之ニ由テ　$A+\frac{3A}{4}+\frac{9A}{16}+\frac{27A}{64}=x$　即チ　$175A=64x$,

$A=\frac{x}{4}+81$ ナルカ故ニ　$175\left(\frac{x}{4}+81\right)=64x$,

即チ　$175x+175\times81\times4=256x$,　即チ　$81x=175\times81\times4$,

$\therefore\ x=175\times4=700$,　　即チ　全金ハ七百圓ナリ.

21. 初年ノ金圓$=x$トスレハ

第壹年末ノ殘金$=x-a$

第貳年末ノ殘金$=m(x-a)-a=mx-a(m+1)$

第三年末ノ殘金$=m\{mx-a(m+1)\}-a=m^2x-a(m^2+m+1)$,

第四年末ノ殘金$=m\{m^2x-a(m^2+m+1)\}-a$

$$=m^3x-a(m^3+m^2+m+1),$$

以下此形ヲ推シテ

第n年末ハ　$m^{n-1}x-a(m^{n-1}+m^{n-2}+\dots+m+1)=c$,

即チ　$m^{n-1}x-a\left(\frac{m^n-1}{m-1}\right)=c$,

$$\therefore\ x=\frac{a(m^n-1)+c(m-1)}{m^{n-1}(m-1)}.$$

〔C〕

22. 時計アリh時ノ後ヲ時針ト分針トノ間隔h分ナリトイフ此時ヲ求ム.

23. 10時ト11時ノ間ニ於テ時計ヲ視シニ其時ヨリ3分前ノ時針ノ位置ト6分後ノ分針ノ位置ハ恰モ反對シテ壹直線ヲナストイフ其視タル時ヲ求ム.

24. 8時ト9時ノ間ニ於テ時計ヲ視シニ其時ヨリ10分前ノ分針ノ位置ハ今ノ時針ノ位置ト恰モ直角ヲナセリトイフ其視タル時ヲ求ム.

25. 兩滊車アリ長サ各44碼ニシテ毎時ノ速各30哩ナリ此滊車カ相向テ來ルキ其通過シ了ル時間ヲ求ム.

26. 毎時10哩ノ速ニテ或道程ノ$\frac{1}{3}$ヲ行キ9哩ノ速ニテ$\frac{1}{3}$ヲ行キ8哩ノ速ニテ殘ヲ行キタリ若シ毎時10哩ノ速ニテ此道程ノ半ヲ行キ8哩ノ速ニテ殘ヲ行カハ前ヨリ30秒遲ク達スヘシトイフ此道程如何.

27. 兩人各自轉車ニ乘リ正午ニ於テ一ハ甲地ヲ發シ乙地ニ一ハ乙地ヲ發シ甲地ニ赴ムキ直チニ歸途ニ就キ午後三時ニ至リ甲地ヨリ9哩ノ處ニテ再會セリ兩車カ最初ニ會セシ處ハ甲地ヨリ何哩ナリヤ,但シ甲乙ノ距離27哩ナリ.

〔C〕ノ解答

22. 分針カ12時ノ處ニ在リシ時ニ時針ハ夫レヨリ$5h$分先キニ在リ所求ノ分ノ數ヲxトスレハx分ハ分針カ12時ノ處ヨリ進行シタル丈ケノ間タナリ此時ニ時針ハd分先キニ在リトスレハ$x=12(x-5h+d)$又d分後ヲニ在リトスレハ$x=12(x-5h-d)$.

之ニ由テ　分針カd分後ニアルキノ答ハ$\frac{12}{11}(5h-d)$,

分針カd分先ニアルキノ答ハ$\frac{12}{11}(5h+d)$.

23. 所求ノ分ヲxトスレハ三分前ノ時針ノ位置ハ10時ヨリ$\frac{1}{12}(x-3)$分ノ處ニアリ又6分後ノ分針ノ位置ハ12時ヨリ$x+6$分ノ處ニ在リ而シテ各反對ニアルカ故ニ時針ト分針ノ間タハ30分ナリ之ニ由テ

$$(x+6)+\left\{10-\frac{1}{12}(x-3)\right\}=30\qquad\therefore\ x=15,$$

之ニ由テ答ハ　10時15分.

24. 所求ノ分ヲxトスレハ今ノ時針ノ位置ハ8時ヨリ$\frac{x}{12}$ノ處ニアリ10分前ノ分針ノ位置ハ12時ヨリ$x-10$分ノ處ニアリ,

故ニ　$\frac{x}{12}+40-(x-10)=15$　$\therefore\ x=38\frac{2}{11}$,

之ニ由テ答ハ8時$38\frac{2}{11}$分.

25. 1哩 = 1760碼, 又所求ノ時間ヲx時トスレハ

$$30x+30x=\frac{44+44}{1760} \qquad \therefore \quad x=\frac{1}{1200}\text{時} = 3\text{秒}$$

26. 全距離ヲx哩トスレハ

$$\frac{x}{3\times10}+\frac{x}{3\times9}+\frac{x}{3\times8}=\frac{x}{2\times10}+\frac{x}{2\times8}-\frac{30}{60\times60}.$$ 答 18哩

27. 甲出發ノ車ハ三時間ニテ乙ヲ行キ乙ヨリ 27−9 即チ 18 哩戻リシカ故ニ毎時ノ速ハ (27+18)÷3=15 即チ 15 哩ナリ, 又乙車毎時ノ速ハ (27+9)÷3=12 即チ 12 哩ナリ.

$$\therefore \quad \frac{x}{15}=\frac{27-x}{12}.$$ 答 15哩

〔D〕

27. 壹士官アリ兵卒若干人ヲ以テ中空方陣ヲ作ルニ四面ヲ4層ニ列スレハ其各前面ノ人數ハ四面ヲ8層ニ列スルヨリモ16人多シ全兵員如何.

28. 兵卒若干人ヲ方陣ニ列セシニ其一邊ノ人數ハ各面ヲ4層ニ列スル中空方陣ヨリモ16人少ナシトイフ兵卒ノ人員如何

29. 兩人共ニ112斤ノ重サナル荷物ヲ持チテ滊車ニ乘リシニ車中若干斤丈ケノ重サハ賃金ヲ要セサレモ其制限ニ超過セシヲ以テ兩人ハ5志2片及ヒ9志10片ノ賃ヲ課セラレタリ若シ此荷物ヲ一人ニテ持ツトキハ19志2片ヲ課セラルヘシトイフ賃金ヲ免セラレタル重サ如何.

30. 某國ノ國債カ戰時ニ於テ其$\frac{1}{4}$ヲ增シ其後チ平和ノ時ニ至リ二千五百磅償却セリ此時ニ至リ國債ノ利子4分5厘ヨリ4分ニ下落セリ之ニ由テ戰時ノ前ト等額ノ利子ヲ拂ヘリ戰時前ノ國債ノ高如何.

〔D〕ノ解答

27. $(x+16)^2-(x+16-2\times4)^2=x^2-(x-8\times2)^2 \qquad \therefore \quad x=28,$

故ニ總人員 $=28^2-(28-8\times2)^2=640.$ 答 640人

28. $x^2=(x+16)^2-(x+16-4\times2)^2,$

$x^2-16x-192=0$ 即チ $(x-24)(x+8)=0 \quad \therefore \quad x-24=0,$

$\therefore \quad x=24.$ 答 576人

29. 一人ニテ免サレタル重サヲx斤トスレハ

$$\frac{5\frac{2}{12}+9\frac{10}{12}}{112-x-x}=\frac{19\frac{2}{12}}{112-x}, \qquad \therefore \quad x=20,$$ 答 20斤.

30. 戰時前ノ國債ノ高ヲx磅トスレハ

戰時ノ高 $=x+\frac{x}{4}$, 平和ノ時ノ高 $=x+\frac{x}{4}-25000000,$

$$\frac{4\cdot5}{100}x=\frac{4}{100}\left(x+\frac{x}{4}-25000000\right),$$ 答 二億磅.

第拾編

貳次方程式

解法

1. 貳次方程式 今ヤ代數學ノ内ニ於テ最モ大切ナル貳次方程式ノ講義ヲナスニ至レリ。

二次方程式ノ形ヲ $ax^2+bx+c=0$ トス。

此根ヲ求ムルニハ

〔第壹〕 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,$ 因子分割法ニ由テ

即チ $$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0,$$

即チ $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0,$$

即チ $$\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)=0,$$

$$\therefore\quad x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=0 \quad 或ハ \quad x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=0,$$

$$\therefore\quad x=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \quad 或ハ \quad -\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

之ヲ一ツニシテ記セハ $x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$

故ニ二次方程式ハ二ツノ根ヲ有ス

〔第貳〕 第壹ハ不便ナリ故ニ次ノ如クス,

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a},$$

$$\therefore\quad x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

即チ $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

$$\therefore\quad x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}},$$

$$\therefore\quad x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

〔第三〕 又次ノ如ク $ax^2+bx+c=0$ ニ $4a$ ヲ乗スレハ

$$4a^2x^2+4abx=-4ac,$$

即チ $$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac,$$

$$\therefore\quad 2ax+b=\pm\sqrt{(b^2-4ac)},$$

$$\therefore\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}.$$

2. 解法之例 ヲ次ニ示ス.

〔第壹例〕 $x^2-13x+42=0$ ヲ解セヨ.

$$x^2-13x+\left(\frac{13}{2}\right)^2=-42+\left(\frac{13}{2}\right)^2 \quad \therefore\quad x-\frac{13}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}},$$

即チ $$x=\frac{13}{2}\pm\frac{1}{2} \quad \therefore\quad x=7 \text{ 或ハ } 6.$$

〔第貳例〕 $3x^2-10x+6=0$ ヲ解セヨ.

$$x^2-\frac{10}{3}x=-2 \quad \therefore\quad x^2-\frac{10}{3}x+\left(\frac{5}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2-2,$$

$$\therefore\quad x-\frac{5}{3}=\pm\frac{\sqrt{7}}{3} \quad \therefore\quad x=\frac{5\pm\sqrt{7}}{3}.$$

〔第三例〕 $a(x^2+1)=x(a^2+1)$ ヲ解セヨ.

$$x^2+1=\frac{x}{a}(a^2+1) \qquad \therefore \quad x^2-\frac{x}{a}(a^2+1)=-1,$$

即チ $$x^2-\frac{x}{a}\left(a^2+1\right)+\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2=\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2-1,$$

$$\therefore \quad x-\frac{a^2+1}{2a}=\pm\sqrt{\frac{(a^2+1)^2-4a^2}{4a^2}},$$

$$\therefore \quad x=\frac{a^2+1\pm(a^2-1)}{2a}=a \text{ 或ハ } \frac{1}{a}.$$

4. 定理 貳次方程式ノ根ハ二ツヨリ多カラス.

何トナレハ若シ $ax^2+bx+c=0$ ノ根カ α, β, γ ノ如ク三ツアルモノト假定スレハ

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \qquad (1)$$
$$a\beta^2+b\beta+c=0 \qquad (2)$$
$$a\gamma^2+b\gamma+c=0 \qquad (3)$$

(1) ヨリ (2) ヲ減スレハ $a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0,$

即チ $$(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0.$$

假定ニヨリ α, β, γ ハ相異ナル値トス故ニ $\alpha-\beta$ ハ 0 ナラス

故ニ $$a(\alpha+\beta)+b=0 \qquad (4)$$

又 (2) (3) ヨリ $$a(\beta+\gamma)+b=0 \qquad (5)$$

(4) ヨリ (5) ヲ減スレハ $a(\alpha-\gamma)=0,$

又 $\alpha-\gamma$ ハ 0 ニアラス故ニ $a=0$ トセサルヘカラス,

$a=0$ ナレハ (4) ヨリ $b=0$ 故ニ (1) ヨリ $c=0.$

之ニ由テ二次方程式カ三根アルトキハ $ax^2+bx+c=0$ ノ各係數ハ 0 トナリ恒同式トナル.

之ニ由テ二次方程式ノ根ハ二ツヨリ多カラス.

5. 根之性質 二次方程式ノ二根ノ性質ハ b^2-4ac ノ値ノ變化ニアルナリ此處ニテハ概畧ヲ說明スヘシ.

$ax^2+bx+c=0$ ノ兩根ハ

$$-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \text{ 或ハ } -\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

〔第壹〕 $b^2-4ac>0$ ナルトキ $\sqrt{(b^2-4ac)}$ ハ實數ナルカ故ニ此方程式ハ不等ノ二根ヲ有ス.

〔第二〕 $b^2-4ac=0$ ナルトキ $\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}$ ハ 0 ナル故ニ此方程式ノ二根ハ等根ナリ.

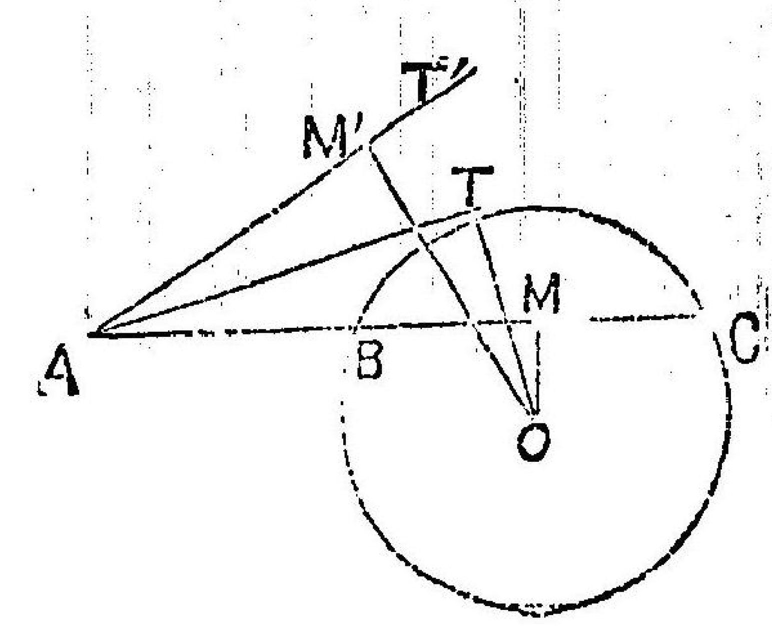
〔第三〕 $b^2-4ac<0$ ナルトキ $\sqrt{b^2-4ac}$ ハ負數ノ平方根ナルカ故ニ此方程式ノ二根ハ虛根ナリ.

5. 幾何學之解 O ヲ圓ノ中心トシ A ヲ圓外ノ一点トシ ABC ヲ割線トシ MO ヲ BC ノ垂線トシ AT ヲ切線トス,

而シテ $AM=-\dfrac{b}{2a}, \quad BM=CM=\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}},$

然ルトキ $AC=AM+CM=-\dfrac{b}{2a}+\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}$ 即チ x ノ一根,

$$AB=AM-BM=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \text{ 即チ } x \text{ ノ一根.}$$



然ルトキ $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ハ AC 或ハ AB ナリ.

〔第壹〕 TO $>$ MO ナルトキ x ノ二根ハ AC, AB ナル不等ノ兩實根ナリ.

〔第貳〕 TO $=$ MO ナルトキ x ハ AT ナル一根ヲ有ス.

〔第三〕 TO $<$ M′O ナルトキ x ノ兩根ハ AT′ トナリ虛根ナリ.

例題三拾五

次ノ各方程式ヲ解セヨ.

1. $9x^2-24x+16=0.$
2. $5(x^2+4)=4(x^2+9).$
3. $3x^2=8x+3.$
4. $16x^2+16x+3=0.$
5. $(x-1)^2+(x-2)^2=0$
6. $x^2-22x+171=0.$
7. $4x^2-40x+107=0$
8. $107x^2-40x+4=0.$
9. $a^2x^2-2a^3x+a^4=0.$
10. $(px+q)^2+(qx+p)^2=0.$
11. $(x-a)^2+(x-b)^2=a^2+b^2.$
12. $4(x-a)^2=9(x-b)(a-b).$
13. $x^2+4ax=(b-c)^2+4(bc-a^2).$
14. $x^2+(b-c)x=a^2+bc+ca+ab.$
15. $x^2+(a-x)^2=(a-2x)^2$
16. $x^2+(a-2x)^2=(a-3x)^2.$
17. $2(x-2a)^2=(3x-2b)(3a-b).$
18. $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0.$
19. $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0.$
20. $(a-x)^3+(x-b)^3=(a-b)^3.$
21. $(x-a+2b)^3-(x-2a+b)^3=(a+b)^3.$
22. $x^2+1=x\left(\sqrt{\dfrac{m}{n}}+\sqrt{\dfrac{n}{m}}\right).$
23. $a^2\dfrac{x-a}{a-b}+b^2\dfrac{x-b}{b-a}=x^2.$
24. $(a+b)(abx^2-2)=(a^2+b^2)x.$
25. $x^2-2ax+a^2-b^2-c^2=0$ ノ根ハ實根ナリ.
26. $(a-b+c)x^2+4(a-b)x=b+c-a$ ノ根ハ實根ナリ.
27. $x^2-15-m(2x-8)=0$ カ等根ナルヰ m ノ値如何.
28. $x^2-2x(1+3m)+7(3+2m)=0$ カ等根ナルヰ m ノ値如何.

29. $x^2-bx=\dfrac{m-1}{m+1}(ax-c)$ ノ兩根カ値相等シクシテ符號カ反對ナルヰ m ノ値如何.
30. $x^2(b^2+b'^2)+2x(ab+a'b')+a^2+a'^2=0$ カ實根ヲ有スルヰ其兩根ハ相等シ.

例題三拾五解答

1. $\dfrac{4}{3}.$　　2. $\pm 4.$　　3. $-\dfrac{1}{3},\quad 3.$

4. $16x^2+16x+4=1$ 即チ $(4x+2)^2=1$ $\therefore$ $4x+2=\pm 1,$

之ニ由テ $x=-\dfrac{1}{4}$ 或 $-\dfrac{3}{4}.$　　5. $\dfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{-1}).$

6. $11\pm\sqrt{-50}.$

7. $4x^2-40x+100=-7$ $\therefore$ $2x-10=\pm\sqrt{-7},$

之ニ由テ $x=5\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{-7}.$

8. 原方程式ニ107ヲ乘スレハ $(107x)^2-40(107x)+428=0,$

即チ $(107x)^2-40(107x)+400=-28,$ $\therefore$ $107x-20=\pm\sqrt{-28},$

之ニ由テ $x=\dfrac{20\pm\sqrt{-28}}{107}.$　　9. $a.$

10. 原方程式ノ括弧ヲ解キテ括レハ

$(p^2+q^2)x^2+4pqx+(p^2+q^2)=0$ 之ニ p^2+q^2 ヲ乘スレハ

$\{(p^2+q^2)x\}^2+4pq\{(p^2+q^2)x\}+(p^2+q^2)^2=0,$

即 $\{(p^2+q^2)x\}^2+4pq\{(p^2+q^2)x\}+4p^2q^2=4p^2q^2-(p^2+q^2)^2,$

$\therefore$ $(p^2+q^2)x+2pq=\pm\sqrt{-(p^4-2p^2q^2+q^4)}$

之ニ由テ $x=\dfrac{-2qp\pm(p^2-q^2)\sqrt{-1}}{p^2+q^2}.$

12. $4(x-a)^2=9(x-b)\{-(x-a)+(x-b)\},$

$\therefore$ $4(x-a)^2+9(x-a)(x-b)-9(x-b)^2=0,$

即チ $\{4(x-a)-3(x-b)\}\{(x-a)+3(x-b)\}=0,$

即チ $(x-4a+3b)(4x-a-3b)=0$ $\therefore$ $x=4a-3b$ 或 $\dfrac{a+3d}{4}$.

13. $x^2+4ax+4a^2=(b-c)^2+4bc,$

之ニ由テ $x+2a=\pm(b+c),$ $\therefore$ $x=-2a\pm(b+c).$

14. $x^2+(b-c)x=a^2+a(b+c)+bc,$

即チ $x^2+(b-c)x+\dfrac{(b-c)^2}{4}=a^2+a(b+c)+bc+\dfrac{(b-c)^2}{4}$

$\therefore$ $x+\dfrac{b-c}{2}=\pm\sqrt{a^2+a(b+c)+\dfrac{(b+c)^2}{4}},$

$\therefore$ $a=-\dfrac{b-c}{2}\pm\left\{a+\dfrac{b+c}{2}\right\}=a+c$ 或ハ $-a-b.$

15. $x^2+(a-x)^2=\{(a-x)-x\}^2,$

$\therefore$ $0=-2(a-x)x$ 之ニ由テ $x=a$ 或ハ $0.$

16. $x=\dfrac{1}{2}a$ 或ハ $0.$

17. 原方程式ニ2ヲ乘スレバ $4(x-2a)^2=(3x-2b)(6a-2b),$

即チ $4(x-2a)^2=(3x-2b)\{(3x-2b)-3(x-2a)\},$

$\therefore$ $4(x-2a)^2+3(x-2a)(3x-2b)-(3x-2b)^2=0,$

即チ $\{4(x-2a)-(3x-2b)\}\{(x-2a)+(3x-2b)\}=0,$

即チ $(x-8a+2b)(4x-2a-2b)=0$ $\therefore$ $x=8a-2b$ 或 $\dfrac{a+b}{2}.$

18. $(b-c)x^2+\{-(b-c)-(a-b)\}x+(a-b)=0,$

即チ $(b-c)x(x-1)-(a-b)(x-1)=0,$

即チ $(x-1)\{(b-c)x-(a-b)\}=0$ $\therefore$ $x=1$ 或 $\dfrac{a-b}{b-c}.$

19. $a(b-c)x^2+\{-a(b-c)-c(a-b)\}x+c(a-b)=0,$

即チ $a(b-c)x(x-1)-c(a-b)(x-1)=0,$

即チ $(x-1)\{a(b-c)x-c(a-b)\}=0$ $\therefore$ $x=1$ 或 $\dfrac{c(a-b)}{a(b-c)}.$

20. $(a-x)^3+(x-b)^3=\{(a-x)+(x-b)\}^3,$

即チ $0=3(a-x)(x-b)\{(a-x)+(x-b)\},$ $\therefore$ $x=a$ 或 $b.$

21. $(x-a+2b)^3-(x-2a+b)^3=\{(x-a+2b)+(x+2a-b)\}^3,$

ヨリ答ヲ得,即チ $x=a-2b$ 或 $-2a+b.$

22. $x^2-x\left(\sqrt{\dfrac{m}{n}}+\sqrt{\dfrac{n}{m}}\right)+1=0$ 即チ $\left(x-\sqrt{\dfrac{m}{n}}\right)\left(x-\sqrt{\dfrac{n}{m}}\right)=0,$

$\therefore$ $x=\sqrt{\dfrac{m}{n}}$ 或 $\sqrt{\dfrac{n}{m}}.$

23. $\dfrac{a^2(x-a)}{a-b}-\dfrac{b^2(x-b)}{a-b}=x^2,$ 即チ $\dfrac{x(a^2-b^2)-(a^3-b^3)}{a-b}=x^2,$

即チ $x(a+b)-(a^2+ab+b^2)=x^2,$

$\therefore$ $x^2-x(a+b)+(a^2+ab+b^2)=0$

$\therefore$ $x=\dfrac{a+b}{2}\pm\dfrac{\sqrt{(a+b)^2-4(a^2+ab+b^2)}}{2}$

即チ $x=\dfrac{1}{2}\{a+b\pm\sqrt{-(3a^2+2ab+3b^2)}\}.$

24. $ab(a+b)x^2-(a^2+b^2)x-2(a+b)=0,$

即チ $ab(a+b)x^2-\{(a+b)^2-2ab\}x-2(a+b)=0,$

即チ $(a+b)x\{abx-(a+b)\}+2\{abx-(a+b)\}=0,$

即チ $\{abx-(a+b)\}\{(a+b)x+2\}=0,$

$\therefore$ $x=\dfrac{a+b}{ab}$ 或 $\dfrac{-2}{a+b}.$

25. $x^2-2ax+(a^2-b^2-c^2)$ ニ於テ4.章ニヨリ

$(-2a)^2-4\times1\times(a^2-b^2-c^2)$ 即チ $4(b^2+c^2)$ ハ正ナリ故ニ0ヨリ大ナリ故ニ二實根ヲ有ス.

26. $\{4(a-b)\}^2-4(a-b+c)(a-b-c)$

即チ $16(a-b)^2-4(a-b)^2+4c^2$

即チ $4\{2(a-b)^2+c^2\}>0$

故ニ x ハ不等ノ實根ナリ

27. $x^2-2mx+(8m-15)=0$,　4. 章ニ由テ

$4m^2-4(8m-15)=0$　$\therefore\ m=3$ 或ハ 5.

28. $x^2-2x(1+3m)+7(3+2m)=0$　ニ於テ

$4(1+3m)^2-28(3+2m)=0$　$\therefore\ m=2$ 或 $-\frac{10}{9}$.

29. $x^2-x\left(b+a\frac{m-1}{m+1}\right)+c\frac{m-1}{m+1}=0$,

$ax^2+bx+c=0$ 即チ $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ ニ於テ $\frac{b}{a}=0$

ナルキハ $x^2+\frac{c}{a}=0$ ニシテ $x=+\sqrt{-\frac{c}{a}}$ 或 $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ ナリ,

故ニ此例ニ於テ $b+a\frac{m-1}{m+1}=0$,　$\therefore\ m=\frac{a-b}{a+b}$.

30. 原方程式カ實根ナルキハ

$4(ab+a'b')^2-4(b^2+b'^2)(a^2+a'^2)$ ハ正ナラサルヘカラス,

即チ $4\{-a^2b'^2+2aba'b'-a'^2b^2\}$ ハ正ナラサルヘカラス,

即チ $-4(ab'-a'b)^2$ ハ正ナラサルヘカラス,

然ルニ $(ab'-a'b)^2$ ハ正ナリ故ニ 0 トセサルヘカラス,

之ニ由テ等根ナルヿヲ知ル.

根及係數之關係

6. 根及係數之關係

$ax^2+bx+c=0$ ニ於テ x ノ兩根ヲ α, β トスレハ

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$ ナルカ故ニ

$$\alpha=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}},\qquad \beta=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}},$$

$$\therefore\ \alpha+\beta=\left(-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)+\left(-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)=-\frac{b}{a},$$

又 $$\alpha\beta=\left(-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\left(-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)$$

$$=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

之ニ由テ $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ ノ二根カ α, β ナルキ

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

故ニ二次方程式ニ於テ x^2 ノ係數カ 1 ナルキ

〔第壹〕 二根ノ和ハ x ノ係數ノ符號ヲ變シタルモノニ等シ,

〔第貳〕 二根ノ積ハ第三項ニ等シ.

7. 反法

方程式ヲ知リテ根ヲ求ムルノ反法即チ根ヲ知リテ方程式ヲ求ムルノ法ハ容易ナルヿ次ノ如シ.

α 及ヒ β ヲ二根トスル方程式ハ　$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$,

之ヲ求ムルニハ $(x-\alpha)(\alpha-\beta)=0$ トスヘシ

5, -6, 1 ヲ三根トスル方程式ハ

$$(x-5)(x+6)(x-1)=0,$$

即チ $$x^3-31x+30=0.$$

8. 例解

$ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α, β トスレハ

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

此積ト和ノ關係ヨリ和ト差ノ關係ヲ導ヒクヘシ,

即チ $$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2=\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a},$$

$$\therefore\ \alpha-\beta=\pm\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{a}.$$

〔第壹例〕 α^2, β^2 ノ二根トスル方程式ヲ作レ.

$(x-\alpha^2)(x-\beta^2)=0$ 即チ $x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0$,

即チ $x^2-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}x+(\alpha\beta)^2=0$,

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ ナルカ故ニ

$$x^2-\left\{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right\}x+\frac{c^2}{a^2}=0,$$

∴ $a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0$ ハ所求ノ方程式ナリ.

〔別法〕 $ax^2+bx+c=0$ ヲ轉項シ

$ax^2+c=-bx$ 之ヲ平方ニスレハ

$a^2x^4+2acx^2+c^2=b^2x^2$,

即チ $a^2(x^2)^2-(b^2-2ac)x^2+c^2=0$,

即チ原方程式ノ x カ所求ノ方程式ニテハ x^2 トナリタリ.

〔第貳例〕 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α, β トスレハ $\alpha^3-\beta^3$ ノ値如何.

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$.

∴ $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\}$

$$=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}}\left\{\frac{b^2}{a^2}-\frac{3c}{a}\right\}=\frac{b^2-3ac}{a^3}\sqrt{(b^2-4ac)}.$$

〔第三例〕 α β ヲ $ax^2+bx+c=0$ ノ二根トスル井

$\dfrac{1}{(b+a\alpha)^2}+\dfrac{1}{(b+a\beta)^2}$ ノ値如何.

$x=\alpha$ 或ハ β ナルカ故ニ $a\alpha^2+b\alpha+c=0$, $a\beta^2+b\beta+c=0$,

∴ $b+a\alpha=-\dfrac{c}{\alpha}$, $b+a\beta=-\dfrac{c}{\beta}$,

$$\therefore \frac{1}{(b+a\alpha)^2}+\frac{1}{(b+a\beta)^2}=\frac{1}{\frac{c^2}{\alpha^2}}+\frac{1}{\frac{c^2}{\beta^2}}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{c^2}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{c^2}=\frac{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}}{c^2}=\frac{b^2-2ac}{a^2c^2}.$$

例題三拾六

1. $7\pm2\sqrt{5}$ ヲ貳根トスル方程式ヲ作レ.

2. $a\pm\sqrt{b}$ ヲ貳根トスル方程式ヲ作レ.

3. $x^2+px+q=0$ ノ二根ヲ α, β トシ
$x^2+Px+Q=0$ ノ二根ヲ $\alpha+\delta$, $\beta+\delta$ トスレハ
$P^2-4Q=p^2-4q$.

4. $x^2-14x+5=0$ ノ兩根ノ平方ヲ兩根トスル方程式ハ
$x^2-186x+25=0$ ナリ.

5. α, β ヲ $5x^2-12x+2=0$ ノ兩根トスレハ
$\alpha^2+\beta$, $\alpha+\beta^2$ ノ値如何.

6. $ax^2+bx+c=0$ ノ兩根ノ立方ヲ兩根トスル方程式ヲ作レ.

7. $ax^2+bx+c=0$ ノ兩根ヲ α, β トスレハ
$\alpha^2+\beta^2$, $-(\alpha-\beta)^2$ ヲ兩根トスル方程式如何

8. $ax^2+bx+c=0$ ノ壹根カ他ノ壹根ノ $\dfrac{n}{m}$ ナル井
$mnb^2=(m+n)^2ac$.

9. $ax^2+2bx+c=0$, $a'x^2+2b'x+c'=0$ カ唯壹ツノ等根ヲ有スル井 b^2-ac, $b'^2-a'c'$ ハ完平方數ナリ.

10. α, β ヲ $ax^2+bx+c=0$ ノ兩根トスレハ
$\alpha^4+\beta^4$, $-(\alpha+\beta)(\alpha^3+\beta^3)$ ヲ兩根トスル方程式ハ
$a^8x^2-a^5c(2ac-b^2)x+b^2(a^2c^3-14a^2b^2c^2+7ab^4-b^6)=0$.

11. $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$ カ共通ノ壹根ヲ有スル井
他ノ貳根ノ積ハ $\dfrac{c}{b}\left(\dfrac{ac-b^2}{bc-a^2}\right)^2$ ナリ.

12. $\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c}=0$ ノ二根ヲ α, β トスレバ

$$(a-\alpha)(\beta-a)=\frac{A(a-b)(a-c)}{A+B+C}.$$

13. $(x^2+1)(a^2+1)=max(ax-1)$ ノ兩根ヲ α, β トスレバ

$$(a^2+1)(\beta^2+1)=m\alpha\beta(\alpha\beta-1).$$

14. $\dfrac{a}{(1-m)(1-x)}+b+\dfrac{c}{mx}=0$ ノ兩根ヲ α, β トスレバ

$$\frac{a}{(1-\alpha)(1-\beta)}+b+\frac{c}{\alpha\beta}=0.$$

15. $a^2+a\left(mx+\dfrac{1}{mx}\right)=\dfrac{x}{m}+\dfrac{m}{x}+1$ ノ兩根ヲ α, β トスレバ

$$a^2+a\left(\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}\right)=\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{m\alpha}+\frac{1}{m\beta}=-a.$$

16. $\dfrac{(1-m^2)(1-x^2)}{b-c}+\dfrac{4mx}{c-a}=\dfrac{(1+m^2)(1+x^2)}{a-b}$ ノ兩根ヲ α, β トスレバ

$$\frac{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}{b-c}+\frac{4\alpha\beta}{c-a}=\frac{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}{a-b}.$$

17. $x^2+p_1x+q=0,\ \ x^2+p_2x+q=0,\ \ x^2+p_3x+q=0$ ノ各二根ガ順次ニ $a, b;\ ma, \dfrac{b}{m};\ \dfrac{a}{m},\ mb$ ナルキ

$$p_1^2(p_1^2-4q)+(p_2+p_3)^2q=p_1^2p_2p_3.$$

18. $x^2+px+q=0$ ノ第壹根ガ $x^2+ax+b=0$ ノ一根ナルキ其第二根ハ

$x^2+(2p-a)x+p^2-ap+b=0$ ノ一根ナルコヲ示セ。

19. $x^2-p_1x+q_1=0,\ x^2-p_2x+q_2=0,\ x^2-p_3x+q_3=0$ ガ共通壹根ヲ有スルキ $p_1^2+p_2^2+p_3^2+4(q_1+q_2+q_3)=2(p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)$.

例題三拾六答解

1. $x^2-14x+29=0.$　　2. $x^2-2ax+a^2-b=0.$

3. $\alpha+\beta=-p,\ \ \alpha\beta=q$ ナルガ故ニ

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-p)^2-4q$ 即チ $(\alpha-\beta)^2=p^2-4q.$

又 $(\alpha+\delta)+(\beta+\delta)=-P,\ \ (\alpha+\delta)(\beta+\delta)=Q$ ナルガ故ニ同法ニヨリ $\{(\alpha+\delta)-(\beta+\delta)\}^2=P^2-4Q,$

即チ　$(\alpha-\beta)^2=P^2-4Q.$

4. $x^2-14x+5=0$ ノ兩根ヲ α, β トスレバ

$\alpha+\beta=14,\ \ \alpha\beta=5.$

又 α^2, β^2 ヲ兩根トスル方程式ハ $(x-\alpha^2)(x-\beta^2)=0,$

即チ　$x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0,$

即チ　$x^2-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}x+(\alpha\beta)^2=0,$

即チ　$x^2-\{14^2-2\times5\}x+(5)^2=0,$

$\therefore\ \ x^2-186x+25=0.$

5. $\alpha+\beta=\dfrac{12}{5}$ 及ビ $\alpha\beta=\dfrac{2}{5}.$

又 $(\alpha^2+\beta)+(\alpha+\beta^2)=(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$$=\frac{12}{5}+\left(\frac{12}{5}\right)^2-2\times\frac{2}{5}=\frac{184}{25},$$

及ビ $(\alpha^2+\beta)-(\alpha+\beta^2)=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}(\alpha+\beta-1)$

$$=\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2-4\times\frac{2}{5}}\left(\frac{12}{5}-1\right)=\frac{14}{25}\sqrt{26},$$

$$\therefore\ \ \alpha^2+\beta=\frac{1}{2}\left(\frac{184}{25}+\frac{14}{25}\sqrt{26}\right)=\frac{1}{25}(92+7\sqrt{26}),$$

$$\alpha+\beta^2=\frac{1}{2}\left(\frac{184}{25}-\frac{14}{25}\sqrt{26}\right)=\frac{1}{25}(92-7\sqrt{26}).$$

6. $a^3x^2+b(b^2-3ac)x+c^3=0.$

7. $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\quad \alpha\beta=\dfrac{c}{a},$ 而シテ所求ノ方程式ハ

$$\{x-(\alpha^2+\beta^2)\}\{x+(\alpha-\beta)^2\}=0,$$

即チ $x^2-\{(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha-\beta)^2\}x-(\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta)^2=0,$

即チ $x^2-2\alpha\beta x-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=0,$

$$\therefore\quad x^2-\frac{2c}{a}x-\left\{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right\}\left\{\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}\right\}=0,$$

即チ $a^4x^2-2a^3cx-(b^2-2ac)(b^2-4ac)=0.$

8. 二根ヲ $m\alpha,\ n\alpha$ トスヘシ.

9. $ax^2+2bx+c=0$ ノ二根ヲ α,β トシ

$a'x^2+2b'x+c'=0$ ノ二根ヲ α,γ トスレハ

$\alpha+\beta=-\dfrac{2b}{a},\quad \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ 即チ $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\dfrac{4b^2}{a^2}-\dfrac{4c}{a},$

即チ $\alpha-\beta=\dfrac{2}{a}\sqrt{(b^2-ac)}$ 同様ニ $\alpha-\gamma=\dfrac{2}{a'}\sqrt{(b'^2-a'c')},$

之ニ由テ $\beta-\gamma=(\alpha-\gamma)-(\alpha-\beta)$

$$=\frac{2}{a'}\sqrt{(a'-b'c')}-\frac{2}{a}\sqrt{(a^2-bc)}.$$

題意ニヨリ $\beta-\gamma$ ハ 0 ナラスシテ有理ナリ何トナレハ

$\beta-\gamma=(\alpha+\beta)-(\alpha+\gamma)=-\dfrac{2b}{a}-\left(-\dfrac{2b'}{a'}\right)$ ナルヲ以テナリ,

之ニ由テ $\dfrac{2}{a'}\sqrt{(a'^2-b'c')}-\dfrac{2}{a}\sqrt{(a^2-bc)}$ ハ有理ナラサルヘカラス

故ニ $a'^2-b'c'\quad a^2-bc$ ハ完平方数ナリ.

10. $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\quad \alpha\beta=\dfrac{c}{a},$ 所求ノ方程式ハ

$$\{x-(\alpha^4+\beta^4)\}\{x+(\alpha+\beta)(\alpha^3+\beta^3)\}=0,$$

即チ $x^2+\{(\alpha+\beta)(\alpha^3+\beta^3)-(\alpha^4+\beta^4)\}x-(\alpha+\beta)(\alpha^3+\beta^3)(\alpha^4+\beta^4)=0,$

即チ $x^2+\alpha\beta\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}x$

$$-(\alpha+\beta)^2\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\}\{(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2\}=0,$$

即チ $x^2+\alpha\beta\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}x$

$$-(\alpha+\beta)^2\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\}\{[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]^2-2\alpha^2\beta^2\}=0,$$

$$\therefore\quad x^2+\frac{c}{a}\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)x-\frac{b^2}{a^2}\left\{\frac{b^2}{a^2}-\frac{3c}{a}\right\}\left\{\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)^2-\frac{2c^2}{a^2}\right\}=0,$$

即チ $x^2+\dfrac{c}{a^3}(b^2-2ac)x-\dfrac{b^2}{a^3}(b^2-3ac)(b^4-4ab^2c+2a^2c^2)=0.$

12. 原方程式ノ分母ヲ払ヒ次ノ如クス,

$$A(x-b)(x-c)+B(x-c)(x-a)+C(x-a)(x-b)=0,$$

$$\therefore\quad x^2-\frac{A(b+c)+B(c+a)+C(a+b)}{A+B+C}x+\frac{bcA+caB+abC}{A+B+C}=0,$$

之ニ由テ $\alpha+\beta=\dfrac{A(b+c)+B(c+a)+C(a+b)}{A+B+C},$

及ヒ $\alpha\beta=\dfrac{bcA+caB+abC}{A+B+C}.$

$$\therefore\quad (\alpha-a)(\beta-a)=\alpha\beta-a(\alpha+\beta)+a^2$$

$$=\frac{bcA+caB+abC}{A+B+C}-\frac{a\{A(b+c)+B(c+a)+C(a+b)\}}{A+B+C}+a^2$$

$$=\frac{A\{a^2-a(b+c)+bc\}}{A+B+C}=\frac{A(a-b)(a-c)}{A+B+C}.$$

13. 原方程式ヲ變スレハ

$$x^2+\frac{max}{a^2+1-ma^2}+\frac{a^2+1}{a^2+1-ma^2}=0,$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta=-\frac{ma}{a^2+1-ma^2},\qquad \alpha\beta=\frac{a^2+1}{a^2+1-ma^2},$$

$\therefore \quad (a^2+1)(\beta^2+1)=(a\beta-1)^2+(a+\beta)^2$

$$=\left(\frac{a^2+1}{a^2+1-ma^2}-1\right)^2+\frac{m^2a^2}{(a^2+1-ma^2)^2}$$

$$=\frac{m^2a^4}{(a^2+1-ma^2)^2}+\frac{m^2a^2}{(a^2+1-ma^2)^2}$$

$$=m.\frac{a^2+1}{a^2+1-ma^2}\left(\frac{ma^2}{a^2+1-ma^2}\right)$$

$$=m.\frac{a^2+1}{a^2+1-ma^2}\left(-1+\frac{a^2+1}{a^2+1-ma^2}\right)=ma\beta(-1+a\beta).$$

14. モ同様ナリ.

15. 分母ヲ拂ヘハ $ma^2x+a(m^2x^2+1)=x^2+m^2+mx$,

即チ $\quad x^2+\dfrac{m(a^2-1)x}{am^2-1}+\dfrac{a-m^2}{am^2-1}=0$,

$\therefore \quad a+\beta=-\dfrac{m(a^2-1)}{am^2-1}, \qquad a\beta=\dfrac{a-m^2}{am^2-1}$,

$\therefore \quad a^2+a\left(a\beta+\dfrac{1}{a\beta}\right)=\left(a+a\beta\right)\left(a+\dfrac{1}{a\beta}\right)-1$

$$=\left(a+\frac{a-m^2}{am^2-1}\right)\left(a+\frac{am^2-1}{a-m^2}\right)-1=\frac{m^2(a^2-1)^2}{(am^2-1)(a-m^2)}-1$$

$$=-\frac{m(a^2-1)}{am^2-1}.\ \frac{m(a^2-1)}{am^2-1}\div\frac{a-m^2}{am^2-1}-1=(a+\beta).(a+\beta)\div a\beta-1$$

$$=\frac{(a+\beta)^2}{a\beta}-1=\frac{a}{\beta}+\frac{\beta}{a}+1.$$

16. 以下ノ例題ハ讀者研究ノ爲メ殘シ置ケリ.

極大及極小

9. 貳次三項式 x ノ壹次貳項 $ax+b$ ノ如キハ x ヲ任意ノ實數値ヲ用ヒテ意ノ如キ値ヲ得ヘシ.

例ヘハ $ax+b=\lambda$ トスレハ $x=\dfrac{\lambda-b}{a}$ ニシテ λ カ如何ナル實數値トナルモ之ニ相應スル x ノ實數値ヲ得ヘシ.

x ノ貳次三項式 ax^2+bx+c ノ値ハ x ノ任意ノ實數値ヲ用フルモ任意ノ値ヲ得ル能ハス即チ或制限シタル値ヲ得ルノミナリ.

例ヘハ $ax^2+bx+c=\lambda$ トスレハ

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac-4a\lambda)}}{2a},$$

而シテ x カ實數ナルニハ $b^2-4ac-4ac\lambda\nless0$ ナルコヲ要ス故ニ此制限丈ケノ x ノ値ヲ代用セサレハ不合理ナリ.

10. 極小 ax^2+bx+c ノ極小値ヲ求ム但シ a ヲ正數且トス.

$$ax^2+bx+c=\lambda \text{ トス}$$

即チ
$$ax^2+bx+(c-\lambda)=0,$$

此方程式ニ於テ x カ實數ナルカ爲メニハ

$$b^2-4a(c-\lambda)\nless0$$

即チ
$$\frac{b^2-4ac}{4a}+\lambda\nless0,$$

$$\therefore \quad \lambda\nless\frac{4ac-b^2}{4a},$$

之ニ由テ λ ノ値ハ $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ ヨリ小ナル能ハス.

故ニ $\lambda=\frac{4ac-b^2}{4a}$ ハ極小ナリ.

11. 餘論 ax^2+bx+c ガ極小ナル時 x ノ値ヲ求ム.

前章ニヨリ $ax^2+bx+c=\lambda=\frac{4ac-b^2}{4a}$,

$$\therefore\ 4a^2x^2+4abx+b^2=0$$

$$\therefore\ 2ax+b=0$$

$$\therefore\ x=-\frac{b}{2a}.$$

12. 極大 $c+bx-ax^2$ ノ極大値ヲ求ム但シ a ハ正數ナリ.

$c+bx-ax^2=\lambda$ トスレバ

$$ax^2-bx+(\lambda-c)=0,$$

x ガ實數ナル時 $b^2-4a(\lambda-c)\nless 0$,

$$\therefore\ \frac{b^2+4ac}{4a}-\lambda\nless 0,$$

$$\therefore\ \lambda\ngtr\frac{b^2+4ac}{4a}.$$

之ニ由テ λ ハ $\frac{b^2+4ab}{4a}$ ヨリ大ナラズ,

故ニ $\lambda=\frac{b^2+4ac}{4a}$ ハ極大値ナリ.

13. 餘論 $c+bx-ax^2$ ガ極大ナル時 x ノ値ヲ求ム.

前章ニヨリ $c+bx-ax^2=\lambda=\frac{b^2+4ac}{4a}$,

$$\therefore\ 4a^2x^2-4abx+b^2=0$$

$$\therefore\ 2ax-b=0$$

$$\therefore\ x=\frac{b}{2a}.$$

14. 注意 貳次三項式ガ極大或ハ極小ナル時ハ其三項式ニテナレル方程式ガ等根ナル時ナリ.

例ヘバ $ax^2+bx+c=0$ ガ等根ナル時 $x=-\frac{b}{2a}$,

同様ニ $c+bx-ax^2=0$ ガ等根ナル時 $x=\frac{b}{2a}$.

15. 應用之例 次ニ極大及ヒ極小ノ例ヲ示ス.

〔第壹例〕 $x^2-7x+12$ ノ極小値ヲ求ム.

$x^2-7x+12=\lambda$ トスレバ $x^2-7x+(12-\lambda)=0$,

x ガ實根ナル時 $7^2-4(12-\lambda)\nless 0$ 即チ $\lambda\nless-\frac{1}{4}$,

故ニ $x^2-7x+12$ ノ極小値ハ $-\frac{1}{4}$ ナリ.

〔第貳例〕 $6x^2+11x+3$ ノ極小値ヲ求ム.

$6x^2+11x+3=\lambda$ トスレバ $6x^2+11x+(3-\lambda)=0$,

x ガ實根ナル時 $11^2-4\times6(3-\lambda)\nless 0$ 即チ $\lambda\nless-\frac{49}{24}$,

故ニ $6x^2+11x+3$ ノ極小値ハ $-\frac{49}{24}$ ナリ.

〔第三例〕 $23-2x-3x^2$ ノ極大値ヲ求ム.

$23-2x-3x^2=\lambda$ トスレバ $3x^2+2x+(\lambda-23)=0$,

x ガ實根ナル時 $2^2-4\times3(\lambda-23)\nless 0$, 即チ $\lambda\ngtr 23\frac{1}{3}$,

故ニ $23-2x-3x^2$ ノ極大値ハ $23\frac{1}{3}$ ナリ.

例題三拾七

1. $3x^2+5x+3$ ノ極小値ヲ求ム.
2. x^2-5x+7 ノ極小値ヲ求ム.
3. $6x-x^2-4$ ノ極大値ヲ求ム.

4. 長サaナル直線ヲ貳分シ其各分ノ積ヲ最大ナラシメヨ.

5. 直角三角形アリ貳邊ノ和aニシテ斜邊カ極小ナルトキ其各貳邊ノ長サ各如何.

6. 正方形ノ壹邊ノ長サヲaトシ此各邊ニ角点ヲ置キテ最小ナル正方形ヲ作レ.

7. 既知三角形ノ底邊ニ壹邊ヲ置キ他ノ貳邊上ニ角点ヲ置キテ最大矩形ヲ作レ.

8. 半徑ノ長サRナル圓内ニ最大矩形ヲ内切セヨ.

9. ABヲ圓ノ弦トシ圓周上ノ一点CヨリABニ垂線CDヲ作リAD=BDトス然ルトキ圓ノ半徑ノ長サヲrトスレハABトCDノ差極大ナルトキCDノ長サ如何.

例題三拾七答解

1. $\frac{11}{12}$. 2. $\frac{3}{4}$. 3. 5.

4. 壹分ヲxトシ他ノ壹分ヲaトス而シテ極大積ヲλトスレハ $x(a-x)=\lambda$ 即チ $x^2-ax+\lambda=0$,

之ニ由テ $a^2-4\lambda\nless 0$ ∴ $\lambda\ngtr\frac{a^2}{4}$,

之ニ由テ極大積ハ $\frac{a^3}{4}$ ナリ,

∴ $x(a-x)=\frac{a^2}{4}$ ∴ $x=\frac{a}{2}$ 即チ各分ハ相等シ.

〔別解〕 壹分ヲ $\frac{a}{2}+x$, 他ノ壹分ヲ $\frac{a}{2}-x$ トスレハ

$\left(\frac{a}{2}+x\right)\left(\frac{a}{2}-x\right)=\lambda$ 即チ $\lambda=\frac{a^2}{4}-x^2$,

λヲ極大トセンニハ $x=0$ ∴ $\lambda=\frac{a^2}{4}$,

之ニ由テ各分ハ相等シ.

5. 貳邊ノ長サヲx及ヒ$a-x$トシ斜邊ヲλトスレハ

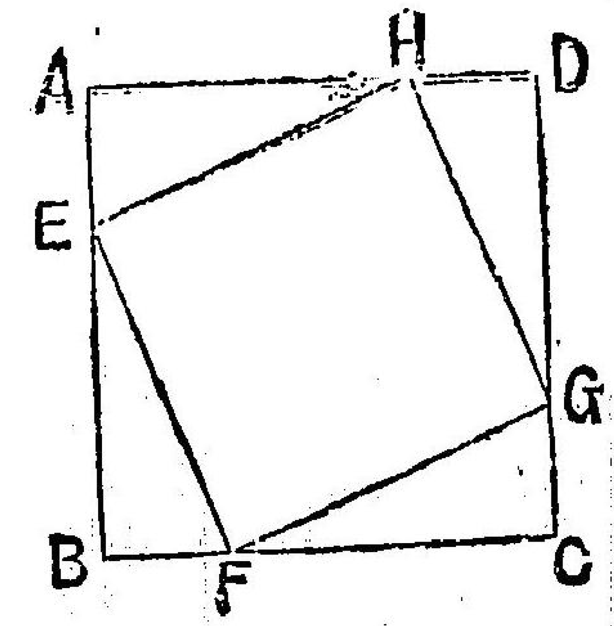
$x^2+(a-x)^2=\lambda$ 即チ $2x^2-2ax+(a^2-\lambda^2)=0$,

∴ $4a^2-8(a^2-\lambda)\nless 0$, 即チ $\lambda^2\nless\frac{a^2}{2}$, 之ニ由テ

λカ極小ナルトキ $\lambda^2=\frac{a^2}{2}$.

之ニ由テ $x^2+(a-x)^2=\frac{a^2}{2}$ ∴ $x=\frac{a}{2}$,

故ニ貳邊ノ長サハ各相等シ.



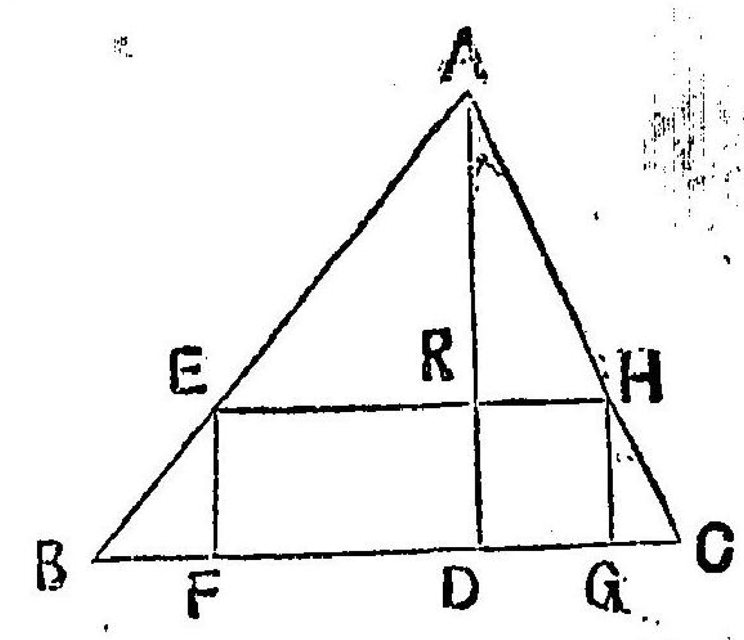
6. AB=BC=aトス,
EFGHヲ内切正方形トシ其壹邊ヲλトス,
又AE=xトスレハ EB=$a-x$,
而シテ BF=CG=HD=x,
及ヒ FC=GD=HA=$a-x$.

∴ $AE^2+AH^2=EH^2$,

即チ $x^2+(a-x)^2=\lambda^2$, 即チ $2x^2-2ax+(a^2-\lambda^2)=0$,

5.例ノ方程式ノ如ク $x=\frac{a}{2}$ ナリ.

故ニ原正方形ノ各邊ノ中央点ニ角点ヲ置キテ作レル正方形ハ其面積最小ナリ.



7. AD=h, BC=aトシ
EFGHヲ所求ノ最大矩形トシ
EF=x, EH=yトスレハ
AR:EH=AD:BC,
即チ $h-x:y=h:a$,

∴ $y=\frac{a(h-x)}{h}$

$xy=\lambda$ヲ最大積トス,

之ニ由テ $x\times\frac{a(h-x)}{h}=\lambda$ 即チ $ax^2-ahx+h\lambda=0$,

∴ $a^2h^2-4ah\lambda\not<0$ 即チ $\lambda\not>\frac{ah}{4}$,

而シテ $\frac{ah}{2}$ ハ原三角形ノ面積ナリ故ニ所求ノ矩形ノ最大面積ハ原三角形ノ半ニ等シ.

