac{K_L^2 S}{4\pi c^2} \left[-\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_2^2}{a_1^2} \mp a_1 \right] \quad (2.12)$$

自第一章(3.2)式,得任意形風洞之干涉因數為

$$\delta = \frac{C}{4\pi c} \left[-\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_2^2}{a_1^2} \mp a_1 \right] \quad (2.13)$$

第五章 干涉因數與風洞式樣及與 模型置放方向之關係

1. 各式長方形風洞干涉因數間之關係

自第二章第三節，得各式長方形風洞之干涉因數與其式樣及高寬比之關係。此關係亦可以自格氏定理導得之。

今將長方形風洞，依其式樣，分別爲五類（見第二章第三節）。命其高寬比 h/a 爲 λ 。自自格氏定理，得

$$\delta_1(\lambda) = -\delta_1\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (1.1)$$

$$\delta_2(\lambda) = -\delta_2\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (1.2)$$

$$\delta_4(\lambda) = -\delta_4\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (1.3)$$

$$\delta_5(\lambda) = \frac{1}{2} \delta_5(2\lambda) \quad (1.4)$$

自(1.2)兩式，得當 $\lambda=1$ 時

$$\delta_2(1) = -\delta_2(1)$$

或

$$\delta_2(1) = 0 \quad (1.5)$$

換言之，第三式之方形風洞 ($\lambda=1$)，其對於置於該風洞中心之極小機型之干涉作用為零。

同理，自(1.3)式，得

$$\delta_i(1) = 0 \quad (1.6)$$

此結果與第二章第三節之結果(註)

$$\delta_i(\lambda) = -\delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \frac{1}{2} \quad (1.7)$$

$$\delta_i(1) = \frac{1}{4}$$

略有不同。因此時祇賴風洞洞壁之條件，尚不足以決定其影像，風洞之左右兩壁為流線，上下兩底為等勢線，若於此流動場中，再加上一與 y 軸並行之等速流動，仍可以不違背洞壁之條件。

設將第二章圖 3.1 及圖 3.2 兩流動場相合併(圖 1.1)，其合併後之流動場，仍與第二章圖 3.1 相類似。惟偶之強度與洞之寬度均增加一倍，故得

$$V_{T1}(M, a) + V_{T3}(M, a) = V_{T1}(M, 2a)$$

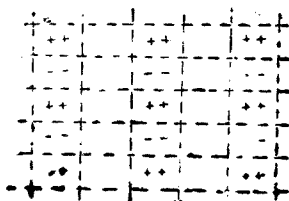


圖 1.1

(註) (1.3)式為 Glauert 與 Rosenhead 兩氏所得結果。(1.7)式為 Theoderson 與 Rosenhead 兩氏所得結果。

但因干涉因數 δ , 與感應流速 V_T 成正比 (見第一章(3.3)式), 又因偶而產生之感應流速, 與偶之強度成正比, 與距離之平方成反比, 故得

$$\delta(\lambda) + \delta_3(\lambda) = \delta\left(\frac{\lambda}{2}\right) \quad (1.9)$$

同理自第二章圖 3.1 及圖 3.4, 得

$$\delta_1(\lambda) + \delta_2(\lambda) = \delta_4(2\lambda) \quad (1.10)$$

自(1.10)及(1.3)兩式, 得

$$\begin{aligned} \delta_1(\lambda) &= \delta_2(2\lambda) - \delta_4(\lambda) \\ &= -\delta_4\left(\frac{1}{2\lambda}\right) + \delta_4\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \delta_1\left(-\frac{1}{2\lambda}\right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

自上式, 可知當兩封閉式長方形風洞之高寬比, 一為 λ , 一為 $\frac{1}{2\lambda}$ 時, 其干涉因數相等。

再自(1.11)式, 可知當

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

時, δ_1 之值為最小, 此結論與第二章圖 3.6 所示者恰相符合。

2. 風洞干涉因數圖

設 y, z 兩軸, 為風洞截面之對稱軸(圖 2.1), 一極小飛機模型,

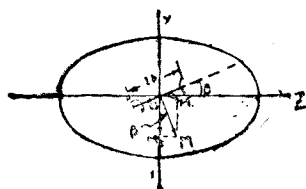


圖 2.1

置於該截面之中點，當機翼之翼展與 z 軸成 β 角時，則於 $z-y$ 平面上之複勢 W 為

$$\begin{aligned} W &= \frac{M}{2\pi(z+iy)} e^{i\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{M \sin \beta}{2\pi(z+iy)} e^{i\pi} + \frac{M \cos \beta}{2\pi(z+iy)} e^{i\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

