**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2017**

# Grundkurs Mathematik II

## Arbeitsblatt 42

### Die Pausenaufgabe

Aufgabe 42.1. Vergleiche $\sqrt[10]{10}$ und $\sqrt[3]{2}$.

### Übungsaufgaben

Aufgabe 42.2. Was hat die Din-Norm für Papier mit Wurzeln zu tun?

Aufgabe 42.3. Welche elementargeometrischen Beweise für den Satz des Pythagoras kennen Sie?

Aufgabe 42.4. Erläutere, warum die Schreibweise $x^{\frac{1}{k}}$ für die $k$-te Wurzel aus $x$ sinnvoll ist.

Aufgabe 42.5. Berechne $\sqrt[12]{2}^2 \cdot \sqrt[6]{2}^5$.

Aufgabe 42.6. Zeige, dass es in $\mathbb{Q}$ kein Element $x$ mit $x^2 = 2$ gibt.

Aufgabe 42.7. Es sei $p$ eine Primzahl. Zeige, unter Verwendung der eindeutigen Primfaktorzerlegung von natürlichen Zahlen, dass die reelle Zahl $\sqrt{p}$ irrational ist.

Aufgabe 42.8.*

Begründe geometrisch, dass die Wurzeln $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, als Länge von „natürlichen" Strecken vorkommen.

Aufgabe 42.9. Es sei $K$ ein angeordneter Körper und $a \in K$. Zeige, dass die Gleichung $x^2 = a$ höchstens zwei Lösungen in $K$ besitzt.

Aufgabe 42.10. Es sei $K$ ein Körper und $a \in K$. Zeige, dass die Gleichung $x^2 = a$ höchstens zwei Lösungen in $K$ besitzt.

Aufgabe 42.11. Zeige, dass es in $\mathbb{Z}/(5)$ vier Lösungen für die Gleichung
$$x^4 = 1$$
gibt.

Aufgabe 42.12. Man konstruiere einen kommutativen Ring $R$, in dem die 4 mindestens drei Quadratwurzeln besitzt.

Aufgabe 42.13. Vergleiche
$$\sqrt{2} + \sqrt{7} \text{ und } \sqrt{3} + \sqrt{5}\,.$$

Aufgabe 42.14. Es sei $K$ ein angeordneter Körper und $a, b, c \in K_+$ mit $a \geq b \geq c$. Zeige
$$\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} \leq \sqrt{a+c} + \sqrt{a-c}.$$

Aufgabe 42.15. Bestimme die Quadrate und ihre Quadratwurzeln im Restklassenkörper $\mathbb{Z}/(13)$.

Aufgabe 42.16. Es sei $K$ ein angeordneter Körper mit $\sqrt{n} \in K_+$, wobei $n \in \mathbb{N}$ keine Quadratzahl sei. Zeige, dass
$$\{p + q\sqrt{n} | \, p, q \in \mathbb{Q}\} \subseteq K$$
ein Körper ist.

Aufgabe 42.17. Betrachte die Menge
$$K = \left\{p + q\sqrt{5} | \, p, q \in \mathbb{Q}\right\},$$
wobei $\sqrt{5}$ zunächst lediglich ein Symbol ist.

a) Definiere eine Addition und eine Multiplikation auf dieser Menge derart, dass $\sqrt{5}^2 = 5$ ist und dass $K$ zu einem Körper wird.

b) Definiere eine Ordnung derart, dass $K$ zu einem angeordneten Körper wird und dass $\sqrt{5}$ positiv wird.

c) Fasse die Elemente von $K$ als Punkte im $\mathbb{Q}^2$ auf. Skizziere eine Trennlinie im $\mathbb{Q}^2$, die die positiven von den negativen Elementen in $K$ trennt.

d) Ist das Element $23 - 11\sqrt{5}$ positiv oder negativ?

Aufgabe 42.18. Zeige, dass man $\sqrt{3}$ nicht in der Form

$$\sqrt{3} = p + q\sqrt{2}$$

mit $p, q \in \mathbb{Q}$ schreiben kann.

Zu einem kommutativen Ring $R$ bezeichnet man die Elemente, die bezüglich der Multiplikation ein Inverses besitzen, als Einheiten. Sie bilden eine Gruppe, die sogenannte Einheitengruppe, die mit $R^\times$ bezeichnet wird. Bei einem Körper ist einfach $K^\times = K \setminus \{0\}$.

Aufgabe 42.19. Es sei $K$ ein Körper. Zeige, dass die Quadrate in $K^\times$ eine Untergruppe von $K^\times$ bilden.

Aufgabe 42.20. Es sei $K$ ein angeordneter Körper. Zeige, dass die Quadrate in $K^\times$ eine Untergruppe von $K_+$ bilden.

Aufgabe 42.21. Es sei $\mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{Q}_+$ die (multiplikative) Untergruppe der Quadrate innerhalb der rationalen Zahlen und es sei $\sim$ die zugehörige Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Q}_+$. Zeige, dass jede Äquivalenzklasse einen eindeutigen Repräsentanten besitzt, der durch eine natürliche Zahl gegeben ist, in deren Primfaktorzerlegung jeder Primfaktor einfach ist (die 1 erfülle diese Eigenschaft).

Aufgabe 42.22. Vergleiche

$$\sqrt[2]{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[5]{5}\,.$$

Aufgabe 42.23. Es sei $K$ ein angeordneter Körper. Es sei vorausgesetzt, dass in $K$ die (positiven) Elemente $8^{1/2}$ und $25^{1/3}$ existieren. Welches ist größer?

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 42.24. (3 Punkte)

Bestimme das inverse Element zu $\overline{71}$ in $\mathbb{Z}/(167)$.

Aufgabe 42.25. (2 Punkte)

Bestimme die Quadrate und ihre Quadratwurzeln im Restklassenkörper $\mathbb{Z}/(19)$.

Aufgabe 42.26. (2 Punkte)

Es sei $K$ ein angeordneter Körper, $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Gleichung $x^n = a$ höchstens zwei Lösungen in $K$ besitzt.

Aufgabe 42.27. (2 Punkte)

Zeige, dass es in $\mathbb{Z}/(7)$ sechs Lösungen für die Gleichung

$$x^6 = 1$$

gibt.

Aufgabe 42.28. (4 Punkte)

Es seien $a, b$ ganze Zahlen und $x \in \mathbb{Q}$ eine Lösung der Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Zeige, dass $x$ eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 42.29. (3 Punkte)

Es sei $K$ ein angeordneter Körper und $a \in K$, $a \geq 1$. Es seien $m \geq n$ positive ganze Zahlen. Zeige

$$\sqrt[m]{a} \leq \sqrt[n]{a}.$$