8. 矩形ノ貳邊ヲ x 及ヒ y トスレハ $xy=\lambda$ ハ其最大面積ナリ,

而シテ $x^2+y^2=(2R)^2$, 即チ $x^2+\left(\frac{\lambda}{x}\right)^2=4R^2$,

即チ $$x^4-4R^2x^2+\lambda^2=0,$$

∴ $16R^4-4\lambda^2\not<0$ 即チ $\lambda^2\not>4R^4$,

故ニλカ極大ナル時 $\lambda^2=4R^4$,

之ニ由テ $x^4-4R^2x^2+4R^4=0$ ∴ $x^2-2R^2=0$,

∴ $x=R\sqrt{2}$, $y=\frac{\lambda}{x}=\frac{2R^2}{R\sqrt{2}}=R\sqrt{2}$,

故ニ矩形ノ最大ナル時正方形トナル.

9. O ヲ中心トスレハ

$CO=r$, $CD=x$,

然ル時 $AB=x+\lambda$ 但シ λ ハ AB, CD ノ差トシ之ヲ極大トス.

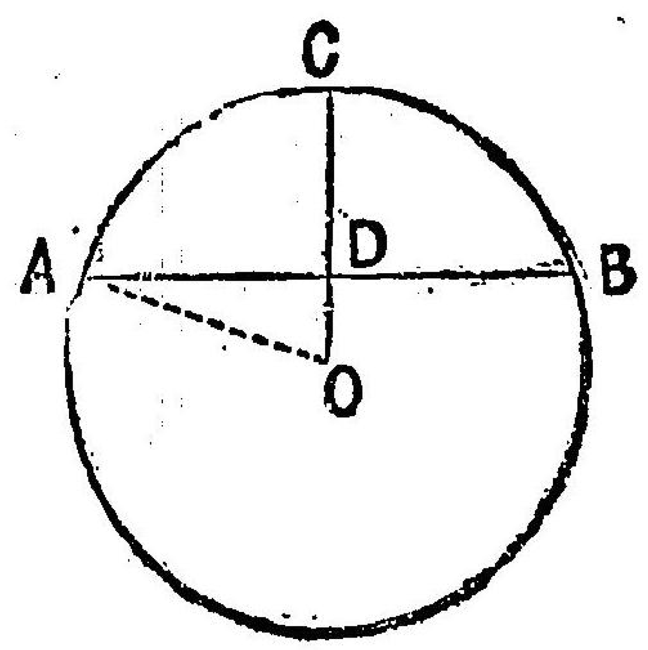
然ル時

$AO^2=AD^2+DO^2$,

即チ $r^2=\frac{1}{4}(x+\lambda)^2+(r-x)^2$,

∴ $5x^2-2x(4r-\lambda)+\lambda^2=0$,

∴ $4(4r-\lambda)^2-20\lambda^2\not<0$ 即チ $\lambda\not>r(\sqrt{5}-1)$.



∴ $5x^2-2x\{4r-r(\sqrt{5}-1)\}+r^2(\sqrt{5}-1)^2=0$,

即チ $5x^2-2rx\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)+r^2(\sqrt{5}-1)^2=0$,

∴ $\sqrt{5}x-r(\sqrt{5}-1)=0$ ∴ $x=r\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

貳次式之分數

16. 分數式 $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c}$ ノ値モ亦 x ノ實數ニ對シ或制限ノ内ニ在リ.

例ヘハ $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=\lambda$ トスレハ

$$x^2(a-a'\lambda)+x(b-b'\lambda)+c-c'\lambda=0,$$

x カ實根ナル時 $(b-b'\lambda)^2-4(a-a'\lambda)(c-c'\lambda)\not<0$,

即チ $\lambda^2(b'^2-4a'c')-2\lambda(bb'-2ac'-2a'c)+b^2-4ac\not<0$.

之ニ由テλノ貳次式カ0ヨリ小ナラサルヿヲ要ス, 即チλノ値ハ此貳次式ヲシテ正數ナラシムル丈ケノ制限内ニ在ルヿヲ知ル

之ヲ變スレハ $(b'^2-4a'c')\left\{\lambda^2-\frac{2\lambda(bb'-2ac-2a'c')}{b'^2-4a'c'}+\frac{b^2-4ac}{b'^2-4a'c'}\right\}\not<0$;

{ } ノ貳次式ヲλノ一次因子 $\lambda-\alpha$, $\lambda-\beta$ トスレハ

$$(b'^2-4a'c')(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)\not<0.$$

$b'^2-4a'c'>0$ ナルトキ $\lambda-\alpha$ ト $\lambda-\beta$ ハ同符號ニシテ

$\lambda>\alpha$, $\lambda>\beta$ 或ハ $\lambda<\alpha$, $\lambda<\beta$,

故ニλハαトβノ間ニアラス.

又 $b'^2-4a'c'=0$ ナルトキ λノ値ハ無制限ナリ

終ニ $b'^2-4a'c'<0$ ナルトキ $\lambda-\alpha$, $\lambda-\beta$ ハ異符號ナリ故ニλノ値ハαトβノ間ニ在リ.

17. 例解 ヲ次ニ示ス.

〔第壹例〕 $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ ノ値ノ制限ヲ求ム.

$\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\lambda$ トスレハ $x^2(1-\lambda)+x(\lambda+1)+1-\lambda=0$,

x カ實根ナルトキ $(1+\lambda)^2-4(1-\lambda)^2\nless 0$,

即チ $\{(1+\lambda)+2(1-\lambda)\}\{(1+\lambda)-2(1-\lambda)\}\nless 0$,

即チ $-3(\lambda-3)(\lambda-\frac{1}{3})\nless 0$,

此左邊ハ正ナリ故ニ $\lambda-1$, $\lambda-\frac{1}{3}$ ハ異符號ナリ,

$\therefore\ \lambda-3<0,\ \lambda-\frac{1}{3}>0,\ \therefore\ \lambda<3,\ \lambda>\frac{1}{3}$,

之ニ由テ $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ ハ 3 ト $\frac{1}{3}$ ノ間ニ在リ.

〔第貳例〕 $\dfrac{x^2+2x-11}{2(x-3)}$ ノ値ハ 2 ト 6 ノ間ニ在ラサルコトヲ示セ.

$\dfrac{x^2+2x-11}{2(x-3)}=\lambda$ トスレハ $x^2+2x(1-\lambda)+6\lambda-11=0$,

$\therefore\ 4(1-\lambda)^2-4(6\lambda-11)\nless 0$ 即チ $(\lambda-2)(\lambda-6)\nless 0$,

$\lambda-2$ ト $\lambda-6$ ハ同符號ナリ故ニ $\lambda>2,\ \lambda>6$ 或ハ $\lambda<2,\ \lambda<6$,

之ニ由テ此分數ノ値ハ 2 ト 6 ノ間ニ在ラス.

18. 定理 ax^2+bx+c カ常ニ正ナルトキ $4ac-b^2$ ハ常ニ正ナリ, 但シ a ヲ正トス.

$ax^2+bx+c=\lambda$ トスレハ $ax^2+bx+c-\lambda=0$,

$$\therefore\ b^2-4a(c-\lambda)\nless 0,$$

$$\lambda\nless\frac{4ac-b^2}{4a},$$

即チ λ ハ正位ニシテ $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ ヨリ小ナラス故ニ $4ac-b^2$ ハ常ニ正ナラサルヘカラス.

〔例〕 $\dfrac{ax^2-7x+5}{5x^2-7x+a}$ カ x ノ實數ニ對シテ任意ノ値ヲ表ハストキ a ヲ如何ニ定ムヘキカ.

$\dfrac{ax^2-7x+5}{5x^2-7x+a}=\lambda$ トスレハ

$$x^2(a-5\lambda)-7x(1-\lambda)+(5-a\lambda)=0,$$

x カ實數ナルトキ $49(1-\lambda)^2-4(a-5\lambda)(5-a\lambda)\nless 0$,

即チ $(49-20a)\lambda^2+2(2a^2+1)\lambda+49-20a\nless 0$,

之ニ由テ定理ニヨリ

$$4(49-20a)^2-4(2a^2+1)^2\nless 0,$$

即チ $\{(49-20a)+(2a^2+1)\}\{(49-20a)-(2a^2+1)\}\nless 0$,

即チ $-(a-5)^2(a+12)(a-2)\nless 0$,

$(a-5)^2$ ハ正ナリ故ニ $(a+12)(a-2)$ ハ負ナリ,

故ニ $a+12>0,\ a-2<0\ \therefore\ a>-12,\ a<2$.

之ニ由テ a ノ値ハ -12 ト 2 ノ間ニ在リ.

例題三拾七

1. x カ實數ナルトキ $\dfrac{x}{x^2-5x+9}$ ハ 1 ト $-\dfrac{1}{11}$ ノ間ニ在リ.

2. x カ實數ナルトキ $\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ ハ 5 ト 9 ノ間ニ在リ,

3. x カ實數ナルトキ $\dfrac{x+2}{2x^2+3x+6}$ ノ最大値ヲ求ム.

4. x カ實數ナルトキ $\dfrac{px^2+3x-4}{p+3x-4x^2}$ カ任意ノ値ヲ表ハストキ p ノ値ヲ如何ニ定ヘキカ.

5. x カ實數ナルトキ $\dfrac{x^2-bc}{2x-b-c}$ ノ値ハ b ト c ノ間ニアラス.

6. x カ實數ナル片 $\dfrac{(ax-b)(dx-c)}{(bx-a)(cx-d)}$ カ任意ノ値ヲ表ハスコハ a^2-b^2 及ヒ c^2-d^2 カ同符號ヲ有スヘキコヲ證セヨ.

7. $\dfrac{(h+1)x^2+hx+h}{x^2+x+1}>k$ ニ於テ h ヲ既知數トスレハ k ノ値ノ界限如何.

例題三拾七解答

1. 及ヒ 2. ハ例解ト同シ.

3. $\dfrac{x+2}{2x^2+3x+6}=\lambda$ トスレハ

$$2\lambda x^2+x(3\lambda-1)+6\lambda-2=0,$$

$$\therefore\quad (3\lambda-1)^2-8\lambda(6\lambda-2)\nless 0,$$

即チ $$-(13\lambda-1)(3\lambda+1)\nless 0,$$

故ニ $13\lambda-1$, $3\lambda+1$ ハ異符號ナリ $\therefore\ \lambda>\dfrac{1}{13},\quad \lambda<-\dfrac{1}{3}.$

之ニ由テ λ ノ最大値ハ $\dfrac{1}{13}$ ナリ.

4. $\dfrac{px^2+3x-4}{p+3x-4x^2}=\lambda$ トスレハ

$$x^2(p+4\lambda)+3x(1-\lambda)-(p\lambda+4)=0,$$

$$\therefore\quad 9(1-\lambda)^2+4(p+4\lambda)(p\lambda+4)\nless 0,$$

即チ $$(16p+9)\lambda^2+2(2p^2+23)\lambda+(9+16p)\nless 0.$$

此不等式カ正トナルカ爲メニ

$$4(16p+9)^2-4(2p^2+23)^2>0,$$

$$\therefore\quad -(p+4)^2(p-1)(p-7)>0,$$

$$\therefore\quad p>1,\qquad p<7.$$

5. $\dfrac{x^2-bc}{2x-b-c}=\lambda$ トスレハ

$$x^2-2\lambda x+b\lambda+c\lambda-bc=0,$$

$$\therefore\quad 4\lambda^2-4(b\lambda+c\lambda-bc)\nless 0,$$

即チ $$(\lambda-b)(\lambda-c)\nless 0,$$

$\therefore$ λ ハ b ト c ノ間ニアラス.

6. $\dfrac{(ax-b)(dx-c)}{(bx-a)(cx-d)}=\lambda$ トスレハ

$$(ad-bc\lambda)x^2-(ac+bd)(1-\lambda)x+bc-ad\lambda=0,$$

$$\therefore\quad (ac+bd)^2(1-\lambda)^2-4(ad-bc\lambda)(bc-ad\lambda)\nless 0,$$

即チ $$(ac-bd)^2\lambda^2-2\lambda\{(ac-bd)^2-2(ad-bc)^2\}+(ac-bd)^2\nless 0,$$

此式カ正ナルカ爲メニハ

$$4(ac-bd)^2(ac-bd)^2-4\{(ac-bd)^2-2(ad-bc)^2\}^2\nless 0,$$

之ヲ變化スレハ $(ac-bd)^2-(ad-bc)^2>0,$

即チ $$(a^2-b^2)(c^2-d^2)>0,$$

之ニ由テ題言ノ如シ.

7 $\dfrac{(h+1)x^2+hx+h}{x^2+x+1}>k,$

x^2+x+1 ハ $4\times1\times1-1^2>0$ ナルカ故ニ x ノ任意ノ實數ニ對シテ正ナリ故ニ $(h+1)x^2+hx+h>k(x^2+x+1),$

即チ $$(h-k+1)x^2+x(h-k)+h-k>0,$$

$$\therefore\quad 4(h-k+1)(h-k)-(h-k)^2>0,$$

即チ $$(h-k)(3h-3k+4)>0,$$

$\therefore\quad h-k>0,\quad 3h-3k+4>0\quad \therefore\quad k<h,\quad k<h+\dfrac{4}{3},$

或ハ $h-k<0,\quad 3h-3k+4<0\quad \therefore\quad k>h,\quad k>h+\dfrac{4}{3},$

之ニ由テ k ハ h ヨリ小ナルカ或ハ $h+\dfrac{4}{3}$ ヨリ大ナリ.

貳次方程式問題

19. 問題 貳次式ニ關スル問題ヲ示サントス.

貳次方程式ハ貳根ヲ有スレバ問題ニ於テハ貳ツノ答數ヲ得ヘキモノアリ或ハ否ラサルモノアリ.

20. 例解 ヲ次ニ示サン.

〔第壹例〕 若干人アリ其人數ノ11倍ハ其人數ノ平方ノ2倍ヨリ5多シ人數如何.

人數ヲ x トスレハ $11x=2x^2+5$,

即チ $(2x-1)(x-5)=0$ ∴ $x=5$ 或ハ $\frac{1}{2}$.

所求ノ人數ハ5人ナリ而シテ $\frac{1}{2}$ ナル答ハ題意ニ合セス故ニ之ヲ省クモノトス.

〔第貳例〕 若干尺ノ糸アリ其長サノ11倍ハ其長サノ平方ノ2倍ヨリ5多シ其長サ如何.

前例ノ如ク $x=5$ 或ハ $\frac{1}{2}$ ナリ.

此題ニ於テハ所求ノ答ハ5尺或ハ $\frac{1}{2}$ 尺ノ貳ツアリ.

〔第三例〕 絹若干反ヲ75圓ニテ買ヒ其内1反殘シ其餘ヲ75圓ニテ賣レハ壹反ノ價ハ12錢5厘高クナルヘシ反數如何.

所求ノ反數ヲ x トスレハ1反ノ原價ハ $\frac{7500}{x}$ 錢ナリ,

又1反ノ賣價ハ $\frac{7500}{x-1}$ 錢ナリ.

之ニ由テ $\frac{7500}{x-1}=\frac{7500}{x}+12{\cdot}5$

分母ヲ拂ヘハ $7500x=7500(x-1)+12{\cdot}5x(x-1)$,

$$\therefore\quad x^2-x-600=0 \qquad \therefore\quad x=25 \text{ 或 } -24,$$

-24 ハ負數ナルカ故ニ省フキ所求ノ答ヲ25反トス.

例題三拾八

1. 兩數アリ其和18, 其積77各如何.

2 兩數アリ其和80, 其平方ノ和3208各如何.

3. 某數ト其反商ノ差 $3\frac{3}{4}$ ナルトキ其數如何.

4. 矩形アリ長邊ト短邊ノ差10間 面積1131坪各邊如何.

5. 直角三角形アリ貳直邊ノ和28尺, 斜邊20尺, 各邊如何.

6. 壹桶ニ水若干ヲ入レ他ノ桶ニ其量ノ半丈ケ酒ヲ入レ置キ各ヨリ6石ヲ出シテ交換スレハ同質ノ混合酒ヲ得ベシ酒水各幾許ナリヤ.

7. 某宴會アリ會費総計24圓ニシテ會員ハ等分ニ會費ヲ出スモノトス其内4名丈ケ拂ハサリシニヨリ殘ノ人數ニテ之ヲ出セシカ故ニ1名ニ付30錢増シタリ會員総數如何.

8. 金6圓ニテ物品若干個ヲ買ヒ此内2個ヲ取リ其殘ヲ5圓50錢ニ賣リシニヨリ1個ニ付5錢高クナレリ所買ノ品數如何.

9. 3750圓ニテ鐵道株劵若干株ヲ買ヒ其内15株ヲ殘シ其餘ヲ3480圓ニ賣リ1株ニ付キ8圓高クナレリ全株數如何.

10. 舟夫アリ $8\frac{4}{7}$ 分ニテ壹河ヲ漕キ上ル今水流無キトキハ之ヲ漕行スル時間ハ前ノ水流ニテ之ヲ漂流スル時間ヨリモ7分少ナシトイフ若シ之ヲ漕キ下ルトキハ何分ヲ要スルカ.

11. 短艇アリ靜水ニ於テハ毎時8浬ヲ漕行ス今8浬ノ河ヲ往復スルニ2時40分ヲ費セリ毎時ノ水流如何.

12. 兩滊車アリ36哩ノ鐵道ヲ停車セスシテ行キシニ其壹ハ他ノ壹ヨリ毎時ノ速15哩速キカ故ニ12分早ク到着セシトイフ兩車毎時ノ速如何.

13. 旅人アリ7哩ノ道ヲ行キシニ最初1哩行キタル後ヲ毎時ノ速ヲ1哩増シテ行クトキハ速力ヲ變セスシテ行クヨリモ半時間早ク先地ニ到着シ得ヘシ此旅行ニ何時間費セシヤ.

14. 甲乙共ニ壹事ヲ作シ6日ニシテ成了シ得ヘシ今各壹人ニテ此事ヲ作スヰハ甲ハ乙ヨリ9日多カルヘシトイフ然ルヰ此事ヲ各一人ニテ作ル日數如何.

15. 兩種ノ茶アリ1斤ノ價第壹ハ第貳ヨリ52錢5厘高ク又6圓ニテ第壹ヲ買フ斤數ハ6圓ニテ第貳ヲ買フヨリ$\frac{4}{7}$斤少ナシトイフ各1斤ノ價如何.

16. 物品12個ノ價ノ錢數ハ12錢ニテ其物品ヲ買ヒシ數ノ2倍ヨリ2多シ其物品ヲ1圓80錢買フヰハ幾個得ヘキカ.

17. 兩分數アリ其和$\frac{5}{6}$ニシテ其差ハ其積ニ等シ各如何.

18. 相距25哩ノ兩地ヨリ兩脚夫同時ニ相向テ出立セシニ5時ヲ經テ相會セリ而シテ其壹人ハ他ノ壹人ヨリモ1哩ヲ行ク時間18分多シ各每時ノ速如何.

19. 兵士若干人ヲ整列スルニ列數ヲ各列ノ人數ノ2倍トセリ今此人數ヨリ206人ヲ減シ各面ヲ3層ニ列スル中空方陣ヲ作レハ其各面ノ人數ハ前ノ列數ニ等シ人數如何.

20. 矩形アリ其壹邊ヨリ6寸短カキ壹邊ノ正方形ト等積ナリ今短邊ニ1寸增シ長邊ヨリ2寸減スルモ其積變セス各邊如何.

21. 矩形アリ對角線ト長邊ノ和ハ短邊ニ5倍シ長短兩邊ノ差17間3尺ナリ其面積何坪ナリヤ.

22. 甲乙兩滊車カPヨリQニ向ヒテ出發シ丙丁兩滊車カ之ト同時ニQヨリPニ向フテ出發セリ甲ハPヨリ120哩ノ處ニテ丙ヲ通過シ又Pヨリ140哩ノ處ニテ丁ヲ通過セリ乙ハQヨリ16哩ノ處ニテ丙ヲ通過シ又P及ヒQノ中央ニテ丁ヲ通過セリ然ルヰPQノ距離如何.

23. 連續兩數アリ其各立方ノ差919ナルヰ各數如何.

24. 滊車アリ180哩ノ鐵道ヲ定時間ニテ行ケリ若シ每時ノ速ヲ3哩減スレハ3時間後クルヘシトイフ每時ノ速如何

24. 或街道ニ電信柱ヲ建ツルニ各柱間ノ距離ヲ相等シトス而シテ1哩每ニ建ツル柱數ヲ1本減スレハ各柱間ノ距離ハ$2\frac{14}{15}$碼長クナルヘシ1每哩ノ柱數如何, 但シ1哩ハ1760碼.

25. 兵士若干人ヲ方陣ニ列セリ若シ此人數ヲ以テ各面ヲ4層ニ列スル中空方陣ヲ作レハ其各面ノ人數ハ前ノ壹面ノ人數ヨリ三分之貳ヲ增スヘシ總人數如何.

26. 甲乙兩生アリ貳次方程式ヲ解キシニ甲ハxノ係數ヲ誤リシカ故ニ6及ヒ-3ノ兩解答ヲ得タリ乙ハ第三項ヲ誤リシカ故ニ3及ヒ-5ノ兩解答ヲ得タリ然ルヰ此方程式ヲ誤無ク解スレハ其解答如何.

27. 正五角形ノ壹邊ノ長サaナルヰ其對角線ノ長サ如何.

28. 甲乙貳管ヲ以テ壹池ニ水ヲ容ルヽニ最初ニa時間共ニ貳管ヲ用ヒシ後ヲ乙ヲ止メ甲ノミニテ貳管ヲ共用シテ充タスヘキ時ヨリb時間多ク入レシニ終ニ滿水セリ而シテ甲ノ入レシ水ハ乙ノ入レシ水ニm倍セリ各壹管ニテ充タスヘキ時間如何.

例題三拾八解答

1. 11, 7或ハ7, 11.　　2. 42, 38.　　3. 4.

4. 39間, 29間.　　5. 12尺, 16尺.

6. 酒ノ量$=x$石トスレハ　水ノ量$=2x$石,

壹桶ノ水ノ量ハ6石,　酒ノ量ハ$2x-6$石ナリ,

又他桶ノ水ノ量ハ$x-6$石,　酒ノ量ハ6石ナリ,

之ニ由テ　$\frac{6}{x-6}=\frac{2x-6}{6}$　ヨリ　$x=9$.

之ニ由テ水ハ9石, 酒ハ18石ナリ.

7. 人數ヲxトスレハ

$$\frac{2400}{x-4}=\frac{2400}{x}+30, \quad \therefore \ x=20 \text{ 即チ } 20\text{人}.$$

8.　12個.　　9.　75株.

10.　河ノ長サヲ a トスレハ上行1分ノ速ハ $\dfrac{a}{8\frac{4}{7}}=\dfrac{7a}{60}$,

1分間ノ水流ヲ x トスレハ1分間ノ漕力ハ $\dfrac{7a}{60}+x$,

之ニ由テ $\dfrac{a}{\frac{7a}{60}+x}=\dfrac{a}{x}-7$, 分母ヲ拂ヒ簡單ニスレハ

$x^2+\dfrac{7ax}{60}=\dfrac{a^2}{60}$　∴　$x=\dfrac{a}{12}$.

之ニ由テ下行ノ時間 $=\dfrac{a}{\left(\frac{7a}{60}+x\right)+x}=\dfrac{a}{\frac{7a}{60}+2x}=\dfrac{a}{\frac{7a}{60}+\frac{2a}{12}}=\dfrac{60}{17}$

$=3\dfrac{9}{17}$　即チ　$3\dfrac{9}{17}$分ナリ.

11.　毎時ノ水流ヲ x 浬トスレハ

$\dfrac{8}{8+x}+\dfrac{8}{8-x}=2\dfrac{40}{60}$　∴　$x=4$浬.

12.　60哩,　45哩.

13.　毎時ノ最初ノ速サ x 哩トスレハ

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{x+1}=\dfrac{7}{x}-\dfrac{1}{2}$　∴　$x=3$,

之ニ由テ所求ノ時間ハ $\dfrac{1}{3}+\dfrac{6}{3+1}=1\dfrac{5}{6}$　即チ1時50分.

14.　甲ノ日數ヲ x トスレハ乙ハ $x+9$ ナリ

∴　$\dfrac{6}{x}+\dfrac{6}{x-9}=1$　∴　$x=9$,

之ニ由テ甲ハ18日,　乙ハ9日ナリ.

15.　1斤ノ價甲ヲ x 錢トスレハ乙ハ $x-52{\cdot}5$ 錢ナリ.

∴　$\dfrac{600}{x}=\dfrac{6}{x-52{\cdot}5}-\dfrac{4}{7}$,　∴　$x=262{\cdot}5$,

之ニ由テ甲ハ2圓62錢5厘,乙ハ2圓10錢.

16.　12個ノ價ヲ x 錢トスレハ

$x=\dfrac{12}{\frac{x}{12}}\times 2+2$　∴　$x=18$　∴　所求ノ數 $\dfrac{180}{18}=10$個.

17.　甲ヲ x トスレハ乙ハ $\dfrac{5}{6}-x$

$x-\left(\dfrac{5}{6}-x\right)=x\left(\dfrac{5}{6}-x\right)$,　∴　$x=\dfrac{1}{2}$(甲),　$\dfrac{1}{3}=$乙.

18.　甲毎時ノ速 $=x$ 哩トスレハ乙毎時ノ速 $=\dfrac{25}{5}-x=5-x$ 哩,

∴　$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{5-x}+\dfrac{18}{60}$　∴　$x=1\dfrac{2}{3}$哩,　乙 $=3\dfrac{1}{3}$哩.

19.　一列ノ人數 $=x$ トスレハ列數 $=2x$

$x\times 2x-206=(2x)^2-(2x-3\times 2)^2$　∴　$x=17$,

之ニ由テ　總人數 $=2x\times x=2x^2=2\times 17^2=578$ 人.

20.　長邊ヲ x 寸トスレハ短邊ハ $\dfrac{(x-6)^2}{x}$ 寸ナリ,

∴　$(x-6)^2=\left\{\dfrac{(x-6)^2}{x}+1\right\}(x-2)$,

即チ　$(x-6)^2=(x-6)^2-\dfrac{2(x-6)^2}{x}+x-2$,

即チ　$2(x-6)^2=x^2-2x$　∴　$x=18$,

之ニ由テ長邊ハ18寸,短邊ハ $\dfrac{(18-6)^2}{18}=8$ 寸.

21.　長邊 $=x$ 間トスレハ短邊 $=x\,17\dfrac{3}{2}$ 間ナリ,

∴　$x+\sqrt{\left\{x^2+\left(x-17\frac{1}{2}\right)^2\right\}}=5\left(x-17\frac{1}{2}\right)$,　∴　$x=30$,

之ニ由テ　面積 $=30\left(30-17\dfrac{1}{2}\right)=375$ 坪.

22.　題意ニヨリ乙ト丁ハ同速ナリ,

今PQノ距離ヲ x 哩トスレハ

丙ノ速ハ甲ノ $\frac{x-120}{120}$,　丁即チ乙ノ速ハ甲ノ $\frac{x-140}{140}$,

乙即チ丁ノ速ハ丙ノ $\frac{x-126}{126}$ 即チ甲ノ $\frac{x-120}{120}\times\frac{x-126}{126}$ ナリ,

$\therefore\ \frac{x-140}{140}=\frac{x-120}{120}\times\frac{x-126}{126}$, 分母ヲ拂フテ簡單ニスレハ

$$x^2-354x+144\times210=0.\quad\therefore\ x=144\ \text{或}\ 210,$$

之ニ由テPQハ144哩或ハ210哩

23. 兩數ヲ $x,\ x-1$ トスレハ $x^3-(x-1)^3=919$,

故ニ兩數ハ18, 17ナリ.

24. 毎時ノ速ヲx哩トスレハ $\frac{180}{x}=\frac{180}{x-3}-3\quad\therefore\ x=15.$

25. 1哩ノ柱數ヲxトスレハ $\frac{1760}{x}=\frac{1760}{x-1}-2\frac{14}{15}\quad\therefore\ x=25.$

26. 方邊ノ人數ヲxトスレハ

$$x^2=\left(x+\frac{2x}{3}\right)^2-\left(x+\frac{2x}{3}-4\times2\right)^2\quad\therefore\ x=24,\ \text{総人數}=24^2=576.$$

27. $ax^2+bx+c=0$ ノ貳次方程式トス,

甲ハ $ax^2+b'x+c=0$ トシ $x=6$ 或ハ -3 ヲ得タリ,

$$\therefore\ \frac{c}{a}=6\times-3\quad\therefore\ c=-18a,$$

又乙ハ $ax^2+bx+c'=0$ トシ $x=3$ 或ハ -5 ヲ得タリ,

$$\therefore\ -\frac{b}{a}=3+(-5)\quad\therefore\ b=2a,$$

之ニ由テ原方程式ハ $ax^2+2ax-18a=0$,

即チ　$x^2+2x-18=0\quad\therefore\ x=1\pm\sqrt{19}.$

28. 正五角形ABCDEニ於テ $AB=BC=DE=EA=a$,

又對角線 $AC=AD=CE=x$,　AD, CE ノ交点ヲMトス.

然ルニ兩三角形ACM, DEMハ相似形ナリ,

$$\therefore\ \frac{AM}{AC}=\frac{DM}{DE}\quad\text{即チ}\quad\frac{a}{x}=\frac{x-a}{a}\quad\therefore\ x=\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1).$$

29. 乙管ノミニテ充タスヘキ時間ヲx時トスレハ

乙ハ1時間ニ全量ノ $\frac{1}{x}$ ヲ入ルヘク, a時間ニ $\frac{a}{x}$ ヲ入ルヘシ.

甲ハ乙ノm倍入レシカ故ニ $\frac{ma}{x}$ ヲ入ルヘシ.

之ニ由テ　$\frac{ma}{x}+\frac{a}{x}=1\quad\therefore\ x=a(m+1).$

甲ノミニテ充タス時間ヲyトスレハ

甲乙ニテ1時間ニ充タス量ハ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 即チ $\frac{1}{a(m+1)}+\frac{1}{y}$,

故ニ兩管ニテ充タス時間ハ $1\Big/\left\{\frac{1}{a(m+1)}+\frac{1}{y}\right\}$ 即チ $\frac{ay(m+1)}{y+a(m+1)}$.

題意ニヨリ $a\left\{\frac{1}{a(m+1)}+\frac{1}{y}\right\}+\left\{\frac{ay(m+1)}{y+a(m+1)}+b\right\}\frac{1}{a(m+1)}=1,$

之ヨリyノ二次式ヲ得而シテ

$$y=\frac{m+1}{2m}\left\{2a+b\pm\sqrt{4a(m+1)(a+b)+b^2}\right\}.$$

第拾壹編

方程式ノ續キ

不整方程式

1. 不整方程式 分母ニxノ項ヲ含ム方程式ヲ不整方程式トイフ例ヘハ $\frac{a}{x}+\frac{b}{x+b}=1$ ノ如キハ不整方程式ナリ此等ノ方程式ハ分母ヲ拂フ時ハ少シ物議ヲ生ス.

何トナレハ原則ニヨリ方程式ノ兩邊ニハ0ニアラサル同數量ヲ乘シ得ヘキコハ既ニ知ル所ナリ然ルニ未知數ヲ含ム數量モ亦タ未知數量ナルカ故ニ0ニアラサルヤ否ヤハ分明ナラス之ニ由テ方程式ノ兩邊ニ未知數量ノ項ヲ乘シテ宜シキヤ否ヤ更ニ分明ナラス是レ物議ヲ生スル所以ナリ.

此物議ヲ鎮定スヘキ有力者ハ更ニ無シ更ニ無キノミナラス或數學家ハ不整方程式ノ定義ヲ次ノ如ク述ヘ大騒動ヲ起セリ.

三角形トイフモノハゆーくりつどノ定理ニ由テ其一邊ヲ引長シ平行線ノ錯角ノ方法ヲ用ヒ而シテ其內角ノ和カ二直角ニ等シ且ツ又定理ニ由テ其二邊ノ和カ他ノ壹邊ヨリ小ナリトイヘル以上ノ條件ニ適當シタル直線圖形ノコナリ.

不整方程式トイフモノハ方程式ノ原則ニ由テ凡ヘテノ項ヲ符號ヲ變シナガラ前項ニ移シ而シテ後項ヲ0ニ等シクシ而シテ分數ノ通分母法ニ由テ分母ヲ同分母トシ而シテ分數ノ加法ニ由テ壹ツノ分數式トシ而シテ夫レカラ次ニ續ク

此分數式ノ分子ヲ0ニ等シカラシムヘキ未知數ノ値ヲ以テ根トスルモノナリ又ハ分母モ同時ニ0トナレハ不成立トナルナリ以上ノ二條件ヲ具ヘタルモノカ不整方程式ナリ.

2. 定義 不整方程式ノ根ノ定義ハ別段述フルニ及ハス予ハ次ノ如ク定義ヲ下セリ,

不整方程式ハ分母ニ未知數ノ項ヲ有スル方程式ニシテ其根ハ矢張リ通例ノ方程式ノ根ト同シコナリ何ニモ不整方程式ノ根ナリトテ大騒動ノ生スル根ニアラス.

3. 解法 次ニ例ヲ設ケテ之ヲ示ス.

〔第壹例〕 $\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x-2}=0$ ヲ解セヨ.

兩邊ニ$x-1$ヲ乘スレハ $x+2(x-2)=0$, $\therefore\ x=\frac{4}{3}$.

(鎮定) 兩邊ニ$x-1$ヲ乘スレハトイフコカ心配ナリ何トナレハ$x-1$ハxカ1ナル時ハ0ナレハナリ然ルニ $x=\frac{4}{3}$ ナルヲ以テ$x-1$ハ0ニアラス,

故ニ$x-1$ヲ乘スルハ0ニアラサルモノヲ方程式ニ乘シタルカ故ニ原則ニ適合シ騒動ヲ起サストモ宜シ.

〔第貳例〕 $\frac{x}{x-1}=\frac{2}{x^2-1}$ ヲ解セヨ.

分母$x-1$, x^2-1ノL. C. M. x^2-1ヲ求ムベシ,

而シテx^2-1ヲ双方ニ乘スレハ $x(x+1)=2$,

即チ $x^2+x-2=0$ 即チ $(x-1)(x+2)=0$ $\therefore\ x=1$ 或ハ -2.

(騒動) $x=-2$トシテ原方程式ニ用フレハ

$$\frac{-2}{-2-1}=\frac{2}{(-2)^2-1}$$ 即チ $\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$ トナリテ適合ス故ニ

$x=-2$ハ原方程式ノ根ナリ.

$x=1$トシテ原方程式ニ用フレハ

$\frac{1}{1-1}=\frac{2}{1^2-1}$ 即チ $\frac{1}{0}=\frac{2}{0}$ 變ナ形チトナレリ0チ或數ニ乘シ0トナルハ當然ノヿニシテ $5\times0=0$ ノ如シ然ルニ0ニテ除スルトイフヿハ少シ高尚悠遠ノ思想ニシテ中學程度ノ代數ニテハ無論之チ廢セリ然ルニ三角法ニ於テハ平山氏ノ講義ニモアル如ク $tan\ 90^\circ=\frac{1}{0}=\infty$ トアリ故ニ $\frac{1}{0}=\frac{2}{0}$ モ $\infty=\infty$ トスレハ宜シケレ𪜈此ノ如キヿハ方程式ニ於テハ寧ロ廢スル方カ宜シ由テ $x=1$ ナル根ハ不都合ナリ廢スヘシ。

斯ク命シタルナラハ初學者ハ騷動チ起スヘシ。

(鎭定) 此方程式チ解クヰ最初ニ x^2-1 チ乘スレハトイヒタリ實ニ心配ノ次第ナリ x^2-1 ハ殊ニヨリ0デハ無イカ知レヌト心配スヘシ而シテ $x=1$ ナル根チ用フレハ x^2-1 ハ 1^2-1 即チ0トナル故ニ此方程式ニ0チ乘スルヿトナル然ラハ原則ニ反スルニアラスヤ甚タ不都合ナリ決シテ方程式ノ兩邊ニ0チ乘シテハ相成ラヌ故ニ x^2-1 チ乘スルヿチ禁ス。

此命令カ下リタルカ故ニ $\frac{x}{x-1}=\frac{2}{x^2-1}$ チ解クニハ次ノ如クスヘシ $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=0,$

即チ $\frac{x(x+1)-2}{x^2-1}=0,$ 即チ $\frac{x^2+x-2}{(x+1)(x-1)}=0,$

即チ $\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=0,$ $\therefore$ $\frac{x+2}{x+1}=0,$

此終リノ方程式ニ $x+1$ チ乘スレハ $x+2=0$ $\therefore x=-2,$ 即チ -2 丈ケハ正シキ根チ得タリ。

此終リノ方程式ニ $x+1$ チ乘スルハ心配ノ樣ナレ𪜈 $x=-2$ ナルヰ $x+1$ ハ0トナラサルカ故ニ安心スヘシ。

4. 騷動之再發 ノ一例チ示サントス。

$\frac{x^2-4x+12}{3(x^2-4)}=\frac{2}{3(x-2)}+\frac{x}{x+2}$ チ解セヨ。

此方程式ノ兩邊ニ分母ノ L. C. M. $3(x^2-4)$ チ乘スレハ

$x^2-4x+12=2(x+2)+3x(x-2),$

即チ $x^2-4x+12=2x+4+3x^2-6x,$

即チ $8=2x^2$ $\therefore$ $x^2=4$ $\therefore$ $x=+2$ 或ハ $-2.$

然ルニ兩邊ニ $3(x^2-4)$ チ乘シタルニヨリ求メ得タル根 $x=2$ チ用フレハ兩邊ニ $3(2^2-4)$ 即チ0チ乘シタルナリ又他ノ根 $x=-2$ チ用フレハ兩邊ニ $3\{(-2)^2-4\}$ 即チ亦0チ乘シタルナリ。

是レ原則違反者ナリ故ニ $3(x^2-4)$ チ乘スヘカラス。

斯ク嚴禁チ命セラレタルニヨリ謹ミテ $3(x^2-4)$ チ乘セサル樣ニ原方程式チ解スレハ

$\frac{x(x+2)-6(x-2)}{3(x^2-4)}=\frac{2}{3(x-2)}+\frac{x}{x+2},$

即チ $\frac{x}{3(x-2)}-\frac{2}{x+2}=\frac{2}{3(x-2)}+\frac{x}{x+2},$

$\therefore$ $\frac{x-2}{3(x-2)}=\frac{x+2}{x+2}$ 即チ $\frac{1}{3}=1$ 此ノ如キ大不都合ノ方程式チ得,故ニ此方程式ハ不成立ナリ僞方程式ナリ方程式トイヘル名チ詐稱セシ者ナリ。

$x=x$ ナルヿハ明白ナリ故ニ此兩邊ニ同數チ加フレハ $x+2=x+2$ トナリ亦明白ナリ。

然ルニ $x=x$ ノ一邊ニ2チ加ヘテ $x+2=x$ トイフカ如キハ不都合ニシテ原則違反ノ者ナリト知ルヘシ。

5. 應用之例 チ次ニ示スヘシ。

前章ノ如ク分母チ乘スルヰハ方程式ノ根チ此分母ニ代用シテ眞僞チ檢スレハ少シモ騷動チ生セズ,

然レモ成ルヘク検査スルカ如キ煩雑ノヿヲナサスシテ根カ正シキヿヲ知リ得ヘキ解ヲ用フヘシ。

〔第壹例〕 $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x-9}{x-7}=\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-8}{x-6}$ ヲ解セヨ。

各項ヨリ1ヲ減スレハ

$$\frac{x}{x-2}-1+\frac{x-9}{x-7}-1=\frac{x+1}{x-1}-1+\frac{x-8}{x-6}-1,$$

即チ $$\frac{2}{x-2}+\frac{-2}{x-7}=\frac{2}{x-1}+\frac{-2}{x-6},$$

2ニテ除スレハ $$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-6},$$

$$\therefore\ \frac{-5}{(x-2)(x-7)}=\frac{-5}{(x-1)(x-6)},$$

即チ $$\frac{1}{(x-2)(x-7)}=\frac{1}{(x-1)(x-6)},$$

$$\therefore\ (x-1)(x-6)=(x-2)(x-7),$$

即チ $$x^2-7x+6=x^2-9x+14,$$

即チ $$2x=8\quad\therefore\ x=4.$$

〔第二例〕 $\dfrac{a}{x+a}+\dfrac{b}{x+b}+\dfrac{c}{x+c}=3$ ヲ解セヨ。

$$\therefore\ \frac{a}{x+a}-1+\frac{b}{x+b}-1+\frac{c}{x+c}-1=0,$$

即チ $$\frac{-x}{x+a}+\frac{-x}{x+b}+\frac{-x}{x+c}=0,$$

$$\therefore\ x\left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}\right)=0,$$

$\therefore\ x=0$ 或ハ $\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x+b}+\dfrac{1}{x+c}=0.$

$\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x+b}+\dfrac{1}{x+c}=0$ ヨリ x ヲ求ムレハ

$$(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)+(x+a)(x+b)=0,$$

即チ $$3x^2+2(a+b+c)x+bc+ca+ab=0,$$

$$\therefore\ x=\frac{1}{3}\left\{-(a+b+c)\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)}\right\}.$$

之ニ由テ原方程式ハ0ト上ノ二根トノ三ツヲ有ス。

例題三拾九

次ノ各方程式ヲ解セヨ。

1. $\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{x+3}{x-3}=\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x-3}{x+3}.$

2. $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}+\dfrac{x+3}{x+2}=1.$

3. $x+\dfrac{1}{x}=a+\dfrac{1}{a}.$

4. $\dfrac{a}{a+x}+\dfrac{a}{a-x}=4.$

5. $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}.$

6. $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}.$

7. $\dfrac{a^2}{x-a}+\dfrac{b^2}{x-a}=a+b.$

8. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}.$

9. $\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x+b}=\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{c+b}.$

10. $\dfrac{a}{x+a}+\dfrac{b}{x+b}=\dfrac{a-c}{x+a-c}+\dfrac{b+c}{x+b+c}.$

11. $\dfrac{ax+b}{a+bx}=\dfrac{cx+d}{c+dx}.$

12. $\dfrac{a-x}{1-ax}=\dfrac{1-bx}{b-x}.$

13. $\dfrac{3x-4}{x+1}=x^2+2x-\dfrac{7}{x+1}.$

14. $\dfrac{a}{x}-\dfrac{a^2}{x^2}=(x-a)^2.$

15. $x+1+\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{x^2}{x+1}+\frac{5x-4}{x^2-1}.$

16. $\frac{a+c}{x+2b}+\frac{b+c}{x+2a}=\frac{a+b+2c}{x+a+b}.$

17. $\frac{(x-a)(x-b)}{(x-ma)(x-mb)}=\frac{(x+a)(x+b)}{(x+ma)(x+mb)}.$

18. $\frac{3+2x}{2+5x}-\frac{1+x}{5+2x}=1-\frac{10(x^2+1)}{10+29x+10x^2}.$

19. $x+\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x^2-1}=\frac{x^2}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{5x-4}{x^2-1}.$

20. $\frac{x^2-3x-1}{x^2-3x+1}+\frac{x^2-3x-2}{x^2-3x+2}=\frac{14}{15}.$

21. $\frac{x+a}{x+b}=\frac{(2x+a+c)^2}{(2x+b+c)^2}.$

22. $\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}=\frac{(x+c)(x+d)}{(x-c)(x-d)}.$

23. $\frac{x+a}{x-a}-\frac{x-a}{x+a}=\frac{x^3+a^3}{x^3-a^3}-\frac{x^3-a^3}{x^3+a^3}.$

24. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=2\frac{11x+18}{11x-18}.$

25. $\frac{(b-c)^2}{(b-c)^2-(x-a)^2}+\frac{(c-a)^2}{(c-a)^2-(x-b)^2}+\frac{(a-b)^2}{(a-b)^2-(x-c)^2}=2.$

26. $\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(x+a)(x+b)}=\frac{(x+c)(x+d)}{(x-c)(x-d)}+\frac{(x-c)(x-d)}{(x+c)(x+d)}.$

27. $\frac{5}{x+2}+\frac{5}{x+4}=\frac{1}{x+1}+\frac{8}{x+3}+\frac{1}{x+5}.$

28. $\frac{x^2-4x+4}{x-1}+\frac{x^2-3x-1}{x-2}-2\frac{x^2-5x+5}{x-3}=0.$

例題三拾九解答

1. $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+3}{x-3}-\frac{x-3}{x+3}=0,$

即チ $\frac{8x}{x^2-4}+\frac{12x}{x^2-9}=0,$ $\therefore\ x=0,$

或ハ $\frac{2}{x^2-4}+\frac{3}{x^2-9}=0,$ $\therefore\ x=\pm\sqrt{6}.$

2. $\frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}+\frac{x+3}{x+2}=1,$ 即チ $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+3}{x+2}=1,$

即チ $\frac{2x+4}{x+2}=1,$ 即チ $2=1$ 故ニ此方程式ハ不成ナリ.

3. $x-a=\frac{x-a}{ax},$ $\therefore\ x-a=0,$ $\therefore\ x=a,$

或ハ $1=\frac{1}{ax},$ $\therefore\ x=\frac{1}{a}.$

4. $a(a-x)+a(a+x)=4(a^2-x^2)$ ヨリ $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}.$

5. $\frac{1}{x-a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{x-b}-\frac{1}{a}=0,$

即チ $\frac{b-x+a}{b(x-a)}+\frac{a-x+b}{a(x-b)}=0,$

即チ $(a+b-x)\left\{\frac{1}{b(x-a)}+\frac{1}{a(x-b)}\right\}=0,$ $\therefore\ x=a+b,$

或ハ $\frac{1}{b(x-a)}+\frac{1}{a(x-b)}=0,$ $\therefore\ x=\frac{2ab}{a+b}.$

6. $a\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{b}\right)+b\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{a}\right)=0,$

前例ノ如クスレバ $x=a+b$ 或ハ $x=\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$.

7. $a\left(\frac{a}{x-b}-1\right)+b\left(\frac{b}{x-a}-1\right)=0,$

即チ $\frac{a(a-x+b)}{x-b}+\frac{b(b-x+a)}{x-a}=0,$ ∴ $x=a+b,$

或ハ $\frac{a}{x-b}+\frac{b}{x-a}=0$ ヨリ $x=\frac{a^2+b^2}{a+b}.$

8. $\frac{x-b}{a}-\frac{a(x-b)}{bx}=0,$ ∴ $x=b,$

或ハ $\frac{1}{a}-\frac{a}{bx}=0$ ヨリ $x=\frac{a^2}{b}.$

9. $\frac{1}{x+a}-\frac{1}{c+a}+\frac{1}{x+b}-\frac{1}{c+b}=0,$

即チ $\frac{c-x}{(c+a)(x+a)}+\frac{c-x}{(c+b)(x+b)}=0,$ ∴ $x=c,$

或ハ $\frac{1}{(c+a)(x+a)}+\frac{1}{(c+b)(x+b)}=0$ ヨリ

∴ $x=-\frac{a^2+b^2+ac+bc}{a+b+2c}.$

10. $\frac{a}{x+a}-1+\frac{b}{x+b}-1=\frac{a-c}{x+a-c}-1+\frac{b+c}{x+b+c}-1,$

即チ $\frac{-x}{x+a}+\frac{-x}{x+b}=\frac{-x}{x+a-c}+\frac{-x}{x+b+c},$ ∴ $x=0,$

或ハ $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x+a-c}+\frac{1}{x+b+c},$

即チ $\frac{2x+a+b}{(x+a)(x+b)}=\frac{2x+a+b}{(x+a-c)(x+b+c)},$ ∴ $x=-\frac{a+b}{2},$

或ハ $\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{(x+a-c)(x+b+c)}$ ヨリ

$x^2+x(a+b)+(a-c)(b+c)=x^2+x(a+b)+ab,$

即チ $(a-c)(b+c)=ab$ 故ニ此方程式ハxヲ得ル能ハズ

14. $\frac{a(x-a)}{x^2}=(x-a)^3,$ ∴ $x-a=0,$ ∴ $x=a,$

或ハ $\frac{a}{x^2}=(x-a)^2,$ ∴ $a=x^2(x-b)^2,$ 此兩邊ノ平方根ハ

$\pm\sqrt{a}=x(x-a),$ ∴ $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}\pm\sqrt{a}\right)}.$

但シ $\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}\pm\sqrt{a}\right)}$ ハ四ツノ答ヲ有ス,

即チ $\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}+\sqrt{a}\right)},$ $\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-\sqrt{a}\right)},$

$\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}+\sqrt{a}\right)},$ $\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a^2}{2}-\sqrt{a}\right)},$

故ニ原方程式ハ此四根ト最初ノaト都合五根ヲ有ス。

15. $x+1+\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\frac{x^2}{x+1},$

即チ $x+1+\frac{x-4}{x+1}=\frac{x^2}{x+1},$

∴ $1+\frac{x-4}{x+1}+x-\frac{x^2}{x+1}=0$ 即チ $\frac{2x-3}{x+1}+\frac{x}{x+1}=0,$

∴ $2x-3+x=0,$ ∴ $x=1.$

16. 後邊ノ分子 $a+b+2c$ ヲ $(a+c)+(b+c)$ トスレバ

$(a+c)\left(\frac{1}{x+2b}-\frac{1}{x+a+b}\right)+(b+c)\left(\frac{1}{x+2a}-\frac{1}{x+a+b}\right)=0,$

即チ $\frac{(a+c)(a-b)}{(x+2b)(x+a+b)}+\frac{(b+c)(-a+b)}{(x+2a)(x+a+b)}=0,$

即チ $\frac{a+c}{x+2b}-\frac{b+c}{x+2a}=0,$ ∴ $x=-2(a+b+c).$

17. 兩邊ノ分母子ヲ交換シテ括弧ヲ解ケハ

$$\frac{x^2+mx(a+b)+m^2ab}{x^2-mx(a+b)+m^2ab}=\frac{x^2+x(a+b)+ab}{x^2-x(a+b)+ab},$$

兩邊ヨリ1ヲ減スレハ

$$\frac{2mx(a+b)}{x^2-mx(a+b)+m^2ab}=\frac{2x(a+b)}{x^2-x(a+b)+ab}, \qquad \therefore\ x=0,$$

或ハ $\dfrac{m}{x^2-mx(a+b)+m^2ab}=\dfrac{1}{x^2-x(a+b)+ab}$ ヨリ　　$x=\pm\sqrt{mab}.$

18. $\dfrac{3+2x}{2+5x}-\dfrac{1+x}{5+2x}=\dfrac{29x}{(2+5x)(5+2x)},$

$\therefore\ (3+2x)(5+2x)-(1+x)(2+5x)=29x,$

即チ $13+9x-x^2=29x,$　　$\therefore\ x=-10\pm\sqrt{113}.$

19. $x+\dfrac{x-1}{x-1}=\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{4x-4}{x^2-1},$

即チ $x+1=\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{4}{x+1},$　　$\therefore\ x=\dfrac{3}{2}.$

20. $x^2-3x-2=y$ トスレハ原方程式ハ

$\dfrac{y+1}{y+3}+\dfrac{y}{y+4}=\dfrac{14}{15}$ ヨリ　　$y=2$ 或ハ $-\dfrac{27}{8}.$

之ニ由テ $x^2-3x-2=2$ ヨリ　　$x=4$ 或ハ $-1,$

或ハ $x^2-3x-2=-\dfrac{27}{8}$ ヨリ　　$x=\dfrac{1}{4}(6\pm\sqrt{14}).$

21. 本題ハ分母ヲ拂ヘハ第九編例題三拾三35.題ト全ク同シ.（178頁ヲ視ヨ）

22. 本題ハ17.題ト同法ナリ,　$x=0$ 或ハ $\dfrac{ab(c+d)-cd(a+b)}{a+b-c-d}.$

23. $\dfrac{4ax}{x^2-a^2}=\dfrac{4a^3x^3}{x^6-a^6},$　　$\therefore\ x=0,$

或ハ $\dfrac{1}{x^2-a^2}=\dfrac{a^2x^2}{x^6-a^6},$ 分母ヲ拂フトキハ

$x^4+a^2x^2+a^4=a^2x^2$　　即チ $x^4+a^4=0,$

即チ $x^4=-a^4$ 兩邊ノ平方根ハ $x^2=\pm a^2\sqrt{-1}$

又平方根ヲ求ムレ　　$x=\pm a\sqrt{\pm\sqrt{-1}}.$

$\pm a\sqrt{\pm\sqrt{-1}}$ ハ次ノ四根ヲ含有ス,

$+a\sqrt{\sqrt{-1}},\quad +a\sqrt{-\sqrt{-1}},\quad -a\sqrt{\sqrt{-1}},\quad -a\sqrt{-\sqrt{-1}}.$

$x^4+a^4=0$ ノ四根ヲ求ムル方法ハ此編ニ於テ後ニ示スベシ.

24. $\dfrac{x+1}{x-1}+1+\dfrac{x+2}{x-2}+1=2\left(\dfrac{11x+18}{11x-18}+1\right),$

即チ $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{2x}{x-2}=2\left(\dfrac{22x}{11x-18}\right),$　　$\therefore\ x=0,$

或ハ $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{22}{11x-18}$ ヨリ　　$x=\dfrac{10}{3}.$

25. 此方程式ハ等勢式ナリ而シテ前邊ノ第壹項ハ

$-\dfrac{(b-c)^2}{(x-a+b-c)(x-a-b+c)}$ ナルカ故ニ第貳項及ヒ第三項モ之ニ準シテ知リ得ヘシ之ニ由テ分母ヲ拂ヒ轉項スレハ

$$\begin{aligned}&2(x-a+b-c)(x-a-b+c)(x+a-b-c)\\&+(b-c)^2(x+a-b-c)+(c-a)^2(x-a+b-c)\\&\qquad+(a-b)^2(x-a-b+c)=0.\end{aligned}$$

$x=a$ トスレハ適合ス,　　$\therefore\ x=a$ 或 b 或 $c.$

26. $\dfrac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}=y$ トシ $\dfrac{(x+c)(x+d)}{(x-c)(x-d)}=z$ トスレハ

$y+\dfrac{1}{y}=z+\dfrac{1}{z}$　　$\therefore\ y-z=\dfrac{y-z}{yz},$

之ニ由テ　$y=z$ 或ハ $y=\dfrac{1}{z}.$

$y=z$, 即チ $\dfrac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{(x+c)(x+d)}{(x-c)(x-d)}$ ハ22.題.