假定沿翼展之升力平均分布，上式中

$$M = 2b\Gamma$$

為偶之強度。

自 (2.1) 式，可知一任何強度 M 之偶，當其軸向與 z 軸之負向成 $\beta + \frac{\pi}{2}$ 角時，其流動場相當於重疊於原點之兩偶，其強度為

$$\begin{aligned} M_1 &= M \sin \beta \\ M_2 &= M \cos \beta \end{aligned} \quad (2.2)$$

前者之偶軸，係沿 z 軸之正向，後者則沿 y 軸之負向。

因

$$\begin{cases} \Delta \alpha_i = \delta \frac{K_L S}{C} \\ \Delta K_{D_i} = \delta \frac{K_L^2 S}{C} \end{cases} \quad (2.3)$$

又因 M_1 之影像，於原點 O 所產生之感應流速為

$$\begin{cases} \Delta V_z = -\delta_v \frac{K_{L1} S}{C} U_0 = -\delta_v \frac{M}{C} = -\delta_v \frac{M \sin \beta}{C} \\ \Delta V_y = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

M_2 之影像於原點 O 所產生之感應流速為

$$\begin{aligned} \Delta V_z &= 0 \\ \Delta V_y &= \delta_z \frac{K_L \cdot S}{C} U = \delta_z \frac{M}{C} = \delta_z \frac{M \cos \beta}{C} \end{aligned} \quad (2.5)$$

以上兩式中, δ_z, δ_y 為當機翼翼展沿 z 軸及 y 軸置放時之干涉因數.

自(2.4)(2.5)兩式, 得垂直於機翼翼展之感應流速 ΔV_n 為

$$\begin{aligned} \Delta V_n &= \Delta V_y \cos \beta - \Delta V_z \sin \beta \\ &= \frac{M}{C} \left[\delta_z \cos^2 \beta + \delta_y \sin^2 \beta \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

命 δ_β 為當飛機模型之翼翼展與 x 軸成 β 角時之干涉因數. 自(2.6)式, 得

$$\delta_\beta = \Delta V_n \frac{C}{M} = \delta_z \cos^2 \beta + \delta_y \sin^2 \beta \quad (2.7)$$

今試於 z 軸上截取

$$\overline{OA} = \delta_y$$

$$\overline{OB} = \delta_z$$

故得

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \delta_z - \delta_y$$

今設以 AB 之中點 C 為中心, CB 為半徑, 作一圓(圖 2.2). 自 A 點作 AE 線, 平行於機翼翼展. 再自 AE 線與圓周 AEB 之交點 E 作 ED 線, 與 z 軸相垂直. 故得

$$\overline{AD} = \overline{AE} \cos \beta = \overline{AB} \cos \beta = (\delta_z - \delta_y) \cos \beta$$

$$\begin{aligned}\overline{OD} &= \overline{OA} + \overline{AD} = \delta_y + (\delta_x - \delta_y) \cos \beta \\ &= \delta_y \sin^2 \beta + \delta_x \cos^2 \beta\end{aligned}\quad (2.8)$$

自(2.7), (2.8)兩式得

$$\overline{OD} = \delta_\beta$$

AEB 圓謂之風洞之干涉因數圓(Circle of Interference Factor). 當 δ_y 為負數時, 其作圖法亦同(圖 2.3).

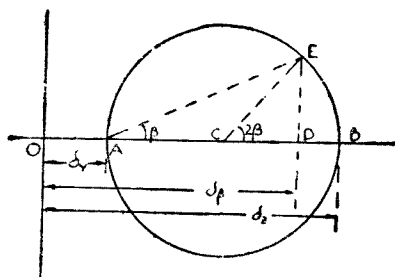


圖 2.2

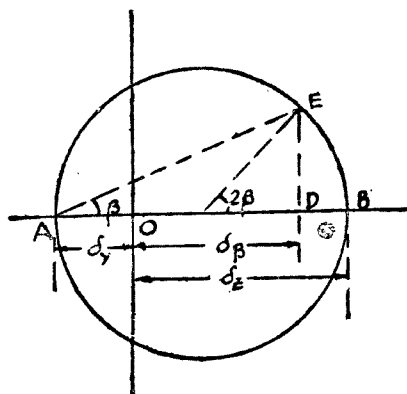


圖 2.3

第六章 風洞與螺旋槳

1. 風洞對於螺旋槳之干涉

封閉式風洞之洞壁，對於螺旋槳之洗流 (Slip Stream)，加以限制。洗流內空氣之流速，較無此限制時略小。開露式者則否，故開露式風洞對於螺旋槳之干涉，通常均略去不計。以下所討論者，僅限於封閉式風洞。

