

復興初級中學教科書

代勿數交

上 冊

虞明禮編著
段育華校訂

1.62

商務印書館發行

MF
634.62
3/2

復興初級中學教科書

代數 數

上 冊

虞明禮編 著
殷吉華校 訂



3 1772 2902 2

商務印書館發行

編輯大意

1. 本書依照教育部最近頒布修正課程標準編輯，分上下兩冊，上冊供初中第二學年，下冊供第三學年之用。

2. 本書編制除注意邏輯次序外，兼顧學習心理，藉以發覺學習興趣，增進教學效能。

3. 本書教材排列，務使各類方程式解法儘先提出，蓋以解方程式，及解應用問題，最易引人入勝故也。

4. 本書以計算為中心。基本概念，務求徹底明瞭，教材不敢複雜繁重。其偏重理解及形式訓練之教材，一律從略。

5. 本書敘述任何算法與原理，必先提出問題，吸引學生注意，樹立學習目標，藉其向前探討之志趣，然後逐步解析歸納加以論證。

6. 本書於敘述時，力求活潑，以培養學生良好之心理習慣與態度。

7. 本書所授教材，以解方程式為主體；但初中代數又為高中代數之基礎，不宜囿於求解方程式，故本書於代數式之各種運算，亦從加意訓練。

8. 初學代數者，往往對於某種算法，略知其意而未能澈底了解，演算時依樣葫蘆，每至錯誤疊出，編者根據教學經驗，在本書前半部內，常將普通之誤解隨時提出，使學者尋求有無錯誤，以期糾正似是而非之思想，而立正確之觀念。

9. 本書習題為重要教材之一部，務宜逐題演算，以期純熟而收實效。

10. 本書編著時，得良師段鑑華先生多方指示，益友胡春池先生詳為正誤，使本書能免大謬，編者曷勝感激。尚望海內專家，進而教之，俾此書更臻完善，則尤幸甚。

目次

上册

第一章 代數的目的 簡易應用問題	1
§ 1. 代數的需要	1
§ 2. 代數的目的	1
§ 3. 文字符號的使用	2
習題一	5
§ 4. 關於代數式的幾個重要名詞	6
習題二	8
§ 5. 運算的公律	9
§ 6. 幾個重要的算法	10
習題三	12
§ 7. 關於方程式的幾個重要名詞	14
§ 8. 等量公理	15
§ 9. 等量公理的應用	16
習題四	17
§ 10. 移項	18

181330

§ 11. 解方程式的通則	19
習題五	20
§ 12. 代數式的創立	21
習題六	21
§ 13. 解應用問題的通則	23
§ 14. 年齡問題	24
習題七	25
§ 15. 雞犬問題	26
習題八	27
§ 16. 分桃問題	27
§ 17. 時鐘問題	28
習題九	29
§ 18. 工程問題	29
§ 19. 數字問題	30
習題十	30
§ 20. 其他問題	31
習題十一	32
第二章 正負數	33
I. 正負數的性質及其基本演算	33
§ 21. 負數的需要	33

§ 22. 負數的意義	84
習題十二	86
§ 23. 負數正數絕對值	87
習題十三	88
§ 24. 正負數的運算	88
§ 25. 正負數的加法	40
習題十四	42
§ 26. 正負數的減法	43
習題十五	44
習題十六	44
§ 27. 去括號	45
習題十七	46
§ 28. 正負數的乘法	47
習題十八	50
§ 29. 正負數的除法	52
習題十九	52
II 負數在解方程式上的應用	53
§ 30. 利用負數有時可減省移項手續	53
§ 31. 利用負數有時方程式才能有根	54
習題二十	55

第三章 整式四則之一——加減法	56
§ 32. 引論	56
§ 33. 關於整式的幾個重要名詞	58
習題二十一	59
§ 34. 整式的整理	60
§ 35. 整式的加法	61
習題二十二	64
§ 36. 整式的減法	65
習題二十三	66
習題二十四	68
第四章 聯立一次方程式	68
§ 37. 引論	68
§ 38. 聯立方程式及其求解的通則	69
§ 39. 加減消去法	70
習題二十五	72
§ 40. 代入消去法	73
習題二十六	75
§ 41. 比較消去法	75
習題二十七	76
習題二十八	76

§ 42. 二元應用問題的解法	77
習題二十九	78
§ 43. 三元聯立方程式	80
習題三十	86
§ 44. 三元應用問題的解法	87
習題三十一	88
§ 45. 四元聯立方程式	89
習題三十二	91
第五章 圖解	92
§ 46. 幾個簡單的例	92
§ 47. 座標制	95
習題三十三	97
§ 48. 兩元一次方程式的圖線	98
習題三十四	99
§ 49. 用圖線解聯立一次方程式	100
習題三十五	102
第六章 整式四則之二 乘除法	103
I 整式的乘法	103
§ 50. 單項式乘單項式	103
習題三十六	105

§ 51. 單項式乘多項式	106
習題三十七	106
§ 52. 多項式乘多項式	107
習題三十八	109
II 整式的除法	110
§ 53. 單項式除單項式	110
習題三十九	111
§ 54. 以單項式除多項式	111
習題四十	112
§ 55. 多項式除多項式	113
習題四十一	117
習題四十二	113
習題四十三	120
第七章 公式的應用	121
§ 56. 引論	121
§ 57. 二數和的平方	121
習題四十四	123
§ 58. 二數差的平方	123
習題四十五	123
§ 59. 二數和差的積	124

習題四十六	124
§ 60. 二數和的立方	125
習題四十七	126
§ 61. 二數差的立方	126
習題四十八	127
§ 62. 可化爲立方之和的	127
習題四十九	128
§ 63. 可化爲立方之差的	129
習題五十	130
§ 64. 三數和的平方	130
習題五十一	131
§ 65. 怎樣求 $(ax+b)(cx+d)$	131
習題五十二	132
§ 66. 怎樣求 $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$	133
習題五十三	134
§ 67. 被除式是 x^2-y^2 的	134
§ 68. 被除式是 x^3+y^3 的	134
§ 69. 被除式是 x^3-y^3 的	135
習題五十四	135
習題五十五	136