或ハ　$y=\frac{1}{z}$ 即チ　$\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}=\frac{(x-c)(x-d)}{(x+c)(x+d)}$ ヨリ

$\frac{x^2+x(a+b)+ab}{x^2-x(a+b)+ab}=\frac{x^2-x(c+d)+cd}{x^2+x(c+d)+cd}$ 双方ヨリ1ヲ減スレバ

$$\frac{2x(a+b)}{x^2-x(a+b)+ab}=\frac{-2x(c+d)}{x^2+x(c+d)+cd}, \qquad \therefore \quad x=0$$

或ハ　$\frac{a+b}{x^2-x(a+b)+ab}=\frac{-(c+d)}{x^2+x(c+d)+cd}$,

$$\therefore \quad x=\frac{-cd(a+b)-ab(c+d)}{a+b+c+d},$$

27. $x+3=y$ トスレバ $x+1=y-2$, $x+2=y-1$, $x+4=y+1$, $x+5$　$y+2$ ナリ故ニ原方程式ハ

$$\frac{5}{y-1}+\frac{5}{y+1}=\frac{1}{y-2}+\frac{8}{y}+\frac{1}{y+2},$$

即チ　$\frac{10y}{y^2-1}=\frac{2y}{y^2-4}+\frac{8}{y}$,

$$\therefore \quad \frac{10y}{y^2-1}-\frac{10}{y}=\frac{2y}{y^2-4}-\frac{2}{y},$$

即チ　$\frac{10}{y(y^2-1)}=\frac{8}{y(y^2-4)}$, 　$\therefore \quad 5(y^2-4)-4(y^2-1)$,

即チ　$y^2=16$ 　$\therefore \quad y=4$ 　或ハ　-4.

$y=4$ 　即チ　$x+3=4$ ヨリ　　　$x=1$,

或ハ　$y=-4$ 即チ $x+3=-4$ ヨリ　　　$x=-7$,

28. $\frac{(x^2-4x+3)+1}{x-1}+\frac{(x^2-3x+2)-3}{x-2}=2\frac{x^2-5x+6-1}{x-3}$,

即チ　$x-3+\frac{1}{x-1}+x-1-\frac{3}{x-2}=2\left(x-2-\frac{1}{x-3}\right)$,

即チ　$\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x-2}=-\frac{2}{x-3}$, 　　$\therefore \quad x=-1$.

無理方程式

6. 無理方程式

トハ未知數量ヲ含ム項カ無理式ニテ示シタル方程式ヲイフ.

例ヘハ　$\sqrt{(a+x)}-x=0$ 或ハ $\sqrt[3]{ax}+b=0$ ノ如シ,

又　$\sqrt{(a+b)}-x=0$ 或ハ $\sqrt[3]{a}+b+x=0$ ノ如キハ根號ノ內ニ未知數量ヲ含マサルカ故ニ無理方程式ニアラス.

7. 無理方程式之性質

方程式ノ両邊ニハ0ニアラサル數量ヲ乘スルコヲ得ヘキコハ原則ニ示シタリ又之ニ由テ方程式ノ両邊ニハ未知數量ヲ含ムモノヲ乘スル能ハスシテ若シ之ヲ乘スレハ其乘シタル項ヲ0ニ等シクセシメタル丈ケノ根ヲ增スヘキコハ既ニ不整方程式ニ於テ示シタリ.

然ルニ無理方程式ニ於テハ根號ヲ省ク爲メニ両邊ニ未知數量ノ項ヲ乘スルコヲ得ルナリ是レ無理方程式カ特別ナル性質ヲ有スル所ナリ.

之ヲ說明センニ $\sqrt{x}-a=0$ ナル無理方程式ニ於テ平方根號ハ正負ノ両值ヲ含ムカ故ニ $\pm\sqrt{x}-a=0$ トナルヘシ,

故ニ $\sqrt{x}-a=0$ ハ次ノ両方程式ヲ有ス,

$+\sqrt{x}-a=0$ 及ヒ $-\sqrt{x}-a=0$ 即チ $\sqrt{x}+a=0$,

故ニ $\sqrt{x}-a=0$ ハ $(+\sqrt{x}-a)(\sqrt{x}+a)=0$,

即チ $\sqrt{x}-a=0$ ノ両邊ニ $\sqrt{x}+a$ ヲ乘スルコトナルナリ,

之ニ由テ $\sqrt{x}-a=0$ ハ $(\sqrt{x})^2-a^2=0$ 即チ $x-a^2=0$,

之ニ由テ $\sqrt{x}-a=0$ ノ根ハ $x=a^2$ ナリ.

同樣ニ $\sqrt{x}+a=0$ ヲ解セントス.

$\sqrt{x}+a=0$ ハ $+\sqrt{x}+a=0$ 及ヒ $-\sqrt{x}+a=0$ 即チ $\sqrt{x}-a=0$ ノ両方程式ヲ含ムカ故ニ $\sqrt{x}+a=0$ ノ両邊ニ $\sqrt{x}-a$ ヲ乘スレハ $(\sqrt{x}+a)(\sqrt{x}-a)=0$ 即チ $x=a^2$.

(根之吟味) $\sqrt{x}-a=0$ 及ヒ $\sqrt{x}+a=0$ ハ相異ナル方程式ナレ𪜈其根ハ相同シク $x=a^2$ ナリ之ヲ吟味セン二

$\sqrt{x}-a=0$ ニ於テ $x=a^2$ トスレハ

$\sqrt{a^2}-a=0$ 即チ $+a-a=0$ 即チ $0=0$ トナリ適合ス,

又 $\sqrt{x}+a=0$ ニ於テ $x=a^2$ トスレハ

$\sqrt{a^2}+a=0$ 此場合ニ於テ $\sqrt{a^2}=\pm a$ ノ兩値ノ内 $-a$ ヲ取ルヘシ即チ $-a+a=0$ 即チ $0=0$ トナリ適合ス.

(解法) 前述ニ由リ $\sqrt{x}-a\ 0$ ヲ解スルニハ

$\sqrt{x}=a$ トシ兩邊ヲ平方スヘシ,

即チ $(\sqrt{x})^2=a^2 \quad \therefore \quad x=a^2$.

8. 解法之例 「章ニ於テハ $\sqrt{x}-a=0$ ナル方程式ニ付キテ無理方程式ノ解法及ヒ性質ヲ示シタリ而シテ平方根ノ他 $\sqrt[3]{x}-a$ ノ如キモ同様ノ理ナレ𪜈平方根ヨリ以上ノ方根ヲ有スル無理方程式ノ性質ヲ解釋スルヿハ此編ニテハ出來難キカ故ニ後編ニ示スヘシ.

故ニ此處ニテハ單ニ平方根號ノ理論ノミヲ示スヘシ.

〔第壹例〕 $\sqrt{(x+5)}-\sqrt{x}=5$ ヲ解セヨ.

(第壹法) 此方程式ハ $\pm\sqrt{(x+5)}\pm\sqrt{x}-5=0$,

即チ $+\sqrt{(x+5)}+\sqrt{x}-5=0$ (1)

$+\sqrt{(x+5)}-\sqrt{x}-5=0$ (2)

$-\sqrt{(x+5)}+\sqrt{x}-5=0$ 即チ $\sqrt{(x+5)}-\sqrt{x}+5=0$ (3)

$-\sqrt{(x+5)}-\sqrt{x}-5=0$ 即チ $\sqrt{(x+5)}+\sqrt{x}+5=0$ (4)

而シテ原方程式ハ(2)ナリ即チ(2)ハ(1), (3), (4)ヲモ含有ス故ニ(2)ノ兩邊ニ(1), (3), (4)ヲ乘スレハ

$$\{\sqrt{(x+5)}-\sqrt{x}-5\}\{\sqrt{(x+5)}+\sqrt{x}-5\}$$
$$\{\sqrt{(x+5)}-\sqrt{x}+5\}\{\sqrt{(x+5)}+\sqrt{x}+5\}=0,$$

即チ此方程式ノ前邊ノ四因子ノ内二ツヽ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ノ公式ヲ應シテ乘法ヲ施セハ

$\{(x+5)-\sqrt{x}-5\}\{\sqrt{(x+5)}+\sqrt{x}+5\}$ ハ $\{\sqrt{(x+5)}\}^2-(\sqrt{x}+5)^2$

即チ $x+5-(x+10\sqrt{x}+25)$ 即チ $-10\sqrt{x}-20$ トナリ,

$\{\sqrt{(x+5)}+\sqrt{x}-5\}\{\sqrt{(x+5)}-\sqrt{x}+5\}$ ハ $\{\sqrt{(x+5)}\}^2-(\sqrt{x}-5)^2$

即チ $x+5-(x-10\sqrt{x}+25)$ 即チ $10\sqrt{x}-20$ トナル.

之ニ由テ原方程式ハ $(-10\sqrt{x}-20)(10\sqrt{x}-20)=0$,

即チ $100x-400=0 \quad \therefore \quad x=4$.

(第弍法) $\sqrt{(x+5)}-\sqrt{x}=5$ ヲ轉項シテ兩邊ヲ平方ニスレハ

$\{\sqrt{(x+5)}\}^2=(\sqrt{x}+5)^2$ 即チ $x+5=x+10\sqrt{x}+25$,

故ニ $-10\sqrt{x}=-20$ 又兩邊ヲ平方ニスレハ

$$100x=400 \quad \therefore \quad x=4.$$

(第三法) $\sqrt{(x+5)}-\sqrt{x}=5$ (1)

又 $(x+5)-x=5$ ナルヿ明カナリ (2)

(2)ヲ(1)ニテ除スレハ

$\sqrt{(x+5)}+\sqrt{x}=1$ (3)

(1)ヨリ(3)ヲ減スレハ $-2\sqrt{x}=4 \quad \therefore \quad 4x=16 \quad \therefore \quad x=4$.

此第三法ハ簡便ナレ𪜈(1)ニテ(2)ヲ除スルカ故ニ若シ(2)ノ兩邊ニ於テ未知數量ノ項カ省去セラルヽ﨔ハ其項丈ケノ根ヲ失フヘシ此例ニテハ(2)ノ前邊ハ $\sqrt{(x+5)}-\sqrt{x}$ ナル未知項ヲ除去セシノミニテ(2)ノ後邊ハ5ヲ除去セラレタルカ故ニ根ヲ失ナフヿ無シト雖𪜈次ノ例ノ如キハ然ラス.

〔第弍例〕 $\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-2x+3}=x$ ヲ解セヨ.

$(x^2+2x+3)-(x^2-2x+3)=4x$ ナルヿ明ラカナリ故ニ第三法ニ由テ之ヲ原方程式ニテ除スレハ

$$\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x+3}=4,$$

之ニ原方程式ヲ加フレハ $2\sqrt{x^2+2x+3}=x+4$,

此兩邊ヲ平方ニスレハ $4(x^2+2x+3)=x^2+8x+16$,

故ニ $3x^2=4 \quad \therefore \quad x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

而シテ此解法中ニ除法ヲ施シタルトキ$4x$ヲxニテ除シタルカ故ニx丈ケ除去シタリ故ニ$x=0$ナル根ヲ失ナヒタリ。

之ニ由テ原方程式ノ根ハ$\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$及ヒ0ナリ。

例題四拾

次ノ各方程式ヲ解セヨ。

1. $\sqrt{2x+9}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x+1}.$

2. $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}.$

3. $\sqrt{7x-5}+\sqrt{4x-1}=\sqrt{7x-4}+\sqrt{4x-2}.$

4. $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2+x}=a+b.$

5. $\sqrt{a-cx}+\sqrt{c-dx}=\sqrt{a+c-(b+d)x}.$

6. $\sqrt{ax+b^2}+\sqrt{bx+a^2}=a-b.$

7. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{2a+2b}.$

8. $\sqrt{(a+x)(x+b)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}=2\sqrt{ax}.$

9. $\sqrt{a(a+b+x)}-\sqrt{a(a+b-x)}=x.$

10. $\sqrt{x^2+ax+b^2}-\sqrt{x^2-ax+b^2}=2a.$

11. $\sqrt{x^2+ax+a^2}+\sqrt{x^2-ax+a^2}=\sqrt{2a^2-2b^2}.$

12. $\dfrac{m\sqrt{c^2-x^2}+n(c-x)}{m\sqrt{c^2-x^2}-n(c-x)}=\dfrac{ma+nb}{ma-nb}.$

13. $\sqrt{(x-2)(x-3)}+5\sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}=\sqrt{x^2+6x+8}.$ 答8或-2

14. $\dfrac{ax-b^2}{\sqrt{ax}+b}=\dfrac{\sqrt{ax}-b}{n}-c.$

15. $\sqrt{x^2+2ax}+\sqrt{x^2-2ax}=\dfrac{nax}{\sqrt{x^2+2ax}}$

16. $\dfrac{ax-1}{\sqrt{ax}+1}=4+\dfrac{\sqrt{ax}-1}{2}$　　17. $\dfrac{1-ax}{1+ax}=\sqrt{\dfrac{1-bx}{1+bx}}.$

18. $\dfrac{1+x+\sqrt{2x+x^2}}{1-x+\sqrt{2x+x^2}}=1-ax.$

19. $\dfrac{a+x}{\sqrt{a}+\sqrt{(a+x)}}+\dfrac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{(a-x)}}=\sqrt{a}.$

20. $(1+x)\sqrt{(1+a)}+(1-x)\sqrt{(1-a)}=2\sqrt{(1+x^2)}.$

例題四拾解答

1. $\sqrt{2x+9}=\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}$ 両邊ヲ平方ニスレハ

$$2x+9=x-4+2\sqrt{(x-4)(x+1)}+x+1,$$

即チ　$12=2\sqrt{(x-4)(x+1)}$　　即チ　$6=\sqrt{(x-4)(x+1)},$

両邊ヲ平方ニスレハ $(x-4)(x+1)=36$　　$\therefore\ x=8$ 或 $-5.$

2. $\sqrt{(x-1)(x-2)}=\sqrt{2}-\sqrt{(x-3)(x-4)}$ 平方ニスレハ

$(x-1)(x-2)=2-2\sqrt{2(x-3)(x-4)}+(x-3)(x-4),$

之ヲ簡單ニスレハ　$4x-12=-2\sqrt{2(x-3)(x-4)},$

即チ　$2(x-3)=-\sqrt{2(x-3)(x-4)},$

故ニ　$4(x-3)^2=2(x-3)(x-4),$

即チ　$(x-3)\{2(x-3)-(x-4)\}=0$　　$\therefore\ x=3$ 或 $2.$

3. 両邊ヲ平方ニスレハ

$$7x-5+2\sqrt{(7x-5)(4x-1)}+4x-1$$
$$=7x-4+2\sqrt{(7x-4)(4x-2)}+4x-2,$$

即チ　$\sqrt{(7x-5)(4x-1)}=\sqrt{(7x-4)(4x-2)}.$

故ニ　$(7x-5)(4x-1)=(7x-4)(4x-2),$　　$\therefore\ x=1.$

4. 両邊ヲ平方ニスレハ

$$a^2-x+2\sqrt{(a^2-x)(b^2+x)}+b^2+x=a^2+2ab+b^2,$$

即チ　$\sqrt{(a^2-x)(b^2+x)}=ab,$

故ニ　$a^2b^2+(a^2-b^2)x-x^2=a^2b^2,$　　$\therefore\ x=0$ 或 a^2-b^2

5. 両邊ヲ平方ニスヘシ，　　$x=\dfrac{a}{b}$ 或 $\dfrac{c}{d}.$

6. 兩邊ヲ平方ニスレハ

$$ax+b^2+2\sqrt{(ax+b^2)(bx+a^2)}+bx+a^2=a^2-2ab+b^2,$$

即チ $(a+b)x+2ab=-2\sqrt{(ax+b^2)(bx+a^2)},$

又兩邊ヲ平方ニスレハ

$$(a+b)^2x^2+4ab(a+b)x+4a^2b^2=4\{abx^2+(a^3+b^3)x+a^2b^2\},$$

即チ $\{(a+b)^2-4ab\}x^2-4(a+b)\{(a^2-ab+b^2)-ab\}x=0,$

即チ $(a-b)^2x^2-4(a+b)(a-b)^2x=0,$ $\therefore$ $x=0$ 或 $4(a+b).$

〔別法〕 $(ax+b^2)-(bx+a^2)=(a-b)x-(a^2-b^2)$ ナルᄏ明カナリ

之ヲ原方程式 $\sqrt{ax+b^2}+\sqrt{bx+a^2}=a-b$ ニテ除スレハ

$$\sqrt{ax+b^2}-\sqrt{bx+a^2}=x-(a+b),$$

之ヲ原方程式ニ加フレハ $2\sqrt{ax+b^2}=x-2b,$

故ニ $4(ax+b^2)=(x-2b)^2$ 之ヨリ $x=0$ 或 $4(a+b).$

7. 兩邊ヲ平方ニスレハ

$$a-x+2\sqrt{(a-x)(b+x)}+b+x=2a+2b,$$

即チ $2\sqrt{(a-x)(b+x)}=a+b,$

故ニ $4\{ab+(a-b)x-x^2\}=(a+b)^2,$

故ニ $4x^2-4(a-b)x+(a-b)^2=0,$

即チ $\{2x-(a-b)\}^2=0$ $\therefore$ $x=\frac{1}{2}(a-b).$

8. 兩邊ヲ平方ニスレハ

$$(a+x)(x+b)+2\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}+(a-x)(x-b)=4ax,$$

即チ $\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}=(a-b)x,$

故ニ $(a^2-x^2)(x^2-b^2)=(a-b)^2x^2,$

即チ $-x^4+(a^2+b^2)x^2-a^2b^2=(a^2-2ab+b^2)x^2,$

故ニ $x^4-2abx^2+a^2b^2=0$ 即チ $(x^2-ab)^2=0$ $\therefore$ $x=\pm\sqrt{ab}.$

9. $a(a+b+x)-a(a+b-x)=2ax$ ナルᄏ明カナリ之ヲ原方程式 $\sqrt{a(a+b+x)}-\sqrt{a(a+b-x)}=x$ ニテ除スレハ

$$\sqrt{a(a+b+x)}+\sqrt{a(a+b-x)}=\frac{2ax}{x}=2, \quad \therefore \quad x=0,$$

又之ヲ原方程式ニ加フレハ $2\sqrt{a(a+b+a)}=x+2a,$

故ニ $4a(a+b+x)=(x+2a)^2$ $\therefore$ $x=\pm2\sqrt{ab}.$

之ニ由テ x ノ根ハ $0, \pm2\sqrt{ab}$ ナリ.

10. 前例ト同法ナリ $x=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3(a^2-b^2)}.$

11. 兩邊ヲ平方ニスレハ

$$x^2+ax+a^2+2\sqrt{x^4+a^2x^2+a^4}+x^2-ax+a^2=2a^2-2b^2,$$

之ヲ最簡ニスレハ $\sqrt{x^4+a^2x^2+a^4}=-x^2-b^2,$ 兩邊ヲ平方ニスレハ

$$x^4+a^2x^2+a^4=x^4+2b^2x^2+b^4,$$

$$\therefore \quad x=\pm\sqrt{\frac{a^4-b^4}{2b^2-a^2}}.$$

12. 前邊ノ分母子ヲ $\sqrt{(c-x)}$ ニテ約スレハ

$$\frac{m\sqrt{c+x}+n\sqrt{c-x}}{m\sqrt{c+x}-n\sqrt{c-x}}=\frac{ma+nb}{ma-nb},$$

分數ノ定理 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ ヲ用フレハ

$$\frac{2m\sqrt{c+x}}{2n\sqrt{c-x}}=\frac{2ma}{2nb}, \quad 即チ \quad \frac{\sqrt{c+x}}{\sqrt{c-x}}=\frac{a}{b},$$

之ニ由テ $\frac{c+x}{c-x}=\frac{a^2}{b^2}$ 故ニ $\frac{2x}{2c}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ $\therefore$ $x=\frac{c(a^2-b^2)}{a^2+b^2}.$

14. 原方程式ハ $\frac{(\sqrt{ax}+b)(\sqrt{ax}-b)}{\sqrt{ax}+b}=\frac{\sqrt{ax}-b}{n}-c,$

故ニ $\sqrt{ax}-b=\frac{\sqrt{ax}-b}{n}-c,$ 即チ $(\sqrt{ax}-c)\left(\frac{1}{n}-1\right)=c,$

故ニ $\sqrt{ax}-c=\frac{nc}{1-n}$ $\therefore$ $\sqrt{x}=\frac{c}{\sqrt{a}}\left(1+\frac{nc}{1-n}\right),$ $\therefore$ $x=\frac{c^2}{a}\left(1+\frac{nc}{1-n}\right)^2.$

15. $\sqrt{x^2+2ax}+\sqrt{x^2-2ax}=\frac{na\sqrt{x}}{\sqrt{x+2a}},$

$\sqrt{x}$ ニテ兩邊ヲ除スヘシ然ルトキ $\sqrt{x}=0$ トス $\therefore$ $x=0,$

之ニ由テ $\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a}=\dfrac{na}{\sqrt{x+2a}}$,

故ニ $x+2a+\sqrt{x^2-4a}=na$ 即チ $x-a(n-2)=-\sqrt{x^2-4a^2}$

故ニ $x^2-2ax(n-2)+a^2(n-2)^2=x^2-4a^2$,

故ニ $2ax(n-2)=a^2\{(n-2)^2+4\}$ $\quad\therefore\ x=a\left\{\dfrac{n-2}{2}+\dfrac{2}{n-2}\right\}$.

之ニ由テ x ノ根ハ $0,\ a\left\{\dfrac{n-2}{2}+\dfrac{2}{n-2}\right\}$.

16. $\sqrt{ax}-1=4+\dfrac{\sqrt{ax}-1}{2}$ ヨリ $\qquad x=\dfrac{81}{a}$.

17. $\dfrac{1-2ax+a^2x^2}{1+2ax+a^2x^2}=\dfrac{1-bx}{1+bx}$, 12. 例ノ如クスレバ

故ニ $\dfrac{4ax}{2(1+a^2x^2)}=\dfrac{2bx}{2}$, x ニテ除スレバ $\qquad\therefore\ x=0$,

又 $\dfrac{2a}{1+a^2x^2}=b$, $\qquad\therefore\ x=\pm\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{2a}{b}-1}$.

18. $\dfrac{1+x+\sqrt{2x+x^2}}{1-x+\sqrt{2x+x^2}}=\dfrac{1-ax}{1}$, 12. 例ノ如クスレバ

$\dfrac{2x}{2+2\sqrt{2x+x^2}}=\dfrac{-ax}{2-ax}$, $\qquad\therefore\ x=0$,

又 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2x+x^2}}=\dfrac{-a}{2-ax}$ $\qquad$ 故ニ $ax-(a+2)=a\sqrt{2x+x^2}$,

平方ニスレバ $a^2x^2-4ax(a+2)+(a+2)^2=a^2(2x+x^2)$,

$$\therefore\ x=\frac{(a+2)^2}{4a(a+1)}.$$

19. 分母子ヲ有理ニセンカ為メ原方程式ヲ次ノ如クス,

$$\frac{(a+x)(\sqrt{a}-\sqrt{a+x})}{(\sqrt{a}+\sqrt{a+x})(\sqrt{a}-\sqrt{a+x})}+\frac{(a+x)(\sqrt{a}-\sqrt{a-x})}{(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})(\sqrt{a}-\sqrt{a-x})}=\sqrt{a},$$

即チ $\dfrac{(a+x)(\sqrt{a}-\sqrt{a+x})}{a-(a+x)}+\dfrac{(a-x)(\sqrt{a}-\sqrt{a-x})}{a-(a-x)}=\sqrt{a}$,

即チ $-(a+x)(\sqrt{a}-\sqrt{a+x})+(a-x)(\sqrt{a}-\sqrt{a-x})=x\sqrt{a}$,

故ニ $(a+x)\sqrt{a+x}-(a-x)\sqrt{a-x}=3x\sqrt{a}$,

即チ $\sqrt{(a+x)^3}-\sqrt{(a-x)^3}=3x\sqrt{a}$, 両邊ヲ平方ニスレバ

$(a+x)^3-2\sqrt{(a^2-x^2)^3}+(a-x)^3=9ax^2$,

故ニ $-2\sqrt{(a^2-x^2)^3}=3ax^2-2a^3$,

故ニ $4(a^2-x^2)^3=(3ax^2-2a^3)^2$, 之ヲ最簡ニスレバ

$4x^6-3a^2x^4=0$, 即チ $x^4(4x^2-3a^2)=0$ $\quad\therefore\ x=0,\ \pm\dfrac{a}{2}\sqrt{3}$.

20. $(1+x)\sqrt{1+a}+(1-x)\sqrt{1-a}=2\sqrt{1+x^2}$,

両邊ヲ平方ニスレバ

$(1+x)^2(1+a)+2(1-x^2)\sqrt{1-a^2}+(1-x)^2(1-a)=4(1+x^2)$,

$4(1+x^2)$ ハ $2(1+x)^2+2(1-x)^2$ ニ等シ故ニ之ヲ用フレバ

$(1+x)^2(1-a)-2(1-x^2)\sqrt{1-a^2}+(1-x)^2(1+a)=0$,

即チ $\{(1+x)\sqrt{1-a}-(1-x)\sqrt{1+a}\}^2=0$,

故ニ $(1+x)\sqrt{1-a}-(1-x)\sqrt{1+a}=0$,

$\therefore\ x=\dfrac{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}\times\dfrac{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}=\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$.

〔別法〕原方程式ヨリ

$(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})x+\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}=2\sqrt{1+x^2}$, 両邊ヲ平方ニスレバ

$(2-2\sqrt{1-a^2})x^2+4ax+2+2\sqrt{1-a^2}=4(1+x^2)$,

故ニ $(1+\sqrt{1-a^2})x^2-2ax+(1-\sqrt{1-a^2})=0$,

之ニ $1-\sqrt{1-a^2}$ ヲ乘スレバ

$$a^2x^2-2ax(1-\sqrt{1-a^2})+(1-\sqrt{1-a^2})^2=0,$$

即チ $\{ax-(1-\sqrt{1-a^2})\}^2=0$, $\qquad\therefore\ x=\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$.

高次方程式

9. 高次方程式 貳次ヨリ高キ方程式ハ一般ニ之ヲ解スル能ハス然レ𪜈其内特別ナルモノハ因子分割法或ハ二次方程式ノ解法ヲ用ヒテ解スルヿヲ得ヘシ此處ニテハ二次以上ノ方程式即チ高次方程式ノ內ニ於テ特別ニ解シ得ヘキモノヲ分類シテ讀者ニ紹介セントス。

$ax^3+bx^2+cx+d=0$, $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ ノ如キ方程式ハ一般ニ解スル能ハス而シテ此ノ如キ三次四次ノ解法ハ後編ニ示スヘシ然レ𪜈五次式即チ x^5 ヲ含ム方程式ニ至リテハ如何ナル方法ヲ用フルモ出來ヌモノト思フヘシ。

10. 準貳次方程式 ヲ次ニ示ス。

〔第壹例〕 $ax^{2n}+bx^n+c=0$ ヲ解セヨ。

$x^n=y$ トスレハ $ay^2+by+c=0$,

$$\therefore\quad y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=x^n,$$

$$x^n=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ \text{ヨリ}\quad x=\sqrt[n]{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

(大注意) $x^n=a$ ノ如キヲ $x=\sqrt[n]{a}$ トスルハ假リノヿニシテ是レハ次ノ二項方程式ニテ說明スヘシ。

〔第貳例〕 $x^2+ax+b+p\sqrt{x^2+ax+b}+q=0$ ヲ解セヨ。

$\sqrt{x^2+ax+b}=y$ トスレハ

$$y^2+py+q=0,$$

$$\therefore\quad y=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}=\sqrt{x^2+ax+b},$$

之ニ由テ $x^2+ax+b=\dfrac{(-p\pm\sqrt{p^2-4q})^2}{4}$ ヨリ x ヲ得。

11. 反商方程式 x ノ遞降方乘ニ整列セシ代數式ニ於テ初項ヨリ讀ムモ末項ヨリ讀ムモ係數カ同一ノ順序ニアルﾄキ之ヲ反商代數式トイフ。

例ヘハ ax^2+bx+a, ax^3+bx^2+bx+a ノ如シ而シテ此等ノ代數式ヨリ成レル方程式ヲ反商方程式トイフ。

例ヘハ次ノ如キハ二次以上ノ反商方程式ナリ。

$$ax^3+bx^2+bx+a=0,$$
$$ax^4+bx^3+bx^2+bx+a=0,$$
$$ax^5+b^4x^4+cx^3+cx^2+bx+a=0.$$

五次式以上ノ反商方程式ハ解スル能ハス。

又反商方程式ニ於テ初末各項ヨリ同一ノ符號ノ順序ニ在ラサルモノト雖𪜈解スヘキモノアリ次ノ如シ,

$$ax^3-bx^2+bx-a=0,$$
$$ax^4-bx^3+cx^2+bx+a=0,$$

或ハ
$$ax^4-bx^3-cx^2+bx+a=0,$$
$$ax^5-bx^4+cx^3-cx^2+bx-a=0.$$

〔第壹例〕 $ax^3+bx^2-bx-a=0$ ヲ解セヨ。

$a(x^3-1)+bx(x-1)=0$ 即チ $(x-1)\{a(x^2+x+1)+bx\}=0$,

故ニ $x-1=0$, $\qquad\therefore\quad x=1$,

或ハ $a(x^2+x+1)+bx=0$, $\qquad\therefore\quad x=\dfrac{-(a+b)\pm\sqrt{(a+b)^2-4a^2}}{2a}$.

〔第貳例〕 $ax^4+bx^3-cx^2-bx+a=0$ ヲ解セヨ。

$a(x^4+1)+bx(x^2-1)-cx^2=0$,

即チ $a\{(x^2-1)^2+2x^2\}+bx(x^2-1)-cx^2=0$,

$x^2-1=y$ トスレハ $a(y^2+2x^2)+bxy-cx^2=0$,

即チ $\quad y^2+\dfrac{b}{a}xy+\dfrac{(2a-c)x^2}{a}=0$,

y ノ二次方程式トシ之ヲ解スレハ

$$y=\frac{-bx\pm\sqrt{b^2x^2-4a(2a-c)x^2}}{2a}=x^2-1,$$

即チ　$x\{-b\pm\sqrt{b^2-8a^2+4ac}\}=2ax^2-2a,$

故ニ　$2ax^2-(-b\pm\sqrt{b^2+4ac-8a^2})x-2a=0,$

此方程式ヨリ x ヲ得ヘシ.

〔第三例〕 $ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a$ ヲ解セヨ.

$a(x^5+1)+bx(x^3+1)+cx^2(x+1)=0,$

即チ　$(x+1)\{a(x^4-x^3+x^2-x+1)+bx(x^2-x+1)+cx^2\}=0,$

故ニ　$x+1=0,$　　　$\therefore\ x=-1,$

或ハ　$ax^4-(a-b)x^3+(a-b+c)x^2-(a-b)x+a=0,$

此方程式ハ反商四次式ナリ故ニ第二例ニ由テ x ヲ得ヘシ.

12. 二項方程式 トハ $x^n\pm a^n=0$ ノ如キモノヲ云フ此方程式ハ六次式迄解スルヿヲ得ヘシ.

六次以上ハ八次,十次等ノ如ク x ノ指數カ 2, 3, 5 迄ノ素因子ノミヲ有スルモノニ限キル.

二項方程式ノ解法ハ幾何學ノ作圖ニ於テ圓内ニ正多角形ヲ畫クト同シ理ニシテ 2, 3, 5 ノ如キ素因子ノミヲ有スル邊數ヲ有スル正多角形ニアラサレハ正シキ作圖ヲ得ス.

〔第壹例〕 $x^3-a^3=0$ ヲ解セヨ.

$(x-a)(x^2+ax+a^2)=0,$

故ニ　$x-a=0,$　　　$\therefore\ x=a,$

或ハ　$x^2+ax+a^2=0,$　　　$\therefore\ x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3})a.$

〔第貳例〕 $x^4+a^4=0$ ヲ解セヨ.

$(x^2+a^2)^2-2a^2x^2=0,$

即チ　$(x^2+a^2+ax\sqrt{2})(x^2+a^2-ax\sqrt{2})=0,$

故ニ　$x^2+ax\sqrt{2}+a^2=0,$　　　$\therefore\ x=\frac{1}{2}(-\sqrt{2}\pm\sqrt{-2})a,$

或ハ　$x^2-ax\sqrt{2}+a^2=0,$　　　$\therefore\ x=\frac{1}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{-2})a.$

〔第三例〕 $x^5-a^5=0$ ヲ解セヨ.

$(x-a)(x^4+ax^3+a^2x^2+ax^3+a^4)=0,$

故ニ　$x-a=0,$　　　$\therefore\ x=a,$

或ハ　$x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4=0,$

此方程式ハ反商方程式ナリ故ニ 11. 章ニ由テ x ヲ得ヘシ.

13. 因子分割法 或特別ノ形チノ高次方程式ハ因子ニ分割シテ其根ヲ求ムルヿヲ得ヘシ例題ノ内ニテ示スヘシ.

例題四拾壹

次ノ各方程式ヲ解セヨ.

1. $\frac{x^4+1}{(x+1)^4}=\frac{1}{2}.$　　　2. $\sqrt{x^4-1}+\sqrt{x^2-1}=x^3.$

3. $x+4+\sqrt{\left(\frac{x+4}{x-4}\right)}=\frac{12}{x-4}.$　　　4. $x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}=4.$

5. $x^2(x+4)+2x(x+4)=2-(x+4).$

6. $2x^2-2x+2\sqrt{(2x^2-7x+6)}=5x-6.$

7. $x^2-x+5\sqrt{(2x^2-5x+6)}=\frac{1}{2}(3x+33).$

8. $x^2(x-2)^2+5x^2(x-2)=2(x-2).$

9. $(x-4)^2+2(x-4)=\frac{2}{x}-1.$

10. $x^2(x^2-18)=4(x-12).$　　　11. $(x+1)\sqrt{x}=2.$

12. $x^2(x-1)=8(x+2).$　　　13. $(x-3)x=3+4\sqrt{x}.$

14. $\frac{1}{2}x(x+1)=24+7x^{\frac{1}{2}}.$

15. $(x^2-27)^2=(x-5)(x-9)^3.$

16. $\left(\frac{x^2-11x+19}{x^2+x-11}\right)^2+\frac{3(x-2)}{x+2}=0.$

17. $x^4+6x^3+9x^2+6x+1=0.$

18. $x^5-6x^3-6x^2+1=0.$

19. $x(x+4)+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+4\right)=0.$

20. $(1+x)(1+3x)(1+5x)(1+7x)=x^4.$

21. $16x(x+1)(x+2)(x+3)=9.$

22. $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0.$

23. $(x^2+1)^2=4(2x-1).$　　24. $x^3=6x+3.$

25. $4x^3=6x+3.$　　26. $x^3+6x^2=36.$

27. $(x+a)\left(1+\frac{1}{x^2+a^2}\right)+\left(1-\frac{1}{x^2+a^2}\right)\sqrt{2ax}=2.$

28. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$
$$=(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2+(x+4)^2.$$

29. $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2+\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}.$

30. $2b(\sqrt{x+a}-b)+2c(\sqrt{x-a}+c =a.$

31. $(\sqrt{a+x}-\sqrt{a})(\sqrt{a-x}+\sqrt{a})=nx.$

32. $2(x+a)(x+c)+(a-c)^2=\frac{(x+c)^4}{c(x+a+c)}.$

33. $(x-1)^4+(x-2)^4+(x-3)^4+(x-4)^4=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$

84. $(x-1)^4+(x-3)^4+(x-5)^4+(x-7)^4=4(x-1)(x-3)(x-5)(x-7).$

35. $\frac{2x^4-4x^3+9x^2-4x+2}{(x^2+1)^2}$ ノ最小値ヲ求ム.

36. $x^6-1=0.$　　37. $x^8-1=0.$

〔讀者ニ謝ス〕講述者曰ク予ハ先頃病氣ノ爲メ非常ニ思考力ヲ消磨シタルカ故ニ此ニ示ス處ノ例題ノ如キハ是レ追記憶シタル處ヲ筆ニ任セテ羅列シタルニ過キス故ニ難題或ハ不要用ナル問題多カルヘシ然レ圧此等ノ題ハ初學者ハ之ヲ省フキ他日ノ考究トスレハ亦タ裨益アルヘシト信ス.

例題四拾壹解答

1. $\frac{x^4+1}{(x^2+2x+1)^2}=\frac{1}{2}$　即チ $\frac{(x^2+1)^2-2x^2}{(x^2+1)^2+4x(x^2+1)+4x^2}=\frac{1}{2},$

故ニ $2(x^2+1)^2-4x^2=(x^2+1)^2+4x(x^2+1)+4x^2,$

即チ $(x^2+1)^2-4x(x^2+1)+4x^2=12x^2,$ 兩邊ノ平方根ハ

$(x^2+1)-2x=\pm 2x\sqrt{3},$　即チ $x^2-2(\pm\sqrt{3}+1)x+1=0,$

故ニ $x^2-2(\pm\sqrt{3}+1)x+(\pm\sqrt{3}+1)^2=(\pm\sqrt{3}+1)^2-1,$

故ニ $x-(\pm\sqrt{3}+1)=\pm\sqrt{(\pm\sqrt{3}+1)^2-1}$

$$\therefore\ x\ \pm\sqrt{3}+1\pm\sqrt{3\pm 2\sqrt{3}}.$$

〔注意〕上ノ解法ニ於テ $\pm$ ニ注意スヘシ,

$x=\pm\sqrt{3}+1\pm\sqrt{3\pm 2\sqrt{3}}$ ハ四根ヲ含ム即チ次ノ如シ,

$x=+\sqrt{3}+1\pm\sqrt{3+2\sqrt{3}}$ ノ二根ト $x=-\sqrt{3}+1\pm\sqrt{3-2\sqrt{3}}$ ノ二根ナリ.

2. $\sqrt{x^4-1}=x^3-\sqrt{x^2-1}$ ノ兩邊ヲ平方ニスレハ.

$x^4-1=x^6-2x^3\sqrt{x^2-1}+x^2-1,$

即チ $x^2(x^4-x^2+1-2x\sqrt{x^2-1})=0,$

或ハ $x^4-x^2+1-2x\sqrt{x^2-1}=0,$

即チ $(x^4-x^2-1)+2=2x\sqrt{x^2-1}$ 此兩邊ヲ平方ニスレハ

$(x^4-x^2-1)^2+4(x^4-x^2-1)+4=4x^2(x^2-1),$

即チ $(x^4-x^2-1)^2=0$　　$\therefore\ x^4-1=0$ ヨリ

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{(2\pm 2\sqrt{5})}.$$

3. 兩邊ニ $x-4$ ヲ乘スレハ $(x^2-16)+\sqrt{(x^2-16)}=12,$

$x^2-16=y^2$ トスレハ $y^2+y-12=0,$　$\therefore\ y=3$ 或ハ $-4,$

之ニ由テ $x^2-16=9$ 或ハ 16　$\therefore\ x=\pm 5$ 或 $\pm 4\sqrt{2}.$

4. $(x+\frac{1}{x})^2+(x+\frac{1}{x})=6$ ニ於テ

$x+\frac{1}{x}=y$ トスレハ $y^2+y=6,$　$\therefore\ y=2$ 或ハ $-3,$

即チ $x+\frac{1}{x}=2$ 或ハ $x+\frac{1}{x}=-3,$

之ニ由テ $x=1$ 或ハ $-\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$

5. $x(x+4)(x+2)=-(x+2)$ 即チ $(x+2)\{x(x+4)+1\}=0$,

$\therefore\ x=-2$ 或 $x=-2\pm\sqrt{3}$.

6. $2x^2-7x+6+2\sqrt{(2x^2-7x+6)}=0$ トスレハ容易ナリ.

$x=2$ 或 $x=1\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{4}(7\pm\sqrt{33})$.

7. $(2x^2-5x+6)+2\sqrt{(2x^2-5x+6)}=33$,

$\therefore\ x=3,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}(5\pm\sqrt{1329})$.

8. $(x-2)\{x^2(x-2)+5x^2-2\}=0$,

即チ $(x-2)(x^3+3x^2-2)=0$,

即チ $(x-2)\{x^2(x+1)+2(x^2-1)\}=0$,

即チ $(x-2)(x+1)(x^2+2x-2)=0$, $\therefore\ x=2,\ -1,\ -1\pm\sqrt{3}$.

9. $x=2,\ -1,\ 2\pm\sqrt{3}$.

10. $x^4-18x^2-4x+48=0$,

故ニ $x^4-14x^2+49=4x^2+4x+1$, 即チ $(x^2-7)^2=(2x+1)^2$,

$\therefore\ x^2-7=\pm(2x+1)$, $\therefore\ x=4,\ -2,\ -1\pm\sqrt{7}$.

11. $\sqrt{x}=y$ トスレハ $(y^2+y)y=2$,

即チ $y(y^2-1)+2(y-1)=0$, $\therefore\ y-1=0$ 或ハ $y(y+1)+2=0$,

之ニ由テ $y=1$, $y=\frac{-1\pm\sqrt{-1}}{2}$ $\therefore\ x=1,\ \frac{-3\pm\sqrt{-7}}{2}$.

12. $x=4,\ \frac{1}{2}(3\pm\sqrt{-7})$. 13. $x=\frac{1}{2}(7\pm\sqrt{13}),\ \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})$.

14. $x=9,\ 4,\ \frac{1}{2}(15\pm\sqrt{-31})$.

15. 凡テ括弧ヲ解キ簡單ニスレハ $8x^3-108x^2+486x-729=0$,

即チ $(2x-9)^3=0$ 故ニ $2x-9=0$, $\therefore\ x=4\frac{1}{2}$.

16. $\frac{(x^2-11x+19)^2}{(x+x-11)^2}-1+\frac{3(x-2)}{x+2}+1=0$,

即チ $\frac{(x^2-11x+9)^2-(x^2+x-11)^2}{(x^2+x-11)^2}+\frac{4(x-1)}{x+2}=0$,

但シ $(x^2-11+19)^2-(x^2+x-11)^2=-3(x-1)(x-4)(2x-5)$,

故ニ原方程式ヲ $x-1$ ニテ除スレハ $x-1=0$ $\therefore\ x=1$,

或ハ $\frac{-3(x-4)(2x-5)}{(x^2+x-11)^2}+\frac{1}{x+2}=0$,

即チ $\frac{2x^2-13x+20}{x^2+x-11}-\frac{x^2+x-11}{3(x+2)}=0$,

即チ $\frac{2x^2-13x+20}{x^2+x-11}+1-\left\{\frac{x^2+x-11}{3(x+2)}+1\right\}=0$,

即チ $\frac{3(x-1)(x-3)}{x^2+x-11}-\frac{(x-1)(x+5)}{3(x+2)}=0$, 又 $x-1$ ニテ除スレハ

$x=1$ 或ハ $\frac{3(x-3)}{x^2+x-11}-\frac{x+5}{3(x+2)}=0$,

即チ $\frac{3(x^2-x-6)}{x^2+x-11}-\frac{x+5}{3}=0$,

即チ $\frac{3(x^2-x-6)}{x^2+x-11}-2-\left\{\frac{x+5}{3}-2\right\}=0$,

即チ $\frac{x^2-5x+4}{x^2+x-11}-\frac{x-1}{3}=0$ 又 $x-1=0$ $\therefore\ x=1$,

或ハ $\frac{x-4}{x^2+x-11}-\frac{1}{3}=0$ $\therefore\ x=1$, 或ハ 1.

17. $x=\frac{1}{2}(-7\pm3\sqrt{5})$, $x=\frac{1}{2}(1-\pm\sqrt{-3})$.

18. $(x-1)(x^4-x^3-5x^2-x+1)=0$ ヨリ x ヲ得.

19. $x=\frac{1}{2}(-2+\sqrt{6}\pm\sqrt{6-4\sqrt{6}})$ 或ハ $\frac{1}{2}(-2-\sqrt{6}\pm\sqrt{6+4\sqrt{6}})$.

20. $(1+x)(1+7x)(1+3x)(1+5x)=9x^4$,

即チ $(1+8x+7x^2)(1+8x+15x^2)=9x^4$,

即チ $\{(1+8x+11x^2)-4x^2\}\{1+8x+11x^2)+4x^2\}=9x^4$,

即チ $(1+8x+11x^2)^2-16x^4=9x^4$,

$\therefore\ 1+8x+11x^2=\pm5x^2$ ヨリ四ツノ答ヲ得,

即チ $x=\frac{1}{6}(-4\pm\sqrt{10})$, $x=-\frac{1}{4}$.

21. $x=-\frac{3}{2},\qquad x=\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{10}).$

22. $(x^4+2x^2+4)+2x(x^2+2)-13x^2=0,\qquad x^2+2=y$ トスレハ

$y^2+2xy-13x^2=0,\qquad \therefore\ y=x(-1\pm\sqrt{14}),$

之ニ由テ　$x^2+2=x(-1\pm\sqrt{14})$

$$\therefore\ x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{14}\pm\sqrt{7\mp2\sqrt{14}}).$$

23. $x^4+2x^2-8x+5=0,$

即チ　$(x^2-1)^2+4(x-1)^2=0,\qquad \therefore\ (x-1)^2=0,\qquad \therefore\ x=1,$

或ハ　$(x+1)^2+4=0,\qquad \therefore\ x=-1\pm2\sqrt{-1}.$

24. 25. 26. ノ三題ハ困難ナリ由テ解答ヲ省ク蓋シ講述者ハ之ヲ解スル能ハザルニ非ス初學者ニ示スヘキ眞方法ヲ得タル上ニテ掲載セントス讀者モ亦此三題ノ眞解ヲ工夫セラレヨ.

27. $x+a+\sqrt{2ax}+\frac{x+a-\sqrt{2ax}}{(x+a)^2-(\sqrt{2ax})^2}=2,$

即チ　$x+a+\sqrt{2ax}+\frac{1}{x+a+\sqrt{2ax}}=2$

故ニ　$(x+a+\sqrt{2ax})^2-2(x+a+\sqrt{2ax})+1=0.$

之ニ由テ　$(x+a+\sqrt{2ax})-1=0,$

$x+\sqrt{2ax}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{2a}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{2a}\right)^2-a+1,$

$\therefore\ \sqrt{x}+\frac{a}{\sqrt{2}}=\pm\sqrt{\frac{2-a}{2}}\qquad \therefore\ x=\frac{1}{2}(-a\pm\sqrt{2-a})^2.$

28. $x+\frac{5}{2}=y$ トスレハ

$$\left(y-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)$$
$$=\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2,$$

即チ　$\left(y^2-\frac{9}{4}\right)\left(y^2-\frac{1}{4}\right)=2\left(y^2+\frac{9}{4}\right)+2\left(y^2+\frac{1}{4}\right),$

$y^4-\frac{5}{2}y^2+\frac{9}{16}=4y^2+5\qquad \therefore\ y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{(13\pm4\sqrt{5})},$

之ニ由テ　$x=-\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(13\pm4\sqrt{5})}.$

29. $$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2+2\left(\frac{x+a}{x+b}\right)\left(\frac{x-a}{x-b}\right)+\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2$$
$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}\right)+2\left(\frac{x+a}{x+b}\right)\left(\frac{x-a}{x-b}\right),$$

即チ　$\left(\frac{x+a}{x+b}+\frac{x-a}{x-b}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\left(\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}\right),$

之ニ由テ　$\frac{(x+a)(x-b)+(x-a)(x+b)}{x^2-b^2}=\pm\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\sqrt{\left(\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}\right)},$

$\therefore\ \frac{2(x^2-ab)}{x^2-b^2}=\pm\left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)\sqrt{\left(\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}\right)},$

即チ　$2(x^2-ab)\sqrt{ab}=\pm(a+b)\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)},$

故ニ　$4(x^4-2abx^2+a^2b^2)ab=(a+b)^2\{x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2\},$

故ニ　$(a-b)^2x^4-(a-b)^2(a^2+b^2-4ab)x^2+a^2b^2(a-b)^2=0,$

故ニ　$x^4-(a^2+b^2-4ab)x^2+a^2b^2=0.$

即チ　$x^4-(a^2+b^2-4ab)x^2+\left(\frac{a^2+b^2}{2}-2ab\right)^2=\left(\frac{a^2+b^2}{2}-2ab\right)^2-a^2b^2,$

故ニ　$x^2-\left(\frac{a^2+b^2}{2}-2ab\right)=\pm\sqrt{\left\{\frac{(a^2+b^2)^2}{4}-2ab(a^2+b^2)+4a^2b^2-a^2b^2\right\}}$

故ニ　$x^2=\frac{a^2+b^2}{2}-2ab\pm\sqrt{\left\{\frac{(a^2-b^2)^2}{4}-2ab(a-b)^2\right\}},$

$$\therefore\ x=\pm\sqrt{\left[\frac{a^2+b^2}{4}-2ab\pm(a-b)\sqrt{\left\{\frac{(a+b)^2}{4}-2ab\right\}}\right]}.$$

30. $4b\sqrt{x+a}-4b^2+4c\sqrt{x-a}+4c^2-2a,$

$2a=x+a-(x-a)$ ナルガ故ニ

$(x-a)+4c\sqrt{x-a}+4c^2=(x+a)-4b\sqrt{x+a}+4b^2,$

故ニ　$\pm\sqrt{x-a}+2c=\pm(\sqrt{x+a}-2b),$ ……………………(A)

故ニ　$\pm\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}=2(\pm b+c),$

之ニ由テ　$x+a\mp2\sqrt{(x^2-a^2)}+x-a=4(b\pm c)^2,$ 之ヨリ答ヲ得.

此方程式(A)ハ　$\sqrt{x-a}+2c=\sqrt{x+a}-2b,$

及ヒ　$\sqrt{x-a}+2c=-\sqrt{x+a}+2b,$

此兩方程式ニ分チテ解スルモ可ナリ $\pm$ ノ符號アルトキハ初學者ニハ此ノ如ク分チテ解スル方ヨロシ.

31. $(\sqrt{a+x}-\sqrt{a})(\sqrt{a-x}+\sqrt{a})=n\{(a+x)-a\}$,

即チ $(\sqrt{a+x}-\sqrt{a})\{\sqrt{a-x}+\sqrt{a}-n\sqrt{(a+x)}-n\sqrt{a}\}=0$,

$\therefore$ $\sqrt{a+x}-\sqrt{a}=0$, 即チ $a+x=a$.

或ハ $\sqrt{a-x}+\sqrt{a}-n\sqrt{(a+x)}-n\sqrt{a}=0$,

即チ $\sqrt{a-x}-(n-1)\sqrt{a}=n\sqrt{(a+x)}$.

故ニ $a-x-2(n-1)\sqrt{a(a-x)}+(n-1)^2a=n^2(a+x)$,

即チ $x(n^2+1)+2a(n-1)=-2(n-1)\sqrt{a(a-x)}$,

故ニ $x^2(n^2+1)^2+4ax(n^2+1)(n-1)+4a^2(n-1)^2=4a(n-1)^2(a-x)$,

即チ $x^2(n^2+1)^2+4anx(n^2-1)=0$, $\therefore$ $x=0$, $x=\dfrac{-4an(n^2-1)}{(n^2+1)^2}$.

32. $2(x+a)(x+c)+(a-c)^2=\dfrac{(x+c)^4}{c(2x+a+c)}$,

即チ $2(x+a)(x+c)+\{(x+a)-(x+c)\}^2=\dfrac{(x+c)^4}{c\{(x+a)+(x+c)\}}$,

即チ $\{(x+a)^2+(x+c)^2\}\{(x+a)+(x+c)\}=\dfrac{(x+c)^4}{c}$,

$\therefore$ $\left\{\left(\dfrac{x+a}{x+c}\right)^2+1\right\}\left\{\left(\dfrac{x+a}{x+c}\right)+1\right\}=\dfrac{x+c}{c}$,

$\dfrac{x+a}{x+c}=z$ トスレハ $x=\dfrac{a-cz}{z-1}$, $\therefore$ $x+c=\dfrac{a-c}{z-1}$

之ニ由テ $(z^2+1)(z+1)=\dfrac{a-c}{c(z-1)}$,

$\therefore$ $c(z^4-1)=a-c$ $\therefore$ $z=\sqrt[4]{\dfrac{a}{c}}$,

$$\therefore \quad x=\frac{a-cz}{z-1}=\frac{a-c\sqrt[4]{\dfrac{a}{c}}}{\sqrt[4]{\dfrac{a}{c}}-1}.$$

33. $x-\dfrac{5}{2}=y$ トスレハ原方程式ハ

$$\left(y+\frac{3}{2}\right)^4+\left(y+\frac{1}{2}\right)^4+\left(y-\frac{1}{2}\right)^4+\left(y-\frac{3}{2}\right)^4$$

$$=4\left(y+\frac{3}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right),$$

即チ $2\left\{y^4+6y^2\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^4\right\}+2\left\{y^4+6y^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\right\}$

$$=4\left(y^2-\frac{9}{4}\right)\left(y^2-\frac{1}{4}\right),$$

即チ $2y^4+15y^2+\dfrac{41}{8}=2\left(y^4-\dfrac{5}{2}y^2+\dfrac{9}{16}\right)$,

之ニ由テ $y=\pm\sqrt{-\dfrac{1}{5}}$, $\therefore$ $x=y+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}\pm\sqrt{-\dfrac{1}{5}}$.

34. $x-4=y$ トシ前例ノ如クスヘシ, $x=4\pm2\sqrt{-\dfrac{1}{5}}$.