命 C 為風洞之截面面積， S 為螺旋槳之槳面積， S_1 為於下流無窮遠處之洗流截面面積 (圖 1.1)。

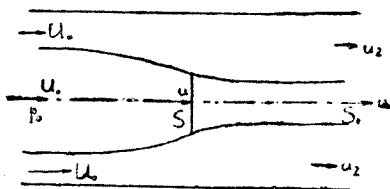


圖 1.1

自連續性方程式，得

$$\begin{cases} u S_1 = u S \\ u_1 (C - S_1) = U_0 C - u S \end{cases} \quad (1.1)$$

因於洗流外之區域，其總壓頭 (Total Pressure Head) 為一定

數。故於下流無窮遠處，洗流內總壓頭之增加，即等於流經槳面時壓頭之增加。

$$H_1 - H_0 = \frac{1}{2} \rho (u_1^2 - u_2^2)$$

螺旋槳之拉力為

$$T = S(H_1 - H_0) = \frac{1}{2} S \rho (u_1^2 - u_2^2) \quad (1.3)$$

自流經槳面以外之空氣，得

$$p_1 - p_0 = \frac{1}{2} \rho (U_0^2 - u_2^2) \quad (1.4)$$

自流經風洞內空氣動量之變化，得

$$\begin{aligned} T - (p_1 - p_0)C &= S_1 \rho u_1 (u_1 - U_0) \\ &+ (C - S_1) \rho u_2 (u_2 - U_0) \end{aligned} \quad (1.5)$$

命

$$\tau = \frac{T}{S \rho U_0^2} \quad (1.6)$$

再將(1.1)，(1.6)式，代入(1.2)式，消去 u_1 ， u_2 ，得

$$\begin{aligned} 2\tau U_0^2 S_1 (C - S_1)^2 &= 2uS(uS - U_0 S_1)C(C - S_1) \\ &- (uS - U_0 S_1)^2 C^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

自(1.5)式，得

$$\begin{aligned} 2\tau U_0^2 S S_1 (C - S_1)^2 &= 2uS(uS - U_0 S_1)C(C - S_1) \\ &- (uS - U_0 S_1)^2 C S_1 \end{aligned} \quad (1.8)$$

自(1.7)(1.8)兩式，得

$$\begin{cases} 2\tau U_0^2 S_1 (S - S_1) (C - S_1) = (uS - U \\ \tau U_0^2 S_1 (CS - S_1)^2 = uS(uS - U_0 S_1)C \end{cases} \quad (1.9)$$

假定無風洞干涉，於同樣拉力 T 及同樣軸速 v 時之相對風速 U'_0 謂之相當風速(Equivalent Air Speed)。

自上述相當風速之定義，得

$$T = 2S\rho u (u - U'_0)$$

或

$$(2u - U'_0)^2 = \frac{2T}{\rho S} + U'_0{}^2 \quad (1.10)$$

若命

$$\begin{cases} U_0 = nU'_0 \\ x^2 = 1 + 2\tau n^2 \end{cases} \quad (1.11)$$

(1.10)式可以簡化為

$$u = \frac{x+1}{2n} U_0 \quad (1.12)$$

更命

$$\begin{aligned} S &= \alpha C \\ S_1 &= \sigma S \end{aligned} \quad (1.13)$$

代入(1.9)式，得

$$4(x^2 - 1)\sigma(1 - \sigma)(1 - \alpha\sigma) = (x - 1 - 2n\sigma)^2 \quad (1.9a)$$

$$2(x - 1)\sigma(1 - \alpha\sigma^2) = (x - 1 - 2n\sigma)$$

或

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{(1-\sigma)(1-\alpha\sigma)}{\sigma(1-\alpha\sigma^2)^2} \quad (1.9b)$$

自(1.9a)之第二式,得

$$n = 1 + (x-1)\alpha\tau^2 - \frac{(2\sigma-1)x+1}{2\sigma} \quad (1.14)$$

再自(1.11)之第二式,得

$$\tau = \frac{x^2-1}{2n} \quad (1.15)$$

自(1.9b), (1.14), (1.15)三式,消去 x 與 σ 得 n 與 τ, α 之關係. 其值見下表及圖 1.2.