第八章 因子分解法

乘法公式的逆轉應用	137
§ 70. 引論	137
§ 71. 式內各項有相同單因子的	140
習題五十六	140
§ 72. 式內諸項可分為幾組，而各組有相同因子的	141
習題五十七	142
§ 73. 兩個平方差的二項式	143
習題五十八	144
§ 74. 完全平方的三項式	144
習題五十九	145
§ 75. 立方和或差的二項式	146
習題六十	147
§ 76. 完全立方的四項式	148
習題六十一	149
§ 77. 用逐方法分解因子	150
習題六十二	151
§ 78. 三項式 ax^2+px+q	152
習題六十三	154
§ 79. 三項式 ax^2+bx+c	154

習題六十四	156
習題六十五	157
習題六十六	158
習題六十七	160
習題六十八	160
§ 80. 因子分解的通則	161
習題六十九	162
第九章 二次方程式 因子分解應用之一	163
I 二次方程基本解法	163
§ 81. 引論	163
§ 82. 用因子分解法解二次方程式	164
習題七十	167
§ 83. 用配方法解二次方程式	167
習題七十一	170
§ 84. 用公式解二次方程式	170
習題七十二	173
§ 85. 三種解法的比較	173
習題七十三	173
§ 86. 應用問題	174
習題七十四	175

§ 87. 簡易高次方程式	177
習題七十五	179
II. 聯立三次方程式	180
§ 88. 聯立二次方程式的需要	180
§ 89. 兩個方程式中的一個是一次的	181
習題七十六	183
§ 90. 兩個方程式俱爲二次的	183
習題七十七	189
習題七十八	193
習題七十九	194
第十章 分式四則 因子分解應用之二	195
§ 91. 引論	195
§ 92. 怎樣求 $H.C.F.$	197
習題八十	202
§ 93. 怎樣求 $L.C.M.$	203
習題八十一	203
§ 94. 分式符號的變化	207
習題八十二	208
§ 95. 分數變化的原理	208
§ 96. 約分	209

習題八十三	210
§ 97. 通分	211
習題八十四	213
§ 98. 分式加減法	214
習題八十五	213
§ 99. 加減演算中分母應力求其簡	213
習題八十六	220
§ 100. 分式乘法	220
習題八十七	221
§ 101. 分式除法	222
習題八十八	223
§ 102. 疊分式的化簡	224
習題八十九	225
習題九十	223

復旦初級中學教科書

代 數

上 冊

第一章 代數的目的 簡易應用問題

§ 1. 代數的需要 爲什麼要學代數？請看下列三個問題：

[問題一]：兄弟二人七年後共有 69 歲。當兄年爲弟年 2 倍時，兄的年齡恰好和弟的現年相同。問兄弟今年各有幾歲？

[問題二] 某數的平方等於牠的 11 倍與 5670 的和。求這數。

[問題三] $\sqrt{100} = ?$

上面三題中，第一題雖然能用算術方法來求解，但是着手很難，至於二、三兩題，在算術，更沒有求解的可能。所以算術解法



算術的缺點，救濟這種缺點，那就需要代數。

代數的目的 代數是適應上述需要而生的。牠的目的在於算術上所不易解決或不能解決的問題，作

進一步的研求。方法簡而效力大（例如上舉三例，在算術不易着手，在代數則毫無困難）。學者稍學代數後，自會領略此中妙趣；現在不必多談。

§ 3. 文字符號的使用 代數何以會比算術求得簡單而有用？其要點就在應用活的文字符號（例如， a, b, c, \dots, x, y, z ）來表數，不像算術上囿於十個死的數字（1, 2, 3, \dots , 9, 0）。應用文字來表數，其妙用無窮，難以盡述；約舉其要，蓋有兩點：

I. 使算式簡明 [例一] 某人每小時行 5 里，2 小時行幾里？3, 4, 5, 6, \dots 小時各行幾里？在算術，如要表明此人所行的里數，須用下面許多式子：

$$2 \text{ 小時內所行的里數} = 2 \times 5$$

$$3 \text{ 小時內所行的里數} = 3 \times 5$$

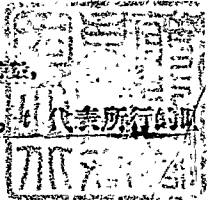
$$4 \text{ 小時內所行的里數} = 4 \times 5$$

$$5 \text{ 小時內所行的里數} = 5 \times 5$$

這些式子中，每一式只有一用，就是只能表明“某一特殊時數內所行的里數”，而不能表明“任何時數內所行的里數”。要想表出這一層，必須利用語言寫成下式：

$$\text{任何時數內所行的里數} = 5 \times \text{所行的時數}$$

但在代數，用 d 代表任何時數內所行的里數， t 代表所行的時



數，前面的式子就可用符號改寫成：

$$d = 5t,$$

[$5t$ 就是 $5 \times t$ 的簡寫。] 參看下面的註。]

這個式子，不比前面語式來得簡單而明瞭嗎？

再進一步說，假如每小時不是行 5 里，那麼，在算術，要怎樣表明任何時數內所行的里數，必須用語言表成下式：

任何時數內所行的里數 = 每時所行里數 \times 所行時數。

在代數，用 s 表每時所行里數，上式就可用符號改寫成：

$$d = st,$$

[st 就是 $s \times t$ 的簡寫。]

這個式子，不是比較簡明嗎？

[註] 在代數，凡數字與文字相乘，或文字與文字相乘，或一數與括號內的數相乘，其乘積恆略而不寫。例如，2 與 x 的積恆寫為 $2x$ ； a 與 y 的積恆寫為 ay ； m 與 $(x+y)$ 的積恆寫為 $m(x+y)$ ，反之， $2x$ 就是 2 與 x 的積。

【例二】在算術，由加法得下列語式：

$$1+2=2+1 \quad (A)$$

$$3+4=4+3 \quad (B)$$

$$5+0=0+5 \quad (C)$$

$$\frac{8}{7}+1=1+\frac{8}{7} \quad (D)$$

這些式子中，每一式只有一用，例如(A)式只能表示“從1加2等於從2加1”，不能表示“從3加4等於從4加3”。其他(B)，(C)，(D)……諸式都是如此。要想把(A)，(B)，(C)，(D)……諸式總括在一個式子內，必須用語言表成下式：

任何甲數+任何乙數=任何乙數+任何甲數。

但在代數，用 a, b 表任意兩數，則上式就可改寫成：

$$a + b = b + a.$$

這個式子，比之前面的式子不是更加簡明嗎？

II: 解法便捷 [例一] 有甲乙丙三數，甲數是乙數的2倍，乙數是丙數的3倍。甲丙兩數的差是75。求甲，乙，丙三數各是多少？

【解法】設丙數是 x ，那麼乙數是 $3x$ ，甲數是 $6x$ ；根據題意，得下面的關係：

$$6x - x = 75$$

就是 $5x = 75$

∴ $x = 15$

∴ 丙數 = 15, 乙數 = $3 \times 15 = 45$,

甲數 = $6 \times 15 = 90$ 。

【例二】解 § 1 中之問題二。

【解法】設所求的數是 x ，由題意立得下式：

$$x^2 = 11x + 5670$$

由此立刻求得(怎樣求法?以後再講。)答案是 81。你看,用文字表數的效力如此!

