Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 11

Aufgabe 11.1. Zeige, dass in einem irreduziblen topologischen Raum X jede nichtleere offene Teilmenge $U \subseteq X$ dicht ist.

Aufgabe 11.2. Zeige, dass ein metrischer Raum X nur dann irreduzibel ist, wenn er einpunktig ist.

Aufgabe 11.3. Es sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge mit der induzierten Topologie. Zeige, dass Y genau dann irreduzibel ist, wenn der Abschluss $\overline{Y}$ irreduzibel ist.

Man sagt, dass ein topologischer Raum die *Trennungseigenschaft* T_0 erfüllt, wenn es zu je zwei Punkten $x \neq y$ eine offene Menge U mit $x \in U$ und $y \notin U$ oder eine offene Menge V mit $x \notin V$ und $y \in V$ gibt.

Man sagt, dass ein topologischer Raum die *Trennungseigenschaft* T_1 erfüllt, wenn jeder Punkt $x \in X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 11.4. Zeige, dass ein Schema die Trennungseigenschaft $T0$ erfüllt.

Aufgabe 11.5. Zeige, dass für ein affines Schema $X = \operatorname{Spek}(R)$ folgende Eigenschaften äquivalent sind.

(1) In R ist jedes Primideal maximal.
(2) In X ist jeder Punkt abgeschlossen.
(3) X ist ein Hausdorffraum.

Aufgabe 11.6. Man gebe ein Beispiel für ein nulldimensionales affines Schema $X = \operatorname{Spek}(R)$, das nicht diskret ist.

Aufgabe 11.7. Es sei $Y \subseteq X$ eine irreduzible Teilmenge in einem topologischen Raum X und $\eta \in Y$ ein Punkt. Zeige, dass η genau dann ein generischer Punkt von Y ist, wenn $\overline{\{\eta\}} = Y$ ist.

Aufgabe 11.8. Es sei $X = \operatorname{Spek}(R)$ das Spektrum zu einem kommutativen Ring R und $Y = V(\mathfrak{p}) \subseteq X$ die abgeschlossene Teilmenge zu einem Primideal $\mathfrak{p}$. Zeige, dass $\mathfrak{p}$ der generische Punkt von $V(\mathfrak{p})$ ist.

Aufgabe 11.9.*

Es sei $M \neq \emptyset$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Zeige, dass es eine Kette von abgeschlossenen Untermannigfaltigkeiten

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = M$$

derart gibt, dass die abgeschlossene Untermannigfaltigkeit M_i die Dimension i besitzt.

Aufgabe 11.10. Es sei X ein noetherscher topologischer Raum. Zeige, dass dann auch jede Teilmenge $Y \subseteq X$ mit der induzierten Topologie wieder noethersch ist.

Aufgabe 11.11. Es sei X ein noetherscher topologischer Raum. Zeige, dass jede Teilmenge $Y \subseteq X$ mit der induzierten Topologie quasikompakt ist.

Aufgabe 11.12. Zeige, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der metrischen Topologie kein noetherscher topologischer Raum ist.

Aufgabe 11.13.*

Es sei R ein kommutativer Ring und $\operatorname{Spek}(R) = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ mit $f_i \in R$. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in R mit der Eigenschaft, dass die Erweiterungsideale $\mathfrak{a}R_{f_i}$ endlich erzeugt sind. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt ist.

Aufgabe 11.14.*

Es sei R ein kommutativer Ring und $X = \operatorname{Spek}(R)$ das zugehörige affine Schema. Zeige, dass X genau dann ein noethersches Schema ist, wenn R ein noetherscher Ring ist.

Aufgabe 11.15. Zeige, dass es in einem noetherschen kommutativen Ring nur endlich viele minimale Primideale gibt.

Aufgabe 11.16. Man gebe ein Beispiel eines nicht-noetherschen Ringes, dessen Reduktion ein Körper ist.

Sei R ein kommutativer Ring. Ein multiplikatives System $F \subseteq R$ nennt man einen *Ultrafilter*, wenn $0 \notin F$ ist und wenn F maximal mit dieser Eigenschaft ist.

Aufgabe 11.17. Sei R ein kommutativer Ring und sei $F \subset R$ ein Ultrafilter. Zeige, dass das Komplement von F ein minimales Primideal in R ist.

Aufgabe 11.18. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) $(X, \mathcal{O}_X)$ ist ein reduzierter beringter Raum.
(2) Für jeden Punkt $P \in X$ ist der Halm $\mathcal{O}_{X,P}$ reduziert.

Aufgabe 11.19. Zeige, dass für ein Schema die Integrität im Allgemeinen keine lokale Eigenschaft ist.

Abbildungsverzeichnis