$$\frac{1}{n} = \frac{U_0}{U_0'} \text{之值}$$

$\alpha \backslash \delta$	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0.05	0.922	0.985	0.989	0.978	0.975	0.973
0.10	0.983	0.971	0.952	0.954	0.949	0.943
0.15	0.973	0.956	0.942	0.930	0.921	0.912
0.20	0.933	0.940	0.922	0.906	0.893	0.882
0.25	0.956	0.924	0.899	0.880	0.855	0.851

通常因 α 之值,約在 0.15 左右,故得下列之近似式.

$$x(2\sigma-1) = 1 + 2\alpha\tau^2(1-\sigma) \quad (1.9c)$$

$$n = 1 + \frac{\alpha\sigma(1-\sigma)}{2\sigma-1} \quad (1.14b)$$

$$x^2 = 1 + 2\tau \quad (1.15b)$$

自以上三式得 $\frac{1}{n}$ 之約值爲

$$\frac{1}{n} = 1 + \frac{\alpha}{2} \frac{\tau}{\sqrt{1+2\tau}} \quad (1.16)$$

以上所得結論，祇自軸動量之變化而導得，其於洗流內沿切向之轉動流速，則略去不計。

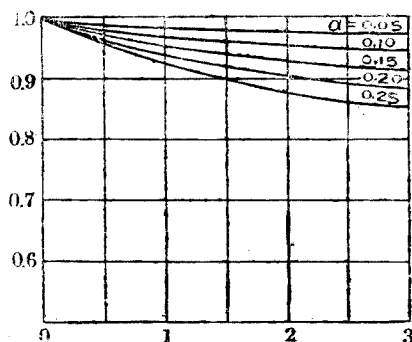


圖 1.2

2. 風洞螺旋槳

風洞內用以鼓風之螺旋槳，因有與洞壁之干涉關係，故其設計方法，與普通之螺旋槳略有不同。

今設於風洞內取一極小柱形體之空氣（圖 2.1），其底面為 $r \, dr \, d\theta$ ，其高為 $U_0 \, dt$ ，若 dm 為此柱形體內空氣之質量，則自徑向之平衡條件，得

$$U_0 \, dt \cdot r \, d\theta \cdot dp = dm \cdot \frac{W^2}{R_0} \quad (2.1)$$

上式中 W 為於徑距 r 處之總流速，因 U_0 為沿軸向之流速， ω 為因螺旋槳之轉動而產生之角速，故得（圖 2.2）

$$W = \sqrt{V^2 + \omega^2 r^2} = \frac{r\omega}{\sin \alpha} \quad (2.2)$$

R_0 為流經該極小柱形體之流線之弧度半徑 (Radius of Curvature)。

風洞中之任意點 P (P 點位於風洞軸上時除外)，沿空氣之流線作一密切面 (Osculating Plane)，則平面與以風洞軸為中心，並經 P 點之圓柱體之相交面，為一橢圓 (圖 2.3)。

設 P 點與風洞軸間之距離為 r ，則該橢圓短軸之半徑應等於 r ，長軸之半徑等於 $r/\sin \alpha$ ，於 P 點之弧度半徑 R_0 為

$$R_0 = \frac{a^2}{b} = \frac{r}{\sin^2 \alpha} \quad (2.3)$$

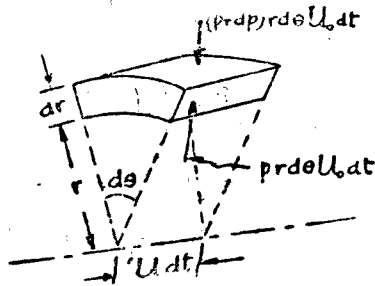


圖 2.1

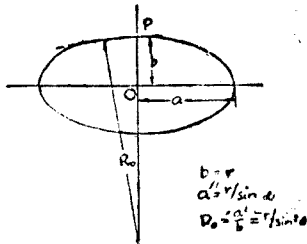


圖 2.3

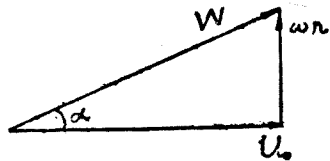


圖 2.2

再自(2.2)式,得
$$R_0 = \frac{W^2}{r\omega^2} \quad (2.3a)$$

又因
$$dm = r d\theta d \cdot \rho dt \rho \quad (2.4)$$

將(2.3a)及(2.4)兩式代入(2.1)式,簡約之,得

$$\frac{1}{\rho U_0^2} dp = \frac{1}{U_0^2} \omega^2 \cdot r dr \quad (2.5)$$

更命 R 為螺旋槳之半徑, Ω 為螺旋槳之角速, $\xi = \frac{r}{R}$ 為其徑比,

$\gamma = \frac{U_0}{\Omega R}$ 為其速比, 因 R 為一定數, 故得

$$d\xi = \frac{1}{R} dr$$

代入(2.5)式,得

$$\frac{1}{\rho U_0^2} \frac{dp}{d\xi} = \frac{\xi}{\gamma^2} \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \quad (2.5a)$$