35. 原式 $=\dfrac{2(x^2+1)^2-4(x^2+1)x+5x^2}{(x^2+1)^2}$

$$=2-\frac{4x}{x^2+1}+5\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2=\lambda \text{ トス},$$

$\dfrac{x}{x^2+1}=y$ トスレハ $2-4y+5y^2=\lambda$,

即チ $5y^2-4y+(2-\lambda)=0$,

x カ實數ナルキ y ハ實數ナリ故ニ上ノ y ノ方程式ニ於テ x カ實數ナルキ $(-4)^2-4\times5(2-\lambda)\not<0$,

即チ $\lambda-\dfrac{6}{5}\not<0$ $\therefore$ $\lambda=\dfrac{6}{5}$ 即チ所求ノ最小値ナリ.

36. $(x^3+1)(x^3-1)=0$ ヨリ $x=-1$, 1,

$$\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3}), \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3}),$$

37. $(x^2+1)(x^2-1)(x^4+1)=0$ ヨリ

$$x=\pm\sqrt{-1}, \quad \pm1, \quad \frac{1}{2}(\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}).$$

第拾貳號

聯立壹次方程式

1. 聯立方程式 (*Simultaneous Equations.*) トハ貳ツ或ハ貳ツ以上ノ未知數量ヲ有スル方程式カ貳ツ或ハ貳ツ以上アリテ此等ノ方程式カ同時ニ成リ立ツヿヲイフナリ之ヲ或ハ通同方程式又ハ同時方程式トイフ.

x 及ヒ y ノ貳未知數ヲ有スル聯立壹次方程式ニヨリ講義ヲ始シムヘシ.

2. 貳未知數之聯立壹次方程式 $2x+3y=28$, $4x-y=14$ ノ如キハ x, y, ノ聯立壹次方程式ナリ其故ハ第壹ノ方程式モ第貳ノ方程式モ $x=5$, $y=6$ ナル根ヲ共有シ即チ $x=5$, $y=6$ トスレハ双方同時ニ成ツ立ナリ,

即チ　$x=5$, $y=6$ トスレハ　第壹ハ $2\times5+3\times6=28$,

又　$x=5$, $y=6$ トスレハ　第貳ハ $4\times5-6=14$,

3. 解法 上ノ如ク $2x+3y=28$, $4x-y=14$ ノ根ヲ求ムルニハ次ノ如クスヘシ.

第貳ニヲ乘シテ $12x-3y=42$ トシ

之ニ第壹　$2x+3y=28$ ヲ加フレハ $-3y$ ト $3y$ ハ消去セラレテ　$14x=42+28$ トナリ x ノ壹次方程式トナルカ故ニ $x=5$.

又 $x=5$ ヲ第壹ニ用フレハ $2\times5+3y=28$ $\therefore y=6$,

或ヘ $x=5$ ヲ第貳ニ用フルモ $4\times5-y=14$ $\therefore y=6$.

〔注意〕之ニ由テ貳ツノ方程式ニ於テ x 或ハ y ノ何レニテモ其壹ツヲ消去スレハ壹未知數量ノ壹次方程式壹ツヲ得テ容易ニ求メ得ラルヘシ.

4. 解法之種類 ヲ次ニ三ツニ分ヲテ示サントス

$7x+3y=23$ 及ヒ $6x+5y=27$ ニ於テ

〔第壹〕第壹ニ 5 (第貳ノ y ノ係數) ヲ乘スレハ

$$35x+15y=115,$$

第貳ニ 3 (y ノ係數) ヲ乘スレハ　$18x+15y=81$,

此新タニ得タル第壹ヨリ第貳ヲ減スレハ

$$17x=34 \quad \therefore \quad x=2,$$

$x=2$ ヲ第貳ニ用フレハ $6\times2+5y=27$, $\therefore$ $y=3$.

〔第貳〕第壹ヨリ y ヲ求ムレハ $y=\dfrac{23-7x}{3}$,

第貳ヨリ y ヲ求ムレハ $y=\dfrac{27-6x}{5}$,

之ニ由テ $\dfrac{23-7x}{3}=\dfrac{27-6x}{5}$ 此方程式ヨリ $x=2$,

但シ $y=\dfrac{23-7x}{3}=\dfrac{23-7\times2}{3}=3$.

〔第三〕$y=\dfrac{23-7x}{3}$ ヲ第貳ニ用フレハ

$$6x+5\times\frac{23-7x}{3}=27, \qquad \therefore \quad x=2.$$

以上ノ三方法ノ内例題ノ場合ニヨリテ何レヲ用フルモ適宜ナリ然レモ通例ハ第壹ヲ用フ.

先ツ初學者ハ上ノ規則ヲ守リテ解スルヲ可トス少シク上手ニ成リタル人ハ次ノ如ク臨機應變ノ方法ヲ施スヘシ此等ノ方法ハ漸次ニ自身ニテ考察スルヿ必要ナリ.

5. 特別之解法

ハ限リ無シト雖モ最モ注意スヘキモノヲ次ニ示サン.

〔第壹例〕 $59x+47y=353,\quad 47x+59y=389$ ヲ解ケヨ.

第壹ヨリ第貳ヲ減スレハ $12x-12y=353-389,$

之ヲ12ニテ除スレハ $x-y=-3.$

第壹ニ第貳ヲ加フレハ $106x+106y=353+389$

之ヲ106ニテ除スレハ $x+y=7,$

$x-y=-3,\quad x+y=7$ ヨリ $x=2,\quad y=5.$

〔第貳例〕 $x+3y=5,\quad \dfrac{2x+6y+5}{15}+\dfrac{2x-5y+1}{11}=2x$ ヲ解ケヨ.

$x=5-3y$ トシ之ヲ第貳ニ用フレハ

$$\frac{2(5-3y)+6y+5}{15}+\frac{2(5-3y)-5y+1}{11}=2(5-3y).$$

即チ $\dfrac{15}{15}+\dfrac{11-11y}{11}=10-6y$ 即チ $1+1-y=10-6y$

$\therefore\ y=\dfrac{8}{5}.$ 由テ $x=5-3\times\dfrac{8}{5}=\dfrac{1}{5}.$

6. 壹般之解法

$ax+by=c,\quad a'x+b'y=c'$ ヲ解セントス.

第壹ニ b' ヲ乗スレハ $ab'x+bb'y=b'c,$

第貳ニ b 乗スレハ $a'bx+bb'y=bc',$

減法ニ由テ $(ab'-a'b)x=b'c-bc'\quad \therefore\ x=-\dfrac{bc'-b'c}{ab'-a'b}.$

第壹ニ a', 第貳ニ b テ乗シテ前ノ如ク

減法ヲ施セハ x ハ消去セラレ, $\quad\therefore\ y=-\dfrac{ca'-c'a}{ab'-a'b}.$

又 $ax+by+c=0,\quad a'x+b'y+c'=0$ ヲ解スレハ前ノ c 及ヒ c' ハ凡テ $-c$ 及ヒ $-c'$ トナルカ故ニ

$$x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\qquad y=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}.$$

7. 十文字之記法

$ax+by+c=0,\quad a'x+b'y+c'=0$ ノ解答ハ前章ニ由テ $x=\dfrac{b'c-b'c}{ab'-a'b}$ 及ヒ $y=\dfrac{ca'-c'a}{ab'-a'b},$

故ニ $\dfrac{x}{bc'-b'c}=\dfrac{1}{ab'-a'b}$ 及ヒ $\dfrac{y}{ca'-c'a}=\dfrac{1}{ab'-a'b}.$

之ニ由テ $$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b}\qquad(1).$$

$ax+by=c$ 及ヒ $a'x+b'y=c'$ ノ解答ハ (1) ニ於テ c 及ヒ c' ノ代リニ $-c$ 及ヒ c' ヲ用フレハ

$$\frac{x}{-bc'+b'c}=\frac{y}{-ca'+c'a}=\frac{1}{ab'-a'b},$$

即チ $$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{-1}{ab'-a'b}\qquad(2).$$

(1) ハ次ノ如ク十文字ノ乗法ニテ容易ニ記シ得ヘシ,

$ax+by+c=0,\quad a'x+b'y+c'=0$ ニ於テ

$$\begin{array}{ccccccc} a & & b & & c & & a \\ & \times & & \times & & \times & \\ a' & & b' & & c' & & a' \end{array}$$

1ノ分母	xノ分母	yノ分母

$ab'-a'b,\quad bc'-b'c,\quad ca'-c'a.$

即チ $$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b}.$$

$ax+by=c,\quad a'x+b'y=c'$ ニ於テハ

$ax+by+c(-1),\quad a'x+b'y+c'(-1)=0$ ヨリ

$$\begin{array}{ccccccc} a & & b & & c & & a \\ & \times & & \times & & \times & \\ a' & & b' & & c' & & a' \end{array}$$

-1ノ分母	xノ分母	yノ分母

即チ $\dfrac{x}{bc'-bc'}=\dfrac{y}{ca'-c'a}=\dfrac{-1}{ab'-a'b}$.

〔例〕 $5x-3y=7,\quad 11x+8y=103$ ヲ解セヨ.

$$\begin{matrix}5\\11\end{matrix}><\begin{matrix}-3\\8\end{matrix}><\begin{matrix}7\\103\end{matrix}><\begin{matrix}5\\11\end{matrix}\qquad \frac{x}{-3.103-8.7}=\frac{y}{7.11-103.5}=\frac{-1}{5.8-11(-3)},$$

-1 ノ分母　x ノ分母　y ノ分母

即チ $\dfrac{x}{-365}=\dfrac{y}{-438}=\dfrac{-1}{73}$,

之ニ由テ $x=\dfrac{365}{3}=5,\qquad y=\dfrac{438}{73}=6.$

8. 特別之場合 $ax+by=c,\quad a'x+b'y=c'$ ヨリ y ヲ消去スレハ

$$(ab'-a'b)x=b'c-bc' \qquad (1)$$

又 x ヲ消去スレハ

$$(ab'-a'b)y=c'a-ca' \qquad (2)$$

〔第壹〕 $ab'-a'b\neq 0$ ナル時 x 及ヒ y ノ根ハ有限ナリ.

〔第貳〕 $ab'-a'b=0$ ニシテ $b'c-bc'\neq 0$ ナル時 (1) ヨリ x ヲ求メンニハ兩邊ヲ $ab'-a'b$ 即チ 0 ニテ除セサルヘカラス,

即チ $x=\dfrac{b'c-b'}{ab'-a'b}$ 是レ原則ニ反セリ故ニ此場合ニ於テハ此方程式ハ不合理ナリ而シテ $ab'-a'b=0$ ナル時 $b'=\dfrac{a'b}{a}$ ナルカ故ニ

$b'c-bc'\neq 0$ ハ $\dfrac{a'b}{a}c-bc'\neq 0$ 即チ $\dfrac{b}{a}(ca'-c'a)\neq 0$,

即チ $(ca'-c'a)\neq 0$ トナルヘシ.

〔第三〕 $ab'-a'b=0,\quad b'c-bc'=0$ ナル時兩方程式ハ全ク相同シクナルヘシ,

何トナレハ $ab'-a'b=0$ ヨリ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}$ 又 $bc'-b'c=0$ ヨリ $\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$

$\therefore\ \dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}=\lambda$ トスレハ

$a=a'\lambda,\quad b=b'\lambda,\quad c=c'\lambda,$

故ニ $a'x+b'y=c'$ ニ λ ヲ乘スレハ

$a'\lambda x+b'\lambda y=c'\lambda$ 即チ $ax+by=c$ トナル,

故ニ兩方程式ハ全ク相同シ故ニ此場合ニ於テハ x 及ヒ y ノ根値ノ數ハ限リ無シ.

例題四拾貳

次ノ各聯立方程式ヲ解セヨ.

1. $17x+23y=86,\qquad 23x+17y=74.$
2. $15x+19y=18,\qquad 19x+15y=50.$
3. $51x-14y=287,\qquad 14x-51y=-157.$
4. $x+\dfrac{3}{y}=\dfrac{7}{2},\qquad 3x-\dfrac{2}{y}=\dfrac{26}{3}.$
5. $\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}+5=\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{y}=10.$
6. $3x+1=2y+1=3y+2x.$
7. $\dfrac{10x-y-2}{19}+\dfrac{x+12y-4}{5}=\dfrac{3\{x-5(y-7)\}}{9}+1.$

   $x-2y=4.$
8. $\dfrac{2}{8}\left(x-\dfrac{3}{5}y\right)+\dfrac{x+\frac{1}{5}y}{6}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\frac{4}{5}y-2}{6}-x-y\right),$

   $x-2y-\dfrac{3y-5x}{2}=\dfrac{11}{2}(x+y)+3(x-y).$
9. $16x+6y-1=\dfrac{128x^2-18y^2+217}{8x-3y+2},$

   $\dfrac{10x+10y-35}{2x+2y+3}=5-\dfrac{54}{3x+2y-1}.$
10. $ax+by=2ab,\quad ax-ay=b^2-a^2.$

11. $(b+c)x+(b-c)y=2ab,\quad (c+a)x+(c-a)y=2ac.$

12. $bx+ay=2ab,\quad a^2x+b^2y=a^3+b^3.$

13. $(a+b)x+by=ax+(b+a)y=a^3-b^3.$

14. $(a+h)x+(b-h)y=c,\quad (a+k)x+(a-k)y=c.$

15. $ax+by=0,\quad (a-b)x+(a+b)y=c.$

16. $(a+b)x+(a+c)y=a+b,\quad (a+c)x+(a+b)y=a+c.$

例題四拾壹解答

1. $17x+23y=86\ldots\ldots\ldots(1),\qquad 23x+17y=74\ldots\ldots\ldots(2),$

(1) ニ (2) ヲ加フレハ

$40x+40y=160,$　　故ニ　$x+y=4\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3),$

(1) ヨリ (2) ヲ減スレハ

$-6x+6y=12,$　　故ニ　$x-y=-2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4),$

(3) 及ヒ (4) ヨリ　$x=1,\quad y=3.$

2. 前例ト同法, $x=5,\quad y=3.$　　3. $x=7,\quad y=5.$

4. $x+\dfrac{3}{y}=\dfrac{7}{2}$ ニ 2 ヲ乘スレハ　$2x+\dfrac{6}{y}=7\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$

$3x-\dfrac{2}{y}=\dfrac{26}{3}$ ニ 3 ヲ乘スレハ　$9x-\dfrac{6}{y}=26\ldots\ldots\ldots\ldots(2),$

(1) ニ (2) ヲ加フレハ　$11x=33$　　$\therefore\ x=3,$

之ニ由テ (1) ヨリ $6+\dfrac{6}{y}=7,$　　$\therefore\ y=6.$

5. $\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}+5=10$ ヨリ $\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}=5\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$

$\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{y}=10\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2),$

(1) 及ヒ (2) ヨリ x 及ヒ y ヲ得ヘシ即チ $x=\dfrac{2}{3},\quad y=3.$

6. $3x+1=2y+1$ ヨリ　$y=\dfrac{3}{2}x,$

又 $2y+1=5y+2x$ ヨリ $2x+y=1$ 之ニ $y=\dfrac{3}{2}x$ ヲ用フレハ

$2x+\dfrac{3}{2}x=1,\qquad \therefore\ x=\dfrac{2}{7},\qquad y=\dfrac{3}{7}.$

7. $x-2y=4$ ヨリ $x=2y+4$ 之ヲ第壹ノ方程式ニ用フレハ

$$\frac{10(2y+4)-y-2}{19}+\frac{2y+4+12y-4}{5}=\frac{3\{2y+4-5(y-7)\}}{9}+1,$$

即チ　$\dfrac{19y+38}{19}+\dfrac{14y}{5}=\dfrac{3(-3y+39)}{9}+1,$

即チ　$y+2+\dfrac{14y}{5}=-y+13+1,\qquad \therefore\ 2y+\dfrac{14}{5}y=12,$

即チ　$10y+14y=60\qquad \therefore\ y=\dfrac{5}{2},\quad x=2\times\dfrac{5}{2}+4=9.$

8. 第貳ノ方程式ノ分母ヲ拂ヘハ

$$2x-4y-(3y-5x)=11(x+y)+6(x-y),$$

即チ　$7x-7y=17x+5y\qquad \therefore\ y=-\dfrac{5}{6}x.$

$y=-\dfrac{5}{6}x$ ヲ第壹ノ方程式ニ用フレハ

$$\frac{2}{3}\left(x+\frac{3}{5}\times\frac{5}{6}x\right)+\frac{x-\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}x}{6}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{-\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}x-2}{6}-x+\frac{5}{6}x\right),$$

即チ　$x+\dfrac{5}{36}x=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x}{9}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}x\right),$

分母ヲ拂ヘハ　$36x+5x=12-18\left(-\dfrac{x}{9}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}x\right),$

即チ　$41x=12+2x+6+3x\qquad \therefore\ x=\dfrac{1}{2},\quad y=-\dfrac{5}{12}.$

9. 第壹ノ方程式ノ後[illegible]ノ分數式ノ分母 $8x-3y+2$ ニテ其分子 $128x^2-18y^2+217$ ヲ除スレハ第壹ハ次ノ如クナルヘシ,

$$16x+6y-1=16x+6y+\frac{-32x-12y+217}{8x-3y+2},$$

即チ　$-(8x-3y+2)=-32x-12y+217,$

即チ　$24x+15y=219\qquad \therefore\ 8x+5y=73\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

第貳ノ方程式ノ前邊ヲ變スレハ

$$5+\frac{-50}{2x+2y+3}=5-\frac{54}{3x+2y-1},$$

故ニ $-25(3x+2y-1)=-27(2x+2y+3)$,

故ニ $-21x+4y=-106$……………… (2),

(1) 及ヒ (2) ヨリ $x=16$, $y=-11$.

10. $x=b$, $y=a$.

11. 第壹ニ c ヲ乘スレハ $(bc+c^2)x+(bc-c^2)y=2abc$,

第貳ニ b ヲ乘スレハ $(bc+ab)x+(bc-ab)y=2abc$,

第壹ヨリ第貳ヲ減スレハ $(c^2-ab)x-(c^2-ab)y=0$,

即チ $x-y=0$ ∴ $x=y$.

之ニ由テ第壹ヨリ $(b+c)x+(b-c)x=2ab$ ∴ $x=y=a$.

12. $x=a$, $y=b$. 13. $x=a(a-b)$, $y=b(a-b)$.

14. 第壹ヨリ第貳ヲ減スレハ

$(a-b+h-k)x-(a-b+h-k)y=0$ ∴ $x=y$,

之ニ由テ第壹ヨリ $(a+h)x+(b-h)x=c$ ∴ $x=y=\dfrac{c}{a+b}$.

15. 第壹ヨリ $y=-\dfrac{a}{b}x$ 之ヲ第貳ニ用フレハ

$(a-b)x+(a+b)\left(-\dfrac{a}{b}x\right)=c$ ∴ $x=-\dfrac{bc}{a^2+b^2}$, $y=\dfrac{ac}{a^2+b^2}$.

16. 第壹ヨリ第貳ヲ減スレハ

$(b-c)x-(b-c)y=b-c$ ∴ $x-y=1$,

第壹ニ第貳ヲ加フレハ

$(2a+b+c)x+(2a+b+c)y=2a+b+c$ ∴ $x+y=1$.

$x-y=1$, $x+y=1$ ヨリ $x=1$, $y=0$.

9. 三未知數量

貳未知數量 x 及ヒ y ヲ含ム聯立方程式貳ツアルトキハ此貳ツヨリ y (或ハ x) ヲ消去シテ x ノ壹方程式ヲ得而シテ之ヨリ x (或ハ y) ヲ決定シ得ヘシ.

三未知數量 x, y, z ヲ含ム聯立方程式三ツアルトキハ第壹及ヒ第貳ヨリ z (或ハ x 或ハ y) ヲ消去シ又第貳及ヒ第三ヨリ z (或ハ x 或ハ y) ヲ消去シ x 及ヒ y ノ両方程式ヲ得ヘシ然ルトキハ前章ノ方法ニ由テ x 及ヒ y ヲ得ヘシ.

〔第壹例〕 $x+2y+3z=6$, $2x+4y+z=7$, $3x+2y+9z=14$ ヲ解セヨ.

第貳ニ3ヲ乘シテ第壹ヨリ減スレハ $-5x-10y=-15$ (1).

第壹ニ3ヲ乘シテ第三ヲ減スレハ $4y=4$ (2).

(2) ヨリ $y=1$ ∴ (1) ヨリ $-5x-10\times1=-15$ ∴ $x=1$.

$x=y=1$ ヲ第壹ニ用フレハ $1+2+3z=6$ ∴ $z=1$.

〔第貳例〕 $5x+3y+7z=2$, $2x-4y+9z=7$, $3x+2y+6z=3$ ヲ解セヨ.

第壹ニ6ヲ乘シ第三ニ7ヲ乘シ減法ヲ用フレハ

$9x+4y=-9$……………………… (1).

第貳ニ2ヲ乘シ第三ニ3ヲ乘シ減法ヲ用フレハ

$-5x-14y=5$……………………… (2).

(1) 及ヒ (2) ヨリ $53x=-53$, ∴ $x=-1$,

$x=-1$ ヲ (1) ニ用フレハ $-9+4y=-9$, ∴ $y=0$,

$x=-1$, $y=0$ ヲ第壹ニ用フレハ $-5+0+7z=2$ ∴ $z=1$.

10 壹般之解法

次ノ方程式ヲ解セントス,

$$ax+by+cz=d,$$
$$a'x+b'y+c'z=d',$$
$$a''x+b''y+c''z=d''.$$

第壹ニ c' ヲ乘シ第貳ニ c ヲ乘シ減法ヲ用スレハ

$$(ac'-a'c)x+(bc'-b'c)y=dc'-d'c \qquad (1)$$

第貳ニ c'' ヲ乘シ第三ニ c' ヲ乘シ減法ヲ用ノレハ

$$(a'c''-a''c')x+(b'c''-b''c')y=d'c''-d''c' \qquad (2).$$

(1) 及ヒ (2) ヨリ y ヲ消去スレハ

$$x=\frac{(dc'-d'c)(b'c''-b''c')-(d'c''-d''c')(bc'-b'c)}{(ac'-a'c)(b'c''-b''c')-(a'c''-a''c')(bc'-b'c)}.$$

y 及ヒ z モ同様ニ求メ得ラルヘシ.

11. 不定係數 不定係數ヲ用ヒテ三未知數量ノ三方程式ヲ解スルハ最モ好キ方法ナリ今了解シ易カラシメンカ爲メ先ツ兩未知數量ノ兩方程式ヲ解スヘシ.

例ヘハ $5x+7y=62,\ 7x+6y=64$ ヲ解セントス.

第貳ニ不定係數 λ ヲ乘スレハ $7\lambda x+6\lambda y=64\lambda$ 之ヲ第壹ニ加フレハ $(5+7\lambda)x+(7+6\lambda)y=62+64\lambda$,

此方程式ニ於テ x ヲ求メンカ爲メ $7+6\lambda=0$ トナスヘキ λ ノ値ヲ求ムヘシ即チ $7+6\lambda=0$ ヨリ $\lambda=-\frac{7}{6}$.

之ニ由テ $x=\dfrac{62+64\lambda}{5+7\lambda}=\dfrac{62+64\left(-\frac{7}{6}\right)}{5+7\left(-\frac{7}{6}\right)}=\dfrac{-76}{-19}=4.$

又 y ヲ求ムルニハ $5+7\lambda=0$ ヨリ $\lambda=-\frac{5}{7}$.

之ニ由テ $y=\dfrac{62+64\lambda}{7+6\lambda}=\dfrac{62+64\left(-\frac{5}{7}\right)}{7+6\left(-\frac{5}{7}\right)}=\dfrac{114}{19}=6.$

但シ λ ハ任意ノ數ナルカ故ニ適宜ノ値ヲ附スルコヲ得ヘシ本題ニテハ x 或ハ y ヲ消去スルカ故ニ其係數ヲ0トセシムル樣ニ λ ノ値ヲ取ルヘシ.

次ニ $ax+by+cz=d,\ a'x+b'y+c'z=d',$
$a''x+b''y+c''z=d''$ ヲ解セントス.

第壹ニ λ ヲ乘シ第貳ニ μ ヲ乘シ之ヲ第三ニ加フレハ

$$(a\lambda+a'\mu+a'')x+(b\lambda+b'\mu+b'')y+(c\lambda+c'\mu+c'')z=d\lambda+d'\mu+d'',$$

y 及ヒ z ノ係數ヲ0ナラシムル樣ニ λ 及ヒ μ ノ値ヲ求メントス即チ $b\lambda+b'\mu+b''=0,\ c\lambda+c'\mu+c''=0,$

此兩方程式ヨリ十文字ノ法ニ由テ

$$\frac{\lambda}{b'c''-b''c'}=\frac{\mu}{b''c-bc''}=\frac{1}{bc'-b'c},$$

$$\therefore\quad \lambda(bc'-b'c)=b'c''-b''c',\quad \mu(bc'-b'c)=b''c-bc''.$$

之ニ由テ $x=\dfrac{d\lambda+d'\mu+d''}{a\lambda+a'\mu+a''}$ 分母子ニ $bc'-b'c$ ヲ乘スレハ

$$x=\frac{d\lambda(bc'-b'c)+d'\mu(bc'-b'c)+d''(bc'-b'c)}{a\lambda(bc'-b'c)+a'\mu(bc'-b'c)+a''(bc'-b'c)}$$

$$=\frac{d(b'c''-b''c'')+d'(b''c-bc'')+d''(bc'-b'c)}{a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)}.$$

例題四拾三

次ノ各方程式ヲ解セヨ.

1. $y+z=14,\quad z+x=18,\quad x+y=24.$
2. $y+z=2a,\quad z+x=2b,\quad x+y=2c.$
3. $x+y+z=1,\quad 2x+$[illegible]$y+z=14,\quad 4x+9y+z=16.$
4. $5x+3y+7z=2,\quad 2x-4y+$[illegible]$z=7,\quad 3x+2y+6z=3.$
5. $x+y+z=1,\quad \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+4z=1,\quad \frac{5}{3}x+\frac{3}{4}y-\frac{z}{2}=1.$
6. $x+2y+3z=3x+y+2z=2x+$[illegible]$y+z=6.$
7. $4x-5y+mz=7x-11y+nz\quad x+y+pz=3,$

但シ $n+p-2m=0.$

8. $y+z-3x=2a,\quad z+x-3y=2b,\quad x+y-3z=2c.$
9. $ax+by+cz=bx+cy+az=cx+ay+bz=1.$
10. $\dfrac{y+z-x}{b+c}=\dfrac{z+x-y}{c+a}=\dfrac{x+y-z}{a+b}=1.$

11. $x+y+z=0,\quad ax+by+cz=1,\quad a^2x+b^2y+c^2z=a+b+c.$

12. $x+y+z=a+b+c.\quad bx+cy+az=cx+ay+bz=a^2+b^2+c^2.$

13. $x+y+z\quad bcx+cay+abz=0,$

$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=(b-c)(c-a)(a-b)$

14. $ax+by+cz=m,\quad a^2x+b^2y+c^2z=m^2,\quad a^3x+b^3y+c^3z=m^3.$

15. $cy+bz=bc,\quad az+cx\quad ca,\quad bx+ay=ab.$

16. $x+y+z=2a+2b+2c,\quad ax+by+cz=2bc+2ca+2ab,$

$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0.$

17. $ax+by+cz=a+b+c,\quad a^2x+b^2y+c^2z=(a+b+c)^2,$

$bcx+cay+abz=0.$

18. $x+ay+a^2z+a^3=0\quad x+b\quad +b^2z+b^3\quad 0.\quad x+cy+c^2z+c^3=0.$

19. $x-ay+a^2z-a^3=0,\quad x-by+b^2z-b^3=0,\quad x-cy+c^2z-c^3=0.$

例題四拾三解答

1. $(y+z)+(z+x)-(x+y)=14+18-24$ 即チ $2z=8\quad\therefore\quad z=4,$
$z=4$ ヨリ $x=14,\quad y=10.$

2. $x=b+c-a,\quad y=c+a-b,\quad z=a+b-c.$

3. $x=37,\quad y=-12,\quad z=-24.$

4. 此例ハ9.章ノ例解ニ載セタルモノナレバ此處ニテハ不定係數ノ法ヲ用ヒテ解セントス即チ第壹ニλ, 第貳ニμヲ乘シ第三ニ加フレハ

$$(5\lambda+2\mu+3)x+(3\lambda-4\mu+2)y+(7\lambda+9\mu+6)z=2\lambda+7\mu+3,$$

$3\lambda-4\mu+2=0,\quad 7\lambda+9\mu+6=0$ トスレハ $\lambda=-\frac{42}{55},\quad \mu=-\frac{4}{55}.$

之ニ由テ $x=\dfrac{2\lambda+7\mu+3}{5\lambda+2\mu+3}=\dfrac{2\left(-\frac{42}{55}\right)+7\left(-\frac{4}{55}\right)+3}{5\left(-\frac{42}{55}\right)+2\left(-\frac{4}{55}\right)+3}=-1.$

5. $x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{1}{3},\quad z=\frac{1}{6}.$ 6. $x=y=z=1.$

7. $4x-5y+mz=3$ ニ 2 ヲ乘スレハ $8x-10y+2mz=6,$

$7x-11y+nz=3$ ニ -1 ヲ乘スレハ $-7x+11y-nz=-3,$

$x+y+pz=3$ ニ -1 ヲ乘スレハ $-x-y-pz=-3,$

此三方程式ヲ加フレハ $-(n+p-2m)z=0,$

但シ $n+p-2m\neq 0\quad\therefore\quad z=0.$

$z=0$ ヨリ $4x-5y=3$ 及ヒ $x+y=3\quad\therefore\quad x=2,\quad y=1.$

8. 三方程式ヲ加フレハ $-x-y-z=2a+2b+2c$ 之ヲ第壹ニ加フレハ $-4x=4a+2b+2c\quad\therefore\quad x=-\frac{1}{2}(2a+b+c),$

$$y=-\frac{1}{2}(2b+c+a),\quad z=-\frac{1}{2}(2c+a+b).$$

9. $ax+by+cz=1,\quad bx+cy+az=1,\quad cx+ay+bz=1.$

〔第壹法〕 此三方程式ヲ加ヘ $a+b+c$ ニテ除スレハ

$$x+y+z=\frac{3}{a+b+c}\qquad(1),$$

(1) ニ c ヲ乘シ第壹ヨリ減スレハ $(a-c)x+(b-c)y=\dfrac{b+a-2c}{a+b+c}$ (2),

(1) ニ a ヲ乘シ第貳ヨリ減スレハ $(b-a)x+(c-a)y=\dfrac{b+c-2a}{a+b+c}$ (3).

(2) ニ $c-a$ ヲ乘シ (3) ニ $b-c$ ヲ乘シ減法ヲ用フレハ

$$\{-(a-c)^2-(b-a)(b-c)\}x=\frac{(a+b-2c)(c-a)-(b+c-2a)(b-c)}{a+b+c}$$

$\therefore\quad x=\dfrac{1}{a+b+c},\quad y=\dfrac{1}{a+b+c},\quad z=\dfrac{1}{a+b+c}.$

〔第二法〕 第壹ニλ, 第貳ニμヲ乘シ第三ヲ加フレハ

$(a\lambda+b\mu+c)x+(b\lambda+c\mu+a)y+(c\lambda+a\mu+b)z=\lambda+\mu+1.$

$b\lambda+c\mu+a=0,\quad c\lambda+a\mu+b=0$ トスレハ

$$\frac{\lambda}{bc-a^2}=\frac{\mu}{ca-b^2}=\frac{1}{ab-c^2}.$$

之ニ由テ $x=\frac{\lambda+\mu+1}{a\lambda+b\mu+c}=\frac{\lambda(ab-c^2)+\mu(ab-c^2)+ab-c^2}{a\lambda(ab-c^2)+b\mu(ab-c^2)+c(ab-c^2)}$

$$=\frac{bc-a^2+ca-b^2+ab-c^2}{a(bc-a^2)+b(ca-b^2)+c(ab-c^2)}=\frac{1}{a+b+c}.$$

〔第三法〕 第壹ヨリ第弐ヲ減シ及ヒ第弐ヨリ第三ヲ減スレハ

$$(a-b)x+(b-c)y+(c-a)z=0 \qquad (1),$$

$$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0 \qquad (2).$$

(1), (2) ヨリ十文字ノ法ニ由テ

$$\frac{x}{(b-c)(a-b)(c-a)}=\frac{y}{(c-a)(b-c)(a-b)}=\frac{z}{(a-b)(c-a)(b-c)},$$

即チ $\frac{x}{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2}=\frac{y}{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2}$

$$=\frac{z}{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2},$$

即チ $x=y=z$ 之ニ由テ $ax+bx+cx=1.$

10. 分数ノ定理ニ由テ

$\frac{(y+z-x)+(z+x-y)}{(b+c)+(c+a)}=1$ 即チ $\frac{2z}{a+b+2c}=1,$

$\therefore\ z=\frac{1}{2}(a+b+2c),\quad x=\frac{1}{2}(b+c+2a),\quad y=\frac{1}{2}(c+a+2b).$

11. 第弐ニ $a+b+c$ ヲ乗シ第三ヲ減スレハ

$$a(b+c)x+b(c+a)y+c(a+b)z=0 \qquad (1),$$

而シテ第壹ハ $x+y+z=0,$

此両方程式ヨリ十文字ノ法ニ由テ

$$\frac{x}{b(c+a)-c(a+b)}=\frac{y}{c(a+b)-a(b+c)}=\frac{z}{a(b+c)-b(c+a)},$$

即チ $\frac{x}{a(b-c)}=\frac{y}{b(c-a)}=\frac{z}{c(a-b)}$ 分数ノ定理ニヨリテ

$=\frac{ax+by+cz}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$ 第弐ニヨリテ

$$=\frac{1}{-(b-c)(c-a)(a-b)},$$

$\therefore\ x=-\frac{a}{(c-a)(a-b)},\ y=-\frac{b}{(a-b)(b-c)},\ z=-\frac{c}{(b-c)(c-a)},$

12. 第壹ヨリ $(x-b)+(y-c)+(z-a)=0,$

第弐ヨリ $b(x-b)+c(y-c)+a(z-a)=0,$

此両方程式ヨリ十文字ノ法ニ由テ

$\frac{x-b}{a-c}=\frac{y-c}{b-a}=\frac{z-a}{c-b}$ 分数ノ定理ニ由テ

$$=\frac{c(x-b)+a(y-c)+b(z-a)}{c(a-c)+a(b-a)+b(c-b)}=\frac{cx+ay+bz-bc-ca-ab}{ca+ab+bc-a^2-b^2-c^2}$$

第三ヨリ $=\frac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{ca+ab+bc-a^2-b^2-c^2}=-1,$

$\therefore\ x=b+c-a.\quad y=c+a-b,\quad z=a+b-c.$

13. $x+y+z=0,\quad bcx+cay+abz=0$ ヨリ十文字ノ法ニ由テ

$\frac{x}{ca-ab}=\frac{y}{bc-ab}=\frac{z}{ca-bc}$ 分数ノ定理ニ由テ

$=\frac{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z}{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+(a^2-b^2)}$ 第三ヨリ

$$=\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=1.$$

$\therefore\ x=a(b-c),\quad y=b(c-a),\quad z=c(a-b).$

14. 第壹ニ c ヲ乗シ第弐ヲ減スレハ

$$a(c-a)x+b(c-b)y=m(c-m) \qquad (1)$$

第弐ニ c ヲ乗シ第三ヲ減スレハ

$$a^2(c-a)x+b^2(c-b)y=m^2(c-m) \qquad (2)$$

(1) ニ b ヲ乗シ (2) ヲ減スレハ

$$a(c-a)(b-a)x=m(c-m)(b-m),$$

$\therefore\ x=\frac{m(c-m)(b-m)}{a(c-a)(b-a)},\ y=\frac{m(a-m)(c-m)}{b(a-b)(c-b)},\ z=\frac{m(b-m)(a-m)}{c(b-c)(a-c)}.$

15. $a(cy+bz)+b(az+cx)-c(bx+ay)=a(bc)+b(ca)-c(ab)$,

即チ $2abz=abc$ ∴ $z=\frac{1}{2}c$, $x=\frac{1}{2}a$, $y=\frac{1}{2}b$.

16. 第壹ヲ變スレバ $(x-b-c)+(y-c-a)+(z-a-b)=0$,

第貳ヲ變スレバ $a(x-b-c)+b(y-c-a)+c(z-a-b)=0$,

此兩方程式ヨリ十文字ノ法ニ由テ

$$\frac{x-b-c}{b-c}=\frac{y-c-a}{c-a}=\frac{z-a-b}{a-b}$$ 分數ノ定理ニ由テ

$$=\frac{(b-c)(x-b-c)+(c-a)(y-c-a)+(a-b)(z-a-b)}{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}$$

$$=\frac{(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z-(b^2-c^2)-(c^2-a^2)-(a^2-b^2)}{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}$$

第三ヨリ $=\frac{0-(b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2)}{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}=0$,

∴ $x=b+c$, $y=c+a$, $z=a+b$.

17. 第壹ニ $a+b+c$ ヲ乘シ第貳ヲ減スレバ

$$a(b+c)x+b(c+a)y+c(a+b)z=0,$$

之ト第三 $bcx+cay+abz=0$ ノ兩方程式ヨリ十文字ノ法ニ

由テ $\frac{x}{ab^2(c+a)-c^2a(a+b)}=\frac{y}{bc^2(a+b)-a^2b(b+c)}=\frac{z}{ca^2(b+c)-b^2c(c+a)}$,

即チ $\frac{x}{a(b-c)(bc+ab+ca)}=\frac{y}{b(c-a)(bc+ca+ab)}=\frac{z}{c(a-b)(bc+ca+ab)}$,

即チ $\frac{x}{a(b-c)}=\frac{y}{b(c-a)}=\frac{z}{c(a-b)}$ 分數ノ定理ニ由テ

$=\frac{ax+by+cz}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$(第壹ヨリ)$=\frac{a+b+c}{-(b-c)(c-a)(a-b)}$.

∴ $x=-\frac{a(a+b+c)}{(c-a)(a-b)}$, $y=-\frac{b(a+b+c)}{(a-b)(b-c)}$, $z=-\frac{c(a+b+c)}{(b-c)(c-a)}$.

18. $x+\lambda y+\lambda^2 z+\lambda^3=0$ ナル方程式ニ於テ $\lambda=a$ トスレバ第壹ヲ得テ適合ス $\lambda=b$ トスレバ第貳ヲ得テ適合ス又 $\lambda=c$ トスレバ第三ヲ得テ適合ス,

故ニ此方程式ハ次ノ方程式ト全ク相同シ,

$$(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)=0,$$

即チ $\lambda^3-(a+b+c)\lambda^2+(bc+ca+ab)\lambda-abc=0$,

之ニ由テ λ ノ同方乘ノ係數ヲ比較スレバ

$z=-(a+b+c)$, $y=bc+ca+ab$, $x=-abc$.

19. $x=abc$, $y=bc+ca+ab$, $z=a+b+c$.

此例モ又前例ト同法ナリ.

今通例ノ解法ヲ用フレバ次ノ如シ.

第壹ヨリ第貳ヲ減スレバ

$-y(a-b)+z(a^2-b^2)-(a^3-b^3)=0$,

即チ $-y+z(a+b)-(a^2+ab+b^2)=0$ ....(1)

又第貳ヨリ第三ヲ減スレバ

$-y(b-c)+z(b^2-c^2)-(b^3-c^3)=0$,

即チ $-y+z(b+c)-(b^2+bc+c^2)=0$ ....(2)

(1)ヨリ(2)ヲ減スレバ

$$z(a-c)-(a^2-c^2+ab-bc)=0,$$

$$\therefore z=a+c+b,$$

$z=a+b+c$ ヲ(1)ニ用フレバ

$$-y+(a+b+c)(a+b)-(a^2+ab+b^2)=0,$$

$$\therefore y=ab+bc+ca.$$

$z=a+b+c$, $y=bc+ca+ab$ ヲ第壹ニ用フレバ

$$x-a(bc+ca+ab)+a^2(a+b+c)-a^3=0,$$

即チ $x-a(bc+ca+ab-a^2-ab-ac+a^2)=0$,

$$\therefore x=abc.$$

聯立壹次方程式之問題

12. 問　題　此處ニ於テ二ツ或ハ二ツ以上ノ未知數量ヲ含ム聯立方程式ヲ用ヒテ解スヘキ問題ヲ示サントス.

〔第壹例〕兩數アリ其大ナル數ノ三倍ト小ナル數ノ五倍ノ和53ニシテ大ナル數ノ七倍ヨリ小ナル數ノ拾倍ヲ減スレハ60トナル各如何.

大小兩數ヲ x, y トスレハ

$$3x+5y=35,$$

$$7x-10y=60,$$

此兩方程式ヨリ　$x=10,\quad y=1.$

〔第貳例〕1斤2圓50錢ノ茶若干斤ト1斤40錢ノ珈琲若干斤ヲ買ヒシニ其價15圓70錢ナリ其後チ茶ハ1割5分低價トナリ珈琲ハ1割高價トナリシカ故ニ前ト同斤數ヲ買ヒシニ價14圓14錢5厘トナレリ各斤數如何.

茶及ヒ砂糖ノ斤數ヲ x 及 y トスレハ

$$2{\cdot}5x+4{\cdot}=y15{\cdot}70,$$

$$2{\cdot}5x\times(1-{\cdot}15)+{\cdot}4y\times(1+{\cdot}1)=14{\cdot}145,$$

此兩方程式ヲ解スレハ　$x=5,\quad y=8.$

〔第三例〕甲乙丙ノ三工アリ共力シテ15日ニ成了スヘキ處ヲ甲ハ日10働作セシカ故ニ乙丙ハ20日從事シテ成了シタリ若シ甲乙カ10日働作セハ丙ハ40日從事セサレハ此事ヲ成了スル能ハストイフ各一人ニテ此事ヲナス時ハ何日ヲ要スルカ.

甲乙丙各一人ノ成了日數ヲ x, y, z トスレハ

$$\frac{15}{x}+\frac{15}{y}+\frac{15}{z}=1,$$

$$\frac{10}{x}+\frac{20}{y}+\frac{20}{z}=1,$$

$$\frac{10}{x}+\frac{10}{y}=\frac{40}{z}=1,$$

此三方程式ヨリ $x=30,\quad y=45,\quad z=90.$

例題四拾四

1. 分數アリ分子ニ1ヲ加フレハ $\frac{1}{2}$ トナリ分母ニ1ヲ加フレハ $\frac{1}{3}$ トナル此分數ハ如何.

2. 一男及ヒ一童カ15日間働キテ7男及ヒ9童ノ2日分ノ仕事ヲナストイフ一男ニテ此事ヲ成了スル日數如何.

3. 二位ノ數アリ之ニ9ヲ加フレハ其數位轉倒ス而シテ兩數字ノ和ハ7ナリ原數如何.

4. 8牛及ヒ50羊ヲ1350圓ニテ買ヒ2割ノ利ニテ牛ヲ賣リ1割ノ利ニテ羊ヲ賣リシニヨリ1545圓ヲ領收セリ各一頭ノ原價如何.

5. 重サ28噸ノ荷物ヲ甲乙兩車ニテ運送セシニ甲車ヲ15回乙車ヲ12回或ハ甲車ヲ24回乙車ヲ8回用フレハ運ヒ了ルヘシトイフ各車所載ノ噸數如何.

6. 一事ヲ成スニ甲乙共力スレハ30日ニテ成了スヘシ今此事ヲ甲乙12日間共力シ後チ甲ノミニテ殘業ヲ24日ニテ成了スヘシトイフ各一人ノミニテナス時ハ何日ヲ要スルカ.

7. 矩形アリ之ヨリ6間長ク4間短カキ兩邊ノ矩形及ヒ8間長ク5間短カキ兩邊ノ矩形ト等積ナリトイフ其面積如何.

8. 年$3\frac{1}{2}$分及ヒ4分利附ノ株劵若干枚ノ年利金600圓ナリ前ノ株ヲ實價108圓,後ノ株ヲ實價120圓ニテ賣レリ共ニ18360圓トナルヘシトイフ然ル時ハ株數各何枚ナリシヤ但シ一株ノ額面價ハ100圓ナリ.

9. 二位ノ數アリ其數字ノ和ノ七倍ニ等シ而シテ其轉位數ト原數ノ和ハ132ナリ原數如何.

10. 1000圓ヲ甲乙丙丁ニ分ツニ乙ハ甲ノ半ヲ取リ丙ハ丁ヨリ多キコ甲ノ三分ノ一ナリ又乙ト100圓ノ和ハ丙丁ノ和ニ等シ各如何.

11. 分數アリ其分母子ノ差12ニシテ各ニ5ヲ加フレハ$\frac{3}{4}$トナルトイフ原分數如何.

12. 10男及ヒ8童ノ日給合セテ11圓10錢ニシテ4男ノ日給ハ6童ヨリ30錢多シ各童ノ日給如何.

13. 某試驗ニ於テ受驗者ノ$\frac{1}{4}$ハ落第セリ而シテ及第点ハ總点平均數ヨリモ2点少ナク又及第者總点平均点數ヨリモ11点少ナク又落第者總点平均点數ニ2倍ストイフ及第点如何.

14. 甲乙兩人同時ニ兩地ヨリ相向テ出立ス毎時ノ速甲ハ乙ヨリ2哩早クシテ3時間ヲ經テ相會セリ若シ乙カ毎時ノ速ヲ1哩減シ甲ハ毎時ノ速ヲ$\frac{2}{3}$トスレハ4時間ヲ經テ相會スヘシトイフ兩地ノ距離如何.

15. 某距離ヲ行クニ毎時ノ速ヲ$\frac{1}{2}$哩增ストキハ定時ノ$\frac{4}{5}$ニシテ到着スヘシ又毎時ノ速ヲ$\frac{1}{2}$哩減スルトキハ定時間ヨリ2時30分後レテ到着スヘシトイフ此道程如何.

16. 兩滊車アリ一ハ長サ60碼一ハ長サ72碼ナリ今平行線路ヲ行クニ同方ニ向フトキハ12秒ニシテ通過シ若シ緩車ノ速ヲ$\frac{1}{2}$增ストキハ24秒ニシテ通過ストイフ各毎時ノ速如何

17. 三船アリ同航路ヲ行クニ第一ハ第二ヨリ毎時ノ速$\frac{1}{2}$浬早ク航海時間ハ$2\frac{1}{2}$時少シ第二ハ第三ヨリモ毎時ノ速$\frac{3}{4}$浬早ク航海時間ハ$2\frac{1}{2}$少ナシ然ルトキハ此航程何浬ナリヤ.

例題四拾四解答

1. 分母子ヲx, yトスレハ

$$\frac{y+1}{x}=\frac{1}{2} \text{ 及ヒ } \frac{y}{x+1}=\frac{1}{3} \qquad \therefore\ x=8,\ y=3.$$

之ニ由テ所求ノ分數ハ$\frac{3}{8}$ナリ.

2. 一男及ヒ一童ノミニテナス日數ヲx及ヒyトスレハ

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{15} \text{ 及ヒ } \frac{7}{x}+\frac{9}{y}=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ x=20.$$

3. $10x+y+9=10y+x,\quad x+y=7, \qquad \therefore\ x=3,\quad y=4,$

之ニ由テ所求ノ數ハ34ナリ.

4. 牛羊一頭ノ原價ヲx圓及ヒy圓トスレハ

$$8x+50y=1350, \qquad \frac{2}{10}\times 8x+\frac{1}{10}\times 50y=1545-1350,$$

$$\therefore\ x=75, \qquad y=15.$$

5. 甲乙各車ニ所載ノ噸數ヲx, yトスレハ

$$15x+12y=28, \qquad 24x+8y=28 \qquad \therefore\ x=\frac{2}{3},\ y=\frac{3}{2}.$$

6. 甲乙各一人ノミニテナス日數ヲx, yトスレハ

$$\frac{30}{x}+\frac{30}{y}=1, \qquad \frac{12}{x}+\frac{12}{y}+\frac{24}{x}=1, \qquad \therefore\ x=40, \qquad y=120.$$

7. 二邊ノ間數ヲx, yトスレハ

$$xy=(x+6)(y-4)=(x+8)(y-5) \qquad \therefore\ x=24, \qquad y=20,$$

之ニ由テ所求ノ面積ハ24×20即チ480坪ナリ.

8. 株數ヲx及ヒyトスレハ

$$3\frac{1}{2}x+4y=600, \qquad 108x+120y=18360, \qquad \therefore\ x=120, \quad y=45.$$

9. $10x+y=7(x+y)$, $(10x+y)+(10y+x)=132$,

∴ $x=8$, $y=4$, 之ニ由テ所求ノ數ハ84ナリ。

10. $x+y+z+u=10000$, $y=\frac{1}{2}x$,

$z=u+\frac{1}{3}x$, $y+100=z+u$,

∴ $x=450$, $y=225$, $z=237.5$, $u=87.5$.

11. $\frac{y+5}{x+5}=\frac{3}{4}$, $x-y=2$ ∴ $x=3$, $y=1$,

之ニ由テ所求ノ分數ハ $\frac{1}{3}$ ナリ。

12. 各男及ヒ各童ノ日給ヲx及ヒy錢トスレハ

$10x+8y=1110$, $4x=6y+30$ ∴ $x=75$, $y=45$.

13. 及第点ヲxトシ總平均点ヲyトシ及第平均点ヲzトシ落第平均ヲuトスレハ

$x=y-2=z-11=2u$, $y=\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}z$, ∴ $x=50$.

14. 甲乙毎時ノ速ヲx及ヒy哩トスレハ

$x=y+2$ 及ヒ $3x+3y=4\times\frac{2}{3}x+4(y-1)$, ∴ $x=9$, $y=7$,

之ニ由テ所求ノ道程ハ $3(9+7)=48$ 哩。

15. 毎時ノ速ヲx哩トシ定時間ヲy時トスレハ

$\left(x+\frac{1}{2}\right)\times\frac{4}{5}y=xy$, $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y+2\frac{1}{2}\right)=xy$,

∴ $x=2$, $y=7\frac{1}{2}$ ∴ 所求ノ道程ハ $2\times7\frac{1}{2}=15$ 哩.

16. 各毎時ノ速ヲx, y哩トスレハ

$\frac{12}{60\times60}(x-y)=\frac{60+72}{1760}$, $\frac{24}{60\times60}\left\{x-\left(y+\frac{1}{2}y\right)\right\}=\frac{60+72}{1760}$,

∴ $x=45$, $y=22\frac{1}{2}$.

17. 450 哩.

第拾三編

聯立貳次方程式

1. 聯立貳次方程式 今x, yノ貳未知數量ヲ有ツ所ノ兩方程式ノ解法ニ付キテ考フルニ此兩方程式ヨリ貳未知數量ノ其一ツヲ消去シ殘ノ一未知數量ノ二次方程式ヲ得ヘキモノヲ聯立貳次方程式トイフナリ。

而シテ聯立貳次方程式トナルヘキ一般ノ場合ハ第一ニ一次方程式ト二次方程式ノ聯立兩方程式第二ニ双方トモ未知數量ノ同次ナル二次ノ兩方程式トス。

其他モ亦タ二次方程式ヲ得ルモノアレモ是レ等ハ特別ノ場合ノ時ノミナリ。

例ヘハ $x^2+y=a$, $x+y^2=b$ ノ如キハ同次ノ二次式ニアラザルヲ以テ第一ヨリ $y=a-x^2$ トシ之ヲ第二ニ代用スレハ

$$x+(a-x^2)^2=b$$

即チ $x^4-2ax^2+x+a^2=b$ ナル四次方程式トナル。

2. 第壹之場合 $ax+by=c$, $x^2+xy+x+y=d$ ニ於テ

第壹ヨリ $y=\frac{c-ax}{b}$ 之ヲ第二ニ代用スレハ

$$x^2+x\left(\frac{c-ax}{b}\right)+x+\frac{c-ax}{b}=d,$$

即チ $x^2(b-a)+x(c+b-a)+c-bd=0$ 此二次方程式ヨリxノ二根ヲ得ヘシ而シテ之ニ相當スルyノ二根ヲ得ヘシ。

〔例〕 $2x-y=5$, $x^2-y^2+3x=17$ ヲ解ケヨ。

第一ヨリ $y=2x-5$ トシ之ヲ第二ニ代用スレハ

$x^2-(2x-5)^2+3x=17$ 即チ $-3x^2+23x-42=0$,

即チ $(3x-14)(x-3)=0$ ∴ $x=\frac{14}{3}$ 或ハ 3.

之ニ由テ $y=2x-5=2\times\frac{14}{3}-5=\frac{15}{3}$,

或ハ $y=2\times3-5=1$.

3. 第貳之場合 $ax^2+by^2+cxy=d$,

$a'x^2+b'y^2+c'xy=d'$ ニ於テ第一及ヒ第二ニ d' 及ヒ d ヲ乘スレハ

$$ad'x^2+bd'y^2+cd'xy=dd',$$

$$a'dx^2+b'dy^2+c'dxy=dd',$$

減法ニ由テ $(ad'-a'd)x^2+(bd'-b'd)y^2+(cd'-c'd)xy=0$,

此方程式ヨリ x 及ヒ y ノ一次兩因子 $Ax+By$, $A'x+B'y$ ノ如キ形ヲヲ得ラルヘシ,

故ニ $Ax+By=0$ 或ハ $A'x+B'y=0$ トシテ之ト原兩方程式ノ其一ツトニ由テ根ヲ得ヘシ.

〔例〕 $x^2+3xy=28$, $xy+4y^2=8$ ヲ解セヨ.

第一ニ 2 ヲ乘シ $2x^2+6xy=56$ ヨリ第二ニ 7 ヲ乘シ $7xy+28y^2=56$ ヲ減スレハ

$2x^2-xy-28y^2=0$ 即チ $(2x+7y)(x-4y)=0$,

∴ $2x+7y=0$ 或ハ $x-4y=0$.

