Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 49

Übungsaufgaben

Aufgabe 49.1. Leite aus der allgemeinen Kettenregel die Kettenregel für Funktionen in einer Variablen ab.

Aufgabe 49.2. Leite aus der allgemeinen Kettenregel die Kettenregel für differenzierbare Kurven (für eine differenzierbare Kurve $f\colon J \rightarrow V$ und eine differenzierbare Umparametrisierung $h\colon I \rightarrow J$) ab.

Aufgabe 49.3. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und seien $f, g\colon I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Beweise die Produktregel aus der allgemeinen Kettenregel unter Verwendung von Aufgabe 48.4.

Aufgabe 49.4. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Weiter seien $f, g\colon G \rightarrow \mathbb{R}$ zwei in $P \in G$ differenzierbare Funktionen. Wende die Kettenregel und Aufgabe 48.4 auf das Diagramm

$$G \xrightarrow{f,g} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{mult}} \mathbb{R}$$

an, um zu zeigen, dass die Gleichung

$$(D(f \cdot g))_P = g(P) \cdot (Df)_P + f(P) \cdot (Dg)_P$$

gilt.

Aufgabe 49.5.*

Bestätige die Kettenregel für $g \circ f$ für die beiden differenzierbaren Abbildungen

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t^3 - t, -t^2),$$

und

$$g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto xy + x + y.$$

Aufgabe 49.6. Bestätige die Kettenregel anhand der beiden Abbildungen

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (u, v) \longmapsto (u^2v^2, u + \sin v, v^3),$$

und

$$\psi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (x^2y - z^2, xy^2 + yz \exp x),$$

und ihrer Komposition $\psi \circ \varphi$ in folgenden Schritten.

(1) Berechne für einen beliebigen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ das totale Differential $(D\varphi)_P$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.

(2) Berechne für einen beliebigen Punkt $Q \in \mathbb{R}^3$ das totale Differential $(D\psi)_Q$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(3) Berechne explizit die Komposition $\psi \circ \varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
(4) Berechne direkt mit partiellen Ableitungen in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ das totale Differential von $\psi \circ \varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
(5) Berechne das totale Differential von $\psi \circ \varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ mit Hilfe der Kettenregel und den Teilen (1) und (2).

Aufgabe 49.7. Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^m$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen, und $f \colon G \to \mathbb{R}^n$ und $g \colon D \to \mathbb{R}^k$ Abbildungen derart, dass $f(G) \subseteq D$ gilt. Es sei weiter angenommen, dass f in $P \in G$ und g in $f(P) \in D$ total differenzierbar ist. Zeige

$$\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_i}(P) = \left(\frac{\partial g_j}{\partial y_1}(f(P)), \ldots, \frac{\partial g_j}{\partial y_m}(f(P)) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 49.8. Es seien $\varphi \colon V \to W$ und $\psi \colon W \to U$ in $P \in V$ bzw. in $\varphi(P) \in W$ total differenzierbare Abbildungen. Es sei $v \in V$ ein Vektor. Zeige mit der Kettenregel, dass

$$(D_v(\psi \circ \varphi))(P) = \left(D_{(D\varphi)_P(v)}(\psi) \right)(\varphi(P))$$

gilt.

Aufgabe 49.9. Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^m$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen, und $f \colon G \to \mathbb{R}^n$ und $g \colon D \to \mathbb{R}^k$ Abbildungen derart, dass $f(G) \subseteq D$ gilt. Es sei weiter angenommen, dass f und g stetig differenzierbar sind. Zeige, dass auch $g \circ f$ stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 49.10. Man gebe ein Beispiel für partiell differenzierbare Funktionen $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $g \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ derart, dass $g \circ f$ nicht partiell differenzierbar ist.

Aufgabe 49.11. Man gebe ein Beispiel für partiell differenzierbare Funktionen $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $g \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ derart, dass auch $g \circ f$ partiell differenzierbar ist, dass aber

$$\operatorname{Jak}(g \circ f)_P = \operatorname{Jak}(g)_{f(P)} \circ \operatorname{Jak}(f)_P$$

nicht gilt.