又因流經螺旋槳槳面時 壓力之增量為

$$p - p_0 = \left(\Omega - \frac{1}{2}\omega \right) \rho r^2 \omega \quad (2.6)$$

上式中 p_0 為於螺旋槳上流無窮遠處之空氣壓力, 微分之, 得

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\xi} &= \frac{d}{d\xi} \left[\rho r^2 \omega \left(\Omega - \frac{1}{2}\omega \right) \right] \\ \frac{1}{\rho U_0^2} \frac{dp}{d\xi} &= \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\xi}{\gamma^2} \left\{ \frac{\omega}{\Omega} - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \right\} \right] \\ &= \frac{2\xi}{\gamma^2} \left[\frac{\omega}{\Omega} - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\xi^2}{\gamma^2} \left[\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\omega}{\Omega} \right) - \frac{\omega}{\Omega} \cdot \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\omega}{\Omega} \right) \right] \quad (2.7) \end{aligned}$$

假定圖 2.1 所示之極小柱形體，位於螺旋槳葉面上時，(2.7)式之值必與(2.5a)之值相等，故得

$$2\frac{\omega}{\Omega}\left(1-\frac{\omega}{\Omega}\right) + \xi\left[\left(1-\frac{\omega}{\Omega}\right)\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)\right] = \left(\frac{\pi}{\Omega}\right)^2 \quad (2.8)$$

解之，得

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{C}{\xi^2} \quad (2.9)$$

自(2.9)式，可知於風洞內之流動，相當於與風洞軸相吻合之旋渦線之流動。又該式內之定數 C 之值，隨螺旋槳之拉力 T ，風洞洞壁對於空氣之阻力及空氣能量之消失而定。

命 F_r 為風洞內之空氣當無旋轉流動時之阻力， P_1 為於單位時間內，由於旋轉流動而消失之能量，故得(註)

$$P_1 = \pi \rho U_0 \int \omega^2 r^3 dr$$

(註) 假定於螺旋槳前空氣之角速為零，於螺旋槳後之角之速為 ω ，故於以風洞軸為中心之一極小環內之空氣，當流經葉面時，於單位時間內，旋轉能量之增加為

$$\frac{1}{2} \omega \cdot V_t^2 = \frac{1}{2} (2\pi r dr \rho U_0) \omega^2 r^2 = \rho U_0 r \omega^2 r^3 dr$$

其後能量為

$$\int \rho U_0 r \omega^2 r^3 dr = \pi \rho U_0 \int \omega^2 r^3 dr$$

無論風洞為通路式(Closed circuit type)或斷路式(Open circuit type)，其於螺旋槳前之角速均等於零，故上述之旋轉能量全部失為

$$P_1 = \pi \rho U_0 \int \omega^2 r^3 dr$$

若螺旋槳自徑比 $\xi = 0.25$ 至 $\xi = 1.0$ 之一段為有效段，則

$$P_I = \pi \rho U_0 \int_{0.25R}^R \omega^2 r^3 dr = \pi \rho U_0 R^4 \Omega^3 \int_{0.25}^1 \xi^3 \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 d\xi$$

自(2.9)式得

$$P_I = \pi \rho U_0 R \Omega \int_{0.25}^1 \xi^3 \frac{C^2}{\xi^4} d\xi = 1.386 \pi \rho U_0 R^4 \Omega^2 C^2$$

故螺旋槳應有之拉力 T 為

$$T = F_r + \frac{P_I}{U_0} = F_r + 1.386 \pi \rho R^4 \Omega^2 C$$

命 h 為風洞洞壁之阻力係數

$$h = \frac{F_r}{\pi \rho U_0^2 R}$$

代入上式，得

$$T = \left(h + 1.386 \frac{C^2}{\gamma^2} \right) \pi R^2 \rho U_0^2$$

又因

$$T = 2\pi \int_{0.25R}^R (p - p_0) r dr = 2\pi R^2 \int_{0.25}^1 (p - p_0) \xi d\xi$$