$2x+7y=0$ 即チ $y=-\frac{2}{7}x$ ナル片第一ヨリ

$x^2+3x(-\frac{2}{7}x)=28$, ∴ $x^2=196$ ∴ $x=\pm14$, $y=\mp4$.

又 $x-4y=0$ 即チ $x=4y$ ナル片第一ヨリ

$(4y)^2+3(4y)y=28$, 即チ $y^2=1$ ∴ $y=\pm1$, $x=\pm4$.

之ニ由テ此解答ハ次ノ四ツナリ,

$x=14$, $y=-4$ 或ハ $x=-14$, $y=4$,

或ハ $x=4$, $y=1$, 或ハ $x=-4$, $y=-1$.

4. 特別之解法 ヲ次ニ示サントス.

〔第壹例〕 $x+y=a$, $xy=b$ ヲ解セヨ.

$(x+y)^2-4xy=a^2-4b$, ∴ $x-y=\pm\sqrt{(a^2-4b)}$.

之ニ由テ $x=\frac{a\pm\sqrt{(a^2-4b)}}{2}$, $y=\frac{a\mp\sqrt{(a^2-4b)}}{2}$.

〔第貳例〕 $x^2+xy+y^2=a$, $x^4+x^2y^2+y^4=b$ ヲ解セヨ.

第二ヨリ $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=b$,

故ニ第一ヨリ $a(x^2-xy+y^2)=b$ ∴ $x^2-xy+y^2=\frac{b}{a}$.

此最後ノ方程式ヲ第一ヨリ減スレハ

$$2xy=a-\frac{b}{a} \qquad \therefore\ xy=\frac{a^2-b}{2a}.$$

$$\therefore\ (x+y)^2=(x^2+xy+y^2)+xy=a+\frac{a^2-b}{2a}$$

$$\therefore\ x+y=\pm\sqrt{\frac{3a^2-b}{2a}}.$$

又 $(x-y)^2=(x^2-xy+y^2)-xy=\frac{b}{a}-\frac{a^2-b}{2a}$,

$$\therefore\ x-y=\pm\sqrt{\frac{3b-a^2}{2a}}.$$

之ニ由テ $x=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\frac{3a^2-b}{2a}}\pm\sqrt{\frac{3b-a^2}{2a}}\right)$,

$$y=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\frac{3a^2-b}{2a}}\mp\sqrt{\frac{3b-a^2}{2a}}\right).$$

〔第三例〕 $x+y=a$, $x^4+y^4=b$ ヲ解セヨ

$x=m+n$, $y=m-n$ トスレハ

第一ヨリ $2m=a$ ∴ $m=\frac{a}{2}$,

之ニ由テ $x=\frac{a}{2}+n$, $y=\frac{a}{2}-n$,

故ニ第式ヨリ $\left(\frac{a}{2}+n\right)^4+\left(\frac{a}{2}-n\right)^4=b,$

即チ $2n^4+3a^2n^2+\frac{a^4}{8}=b,\quad \therefore\ n=\pm\sqrt{\left(-\frac{3a^2}{4}\pm\sqrt{\frac{a^4+b}{2}}\right)}.$

$$\therefore\ x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(-\frac{3a^2}{4}\pm\sqrt{\frac{a^4+b}{2}}\right)},$$

$$y=\frac{a}{2}\mp\sqrt{\left(-\frac{3a^2}{4}\pm\sqrt{\frac{a^4+b}{2}}\right)}.$$

例題四拾五

次ノ各方程式ヲ解セヨ。

1. $x+y=6,\quad x^2-y^2=24.$　　2. $x-y=10,\quad x^2+y^2=58.$

3. $3x+3y=10,\quad xy=1.$　　4. $x+y=\frac{15}{4},\quad x-y=xy.$

5. $2x+3y=3,\quad 4x^2+9xy+9y^2=44.$

6. $x+y=2,\quad \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=6.$　　7. $x+y=5,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}.$

8. $xy+x=15,\quad xy-y=8.$　　9. $xy+2x=5,\quad 2xy-y=3.$

10. $x^2-2xy=0,\quad 4x^2+9y^2=225.$　　11. $2x^2=3xy,\quad y^2+5xy=34$

12. $x^2+xy=21,\quad y^2+xy=28.$

13. $x^2+xy=(a-b)^2,\quad xy+y^2=4ab.$

14. $x^2+xy-2y^2=-44,\quad xy+3y^2=80.$

15. $x^2-3y^2=13,\quad 3x^2-y^2=71.$　　16. $x^2+3xy=54,\quad xy+4y^2=115$

17. $x(x+y)=40,\quad y(x-y)=6.$　　18. $x^2-xy=10,\quad (x-y)^2=4.$

19. $x+y=-1,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}.$　　20. $x+y=-3,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}.$

21. $(x+1)(y+1)=10,\quad xy=3.$　　22. $(x+3)(y+1)=4,\quad xy=-1.$

23. $x-y=3,\quad x^3-y^3=279.$　　24. $x-y=2,\quad x^2-y^3=98.$

25. $x+y=7,\quad x^3+y^3=91.$　　26. $x+y=1,\quad x^3+y^3=61.$

27. $x^2+xy+y^2=13,\quad x^4+x^2y^2+y^4=91.$

28. $x^2-xy+y^2=9,\quad x^4+x^2y^2+y^4=243.$

29. $x+y=1,\quad x^2y^2+13xy+12=0.$

30 $x+y=5,\quad x^2y^2+4xy=12.$

31. $x+\frac{1}{y}=3,\quad y+\frac{1}{x}=\frac{4}{3}.$　　32. $x+\frac{1}{y}=\frac{18}{7}.\quad y+\frac{1}{x}=\frac{7}{4}.$

33. $2x^2-xy+y^2=2y\quad 2x^2+4xy=5y.$

34. $x^3+1=9y,\quad x^2+x=6y.$

35. $2x^3+5y^3=115,\quad 3x^3+7y^3=186.$

36. $x^2y+xy^2=180,\quad x^3+y^3=189.$　37. $xy+\frac{x}{y}=\frac{5}{3},\ xy+\frac{y}{x}=\frac{5}{6}.$

38. $a(x-a)=b(y-b),\quad xy=ax+by.$

39. $x-\frac{b^2}{y}=\frac{a^2}{x}-y=a-b.$

40. $x+y=6,\quad (x^2+y^2)(x^3+y^3)=1440.$

41. $x^2-xy=8x+3,\quad xy-y^2=8y-6.$

42. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b},\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}.$

43. $x-y=a,\quad x^4+y^4=b.$　　44. $x+y=a,\quad x^5+y^5=b.$

例題四拾五解答

1. 第一ニテ第二ヲ除スレハ $x-y=4\quad \therefore\ x=5,\quad y=1.$

2. $x=7,\quad y=-3$ 或ハ $x=3,\quad y=-7.$

3. $x=3,\ y=\frac{1}{3}$ 或ハ $x=\frac{1}{3},\quad y=3.$

4. 第一ヨリ $y=\frac{15}{4}-x$ トスレハ第二ヨリ $x-\left(\frac{15}{4}-x\right)$ $=x\left(\frac{15}{4}-x\right).$ 即チ $4x^2-7x-15=0\quad \therefore\ x=3$ 或ハ $-\frac{5}{4},$

$\therefore\ y=\frac{3}{4}$ 或ハ $5.$

5. $x=5,\quad y=-\frac{7}{3},$ 或ハ $x=-\frac{7}{2},\quad y=\frac{10}{3}.$

6. $x=\frac{4}{3},\quad y=\frac{2}{3},$ 或ハ $x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{3}{2}.$

7. $x=3,\quad y=2,$ 或ハ $x=2,\quad y=3.$

8. $x=5,\quad y=2,$ 或ハ $x=3,\quad y=4.$

9. $x=1,\quad y=3,$ 或ハ $x=\frac{5}{4},\quad y=2.$

10. 第一ヨリ $x(x-2y)=0$, $\therefore$ $x=0$ 或ハ $x=2y$.

$x=0$ ナル時第二ヨリ $9y^2=225$ $\therefore$ $y=\pm 5$.

$x=2y$ ナル時第二ヨリ $4(2y)^2+9y^2=225$ $\therefore$ $y=\pm 3$.

之ニ由テ $x=0$, $y=5$ 或ハ $x=0$, $y=-5$,

或ハ $x=6$, $y=3$ 或ハ $x=-6$, $y=-3$.

11. $x=\pm 3$, $y=\pm 2$ 或ハ $x=0$, $y=\pm\sqrt{34}$.

12. 第壹及ヒ第貳ヲ加フレハ $x^2+2xy+y^2=49$ $\therefore$ $x+y=\pm 7$.

第一ヨリ $x=\dfrac{21}{x+y}=\dfrac{21}{\pm 7}=\pm 3$, $y=\dfrac{28}{x+y}=\dfrac{28}{\pm 7}=\pm 4$.

13. $x=\pm\dfrac{(a-b)^2}{a+b}$, $y=\pm\dfrac{4ab}{a+b}$.

14. $x=\pm 14$, $y=\pm 8$ 或 $x=\pm 1$, $y=\pm 5$.

15. $x=\pm 5$, $y=\pm 2$. 16. $x=\pm 3$, $y=\pm 5$ 或 $x=\pm 36$, $y=\pm\dfrac{23}{2}$.

17. $x=\pm 5$, $y=\pm 3$, 或ハ $x=\pm 4\sqrt{2}$, $y=\pm\sqrt{2}$.

18. $x=\pm 5$ $y=\pm 3$. 19. $x=3$, $y=-4$, 或 $x=-4$, $y=3$.

20. $x=3$, $y=-6$ 或ハ $x=-6$, $y=3$.

21. $x=3\pm\sqrt{3}$, $y=3\mp\sqrt{6}$.

22. $x=3$, $y=-\dfrac{1}{3}$ 或 $x=-1$, $y=1$.

23. 第二ヨリ $(x-y)(x^2+xy+y^2)=279$,

即チ $(x-y)\{(x-y)^2+3xy\}=279$, 故ニ第一ヨリ

$3\{3^2+3xy\}=279$, $\therefore$ $xy=28$ ヨリ求メ得ヘシ

$x=7$, $y=4$ 或ハ $x=-4$, $y=-7$.

24. $x=5$, $y=3$, 或ハ $x=-3$, $y=-5$.

25. $x=4$, $y=3$, 或ハ $x=3$, $y=4$.

26. $x=5$, $y=-4$, 或ハ $x=-4$, $y=5$.

27. $x=\pm 3$, $y=\pm 1$, 或 $x=\pm 1$, $y=\pm 3$.

28. $x=y=\pm 3$.

29. 第二ヨリ $(xy+12)(xy+1)=0$ $\therefore$ $xy=-12$ 或ハ $xy=-1$

$x+y=1$, $xy=-1$ 或ハ -12 ヨリ x, y ヲ得ヘシ.

$x=4$, $y=-3$, 或 $x=-3$, $y=4$, 或ハ $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $y=\dfrac{1\mp\sqrt{5}}{2}$.

30. $x=6$, $y=-1$, 或 $x=-1$, $y=6$, 或 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$, $y=\dfrac{5\mp\sqrt{17}}{2}$.

31. 第一ヨリ $xy+1=3y$, 第二ヨリ $xy+1=\dfrac{4}{3}x$,

減法ニ由テ $3y=\dfrac{4}{3}x$ $\therefore$ $y=\dfrac{4}{9}x$ 之ヲ第二ニ代用スレハ

$\dfrac{4}{9}x^2+1=\dfrac{4}{3}x$ 即チ $4x^2-12x+9=0$ $\therefore$ $x=\dfrac{3}{2}$, $y=\dfrac{2}{3}$.

32. $x=\dfrac{6}{7}$, $y=\dfrac{7}{12}$ 或ハ $x=\dfrac{12}{7}$, $y=\dfrac{7}{6}$.

33. 第一ヨリ第二ヲ減スレハ $-5xy+y^2=-3y$,

即チ $y(y-5x+3)=0$, $\therefore$ $y=0$, 或ハ $y-5x+3=0$.

$y=0$ トスレハ $x=0$.

$y-5x+3=0$ トスレハ第二ヨリ

$2x^2+4x(5x-3)=5(5x-3)$ 即チ $22x^2-37x+15=0$

$\therefore$ $x=1$ 或 $\dfrac{15}{22}$, 之ニ由テ $y=2$ 或 $\dfrac{9}{22}$.

34. $x=2$, $y=1$, 或ハ $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{1}{8}$ 或ハ $x=-1$, $y=0$.

35. $x=5$, $y=-3$ 或 $x=\dfrac{5}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$, $y=\dfrac{-3}{2}(1\pm\sqrt{-3})$.

36. 第一ニ3ヲ乘シ之ニ第二ヲ加フレハ $(x+y)^3=3\times 180+189$

$\therefore$ $x+y=9$ 之ヨリ答ヲ得ヘシ, $x=4$, $y=5$, 或 $x=5$, $y=4$.

37. 減法ニ由テ $\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}$ 即チ $6x^2-5xy-6y^2=0$,

即チ $(2x-3y)(3x+2y)=0$ $\therefore$ $y=\dfrac{2}{3}x$ 或ハ $y=-\dfrac{3}{2}x$.

$x=\pm\dfrac{1}{2}$, $y=\pm\dfrac{1}{3}$ 或 $x=\pm\dfrac{\sqrt{-14}}{3}$, $y=\mp\dfrac{\sqrt{-14}}{3}$.

38. $x=a+b$, $y=a+b$ 或ハ $x=\dfrac{ab-b^2}{a}$, $y=\dfrac{ab-a^2}{b}$.

39. $x=a$, $y=b$.

40. 第二ヨリ $\{(x+y)^2-2xy\}\{(x+y)^3-3xy(x+y)\}=1440$,

故ニ第一ヨリ $\{6^2-2xy\}\{6^3-3xy\times 6\}=1440$,

即チ $(18-xy)(12-xy)=40$ $\therefore$ $xy=8$ 或ハ 22.

$x=4$, $y=2$ 或ハ $x=2$, $y=4$ 或ハ $x=3\pm\sqrt{-13}$ $y=3\mp\sqrt{-13}$.

41. 第一ヨリ第二ヲ減スレハ

$(x-y)^2-8(x-y)=9$ $\therefore$ $x-y=-1$ 或ハ 9.

第一ヨリ $x=\dfrac{3}{x-y-8}=\dfrac{3}{-1-8}=-\dfrac{1}{3}$, 或ハ $\dfrac{3}{9-8}=3$,

又第二ヨリ $y=\dfrac{-6}{x-y-8}=\dfrac{-6}{-1-8}=\dfrac{2}{3}$, 或ハ $\dfrac{-6}{9-8}=-6$.

42. 第一ノ各邊ヲ平方シ之ヨリ第二ヲ減スレハ $\dfrac{2xy}{ab}=\dfrac{2ab}{ab}$,

之ヲ第二ヨリ減スレハ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{2xy}{ab}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{2ab}{ab}+\dfrac{a^2}{b^2}$,

$\therefore$ $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\pm\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}\right)$,

$\therefore$ $x=a$, $y=b$ 或ハ $x=\dfrac{a^2}{b}$, $y=\dfrac{b^2}{a}$.

43. $x^2+y^2-2xy=a^2$ $\therefore$ $(x^2+y^2)^2=(a^2+2xy)^2$,

即チ $x^4+y^4+2x^2y^2=a^4+4a^2xy+4x^2y^2$

即チ $b+2x^2y^2=a^4+4a^2xy+4x^2y^2$, $\therefore$ $xy=-a^2\pm\sqrt{\dfrac{a^4+b}{2}}$.

之ト $x-y=a$ ニテ解答ヲ得ヘシ.

44. 第二ヨリ $(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)=b$,

$\therefore$ $a(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)=b$,

即チ $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)-xy(x^2+y^2)=\dfrac{b}{a}$,

即チ $\{(x+y)^2-xy\}\{(x+y)^2-3xy\}-xy\{(x+y)^2-2xy\}=\dfrac{b}{a}$,

$\therefore$ $(a^2-xy)(a^2-3xy)-xy(a^2-2xy)=\dfrac{b}{a}$, 之ヨリ xy ノ値ヲ得ヘシ

然ルキ之ト $x+y=a$ ニテ根ヲ得ヘシ.

5. 三未知數量

x, y, z ヲ含ム聯立二次方程式ノ解法ヲ示スコ次ノ如シ.

〔第壹例〕 $yz=a^2$, $zx=b^2$, $xy=c^2$ ヲ解セヨ.

$\dfrac{zx\times xy}{yz}=\dfrac{b^2\times c^2}{a^2}$ 即チ $x^2=\dfrac{b^2c^2}{a^2}$.

$\therefore$ $x=\pm\dfrac{bc}{a}$, $y=\pm\dfrac{ca}{b}$, $z=\pm\dfrac{ab}{c}$.

〔第貳例〕 $(y+z)(z+x)=a^2$, $(z+x)(x+y)=b^2$

$(x+y)(y+z)=c^2$ ヲ解セヨ.

$\dfrac{(z+x)(x+y)(x+y)(y+z)}{(y+z)(z+x)}=\dfrac{b^2c^2}{a^2}$ $\therefore$ $x+y=\pm\dfrac{bc}{a}$,

$y+z=\pm\dfrac{ca}{b}$, $z+x=\pm\dfrac{ab}{c}$.

之ニ由テ $(x+y)+(z+x)-(y+z)=\pm\left(\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ab}{c}-\dfrac{ca}{b}\right)$,

$\therefore$ $x=\pm\dfrac{b^2c^2+a^2b^2-c^2a^2}{2abc}$, $y=\pm\dfrac{c^2a^2+b^2c^2-a^2b^2}{2abc}$,

$z=\pm\dfrac{a^2b^2+c^2a^2-b^2c^2}{2abc}$.

〔第三例〕 $x(y+z)=a$, $y(z+x)=b$, $z(x+y)=c$ ヲ解セヨ.

$x(y+z)+y(z+x)-z(x+y)=a+b-c$,

即チ $2xy=a+b-c$, $2yz=b+c-a$, $2zx=c+a-b$,

$\therefore$ $\dfrac{2xy\cdot 2zx}{2yz}=\dfrac{(a+b-c)(c+a-b)}{b+c-a}$,

$\therefore$ $x=\pm\sqrt{\dfrac{(a+b-c)(c+a-b)}{2(b+c-a)}}$, $y=\pm\sqrt{\dfrac{(b+c-a)(a+b-c)}{2(c+a-b)}}$,

$z=\pm\sqrt{\dfrac{(c+a-b)(b+c-a)}{2(a+b-c)}}$.

〔第四例〕 $x^2-yz=a^2$, $y^2-zx=b^2$, $z^2-xy=c^2$ ヲ解セヨ.

(第壹法) $(x^2-yz)^2-(y^2-zx)(z^2-xy)=a^4-b^2c^2$,

即チ $x(x^3+y^3+z^3-3xyz)=a^4-b^2c^2$,

$\therefore$ $\dfrac{x}{a^4-b^2c^2}=\dfrac{y}{b^4-c^2a^2}=\dfrac{z}{c^4-a^2b^2}=\dfrac{1}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$,

$\therefore$ $\dfrac{x^2}{(a^4-b^2c^2)^2}=\dfrac{yz}{(b^4-c^2a^2)(c^4-a^2b^2)}=\dfrac{x^2-yz}{(a^4-b^2c^2)^2-(b^4-c^2a^2)(c^4-a^2b^2)}$

即チ $\dfrac{x^2}{(a^4-b^2c^2)^2}=\dfrac{a^2}{a^2(a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2)}$,

$$\therefore\quad x=\pm\frac{a^4-b^2c^2}{\sqrt{(a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2)}}.$$

〔第貳法〕 $y(x^2-yz)+z(y^2-zx)+x(z^2-xy)=a^2y+b^2z+c^2x$,

$$\therefore\quad c^2x+a^2y+b^2z=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$z(x^2-yz)+x(y^2-zx)+y(z^2-xy)=a^2z+b^2x+c^2y,$$

$$\therefore\quad b^2x+c^2y+a^2z=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1), (2) ヨリ十文字ノ法ニ由テ

$$\frac{x}{a^4-b^2c^2}=\frac{y}{b^4-c^2a^2}=\frac{z}{c^4-a^2b^2},$$

$\therefore\quad \dfrac{x^2}{(a^4-b^2c^2)^2}=\dfrac{x^2-yz}{(a^4-b^2c^2)^2-(b^4-c^2a^2)(c^4-a^2b^2)}$ ヨリ答ヲ得.

〔第五例〕 $x+y+z=9$, $x^2+y^2+z^2=35$,

$x^3+y^3+z^3=153$ ヲ解セヨ.

$(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=9^2-35$,

即チ $xy+yz+zx=23$.

又 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$ ナルカ

故ニ $153-3xyz=9(35-23)$ $\therefore\quad xyz=15$.

今 x, y, z ヲ三根トスル λ ノ三次方程式ヲ作レハ

$$(\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z)=0,$$

即チ $\lambda^3-\lambda^2(x+y+z)+\lambda(yz+zx+xy)-xyz=0$,

即チ $\lambda^3-9\lambda^2+23\lambda-15=0$,

即チ $(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)=0$,

$\therefore\quad \lambda=1$, 3 或ハ 5 ナリ,

之ニ由テ $x=1$, $y=3$, $z=5$, 或ハ $x=1$, $y=5$, $z=3$,

或ハ $x=3$, $y=1$, $z=5$, 或ハ $x=3$, $y=5$, $z=1$,

或ハ $x=5$, $y=1$, $z=3$, 或ハ $x=5$, $y=3$, $z=1$.

例題四拾六

次ノ各方程式ヲ解セヨ.

1. $x(x+y+z)=a^2$, $y(x+y+z)=b^2$, $z(x+y+z)=c^2$.
2. $-yz+zx+xy=a$, $yz-zx+xy=a$, $yz+zx-xy=c$.
3. $yz=a(y+z)$, $zx=b(z+x)$, $xy=c(x+y)$.
4. $yz=by+cz$, $zx=cz+ax$, $xy=ax+by$.
5. $x^2+2yz=12$, $y^2+2zx=12$, $z^2+2xy=12$.
6. $(y+z)(x+y+z)=a$, $(z+x)(x+y+z)=b$, $(x+y)(x+y+z)=c$.
7. $(y+b)(z+c)=a^2$, $(z+c)(x+a)=b^2$, $(x+a)(y+b)=c^2$.
8. $x^2-(y-z)^2=a^2$, $y^2-(z-x)^2=b^2$, $z^2-(x-y)^2=c^2$.
9. $x(y+z-x)=a$, $y(z+x-y)=b$, $z(x+y-z)=c$.
10. $\dfrac{y+z}{a}=\dfrac{z+x}{b}=\dfrac{x+y}{c}=2xyz$.
11. $\dfrac{y+z}{a}=\dfrac{z+x}{b}=\dfrac{x+y}{c}=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$.
12. $yz=a+y+z$, $zx=b+z+x$, $xy=c+x+y$.
13. $yz=a(y+z)+\alpha$, $zx=b(z+x)+\beta$, $xy=c(x+y)+\gamma$
14. $x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}$, $y+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{3}$, $z+\dfrac{1}{x}=4$.
15. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=13$, $\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=1$, $\dfrac{1}{xy}-\dfrac{2}{z}=0$.
16. $xy+yz+zx=a^2-x^2=b^2-y^2=c^2-z^2$.
17. $x+y+z=6$, $x^2+y^2+z^2=14$, $xyz=6$.
18. $x+y+z=15$, $x^3+y^3+z^3=495$, $xyz=105$.
19. $x+y+z=9$, $x^2+y^2+z^2=41$, $x^3+y^3+z^3=189$.
20. $x+y+z=10$, $yz+zx+xy=33$
    $(y+z)(z+x)(x+y)=194$.

21. $\dfrac{a}{x}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,\quad \dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{z}{c}=1,\quad \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{c}{z}=1.$

22. $ax=\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y},\quad by=\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z},\quad cz=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}.$

23. $y^2+z^2-x(y+z)=a^2,\quad z^2+x^2-y(z+x)=b^2$

$x^2+y^2-z(x+y)=c^2.$

24. $x+y+z=a+b+c,\quad x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2,$

$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0.$

25. $(x+y)(x+z)=ax,\quad (y+z)(y+x)=by,$

$(z+x)(z+y)=cz.$

26. $x^2-yz=ax,\quad y^2-zx=by,\quad z^2-xy=cz.$

例題四拾解答

1. 三方程式ヲ加フレバ $(x+y+z)^2=a^2+b^2+c^2,$

$$\therefore\quad x+y+z=\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2)},$$

$\therefore\quad x=\dfrac{a^2}{x+y+z}=\pm\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$ 以下同樣.

2. 第一,第二ヲ加フレバ $2xy=a+b,$ 同樣 $2yz=b+c,$

$2zx=c+a,\quad \therefore\quad x=\pm\sqrt{\dfrac{(a+b)(c+a)}{2(b+c)}},$ 以下同樣.

3. 三方程式ヨリ視察ニ由テ $x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

又第一ヨリ $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y},$ 第二ヨリ $\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z},$

第三ヨリ $\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}.$

之ニ由テ $\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)+\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)-\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a},$

即チ $\dfrac{2}{x}=\dfrac{ab+ca-bc}{abc}\quad \therefore\quad x=\dfrac{2abc}{ab+ca-bc},$ 以下同樣.

4. 視察ニ由テ $x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

又 $1=\dfrac{b}{z}+\dfrac{c}{y},\quad 1=\dfrac{c}{x}+\dfrac{a}{z},\quad 1=\dfrac{a}{y}+\dfrac{b}{x},$

$\therefore\quad b\left(\dfrac{c}{x}+\dfrac{a}{z}\right)+c\left(\dfrac{a}{y}+\dfrac{b}{x}\right)-a\left(\dfrac{b}{z}+\dfrac{c}{y}\right)=b+c-a,$

即チ $\dfrac{2bc}{x}=b+c-a\quad \therefore\quad x=\dfrac{2bc}{b+c-a},$ 以下同樣.

5. 三方程式ヲ加フレバ $x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy=36,$

$$\therefore\quad x+y+z=\pm6\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

第一ヨリ第二ヲ減スレバ $x^2-y^2-2z(x-y)=0,$

$$\therefore\quad x-y=0 \text{ 或ハ } x+y-2z=0.$$

$x-y=0$ ナル時 (1) ヨリ $2x+z=\pm6,$

即チ $y=x,\quad z=\pm6-2x$ ヲ第一ニ代用スレバ

$x^2+2x(\pm6-2x)=12$ 即チ $-3x^2\pm12x=12,$

$x^2\mp4x+4=0\quad \therefore\quad (x\mp2)^2=0,\quad \therefore\quad x=\pm2,$

$y=\pm2,$

$z=\pm6-2(\pm2)=\pm2.$

$x+y-2z=0$ ナル時 (1) ヨリ $3z=\pm6,\quad \therefore\quad z=\pm2,$

$\therefore\quad x+y=\pm4$ 第一ヨリ $x^2+2(\pm4-x)(\pm2)=12,$

即チ $x^2\mp4x+4=0$ 亦 $x=\pm2$ トナリ前ト同シ答ヲ得.

6. 三方程式ヲ加フレバ $2(x+y+z)^2=a+b+c$

$$\therefore\quad x+y+z=\pm\sqrt{\frac{a+b+c}{2}}.$$

第二,第三ヲ加ヘ第一ヲ減スレバ $2x(x+y+z)=b+c-a,$

$\therefore\quad x=\dfrac{b+c-a}{2(x+y+z)}=\pm\dfrac{b+c-a}{\sqrt{2(a+b+c)}},$ 以下同樣.

7. 第貳,第三ノ積ヲ第一ニテ除スレバ $(x+a)^2=\dfrac{b^2c^2}{a^2},$

$\therefore\quad x+a=\pm\dfrac{bc}{a}\quad \therefore\quad x=\pm\dfrac{bc}{a}-a,\quad y=\pm\dfrac{ca}{b}-b,$

$$z=\pm\frac{ab}{c}-c.$$

8. $(x+y-z)(x-y+z)=a^2,\quad (y+z-x)(y-z+x)=b^2,$

$(z+x-y)(z-x+y)=c^2,$

∴ $x+y-z=\pm\frac{ab}{c},\quad y+z-x=\pm\frac{bc}{a},\quad z+x-b=\pm\frac{ca}{b},$

之ニ由テ $x=\pm\frac{a(b^2+c^2)}{2bc}$, 以下同様.

9. $x(y+z-x)+y(z+x-y)-z(x+y-z)=a+b-c,$

即チ $z^2-(x-y)^2=a+b-c,$

同様ニ $x^2-(y-z)^2=b+c-a,\quad y^2-(z-x)^2=c+a-b.$

前例ト同様ニテ解答ヲ得ヘシ.

10. $\frac{(y+z)+(z+x)-(x+y)}{a+b-c}=2xyz,$

即チ $\frac{2z}{a+b-c}=2xyz$ ∴ $z=0$, 或ハ $xy=\frac{1}{a+b-c}$.

同様ニ $x=0$ 或 $yz=\frac{1}{b+c-a}$, $z=0$ 或ハ $zx=\frac{1}{c+a-b}$.

之ニ由テ $x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

或ハ $x=\pm\sqrt{\frac{b+c-a}{(a+b-c)(c+a-b)}}$, 以下同様.

11. $\frac{(y+z)+(z+x)-(x+y)}{a+b-c}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2},$

∴ $\frac{2z}{a+b-c}=\frac{2x}{b+c-a}=\frac{2y}{c+a-b}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2},$

∴ $\frac{4(x^2+y^2+z^2)}{(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2}=\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2},$

∴ $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2}.$

之ニ由テ x, y, z ヲ求ムレハ

$x=\frac{2(a^2+b^2+c^2)(b+c-a)}{(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2}$, 以下同法.

12. $yz-y-z=a$ ヨリ $(y-1)(z-1)=a+1,$

$(z-1)(x-1)=b+1,\quad (x-1)(y-1)=c+1,$

∴ $(x-1)^2=\frac{(b+1)(c+1)}{a+1}$ ∴ $x=1\pm\sqrt{\frac{(b+1)(c+1)}{a+1}}$, 以下同法

13. $yz-a(y+z)=\alpha$, 即チ $(y-a)(z-a)=\alpha+a^2,$

$(z-a)(x-a)=\beta+a^2,\quad (x-a)(y-a)=\gamma+a^2,$

∴ $(x-a)^2=\frac{(\beta+a^2)(\gamma+a^2)}{\alpha+a^2}$ ∴ $x=a\pm\sqrt{\frac{(\beta+a^2)(\gamma+a^2)}{\alpha+a^2}}$.

14. 第三ヨリ $z=4-\frac{1}{x}$ ∴ 第二ヨリ $y+\frac{1}{4-\frac{1}{x}}=\frac{7}{3},$

即チ $y=\frac{7}{3}-\frac{x}{4x-1}$ ∴ 第一ヨリ $x+\frac{1}{\frac{7}{3}-\frac{x}{4x-1}}=\frac{3}{2},$

即チ $x\left(\frac{7}{3}-\frac{x}{4x-1}\right)+1=\frac{3}{2}\left(\frac{7}{3}-\frac{x}{4x-1}\right)$ 之ヨリ $x=1$ 或ハ $\frac{3}{10}$,

15. $x=\frac{1}{3},\quad y=\frac{1}{4},\quad z=\frac{1}{6}$ 或ハ $x=-\frac{1}{8},\quad y=-\frac{1}{7},\quad z=\frac{1}{28}$,

16. 第一ヨリ $x^2+x(y+z)+yz=a^2,$

即チ $(x+y)(x+z)=a^2,\quad (y+z)(y+x)=b^2,\quad (z+x)(z+y)=c^2$

之ヨリ $x=\pm\frac{a^2b^2+c^2a^2-b^2c^2}{2abc}$, 以下同様.

17. $(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=6^2-14$ ∴ $xy+yz+zx=11,$

x, y, z ノ三根ヲ有スル λ ノ三次方程式ハ

$(\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z)=0,$

即チ $\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0,$

即チ $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$ 即チ $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0,$

∴ λ ハ 1, 2, 3 ∴ x, y, z ハ 1, 2, 3 ノ内ナリ.

18. $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$,

即チ $495-3\times105=15(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$,

即チ $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=12$,

∴ $(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)=15^2-12$,

∴ $xy+yz+zx=71$.

$\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0$,

即チ $\lambda^3-15\lambda^2+71\lambda-105=0$ 即チ $(\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-7)=0$,

∴ $\lambda=3,\ 5,\ 7$ ∴ $x,\ y,\ z$ ハ 3, 5, 7 ナリ.

19. $(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=9^2-41$, ∴ $xy+yz+zx=20$,

又 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ ヨリ

$189-3xyz=9(41-20)$ ∴ $xyz=0$.

$\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0$,

即チ $\lambda^3-9\lambda^2+20\lambda=0$ ∴ $\lambda(\lambda-4)(\lambda-5)=0$,

∴ $\lambda=0,\ 4,\ 5$ ∴ $x,\ y,\ z$ ハ 0, 4, 5 ナリ.

20. 第一,第三ヨリ $(10-x)(10-y)(10-z)=294$,

即チ $1000-100(x+y+z)+10(xy+yz+zx)-xyz=294$,

即チ $1000-100\times10+10\times33-xyz=294$ ∴ $xyz=36$.

$\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0$,

即チ $\lambda^3-10\lambda^2+33\lambda-36=0$ 即チ $(\lambda-3)^2(\lambda-4)=0$,

∴ $\lambda=3,\ 3,\ 4$ ∴ $x,\ y,\ z$ ハ 3, 3, 4 ナリ.

21. 第一ヨリ第二ヲ減スレハ $\frac{a}{x}-\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{b}{y}=0$,

即チ $\frac{ay-bx}{xy}+\frac{ay-bx}{ab}=0$ ∴ $ay-bx=0$ 或ハ $xy+ab=0$.

$ay-bx=0$ ナル時即チ $y=\frac{b}{a}x$,

第一ヨリ $\frac{a}{x}+\frac{1}{b}\times\frac{b}{a}x+\frac{z}{c}=1$ ∴ $z=c\left(1-\frac{a}{x}-\frac{x}{a}\right)$,

第三ヨリ $\frac{x}{a}+\frac{1}{b}\times\frac{b}{a}x+c\times\frac{1}{c\left(1-\frac{a}{x}-\frac{x}{a}\right)}=1$,

即チ $\frac{x}{a}+\frac{x}{a}+\frac{ax}{ax-a^2-x^2}=1$,

即チ $2x(ax-a^2-x^2)+a^2x=a(ax-a^2-x^2)$,

即チ $2x^3-3ax^2+2a^2x-a^3=0$,

即チ $(x-a)(2x^2-ax+a^2)=0$ ∴ $x=a,\frac{1}{4}a(1\pm\sqrt{-7})$,

$y=b,\ \frac{1}{4}b(1\pm\sqrt{-7}),\ y=-c$, 或ハ $\frac{1}{4}c(1\pm\sqrt{-7})$.

22. $axyz=y^2+z^2$, $bxyz=z^2+x^2$, $cxyz=x^2+y^2$,

∴ $(x^2+y^2)+(z^2+x^2)-(y^2+z^2)=(b+c-a)xyz$,

即チ $2x^2=(b+c-a)xyz$ ∴ $x=0$ 或ハ $\frac{yz}{x}=\frac{2}{b+c-a}$,

同法ニテ $y=0$ 或ハ $\frac{zx}{y}=\frac{2}{c+a-b}$,

$z=0$ 或ハ $\frac{xy}{z}=\frac{2}{a+b-c}$.

之ニ由テ $x=y=z=0$,

或ハ $x=\pm\frac{2}{\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}}$ 以下同法.

23. 第二,第三ヲ加ヘ第一ヲ減スレハ

$2x^2-2yz=b^2+c^2-a^2$ ∴ $x^2-yz=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$,

同法ニテ $y^2-zx=\frac{1}{2}(c^2+a^2-b^2)$, $z^2-xy=\frac{1}{2}(c^2+a^2-b^2)$.

之ヨリ第四例ノ解法ヲ用フヘシ.

24. $x=\lambda+a$, $y=\mu+b$, $z=\nu+c$ トスレハ

第一ヨリ $\lambda+\mu+\nu=0$,

第二ヨリ $(b-c)\lambda+(c-a)\mu+(a-b)\nu=0$,

此両方程式ヨリ十文字ノ法ニ由テ

$$\frac{\lambda}{(a-b)-(c-a)}=\frac{\mu}{(b-c)-(a-b)}=\frac{\nu}{(c-a)-(b-c)},$$

即チ $\frac{x-a}{2a-b-c}=\frac{y-b}{2b-c-a}=\frac{z-c}{2c-a-b}$,

$$\therefore \quad \frac{(x-a)^2}{(2a-b-c)^2}=\frac{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}{(2a-b-c)^2+(2b-c-a)^2+(2c-a-b)^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2-2(ax+by+cz)+a^2+b^2+c^2}{6(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$$

第二ヨリ $$=\frac{-(ax+by+cz)+a^2+b^2+c^2}{3(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A})$$

又 $$\frac{x-a}{2a-b-c}=\frac{a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)}{a(2a-b-c)+b(2b-c-a)+c(2c-a-b)}$$

$$=\frac{ax+by+cz-a^2-b^2-c^2}{2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{B})$$

(A) ヲ (B) ニテ除スレハ $\dfrac{x-a}{2a-b-c}=-\dfrac{2}{3}$,

$$\therefore \quad x=\frac{1}{3}(2b+2c-a),\quad y=\frac{1}{3}(2c+2a-b),$$

$$z=\frac{1}{3}(2a+2b-c).$$

又觀察ニヨリテ $x=a,\ y=b,\ z=c.$

25. 第一,第二ノ積ヲ第三ニテ除スレハ $(x+y)^2=\dfrac{abxy}{cz}$,

$$\therefore \quad z(x+y)=\pm\frac{1}{c}\sqrt{(abcxyz)},$$

同様ニ $$x(y+z)=\pm\frac{1}{a}\sqrt{(abcxyz)},$$

$$y(z+x)=\pm\frac{1}{b}\sqrt{(abcxyz)},$$

$$\therefore \quad x(y+z)+y(z+x)-y(x+z)=\pm\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\sqrt{(abcxy)},$$

即チ $$2xy=\pm\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\sqrt{(abcxyz)},$$

$\therefore$ $xy=0$ 或ハ $\dfrac{xy}{z}=\dfrac{(bc+ca-ab)}{abc}$,

同様ニ $yz=0$ 或ハ $\dfrac{yz}{x}=\dfrac{(ca+ab-bc)^2}{abc}$,

$zx=0$ 或ハ $\dfrac{zx}{y}=\dfrac{(ab+bc-ca)^2}{abc}$,

之ニ由テ $x=y=z=0$,

或ハ $x=\pm\dfrac{(bc+ca-ab)(ab+bc-ca)}{abc}$, 以下同様

26. $y(x^2-yz)+z(y^2-zx)+x(z^2-xy)=axy+byz+czx$,

即チ $axy+byz+czx=0.$

又 $z(x^2-yz)+x(y^2-zx)+y(z^2-xy)=azx+bxy+cyz$,

即チ $bxy+cyz+azx=0$,

十文字ノ法ニ由テ $\dfrac{xy}{c^2-ab}=\dfrac{yz}{a^2-bc}=-\dfrac{zx}{b^2-ac}$,

$$\therefore \quad \frac{xy}{c^2-ab}\times\frac{zx}{b^2-ca}\div\frac{yz}{a^2-bc}=\frac{yz}{a^2-bc},$$

即チ $$\frac{x^2}{\dfrac{(c^2-ab)(b^2-ca)}{a^2-bc}}=\frac{yz}{a^2-bc}=\frac{x^2-yz}{\dfrac{(c^2-ab)(b^2-ca)}{a^2-bc}-(a^2-bc)}$$

$$=\frac{ax(a^2-bc)}{(c^2-ab)(b^2-ca)-(a^2-bc)^2},$$

即チ $x=0$ 或ハ $\dfrac{x}{(c^2-ab)(b^2-ca)}=\dfrac{1}{-(a^3+b^3+c^3-3abc)}$

$$\therefore \quad x=-\frac{(c^2-ab)(b^2-ca)}{a^3+b^3+c^3-3abc}.$$

聯立貳次方程式之問題

6. 問題 此處ニ於テ聯立貳次方程式ヲ用ヒテ解スヘキ問題ヲ示サントス.

[例] 直角三角形アリ斜邊10寸,面積24平方寸ナルヰ他ノ貳邊如何

貳邊ノ長サヲx及ヒy寸トスレハ

$$x^2+y^2=10^2, \quad 及ヒ \quad \frac{1}{2}xy=24.$$

此兩方程式ヨリ　$x=6$　及ヒ　$y=8.$

例題四拾七

1. 或人若干哩ノ道ヲ行キシニ56哩行キシ後チ四輪車ニ乘リテ行ケリ若シ之チ滊車ニ乘リテ行カハ四輪車カ既ニ到着セシ時刻ニ當リ夫レヨリ尚ホ35哩遠ク行キ得ヘシトイフ但シ四輪車カ5哩行ク間ニ滊車ハ此道ノ四分ノ壹チ行キ得ヘシトイフ此道程何哩ナリヤ.

2. 酒商アリ正利ノ外ニ尚ホ1割1分ノ利チ得ントシテ酒チ賣ルニ賣桝,買桝チ造リシニ此桝ノ用ヒ方チ誤リシニヨリ更ニ利益無カリシトイフ此賣買ノ正利割如何.

3. 三工毎日ノ賃金合セテ19圓ニテ各若干日働キテ等額ノ金チ得タリ而シテ甲ノ働作日數ハ4日,乙ノ働作日數ハ丙ヨリ3日少ナシ又毎日ノ賃金ハ甲ハ乙ヨリ3圓多シ各毎日ノ賃金如何.

4. 矩形ノ地面アリ長邊a間,短邊b間ナリ今此兩邊ニ平行シテ各壹直線チ面内ニ引キ之チ四分スル片其相對スル兩部分ノ面積ハA及ヒB坪ナリ他ノ兩部分ノ面積如何.

5. 米商アリ甲商ハ1圓ニ付$1\frac{1}{4}$升高ク米若干石チ賣リ90圓ノ利チ得タリ甲商又之チ乙商ニ1圓ニ付其買價ヨリ5合高ク之チ賣リテ50圓チ利セリ1圓ノ原相場及ヒ此米ノ總石數如何

6. 甲乙兩船ハ東港ヨリ丙丁兩船ハ西港ヨリ各同時ニ出發シ甲ハ120浬行キテ丙ニ會シ140浬行キテ丁ニ會シ丙ハ126浬行キ乙ニ會シ丁ハ中央ニテ乙ニ會セリ兩港ノ距離如何.

7. 直角三角形アリ三邊各立方ノ和1728立方尺ニシテ三邊ノ和24尺ナリ各邊如何.

例題四拾五解答

1. 道程チx哩トシ四輪車及ヒ滊車毎時ノ速チy及ヒz哩トスレハ

$$\frac{x-56}{y}=\frac{x-56+35}{z}, \qquad \frac{5}{y}=\frac{\frac{1}{4}x}{z}.$$

第壹チ第貳ニテ除スレハ　$\dfrac{x-56}{5}=\dfrac{x-56+35}{\frac{1}{4}x},$

即チ　$x^2-56x=20(x-21)$,　　$\therefore\ x^2-76x+420=0,$

即チ　$(x-70)(x-6)=0$　　$\therefore\ x=70$　或　$6,$

9ハ不適當ナリ故ニ所求ノ距離チ70哩トス.

2. 正利チ$\dfrac{x}{100}$トス而シテ正桝チ1升トスレハ

買桝ハ$1+y$升,賣桝ハ$1-y$升ナリ.

又1升ノ原價チaトス.

然ルキ　$$\frac{a\left(1+\frac{x}{100}\right)(1+y)}{1-y}=a\left(1+\frac{x+11}{100}\right).$$

及ヒ　$$\frac{a\left(1+\frac{x}{100}\right)(1-y)}{1+y}=a.$$

此兩方程式チ相乘スレハ

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)^2=1+\frac{x+11}{100},$$

之ニ由テ　$x=10$　即チ　1割ナリ.

3. 甲毎日ノ賃金チx圓トスレハ

乙毎日ノ賃金ハ$x-3$圓,丙ハ$19-(x+x-3)=22-2x$圓ナリ,

又乙ノ働作日數$=y$,丙ノ同$=y+3$トス.

然ルキ　$4x=y(x-3)=(y+3)(22-2x),$

$\therefore\ x=9,$　故ニ甲9圓,乙6圓,丙4圓.

4. b 邊ノ平行線ニテ a 邊ヲ截リタル部分ヲ x, $a-x$ 間トシ,
a 邊ノ平行線ニテ b 邊ヲ截リタル邊ヲ y, $b-y$ 間トス.

而シテ x, y ニテ有タレタル矩形ヲ A トスレハ

$$xy=\mathrm{A},\quad 故ニ\quad (a-x)(b-y)=\mathrm{B}.$$

此兩方程式ヨリ

$$x=\frac{1}{2b}\left\{ab+\mathrm{A}-\mathrm{B}\pm\sqrt{a^2b^2-2ab(\mathrm{A}+\mathrm{B})+(\mathrm{A}-\mathrm{B})^2}\right\}.$$

故ニ所求ノ壹ツノ矩形ハ

$$bx-\mathrm{A}\quad 即チ\quad \frac{1}{2}\left\{ab+\mathrm{A}-\mathrm{B}\pm\sqrt{a^2b^2-2ab(\mathrm{A}+\mathrm{B})+(\mathrm{A}-\mathrm{B})^2}\right\}-\mathrm{A},$$

又他ノ矩形ハ $b(a-x)-\mathrm{B}$,

$$即チ\quad b\left[a-\frac{1}{2b}\left\{ab+\mathrm{A}-\mathrm{B}\pm\sqrt{a^2b^2-2ab(\mathrm{A}+\mathrm{B})+(\mathrm{A}-\mathrm{B})^2}\right\}\right]-\mathrm{B}.$$

5. 米ノ石數ヲ x トスレハ $100x$ 升ナリ,
而シテ 1 圓ノ原相場ヲ y 升トス.

$$然ルニ\ \frac{100x}{y-1\frac{1}{4}}=\frac{100x}{y}+90,\qquad \frac{100x}{y-1\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}=\frac{100x}{y}+90+50.$$

$$第壹ヨリ\quad x=\frac{18y}{25}\left(y-\frac{5}{4}\right),\quad 第貳ヨリ\quad x=\frac{4y}{5}\left(y-\frac{7}{4}\right),$$

$$\therefore\quad \frac{18y}{25}\left(y-\frac{5}{4}\right)=\frac{4y}{5}\left(y-\frac{7}{4}\right)\quad \therefore\quad y=6\frac{1}{4},$$

$$\therefore\quad x=\frac{4}{5}\times 6\frac{1}{4}\left(6\frac{1}{4}-\frac{7}{4}\right)=22\frac{1}{2}.$$

之ニ由テ 1 圓ノ原相場ハ 6 升 2 合 5 勺, 總石數 $22\frac{1}{2}$ 石.

本題ハ一次方程式ナリ.

6. 兩港ノ距離ヲ x 浬トシ甲乙丙毎時ノ速ヲ y, z, u 浬トス
而シテ丁ハ中央ニテ乙ニ會スルカ故ニ丁毎時ノ速ハ乙ト等シク即チ z 浬ナリ.

之ニ由テ次ノ如シ,

$$\frac{120}{y}=\frac{x-120}{u},\qquad \frac{140}{y}=\frac{x-140}{z},\qquad \frac{126}{u}=\frac{x-126}{z}.$$

$$之ニ由テ\quad \frac{120}{y}\times\frac{x-140}{z}\times\frac{126}{u}=\frac{x-120}{u}\times\frac{140}{y}\times\frac{x-126}{z},$$

$$即チ\quad 126\times120(x-140)=140(x-120)(x-126)$$

$$\therefore\quad x=210.$$

7. 三邊ヲ x, y, z トスレハ

$$x+y+z=24,\quad x^3+y^3+z^3=1728,\quad x^2+y^2=z^2.$$

第一ヨリ $x^2+y^2+2xy=24^2-48z+z^2$,

故ニ第三ヨリ $2xy=24^2-48z\qquad \therefore\ xy=288-24z\ldots\ldots\ldots(1)$

又第二ヨリ $(x+y)(x^2+y^2-xy)+z^3=1728$,

即チ $(24-z)(z^2-xy)+z^3=1728$,

即チ $24z^2-24xy+xyz=1728\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

(1) (2) ヨリ xy ヲ消去スレハ

$$24z^2-24(288-24z)+(288-24z)z=1728,\qquad \therefore\ z=10.$$

又第一ヨリ $x+y=10$, (1) ヨリ $xy=48$.

$$\therefore\quad x=4,\quad y=6.$$

雜　題

此編ノ終リニ方リ次ニ方程式ノ雜題ヲ示サントス。

1. $x^2+xy+y^2=37,\quad y^2+yz+z^2=23,$

   $z^2+zx+x^2=19.$

2. $x^2+xy+y^2=a^2,\quad y^2+yz+z^2=b^2,$

   $z^2+zx+x^2=c^2.$

3. $x^4=mx+ny,\quad y^4=nx+my.$

4. $\dfrac{x+y-\sqrt{x^2+y^2}}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{2x}{a}.\qquad \dfrac{x}{y}=\sqrt{\dfrac{a+x}{a-y}}.$

5. $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=\dfrac{1}{a}(xy-y\sqrt{x^2-y^2}),$

   $\sqrt[4]{(x+y)}+\sqrt[4]{(x-y)}=b.$

6. $x-\sqrt{x^2-y}=\dfrac{a}{y}(\sqrt{x-y}+\sqrt{x-y}),$

   $\sqrt{(x+y)^3}-\sqrt{(x-y)^3}=b.$

7. $\sqrt[3]{(x+y)}+\sqrt[3]{(x-y)}=\sqrt[3]{a},$

   $\sqrt[3]{(x^2+y^2)}+\sqrt[3]{(x-y)}=\sqrt[3]{a^2}.$

8. $x+y+z=0,\qquad ax+by+cz=0,$

   $a^3x^3+b^3y^3+c^3z^3=3(b-c)(c-a)(a-b).$

9. $\dfrac{(x-yz)^2}{(1-y^2)(1-z^2)}=a^2,\quad \dfrac{(y-zx)^2}{(1-z^2)(1-x^2)}=b^2,$

   $\dfrac{(z-xy)^2}{(1-x^2)(1-y^2)}=c^2.$

雜題解答

1. $(x^2+xy+y^2)-(y^2+yz+z^2)=37-23,$

即チ　$(x-z)(x+y+z)=14\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

又　$(y^2+yz+z^2)-(z^2+zx+x^2)=23-19,$

即チ　$(y-x)(x+y+z)=4\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

(1) ヲ (2) ニテヲ除スレハ　$\dfrac{x-z}{y-x}=\dfrac{14}{4}$　即チ　$z=\dfrac{9x-7y}{2}\ldots(3)$

(3) ノ z ノ相等値ヲ (2) ニ代用スレハ

$(y-x)\left(x+y+\dfrac{9x-7y}{2}\right)=4$　即チ　$11x^2-16xy+5y^2=-8\ldots\ldots(4)$

$\left.\begin{array}{ll}(4)\text{　即チ} & 11x^2-16xy+5y^2=-8\\ \text{原方程式　即チ} & x^2+xy+y^2=37\end{array}\right\}$ ヨリ 3.章第貳之場合

(290.頁) ニヨリテ x, y ヲ求ムルコ次ノ如シ,

$\dfrac{11x^2-16xy+5y^2}{x^2+xy+y^2}=\dfrac{-8}{37}$　即チ　$415x^2-584xy+193y^2=0,$

之ニ由テ　$y=\dfrac{x}{193}(300\pm\sqrt{5169})$, 此 y ヲ $x^2+xy+y^2=37$ ニ

代用スレハ　$x^2+\dfrac{x^2}{193}(300\pm\sqrt{5169})+\dfrac{x^2}{193^2}(300\pm\sqrt{5169})^2$

$=37,$

之ヨリ x ヲ得ヘシ非常ニ煩雜ナル答ナリ.

2. 此題ハ前題ト全ク同一ナレドモ上手ニ解スヘシ即チ次ノ如ク等勢式ノ順序ニヨル.