習 題 一

1. 在算術基本運算中有下列幾條公律:

(I) 甲數 + 乙數 = 乙數 + 甲數 加法交換律

(II) 甲數 + 乙數 + 丙數 = (甲數 + 乙數) + 丙數

$$= (\text{甲數} + \text{丙數}) + \text{乙數}$$

$$= (\text{乙數} + \text{丙數}) + \text{甲數}$$

加法結合律

(III) 甲數 × 乙數 = 乙數 × 甲數 乘法交換律

(IV) 甲數 × 乙數 × 丙數 = (甲數 × 乙數) × 丙數

$$= (\text{甲數} \times \text{丙數}) \times \text{乙數}$$

$$= (\text{乙數} \times \text{丙數}) \times \text{甲數}$$

乘法結合律

(V) (甲數 ± 乙數) × 丙數

$$= \text{甲數} \times \text{丙數} \pm \text{乙數} \times \text{丙數}$$

乘法分配律

今在代數,用 a, b, c 表甲,乙,丙三數,上面五條各可改寫成怎樣的式子?

[註: (V)中“±”號表示“+”或“-”。]

2. 用 a, b, c, d 表甲,乙,丙,丁四數,下列諸條各可改寫成怎樣的式子?

(I) $\frac{\text{甲數}}{\text{丁數}} + \frac{\text{乙數}}{\text{丁數}} - \frac{\text{丙數}}{\text{丁數}} = \frac{\text{甲數} + \text{乙數} - \text{丙數}}{\text{丁數}}$

(II) $\frac{\text{甲數}}{\text{乙數}} \times \frac{\text{丙數}}{\text{丁數}} = \frac{\text{甲數} \times \text{丙數}}{\text{乙數} \times \text{丁數}}$

$$(III) \quad \frac{\text{甲數}}{\text{乙數}} \div \frac{\text{丙數}}{\text{丁數}} = \frac{\text{甲數} \times \text{丁數}}{\text{乙數} \times \text{丙數}}.$$

3. 設 P 表本金, r 表利率, t 表期數, A 表本利和, 則下列諸式各可改寫成怎樣的式子?

(I) 本利和 = 本金 \times (1 + 利率 \times 期數)。

(II) 本利和 = 本金 \times (1 + 利率)^{期數}。

4. 設 C 表攝氏度數, F 表華氏度數, 則下列兩式各可改寫成怎樣的公式?

(I) (華氏度數 - 32°) \times $\frac{5}{9}$ = 攝氏度數。

(II) 攝氏度數 \times $\frac{9}{5}$ + 32° = 華氏度數。

5. 設 C 表圓周的長, r 表半徑的長, A 表圓的面積, 則下列公式各可寫成如何之形式?

(I) 圓周的長 = $2\pi \times$ 半徑的長。

(II) 圓的面積 = $\pi \times$ 半徑的長²。

(III) 圓的面積 = $\frac{1}{2} \times$ 圓周的長 \times 半徑的長。

6. 利用文字把下列諸式總括成一箇式子:

(a) $(8+7)(8-7) = 8^2 - 7^2$ 。

(b) $(15+6)(15-6) = 15^2 - 6^2$ 。

(c) $(20+13)(20-13) = 20^2 - 13^2$ 。

(d) $(35+18)(35-18) = 35^2 - 18^2$ 。

(e) $(100+51)(100-51) = 100^2 - 51^2$ 。

§ 4. 關於代數式的幾個重要名詞 爲以下說明便利計。

先須解釋下列幾個名詞。

(1) 代數式(式): 把幾個數及文字聯以加, 減, 乘, 除等

運算符號，就得一個代數式，簡稱做式。例如， $9+2-5x$ 是一式； $a+b-c$ 也是一式； xy 也是一式； $a \div b \times c$ 也是一式； $abcd$ 也是一式。

(2) 代數式的值 在一個代數式中，把其中所含文字各以確定的數代入計算，所得結果就叫做這式的值。例如，設 $a=3$ ， $b=4$ ， $c=5$ ， $d=6$ ，則 $ab+c-d$ 的值是 $3 \times 4 + 5 - 6 = 11$ 。又如設 $a=5$ ， $b=10$ ， $x=15$ ， $y=8$ ，則 $ax+by-bx$ 的值是 $5 \times 15 + 10 \times 8 - 10 \times 15 = 5$ 。

(3) 項 一式若含有加減符號，那麼凡被加減號所隔開的，前後兩數(或式)各叫做一項。例如，在 $a+b-c \times d \div e$ 中， a 是一項； b 是一項； $c \times d \div e$ 也是一項。又如，在 $6x-7y+8$ 中， $6x$ 是一項； $7y$ 是一項； 8 又是一項。

(4) 係數，因數 幾個數(或文字)相乘而得一項，這幾個數各叫做該項的因數。例如，在 $3x$ 中， 3 是 $3x$ 的因數； x 也是 $3x$ 的因數，又如，在 $5xy$ 中， 5 是 $5xy$ 的因數； x ， y ， $5x$ ， $5y$ 也都是 $5xy$ 的因數。

項中以某因數為主，其他諸因數的積叫做該因數的係數。例如，在 $5y$ 中， 5 是 y 的係數。在 ax 中， a 是 x 的係數。在 $6xy$ 中， $6x$ 是 y 的係數； $6y$ 也是 x 的係數； 6 是 xy 的係數。

關於係數的規定，學者應注意下列兩個慣例：

(I) 凡係數是1的，該係數恆省而不寫例如， $1x$ 應寫為 x ； $1xy$ 應寫為 xy 。反之， x 就是 $1x$ 。

(II) 凡數字係數恆置於文字之前 例如， $2x$ 不應寫為 $x2$ ； $6y$ 不應寫為 $y6$ ； $8xy$ 不應寫為 $x8y$ ，或 $xy8$ 。