再自(2.6)及(2.9)式得

$$\begin{aligned} T &= 2\pi R^2 \int_{0.25}^1 \rho r^3 \omega \left(\Omega - \frac{1}{2} \omega \right) \xi d\xi \\ &= 2\omega R^4 \Omega^2 \rho \int_{0.25}^1 \xi^3 \frac{\omega}{\Omega} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega}{\Omega} \right) d\xi \\ &= 2\pi R^4 \Omega^3 \rho \int_{0.25}^1 \left(C\xi - \frac{1}{2} \frac{C^2}{\xi} \right) d\xi \\ &= 2\pi R \Omega^2 \rho \left[0.468C - 0.693C^2 \right] \end{aligned}$$

自以上對於拉力 T 之兩式，得

$$2(0.468C - 0.693C^2) = \left(h + 1.386 \frac{C^2}{\gamma} \right) \gamma^2$$

或

$$C = 0.169 - \sqrt{0.028 - 0.564\gamma^2} \quad (2.10)$$

自葉素理論 (Blade Element Theory)，得螺旋槳之效率 η 為

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{U_0 \int dT}{\Omega \int dM} \\ &= \frac{\int_{0.25}^1 \frac{dL}{d\xi} \cos \beta'_r d\xi - \int_{0.25}^1 \frac{dD}{d\xi} \sin \beta'_r d\xi}{\int_{0.25}^1 \frac{dL}{d\xi} \sin \beta'_r d\xi + \int_{0.25}^1 \frac{dD}{d\xi} \cos \beta'_r d\xi} \quad (2.11) \end{aligned}$$

上式中 β'_r 為(圖 2.4)

$$\beta'_r = \tan^{-1} \frac{U_0}{r(\Omega - \frac{1}{2}\omega)}$$

若命於葉素之上

$$\frac{dD}{dL} = \epsilon$$

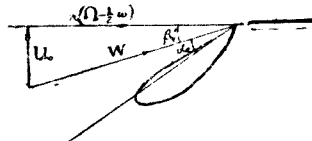


圖 2.4

故得

$$\epsilon = \frac{K_D \rho W^2 l}{K_L \rho W^2 l} \frac{dr}{dr} = \frac{K_D}{K_L} \quad (2.12)$$

又當衝角極小時(圖 2.4), dD 之值極小, 故

$$dL \cong \frac{dT}{\cos \beta'_r} \cong \frac{2\pi r^3 \rho \omega (\Omega - \frac{1}{2}\omega) dr}{\cos \beta'_r}$$

代入(2.11)式, 積分之, 得

$$\begin{aligned} \eta &\cong \frac{1 - 1.48C - 1.6\gamma}{1 + \frac{26}{\gamma}(0.35 - 0.41C)} \\ &\cong 1 - 1.48C - 1.6\epsilon\gamma + \frac{26\epsilon}{\gamma}(0.35 - 0.41C) \\ &\quad + 1.03\frac{\epsilon C}{\gamma} - 1.12\epsilon^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

將(2.13)式微分之, 得於最高效率時之速比 γ_1

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\gamma} &= -1.48\frac{dC}{d\gamma} - 1.6\epsilon - \frac{26}{\gamma^2}(0.35 - 0.41C) \\ &\quad + \frac{0.82}{\gamma_1}\epsilon\frac{dC}{d\gamma} - \frac{1.03}{\gamma_1^2}\epsilon C + \frac{1.03}{\gamma_1}\epsilon\frac{dC}{d\gamma} = 0 \end{aligned}$$

上式中之 $\frac{dC}{d\gamma}$ 之值, 可以自(2.10)式求得之。

當 $\epsilon = 1.044$ 時, 最高效率 η_{\max} 與於最高效率時之速比 γ_1 與阻方係數 h 之關係, 見下表及圖 2.5。

p	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0	3.0
γ_1	0.263	0.232	0.211	0.196	0.134	0.104
η_{max}	0.84	0.82	0.81	0.79	0.74	0.70

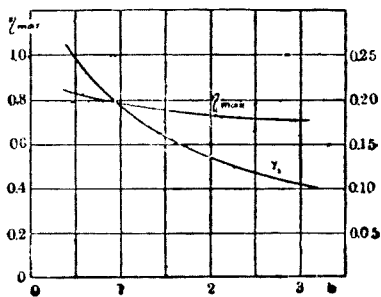


圖 2.