$x^2+xy+y^2=a^2\ldots\ldots(1),\quad y^2+yz+z^2=b^2\ldots\ldots(2)$

$z^2+zx+x^2=c^2\ldots\ldots(3)$

(1) ヨリ (2) ヲ減シテ括レハ　$(x-z)(x+y+z)=a^2-b^2\ldots\ldots(4)$

(2) ヨリ (3) ヲ減シテ括レハ　$(y-x)(x+y+z)=b^2-c^2\ldots\ldots(5)$

(3) ヨリ (1) ヲ減シテ括レハ　$(z-x)(x+y+z)=c^2-a^2\ldots\ldots(6)$

(4), (5), (6) ヨリ $\dfrac{x-z}{a^2-b^2}=\dfrac{y-x}{b^2-c^2}=\dfrac{z-y}{c^2-a^2}=\dfrac{1}{x+y+z}$,

第四編分數ノ定理(161頁ヨリ166.頁ノ本文ヲ参照)ニ由テ

$$\frac{(x-z)^2+(y-x)^2+(z-y)^2}{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2}=\frac{1}{(x+y+z)^2},$$

即チ $\dfrac{2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}{2(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)}=\dfrac{1}{(x+y+z)^2}$,

即チ $\dfrac{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)}{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}=\dfrac{1}{(x+y+z)^2}$ ....(7)

(1), (2), (3) ヲ加フレハ $2x^2+2y^2+2z^2+xy+yz+zx=a^2+b^2+c^2$,

即チ $2(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)=a^2+b^2+c^2$ ....(8)

(7) 及ヒ (8) ヨリ $xy+yz+zx$ ヲ消去シテ $x+y+z$ ヲ求ムルヿ次ノ如シ, $3(xy+yz+zx)=2(x+y+z)^2-(a^2+b^2+c^2)$ 即チ (8) ヨリ得タルモノナリ之ヲ (7) ニ代用スレハ

$$\frac{(x+y+z)^2-\{2(x+y+z)^2-(a^2+b^2+c^2)\}}{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}=\frac{1}{(x+y+z)^2},$$

分母ヲ拂ヒテ簡單ニスレハ

$$(x+y+z)^4-(a^2+b^2+c^2)(x+y+z)^2+a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2=0,$$

故ニ $(x+y+z)^2$

$$=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\pm\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-3a^4-3b^4-3c^4}\right).$$

即チ $x+y+z$

$$=\pm\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\pm\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-3a^4-3b^4-3c^4}\right)\right\}}$$

$=\mathrm{M}$ 〔大キナ形ヲナレド知リタルモノナルカ故ニMト假定ス是レカ代數記號ノ便利ナル處ナリ〕

上ノ如ク $x+y+z=\mathrm{M}$ トイフヿガ分カリタルヲ以テ

(4) ヨリ $x-z=\dfrac{a^2-b^2}{\mathrm{M}}$ 即チ $z=x-\dfrac{a^2-b^2}{\mathrm{M}}$,

故ニ (3) ヨリ $\left(x-\dfrac{a^2-b^2}{\mathrm{M}}\right)^2+\left(x-\dfrac{a^2-b^2}{\mathrm{M}}\right)x+x^2=c^2$,

即チ $3(\mathrm{M}x)^2-3(a^2-b^2)(\mathrm{M}x)+(a^2-b^2)^2-c^2\mathrm{M}^2=0$,

故ニ $\mathrm{M}x=\dfrac{a^2-b^2}{2}\pm\sqrt{\left\{\dfrac{(a^2-b^2)^2}{4}-\dfrac{(a^2-b^2)^2}{3}+\dfrac{c^2\mathrm{M}^2}{3}\right\}}$,

之ニ由テ $x=\dfrac{1}{2\mathrm{M}}\left\{a^2-b^2\pm\sqrt{\dfrac{4c^2\mathrm{M}^2-(a^2-b^2)^2}{3}}\right\}$.

同様ニ $y=\dfrac{1}{2\mathrm{M}}\left\{b^2-c^2\pm\sqrt{\dfrac{4a^2\mathrm{M}^2-(b^2-c^2)^2}{3}}\right\}$,

$z=\dfrac{1}{2\mathrm{M}}\left\{c^2-a^2\pm\sqrt{\dfrac{4b^2\mathrm{M}^2-(c^2-a^2)^2}{3}}\right\}$.

3. 第一ヲ第二ニテ除スレハ $\dfrac{x^4}{y^4}=\dfrac{mx+ny}{nx+my}$,

即チ $\left(\dfrac{x}{y}\right)^4=\dfrac{m\left(\dfrac{x}{y}\right)+n}{n\left(\dfrac{x}{y}\right)+m}$ 而シテ $\dfrac{x}{y}=z$ ト假定スレハ

$z^4=\dfrac{mz+n}{nz+m}$ 即チ $nz^5+mz^4-mz-n=0$,

即チ $n(z^5-1)+mz(z^3-1)=0$,

即チ $(z-1)\{n(z^4+z^3+z^2+z+1)+mz(z^2+z+1)\}=0$,

即チ $(z-1)\{nz^4+(n+m)z^3+(n+m)z^2+(n+m)z+n\}=0$,

故ニ $z-1=0$ ....(1)

或ハ $nz^4+(n+m)z^3+(n+m)z^2+(n+m)z+n=0$ ....(2)

〔第壹〕(1) 即チ $z=1$ ヲ用フ,

但シ最初ニ $\dfrac{x}{y}=z$ ト假定セリ故ニ $\dfrac{x}{y}=1$, 即チ $x=y$,

之ニ由テ原方程式 $x^4=mx+ny$ ヨリ $x^4=mx+nx$,

即チ $x(x^3-m-n)=0$ ∴ $x=0$ 或ハ $\sqrt[3]{(m+n)}$,

即チ $x=y=0$ 或ハ $x=y=\sqrt[3]{(m+n)}$.

〔第貳〕(2) ハ z ノ反商方程式ナリ故ニ第拾壹編II.章(255−6頁)ニ由テ $n\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2+(n+m)\left(z+\dfrac{1}{z}\right)-(n-m)=0$,

之ヨリ $z+\dfrac{1}{z}$ ヲ求ムレハ

$z=\frac{1}{2n}\left(-n-m\pm\sqrt{n^2+m^2-2mn}\right)=\mathrm{M}$ トス

即チ　$z=\frac{1}{2}\left(-\mathrm{M}\pm\sqrt{\mathrm{M}^2-4}\right)=\frac{x}{y}$　故ニ　$x=\frac{y}{2}\left(-\mathrm{M}\pm\sqrt{\mathrm{M}^2-4}\right)$.

之ニ由テ原方程式 $y^4=nx+my$ ヨリ

$y^4=\frac{ny}{2}(-\mathrm{M}\pm\sqrt{\mathrm{M}^2-4})+my,$

故ニ　$y=0$　或ハ　$y=\sqrt[3]{\frac{n}{2}\left(-\mathrm{M}\pm\sqrt{\mathrm{M}^2-4}\right)+m}$.

4. 原方程式 $\frac{x+y-\sqrt{x^2+y^2}}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{2x}{a}$ ヨリ分數ノ定理ニ由リ

$$\frac{(x+y+\sqrt{x^2+y^2})+(x+y-\sqrt{x^2+y^2})}{(x+y+\sqrt{x^2+y^2})-(x+y-\sqrt{x^2+y^2})}=\frac{a+2x}{a-2x},$$

即チ　$\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{a+2x}{a-2x}$ 之ヲ平方ニスレハ　$\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2}=\frac{(a+2x)^2}{(a-2x)^2},$

双方ヨリ 1 ヲ減スレハ　$\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{(a+2x)^2-(a-2x)^2}{(a-2x)^2},$

即チ　$\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{8ax}{(a-2x)^2},$

故ニ　$x=0,\ldots\ldots(1)$,　或ハ　$\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{4a}{(a-2x)^2}\ldots\ldots(2)$

次ニ原方程式 $\frac{x}{y}=\sqrt{\frac{a+x}{a-y}}$ ヨリ $\frac{x^2}{y^2}=\frac{a+x}{a-y}$ 此双方ヨリ 1 ヲ減スレハ　$\frac{x^2-y^2}{y^2}=\frac{x+y}{a-y}$　即チ　$(x+y)\left(\frac{x-y}{y^2}-\frac{1}{a-y}\right)=0,$

故ニ　$x+y=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

或ハ　$\frac{x-y}{y^2}-\frac{1}{a-y}=0$　即チ　$y=\frac{ax}{a+x}\ldots\ldots\ldots(4)$

以上ノ方法ニ由テ (1), (2), (3), (4) ヲ得タリ。

此四ツノ方程式ノ內 (1) ト (2) ハ同時ニ用ソル能ハズ (3) ト (4) モ同時ニ用フル能ハス故ニ (1) ト (3), (2) ト (4), (1) ト (4), (2) ト (3) ヲ用フヘシ即チ四場合ナリ

〔第壹〕 (1) ト (3) ヲ用フ,　即チ　$x=0$,　$x+y=0$ ヲ用フレハ

$$x=0,\quad y=0.$$

〔第貳〕 (2) ト (4) ヲ用フ,　即チ次ノ如シ

(4) $y=\frac{ax}{a+x}$ ヲ (2) ニ用フレハ $\frac{\frac{ax}{a+x}}{x^2+\frac{a^2x^2}{(a+x)^2}}=\frac{4a}{(a-2x)^2}$

即チ　$(a+x)(a-2x)^2=4x(2a^2+2ax+x^2),$

故ニ　$8x^2+11ax-a^2=0,$　故ニ　$x=\frac{a}{16}(-11\pm3\sqrt{17})$

之ニ由テ　$y=\frac{ax}{a+x}$ ヨリ　$y=\frac{a}{8}(13\mp3\sqrt{17})$.

〔第三〕 (1) ト (4) ヲ用フレハ亦タ第一ノ如シ　$x=y=0$.

〔第四〕 (2) ト (3) ヲ用フレハ次ノ如ク

(3) ヨリ　$y=-x$ 之ヲ (2) ニ代用スレハ

$\frac{-x}{x^2+x^2}=\frac{4a}{(a-2x)^2}$ 此方程式ヨリ　$x=-\frac{a}{2}$,　$y=\frac{a}{2}$.

5. 第壹方程式ニ 4 ヲ乘スレハ $4(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})$

$$=\frac{2y}{a}(2x-2\sqrt{x^2-y^2})$$

即チ　$2a(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})=2y(x+y-2\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}+x-y),$

即チ　$2a(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})=\{(x+y)-(x-y)\}(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^2,$

故ニ　$(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})\{2a-(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^3\}=0,$

之ニ由テ　$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

或ハ　$2a-(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^3=0$ 即チ　$\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=\sqrt[3]{2a}\ldots(2)$

〔第壹〕 (1) ヲ用ソレハ $\sqrt{x+y}=\sqrt{x-y}$, $x+y=x-y$ 故ニ $y=0$,

故ニ第二方程式 $\sqrt[4]{(x+y)}+\sqrt[4]{(x-y)}=b$ ヨリ $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x}=b$,

故ニ　$x=\frac{1}{16}b^4$.

此解答 $x=\frac{1}{16}b^4$ 及ヒ $y=0$ ハ通例ノ敎科書ニハ取ラス即チ不合理ノ答トセリ然レ氏之チ第壹方程式ニ用フレハ

$$\sqrt{\frac{1}{16}b^4+0}+\sqrt{\frac{1}{16}b^4-0}=\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{16}b^4\times 0-0\times\sqrt{\frac{1}{256}b^8-0}\right\},$$

即チ $\frac{1}{4}b^2\pm\frac{1}{4}b^2=\frac{1}{a}(0)$, 故ニ $\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{4}b^2=0$ トナリテ適合ス.

〔第貳〕 (2) 即チ $\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=\sqrt[3]{2a}$ チ用フ.

然ル時第二方程式 $\sqrt[4]{(x+y)}+\sqrt[4]{(x-y)}=b$ ニテ (2) チ除スレハ

$$\sqrt[4]{(x+y)}-\sqrt[4]{(x-y)}=\frac{\sqrt[3]{2a}}{b} \text{ チ得.}$$

之ニ由テ $\sqrt[4]{(x+y)}=\frac{1}{2}\left(b+\frac{\sqrt[3]{2a}}{b}\right)$ 即チ $x+y=\frac{1}{16}\left(b+\frac{\sqrt[3]{2a}}{b}\right)^4$,

又 $\sqrt[4]{(x-y)}=\frac{1}{2}\left(b-\frac{\sqrt[3]{2a}}{b}\right)$ 即チ $x-y=\frac{1}{16}\left(b-\frac{\sqrt[3]{2a}}{b}\right)^4$,

故ニ

$$x=\frac{1}{32}\left\{\left(b+\frac{\sqrt[3]{2a}}{b}\right)^4+\left(b-\frac{\sqrt[3]{2a}}{b}\right)^4\right\},$$

$$y=\frac{1}{32}\left\{\left(b+\frac{\sqrt[3]{2a}}{b}\right)^4-\left(b-\frac{\sqrt[3]{2a}}{b}\right)^4\right\}.$$

6. 第壹ヨリ $2x-2\sqrt{x^2-y^2}=\frac{4a}{2y}(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})$,

即チ $(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^2=\frac{4a}{(x+y)-(x-y)}(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})$.

$(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^2=\frac{4a}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$ 故ニ $\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=\sqrt[3]{4a}$,

$\sqrt{x+y}=m$, $\sqrt{x-y}=n$ トスレハ $m-n=\sqrt[3]{4a}$ ....(1)

第二即チ $\sqrt{(x+y)^3}-\sqrt{(x-y)^3}=b$ ヨリ $m^3-n^3=b$ ....(2)

而シテ $\sqrt{x+y}=m$, $\sqrt{x-y}=n$ ヨリ $x=\frac{1}{2}(m^2+n^2)$,

$y=\frac{1}{2}(m^2-n^2)$, チ得ルリ故ニ (1) 及ヒ (2) ヨリ次ノ如クス,

(2) チ (1) ニテ除スレハ $m^2+mn+n^2=\frac{b}{\sqrt[3]{4a}}$,

故ニ $m^2+n^2=\frac{1}{3}\left\{2(m^2+mn+n^2)+(m-n)^2\right\}=\frac{1}{3}\left\{\frac{2b}{\sqrt[3]{4a}}+(\sqrt[3]{4a})^2\right\}$

$$=\frac{2b+4a}{3\sqrt[3]{4a}},$$

又

$$(m^2-n^2)^2=(m^2+n^2)^2-4(mn)^2$$

$$=(m^2+n^2)^2-\frac{4}{9}\{m^2+mn+n^2-(m-n)^2\}^2$$

$$=\left(\frac{2b+4a}{3\sqrt[3]{4a}}\right)^2-\frac{4}{9}\left\{\frac{b}{\sqrt[3]{4a}}-(\sqrt[3]{4a})^2\right\}^2$$

$$=\frac{4(b+2a)^2}{9(\sqrt[3]{4a})^2}-\frac{4(b-4a)^2}{9(\sqrt[3]{4a})^2}=\frac{48a(b-a)}{9(\sqrt[3]{4a})^2}$$

即チ $m^2-n^2=\frac{4\sqrt{3a(b-a)}}{3\sqrt[3]{4a}}$.

故ニ $x=\frac{1}{2}(m^2+n^2)=\frac{b+2a}{3\sqrt[3]{4a}}$, $y=\frac{2\sqrt{3a(b-a)}}{3\sqrt[3]{4a}}$.

此解法ハ較々高尙ノ法ナリ.

7. $\sqrt[3]{(x+y)}+\sqrt[3]{(x-y)}=\sqrt[3]{a}$ ノ双方チ立方ニスレハ

$(x+y)+(x-y)+3\sqrt[3]{(x+y)}\sqrt[3]{(x-y)}\{\sqrt[3]{(x+y)}+\sqrt[3]{(x-y)}\}=a$,

即チ $2x+3\sqrt[3]{(x^2-y^2)}\{\sqrt[3]{a}\}=a$, 故ニ $\sqrt[3]{(x^2-y^2)}=\frac{a-2x}{3\sqrt[3]{a}}$ ......(1)

$\sqrt[3]{(x^2+y^2)}+\sqrt[3]{(x^2-y^2)}=\sqrt[3]{a^2}$ ヨリ (同法) $\sqrt[3]{(x^4-y^4)}=\frac{a^2-2x^2}{3\sqrt[3]{a^2}}$ ..(2)

(1) ニテ (2) チ除スレハ $\sqrt[3]{(x^2+y^2)}=\frac{a^2-2x^2}{(a-2x)\sqrt[3]{a}}$ ....(3)

$\sqrt[3]{(x^2+y^2)}+\sqrt[3]{(x^2-y^2)}=\sqrt[3]{a^2}$ ニ於テ (1), (3) チ代用スレハ

$\frac{a^2-2x^2}{(a-2x)\sqrt[3]{a}}+\frac{a-2x}{3\sqrt[3]{a}}=\sqrt[3]{a^2}$, 之チ簡單ニスレハ

$$2x^2-2ax-a^2=0,$$

之ニ由テ $x=\frac{1}{2}a(1\pm\sqrt{3})$, $y=a\sqrt{(1\pm\frac{11}{18}\sqrt{3})}$.

8. $x+y+z=0 \ldots\ldots(1),\qquad ax+by+cz=0\ldots\ldots(2)$

$a^3x^3+b^3y^3+c^3z^3=3(b-c)(c-a)(a-b)\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

(1) 及ヒ (2) ヨリ十文字ノ法（289 頁ニアリ）ニ由テ

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & \times & & \times & & \times & \\ a & & b & & c & & a \\ & z & & x & & y & \end{array}\qquad \frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}=\mathrm{K}\ldots\ldots(4)$$

z ノ分母　x ノ分母　y ノ分母

即チ $\dfrac{ax}{a(b-c)}=\dfrac{by}{b(b-c)}=\dfrac{cz}{c(a-b)}=\mathrm{K},$

之ニ由テ $\mathrm{K}^3=\dfrac{a^3x^3+b^3y^3+c^3z^3}{a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3}$ 此分子ノ代リニ (3)

ノ右邊ヲ用フレハ $\mathrm{K}^3=\dfrac{3(b-c)(c-a)(a-b)}{3abc(b-c)(c-a)(a-b)}$ 故ニ $\mathrm{K}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(abc)}}$

(4) ヨリ $x=\mathrm{K}(b-c),\quad y=\mathrm{K}(c-a),\quad z=\mathrm{K}(a-b),$

即チ $x=\dfrac{b-c}{\sqrt[3]{(abc)}},\quad y=\dfrac{c-a}{\sqrt[3]{(abc)}},\quad z=\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{(abc)}}.$

9. $\mathrm{X}=1-x^2,\quad \mathrm{Y}=1-y^2,\quad \mathrm{Z}=1-z^2$ トス.

$\dfrac{(x-yz)^2}{(1-y^2)(1-z^2)}=a^2$ 即チ $x^2-2xyz+y^2z^2=a^2(1-y^2)(1-z^2)\ldots\ldots(1)$

即チ $1-\mathrm{X}-2xyz+(1-\mathrm{Y})(1-\mathrm{Z})=a^2\mathrm{YZ},$

故ニ　$\mathrm{YZ}(1-a^2)=2xyz-2+\mathrm{X}+\mathrm{Y}+\mathrm{Z},$

$\dfrac{(y-zx)^2}{(1-z^2)(1-x^2)}=b^2$ 及ヒ $\dfrac{(z-xy)^2}{(1-x^2)(1-y^2)}=c^2$ ヨリ同法ニ由テ

$$\mathrm{ZX}(1-b^2)=2xyz-2+\mathrm{X}+\mathrm{Y}+\mathrm{Z},$$

$$\mathrm{XY}(1-c^2)=2xyz-2+\mathrm{X}+\mathrm{Y}+\mathrm{Z},$$

故ニ　$\mathrm{YZ}(1-a^2)=\mathrm{ZX}(1-b^2)=\mathrm{XY}(1-c^2)$

即チ $\dfrac{\mathrm{X}}{1-a^2}=\dfrac{\mathrm{Y}}{1-b^2}=\dfrac{\mathrm{Z}}{1-c^2}=\mathrm{K}$ トスレハ

$\mathrm{X}=(1-a^2)\mathrm{K}$　即チ $1-x^2=(1-a^2)\mathrm{K}$　故ニ　$x^2=1-(1-a^2)\mathrm{K}.$

同法ニテ $y^2=1-(1-b^2)\mathrm{K},\qquad z^2=1-(1-c^2)\mathrm{K}.$

(1) ニ於テ此 x^2, y^2, z^2 ノ値ヲ代用スレハ

$$1-(1-a^2)\mathrm{K}-2xyz+\{1-(1-b^2)\mathrm{K}\}\{1-(1-c^2)\mathrm{K}\}$$
$$=(1-b^2)(1-c^2)\mathrm{K}^2$$

即チ $2-(3-a^2-b^2-c^2)\mathrm{K}=2xyz,$ 双方ヲ平方ニスレハ

$4-4(3-a^2-b^2-c^2)\mathrm{K}+(3-a^2-b^2-c^2)^2\mathrm{K}^2=4x^2y^2z^2,$

但シ此右邊 $4x^2y^2z^2$ ハ $4\{1-(1-a^2)\mathrm{K}\}\{1-(1-b^2)\mathrm{K}\}\{1-(1-c^2)\mathrm{K}\}$

$$=4-4(3-a^2-b^2-c^2)\mathrm{K}+4\{(1-a^2)(1-b^2)+(1-b^2)(1-c^2)$$
$$+(1-c^2)(1-a^2)\}\mathrm{K}^2-4(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)\mathrm{K}^3.$$
$$=4-4(3-a^2-b^2-c^2)\mathrm{K}+4(3-2a^2-2b^2-2c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\mathrm{K}^2$$
$$-4(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)\mathrm{K}^3.$$

之ニ由テ上ノ方程式ノ左邊ト右邊ノ同類項ヲ減スレハ

$$4(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)\mathrm{K}^3=\{3-2(a^2+b^2+c^2)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$
$$-(a^4+b^4+c^4)\}\mathrm{K}^2,$$

之ニ由テ　$\mathrm{K}=0,$

或ハ　$\mathrm{K}=\dfrac{3-2(a^2+b^2+c^2)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}{4(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)},$

$\mathrm{K}=0$ ナルトキ $1-x^2=(1-a^2)\mathrm{K}$ ハ $1-x^2=0,\quad \therefore\quad x^2=1,$

之ニ由テ $x=\pm1,\ y=\pm1,\quad z=\pm1.$

此答ヲ原方程式ニ代用スルトキ $\dfrac{0}{0}$ ノ如キ形チヲ得ルカ故ニ此

答ハ省キ去ルヘシ.

$\mathrm{K}=\dfrac{3-2(a^2+b^2+c^2)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}{4(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)},$

即チ $x^2=1-\dfrac{3-2(a^2+b^2+c^2)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}{4(1-b^2)(1-c^2)}$

$$=\frac{4(1-b^2)(1-c^2)-3+2(a^2+b^2+c^2)-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+(a^4+b^4+c^4)}{4(1-b^2)(1-c^2)}$$

$$=\frac{1-2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2+2a^2\{1-(b^2+c^2)\}+a^4}{4(1-b^2)(1-c^2)}.$$

故ニ
$$x=\pm\frac{1-(b^2+c^2)+a^2}{2\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}},$$

即チ
$$x=\pm\frac{1-b^2-c^2+a^2}{2\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}},$$
$$y=\pm\frac{1-c^2-a^2+b^2}{2\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}},$$
$$z=\pm\frac{1-a^2-b^2+c^2}{2\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}.$$

方程式ノ例題ハ是レニテ結了スルモノトシ次號ヨリハ方乘方根及ヒ不盡根ノ諸法ヲ講述セントス.

第拾四編

方乘, 方根 指數

方乘

1. 方乘 壹數量ノ某方乘トハ其數量ヲ幾度モ因子トシテ成レル積ナルコハ最初ニ講述セシ所ナリ此方法ヲ稱シテ別ニ自乘法(Involution)トイフ.

a ノ三方乘ハ $a\times a\times a$ 即チ a^3,

a ノ n 方乘ハ $a\times a\times a\times a$......至 n 因子 $=a^n$,

此ノ如ク方乘ヲ示ス簡單ナル記號ハ 3 或ハ n ノ如キ指數ヲ用ヒタルコモ前々ヨリ讀者ノ知リシ所ナリ依テ方乘ノ理論ハ指數ニ關スルナリ而シテ代數記號ノ內ニテ數量ヲ示スヘキ文字ハ正數,負數,不盡根ニテモヨロシケレ圧指數ニ至リテハ嚴格ニ正整數ニ限キルナリ故ニ n ハ正整數ナリ指數カ分數トナリ負數トナルコハ此後ニ説明スヘシ.

2. 指數之法則 m 及ヒ n カ正整數ナル㫖

$$a^m\times a^n=a^{m+n}\text{..........................}(1)$$

是レハ乘法ニテ示シタル指數ノ法則ニシテ之ヲ理解シタル人ハ最早ヤ次ニ示ス所ハ容易ニ分カルモノナリ.

同法ニヨリテ $a^m\times a^n\times a^p=a^{m+n}\times a^p=a^{m+n+p}$,

之ヲ一般ニイフ㫖ハ

$$a^m\times a^n\times a^p\times\text{......}=a^{m+n+p}\text{..............}(2)$$

故ニ同數量ノ若干ノ方乘ノ積ノ指數ハ其各指數ノ和ニ等シ.

又 (2) ニ於テ $m, n, p, \ldots\ldots$ ナル指數カ凡ヘテ同數ニシテ之ヲ m トシ而シテ $a^m, a^n, a^p, \ldots\ldots$ ナル因子カ n 因子アルモノトスレハ

$$a^m\times a^m\times a^m\times\ldots\ldots \text{至 } n \text{ 因子} = a^{m+m+m+\cdots\cdots \text{至 } n \text{ 項}}$$

即チ
$$(a^m)^n=a^{mn}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

故ニ從數量ノ某方乘ヲ又某方乘シタル指數ハ最初ノ指數ト次ノ指數ノ積ニ等シ.

之ヲ敷衍スレハ $\{(a^m)^n\}^p=\{a^{mn}\}^p=a^{mnp}$

又 $(ab)^3=ab\times ab\times ab$ ナルコ明カナリ而シテ

$$=a\times a\times a\times b\times b\times b=a^3b^3.$$

$(ab)^3=a^3b^3$ ナルト同法ニテ $(abc)^3=a^3b^3c^3,$

故ニ
$$(abcd)^m=a^mb^mc^md^m\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

之ヲ別ニ証明センニ

$$(abcd)^m=abcd\times abcd\times abcd\times\ldots\ldots \text{至 } m \text{ 因子}$$
$$=(aaaa\ldots\ldots m \text{ 因子})(bbbb\ldots\ldots m \text{ 因子})$$
$$(cccc\ldots\ldots m \text{ 因子})(dddd\ldots\ldots m \text{ 因子})$$
$$=a^m b^m c^m d^m.$$ 即チ (4) ノ証明ナリ.

(4) ノ最モ一般ニシニシテ最モ必要ナル公式ハ次ノ (5) ナリ

$$(a^xb^yc^zd^u)^n=a^{nx}b^{ny}c^{nz}d^{nu}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

之ヲ証明センニ

$$(a^xb^yc^zd^u)=\{(a^x)(b^y)(c^z)(d^u)\}^n$$
$$=(a^x)^n(b^y)^n(c^z)^n(d^u)^n, \quad \text{(4) ニヨル}$$
$$=a^{nx}b^{ny}c^{nz}d^{nu}. \quad \text{(3) ニヨル}$$

(1), (2), (3), (4), (5) 迄ノ公式ハ必ラス熟知スヘシ熟知トイフコハ暗記スルコトニ非ラス其理由ヲ熟知スヘシ理由ヲ能ク了解シテ然ルニ後チニ自然ニ暗記スヘシ然レ𪜈是レノミニテハ充分ナル人トイフ能ハス此五ツノ公式ハ心要ナルモノト信用シテ然ル後ニ完全無欠ノ學生トナルナリ.

3. 分數式之方乘

ノ如キハ (4) 或ハ (5) ヲ用フレハ次ノ如ク容易ナリ.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(a\times\frac{1}{b}\right)^n=a^n\times\left(\frac{1}{b}\right)^n=a^n\times\frac{1}{b^n}=\frac{a^n}{b^n},$$

同法ニテ

$$\left(\frac{a^x}{b^y}\right)^n=\frac{a^{nx}}{b^{ny}}.$$

前章ノ如ク特別ニ証明スレハ

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots \text{至 } n \text{ 因子}$$

$$=\frac{aaa\ldots\ldots\ldots \text{至 } n \text{ 因子}}{bbb\ldots\ldots\ldots \text{至 } n \text{ 因子}}=\frac{a^n}{b^n}.$$

4. 負數量之方乘

代數學ノ數量ハ正負ヲ含ミ簡卒 a, b 等ノ如キ負ナルアルハ勿論ナレハ顯ハレテ負トナルモノ(外觀上ノ負式)ヲ次ニ示サン.

$$(-a)^2=-a-\times a-\times a^2$$

故ニ $(-a)^3=(-a)^2\times(-a)=+a^2\times(-a)=-a^3,$

故ニ $(-a)^4=(-a)^3\times(-a)=-a^3\times(-a)=+a^4,$

故ニ $(-a)^5=(-a)^4\times(-a)=+a^4\times(-a)=-a^5.$

之ヲ推擴シテ

n カ偶數ナルト $(-a)^n=+a^n,$

n カ奇數ナルト $(-a)^n=-a^n.$

此ノ如ク初學者ニ對シテハ講述スヘシ然レ𪜈現今ノ初學者ハ思想確實ニシテ且ツ高尙ナルカ故ニ次ノ如ク証明スルヲ宜シトス.

$(-a)^n=\{(-1)a\}^n$ ナルコ明カナリ公式 (4) ニ由テ

$=(-1)^na^n,$ n カ偶數ナルト之ヲ $2m$ トスルコヲ得,

故ニ $=(-1)^{2m}a^n,$

$=\{(-1)^2\}^m a^n$, 公式 (3) ニヨル

$=\{+1\}^m a^n$, $\{+1\}^m=+1$ ナルヿ明カナリ

故ニ $=+1a^n=+a^n$, 即チ証ヲ得タリ。

n カ奇数ナル片 $2m+1$ トスルヿヲ得,

故ニ $(-a)^n=(-a)^{2m+1}=(-a)^{2m}(-a)$, 公式 (1) ニヨル,

$=+a^{2m}(-a)$, 前ノ方法ニヨル

$=-a^{2m+1}=-a^n$, 即チ証ヲ得タリ。

例題四拾八

次ノ各代数式ノ括弧ヲ解ケ

1. $(2a^2)^3$. 〔解〕 原式 $=2^3(a^2)^3$, 公式 (4) ニヨル,

$=2^3a^{2\times3}=8a^6$. 公式 (3) ニヨル。

或ハ 原式 $=2^3a^{2\times3}=8a^6$. 公式 (5) ニヨル。

2. $(-2a^2)^3$. 〔解〕 原式 $=(-2)^3(a^2)^3$, 公式 (4) ニヨル

$=-8a^6$. 公式 (3) 及ヒ 4. 章ニヨル。

3. $(-a^2b^3c^4)^{2m}$.

〔解〕 原式 $=(-1)^{2m}.(a^2)^{2m}.(b^3)^{2m}(c^4)^{2m}$, 公式 (4) ニヨル,

$=+1.\ a^{4m}b^{6m}c^{8m}$, 公式 (3) 及ヒ 4. 章ニヨル。

$=a^{4m}b^{6m}c^{8m}$.

4. $(-a^m)^{2m+1}$. 〔解〕 原式 $=(-1)^{2m+1}(a^m)^{2m+1}$, 公式 (4) ニヨル

又公式 (3) 及ヒ 4. 章ニ由テ $=(-1).\ a^{2m^2+m}=-a^{2m^2+m}$

5. $(-a^m)^m$. 〔解〕 原式 $=(-1)^m(a^m)^m=(-1)^m a^{m^2}$.

（注意） $(-1)^m$ ハ m カ偶数ナル片 $+1$, 奇数ナル片 -1 ニシテ m カ奇数ト偶数トカ分ラサル間タハ判定シ難シ次ノ五題モ同様ナリ。

6. $(-a^m)^{m+1}$. 〔解〕 原式 $=(-a)^{m+1}(a^m)^{m+1}$

$=(-1)^m(-1)a^{m^2+m}=-(-1)^m a^{m^2+m}$ 之ヲ答トス。

但シ $(-1)^{m+1}=-(-1)^m$ トナルナリ。

6. $(-a^p)^{m-1}$. 〔解〕 原式 $=(-1)^{m-1}(a^p)^{m-1}$,

但シ $(-1)^{m-1}=(-1)^m\div(-1)=-(-1)^m$ 故ニ答ハ $-(-1)^m a^{pm-}$

7. $(-a^p)^{m-n}$. 〔解〕 原式 $=(-1)^{m-n}a^{pm-pn}$.

8. $(-a^x)^{3n}$. 〔解〕 原式 $=(-1)^{3n}(a^x)^{3n}$,

但シ $(-1)^{3n}=\{(-1)^3\}^n=\{-1\}^n$, 故ニ答ハ $(-1)^n a^{3nx}$

9. $(-a^x)^{3n+2}$. 〔解〕 原式 $=(-1)^{3n+2}(a^x)^{3n+2}$

$=(-1)^{3n}(-1)^2a^{3nx+2x}=(-1)^n(+1)a^{3nx+2x}=(-1)^n a^{3nx+2x}$.

10. $(-\frac{2}{3}a^5b^2c)^4$. 11. $(a^mb^nc^p)^x$ 12. $\left(\frac{b^y}{a^x}\right)^{x+y}$.

13. $\left(-\frac{b^2}{a^3}\right)^{m+n}$. 14. $(-a^{m-1}b^{m+1})^{m-1}$. 15. $\{(-a)^x\}^x$.

16. $(-a^m)^{3m}$. 17. $(-a^{m+2})^{m+1}$. 18. $\{(a^m)^m\}^m$.

19. 2^{3^3}, $(2^3)^2$, 2^{2^3}, ノ値ヲ求ム。

20. $2^{2^{3^2}}$ ノ値ヲ求ム。

〔解〕 $2^{2^{3^2}}=2^{2^9}=2^{512}$.

例題四拾八答

10. $\frac{16}{81}a^{12}b^8c^4$. 11. $a^{mx}b^{nx}c^{px}$. 12. $\frac{b^{xy+y^2}}{a^{x^2+xy}}$.

13. $(-1)^{m+n}\frac{b^{2m+2n}}{a^{3m+3n}}$. 14. $-(-1)^m a^{(m-1)^2}b^{m^2-1}$. 15. $(-1)^x a^{x^2}$.

16. $(-1)^m a^{3m^2}$. 17. $-(-1)^m a^{m^2+3m+2}$. 18. a^{m^3}.

19. 2^9, 2^6, 2^8.

方　　根

5. 方根 一數量ノ方乘ヲ求ムル法ヲ自乘法トイフコハ既ニ講述セリ此處ニテハ此反對ノ法即チ一數量ノ方乘ヲ知リテ其方根ヲ求ムル方法ヲイフ之ヲ一名開方法 (Evolution) トイフ例ヘハ自乘法ニ於テハ a ノ立方ヲ求ムトアレハ其答ハ a^3 ナリ開方法ニテハ a^3 ノ方根ヲ求ムトアレハ其答ハ a ナリ,

故ニ　$(a)^3=a^3$ (自乘法),　$\sqrt[3]{a^3}=a$ (開方法).

然レ圧 Evolution ナル字義ハ進化論トモ譯ス即チ發達スルコヲ意味ス進化トイヒ發達トイフコハ凡ヘテ單純ナル野蠻時代ヨリ複雜ナル文明時代ニ達スヘキ進路ナリ.

故ニ單純ナル自乘法即チ a ノ立方ハ必ラズ a^3 ナル唯一ツノ答ノミヲ有スレ圧之ニ反シテ a^3 ノ立方根ヲ求ムルニ方リテハ單純ナル算術思想ノトキニノミ其答ハ a ナレ圧苟モ開方法トイフ文明ノ語ヲ用フル以上ハ其答複雜ナラサルヘカラス.

故ニ a^3 ノ立方根ヲ求ムトアレハ所求ノ立方根ノ値ヲ x トスヘシ而シテ自乘法ニヨリ x ノ立方ハ a^3 トナルヲ以テ

$x^3=a^3$ ナル方程式ヲ得ヘシ此方程式ハ三次方程式ナリ故ニ之ヲ解スレハ　$x^3-a^3=0$,

即チ　$(x-a)(x^2+ax+a^2)=0$,

$x-a=0$ ヨリ　　$x=a$,

$x^2+ax+a^2=0$ ヨリ　　$x=\frac{1}{2}a(-1+\sqrt{-3})$,

或ハ　$x=\frac{1}{2}a(-1-\sqrt{-3})$.

都合三ツノ答ヲ得タリ.

故ニ　$(a)^3=\left\{\frac{1}{2}a(-1+\sqrt{-3})\right\}^3=\left\{\frac{1}{2}a(-1-\sqrt{-3})\right\}^3=a^3$.

又 a^2 ノ平方根ヲ求ムレハ $\sqrt{a^2}=\pm a$ 即チ $+a$, $-a$.

之ヲ方程式ニテ解スレハ a^2 ノ方根ヲ x トシ $x^2=a^2$ トシテ求ムヘシ即チ　$(x+a)(x-a)=0$　故ニ　$x=-a$　或ハ　$+a$.

〔第壹例〕 1 ノ五方根ヲ求ム.

1 ノ五方根ヲ x トスレハ　$x^5=1$　第十四號數理 3. 頁ニ由テ $x=1$, $\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}+\sqrt{-10-2\sqrt{5}})$ 等ノ凡ヘテ五ツノ答アリ.

〔第貳例〕 負數 1 ノ四方根ヲ求ム.

-1 ノ四方根ヲ x トスレハ　$x^4=-1$,　即チ　$x^4+1=0$,

双方ニ $2x^2$ ヲ加フレハ　$x^4=2x^2+1=2x^2$.

即チ　$(x^2+1)^2=2x^2$　故ニ　$x^2+1=\pm x\sqrt{2}$,

之ヨリ　$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\sqrt{\frac{2}{4}-1}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{-2}}{2}=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{-2})$;

故ニ　$\sqrt[4]{-1}=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{-2})$.　$\frac{1}{2}(\sqrt{2}-\sqrt{-2})$,　$\frac{1}{2}(-\sqrt{2}+\sqrt{-2})$,

$\frac{1}{2}(-\sqrt{2}-\sqrt{-2})$ ノ四ツノ答アリ.

9. 約束 以上說ク所ニヨリテ考フレハ或數量ノ三方根ハ答カ三ツ四方根カ答カ四ツ五方根ハ答カ五ツアルコヲ知リ得ヘシ即チ三次四次五次等ノ方程式ノ根ノ順次ニ三ツ,四ツ,五ツ答アリ故ニ其方根ノ數丈ケ答ヲ有ス.

然レ圧此ニ約束スル處ハ其内ノ簡單ナル實根丈一ツ取ルモノトス而シテ平方根,四方根ノ如キ偶數ノ方根ハ正ノ負兩實根アレ圧大概ハ正ノ根丈ケ取ルヘシ.

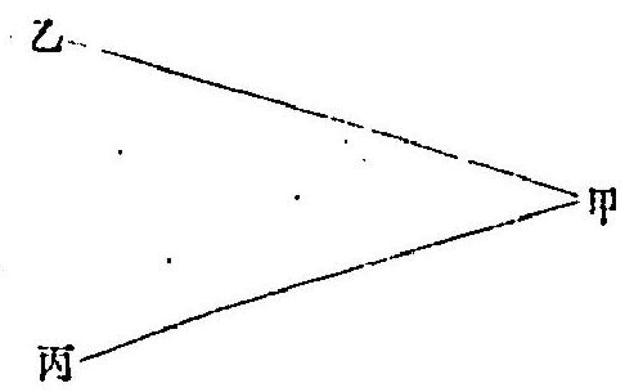
此邊ノ約束ハ適宜ノモノニシテ嚴格ニ質問ヲ申シ込マレルトキハ講述者ハ難染スルナリ正格ニ眞面目ニ學理ヲ研究スルコハ以心傳心ヨリ他ニ道無シ.

元來此講義錄ノ價値ハ初學者ノ知ル所ニアラス唯出來サレハ或程度迄テ質問シ其他ハ氣長ニ考フヘシ.

7. 方乘及方根之區別

方根ハ方乘ノ反法ナレモ方乘ハ唯一ツ答アリテ方根ハ幾ツモ答アリ.

例ヘハ次圖ノ如ク乙ヨリ甲ニ行ク人ハ唯一條ノ道アリ即チ甲乙街道トイヘル唯一ツノ答アリ,



又丙ヨリ甲ニ行ク人モ甲丙街道唯一ツアルノミ.

故ニ甲ニ行ク往路ハ猶ホ方乘ノゴトシ.

之ニ反シテ甲ヨリ歸ル人トイフ時ハ甲乙街道ヲ歸ルカ或ハ甲丙街道ヲ歸ルカ二ツノ答アルヘシ即チ方根ナリ.

8. 方根之法則

方根ハ餘リ八釜敷議論セサル所ハ方乘ノ反法ナリ故ニ方根ノ法則ハ方乘ノ法則ト全ク同一ナリ即チ矢張リ之ヲ指數ノ法則トイフモ可ナリ.

純粹ノ指數ノ法則即チ法則ノ親玉トイフヘキハ(1)ナリ故ニ此親玉ヲ方根ノ法則ニ對シテ使役スルヿハ失禮ナリ故ニ(1)ト親類ナル(2)モ敬シテ遠サケ置クヲ可トス.

(3), (4), (5)ハ遠慮無ク使役スヘシ即チ次ノ如シ.

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 何トナレハ(4)ニ由テ

$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2$ 但シ $(\sqrt{a})^2=a$ ナルヿ明カナリ故ニ

$=ab$ 即チ $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2=ab$ ヲ得タリ此双方ノ平方根ハ

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}.$$

同様ニ $(\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b})^3=(\sqrt[3]{a})^3(\sqrt[3]{b})^3=ab$,

故ニ $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}$.

之ニ由テ $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}=\sqrt{abc}$, $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{abc}$.

一般ニ $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\sqrt[n]{d}=\sqrt[n]{(abcd)}$ ……………………(6)

之ヲ特別ニ記センニハ(4)ヲ使役スルヿ次ノ如シ,

$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\sqrt[n]{d})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n(\sqrt[n]{c})^n(\sqrt[n]{d})^n=abcd$,

双方ノn方根ヲ求ムレバ

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\sqrt[n]{d}=\sqrt[n]{(abcd)}.$$

(6)ニヨリテ

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a}\text{……至 }n\text{ 因子}=\sqrt[n]{(aaa\text{……至 }n\text{ 因子})},$$

即チ　$(\sqrt[n]{a})^n=\sqrt[n]{(a^n)}$ ……………………(7)

此(7)ハaノn方根ヲ求メテn方乘スルモaヲ方乘シタル後ヲn方根ニスルモ同シトイフヿナリ.

(7)ト同類ナル方乘ノ法則ハ $(a^m)^n=(a^n)^m$

次ニ　$\sqrt[mn]{a^m}=\sqrt[n]{a}$ ……………………(8)

何トナレハ $(\sqrt[n]{a^m})^n=\sqrt[mn]{(a^m)^n}$, (7)ニヨル

$=\sqrt[mn]{a^{mn}}$, (3)ニヨル

$=a$,

故ニ　$\sqrt[mn]{a^m}=\sqrt[n]{a}$ ナルヿヲ知ル.

例ヘハ $\sqrt[6]{a^4}=\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[9]{a^6}=\sqrt[3]{a^2}$, 又 $a=\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[6]{a^6}$.

9. 應用之例

方根ノ法則ヲ用ヒテ屢々明白ニ解シ得ヘキ例題ノ種類ハ次ノ三種ニ過キス.

〔第壹〕 $a\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{(a^m b)}$ ナルヿノ證.

$a\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a^m}\sqrt[m]{b}$, 〔(8)ニヨル〕$=\sqrt[m]{(a^m b)}$. 〔(6)ニヨル〕

〔第貳〕 $\sqrt[m]{(a^m b)}=a\sqrt[m]{b}$ 即チ前ノ反法.

$\sqrt[m]{(a^m b)}=\sqrt[m]{a^m}\sqrt[m]{b}$, 〔(6)ニヨル〕$=a\sqrt[m]{b}$.

〔第三〕 $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{1}{b}\sqrt[m]{(ab^{m-1})}$ ノ證.

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\sqrt[m]{\frac{a\times b^{m-1}}{b\times b^{m-1}}}=\sqrt[m]{\frac{ab^{m-1}}{b^m}}=\sqrt[m]{\frac{(ab^{m-1})}{b^m}}=\frac{\sqrt[m]{(ab^{m-1})}}{b};$$

10. 注意 前ニモ述ヘシ如ク方根ハ答數多キカ故ニ再ヒ此ニ約定致シ候事次ノ如シ.

$\sqrt{9}+\sqrt{4}$ ノ如キハ $\pm3\pm2$ トナリテ $+5,\ -5,\ +1,\ -1$ ノ四ツ解答アレモ此處ノ例(一般ノ例ニテモ)ニテハ $\sqrt{9}+\sqrt{4}=3+2=5$ ノ答ノミヲ取ル.

又 $(+a)^{2n}=+a^{2n},\ (-a)^{2n}=+a^{2n}$,

故ニ $\sqrt[2n]{a^{2n}}=+a$ 或ハ $-a$ トス故ニ $\sqrt[4]{16}=\pm2$ 是レハ簡單ナル式ノ答ノ時ニ限キリ正負ノ兩答ヲ記ス.

例題四拾九

1. $\sqrt[p]{x}\sqrt[q]{x}=\sqrt[pq]{x^{p+q}}$ ナルコヲ示セ.

〔解〕 $\sqrt[p]{x}\sqrt[q]{x}=\sqrt[pq]{x^q}\sqrt[pq]{x^p}$, 〔(8) ニヨル〕

$=\sqrt[pq]{(x^qx^p)}$, 〔(6) ニヨル〕$=\sqrt[pq]{x^{p+q}}$.

2. $\sqrt[p]{x}\div\sqrt[q]{x}=\sqrt[pq]{x^{q-p}}$ ナルコヲ記セヨ.

次ノ各ヲ最簡ニセヨ.

3. $\sqrt{18}-\sqrt{147}+\sqrt{72}+\sqrt{108}-\sqrt{128}$.

〔解〕 原式 $=\sqrt{(2\times9)}-\sqrt{(3\times49)}+\sqrt{(2\times36)}+\sqrt{(3\times36)}-\sqrt{(2\times64)}$

$=\sqrt{2}\sqrt{9}-\sqrt{3}\sqrt{49}+\sqrt{2}\sqrt{36}+\sqrt{3}\sqrt{36}-\sqrt{2}\sqrt{64}$

$=3\sqrt{2}-7\sqrt{3}+6\sqrt{2}+6\sqrt{3}-8\sqrt{2}$

$=(3+6-8)\sqrt{2}+(-7+6)\sqrt{3}=\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

4. $\sqrt{8}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}$.　　5. $b\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{8a^2b^4}-a\sqrt[3]{\frac{b^4}{a}}$.

6. $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[p]{c}$.　　7. $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{a}\div\sqrt{a}$.

8. $\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}$.　　9. $\sqrt[p]{a^n}+\sqrt[p]{a^{n+p}}$.

10. $\sqrt[m]{\{\sqrt[n]{(\sqrt[p]{a})}\}}$.

〔解〕 $\sqrt[m]{\{\sqrt[n]{(\sqrt[p]{a})}\}}=x$ トシ双方ヲ m 方乘スレハ $\sqrt[n]{(\sqrt[p]{a})}=x^m$ 又双方ヲ n 方乘スレハ $\sqrt[p]{a}=x^{mn}$ 又双方ヲ p 方乘スレハ $a=x^{mnp}$ 故ニ $x=\sqrt[mnp]{a}$.

11. $\sqrt[2]{\{\sqrt[3]{(\sqrt{7})}\}}$.

例題四拾九答

4. $1\frac{1}{2}2$.　　5. $2b\sqrt[3]{a^2b}$.　　6. $\sqrt[mnp]{a^{np}b^{pm}c^{mn}}$.

7. $\sqrt[mnp]{a^{np+pm-mn}}$.　　8. $\frac{a+b}{ab}\sqrt{ab}$.

9. $(1+a)\sqrt[p]{a^n}$.

分指數及負指數

11. 分指數及負指數 物品ノ價カ何圓何十何錢何厘何毛………ト端數ヲ生シ或ハ所持金カ不足シテ負數トナルモ人間ノ常識ニテ判斷スルコヲ得ヘシ故ニ此ノ如キ實物ニ代用スヘキ名數ニハ分數或ハ負數ハ存在スルコヲ知リ得ヘシ代數學ハ元來不名數ヲ論スルカ故ニ分數負數ハ通例ノ數ナリトシ正整數ト區別セス然レモ指數ニ限リテハ正整數ナラサルヘカラス獨佛露ノ如キ大陸ノ數學書ハ指數ニ正負分數ヲ區別無ク最初ヨリ用ヒ米書モ此習慣アレモ此習慣ニ感染セスシテ正シク指數ニ正整數ト分數負數ノ兩件ヲ區別スルハ英國ニシテ我邦ニ於テモ此方針ヲ取レリ是レ實ニ嚴正ナル公平ナル處置トイフヘシ故ニ學理ノ進步上ニ於テモ必要ナル處分ナリ.

指數ノ定義ニヨレハ a^2 ハ二ツノ a ノ積ニシテ a^n ハ n 個ノ a ノ積ナリ然ルニ此定義ヲ用ヒテ $a^{\frac{1}{2}}$ ハ半分ノ a 或ハ a^{-2} ハ負數二個ノ a ノ積トスレハ其結果如何ナリヤ是レ不可思議ノ數量ヲ生スルニ至ラン.

故ニ指数ニハ分数或ハ負数ノ存在スルヿ決シテ無シ $a^{\frac{1}{2}}$, a^{-2} ノ如キヿハ決シテ在リ得ヘカラサルモノナリ。

今予カ此ニ講述セントスル $a^{\frac{1}{2}}$ ノ如キハ決シテ以上述ヘタルカ如キ a ノ二分ノ一方乗ト唱フルカ如キモノニアラス即チ $a^{\frac{1}{2}}$, a^{-2} ノ如キ一ツノ記號トシテ用フルモノナリ。

例ヘハ $\sqrt{a}$ ノ代リニ $a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a}$ ノ代リニ $a^{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{a^2}$ ノ代リニ a^{-2} トイヘル記號ヲ用ヒタルニ過キス。

何ノ爲メニ此ノ如キ記號ヲ用フルノ必要アリヤトイフニ數學上是非トモ之ヲ用ヒサレハ指數ノ應用ヲ推擴スル能ハス從フテ代數式ヲ記スニモ不便ナルヲ以テナリ例ヘハ非常ニ大ナル數式ハ煩雜ナル式ヲ簡單ニ他ノ記號ニテ示スカ如キ類ナリ而シテ此ノ如ク分指數,負指數ヲ用フル代リニ他ノ記號ヲ用フルモ差支エ無シト雖モ是レカ一番ニ良法ナルヿハ昔ヨリ幾多ノ學者カ經驗シテ一定シタルモノナリ。

凡ソ學理ハ事物ニ定義ヲ與ヘテ後チニ法則(定理)ヲ作ルモノナリ然ルニ舊事物ノ定義ニ適合セサル新事物ヲ發見シ或ハ想定シタル時ハ之ニ措應スヘキ舊事物ノ法則ヲ此新事物ニ用ヒ而シテ後チニ新事物ノ定義ヲ發見スルヲ一般ノ推究法トス。

故ニ分指數,負指數ノ如キ想定ノ新記號ハ之テ舊記號ナル正整指數ノ法則ニ用ヒ而シテ後チニ分指數,負指數ノ定義ヲ發見シ得ヘシ即チ次ノ如シ。

12. 分指數之定義 $a^{\frac{m}{n}}$ ハ a ノ m 方乘ノ n 方根ナリ(但シ m, n ハ正整數)即チ $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

指數ノ法則(3) $(a^m)^n=a^{mn}$ ヲ用ヒテ

$(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}\times n}=a^m$ 故ニ $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$ ニ於テ $n=1$ トスレハ $a^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{a}$.

13. 零之指數 $a^0=1$.

何トナレハ指數ノ法則(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$ ニ於テ $m=0$ トスレハ $a^0\times a^n=a^{0+n}=a^n$ 故ニ $a^0=1$.

(注意) $5^0=6^0=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$ ノ如キ如何ナル數ノ零方乘モ凡ヘテ1ナリ而シテ $0^0=1$ ナリヤトイフニ 0^0 ハ1ニテモ何ニテモ差支エ無シ即チ不定數ナリ是レハ高等數理ニ屬ス而シテ簡易ニ解明スル方法アレモ初學者ハ反テ是等ノ問タニ疑ヒヲ存シ置ク方カ利益アリ後來明了トナルノ時節アリ即チ學理ノ研究ハ鳴かされは鳴くまてまたう杜鵑家康公ノ主義ヲ取ルヘシ

14. 負指數之定義 a^{-m} ハ a ノ m 方乘ノ反商ナリ即チ $a^{-m}=\frac{1}{a}$,

但シ m ハ **12.** 章ニ由テ正整數ニノニ限ラス負數ニテモ可ナリ。

指數之法則(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$ ヲ用ヒ,

n ヲ $-m$ トスレハ $a^m\times a^{-m}=a^{m-m}=a^0=1$; (**14.** 章ニヨル)

之ニ由テ $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$.

同樣法ニテ $a^{-m}\times a^{-n}=\frac{1}{a^m}\times\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^{m+n}}=a^{-m-n}$.

15. 分指數及負指數之應用 以上解明シタル結果ニヨレハ分指數及ヒ負指數ノ新定義ハ全ク指數ノ法則ト同一ノ下ニ立ツヿヲ得ヘシ之ニ由テ分指數及ヒ負指數ノ定義ヲ用ヒテ方乘及ヒ方根ノ煩雜ナル運算ヲ通例ノ有理整數指數ノ如ク取リ扱フヿヲ得ヘシ。

今次ニ數例ヲ示サシ。

〔第壹例〕 $\sqrt[3]{5}\times\sqrt{5}=5^{\frac13}\times5^{\frac12}=5^{\frac13+\frac12}=5^{\frac56}=\sqrt[6]{5^5}$.

〔第貳例〕 $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m}=\frac{b^m}{a^m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m$.

〔第三例〕 $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{(\sqrt[p]{a})})}=\left(\left(a^{\frac1p}\right)^{\frac1n}\right)^{\frac1m}=\left(a^{\frac{1}{np}}\right)^{\frac1m}=a^{\frac{1}{mnp}}=\sqrt[mnp]{a}$.

例題五拾

次ノ各分指數及ヒ負指數ヲ通例ノ代數式ニテ示セ。

1. $\left(a^{\frac23}\right)^{\frac12}$. 2. $\left(a^{-\frac23}\right)^{-\frac32}$. 3. $\sqrt[3]{\left(a^{-2}\right)^{\frac14}}$.

2. $a^{\frac23}\times a^{-\frac12}$. 5. $a^{\frac23}b^{\frac45}\div a^{\frac12}b^{\frac{2}{15}}$. 6. $(a^{-3}b^6)^{-\frac23}$.

7. $\sqrt{\left(a^{-\frac53}b^3c^{-\frac23}\right)}\div\sqrt[3]{(a^{\frac12}b^4c^{-1})}$. 8. $\left(a^{\frac1m}\right)^{-\frac1n}\div\left(b^{-\frac1n}\right)^{\frac1m}$.