(5) 同類項：兩項中，至多只有係數不同的，叫做同類項。例如， $8x$ 與 $17x$ 是同類項； $3x$ 與 $2x$ 是同類項； $5x$ 與 $6x$ 也是同類項。至於 $2x$ 與 $3y$ 則非同類項； $2x$ 與 $3x^2$ 也非同類項。

習 題 二

設 $x=1$, $y=5$, $z=0$, $a=3$, $b=4$, $c=2$ 。求下列各式的值：

- $10ax+by-cz$ 。
- $13ax+8by+cz$ 。
- $ax(by-cz)$ 。
- $ax(by+cz)$ 。
- $\frac{5}{3}(x+y+z) + \frac{5}{3}(a+b+c)$ 。

設 $x=0$, $y=\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{3}$, $a=1$, $b=2$, $c=3$ 。求下列各式的值：

- $3x+4y-6z$ 。
- $ax+by+cz$ 。
- $ax(by+cz)+by(cz+ax)+cz(ax+by)$ 。
- $ax+(by+cz)+by+(ax+cz)+cz+(ax+by)$ 。

指出下列諸式各有幾項：

$$10. 1-2 \times 3 - 4 \times 5 \div 6 \times 7 \div xy^2.$$

$$11. 8a + b - c + d - 2c.$$

$$12. a \div b \times c + a \div b \div c \div d \div e - 5cdefj.$$

$$13. a \div b \times c \div d \times e \div f \times g \div h.$$

$$14. a \div b + c \div d + e \div f - g \div h.$$

$$15. 9x + 6yz - 13^2xz + 45^3yz.$$

下列各式中指出那幾項是同類：

$$16. 3x + 5y + 7z - x - 2y - 5z.$$

$$17. ax + by + cz + dx - ey + fz.$$

$$18. 7ax + by + cz.$$

§ 5. 運算的公律 問題：“有甲、乙、丙三工人，每日工資，甲比乙多 3 角；丙等於乙的 3 倍，合甲工作 5 日，乙工作 8 日，丙工作 14 日；三人共得 12 元 5 角，問各人每日得工資幾角？”

[解法] 設乙每日得 x 角，則 8 日得 $8x$ 角；

甲每日得 $x+3$ 角，5 日得 $5(x+3)$ 角；

丙每日得 $3x$ 角，14 日得 $14 \times 3x$ 角。

於是由題意，立得下面的關係：

$$-8x + 5(x+3) + 14 \times 3x = 125 \quad (A)$$

如能由此求出 x 的值，便易得各人每日的工資。

但是欲求 x ，先要計算下列三式：

$$(1) \quad 14 \times 3x = ?$$

$$(二) \quad 5(x+3) = ?$$

$$(三) \quad 8x + 5(x+3) + 14 \times 3x = ?$$

怎樣計算上述三式？須用下列五條公律：

$$(1) \quad \underline{a+b=b+a} \quad \text{加法交換律。}$$

$$(2) \quad \underline{a+b+c=(a+b)+c=(a+c)+b}$$

$$\quad \quad \quad \underline{=(b+c)+a} \quad \text{加法結合律。}$$

$$(3) \quad \underline{ab=ba} \quad \text{乘法交換律。}$$

$$(4) \quad \underline{abc=(ab)c=(ac)b=(bc)a} \quad \text{乘法結合律。}$$

$$(5) \quad \underline{(a+b-c)d=ad+bd-cd} \quad \text{乘法分配律。}$$

這五條公律的意義，我們在算術上已經知道了（參看習題一第1題）。在代數上，數的範圍雖然比算術廣得多，這五條公律仍能完全適用，牠們是一切運算的基本，我們要隨時留意。三節所述就是這些公律在代數上最簡單的應用。

§ 6. 幾個重要的算法。根據前節五條公律，乃得下面幾種重要的算法。（這些算法，不久便有大用。學者務須熟練，切勿因其淺易而忽略之。）

【A】第一 簡單加減法 例如求 $(9x+5x-3x)=$

由前節(5)，立得下面的公式：

$$\underline{ad+bd-cd=(a+b-c)d}$$

這就是同類項 ad, bd, cd 加減的規則。用語言來說，就是“同

個同類項相加減，可把公共文字的係數依其原來的加減號加減之，而以這所得結果作為該公共文字的係數。據此，便得

$$9x + 5x - 8x = (9 + 5 - 8)x = 6x.$$

【註】不用前節(5)，也可從另一方面，直接求得同類項加減的方法。因為， $9x$ 就是 9 乘 x ，也就是 9 個 x 的和；同樣， $5x$ 就是 5 個 x 的和； $8x$ 也就是 8 個 x 的和。所以

$9x + 5x - 8x = 9$ 個 x 的和 $+ 5$ 個 x 的和 $- 8$ 個 x 的和

$$= (9 + 5 - 8) \text{ 個 } x \text{ 的和}$$

$$= (9 + 5 - 8)x = 6x$$

據之， $ax + bx - cx = a$ 個 x 的和 $+ b$ 個 x 的和 $- c$ 個 x 的和

$$= (a + b - c) \text{ 個 } x \text{ 的和}$$

$$= (a + b - c)x$$

第二 簡單乘法 [例一] 求 $15m \times 6 = ?$

由前節(4)， $abc = (cb)a = (ca)b$ 。

用語言來說，就是“以任何數 c 乘 ab ，等於以 c 乘 b 的係數 a ，而以這所得結果 ac 作為 b 的係數。”據此，便得

$$15m \times 6 = (15 \times 6)m = 90m.$$

[例二] 求 $15(3m + 7n - 9) = ?$

依前節(5)： $(a + b - c)d = ad + bd - cd$ ，立得此類乘法的規則。

用語言來說，就是“以一數乘幾項的和或差，等於以該數分別乘這幾項，把所得各積依這幾項原來的加減號加減之。”據此，立得

得

$$\begin{aligned} 15(6m+7n-9) &= 15 \times 6m + 15 \times 7n - 15 \times 9 \\ &= 90m + 105n - 135. \end{aligned}$$

第三 簡單除法 [例] 求 $90m \div 15 = ?$ 除法是乘法的還原。在乘法既有 $(ab)c = (ac)b$ ，在除法應得

$$acb \div a = cb = (ac \div a)b$$

$$my \div n = (m \div n)y.$$

用語言來說，就是“以 n 除 my ，等於以 n 除 y 的係數 m ，而以所得的商 $(m \div n)$ 作為 y 的係數。”據此，

$$90m \div 15 = (90 \div 15)m = 6m.$$

習 題 三

1. $x+x=2x$ 對不對? $3x+2x=5+x$ 對不對?