参 考 書

1. L. Prandtl: Tragflügeltheorie in "Vier Abhandlungen zur Hydro- und Aerodynamik, 1917.
2. H. Glauert: Aerofoil Theory A. R. C., R & M, 723, 1921,
3. E. Pistoiesi: L'Induzione di un "tunnel di Sezione Quadrata, Atti dell' Associazione Italiana di Aerotechnica, 1923.
4. H. Glauert: The interference of Wind Channel Walls on the Aerodynamic Characteristics of an Aerofoil, A. R. C., R & M, 867, 1923.
5. L. Prandtl: Experimentelle Prüfung der Berechtigungsformel für Flügel von grosser Spannweite im Luftstrahl der Versuchsanstalt, Ergebnisse der Aerodyn. Versuchsanstalt zu Göttingen, 2^{te} Vol., 1923.
6. W. H. Cowley and L. J. Jones: An Experimental Test of the Prandtl Correction for Tunnel Wall Interference, A. R. C., R & M. 898, 1924.
7. H. Glauert and A. S. Hartshorn: The Interference of Wind Channel Walls on the Downwash Angle and the Tail-setting to Trim, A.R.C., R & M, 957, 1924.
8. G. J. Higgins: The Effect of the Walls in Closed Type Wind Tunnels, N.A.C.A. Report, 278, 1927.
9. K. Terazawa: On the Interference of Wind Tunnel Walls

- of Rectangular Cross Section on the Aerodynamic Characteristics of a Wing, Tokyo Imp. Univ. rsity, Aero. Res. Institute Rep., 44, 1928.
10. E. Carafoli: Contribution à la Theore de la Sustentation Aérodyamique, Thèse de Doctorat ès-sciences, Paris, 1928.
 11. F. B. Bradfield, K. W. Clark, and R. A. Fairthorne: Measurement of Maximum Lift in Closed Tunnels of Different Sizes, and in an Open Jet Tunnel, A. R. C., R & M, 1363, 1930.
 12. M. Knight and T. A. Harris: Experimental Determination of Jet Boundary Corrections for Airfoil Tests in Four Open Wind Tunnels Jet of Different Shapes, N. A. C. A. Rep., 261, 1930.
 13. L. Rosenhead: The Effect of Wind Tunnel Interference on the Characteristics of an Airfoil, Proc. Roy. Soc., A, 129, p. 135, 1930.
 14. T. Theodoresen: The Theory of Wind Tunnel Interference, N.A.C.A. Rep., 410, 1931.
 15. H. Glauert: The Interference on the Characteristics of an Airfoil in a Wind Tunnel of Circular Section, A. R. C., R & M, 1413, 1931.
 16. H. Glauert: The Interference on the Characteristic of an Aerofoil in a Wind Tunnel of Rectangular Section, A. R. C., R & M, 1459, 1932.
 17. H. Glauert: Some General Theorems Concerning Wind Tunnel Interference on Aerofoils, A. R. C., R & M, 1470, 1932.

18. C. B. Millikan: On the Lift Distribution for a Wing of Arbitrary Plan Form in a Circular Wind Tunnel, *Trans. A. S. M. E. App. Mech.*, 1132.
19. M. Sanuki & I. Tani: The Wall Interference of a Wind Tunnel of Elliptic Cross Section, *Proc. Phys. Math. Soc. of Japan*, 14. p. 592, 1932.
20. R. Seifert: Untersuchung von Flugzeugmodellen im Windkanal, *Handbuch der Experimental Physik*, Vol. 4, part 2, p. 592, 1932.
21. J. Stüper: Der durch einen Freistrahл hindurchgesteckte Tragflügel, *Ingenieur-Archiv*, III, 4, pp. 333—355, 1932.
22. L. Rosenhead: The Airfoil in a Wind Tunnel of Elliptic Section, *Proc. Roy. Soc., A*, 140, 1933.
23. T. Theodorsen: Interference of an Aerofoil of Finite Span in an Open Rectangular Wind Tunnel, *N. A. C. A. Rep.*, 461, 1933.
24. L. Rosenhead. Interference due to the Walls of a Wind Tunnel, *Proc. Roy. Soc., A*, 142, 1933.
25. E. Pistolesi: Sull'Ala traversante un Getto Libero Atti della Ponti. Acca. delle Sci. Nuovi Lincei., pp. 405—417, 1933.
26. H. Glauert: Wind Tunnel Interference on Wings, Bodies and Airscrews, *A. R. C., R & M*, 1506, 1933.
27. H. Glauert: Lift and Drag of a Wing Spanning a Free Jet, *A. R. C., R & M*, 1603, 1934.
28. P. De Haller: L'Influence des Limites de la Veine Fluide sur les Caracteristiques Aerodynamique d'une Surface