9. $\sqrt[p+v]{\{\sqrt[v]{(a^{-p})^{v}}\cdot\sqrt[p]{(a^{-v})^{p-v}}\}}$.

10. $\frac{\sqrt[3]{(x^2y^5)}\cdot\{\sqrt[4]{(x^2y^6)}\}^{-2}}{\left(x^{\frac23}y^{\frac32}\right)^{-2}\left(x^2y\right)^{\frac13}}\div\frac{(x^{-2}y^{\frac23})^{-2}}{\{\sqrt[3]{(x^{-2}y)}\}^2}$.

例題五拾答解

1. $\sqrt[3]{a}$. 2. a. 3. $\frac{1}{\sqrt[6]{a}}$. 4. $\sqrt[6]{a}$. 5. $\sqrt[6]{a}\sqrt[3]{b^2}$.

6. $\frac{a^2}{b^4}$.

7. 〔解〕 原式 $=\frac{(a^{-\frac53}b^3c^{-\frac23})^{\frac12}}{(a^{\frac12}b^4c^{-1})^{\frac13}}=\frac{a^{-\frac56}b^{\frac32}c^{-\frac13}}{a^{\frac16}b^{\frac43}c^{-\frac13}}$

$=a^{-\frac56-\frac16}b^{\frac32-\frac43}=a^{-1}b^{\frac16}=\frac{\sqrt[6]{b}}{a}$. 8. $\sqrt[mn]{\frac{b}{a}}$.

9. 〔解〕 原式 $=\{(a^{-p})^{-\frac{p-v}{v}}(a^{-v})^{\frac{p-v}{p}}\}^{\frac{1}{p+v}}$

$=\left\{a^{\frac{p(p-v)}{v}}a^{-\frac{v(p-v)}{p}}\right\}^{\frac{1}{p+v}}=\left\{a^{\frac{p(p-v)}{v}-\frac{v(p-v)}{p}}\right\}^{\frac{1}{p+v}}$

$=\left\{a^{\frac{(p-v)(p^2-v^2)}{pv}}\right\}^{\frac{1}{p+v}}=a^{\frac{(p-v)(p^2-v^2)}{pv(p+v)}}=a^{\frac{(p-v)^2}{pv}}=\sqrt[pv]{a^{(p-v)^2}}$.

10. 〔解〕 $\frac{x^{\frac23}y^{\frac53}\left\{x^{\frac12}y^{\frac32}\right\}^{-2}}{x^{-\frac43}y^{-3}x^{\frac23}y^{\frac13}}\div\frac{x^4y^{-\frac43}}{\left\{x^{-\frac23}y^{\frac13}\right\}^2}$

$=\frac{y^{\frac43}\left\{x^{-1}y^{-3}\right\}}{x^{-\frac43}y^{-3}}\div\frac{x^4y^{-\frac43}}{x^{-\frac43}y^{\frac23}}=\frac{y^{\frac43}x^{-1}}{x^{-\frac43}}\times\frac{x^{-\frac43}y^{\frac23}}{x^4y^{-\frac43}}$

$=\frac{y^{\frac83}y^{\frac23}}{x^5}=\frac{y^{\frac{10}{3}}}{x^5}=\frac{\sqrt[3]{y^{10}}}{x^5}=\frac{y^3\sqrt[3]{y}}{x^5}$.

有理補因子

16. 有理補因子 トハ無理式ニ最低次ノ式ヲ乘シテ原式ヲ有理ナラシムルモノヲイフ.

例ヘハ $\sqrt{8}$ ノ有理補因子ハ $\sqrt{2}$ ナリ,

何トナレハ $\sqrt{8}\times\sqrt{2}=\sqrt{16}=4$.

又 $\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^3}$ a ナルカ故ニ $\sqrt[3]{a^2}$ ノ有理補因子ハ $\sqrt[3]{a}$ ニシテ $\sqrt[3]{a}$ ノ有理補因子ハ $\sqrt[3]{a^2}$ ナリ.

一項式ノ有理補因子ヲ一般ニ求ムルヿヲ得ヘシ即チ $\sqrt[n]{a}$ ノ有理補因子ハ $\sqrt[n]{a^{n-1}}$ ナルカ如シ.

二項式及ヒ其以上ノ有理補因子ヲ一般ニ求ムルヿハ能ハサル所ナリ今通常ニ入用ナル場合丈ケ次ニ示サントス其他ノ場合ハ餘リ入用ナラス.

17. 二項式之有理補因子 ハ一般ニ求ムルヿヲ得ヘシ最モ簡易ナルモノハ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ノ有理補因子ノ如キモトス即チ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$.

有理補因子ヲ求ムルニハ因子分割法ノ邊ニテ充分ニ講述ノシ公式ヲ熟知スルヿ必要ナリ即チ

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\left.\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2)&=a^3+b^3\\(a-b)(a^2+ab+b^2)&=a^3-b^3\end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (2)$$

又第六編8章(90頁)ニ於テ

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots\dots+ab^{n-2}+b^{n-1},$$

故ニ $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots\dots+b^{n-1})=a^n-b^n, \dots\dots (3).$

同章ニ於テ n カ偶數ナル片 $\dfrac{a^n-b^n}{a+b}$ 及ヒ n カ奇數ナル片 $\dfrac{a^n+b}{a+b}$ ノ除商ヲ示セリ然レ𪜈此處ニテハ最早ヤ高尙ノ學生ニ授クル所ナルカ故ニ n カ偶數ニテモ奇數ニテモ適合スヘキ公式ヲ作ルヿ次ノ如シ.

公式(3)ニ於テ b ヲ $-b$ トスレハ

$$\{a-(-b)\}\{a^{n-1}+a^{n-2}(-b)+a^{n-3}(-b)^2+a^{n-4}(-b)^3+\dots\dots+(-b)^{n-1}\}=a^n-(-b)^n,$$

即チ

$$(a+b)\{a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\dots\dots+(-1)^{n-1}b^{n-1}\}=a^n-(-1)^n b^n;$$

但シ $(-1)^n=-(-1)^{n-1}$ ナルカ故ニ

$$(a+b)\{a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\dots\dots+(-1)^{n-1}b^{n-1}\}=a^n+(-1)^{n-1}b^n, (4).$$

〔例〕 $a-\sqrt{b}$ ノ有理補因子ハ $a+\sqrt{b}$ ナリ,

何トナレハ(1)ニ由テ $(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})=a^2-b.$

$\sqrt[3]{5}-1$ ノ有理補因子ハ $\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1$ ナリ,

何トナレハ(2)ノ第二公式ニ由テ

$$(\sqrt[3]{5}-1)(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}+1)=(\sqrt[3]{5})^3-1^3=5-1.$$

$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1$ ノ有理補因子ハ $\sqrt[3]{x}+1$ ナリ,

何トナレハ(2)ノ第一公式ニ由テ

$$(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x}+1)=(\sqrt[3]{x}+1)\{(\sqrt[3]{x})^2-\sqrt[3]{x}+1\}=x-1.$$

$x^{\frac{2}{3}}-ay^{\frac{5}{6}}$ ノ有理補因子ヲ求ムルニハ次ノ如ク(3)ヲ用フ,

$x^{\frac{2}{3}}=X$, $ay^{\frac{5}{6}}=Y$ トシ分指數ノ分母3, 6ノL. C. M. 6ナルカ故ニ

X, Y ヲ方乘スレハ $x^4=X^6$, $a^6y^5=Y^6$,

而シテ $(X-Y)(X^5+X^4Y+X^3Y^2+X^2Y^3+XY^4+Y^5)=X^6-Y^6,$

$$\left(x^{\frac{2}{3}}-ay^{\frac{5}{6}}\right)\left\{\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^5+\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^4\left(ay^{\frac{5}{6}}\right)+\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3\left(ay^{\frac{5}{6}}\right)^2+\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^2\left(ay^{\frac{5}{6}}\right)^3+x^{\frac{2}{3}}\left(ay^{\frac{5}{6}}\right)^4+\left(ay^{\frac{5}{6}}\right)^5\right\}=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^6-\left(ay^{\frac{5}{6}}\right)^6,$$

即チ

$$\left(x^{\frac{2}{3}}-ay^{\frac{5}{6}}\right)\left(x^{\frac{10}{3}}+x^{\frac{8}{3}}ay^{\frac{5}{6}}+x^2a^2y^{\frac{5}{3}}+x^{\frac{4}{3}}a^3y^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{2}{3}}a^4y^{\frac{10}{3}}+a^5y^{\frac{25}{6}}\right)=x^4-a^6y^5,$$

故ニ $x^{\frac{2}{3}}-ay^{\frac{5}{6}}$ ノ有理補因子ハ

$x^{\frac{10}{3}}+ax^{\frac{8}{3}}y^{\frac{5}{6}}+a^2x^2y^{\frac{5}{3}}+a^3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{5}{2}}+a^4x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{10}{3}}+a^5y^{\frac{25}{6}}$ ナリ.

$\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{2}$ ノ有理補因子ヲ求ムルニハ次ノ如ク(4)ヲ用フ,

$\sqrt[5]{8}=a$, $\sqrt[5]{2}=b$ トスレハ $8=a^5$, $2=b^5$ ナルカ故ニ

$$(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)=a^5+b^5,$$

即チ

$$(\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{2})\{(\sqrt[5]{8})^4-(\sqrt[5]{8})^3(\sqrt[5]{2})+(\sqrt[5]{8})^2(\sqrt[5]{2})^2-(\sqrt[5]{8})(\sqrt[5]{2})^3+(\sqrt[5]{2})^4\}=(\sqrt[5]{8})^5+(\sqrt[5]{2})^5,$$

即チ

$$(\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{2})\{(\sqrt[5]{2^3})^4-(\sqrt[5]{2^3})^3\sqrt[5]{2}+(\sqrt[5]{2^3})^2\sqrt[5]{2^2}-(\sqrt[5]{2^3})\sqrt[5]{2^3}+\sqrt[5]{2^4}\}=8+2,$$

之ニ由テ $\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{2}$ ノ有理補因子ハ

$\sqrt[5]{2^{12}}-\sqrt[5]{2^9}\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{2^6}\sqrt[5]{2^2}-\sqrt[5]{2^3}\sqrt[5]{2^3}+\sqrt[5]{2^4}$,

即チ　$2\sqrt[5]{2^2}-2^2+2\sqrt[5]{2^3}-2\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{2^4}$,

即チ　$2\sqrt[5]{4}-4+2\sqrt[5]{8}-2\sqrt[5]{2}+2\sqrt[5]{16}$ ナリ.

18. 三項式之有理補因子 ノ公式ハ

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$
$$=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4 \ldots\ldots (5)$$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc \ldots\ldots (6)$$

(5) ハ實際ハ役ニ立タサル公式ナリ.

例ヘハ $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ ノ有理補因子ハ (5) ニヨレハ

$(\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r})(\sqrt{p}-\sqrt{2q}+\sqrt{r})(-\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})$ ナリ.

然レモ (5) ノ代リニ (1) ヲ用フレハ

$$(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})(\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r})=(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2-(\sqrt{r})^2$$
$$=p+q-r+2\sqrt{pq}$$ ナルカ故ニ

$(p+q-r+2\sqrt{pq})(p+q-r-2\sqrt{pq})=(p+q-r)^2-4pq$ 即チ有理式トナルヘシ,

之ニ由テ $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ ノ有理補因子ハ

$(\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r})(p+q-r-2\sqrt{pq})$ ナリ.

又 $\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ノ有理補因子ハ (5) ニヨレハ

$(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})(-\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})$ ノ如ク煩雜ナレモ次ノ如クスレハ簡易ナリ,

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})$$
$$=\{\sqrt{5}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}\{\sqrt{5}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}$$
$$=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=5-(3-2\sqrt{6}+2)=2\sqrt{6},$$

故ニ　$2\sqrt{6}\times\sqrt{6}=2\times 6$ 即チ有理トナル,

之ニ由テ　$\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ノ有理補因子ハ

$(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{6}$ 即チ $(\sqrt{30}-3\sqrt{2}+4\sqrt{3})$ ナリ.

$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}$ ノ有理補因子ヲ (6) ニテ求ムルヿ次ノ如シ,

$$(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}-\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{z}\sqrt[3]{x})$$
$$=(\sqrt[3]{x})^3+(\sqrt[3]{y})^3+(\sqrt[3]{z})^3-3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{z}$$
$$=x+y+z-3\sqrt[3]{(xyz)}$$

又公式 (2) ヲ用ヒテ

$$\{(x+y+z)-3\sqrt[3]{xyz}\}\{(x+y+z)^2+(x+y+z)(3\sqrt[3]{xyz})+(3\sqrt[3]{xyz})^2\}$$
$$=(x+y+z)^3-(3\sqrt[3]{xyz})^3=(x+y+z)^3-27xyz$$ 即チ有理.

之ニ由テ $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}$ ノ有理補因子ハ

$$(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}-\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{yz}-\sqrt[3]{zx})\{(x+y+z)^2$$
$$+(x+y+z)(3\sqrt[3]{xyz})+(3\sqrt[3]{xyz})^2\}$$ ナリ.

〔例〕 $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$ ノ有理補因子ヲ求ム.

答 $(x-1)\sqrt[3]{x}-x+1$.

此例ハ (6) ヲ用フレハ直チニ求メ得ラルヘシ.

19. 方程式解法 無理方程式ヲ解クニハ全ク有理補因子ヲ求ムル方法ニヨルモノナリ.

例ヘハ $\sqrt[3]{x}=a$ ナル方程式ハ $\sqrt[3]{x}-a=0$ ナルヲ以テ $\sqrt[3]{x}-a$ ノ有理補因子 $\sqrt[3]{x^2}+(\sqrt[3]{x})a+a^2$ ヲ求ムレハ

$(\sqrt[3]{x}-a)(\sqrt[3]{x^2}+a\sqrt[3]{x}+a^2)=0$ 即チ $x-a^3=0$ $\therefore$ $x=a^3$.

故ニ $\sqrt[3]{x}=a$ ノ根ハ a^3 ナリ,

而シテ其有理補因子ナル方程式 $\sqrt[3]{x^2}+a\sqrt[3]{x}+a^2=0$ ノ根モ亦之ヲ求ムレハ a^3 ナリ.

之ニ由テ無理方程式ハ同根ナル相異ノ方程式ヲ幾ツモ得ヘシ此處ノ例ニテハ二ツ方程式ヲ得タリ。

此 19. 章ノ勝義ハ能ク注意考究セラレンヿヲ冀望ス.

例題五拾壹

次ノ各ノ有理補因子ヲ求ム.

1. $a-2\sqrt{b}$.　　2. $2\sqrt{5}+5\sqrt{2}$.　　3. $\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$.

4. $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{4}$.　　5. $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}$.　　6. $1-\sqrt[5]{a}$.

7. $1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$.

次ノ各ヲ最簡ニセヨ.

8. $\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$.　　9. $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.　　10. $\dfrac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

11. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+1}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}-1}$.　　12. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{1+(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$.

13. $x=\sqrt{3}$ ナル時 $\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}-\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}$ ノ値ヲ求ム,

14. $x^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}$ ナル時 $\dfrac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}$ ノ値ヲ求ム.

15. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{10}}$ ヲ最簡ニセヨ.

例題五拾壹答解

1. $a+2\sqrt{b}$.　　2. $2\sqrt{5}-5\sqrt{2}$.

3. $\{\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)\}\{\sqrt{3}-(\sqrt{2}-1)\}=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}-1)^2$

$$=3-(3-2\sqrt{2})=2\sqrt{2},$$

故ニ $2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4$ 即チ有理トナル.

之ニ由テ所求ノ有理補因子ハ $(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)\sqrt{2}$ ナリ.

4. $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4a}+2\sqrt[3]{2}$.

5. $a^2\sqrt{a}-a^2\sqrt[3]{b}+a\sqrt{a}\sqrt[3]{b^2}-ab+b\sqrt{a}\sqrt[3]{b}-b\sqrt[3]{b^2}$,

6. $1+\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{a^2}+\sqrt[5]{a^3}+\sqrt[5]{a^4}$.

7. $(1+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{ab})\{(1+a+b)^2$

$$+3(1+a+b)\sqrt[3]{ab}+9\sqrt[3]{a^2b^2}\}.$$

8. $\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\times\dfrac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\dfrac{14+6\sqrt{5}}{9-5}=\dfrac{1}{2}(7+3\sqrt{5})$.

9. $5-\sqrt{15}$.　　10. $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}$.

11. 原式 $=\dfrac{4}{4(\sqrt[3]{3}+1)}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}-1}=\dfrac{3+1}{4(\sqrt[3]{3}+1)}+\dfrac{3-1}{\sqrt[3]{3}-1}$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}+1)+(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1)=\frac{1}{4}(5\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}+5)$$

12. 原式 $\dfrac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}-\dfrac{\{1+(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}\}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$

$$=\frac{3+\sqrt{3}+(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{3-2}-\frac{2+\sqrt{3}+(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4-3}$$

$$=3+\sqrt{3}+(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}-(2+\sqrt{3})-(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}=1.$$

13. $=\dfrac{2\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}-1)^2}-\dfrac{2\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}+1)^2}=\dfrac{2\sqrt{3}-1}{4-2\sqrt{3}}-\dfrac{2\sqrt{3}+1}{4+2\sqrt{3}}$

$$=\frac{2\sqrt{3}-1}{2(2-\sqrt{3})}-\frac{2\sqrt{3}+1}{2(2+\sqrt{3})}=\frac{(2\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})-(2\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})}{2(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(4+3\sqrt{3})-(-4+3\sqrt{3})}{2}=4.$$

〔別法〕 原式 $=\dfrac{x^2-(x-1)^2}{(x-1)^2}-\dfrac{(x+1)^2-x^2}{(x+1)^2}$

$$=\frac{x^2}{(x-1)^2}-1-\left\{1-\frac{x^2}{(x+1)}\right\}=\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{x^2}{(x+1)^2}-2$$

$$=\frac{x^2\{(x+1)^2+(x-1)^2\}}{(x^2-1)^2}-2=\frac{2x^2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}-2,$$

而シテ $x=\sqrt{3}$ ナルカ故ニ $x^2=3$ ナリ之ニ由テ

原式 $=\dfrac{2\times3(3+1)}{(3-1)^2}-2=6-2=4$.

14. a^2.

15. 原式 $=\dfrac{1}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-1)}{2}$.

平方根及立方根

20. 平方根　多項式ノ平方根ヲ求ムル方法ハ公式 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ ヲ用フヘシ。

即チ $A^2+2AB+B^2$ ノ平方根ヲ求ムレハ $A+B$ ナリ其方法ノ順序ハ次ノ如クスヘシ。

$$
\begin{array}{rl}
& \sqrt{A^2+2AB+B^2}=A\ldots\ldots\text{根ノ首項} \\
(A)^2= & A^2 \\
\hline
& +2AB+B^2\ldots\ldots\text{殘式}
\end{array}
$$

此殘式ノ首項 $2AB$ ヲ根ノ首項ノ二倍 $2A$ ニテ除スレハ B ヲ得之ヲ根ノ次項トス而シテ

$$
\begin{array}{rl}
& \sqrt{A^2+2AB+B^2}=A+B\ldots\ldots\text{根ノ全項。} \\
(A+B)^2= & A^2+2AB+B^2 \\
\hline
& 0\ldots\ldots\ldots\text{殘リ無シ。}
\end{array}
$$

此ノ如ク根ノ首項ノ2倍ニテ殘式ノ首項ヲ除シ次項ヲ得之ト首項トヨリ成レル項ノ平方ヲ原式ヨリ減シ殘リ無キニ至レハ其成レル項ハ所求ノ平方根ナリ若シ殘リアレハ再ヒ其成レル項ノ根ノ首項ト考ヘテ前法ヲ繰リ反スヘシ。

21. 運算之雛形　前章ノ理ニヨリ $A^2+2AB+B^2$ ノ平方根ヲ求ムル雛形ヲ作ルコ次ノ如シ

$$
\begin{array}{ll}
A & \sqrt{A^2+2AB+B^2}=A+B \\
A & A^2 \\
\hline
2A+B & 2AB+B^2 \\
B & 2AB+B^2 \\
\hline
\end{array}
$$

此雛形ハ最初ニAニAヲ乘シ A^2 ヲ原式ヨリ減シ次ニAニAヲ加ヘ2Aトシ2Aニテ殘式ノ首項ヲ除シBヲ得此Bヲ2Aノ次ニ加ヘ2A+Bトシ之ニBヲ乘スヘシ。

此雛形ニヨリ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ ノ平方根ヲ求ムルニハ此式ヲ a ノ遞降方乘ニ整列シテ

$$
\begin{array}{ll}
a & \sqrt{(a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2)}=a+b+c. \\
a & a^2 \\
\hline
2a+b & 2ab+2ac+b^2+2bc+c^2 \\
b & 2ab+b^2 \\
\hline
2a+2b+c & 2ac+2bc+c^2 \\
c & 2ac+2bc+c^2 \\
\hline
\end{array}
$$

〔例〕 $x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4$ ノ平方根ヲ求ム。

$$
\begin{array}{ll}
x^3 & \sqrt{(x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4)}=x^3-2x^2+x-2. \\
x^3 & x^6 \\
\hline
2x^3-2x^2 & -4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4 \\
-2x^2 & -4x^5+4x^4 \\
\hline
2x^3-4x^2+x & 2x^4-8x^3+9x^2-4x+4 \\
x & 2x^4-4x^3+x^2 \\
\hline
2x^3-4x^2+2x-2 & -4x^3+8x^2-4x+4 \\
-2 & -4x^3+8x^2-4x+4 \\
\hline
\end{array}
$$

22. 定理　某多項式ヲ特別ノ一字例ヘハ x ノ遞降方乘ニ整列セシヰ其平方根ノ若干項ヲ得タル後チハ其首項ノ2倍ヲ以テ原式ヨリ若干項ノ平方ヲ減シタル殘式ヲ除スレハ次ノ平方根ノ項ヲ得ヘシ。

$(A+B)^2$ ヲ某多項式トシAハ凡テBヨリ x ノ高次ナル項ヲ有シ双方トモニ x ノ遞降方乘ニ整列セシモノトス。

然ルトキ此式ノ平方根ノ若干項Aヲ得タル後チハ $(A+B)^2-A^2$ ヲ2Aニテ除スレハBノ首項ヲ得ヘシ。

何トナレハ　$(A+B)^2-A^2=2AB+B^2$,

故ニ　$\dfrac{(A+B)^2-A^2}{2A}=B+\dfrac{B^2}{2A}$,

x ニ付キBハAヨリ低次ナリ,

即チ　$B\times\frac{B}{A}$ ハ $A\times\frac{B}{A}$ ヨリ低次ナリ,

即チ　$\frac{B^2}{A}$ ハBヨリ低次ナリ.

故ニ　$B+\frac{B^2}{2A}$ ニ於テ $\frac{B^2}{2A}$ ノ首項ハBノ首項ヨリ低次ナリ之ニ由テBノ首項ハ $\frac{B^2}{2A}$ ヲ加フルモ變スルヿナシ.

23. 立方根

或多項式ノ立方根ヲ求ムルハ $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$ ナル公式ニ基ツクモノナリ

即チ $(A+B)^3-A^3=3A^2B+3AB^2+B^3$ ナルカ故ニ

$$\frac{(A+B)^3-A^3}{3A^2}=B+\frac{B^2}{3A}+\frac{B^3}{3A^2}.$$

而シテ x ニ付キAハ凡テBノ各項ヨリ高次ナルモノトシ且ツ各 x ノ遞降方乗ニ整列セシモノトスレハ22章ノ定理ノ如ク $\frac{B^2}{3A}+\frac{B^3}{3A^2}$ ハ何レモBノ首項ヨリ低次ナリ.

24. 定理

之ニ由テ某多項式ノ立方根ノ若干項ヲ得タル後チハ其首項ノ平方ノ3倍ヲ以テ原式ヨリ其立方根ノ若干項ノ立方ヲ減シタル殘式ヲ除スレハ立方根ノ次項ヲ得.

25. 立方根之雛形

立方根ヲ求ムル雛形ヲ作ラントス,

而シテ先ツ　$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$　ノ立方根ヲ求ムルニハ先ツ $(A)^3$ $=A^3$

$$\overline{3A^2B+3AB^2+B^3}\text{……殘式}$$

Aヲ立方根ノ首項トス A^3 ヲ原式ヨリ減シ其殘式ヲ $3A^2$ ニテ除スレハ $\frac{3A^2B+3AB^2+B^3}{3A^2}$ 即チBヲ得,

故ニ

$$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

$$(A+B)^3=\underline{A^3+3A^2B+3AB^3+B^3}$$

之ニ由テ次ノ雛形ヲ作ルヿヲ得ヘシ

$$\begin{array}{lcl}
 & & A+B\text{……所求ノ立方根} \\
3)\underline{A^2\quad\quad A} & & \sqrt[3]{(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)} \\
3A^2\quad 3A & & \underline{A^3} \\
\quad\times B\quad B^2 & & +3A^2B+3AB^2+B^3 \\
\overline{(3A^2+3AB+B^2)B} & = & \underline{+3A^2B+3AB^2+B^3}
\end{array}$$

〔例〕 $x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8$ ノ立方根ヲ求ム.

上ノ雛形ヲ用フレハ

$$\begin{array}{lcl}
 & & x^2-x+2 \\
3)\underline{(x^2)^2\quad\quad x^2} & & \sqrt[3]{(x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8)} \\
3x^4\quad\quad 3x^2 & & \underline{x^6} \\
\quad\times -x\quad(-x)^2 & & -3x^5+9x^4-13x^3 \\
\overline{(3x^4-3x^3+x^2)(-x)} & = & \underline{-3x^5+3x^4-x^3} \\
3)\underline{(x^2-x)^2\quad\quad x^2-x} & & +6x^4-12x^3+18x^2-12x+8 \\
3x^4-6x^3+3x^2\quad 3x^2-3x & & \\
\quad\quad\times 2\quad 2^2 & & \\
\overline{(3x^4-6x^3+\underbrace{3x^2+6x^2}_{9x^2\text{トナル}}-6x+4)2} & = & +6x^4-12x^3+18x^2-12x+8
\end{array}$$

甚タ不體裁ナル解キ方ナレモ此方法ハ算術ニテモ代數ニモ用ヒラレ又四方根五方根等モ此方法ニテ推究シ得ヘシ.

例題五拾貳

次ノ各ノ平方根ヲ求ム.

1. $(1+2x^2)^2-4x(1-x)(1+2x)$.

2. $x^4+2x^3(y+z)+x^2(y^2+z^2+4yz)+2xyz(y+z)+y^2z^2$.

3. $(a-b)^4-2(a^2+b^2)(a-b)^2+2(a^4+b^4)$.

4. $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$

次ノ各ノ立方根ヲ求ム.

5. $1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$.

6. $-(6x+20+6x^{-1})+(x+15+15x^{-1}+x^{-2})x^{\frac{1}{2}}$.

7. $x^4+px^3+qx^2+rx+s$ カ完平方式ナルトキ $p^2s=r^2$ 及ヒ $p^3-4pq+8r=0$.

8. $4x^6-24x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2-40x+25$ カ完平方式ナルトキ A, B, C ノ値如何.

9. $(x+p)(x+2q)+(x+2p)(x+q)=0$ カ平方式ナルトキ $9p^2-14pq+9q^2=0$

10. $2(b-c)\sqrt{(a-b)(c-a)}-(b-c)^2$ ノ平方根ヲ求ム.

11. $a+b+c=0$ ナルトキ $2(a^4+b^4+c^4)$ ノ平方根ヲ求ム.

12. $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)$ カ完平方式ナルトキ a, b, c ノ關係如何.

13. ax^3+bx^2+cx+d カ完立方式ナルトキ $b^2=3ac$ 及ヒ $c^2=3bd$.

次ノ各ヲ最簡ニセヨ,

14. $$\frac{\sqrt{[\{(a-b)^2+4a(a+b)-4^2a\}\{a^2(1-\frac{2b}{a})+b^2\}]}}{\sqrt[3]{[a^2\{3b^2(b^2-a^2)+a^4\}-b^6]}}$$

15. $\sqrt{(2ab+\sqrt{(2a^2b^2+\sqrt{(2a^4b^4+\sqrt{(2a^8b^8+a^{16}+b^{16})})})})}$.

例題五拾貳解答

1. 括弧ヲ解キ平方根ヲ求ムレハ $1-2x-2x^2$.

2. $x^2+x(y+z)+yz$.

3. $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2$

及ヒ $2(a^4+b^4)=(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2$ ナルカ故ニ

原式 $=(a-b)^4-\{(a+b)^2+(a-b)^2\}(a-b)^2+(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2$

$=(a-b)^4-(a^2-b^2)^2-(a-b)^4+(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2$

$=(a^2+b^2)^2$; 故ニ所求ノ平方根ハ a^2+b^2 ナリ.

4. 原式 $=(x+a)(x+4a)(x+2a)(x+3a)+a^4$

$=\{(x^2+5ax)+4a^2\}\{(x^2+5ax)+6a^2\}+a^4$

$=(x^2+5ax)^2+10a^2(x^2+5ax)+25a^4$

$=\{(x+5ax)+5a^2\}^2$,

故ニ所求ノ平方根ハ $x^2+5ax+5a^2$ ナリ.

5. $1+x+x^2$.

6. 括弧ヲ解キ x ノ遞降方乘ニ整列シテ立方根ヲ求ムレハ

$x^{\frac{1}{2}}-2+x^{-\frac{1}{2}}$ .... 立方根

$3)\frac{(x^{\frac{1}{2}})^2}{3x}\ \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3x^{\frac{1}{2}}}\quad \sqrt[3]{\left(x^{\frac{3}{2}}-6x+15x^{\frac{1}{2}}-20+15x^{-\frac{1}{2}}-6x^{-1}+x^{-\frac{3}{2}}\right)}$

$x^{\frac{3}{2}}$

$\times -2\quad (-2)^2\qquad -6x+15x^{\frac{1}{2}}-20$

$(3x-6x^{\frac{1}{2}}+4)\times -2=-6x+12x^{\frac{1}{2}}-8$

$3x^{\frac{1}{2}}-12+15x^{-\frac{1}{2}}-6x^{-1}+x^{-\frac{3}{2}}$

$3)\frac{(x^{\frac{1}{2}}-2)^2}{3x-12x^{\frac{1}{2}}+12}\ \frac{x^{\frac{1}{2}}-2}{3x^{\frac{1}{2}}-6}$

$-\times x^{-\frac{1}{2}}\quad (x^{-\frac{1}{2}})^2$

$(3x-12x^{\frac{1}{2}}+15-6x^{-\frac{1}{2}}+x^{-1})\times x^{-\frac{1}{2}}=3x^{\frac{1}{2}}-12+15x^{-\frac{1}{2}}-6x^{-1}+x^{-\frac{3}{2}}$

7. $x^4+px^3+qx^2+rx+s=(x^2+\frac{1}{2}px+m)$ トス而シテ

$=x^4+px^3+(\frac{1}{4}p^2+2m)x^2+pmx+m^2$ トナル,

双方ニ於テ x^2 ノ係數ハ $q=\frac{1}{4}p^2+2m$, x ノ係數ハ $r=pm$,

又末項ハ $s=m^2$ 此三方程式ヨリ次ノ如シ,

$r^2=p^2m^2=p^2s$

又 $p^2-4q+8m=0$ 即チ $p^3-4pq+8pm=0$,

故ニ $p^3-4pq+8r=0$.

8. $4x^6-24x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2-40x+25$

$=(2x^3-6x^2+mx+n)^2$ トス而シテ

$=4x^6-24x^5+(4m+36)x^4+(4n-12m)x^3+(m^2-12n)x^2$
$+2mnx+n^2$,

双方ニ於テ x^4, x^3, x^2, x ノ係數及ヒ末項ヲ比較スレハ

$A=4m+36$, $B=4n-12m$, $C=m^2-12n$,

$-40=2mn$, $25=n^2$.

之ニ由テ $n=\pm 5$ 故ニ $m=-\frac{20}{n}=-\frac{20}{\pm 5}=\mp 4$.

〔第壹〕 $m=-4$, $n=5$ ナルキ

$A=4(-4)+36=20$, $B=4\times 5-12(-4)=68$,

$C=(-4)^2-12\times 5=-44$.

〔第二〕 $m=4$, $n=-5$ ナルキ

$A=4\times 4+36=52$, $B=4(-5)-12\times 4=-68$,

$C=4^2-12(-5)=76$.

9. 原式ヲ $(x\sqrt{2}+m)^2$ トシテ前法ヲ施スヘシ.

10. 原式 $=(b-c)\{2\sqrt{(a-b)(c-a)}+b+c\}$

$=(b-c)\{(a-b)+2\sqrt{(a-b)(c-a)}+(c-a)\}$

$=(b-c)\{\sqrt{a-b}+\sqrt{c-a}\}^2$ 故ニ平方根ハ $\sqrt{b-c}(\sqrt{a-b}+\sqrt{c-a})$.

11. $a+b+c=0$ ヲ平方ニシテ轉項スレハ

$a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$ 再ヒ平方ニスレハ

$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=4(ab+bc+ca)^2$,

但シ $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2+2abc(a+b+c)$,

而シテ $a+b+c=0$ 故ニ $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2$,

之ニ由テ $a^4+b^4+c^4+2(ab+bc+ca)^2=4(ab+bc+ca)^2$,

故ニ $2(a^4+b^4+c^4)=4(ab+bc+ca)^2$,

故ニ所求ノ平方根ハ $\pm 2(ab+bc+ca)$ ナリ.

12. $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)$ カ完平方式トナルニハ第五編16章(71頁)第四ニ由テ

$b^2(c-a)^2-4a(b-c)c(a-b)=0$,

即チ $b^2\{(c-a)^2+4ca\}-4abc(a+c)+4a^2c^2=0$,

即チ $b^2(c+a)^2-4abc(c+a)+4a^2c^2=0$,

即チ $\{b(c+a)-2ac\}^2=0$ 故ニ $b(c+a)-2ac=0$.

13. $ax^3+bx^2+cx+d=(mx+n)^3$

$=m^3x^3+3m^2nx^2+3mn^2x+n^3$, 双方ニ於テ x ノ同方乘ノ係數ヲ比較スレハ

$a=m^3$, $b=3m^2n$, $c=3mn^2$, $d=n^3$,

故ニ $b^2=9m^4n^2=3(m^3)(3mn^2)=3ac$,

$c^2=9m^2n^4=3(3m^2n)(n^3)=3bd$.

14. 原式 $=\frac{\sqrt{[(a+b)^2(a-b)^2]}}{\sqrt[3]{(a^2-b^2)^3}}=\frac{(a+b)(a-b)}{a^2-b^2}=1$.

15. 原式 $=\sqrt{(2ab+\sqrt{(2a^2b^2+\sqrt{(2a^4b^4+a^8+b^8)})})}$

$=\sqrt{(2ab+\sqrt{(2a^2b^2+a^4+b^4)})}$

$=\sqrt{(2ab+a^2+b^2)}=a+b$.

此例ハ平方根ハ正號ノミヲ用ヒタリ若シ負號ノ平方根ヲ取ルキハ虚數式トナリテ簡單ノ答ヲ得ル能ハス.

指數方程式

23. 指數方程式 $x^3=8$ ナル方程式ハ通常今迄テ論シタル方程式ナレヒ $2^x=8$ ノ如ク指數カ未知數量ナル方程式ハ未タ說明セサルモノナリ此ノ如キ方程式ヲ指數方程式トイヒ一般ノ場合ノ解法ハ對數式ニアラサレハ解シ難シ今特別ナル場合ノミヲ示サントス。

$x^3=8$ ハ $x=2$ 或ハ $-1\pm\sqrt{-3}$ ナル三根アルヿハ既ニ知ル所ナリ而シテ $2^x=8$ ハ $2^x=2^3$ ナルカ故ニ $x=3$ ノ一根アルノミ

又 $2^x=1$ ナル方程式ハ $2^x=2^0$ ト同シ故ニ $x=0$.

此處ニ於テ此種ノ指數方程式ノ外ニ分指數負指數等ノ代數式ヨリ成レル方程式ヲモ例題ニ揭ケ之ヲ解セントス。

例題五拾三

次ノ方程式ヲ解セヨ。

1. $4x^{\frac{3}{2}}-27x^{\frac{3}{4}}=40$.
2. $(1+x)^{\frac{2}{5}}+(1-x)^{\frac{2}{5}}=\frac{5}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{5}}$.
3. $x^{-2}-2x^{-1}=8$.
4. $9+x^{-4}=10x^{-2}$.
5. $6x^{\frac{3}{4}}=7x^{\frac{1}{4}}-2x^{-\frac{1}{4}}$.
6. $x^{\frac{2}{n}}+6=5x^{\frac{1}{n}}$.
7. $(a^{2m}+1)(x^{\frac{1}{2}}-1)^2=2(x+1)$.
8. $3^{2x}+9=10.3^x$.
9. $5(5^x+5^{-x})=26$.
10. $2^{2x+3}+1=32.2^x$.
11. $2^{2x+3}-57=65(2^x-1)$.
12. $\sqrt{2^x}+\frac{1}{\sqrt{2^x}}=2$.
13. $2^{x^2}=\frac{4^{x+3}}{8}$.
14. $a^{2x}(a^2+1)=(a^{3x}+a^x)$.
15. $x^{\frac{p+q}{2pq}}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b}\right)\left(x^{\frac{1}{p}}+x^{\frac{1}{q}}\right)$.

16. $a^2b^2x^{\frac{1}{n}}-4(ab)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{m+n}{2mn}}=(a-b)^2x^{\frac{1}{m}}$.
17. $\frac{x^{(m-n)^2}+x^{-4mn}}{x^{(m-n)^2}-x^{-4mn}}=a$[illegible].
18. $x^{x\sqrt{x}}=(x\sqrt{x})^x$ ハ $2\frac{1}{4}$ ナル一根ヲ有スルヿヲ示セ.
19. $a^nx^m+b^my^n=2(ax)^{\frac{m}{2}}(by)^{\frac{n}{2}}$, $xy=ab$.
20. $x^my^n=a^mb^nc$, $x^ny^m=a^mb^nc$.

例題五拾三解答

1. $x^{\frac{3}{4}}=y$ トスレハ原方程式ハ $4y^2-27y=40$ 之ヨリ y ヲ求ムレハ $y=8$ 或ハ $-\frac{5}{4}$,
故ニ $x=y^{\frac{4}{3}}=8^{\frac{4}{3}}$ 或ハ $\left(-\frac{5}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$.

2. 原方程式ヲ $(1-x)^{\frac{2}{5}}$ ニテ除スレハ
$\frac{(1+x)^{\frac{2}{5}}}{(1-x)^{\frac{2}{5}}}+1=\frac{5(1-x^2)^{\frac{1}{5}}}{2(1-x)^{\frac{2}{5}}}$ 即チ $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{2}{5}}+1=\frac{5}{2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{5}}$,
$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{5}}=y$ トスレハ $y^2+1=\frac{5}{2}y$ 故ニ $y=2$ 或ハ $\frac{1}{2}$.
而シテ $\frac{1+x}{1-x}=y^5$ ヨリ $x=\frac{y^5-1}{y^5+1}=\frac{31}{33}$ 或ハ $-\frac{31}{33}$.

3. $(x^{-1})^2-2(x^{-1})-8=0$ 即チ $(x^{-1}-4)(x^{-1}+2)=0$,
故ニ $x^{-1}=4$ 或ハ -2 故ニ $x=\frac{1}{4}$ 或ハ $-\frac{1}{2}$.

4. $(x^{-2}-1)(x^{-2}-9)=0$ ヨリ $x=\pm1$ 或ハ $\pm\frac{1}{3}$.

5. $x^{\frac{1}{4}}$ ヲ乘スレハ $6x=7x^{\frac{1}{2}}-2$ 故ニ $x=\frac{4}{9}$ 或ハ $\frac{1}{4}$.

6. $(x^{\frac{1}{n}}-2)(x^{\frac{1}{n}}-3)=0$ 故ニ $x=2^n$ 或ハ 3^n.

7. $(a^{4m}+1)(x-2x^{\frac{1}{2}}+1)=2(x+1)$;

故ニ $(a^{4m}-1)x-2(a^{4m}+1)x^{\frac{1}{2}}+a^{4m}-1=0$,

故ニ $x=\dfrac{a^{4m}+1\pm 2a^{2m}}{a^{4m}-1}=\dfrac{(a^{2m}\pm 1)^2}{a^{4m}-1}=\dfrac{a^{2m}\pm 1}{a^{2m}\mp 1}$.

8. $3^{2x}-10.3^x+9=0$ 即チ $(3^x-1)(3^x-9)=0$,

故ニ $3^x=1=3^0$, 或ハ $3^x=9=3^2$ 故ニ $x=0$ 或ハ 2.

9. $5^x+\dfrac{1}{5^x}=5+\dfrac{1}{5}$ 故ニ $\left(5^x-5\right)\left(1-\dfrac{1}{5.5^x}\right)=0$

故ニ $5^x=5^1$ 或ハ $5^x=5^{-1}$ 故ニ $x=1$ 或ハ -1.

10. $2^{2x+8}+1=2.2^4 2^x$ 故ニ $(2^{x+4})^2-2(2^{x+1})+1=0$,

即チ $(2^{x+1}-1)^2=0$ 故ニ $2^{x+4}=1=2^0$ 故ニ $x=-4$.

11. $2^3.2^{2x}-57=65.2^x-65$,

$8.2^{2x}-65.2^x+8=0$ 即チ $(8.2^x-1)(2^x-8)=0$,

故ニ $2^x=\dfrac{1}{8}=2^{-3}$ 或ハ $2^x=2^3$ 故ニ $x=-3$ 或ハ 3.

12. $2^{\frac{x}{2}}+\dfrac{1}{2^{\frac{x}{2}}}=2$, 故ニ $\left(2^{\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{2^{\frac{x}{2}}}\right)^2=0$,

故ニ $2^{\frac{x}{4}}-\dfrac{1}{2^{\frac{x}{4}}}=0$, 即チ $2^{\frac{x}{2}}=1=2^0$, 故ニ $x=0$.

13. $8.2^{x^2}=2^{2x+6}$ 即チ $2^{x^2+3}=2^{2x+6}$

故ニ $x^2+3=2x+6$ 故ニ $x=3$ 或ハ -1.

14. $a^{2x+2}+a^{2x}=a^{3x+1}+a^{x+1}$

故ニ $a^{2x+1}(a^x-a)-a^x(a^x-a)$,

即チ $(a^x-a)(a^{2x+1}-a^x)=0$, 故ニ $x=1$ 或ハ -1.

15. $x^{\frac{1}{q}}-\dfrac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}x^{\frac{p+q}{2pq}}+x^{\frac{1}{p}}=0$,

即チ $x^{\frac{1}{p}}\left\{x^{\frac{p-q}{pq}}-\dfrac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}x^{\frac{p-q}{2pq}}+1\right\}=0$,

之ニ由テ $x^{\frac{1}{p}}=0$, 故ニ $x=0$,

或ハ $x^{\frac{p-q}{pq}}-\dfrac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}x^{\frac{p-q}{2pq}}+1=0$,

即チ $x^{\frac{p-q}{pq}}-\dfrac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}x^{\frac{p-q}{2pq}}+\left(\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2=\left(\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)-1$,

故ニ $x^{\frac{p-q}{pq}}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\pm\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$,

$x^{\frac{p-q}{2pq}}=\dfrac{(a\pm b)^2}{a^2-b^2}=\dfrac{a\pm b}{a\mp b}$ 故ニ $x=\left(\dfrac{a\pm b}{a\mp b}\right)^{\frac{2pq}{p-q}}$

16. $x^{\frac{1}{m}}\{a^2b^2x^{\frac{m-n}{mn}}-4ab(ab)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{m-n}{2mn}}-(a-b)^2\}=0$,

之ニ由テ $x^{\frac{1}{m}}=0$, 故ニ $x=0$,

或ハ $a^2b^2x^{\frac{m-n}{mn}}-4ab(ab)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{m-n}{2mn}}+4ab=(a+b)^2$,

故ニ $a^2b^2x^{\frac{m-n}{2mn}}-2(ab)^{\frac{1}{2}}=\pm(a+b)$,

$x^{\frac{m-n}{2mn}}=\pm\left(\dfrac{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}{\sqrt{(ab)}}\right)^2$, 故ニ $x^{m-n}=\left(\dfrac{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}{\sqrt{(ab)}}\right)^{4mn}$,

故ニ $x=\left(\dfrac{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}{\sqrt{(ab)}}\right)^{\frac{4mn}{m-n}}$

17. 前邊ノ分母子チ x^{-4mn} ニテ除スレハ

$\dfrac{x^{(m-n)^2+4mn}+1}{x^{(m-n)^2+4mn}-1}=a^{\frac{r}{s}}$, 即チ $\dfrac{x^{(m+n)^2}+1}{x^{(m+n)^2}-1}=a^{\frac{r}{s}}$,

故ニ $x^{(m+n)^2}=\dfrac{a^{\frac{r}{s}}+1}{a^{\frac{r}{s}}-1}$, 即チ $x=\left(\dfrac{a^{\frac{r}{s}}+1}{a^{\frac{r}{s}}-1}\right)^{\frac{1}{(m+n)^2}}$

18. $x^{x\sqrt{x}} = (x^{\frac{3}{2}})^x$ 即チ $x^{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{3}{2}x}$

故ニ $x^{\frac{3}{2}} = \frac{3x}{2}$, 即チ $x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$ 故ニ $x = \frac{9}{4}$.

19. $y = \frac{ab}{x}$ ヲ第一ノ方程式ニ代用スレハ

$$a^m x^m + b^m\left(\frac{ab}{x}\right)^n = 2(ax)^{\frac{m}{2}}\left(b\times\frac{ab}{x}\right)^{\frac{n}{2}}$$ x^n ヲ乗スレハ

$$a^m x^{m+n} + a^n b^{m+n} = 2a^{\frac{m+n}{2}} b^n x^{\frac{m+n}{2}}$$

即チ $x^{m+n} - 2a^{\frac{n-m}{2}} b^n x^{\frac{m+n}{2}} + a^{n-m} b^{2n} = a^{n-m} b^{2n} - b^{m+n}$

故ニ $x^{\frac{m+n}{2}} - a^{\frac{n-m}{2}} b^n = \pm b^n (a^{n-m} - b^{m-n})^{\frac{1}{2}}$,

故ニ $x = b^{\frac{2n}{m+n}}\{a^{\frac{n-m}{2}} \pm (a^{n-m} - b^{m-n})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{2}{m+n}}$

$$y = \frac{ab}{x} = abx^{-1}$$

$$= abb^{\frac{-2n}{m+n}}\{a^{\frac{n-m}{2}} \pm (a^{n-m} - b^{m-n})^{\frac{1}{2}}\}^{-\frac{2}{m+n}}$$

$$= ab^{\frac{m-n}{m+n}}\{a^{\frac{n-m}{2}} \pm (a^{n-m} - b^{m-n})^{\frac{1}{2}}\}^{-\frac{2}{m+n}}$$

20. $x^{\frac{m}{n}}y = a^{\frac{m}{n}}bc^{\frac{1}{n}}$ 及ヒ $x^{\frac{m^2-n^2}{mn}} = a^{\frac{m-n}{n}} b^{\frac{m-n}{m}} c^{\frac{m-n}{mn}}$

故ニ $\frac{x^{\frac{m}{n}}y}{x^{\frac{n}{m}}y} = \frac{a^{\frac{m}{n}}bc^{\frac{1}{n}}}{ab^{\frac{n}{m}}c^{\frac{1}{m}}}$ 即チ $x^{\frac{n}{m}}y = ab^{\frac{n}{m}}c^{\frac{1}{m}}$,

故ニ $x = \left(a^{\frac{m-n}{n}} b^{\frac{m-n}{m}} c^{\frac{m-n}{mn}}\right)^{\frac{mn}{m^2-n^2}} = a^{\frac{m}{m+n}} b^{\frac{n}{m+n}} c^{\frac{1}{m+n}}$

$$y = a^{\frac{m}{n}}bc^{\frac{1}{n}}x^{-\frac{m}{n}}$$

$$= a^{\frac{m}{n}}bc^{\frac{1}{n}}\left(a^{\frac{m}{m+n}} b^{\frac{n}{m+n}} c^{\frac{1}{m+n}}\right)^{-\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{m+n}} b^{\frac{n}{m+n}} c^{\frac{1}{m+n}}$$

第拾五編

不盡數及虚數

不盡根

1. 不盡根數 即チ不盡數トハ $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ ノ如キ其根ヲ正シク得ル能ハサル數ヲイフ算術ニ於テ2ノ平方根ヲ求ムトアレハ $\sqrt{2} = 1{\cdot}4142\ldots\ldots$ トシテ $1{\cdot}4142\ldots\ldots$ カ2ノ平方根ナリトイフ然レ𪜈此平方根ハ小數以下多ク何位迄求ムルモ $(1{\cdot}4142\ldots\ldots)^2$ ハ殆ント2ニ近キノミニテ全ク2ト等シキ能ハス故ニ $\sqrt{2}$ ノ略近値ヲ得ルノミナリ此ノ如キ値ヲ不盡數トイヒ小數或ハ分數ニテ正シク其値ヲ表ハス能ハサルモノナリ。

代數學ニ於テハ實用ノ計算ニ用ヒサル以上ハ2ノ平方根ヲ表ハスニ單ニ $\sqrt{2}$ トス故ニ $(\sqrt{2})^2$ ハ2ニ等シトイフヿヲ得ヘシ然レ𪜈 $\sqrt{2}$ ノ値ハ前ノ如ク小數或ハ分數ニテ正シク表ハス能ハサルカ故ニ $\sqrt{2}$ ノ如キ不盡數ハ第二編,第三編ニ於テ證明セシ加減乘除ノ根原之公式 $a+(-b)=a-b$, $a\times b=b\times a$ ノ如キ原理ニ適用スルヿハ新ニ證明セサルヘカラス何トナレハ第二編,第三編ニ於テ證明セシモノハ a 及ヒ b ヲ整數或ハ分數ノ場合ニノミ用ヒタルヲ以テナリ故ニ不盡數ノ場合ニ於テモ此等ノ公式ニ適合スルヿヲ證定セサル以上ハ安心シテ不盡數ニ於ケル代數式ノ運算ヲ爲ス能ハサルナリ。

不盡數ノ値ハ正シク求ムル能ハサレ𪜈充分ニ眞ノ値ニ接近セシムルヿヲ得ヘシ故ニ $\sqrt{2}=1{\cdot}4142\ldots\ldots$ ノ如キモ小數以下ヲ無限ニ求ムル𪜈ハ $(1{\cdot}4142\ldots\ldots)^2$ ハ殆ント2ニ等シキニ至ルヘシ故ニ不盡數モ亦無限ニ之ヲ求ムル𪜈ハ小數トシテ表ハスヿヲ許シテモ差支エ無シ.

之ニ由テ $\sqrt{3}+\sqrt{2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$,

$$(a+b)\div\sqrt{5}=a\div\sqrt{5}+b\div\sqrt{5}.$$

2. 規約 $\sqrt{a}$ ノ如キハ a カ3ナル𪜈ハ不盡數ナリ若シ $a=4$ ナル𪜈ハ $\sqrt{a}=2$ トナリテ有理ナ數ナリ.

然レ𪜈此編ニテハ $\sqrt{a}$ $\sqrt{b}$ 等ノ如キハ凡ヘテ a 及ヒ b ヲ不完平方數トシ之ヲ不盡數ナリト假定セリ.

故ニ $\sqrt{a}$, $\sqrt{p}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt{(a+b)}$ 等ノ如キハ此編ニ於テハ不盡數ナリト思フヘシ.

3. 定理壹 $\sqrt{p}=A+B\sqrt{q}$ ナル能ハス.

何トナレハ若シ $\sqrt{p}=A+B\sqrt{q}$ トスレハ双方ヲ平方ニシテ

$$p=A^2+2AB\sqrt{q}+B^2q \quad \text{故ニ} \quad \sqrt{q}=\frac{p-A^2-B^2q}{2AB}$$

即チ不盡數 $\sqrt{q}$ ヲ分數ニテ表ハスヿトナル是レ不合理ナリ.

4. 定理貳 $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$ ナル𪜈

$$a=x \quad \text{及ヒ} \quad b=y.$$

何トナレハ $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$ ヨリ

$$\sqrt{b}=(a-x)+\sqrt{y} \quad \text{ヲ得ヘシ,}$$

然ルニ定理壹ニ由テ此相等式ハ成リ立ツ能ハス故ニ之ヲ成リ立タシメンニハ $a-x=0$ トセサルヘカラス,

故ニ $a=x$ 從フテ $\sqrt{b}=\sqrt{y}$ 即チ $b=y$.

5. 複不盡數式 有理項ト不盡數ヨリ成レル貳項式ヲ複不盡數式トイフ.

例ヘハ $a+\sqrt{b}$, $x-\sqrt{y}$ ノ如キハ複平方不盡式トイフ.

6. 相屬 貳ツノ複平方不盡數式ノ和及ヒ積カ有理ナル𪜈此兩代數式ヲ互ヒニ相屬式トイフ.

例ヘハ $a+\sqrt{b}$, $a-\sqrt{b}$ ハ互ヒニ相屬式ナリ,

即チ $(a+\sqrt{b})+(a-\sqrt{b})=2a$, $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b$.