$2x+x=3 \times 2x=6x$ 對不對?

$3x+2x=(3+2)(x+x)=5 \times 2x=10x$ 對不對?

$x-x=0$ 對不對? $5x-2x=5-2=3$ 對不對?

$18x-14x=4x=18x-10x=8x$ 對不對?

2. $8x+7x=?$

3. $8x+16x=?$

4. $x+x=?$

5. $2x+x=?$

6. $2x+2x+3x=?$

7. $2x+2x+3x=?$

8. $13x+31x+132x=?$

9. $11x+22x=?$

10. $8x-7x=?$

11. $8x-x=?$

12. $4x-2x=?$

13. $251x-x=?$

14. $251x-152x=?$

15. $6x-2x-x=?$

16. $10x - 3x - x = ?$
17. $-10x - 5x - 4x = ?$
18. $10x + 2x + x = ?$
19. $-10x + (2x + x) = ?$
20. $253x + 254x = ?$
21. $x + 453x = x + 345x = ?$
22. 3個人 + 5個狗 = 8個人呢? 8個狗呢? 8個人狗呢? 8個狗人呢?
23. $3 + 5 = 3 \times 5$ 呢? 5×3 呢?
24. $x + y = xy$ 呢? yx 呢?
25. $3x + 5y = 8x$ 呢? $8y$ 呢? $8xy$ 呢? $8yx$ 呢? $8x + y$ 呢? $8y + x$ 呢?
 $8x + 8y$ 呢? $8(x + y)$ 呢? $3x + 5y$ 呢? $5y + 3x$ 呢?
26. $x + y + 2x + y = 2x + 4y$, 對不對? 何故?
27. $2x + 2x + y = ?$
28. $5x + 8y + x = ?$
29. $8y + 7x + 9y = ?$
30. $4x + 5y + 6x + 7y = ?$
31. $8x + 30 + x = ?$
32. $x + 2 + 3x + 5 = ?$
33. $3 + 2x = 5x$, 對不對? 何故?
34. $4 \times 5x = 20 \times 4x = 80x$, 對不對? 何故?
 $3 \times 2x = 6 \times 3x = 18x$, 對不對? 何故?
35. $5(x + 6) = 5x$, 對不對? $5(x + 6) = 30$, 對不對?
 $3(4 + x) = 12 + 3x = 16x$, 對不對? 何故?
36. $8 \times 5 = ?$
37. $8 \times 7 = ?$
38. $9m \times 5 = ?$
39. $8 \times 7m \times 6 = ?$
40. $5 \times 6 \times 7a = ?$
41. $3 \times 50b \times 5 = ?$
42. $x + 2 \times 3x = ?$
43. $a + 7a \times 3 = ?$
44. $8a + 6a \times 5 = ?$
45. $8a + 6a \times 5 = ?$
46. $7 \times 6a - 5 \times 6 = ?$
47. $2 \times 3a + 4 \times 5a = ?$
48. $2 \times a + 3 \times 4a + 6a = ?$
49. $7(3x + 5) = ?$
50. $5(x + 5) = ?$
51. $6(x - 5) = ?$
52. $3(x - y) = ?$
53. $9(x + y - 5) = ?$

54. $-8(x+5-y) = ?$

55. $4(a-b-c) = ?$

56. $-(2(x+3)+3x) = ?$

57. $3(x-2)+6 = ?$

58. $-(2(x+8)+3(x+2)) = ?$

59. $-5(x+8)+5(x-4) = ?$

60. $15(x+1)+15(x-1) = ?$

61. $3(x+y)+8(x-y)+y = ?$

62. $8x+5(x+2)+14 \times 3x = ?$

63. $35x \div 7 = ?$

64. $105x \div 3 \div 2 = ?$

65. $2x \div \frac{2}{3} = ?$

68. $\frac{5}{6}x \cdot \frac{5}{6}x = ?$

§ 7. 關於方程式的幾個重要名詞，爲以下幾節說明便利計，又須解釋下列幾個名詞。

(1) 已知數，未知數(元)。凡數已知其值或已指定其值的叫做已知數；未知其值的叫做未知數。例如，在 $3y$ 中 3 是已知數； y 是未知數。又如在 § 5(A) 式中， x 是未知數；8, 5, 3, 14, 125 等都是已知數。我們常用英文字母順序前面的 a, b, c, \dots 等表已知數；後面的 x, y, z 等表未知數。

未知數又叫做元。

(2) 等式。A, B 兩式(或數)的值若相等，便可用等號“=”聯結 A, B 而得 $A=B$ ，這“ $A=B$ ”叫做等式。A 與 B 各叫做等式的一邊。例如 $2+3 \times 4=14, x+2x=3x, 3x^2+5x=13$ 等等都是等式。

(3) 恆等式，方程式。等式分兩類：其一，所含未知數可

任表何值，這類等式叫做恆等式。其二，所含未知數只能表適當的值而不能任表何值，這類等式叫做方程式。例如，在 $x+2x=3x$ 中， x 可表任何值，故等式 $x+2x=3x$ 是恆等式。至於 $3x+5x=16$ 中； x 只能為 2 而不能任為他數，故等式 $3x+5x=16$ 是方程式。

(4) 方程式的根 方程式中未知數所表的值叫做方程式的根。例如，在 $3x+5x=16$ 中， x 所表的值是 2 (以 2 代入該方程式中的 x ，得 $3 \times 2 + 5 \times 2 = 16$ ，左右相等)。這 2 就是該方程式的根。

(5) 解方程式 由方程求根，這手續叫做解方程式。

§ 8. 等量公理 應用 § 6 的算法，把 § 5 方程式 (A) 左邊化簡，則得方程式

$$55x+15=125 \quad (B)$$

要解這方程式 (B)，須用下列四條公理：

- (I) 等數加等數，其和仍相等；
- (II) 等數減等數，其差仍相等；
- (III) 等數乘等數，其積仍相等；
- (IV) 等數除等數，其商仍相等 (除數或除式不得為零)。