- Portante, Comm. de L'Institut d'Aérodynamique de L'École Polytech, Fédérale, Zurich, 1934.
29. A. Toussaint: Sur les Corrections à Apporter aux Caractéristiques Aérodynamiques d'une Aile Sustentatrice Expérimentée dans une Soufflerie à Veine Rectangulaire Senri-guidée par des Parois Paralleles à L'Envergure de l'Aile et à la Vitesse du Vent.
 30. A. Toussaint: Influence of the Dimensions of the Airstream, in Aerodynamic Theory by Durand, Vol. III, 1935.
 31. T. Theodarsen and A. Silverstein: Experimental Verification of the Theory of Wind Tunnel Boundary Interference, N. A. C. A. Rep., 478, 1934.
 32. G. Van Schliestett: Experimental Verification of the Theodarsen's Theoretical Jet Boundary Correction Factors, N. A. C. A. Tech. Notes, 506, 1934.
 33. T. Von Kármán and I. M. Furgers: Influence of Boundaries in the Field of Motion around Airfoil Systems, in Aerodynamic Theory by Durand, Vol. II, 1935.
 34. J. Leunertz: Beitrag zur theoretischen Behandlung des gegenseitigen Einfluss von Tragfläche und Rumpf: Abhandl. aerody. Inst., Aachen., 1928.
 35. Watson: The Use of Series of Bessel Functions in Problems Associated with Cylindrical Wind Tunnel, Proc. Roy. Soc., A 130, N 812, 1930.
 36. I. Tani and M. Taira: Two Notes on the Boundary Influence of Wind Tunnel of Circular Cross Section, Rep. of Aero. Res. Inst., Tokyo Imp. University, Vol. 10, 1935.

37. W. L. Cowley and G. A. Macmillan: Effect of Wind Tunnel Interference on the Pitching Moment of Large Models in the Duplex Tunnel, A. R. C., R & M. 1639, 1934.
38. K. Terazawa: On the Wall Interference of a Circular Wind Tunnel, Rep of Aero. Res. Inst., Tokyo Imp. University, Vol. 10, 1935.
39. K. Kondo: The Wall Interference of Wind Tunnels with Boundaries of Circular Arc, Rep. of Aero. Res. Inst., Tokyo Imp. University, Vol. 10, 1935.
40. E. Pistolesi: L'Influsso della Limitazione della Corrente sulla Caratteristiche dei Modelli di Ali, Aerotronics, 1936.
41. A. Silverstein and J. A. White: Wind Tunnel Interference with Particular Reference to Off-Centre Positions of the Wings and to the Downwash at the Tails, N. A. C. A. Rep., 547, 1935.
42. F. Weinig: Der Strahleinfluss bei offenen Windkanälen, Luftfahrtforschung, Bd 13, 1936.
43. I. Lotz: Correction of Downwash in Wind Tunnels of Circular and Elliptical Sections, N. A. C. A., T. M. 801, 1936.
44. A. Silverstein and S. Katzoff: Experimental Investigation of Wind Tunnel Interference on the Downwash behind an Airfoil, N. A. C. A. Rep., 609, 1937

三 畫

干涉因數 interference factor, 13
干涉因數圖 circle of interference factor, 6

五 畫

母線 generatrix, 7
半封閉式 semi-constrained stream type, 5
古德-委高斯基定理 Kutta-Joukowski theorem, 10

六 畫

同形變化 conformal transformation, 44

七 畫

尾隨漩渦線 trailing vortex line, 8

八 畫

附着漩渦線 bounding vortex line, 8

九 畫

旋流 slip stream, 62
封閉式 constrained stream type, 5
相當風速 equivalent air speed, 64
伯努利定理 Bernoulli's Theorem, 6

十 畫

流速勢 velocity potential, 4

2.

流函數 stream function, 8
格氏定理 Glauert's theorem, 9

十一 畫

偶線 doublet, 9
密切面 osculating plane, 67
漩渦面 vortex surface, 11

十二 畫

源 source, 12
開露式 open jet type, 5
補助流速勢 complementary velocity potential, 4

十三 畫

葉素理論 blade element theorem, 71

十四 畫

匯 sink, 12
複勢 complex potential, 9

十五 畫

影像 image, 15

十六 畫

總壓頭 total pressure head, 62