二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根カ不盡數ナル𪜈互ヒニ相屬ナリ何トナレハ此二根ヲ α, β トスレハ

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a} \quad \text{ナルヲ以テナリ,}$$

再言スレハ $\alpha=-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$ 及ヒ

$$\beta=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} \quad \text{ハ互ヒニ相屬ナリ.}$$

7. 定理三 x ノ有理代數式ニ於テ x ノ代リニ $a+\sqrt{\beta}$ ヲ用ヒ其式カ0トナレハ x ノ代リニ $a-\sqrt{\beta}$ ヲ用フルトキニモ亦其式ハ0トナルヘシ.

x ノ有理整代數式ヲ $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots+k$ トス而シテ $x=a+\sqrt{\beta}$ トスル𪜈原式ハ

$$a(a+\sqrt{\beta})^n+b(a+\sqrt{\beta})^{n-1}+c(a+\sqrt{\beta})^{n-2}+\ldots\ldots k=0,$$

此式ニ於テ $a+\sqrt{\beta}$ ヲ n 方乘 $n-1$ 方乘 $n-2$ 方乘ニナシテ凡テ之ヲ括ル𪜈ハ有理項ト $\sqrt{\beta}$ ノ項ヲ有ツモノトナルヘシ而シテ有理項トナルモノハ各方乘ヲナス𪜈ニ $(\sqrt{\beta})^0$, $(\sqrt{\beta})^2$, $(\sqrt{\beta})^4$ 等ノ如キ $\sqrt{\beta}$ ノ偶數方乘ノ項ナリ又 $\sqrt{\beta}$ ヲ有ツ項ハ $(\sqrt{\beta})^1$, $(\sqrt{\beta})^3$, $(\sqrt{\beta})^5$ 等ノ如キ奇數方乘ヨリ成レルモノナリ,

今 $\sqrt{\beta}$ ノ偶數方乘ヨリ成レル有理ノ和ヲPトシ $\sqrt{\beta}$ ヲ有ツ凡テノ係數ヲQトスレハ $P+Q\sqrt{\beta}=0$ トナルヘシ,

即チ $Q\sqrt{\beta}=-P$ トナリ不盡數ヲ有理數ニテ表ハスヿトナリ不合理ナリ之ニ由テ

$$P=0, \quad \text{及ヒ} \quad Q=0.$$

次ニ原式ニ於テ $x=\alpha-\sqrt{\beta}$ トスレハ

$a(\alpha-\sqrt{\beta})^n+b(\alpha-\sqrt{\beta})^{n-1}+c(\alpha-\sqrt{\beta})^{n-2}+\dots\dots\dots+k$ ニ於テ有理項ハ前ノ如ク $(-\sqrt{\beta})$ ノ偶數方乘ナルカ故ニ P ニ等シク $\sqrt{\beta}$ ノ項ハ $(-\sqrt{\beta})$, $(-\sqrt{\beta})^3$, $(-\sqrt{\beta})^5$ 等ノ如キ奇數方乘ナルカ故ニ $-\mathrm{Q}$ トナルヘシ故ニ $\mathrm{P}-\mathrm{Q}\sqrt{\beta}$ トナルヘシ而シテ $\mathrm{P}=0$ 及ヒ $\mathrm{Q}=0$ ナルカ故ニ $\mathrm{P}-\mathrm{Q}\sqrt{\beta}$ トナルヘシ.

之ニ由テ $x=\alpha+\sqrt{\beta}$ ナル時原式カ0トナレハ

$x=\alpha-\sqrt{\beta}$ ナル時モ亦タ0トナル.

〔推論〕 此定理ノ証明ヨリシテ次ノ推論ヲ得.

$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots\dots\dots+k$ カ $x=\alpha+\sqrt{\beta}$ トスル時 $\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{\beta}$ トナレハ $x=\alpha-\sqrt{\beta}$ ナル時 $\mathrm{P}-\mathrm{Q}\sqrt{\beta}$ トナル.

例ヘハ $5x^3-6x^2+7x-8$ ニ於テ $x=2+\sqrt{3}$ トスレハ

$5(2+\sqrt{3})^3-6(2+\sqrt{3})^2+7(2+\sqrt{3})-8=94+58\sqrt{3}$,

故ニ $x=2-\sqrt{3}$ トスレハ原式 $=94-58\sqrt{3}$.

8. 定理三之別証

A ヲ原代數式トシ A ニ於テ x ノ代リニ $\alpha+\sqrt{\beta}$ ヲ用ヒ A カ0トナレハ x ノ代リニ $\alpha-\sqrt{\beta}$ ヲ用フルモ亦 A ハ0トナルヿノ別証ヲ示サントス.

A ヲ $\{x-(\alpha+\sqrt{\beta})\}\{x-(\alpha-\sqrt{\beta})\}$ ニテ除シタル商ヲ B トシ殘ヲ $\mathrm{C}x+\mathrm{D}$ トス但シ x ノ二次式ニテ除シタル殘式ハ一般ニ x ノ一次式ナルヲ以テ $\mathrm{C}x+\mathrm{D}$ トセシナリ.

然ルニ除法ノ性質ニ由テ

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}\{x-(\alpha+\sqrt{\beta})\}\{x-(\alpha-\sqrt{\beta})\}+\mathrm{C}x+\mathrm{D},$$

上ノ相等式ニ於テ $x=\alpha+\sqrt{\beta}$ トスレハ題意ニヨリ A ハ0トナルカ故ニ $0=\mathrm{B}\times0+\mathrm{C}(\alpha+\sqrt{\beta})+\mathrm{D}$,

即チ $\mathrm{C}\alpha+\mathrm{D}=-\mathrm{C}\sqrt{\beta}$ 定理試ニヨリテ不合理ナリ.

故ニ $\mathrm{C}=0$ トセサルヘカラス從フテ $\mathrm{D}=0$,

故ニ殘式 $\mathrm{C}x+\mathrm{D}$ ハ0ナリ,

即チ $\mathrm{A}=\mathrm{B}\{x-(\alpha+\sqrt{\beta})\}\{x-(\alpha-\sqrt{\beta})\}$ トナル,

故ニ $x=\alpha-\sqrt{\beta}$ トスレハ A ハ0トナルヘシ.

〔注意〕 $\{x-(\alpha+\sqrt{\beta})\}\{x-(\alpha-\sqrt{\beta})\}$ ヲ書キ改メテ $(x-\alpha)^2-\beta$ トシテ原式ヲ除スレハ次ノ如キ例ニ用ヒ得ヘシ.

〔例〕 $x=2+\sqrt{3}$ ナル時 $x^3-8x^2+10x-12$ ノ値如何.

$\{x-(2+\sqrt{3})\}\{x-(2-\sqrt{3})\}=(x-2)^2-3=x^2-4x+1$ ナルカ

故ニ $x^3-8x^2+10x-12$ ヲ x^2-4x+1 ニテ除シ(商ヲ B トス)

殘式 $-7x-8$ ヲ得タリ,

故ニ $x^3-8x^2+10x-12=\mathrm{B}(x^2-4x+1)-17x-8$,

故ニ $x=2+\sqrt{3}$ ナル時

$$x^3-8x^2+10x-12 \text{ ノ値 }=\mathrm{B}(0)-7(2+\sqrt{3})-8$$
$$=-22-7\sqrt{3}.$$

之ニ由テ $x=2-\sqrt{3}$ ナル時

$x^3-8x^2+10x-12$ ノ値 $=-22+7\sqrt{3}$ ヲ得ヘシ.

9. 複不盡數式之平方根

$a+\sqrt{b}$ ノ平方根ヲ求ムル方法ヲ示サントス.

$\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ トス而シテ双方ヲ平方ニスレハ

$a+\sqrt{b}=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$ 定理試ニ由テ

$$\alpha+\beta=a,$$

$2\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{b}$ 即チ $\alpha\beta=\dfrac{b}{4}$.

α, β ヲ二根トスル二次方程式ハ

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \text{ ナルカ故ニ}$$

$$x^2-ax+\frac{b}{4}=0 \text{ トナルヘシ.}$$

之ニ由テ $\alpha=\dfrac{1}{2}(a\pm\sqrt{a^2-b})$ ヲ得,

故ニ $\alpha=\dfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})$ 及ヒ $\beta=\dfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})$.

故ニ　$\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$

$$=\sqrt{\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}}.$$

同樣ニ　$\sqrt{(a-\sqrt{b})}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}}.$

〔注意〕 $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$ ニ於テ a ハ正數ナリ何トナレハ a ニ等シキ $\alpha+\beta$ ハ $(\sqrt{\alpha})^2+(\sqrt{\beta})^2$ ヨリ成レルヲ以テナリ。

又 a^2-b ハ完平方數ナラサレハ不都合ナリ何トナレハ a^2-b カ不完平方數ナル時ハ $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$ ニ等シキ後邊ノ二項ハ反テ原式ヨリ煩雜トナルヲ以テナリ。

〔第壹例〕 $16+2\sqrt{55}$ ノ平方根ヲ求ム

$\sqrt{(16+2\sqrt{55})}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ トス故ニ

$(16+2\sqrt{55}=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta},$

故ニ　$\alpha+\beta=16,\quad 2\sqrt{\alpha\beta}=2\sqrt{55}$ 即チ $\alpha\beta=55,$

$x^2-16x+55=0$ ニ於テ $x=11$ 或ハ $5,$

即チ $\alpha=11,\ \beta=5$ 故ニ $\sqrt{(16+2\sqrt{55})}=\sqrt{11}+\sqrt{5}.$

〔別法〕 $a^2-b=16^2-(2\sqrt{55})^2=36=6^2$ 即チ平方數ナルカ故ニ此式ノ平方根ハ得ラルヘキモノナリ。

依テ　$\sqrt{(16+2\sqrt{55})}=\sqrt{(11+2\sqrt{11}\times\sqrt{5}+5)}$

$$=\sqrt{(\sqrt{11}+\sqrt{5})^2}=\sqrt{11}+\sqrt{5}.$$

〔第貳例〕 $\sqrt{175}-\sqrt{147}$ ノ平方根ヲ求ム。

$\sqrt{(a\pm\sqrt{b})}$ ニ於テ a ハ有理ナラサルヘカラス故ニ

$\sqrt{(\sqrt{175}-\sqrt{147})}=\sqrt{\{\sqrt{7}(\sqrt{25}-\sqrt{21})\}}=\sqrt[4]{7}\sqrt{(5-\sqrt{21})}.$

之ニ由テ $\sqrt{(5-\sqrt{21})}=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ トスレハ $\alpha=\frac{7}{2},\ \beta=\frac{3}{2},$

之ニ由テ $\sqrt{(\sqrt{175}-\sqrt{147})}=\sqrt[4]{7}\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right).$

〔注意〕 $\sqrt{(5-\sqrt{21})}$ ノ如キハ容易ニ求メントセハ次ノ如スヘシ，

$$\sqrt{(5-\sqrt{21})}=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{21}}{2}}=\sqrt{\frac{7-2\sqrt{7}\sqrt{3}+3}{2}}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

〔第三例〕 $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ ノ平方根ヲ求ム。

$\sqrt{(a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ トス而シテ双方ヲ平方ニスレハ $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx},$

故ニ　$x+y+z=a,$

$2\sqrt{xy}=\sqrt{b},\qquad 2\sqrt{yz}=\sqrt{c},\qquad 2\sqrt{zx}=\sqrt{d},$

即チ　$xy=\frac{b}{4},\qquad yz=\frac{c}{4},\qquad zx=\frac{d}{4}$ ヨリ $x,\ y,\ z$ ヲ求メ其値カ $x+y+z=a$ ニ適合スレハ原式ノ平方根ヲ得ヘシ。

〔第四例〕 $21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15}$ ノ平方根ヲ求ム。

$\sqrt{(21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$ トスレハ

$21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15}=x+y+z-2\sqrt{yz}+2\sqrt{xy}-2\sqrt{xz},$

故ニ　$x+y+z=21,$

$2\sqrt{yz}=4\sqrt{5},\qquad 2\sqrt{xy}=8\sqrt{3},\qquad 2\sqrt{xz}=4\sqrt{15},$

即チ　$yz=20,\qquad xy=48,\qquad xz=60$ ヨリ $x,\ y,\ z$ ヲ求ムレハ

$x=12,\qquad y=4,\qquad z=5,$

而シテ　$x+y+z=12+4+5=21$ トナリ適合スルカ故ニ

$\sqrt{(21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15})}=\sqrt{12}+\sqrt{4}-\sqrt{5}$

$$=2\sqrt{3}+2-\sqrt{5}.$$

若シ $x,\ y,\ z$ ノ値カ $x+y+z=21$ ナル方程式ニ適合セサル時ハ原式ノ平方根ヲ得ル能ハスシテ原式ヲ $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$ ト定メタルコハ不合理トナルニ至ルヘシ。

10. 複不盡數式之立方根

$a+\sqrt{b}$ ノ立方根ヲ求メントス。

$\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=x+\sqrt{y}$ トス而シテ双方ヲ立方ニスレハ

$a+\sqrt{b}=x^3+3xy+(3x^2+y)\sqrt{y},$

故ニ　$a=x^3+3xy$　　$\sqrt{b}=(3x^2+y)\sqrt{y}$,

故ニ　$a-\sqrt{b}=x^3+3xy-(3x^2+y)\sqrt{y}=(x-\sqrt{y})^3$,

之ニ由テ　$\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}=x-\sqrt{y}$　トナル．

故ニ　$a^2-y=(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})=\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=\sqrt[3]{(a^2-b)}$.

但シ a^2-b カ完立方數ナラサレハ原式ノ立方根ヲ得ス．

〔例〕 $72+32\sqrt{5}$ ノ立方根ヲ求ム．

$\sqrt[3]{(72+32\sqrt{5})}=x+\sqrt{y}$,

故ニ　$x^3+3xy=72$,

及ヒ　$x^2-y=\sqrt[3]{(72^2-32^2\times 5)}=4$,

即チ　$y=x^2-4$　之ヲ　$x^3+3xy=72$ ニ代用スレハ

$x^3+3x(x^2-4)=72$　即チ　$x^3-3x=18$,

視察ニ由テ　$x^3-3x=18$　ノ一根ハ　$x=3$　ナリ，

故ニ　$y=3^2-4=5$,

之ニ由テ　$\sqrt[3]{(72+32\sqrt{5})}=3+\sqrt{5}$.

$x^3-3x=18$ ハ三次方程式ナレ圧原式ノ立方根ヲ得ラルヘキ場合ニ於テハ此三次方程式ノ一根ハ容易ニ見出シ得ヘキ有理數ナリ．

例題五拾四

次ノ各ヲ最簡ニセヨ．

1. $\sqrt{(6+\sqrt{11})}$.　2. $\sqrt{(16+6\sqrt{7})}$.　3. $\sqrt{(12-6\sqrt{3})}$.

4. $\sqrt{(280+56\sqrt{21})}$.　5. $\sqrt{(-13+\sqrt{12})}$.　6. $\sqrt{(3\sqrt{5}-5)}$.

7. $\sqrt{\{6-4\sqrt{3}+\sqrt{(16-8\sqrt{3})}\}}$.　8. $\sqrt{\{2a+2\sqrt{(a^2-x^2)}\}}$.

9. $\sqrt{\{3x-1+2\sqrt{(2x^2+x-6)}\}}$.　10. $\sqrt[4]{(97-56\sqrt{3})}$.

11. $\dfrac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})}-\sqrt{2}}{\sqrt{(3-2\sqrt{2})}+\sqrt{2}}$.　12. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{45}}{\sqrt{2}+\sqrt{(7-2\sqrt{10})}}$.

13. $\sqrt{(11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6})}$.

14. $\sqrt{(16-2\sqrt{20}-2\sqrt{28}+2\sqrt{35})}$.

15. $\sqrt{(a+x+\sqrt{2ax+x^2})}$.　16. $\sqrt{\{1+(1-a^2)^{\frac{1}{2}}\}}$.

17. $\sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})}$.　18. $\sqrt[3]{(38+17\sqrt{5})}$.　19. $\sqrt[3]{(99-70\sqrt{2})}$.

20. $\sqrt[3]{(38\sqrt{14}-100\sqrt{2})}$.　21. $\sqrt[3]{(54\sqrt{3}+41\sqrt{5})}$.

例題五拾四解答

1. $\sqrt{\dfrac{11}{2}}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.　2. $3+\sqrt{7}$.　3. $3-\sqrt{3}$.　4. $14+2\sqrt{21}$.

5. $\sqrt{(-3+\sqrt{12})}=\sqrt{\{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})\}}=\sqrt[4]{3}\sqrt{(2-\sqrt{3})}$,

但シ　$\sqrt{(2-\sqrt{3})}=\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{3}+1}{2}}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}$,

之ニ由テ原式　$=\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)\sqrt[4]{3}$.

6. $\sqrt{(3\sqrt{5}-5)}=\sqrt{\{\sqrt{5}(3-\sqrt{5})\}}=\sqrt[4]{5}\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)$.

7. $\sqrt{\{6-4\sqrt{3}+\sqrt{(2\sqrt{3}-2)^2}\}}=\sqrt{\{6-4\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-2)\}}$
$=\sqrt{\{4-2\sqrt{3}\}}=\sqrt{3}-1$.

8. $\sqrt{(a+x)}+\sqrt{(a-x)}$.　9. $\sqrt{(2x-3)}+\sqrt{(x+2)}$.

10. $\sqrt[4]{(97-56\sqrt{3})}=\sqrt[4]{(49-56\sqrt{3}+48)}=\sqrt{(7-4\sqrt{3})}$
$=\sqrt{(4-4\sqrt{3}+3)}=2-\sqrt{3}$.

11. 原式 $=\dfrac{(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}-1}=\dfrac{2\sqrt{2}+1}{7}$.

12. 原式 $=\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{\sqrt{2}+(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}+15}{5}$.

13. $\sqrt{(11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ トスレハ

$11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}$,

$\therefore$　$x+y+z=11$,　$\sqrt{xy}=3\sqrt{2}$,　$\sqrt{yz}=2\sqrt{3}$,　$\sqrt{zx}=\sqrt{6}$,

最後ノ三方程式ヨリ　$x=3$,　$y=6$,　$z=2$,

而シテ　$x+y+z=3+6+2=11$.

之ニ由テ　原式 $=\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

14. $\sqrt{7}+\sqrt{5}-2$.　15. $\sqrt{\dfrac{2a+x}{2}}+\sqrt{\dfrac{x}{2}}$.

16. $\sqrt{\left\{1+\frac{1}{\sqrt{(1-a^2)}}\right\}}=\sqrt{\left\{\frac{1}{\sqrt{(1-a^2)}}\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)\right\}}$

$=\frac{1}{\sqrt[4]{(1-a^2)}}\sqrt{\frac{2+2\sqrt{1-a^2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt[4]{(1-a^2)}}\sqrt{\frac{1+a+2\sqrt{1-a^2}+1-a}{2}}$

$=\frac{1}{\sqrt[4]{(1-a^2)}}\left(\sqrt{\frac{1+a}{2}}+\sqrt{\frac{1-a}{2}}\right).$

17. $1+\sqrt{3}.$ 18. $2+\sqrt{5}.$ 19. $3-2\sqrt{2}.$

20. $\sqrt[3]{(38\sqrt{14}-100\sqrt{2})}=\sqrt[3]{\{-2\sqrt{2}(50-19\sqrt{7})\}}$

$=-\sqrt{2}\sqrt[3]{(50-19\sqrt{7})}.$

但シ $\sqrt[3]{(50-19\sqrt{7})}=x-\sqrt{y}$ トスレハ

$\sqrt[3]{(50+19\sqrt{7})}=x+\sqrt{y},$

$\therefore\ x^2-y=\sqrt[3]{(50^2-19^2\times 7)}=-3 \qquad \therefore\ y=x^2+3,$

又 $50-19\sqrt{7}=x^3+3xy-(3x^2+y)\sqrt{y},$

$\therefore\ x^3+3xy=50$ 即チ $x^3+3x(x^2+3)=50,$

即チ $4x^3+9x=50 \qquad \therefore\ x=2, \qquad y=2^2+3=7,$

之ニ由テ 原式 $=-\sqrt{2}(2-\sqrt{7})=\sqrt{14}-2\sqrt{2}.$

21. $\sqrt[3]{(54\sqrt{3}+41\sqrt{5})}=\sqrt[3]{\left\{3\sqrt{3}\left(18+\frac{41}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right\}}$

$=\sqrt{3}\sqrt[3]{\left(18+\frac{41}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)}.$

$\sqrt[3]{\left(18+\frac{41}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)}=x+\sqrt{y}$ トスレハ

$\sqrt[3]{\left(18-\frac{41}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)}=x-\sqrt{y},$

$\therefore\ x^2-y=\sqrt[3]{\left(18^2-\frac{41^2\times 5}{27}\right)}=\frac{7}{3} \qquad \therefore\ y=x^2-\frac{7}{3},$

又 $x^3+3xy=18$ ヨリ $x^3+3x\left(x^2-\frac{7}{3}\right)=18,$

$\therefore\ x=2, \qquad y=\frac{5}{3}.$

之ニ由テ 原式 $=\sqrt{3}\left(2+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)=2\sqrt{3}+\sqrt{5}.$

第拾六編

比及比例

比

1. 比(*Ratio*) トハ兩數ノ大小ノ關係ヲ示スモノニシテ甲數カ乙數ノ何倍或ハ何部分ナルヿヲ求ムル法ナリ而シテ其何倍或ハ何部分ヲ稱シテ甲カ乙ニ於ケル比ノ値トイフ.

例ヘハ a カ b ニ於ケル比ヲ $a:b$ ト記シ,

其値ヲ $\frac{a}{b}$ ト記ス即チ $a:b=\frac{a}{b},$

故ニ a ハ b ノ $\frac{a}{b}$ 倍或ハ $\frac{a}{b}$ 部分ナリ.

例ヘハ $12:6=\frac{12}{6}=2$ 即チ 12ハ6ノ二倍,

又 $6:12=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ 即チ 6ハ12ノ二分ノ壹.

〔注意〕 兩數ノ比ハ兩數トモニ同符號ニシテ且ツ同種ノ單位ナルヿヲ要ス.

2. 比之名稱 $a:b$ ニ於テ a ヲ比ノ前項トイヒ b ヲ後項トイフ.

$a:b$ 及ヒ $c:d$ ノ複比ハ $a\times c:b\times d$ ナリ.

$a:b$ ノ平方比ハ $a^2:b^2$ ナリ立方比ハ $a^3:b^3$ ナリ,

又平方根比ハ $\sqrt{a}:\sqrt{b}$ ナリ.

3. 可通度 兩數ノ比カ整數ニテ表ハシ得ヘキモノヲ可通度トイフ. 例ヘハ $7\frac{1}{2}:3\frac{1}{3}=\frac{7\frac{1}{2}}{3\frac{1}{3}}=\frac{9}{4}=9:4$ ノ如シ.

4. 不可通度 兩數ノ比カ整數ニテ表ハスヿヲ得サルモノヲ不可通度トイフ.

例ヘハ $\sqrt{5}:4=\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{2\cdot236068\ldots\ldots}{4}=\cdot559017\ldots\ldots$

故ニ $\sqrt{5}:4>559017:1000000$ 及ヒ $\sqrt{5}:4<559018:100000$

故ニ $\sqrt{5}:4$ ノ値ヲ $559017:1000000$ トスレハ $\cdot000001$ ヨリ小ナル差ヲ生ス故ニ $\sqrt{5}:4$ ハ整數ニテ表ハス能ハス而シテ之ヲ不可通度比トイフ然レトモ $\sqrt{5}:4$ ヲ $559017:1000000$ ニテ表ハストキハ單位ノ百萬分ノ一以下ノ差アリ故ニ出來ル丈ケ精密ノ値ニテ之ヲ示スヿヲ得ヘシ.

之ニ由テ不可通度比モ亦タ可通度比ノ如ク考ヘテ可ナリ.

5. 定理 比ノ兩項ニ同正數量ヲ加フレハ1ニ近ツク.

例ヘハ $\frac{a}{b}$ ヨリモ $\frac{a+x}{b+x}$ ハ1ニ近カシ.

$$\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{x(a-b)}{b(b+x)},$$

而シテ $a>b$ ナルトキ $a-b$ ハ正ナルカ故ニ $\frac{a}{b}>\frac{a+x}{b+x}$,

$a<b$ ナルトキ $a-b$ ハ負ナルカ故ニ $\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}$.

故ニ $\frac{a}{b}$ カ1ヨリ大ナルトキ $\frac{a+x}{b+x}$ ハ $\frac{a}{b}$ ヨリ小トナリ $\frac{a}{b}$ カ1ヨリ小ナルトキ $\frac{a+x}{b+x}$ ハ大トナル,

而シテ $\frac{a+x}{b+x}$ ハ $\frac{a}{b}$ カ1ヨリ大或ハ小ナルニ從フテ $\frac{a}{b}$ ヨリモ減シテ1ニ近ツキ或ハ増シテ1ニ近カツクヘシ.

例題五拾五

1. $16:5$ 及ヒ $a:b$ ノ複比如何
2. $x+7:2(x+14)$ カ $5:8$ ノ平方比ニ等シキトキ x ヲ求ム.
3. $5:37$ ノ各項ニ x ヲ加ヘテ $1:3$ ニ等シクセントス然ルトキ x ヲ求ム.
4. $5:37$ ノ各項ニ最小整正數ヲ加ヘテ $1:3$ ヨリ大ナラシメントス其整正數ヲ求メヨ.
5. $x:y$ カ $3:4$ ニ等シキトキ $7x-4y:3x+y$ ノ値如何.
6. $15(2x^2-y^2)=7xy$ ニ於テ $x:y$ ノ値ヲ求ム.
7. $\frac{b}{a+b}=\frac{b+c-a}{a+b-c}=\frac{a-b+c}{2a+2b+c}$ ナルトキ $a:b:c$ ノ値ヲ求ム.
8. $\frac{y}{x-z}=\frac{y+x}{z}=\frac{x}{y}$ ニ於テ $x:y:z$ ノ値ヲ求ム.

例題五拾五解答

1. $16a:5b$. 2. 18. 3. 11.

4. $\frac{5+x}{37+x}>\frac{1}{3}$, $37+x$ ハ正數ナルカ故ニ

$3(5+x)>37+x$ $\therefore$ $2x>22$, $x>11$ $\therefore$ $x=12$.

5. $x:y=3:4$, $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$ $\therefore$ $y=\frac{4}{3}x$

$$\frac{7x-4y}{3x+y}=\frac{7x-4\times\frac{4}{3}x}{3x+\frac{4}{3}x}=\frac{5x}{13x}=\frac{5}{13}.$$

6. $30x^2-7xy-15y^2=0$ 即チ $(6x-5y)(5x+3y)=0$.

$\therefore$ $6x-5y=0$, $5x+3y=0$,

$\therefore$ $x:y=5:6$, 而シテ $x:y=-3:5$ ハ之ヲ省ク.

7. $\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{b+c-a}{a+b-c}=\dfrac{a-b+c}{2a+2b+c}$ ヨリ

$$\frac{b}{a+b}=\frac{(b+c-a)+(a-b+c)}{(a+b-c)+(2a+2b+c)}=\frac{2c}{3(a+b)}\quad \therefore\ b=\frac{2}{3}c.$$

又 $\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{b-(b+c-a)}{(a+b)-(a+b-c)}=\dfrac{a-c}{c}$ ヨリ $\dfrac{\frac{2}{3}c}{a+\frac{2}{3}c}=\dfrac{a-c}{c}$,

$2c^2=(3a+2c)(a-c)$, 即チ $(3a-4c)(a+c)=0$,

$\therefore\ a=\dfrac{4}{3}c\qquad \therefore\ a:b:c=\dfrac{4}{3}c:\dfrac{2}{3}c:c=4:2:3.$

8. $\dfrac{y}{x-z}=\dfrac{y+x}{z}=\dfrac{x}{y}$ ニ於テ

$$\frac{x}{y}=\frac{y+(y+x)+x}{(x-z)+z+y}=\frac{2(x+y)}{x+y}=2\quad \therefore\ x=2y.$$

又 $\dfrac{y}{x-z}=2$ 即チ $\dfrac{y}{2y-z}=2\quad \therefore\ z=\dfrac{3}{2}y.$

之ニ由テ $x:y:z=2y:y:\dfrac{3}{2}y=4:2:3.$

比　　例

6. 比例 (*Proportion*) 兩比ノ相等シキ𪜈此四数量ハ比例ヲナストイフ.

例ヘハ兩比 $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$ カ相等シク即チ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ナルヘキ

a, b, c, d ハ比例ヲナシ $a:b=c:d$ トス.

a, d ヲ外項及ヒ b, c ヲ中項トイフ.

〔原則〕比例ノ外項ノ積ハ中項ノ積ニ等シ.

即チ $ad=bc$ 上ノ分数ヨリ直チニ導ヒキ得ラルヘシ.

7. 連比例 a, b, c, d 等ノ諸数量アリテ $a:b$, $b:c$, $c:d$ 等カ相等シキ𪜈此諸数量ハ連比例ヲナストイフ.

例ヘハ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$ 等ノ如シ.

三数量ノ連比例ヲナス𪜈ハ次ノ如シ,

$a:b=b:c$ 即チ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$,

之ニ由テ $b^2=ac$, $\therefore\ b=\pm\sqrt{ac}.$

又 $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{c}$ 即チ $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{a}{c}\quad \therefore\ a^2:b^2=a:c.$

四数量カ連比例ヲナス𪜈 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$ ヨリ

$\dfrac{a}{b}\times\dfrac{a}{b}\times\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{c}\times\dfrac{c}{d}\quad \therefore\ \dfrac{a^3}{b^3}=\dfrac{a}{d}\quad \therefore\ a^3:b^3=a:d.$

五数量カ連比例ヲナス𪜈 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{d}{e}$ ヨリ

$a^4:b^4=a:e.$

8. 定理 $a:b=m:n$ 及ヒ $x:y=p:q$ ナル𪜈

$$ax:by=mp:nq.$$

何トナレハ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{m}{n}$ 及ヒ $\dfrac{x}{y}=\dfrac{p}{q}$ ヨリ $\dfrac{ax}{by}=\dfrac{mp}{nq}$,

$$\therefore\ ax:by=mp:nq.$$

9. 比例之四法 $a:b=c:d$ ナル𪜈

(1) $b:a=d:c$, 　[反法]

(2) $a:c=b:d$, 　[換法]

(3) $a+b:b=c+d:d$, 　[合法]

(4) $a-b:b=c-d:d$. 　[分法]

以上ハ容易ニ証シ得ラルヘシ.

9. 比例之兩定義

[代數學ノ定義] 四數量 a, b, c, d カ比例ヲナス件、

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

[幾何學ノ定義] 四數量 a, b, c, d カ比例ヲナス件

$$pa \gtreqless qb \text{ ナルニ從フテ } pc \gtreqless qd,$$

但シ p 及ヒ q ハ任意ノ正整數.

〔第壹〕代數學ノ定義ヨリ幾何學ノ定義ニ導ヒクノ法.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ノ双方ニ $\frac{p}{q}$ ヲ乘スレハ $\frac{pa}{qb}=\frac{pc}{qd}$,

故ニ $pa>qb$ ナル件 $pc>qd$, $pa=qb$ ナル件 $pc=qd$,

又 $pa<qb$ ナル件 $pc<qd$.

〔第貳〕幾何學ノ定義ヨリ代數學ノ定義ニ導ヒクノ法.

今 $pa \gtreqless qq$ ナル件 $pc \gtreqless qd$,

然ル件 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナラズトシ $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ トスレハ $\frac{q}{p}$ ヲ次ノ如ク假定ス即チ $\frac{a}{b}>\frac{q}{p}>\frac{c}{d}$,

之ニ由テ $pa>qb$ ナル件 $pc<qd$ トナル,

又 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ トシ $\frac{q}{p}$ ヲ次ノ如ク假定ス即チ $\frac{a}{b}<\frac{q}{p}<\frac{c}{d}$,

之ニ由テ $pa<qb$ ナル件 $pc>qd$.

何レモ假設ニ反ス故ニ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナラサルヘカラス.

10. 不可通度之比例

$\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$, $\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$ ノ如ク各比ヲ正整數 m, n ニテ示シ得ヘキ件 $a:b=c:d$.

若シ兩比カ不可通度ナル件 b ノ n 等分ヲ β トシ β ハ a ノ m 等分ヨリ大ニシテ $m+1$ 等分ヨリ小ナリトスレハ

$$b=n\beta, \quad (m+1)\beta>a>m\beta,$$

然ル件
$$\frac{m+1}{n}>\frac{a}{b}>\frac{m}{n},$$

即チ $\frac{a}{b}$ ハ $\frac{m}{n}$ ト $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$ トノ間ニアリ.

同法ニテ d ノ n 等分ヲ δ トシ c ハ δ ノ $m+1$ 倍ヨリ小ニシテ m 倍ヨリ大ナリトスレハ

$$d=n\delta, \quad (m+1)\delta>c>m\delta,$$

然ル件
$$\frac{m+1}{n}>\frac{c}{d}>\frac{m}{n},$$

即チ $\frac{c}{d}$ ハ $\frac{m}{n}$ ト $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$ トノ間ニアリ.

故ニ $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ ハ $\frac{1}{n}$ ヨリ大ナラス.

而シテ n ハ任意ニ増大トナスコトヲ得ヘシ故ニ n ヲ増シテ極限ニ至レハ $\frac{1}{n}$ ハ殆ント0トナリ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ トナルヘシ.

例題五拾六

$a:b=c:d$ ナル件次ノ證ヲ求ム.

1. $a^2c+ac^2 : b^2d+d^2=(a+c)^3 : (b+d)^3$.
2. $pa^2+qb^2 : pa^2-pb^2=pc^2+qd^2 : pc^2-qd^2$.
3. $a-c : b-d=\sqrt{(a^2+c^2)} : \sqrt{(b^2+d^2)}$.
4. $\sqrt{(a^2+c^2)} : \sqrt{(b^2+d^2)}=\sqrt{(ac+\frac{c^3}{a})} : \sqrt{(bd+\frac{d^3}{b})}$.
5. $a^2+b^2 : ab=c^2+d^2 : cd$.

6. $a(a+b+c+d)=(a+b)(a+c)$.

7. $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{d}\right)^2=\frac{2ac}{bd}$.

8. $a^2+3ab+b^2 : c^2+3cd+d^2 :: 2ab+3b^2 : 2cd+3d^2$.

$a:b=b:c$ ナルトキ次ノ證ヲ示セ.

9. $a-b : b-c = b : c$.　　10. $a : c = a^2+b^2 : b^2+c^2$.

11. $a+b+c : a-b+c=(a+b+c) : a^2+b^2+c^2$.

12. $\frac{(b+c)^2}{b-c}+\frac{(c+a)^2}{c-a}+\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{4b}{a-c}(a+b+c)$.

a, b, c, d カ順次ニ連比例ヲナス𪜈次ノ證ヲ示セ.

13. $(a-c)(b-d)-(a-d)(b-c)=(b-c)^2$.

14. $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{cd}=\sqrt{(a+b+c)(b+c+d)}$.

15. $a:b=c:d$ ナル𪜈 $\frac{a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}}{a^{-2n}+b^{-2n}+c^{-2n}+d^{-2n}}=(abcd)^n$.

16. $x:y:z=b+c-a : c+a-b : a+b-c$ ナル𪜈

$(a+b+c)(yz+zx+xy)=(x+y+z)(ax+by+cz)$.

17. $(bcd+cda+dab+abc)^2=abcd(a+b+c+d)^2$ ナル𪜈
a, b, c, d ハ任意ノ順序ニテ比例ヲナス.

18. $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$

$=(a+b+c+d)(abc+bcd+cda+dab)$ ナル𪜈 $a:b=d:c$.

19. $b+c+d : c+d+a=d+a+b : a+b+c$ ナル𪜈

$a^3-d^3 : b^3-c^3 = a-d : b-c$.

20. $\frac{l}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{m}{\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{n}{\sqrt{c}-\sqrt{a}}=0$,

$\frac{l}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{m}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{n}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=0$

ナル𪜈 $(a-b)(c-\sqrt{ab}) : (b-c)(a-\sqrt{bc}) : (c-a)(b-\sqrt{ca})$

$=l:m:n$,

21. $a:b=c:d=e:f$ ナル𪜈

$27(a+b)(c+d)(e+f)=bdf\left(\frac{a+b}{b}+\frac{c+d}{d}+\frac{e+f}{f}\right)^3$

22. $x^2(y-z)=a^3$,　$y^2(z-x)=b^3$　$z^2(x-y)=c^3$ ナル𪜈

$\frac{x}{y}=\frac{k^3-a^3}{k^3+b^3}$,　$\frac{y}{z}=\frac{k^3-b^3}{k^3+c^3}$,　但シ $k=\sqrt{-\frac{a^3b^3c^3}{a^3+b^3+c^3}}$.

23. 酒ヲ充容セシ一樽アリ此内ヨリ9斗ヲ出シ其代リニ水ヲ以テ之ヲ充タス又其内ヨリ9斗ヲ出シ前ノ如ク水ヲ充タス然ル𪜈今樽中ノ酒ト水ノ量ノ比ハ16:9ナリ最初樽中ノ量如何.

24. 四ツノ正數量カ連比例ヲナス𪜈第一及ヒ第四ノ差ハ他ノ兩數ノ差ノ三倍ヨリ小ナリ.

25. 某國ニ於テ茶ノ輸出高ハ珈琲ニ5倍ス若シ茶カ尚ホ百分ノx多ク珈琲カ百分ノy多ク輸出スレハ其總額ハ百分ノ$7a$ヲ増スヘシ又茶カ百分ノy,珈琲カ百分ノx増セハ其總額ハ百分ノ$3a$ヲ増ストイフx及ヒyノ比如何.

26. 青銅器アリ其ニ含ム所ハ$\frac{91}{100}$ヲ銅,$\frac{6}{100}$ヲ亞鉛,$\frac{3}{100}$ヲ錫トス又銅及ヒ銀ノ二種ニテ成レル球アリ之ト此青銅器トヲ鎔冶シタルニ其内ニ銅$\frac{88}{100}$,亞鉛$\frac{4.875}{100}$,錫$\frac{7.125}{100}$ヲ含ミタリトイフ球ノ内ニ含ミタル銅及ヒ銀ノ比如何.

27. 金剛石ノ價ハ其重サノ平方ニ比例ス今等重ノ三ツノ指輪アリ金剛石ト金ヨリ成リ其價順次ニa圓,b圓,c圓ニシテ金剛石ノ重サハ順次ニ3, 4, 5から一さナリ又各ノ細工ノ費用ハ相同シ1から一さノ金剛石ノ價如何.

例題五拾六解答

1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ トスレハ $k=\frac{a+c}{b+d}$,

$\therefore\ k^3=\frac{(a+c)^3}{(b+d)^3}=\frac{a+c}{b+d}\times\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a^2c+ac^2}{b^2d+bd^2}$,

之ニ由テ　$a^2c+ac^2 : b^2d+bd^2=(a+c)^3 : (b+d)^3$.

4. $a^2 : b^2 = c^2 : d^2,\quad a^2+c^2 : b^2+d^2 = a^2 : b^2,$

又 $\frac{c}{a}\left(a^2+c^2\right) : \frac{d}{b}\left(b^2+d^2\right) = \frac{c}{a}\times a^2 : \frac{d}{b}\times b^2,$

即チ $ac+\frac{c^3}{a} : bd+\frac{d^3}{b} = ac : bd = a^2 : b^2,$

之ニ由テ $a^2+c^2 : b^2+d^2 = ac+\frac{c^3}{a} : bd+\frac{d^3}{b}.$

6. $a : b = c : d$ ヨリ $a+b : c+d = a : c,$

又 $a+b+c+d : a+c = a+b : a,$

$$\therefore\quad a(a+b+c+d) = (a+b)(a+c).$$

8. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=$ K トスレハ $a = b\mathrm{K},\quad c = d\mathrm{K},$

$$\frac{a^2+3ab+b^2}{c^2+3cd+d}=\frac{b^2\mathrm{K}^2+3b^2\mathrm{K}+b^2}{d^2\mathrm{K}^2+3d^2\mathrm{K}+d^2}=\frac{b^2}{d^2}\times\frac{2\mathrm{K}+3}{2\mathrm{K}+3}$$

$$=\frac{2b\mathrm{K}b+3b^2}{2d\mathrm{K}d+3d^2}=\frac{2ab+3b^2}{2cd+3d^2}.$$

10. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=$ K トスレハ $\mathrm{K}^2=\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{c},$

即チ $\mathrm{K}^2=\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}.$

11. $a : b = b : c$ ヨリ $b^2 = ac,$

$$\frac{a+b+c}{a-b+c}=\frac{(a+b+c)^2}{(a-b+c)(a+b+c)}=\frac{(a+b+c)^2}{(a+c)^2-b^2}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{a^2+2ac+c^2-b^2}=\frac{(a+b+c)^2}{a^2+2b^2+c^2-b^2}=\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

12. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=$ K トスレハ $b = c\mathrm{K},\quad a = b\mathrm{K} = c\mathrm{K}^2,$

$$\frac{(b+c)^2}{b-c}+\frac{(c+a)^2}{c-a}+\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{(c\mathrm{K}+c)^2}{c\mathrm{K}-c}+\frac{(c+c\mathrm{K}^2)^2}{c-c\mathrm{K}^2}+\frac{(c\mathrm{K}^2+c\mathrm{K})^2}{c\mathrm{K}^2-c\mathrm{K}}$$

$$=\frac{c(\mathrm{K}+1)^2}{\mathrm{K}-1}-\frac{c(\mathrm{K}^2+1)^2}{\mathrm{K}^2-1}+\frac{c\mathrm{K}(\mathrm{K}+1)^2}{\mathrm{K}-1}$$

$$=\frac{c}{\mathrm{K}^2-1}\left\{(\mathrm{K}+1)^4-(\mathrm{K}^2+1)^2\right\}=\frac{4c\mathrm{K}}{\mathrm{K}^2-1}(\mathrm{K}^2+\mathrm{K}+1).$$

$$=\frac{4c\mathrm{K}}{c\mathrm{K}^2-c}(c\mathrm{K}^2+c\mathrm{K}+c)=\frac{4b}{a-c}(a+b+c).$$

13. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=$ K トスレハ

$c = d\mathrm{K},\quad b = c\mathrm{K} = d\mathrm{K}^2,\quad a = b\mathrm{K} = d\mathrm{K}^3,$

$(a-c)(b-d)-(a-d)(b-c)$

$=(d\mathrm{K}^3-d\mathrm{K})(d\mathrm{K}^2-d)-(d\mathrm{K}^3-d)(d\mathrm{K}^2-d\mathrm{K})$

$=d^2\mathrm{K}(\mathrm{K}^2-1)^2-d^2\mathrm{K}(\mathrm{K}^3-1)(\mathrm{K}-1)$

$=d^2\mathrm{K}(\mathrm{K}-1)^2\{(\mathrm{K}+1)^2-(\mathrm{K}^2+\mathrm{K}+1)\}=d^2\mathrm{K}^2(\mathrm{K}-1)^2$

$=(d\mathrm{K}^2-d\mathrm{K})^2=(b-c)^2.$

14. $\mathrm{K}=\frac{ab}{b^2}=\frac{bc}{c^2}=\frac{cd}{d^2}=\frac{a^2}{ab}=\frac{b^2}{bc}=\frac{c^2}{cd},$

$$\therefore\quad \sqrt{\mathrm{K}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}=\frac{\sqrt{bc}}{c}=\frac{\sqrt{cd}}{d}=\frac{a}{\sqrt{ab}}=\frac{b}{\sqrt{bc}}=\frac{c}{\sqrt{cd}},$$

即チ $\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{cd}}{b+c+d}=\frac{a+b+c}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{cd}},$

$$\therefore\quad \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{cd}=\sqrt{(a+b+c)(b+c+d)}.$$

15. $ad = bc,$

$$\frac{a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}}{\frac{1}{a^{2n}}+\frac{1}{d^{2n}}+\frac{1}{c^{2n}}+\frac{1}{b^{2n}}}=\frac{a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}}{\frac{d^{2n}+a^{2n}}{(ad)^{2n}}+\frac{c^{2n}+b^{2n}}{(bc)^{2n}}}$$

$$=\frac{a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}}{\frac{a^{2n}+d^{2n}}{(ad)^{2n}}+\frac{b^{2n}+c^{2n}}{(ad)^{2n}}}=(ad)^{2n}=(adad)^n=(abcd)^n.$$

16. $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}=\mathrm{K},$

$$\mathrm{K}=\frac{x+y+z}{(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)}=\frac{x+y+z}{a+b+c}.$$

又 $\mathrm{K}=\frac{x+y}{(b+c-a)+(c+a-b)}=\frac{y+z}{(c+a-b)+(a+b-c)}$

$$=\frac{z+y}{(a+b-c)+(b+c-a)},$$

即チ $\mathrm{K}=\frac{x+y}{2c}=\frac{y+z}{2a}=\frac{z+x}{2b},$

∴ $\mathrm{K}=\frac{z(x+y)+x(y+z)+y(z+x)}{2cz+2ax+2by}=\frac{xy+yz+zx}{ax+by+cz}.$

之ニ由テ $\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{xy+yz+zx}{ax+by+cz}.$

17. $\{cd(a+b)+ab(c+d)\}^2=abcd\{(a+b)+(c+d)\}^2,$

即チ $c^2d^2(a+b)^2+a^2b^2(c+d)^2=abcd\{(a+b)^2+(c+d)^2\},$

∴ $ab(c+d)^2(ab-cd)-cd(a+b)^2(ab-cd)=0,$

即チ $(ab-cd)\{ab(c+d)^2-cd(a+b)^2\}=0,$

即チ $(ab-cd)\{ab(c^2+d^2)-cd(a^2+b^2)\}=0,$

即チ $(ab-cd)\{ac(bc-da)-bd(bc-da)\}=0,$

即チ $(ab-cd)(bc-da)(ac-bd)=0.$

∴ $ab-cd=0$ ナルキ $a:c=d:b,$

$bc-da=0$ ナルキ $a:b=c:d,$

$ac-bd=0$ ナルキ $a:b=d:c,$

之ニ由テ a, b, c, d ハ任意ノ順序ニテ比例ヲナス.

18. $\{(a+b)(c+d)\}(a+d)(b+c)$

$$=\{(a+d)+(b+c)\}\{bc(a+d)+ad(b+c)\},$$

即チ $(ac+bc+ad+bd)(a+d)(b+c)$

$$=bc(a+d)^2+(bc+ad)(a+d)(b+c)+ad(b+c)^2$$

即チ $(ac+bd)(a+d)(b+c)=bc(a+d)^2+ad(b+c)^2,$

∴ $a(b+c)\{c(a+d)-d(b+c)\}-b(a+d)\{c(a+d)-d(b+c)\}=0,$

即チ $a(b+c)(ac-bd)-b(a+d)(ac-bd)=0,$

即チ $(ac-bd)\{a(b+c)-b(a+d)\}=0,$

即チ $(ac-bd)(ac-bd)=0$ 即チ $(ac-bd)^2=0,$

∴ $ac=bd$ ∴ $a:b=d:c.$

19. $(b+c+d)(a+b+c)=(c+d+a)(d+a+b),$

即チ $(b+c)^2+(b+c)(a+d)+ad=(d+a)^2+(d+a)(b+c)+bc,$

∴ $b^2+bc+c^2=a^2+ad+d^2,$

即チ $\frac{b^3-c^3}{b-c}=\frac{a^3-d^3}{a-d}.$

20. 第拾貳編7章十文字ノ法(269頁)ニ由テ

$$\frac{b}{\left(\frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{c}-\sqrt{a}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right)}$$

$$=\frac{m}{\left(\frac{1}{\sqrt{c}-\sqrt{a}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}\right)}$$

$$=\frac{n}{\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)},$$

即チ $\frac{l}{\frac{2(c-\sqrt{ab})}{(b-c)(c-a)}}=\frac{m}{\frac{2(a-\sqrt{bc})}{(c-a)(a-b)}}=\frac{n}{\frac{2(b-\sqrt{ca})}{(a-b)(b-c)}},$

即チ $\frac{l}{(a-b)(c-\sqrt{ab})}=\frac{m}{(b-c)(a-\sqrt{bc})}=\frac{n}{(c-a)(b-\sqrt{ca})}.$

21. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\mathrm{K}$ トスレハ

$a=b\mathrm{K},\quad c=d\mathrm{K},\quad e=f\mathrm{K},$

$27(a+b)(c+d)(e+f)=27(b\mathrm{K}+b)(d\mathrm{K}+d)(f\mathrm{K}+f)$

$=27bdf(\mathrm{K}+1)^3=bdf(3\mathrm{K}+3)^3=bdf(\mathrm{K}+1+\mathrm{K}+1+\mathrm{K}+1)^3$

$=bdf\left(\dfrac{a}{b}+1+\dfrac{c}{d}+1+\dfrac{e}{f}+1\right)^3=bdf\left(\dfrac{a+b}{b}+\dfrac{c+d}{d}+\dfrac{e+f}{f}\right)^3.$

22. 原三方程式ヲ加レハ $-(x-y)(y-z)(z-x)=a^3+b^3+c^3,$

原方程式ヲ乘スレハ $x^2y^2z^2(x-y)(y-z)(z-x)=a^3b^3c^3,$

$\therefore\quad -x^2y^2z^2(a^3+b^3+c^3)=a^3b^3c^3 \qquad \therefore\quad xyz=\sqrt{-\dfrac{a^3b^3c^3}{a^3+b^3+c^3}}=\mathrm{K}$

又 $xyz-x^2(y-z)=\mathrm{K}-a^3,$ 即チ $x(yz-xy+zx)=\mathrm{K}-a^3,$

及ヒ $xyz+y^2(z-x)=\mathrm{K}+b^3,$ 即チ $y(zx+yz-xy)=\mathrm{K}+b^3,$

$\therefore\quad \dfrac{x}{y}=\dfrac{\mathrm{K}-a^3}{\mathrm{K}+b^3}.$

23. 最初樽中ノ量ヲ x 斗トスレハ

第一ニ出シタル後ノ酒ハ $x-9$ 斗, 水ハ 9 斗ナリ,

第二ニ出シタル後ノ酒ハ $x:x-9=x-9:\dfrac{(x-9)^2}{x}$ 斗,

水ハ $x-\dfrac{(x-9)^2}{x}$ 斗ナリ,

之ニ由テ $\quad \dfrac{(x-9)^2}{x}:x-\dfrac{(x-9)^2}{x}=16:9,$

即チ $\quad \dfrac{(x-9)^2}{x}:x^2=16:25,$

即チ $\quad (x-9)^2:x^2=16:25$

$\therefore\quad x-9:x=4:5 \qquad \therefore\quad x=45$ 斗.

24. $a>b>c>d$ トシ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}=\mathrm{K}$ トスレハ

$c=d\mathrm{K},\quad b=c\mathrm{K}=d\mathrm{K}^2,\quad a=b\mathrm{K}=d\mathrm{K}^3,$

$a-d=d\mathrm{K}^3-d=d(\mathrm{K}^3-1),\quad b-c=d\mathrm{K}^2-d\mathrm{K}=d\mathrm{K}(\mathrm{K}-1),$

$\therefore\quad \dfrac{a-d}{b-c}=\dfrac{d(\mathrm{K}^3-1)}{d\mathrm{K}(\mathrm{K}-1)}=\mathrm{K}+1+\dfrac{1}{\mathrm{K}}=\left(\sqrt{\mathrm{K}}-\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{K}}}\right)^2+3,$

$\therefore\quad \dfrac{a-d}{b-c}>3$ 即チ $a-d>3(b-c).$

25. 茶及ヒ珈琲ノ斤量ヲ $5z$ 及ヒ z トスレハ

$5z\times\dfrac{x}{100}+z\times\dfrac{y}{100}=(5z+z)\times\dfrac{7a}{100}$ 即チ $5x+y=42a,$

又 $5z\times\dfrac{y}{100}+z\times\dfrac{x}{100}=(5z+z)\times\dfrac{3a}{100}$ 即チ $x+5y=18a.$

$\therefore\quad \dfrac{5x+y}{x+5y}=\dfrac{42a}{18a}=\dfrac{7}{3} \quad \therefore\quad x:y=4:1.$

26. 青銅器ノ全量ヲ a トシ球ノ全量ヲ b トス而シテ球ノ內ニ含ム銅ノ比ヲ $\dfrac{x}{100}$ 銀ノ比ヲ $\dfrac{y}{100}$ トス.

亞鉛ハ前後凡テ增減無キカ故ニ

$\dfrac{6a}{100}=\dfrac{4{\cdot}875}{100}(a+b),\quad \therefore\quad a=\dfrac{13b}{3}.$

又 $\dfrac{91a}{100}+\dfrac{xb}{100}=\dfrac{88}{100}(a+b)$ 即チ $91a+bx=88(a+b),$

$\therefore\quad 91\times\dfrac{13b}{3}+bx=88\left(\dfrac{13b}{3}+b\right),\quad \therefore\quad x=75,$

及ヒ $\dfrac{3a}{100}+\dfrac{yb}{100}=\dfrac{7{\cdot}125}{100}(a+b)$ 即チ $3a+by=7{\cdot}125(a+b),$

$\therefore\quad 3\times\dfrac{13b}{3}+by=7{\cdot}125\left(\dfrac{13b}{3}+b\right),\quad \therefore\quad y=25.$

27. 1から一さノ金剛石ノ價ヲ x 圓及ヒ金ノ價ヲ y 圓トシ等重ヲ W トシ細工ノ費用ヲ z 圓トス,

然ルヰ $\quad 3^2x+(\mathrm{W}-3)y+z=a,$

$$4^2x+(W-4)y+z=b,$$

$$5^2x+(W-5)y+z=c.$$

第二ヨリ第一ヲ減スレハ $7x-y=b-a,$

第三ヨリ第二ヲ減スレハ $9x-y=c-b,$

之ニ由テ $2x=c+a-2b,$

$$\therefore\ x=\frac{c+a}{2}-b.$$

明治三十四年十二月廿五日印刷
明治三十四年十二月三十日合卷發行

正價金壹圓五十錢

數學講義録合卷代數之部

編輯兼發行者 東京市神田區西小川町二丁目十一番地 野村喜十

發行所 東京市神田區仲猿樂町十五番地 東京數學院

印刷者 東京市麹町區有樂町三丁目一番地 大西錬三郎

印刷所 東京市京橋區弓町廿四番地 三協合資會社

專賣所 大阪市東區安土町四丁目 積善館本店

全 廣島市鹽屋町 福岡市博多中島町 積善館支店