這四條顯而易見的道理叫做等量公理。等量公理用文字來表示，其形如下：

(I) 若 $a=b$, 則 $a+c=b+c$ 成立

(II) 若 $a=b$, 則 $a-c=b-c$ 成立

(III) 若 $a=b$, 則 $+ac=bc$ 成立

(IV) 若 $a=b$, 則 $a \div c = b \div c (c \neq 0)$ 成立

[註] c 不能等於 0。

§3.0 等量公理的應用：應用等量公理就能解簡易方程式。

舉例如下：

[例一] 解 $x-5=11$

[解法] 因 $x-5=11$

依前節(I)得 $x-5+5=11+5$

$\therefore x=16$

[例二] 解 $x+5=11$

[解法] 因 $x+5=11$

依前節(II)得 $x+5-5=11-5$

$\therefore x=6$

[例三] 解 $\frac{4}{3}x=64$

[解法] 因 $\frac{4}{3}x=64$

依前節(III)得 $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}x = 64 \times \frac{3}{4}$

$$\therefore x = 48$$

【例四】解 $5x = 35$

【解法】因 $5x = 35$

依前節(IV) 得 $5x \div 5 = 35 \div 5$

$$\therefore x = 7$$

【例五】解 §7 方程式 (B)

【解法】因 $55x + 15 = 125$

所以 $55x + 15 - 15 = 125 - 15$ (何故?)

即 $55x = 110$ (何故?)

$\therefore x = 2$ (何故?)

【例六】解 $55x + 15 = 125 + 35x$

【解法】因 $55x + 15 = 125 + 35x$

所以 $55x + 15 - 35x = 125 + 35x - 35x$ (何故?)

即 $20x + 15 = 125$

於是 $20x + 15 - 15 = 125 - 15$ (何故?)

即 $20x = 110$

$\therefore x = \frac{110}{20} = 5\frac{1}{2}$ (何故?)

習題四

習題四

1. $x+5=21$

3. $x+a=3a$

5. $x+c=d$

7. $3x=8$

9. $7x=21a$

11. $\frac{6}{3}x=35$

13. $x+5=3x$

15. $x+5=3x-5$

17. $3x-15=2x+5$

19. $123x+3=8x+243$

21. $x+\frac{x}{2}=15$

23. $\frac{x}{2}+2=\frac{x}{3}+3$

2. $x-5=21$

4. $x+b=5b$

6. $3x=6$

8. $-3x=333$

10. $7ax=14a$

12. $\frac{7}{8}x=40$

14. $3x+8=38$

16. $7x+8=8x+7$

18. $12x-8=x+3$

20. $96x-79=69x+56$

22. $x+\frac{x}{3}=12$

24. $\frac{x}{x}+4=\frac{x}{x}+5$

§ 10. 移項 應用等量公理，便得移項的辦法，述之如下：

設有等式 $-M+N=P$, (1)

兩邊各減以 N 得 $M=P-N$; (1')

又設有等式 $M+N=P$, (2)

兩邊各加以 N 得 $M=P+N$. (2')

由(1)到(1')，可見等式

左邊的 $+N$ 可移到右邊成 $-N$;

由(2)到(2')，可見等式

左邊的 $-N$ 可移到右邊成 $+N$;

由(1')到(1),可見等式

右邊的 $-N$ 可移到左邊成 $+N$;

由(2')到(2),可見等式

右邊的 $+N$ 可移到左邊成 $-N$ 。

總之,在等式中,任何一項,可從等式的一邊移到他邊,只要變換該項原附的加減符號就是了。這叫做移項。應用移項原理,就會把解方程式的手續變簡,舉例於下:

[例一] 解 §9 例六。

[解法] 原 $55x + 15 = 125 + 35x$

移項,得 $55x - 35x = 125 - 15$

即 $20x = 110$

∴ $x = \frac{110}{20} = 5\frac{1}{2}$

[例二] 解 $24x + 9 - 4x = 68 - 27x - 12$

[解法] 移項,得

$$24x - 4x + 27x = 68 - 12 - 9$$

即 $47x = 47$

故 $x = 1$

§ 11. 解方程式的通則 由前數節,已把解方程式的手續

說得很為明瞭。今再總述其步驟如左:

I. 先用移項手續，把含未知數的各項移到方程式的一邊，不含未知數的各項移到另一邊。

II. 化簡各邊，便成 $ax=b$ (或 $b=ax$)。

III. 兩邊各除以 a ，得 $x=b \div a=?$

IV. 欲知第三步所得的結果是否正確，應把這結果代入原方程式，驗明兩邊的值是否相等。

[註] 某項的次數，是該項所含文字因數的總個數，如 xy 是二次項， $6abx$ 是三次項， x^2y 或 xy^2 也是三次項。4 不含文字因數，是零次項。

有時次數特就某文字計算，如 x^2y ，就 x 說，是 x 的二次項；就 y 說，是 y 的一次項。

式的次數是式中最高次項的次數，如 $6x-7y+8$ 是一次式， x^2-6x+8 是二次式。

本章所講的方程式僅有一元，它的最高次數是一次，所以叫做一元一次方程式。

習 題 五

用最簡手續解下列各方程式：

1. 習題四第 1 題到第 5 題。

2. 習題四第 13 題到第 24 題。

3. $3(x+5)+5(x+3)=76$ 。

4. $3(x+5)+50=5(x+3)+40$ 。

5. $2(x+2)+3(x+3)+4(x+4)=5(x+5)+8(x-1)$ 。

6. $4(x+3)+5(x+3)=6(x+5)+3(x+2)$ 。

7. $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}=\frac{x+3}{5}+6$ 。

$$8. \frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} = \frac{x+3}{5} + 2x-9.$$

§ 12. 代數式的創立 由 §3(II)[例一],[例二] 及 §5, 可見欲解應用問題, 必先由題意立出方程式。怎樣創立方程式? 應先創立方程式各邊的代數式。

怎樣創立代數式? 本無一定方法。最要的一點就是“在普通情形下不易直接推理時, 應先假設數字^的特例, 考察其間各數的關係, 得出這特例中立式的方法; 然後再推到通例。”舉例如下:

[例一] 父年 25 歲, 子年 5 歲。x 年後二人共計幾歲? 用代數式來表示。

[解法] 先看下列特例:

一年後父(25+1)歲, 子(5+1)歲,

共計(25+1+5+1)歲。

二年後父(25+2)歲, 子(5+2)歲,

共計(25+2+5+2)歲。

三年後父(25+3)歲, 子(5+3)歲,

共計(25+3+5+3)歲。

推之, x 年後父(25+x)歲, 子(5+x)歲,

共計(25+x+5+x)歲。

[例二] 有二位數, 個位數字是 x, 兩位數字的和是 15。

個二位數是多少?用代數式來表示。

[解法] 假如個位數字是 2, 十位數字是 9, 個二位數就是 $10 \times 9 + 2 = 90 + 2 = 92$ 。假如個位數字是 m , 十位數字是 n , 那麼這二位數就是 $10n + m$ 。[注意, 不是 nm 。]

