Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

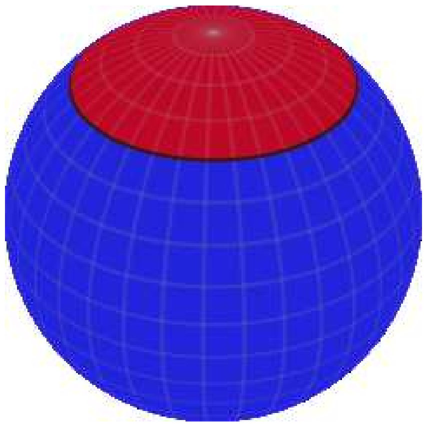
Analysis III

Arbeitsblatt 87

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 87.1. Beschreibe diverse Kleidungsstücke als zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand.

Aufgabe 87.2. Zeige, dass sowohl das blaue als auch das rote Oberflächenstück einschließlich der Begrenzungslinie eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist. Was ist der Rand? Sind die beiden Mannigfaltigkeiten diffeomorph? Gibt es eine einfachere dazu diffeomorphe Mannigfaltigkeit?



Aufgabe 87.3. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand) und N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Was kann man über das Produkt $M \times N$ sagen?

Aufgabe 87.4. Die abgeschlossene Kreisscheibe $B(0,1)$ trage die Standardorientierung des $\mathbb{R}^2$. Läuft die durch die äußere Normale festgelegte Orientierung auf dem Rand (also auf dem Einheitskreis) mit dem oder gegen den Uhrzeigersinn?

Aufgabe 87.5. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Unter einem *differenzierbaren Halbweg* verstehen wir jede differenzierbare Abbildung

$$\gamma\colon\ [0,\epsilon[\longrightarrow M$$

oder

$$\gamma\colon\ ]-\epsilon, 0] \longrightarrow M$$

(mit $\epsilon > 0$. Sie heißen nach innen bzw. nach außen gerichtet). Definiere, wann zwei Halbwege mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P \in M$ *tangential äquivalent* sind, und zeige, dass dadurch eine Äquivalenzrelation gegeben ist, und dass die Quotientenmenge ein reeller Vektorraum ist, der der *Tangentialraum* in P heißt. Charakterisiere die Äquivalenzklassen, die sowohl nach innen als auch nach außen repräsentierbar sind.

Aufgabe 87.6. Es sei $H \subset \mathbb{R}^n$ ein euklidischer Halbraum und $P \in H$. Es gebe eine in $\mathbb{R}^n$ offene Menge V mit $P \in V \subseteq H$. Zeige, dass P kein Randpunkt von H ist.

Aufgabe 87.7. Es seien $U_1 \subseteq H_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $U_2 \subseteq H_2 \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen in euklidischen Halbräumen H_1 und H_2 und es sei

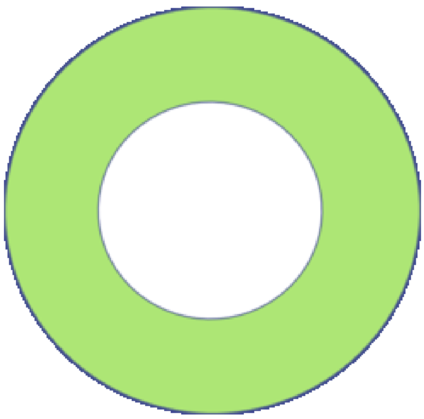
$$\varphi\colon U_1 \longrightarrow U_2$$

ein Diffeomorphismus. Zeige, dass es zu jedem Punkt $P \in U_1$ offenen Umgebungen $P \in V_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $\varphi(P) \in V_2 \subset \mathbb{R}^n$ und eine diffeomorphe Fortsetzung

$$\tilde{\varphi}\colon V_1 \longrightarrow V_2$$

gibt.

Aufgaben zum Abgeben



Aufgabe 87.8. (4 Punkte)

Man gebe für den Kreisring

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq || x || \leq 2 \right\}$$

explizit Karten an, die zeigen, dass M eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist.

Aufgabe 87.9. (6 Punkte)

Zeige, dass die Halbebene $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$ und der Quadrant $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ nicht diffeomorph sind.

(Was ist hierbei der geeignete Diffeomorphiebegriff?)

Aufgabe 87.10. (6 Punkte)

Es sei $M = B(0,1) \setminus \{(0,1),(0,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, also die abgeschlossene Kreisscheibe, aus der man zwei Randpunkte herausgenommen hat. Es sei $N =]-1,1[\times[-1,1]$ das Produkt eines offenen und eines abgeschlossenen Intervalls. Zeige, dass M und N diffeomorphe Mannigfaltigkeiten mit Rand sind.

Aufgabe 87.11. (4 Punkte)

Es seien $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und es sei

$$\varphi\colon V_1 \longrightarrow V_2$$

ein Diffeomorphismus, der eine Homöomorphie zwischen $V_1 \cap H$ und $V_2 \cap H$ induziert und damit auch zwischen $V_1 \cap \partial H$ und $V_2 \cap \partial H$ (H bezeichnet den Halbraum und ∂H seinen Rand). Zeige, dass die Einschränkung auf den Rand ebenfalls ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 87.12. (4 Punkte)

Die abgeschlossene Einheitskugel $B(0,1)$ trage die Standardorientierung des $\mathbb{R}^3$. Bestimme, ob die beiden Tangentenvektoren $(2,1,0)$ und $(3,-1,0)$ am Nordpol $(0,0,1)$ die durch die äußere Normale induzierte Orientierung auf dem Rand (also auf der Einheitssphäre) repräsentieren oder nicht?