Aufgabe 49.12. Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^m$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen, und $f \colon G \to \mathbb{R}^n$ und $g \colon D \to \mathbb{R}^k$ Abbildungen derart, dass $f(G) \subseteq D$ gilt. Es sei weiter angenommen, dass f und g ℓ-fach stetig differenzierbar sind. Zeige, dass auch $g \circ f$ ℓ-fach stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 49.13. Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x f(y),$$

genau dann im Punkt $(0, 0)$ total differenzierbar ist, wenn f in 0 stetig ist.

Aufgabe 49.14. Seien V und W euklidische Vektorräume, $G \subseteq V$ offen und sei $\varphi\colon G \to W$ eine Abbildung. Zeige, dass φ genau dann stetig differenzierbar ist, wenn φ total differenzierbar ist und wenn die Abbildung

$$G \longrightarrow \operatorname{Hom}(V,W),\ P \longmapsto (D\varphi)_P\,,$$

stetig ist.

Aufgabe 49.15. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar im Nullpunkt und $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit

$$\lim_{m\to\infty} h_m = 0,\ \lim_{m\to\infty} \frac{h_m}{\|h_m\|} = v \in \mathbb{R}^n, f(h_m) = f(h_k) \text{ für alle } m,k \in \mathbb{N}\,.$$

Zeige, dass v ein Eigenvektor von $(Df)_0$ zum Eigenwert 0 ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 49.16. (5 (1+1+1+1+1) Punkte)

Wir wollen die Kettenregel anhand der beiden Abbildungen

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (u,v) \longmapsto (uv, u-v, v^2),$$

und

$$\psi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (xyz^2, y\exp(xz)),$$

und ihrer Komposition $\psi \circ \varphi$ veranschaulichen.

(1) Berechne für einen beliebigen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ das totale Differential $(D\varphi)_P$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(2) Berechne für einen beliebigen Punkt $Q \in \mathbb{R}^3$ das totale Differential $(D\psi)_Q$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(3) Berechne explizit die Komposition $\psi \circ \varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
(4) Berechne direkt mit partiellen Ableitungen in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ das totale Differential von $\psi \circ \varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
(5) Berechne das totale Differential von $\psi \circ \varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ mit Hilfe der Kettenregel und den Teilen (1) und (2).

Aufgabe 49.17. (8 Punkte)

Wir betrachten die Funktionen

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2$$

mit

$$f(u,v) = (u^2, uv, u-v^2)\,,$$

$$g(x,y,z) = (x+y^2-z, x^2yz)\,,$$

und

$$h(r,s) = (r^2s, s^2)\,.$$

Berechne das totale Differential von $h \circ g \circ f$ in einem beliebigen Punkt $P = (u,v)$ auf vier verschiedene Arten.

Aufgabe 49.18. (3 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und sei $\varphi \colon V \to V$ eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann eine Verschiebung ist, also von der Art $P \mapsto P + v$ mit einem festen Vektor $v \in V$, wenn

$$(D\varphi)_P = \mathrm{Id}_V$$

für alle $P \in V$ ist.

Aufgabe 49.19. (4 Punkte)

Es sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ P \longmapsto \| f(P) \|,$$

differenzierbar ist und bestimme das totale Differential davon.

Aufgabe 49.20. (4 Punkte)

Seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Mengen, $P \in G$ ein Punkt, $\varphi \colon G \to W$ und $f \colon G \to \mathbb{R}$ in P differenzierbare Abbildungen. Zeige, dass dann die Produktabbildung $f \cdot \varphi \colon G \to W$ in P differenzierbar ist mit

$$(D(f \cdot \varphi))_P = f(P) \cdot (D\varphi)_P + (Df)_P \cdot \varphi(P).$$

Tipp: Verwende Aufgabe 48.12 und die Kettenregel.

Aufgabe 49.21. (10 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine differenzierbare Kurve $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion, $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, für die die Richtungsableitung in jede Richtung existiert, derart, dass die Verknüpfung $f \circ \varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht differenzierbar ist.

Abbildungsverzeichnis