現在個位數字是 x , 十位數字是 $15 - x$, 所以這二位數是 $10(15 - x) + x$ 。

[例三] 雞犬共有 49 隻, 雞有 x 隻。問犬有幾隻? 雞足犬足各有幾隻? 用代數式來表示。

[解法] 雞犬共有 49 隻。假如雞有 1 隻, 則犬有 $(49 - 1)$ 隻; 雞有 2 隻, 則犬有 $(49 - 2)$ 隻。現在雞有 x 隻, 那麼犬有 $(49 - x)$ 隻。

一雞有 2×1 足; 兩雞有 2×2 足; 三雞有 2×3 足; 故 x 雞有 $2x$ 足。

一犬有 4×1 足; 兩犬有 4×2 足; 三犬有 4×3 足; 故 $(49 - x)$ 犬有 $4(49 - x)$ 足。

習 題 六

把下列問題原有的答案各用代數式來表示:

- x 比 y 大, 大多少?
- x 比 y 小, 小多少?
- x 的 m 倍比 y 大, 大多少?

(d) x 的 m 倍比 y 小, 小多少?

(e) x 的 m 倍比 y 的 n 倍大, 大多少?

(f) x 的 m 倍比 y 的 n 倍小, 小多少?

2. 相鄰五個整數內最大的是 x , 其他四數是多少?

3. 相鄰五個偶數內最小的是 x , 其他四數是多少?

4. 兄弟三人依次是 15 歲, 10 歲, 5 歲。 x 年前三人合是幾歲? 共計幾歲? x 年後怎樣?

5. 雞犬共 100 隻, 雞有 x 隻。問雞足比犬足共有幾隻?

6. 伍元法幣與拾元法幣共值 100 元。伍元法幣有 x 張, 拾元法幣有幾張?

7. 兒童分桃, 每人 5 枚, 餘桃 3 枚。設人數是 x , 問共有桃幾枚? 設桃數是 x , 問共有人幾名?

8. 同一時間內分針走 x 分, 時針走幾分? 時針走 x 分, 分針走幾分?

9. 有二位數, 其兩位數字的和是 9, 十位數字是 x , 這數是多少? 個位數字是 x , 這數又是多少?

10. 甲有國幣 500 元。每日收入 x 元, 用去 y 元。問十日後尚有幾元? m 日後如何?

11. 甲有國幣 500 元, 乙有國幣 400 元。甲給乙 x 元, 二人各有幾元? 乙受甲 x 元後又還甲 y 元, 二人各有幾元?

12. 每時行 5 里, 費時能行 x 里? x 時能行幾里?

13. 船在靜水中每時能行 40 里。今在水流速度每時 5 里的河水中, 上下各行 m 里。問需時多少?

§ 13. 解應用問題的通則 明白了怎樣解方程式, 怎樣列立代數式, 便不難解決簡易應用問題。茲總述其步驟如下:

I. 細審題意, 選擇適當的未知數而以 x (或 y) 代表之。

II. 謹依題意，把已知數與未知數間的關係列成一個方程式。

III. 解這方程式以求未知數的值。

IV. 欲知所得結果是否正確，應把這結果代入原題驗其是否適合。(所立方程式假如有錯誤，那麼求得的結果雖合方程式，卻可不合原題。)

以上所述，乃代數上求解應用問題的逐則；以下數節再把常見的應用問題分類述其解法，並與算術解法——加以比較。

[註] 有許多應用問題，用算術能解或不能解，正視代數的優及解法可好。

例如 § 44, § 45, § 88 諸節的例題就是如此。

§ 14. 年齡問題 [例一] 長兄 25 歲，小弟 5 歲，問幾年後兄年是弟年的 3 倍？

算術解法 無論何時，在年齡上兄比弟大 $25 - 5 = 20$ 歲。直到兄年是弟年 3 倍時，兄比弟仍大 20 歲，就是說兄弟歲數的差是 20。但因兄年是弟年的 3 倍，兄弟歲數的差又是這時（若干年後）弟年的 2 倍。然則這時弟年的 2 倍就是 20。所以這時弟年是 $20 \div 2 = 10$ 歲。弟現年 5 歲，弟年 10 歲時至今數為 $10 - 5 = 5$ 年。列成一個簡式當如下形：

$$(25 - 5) \div (3 - 1) - 5 = 20 \div 2 - 5 = 5.$$

代數解法 設 $x =$ 所求的年數。則在 x 年後，兄年是 x

年 25 歲，兒子是 $x+5$ 歲。依題意

得方程式 $x+25=3(x+5)$ 。

就是 $x+25=3x+15$

移項得 $25-15=3x-x$

於是 $10=2x$

$$5=x$$

【例二】 現在父年是子年的 5 倍。10 年後，父年是子年的 3 倍。求父子現在的歲數

代數解法 設 x = 子現在的歲數，則

$5x$ = 父現在的歲數，

$x+10$ = 子 10 年後的歲數，

$5x+10$ = 父 10 年後的歲數。

依題意得 $5x+10=3(x+10)$ 。

解之，得 $x=10$ 子現在的歲數，

則 $5x=5 \times 10=50$ 父現在的歲數。

算術解法 學者自己去解。

習 題 七

(用算術，代數兩種解法)

1. 兄年 25 歲，弟年 4 歲。問幾年後兄年是弟年的 3 倍？
2. 兄年 20 歲，弟年 4 歲。問幾年前兄年是弟年的 9 倍？

3. 今年父年是子年的 5 倍，8 年後即為子年的 3 倍，求父年現在幾歲？
4. 距今三年前兄年是弟年的 5 倍，距今三年後兄年是弟年的 3 倍。求兄弟現年各幾歲？
5. 父子歲數的和是 85，20 年後父年是子年的 2 倍。求父年現在幾歲？
6. 母親比兒子大 20 歲，母親比父親小 2 歲，父年 3 倍與子年 5 倍的和是 180 歲。問子年幾歲？

§ 15. 雞犬問題 雞犬共有 49 個頭，103 隻足。問雞犬各有幾隻？

算術解法 假定把題中所有的犬完全換做雞，則應有足 $49 \times 2 = 98$ 隻，比題中所說足數少 $103 - 98 = 5$ 隻。每把一犬換做一雞，其足數減少 $4 - 2 = 2$ 隻。今共少 5 足，故知所換犬數是 $5 \div 2 = 2.5$ 。這就是所求的犬數。列成一式，其形如下：

$$(103 - 49 \times 2) \div (4 - 2) = 5 \div 2 = 2.5 \text{ 犬的頭數,}$$

$$49 - 2.5 = 46.5 \text{ 雞的頭數.}$$

代數解法 1 設犬有 x 隻，則雞有 $49 - x$ 隻，於是犬的足數 $= 4x$ ，雞的足數 $= 2(49 - x)$ 。

由是得方程式 $4x + 2(49 - x) = 103$ 。

就是 $4x + 98 - 2x = 103$ 。

解之，得 $x = 2.5$ 犬有 2.5 隻，

而 $49 - x = 46.5$ 雞有 46.5 隻。

代數解法 2 設雞有 x 隻，則犬有 $49 - x$ 隻，

依題意，得

$$2x + 4(49 - x) = 103$$

就是

$$2x + 196 - 4x = 103$$

移項得

$$196 - 103 = 4x - 2x$$

就是

$$93 = 2x$$

所以

$$45 = x, \text{ 雞有 } 45 \text{ 隻,}$$

而

$$49 - 45 = 4, \text{ 犬有 } 4 \text{ 隻.}$$

習題八

(用算術，代數二種解法)

- 雞犬共有 72 隻足，20 個頭。問雞犬各有幾隻？
- 一元法幣與五元法幣共有 9 張，合計值 29 元。求五元法幣的張數。
- 綫每尺值價 8 角，綉每尺值價 1 元 3 角，某人以 42 元買綫綉共 4 丈。問綫綉各買幾尺？
- 雞犬共有 21 隻，雞的足數是犬的足數的 $\frac{1}{6}$ 。問雞犬各有幾隻？
- 雞的頭數是犬的頭數的 3 倍，其足數的和是 70。求犬的隻數？
- 測驗時每作對一題得 5 分，做錯一題扣 2 分。某生共做 50 題，除扣得 75 分。問該生做對幾題？
- 160 個和尚吃 100 個饅頭，大和尚每人吃 3 枚，小和尚每 3 人吃 1 枚。問大和尚幾人？小和尚幾人？

§ 16. 分桃問題 分桃與兒童，每人 4 個，餘桃 2 枚；每人 6 個，則缺桃 12 枚。求桃數與人數。

算術解法 學者自己去解。

代數解法 設 $x =$ 人數，則 $4x + 2 =$ 桃的總數， $6x - 12 =$

也是他的總數，故得方程式

$$4x + 2 = 3x + 12$$

解之，得

$$7 = x, \text{ 人數爲 } 7,$$

$$4 \times 7 + 2 = 30, \text{ 總數爲 } 30.$$

17. 時鐘問題 時鐘上，二點與三點之間，時針與分針何處相重？

算術解法 學者自己去解。

代數解法 時針速度爲分針

速度的 $\frac{1}{12}$ 。今設分針自二點至兩針

相重時所行的分鐘是 x ，則時針所

行的分鐘是 $\frac{x}{12}$ 。又在二點時時針在

分針前 10 分，故得方程式

$$x = \frac{x}{12} + 10$$

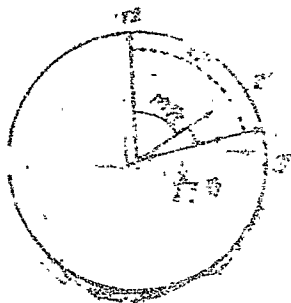
兩邊以 12 乘之，得

$$12x = x + 120$$

解之，得

$$x = \frac{120}{11} = 10\frac{10}{11} \text{ 分}$$

即兩針相重在 2 點 $10\frac{10}{11}$ 分。



習題九

1. 孫樂與吳慶，每人5枚，餘綫5枚；每人6枚，餘綫1枚。求綫數。
2. 孫樂與吳慶，每人4枚，餘綫18枚；每人6枚，餘綫2枚。求綫數。
3. 學生文國維。每期9人，則看2國領各值18人；若每期10人，則看2國領各值5人。問人數若干？

4. 五點與六點之間，時鐘的兩針(時針，分針)何時成一直角？何時成一銳角？

5. 10點與11點之間，時鐘的兩針何時成一直角？

6. 4點與5點之間，時鐘的兩針何時成一直角？(兩題)

16. 工程問題 工程一件，甲一人做，10日可竣；乙一人做，12日可竣。今甲乙合做3日後，再由乙一人繼續做完，問乙尚須幾日？

算術解法 學者自己去解。

代數解法 設 x 為所求的日數。則因乙每日做此事的 $\frac{1}{12}$

故 x 日內能做此事的 $\frac{1}{12}x$ 。乃由題意得方程式：

$$\frac{1}{12}x + 3\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12}\right) = 1$$

於是
$$\frac{1}{12}x + \frac{11}{20} = 1$$

兩邊以60乘之，得 $5x + 33 = 60$

解之，得 $x = 27 \div 5 = 5\frac{2}{5}$ ，乙做完此事尚須 $5\frac{2}{5}$ 日。

§ 19. 數字問題 有二位數，其數字的和是9。交換兩位數字，所成的新數比原數小27。求原數。

算術解法 學者自己去解。

代數解法 設 $x =$ 十位數字，則

$$9 - x = \text{個位數字}$$

$$10x + (9 - x) = \text{原數}$$

$$10(9 - x) + x = \text{交換數字之新數。}$$

於是得方程式

$$10(9 - x) + x = 10x + (9 - x) - 27$$

解之，得 $6 = x$ ，十位數字是 6，

而 $9 - x = 3$ ，個位數字是 3。

∴ 原數是 $10 \times 6 + 3 = 63$ 。

習 題 十

1. 某事，甲獨做5日可成，乙獨做7日可成，丙獨做9日可成。問三人合做幾日可成？

2. 某事，甲獨做5日可成，乙獨做7日可成，丙獨做9日可成。今甲乙二人合做2日後，再由乙丙合做，問尚須幾日可成？

3. 某池有三管，單開A管注水，5時可滿；單開B管注水，7時可滿；單開C管放水，9時而竭。今三管齊開，欲將這空池注滿，問須幾時？

④ 甲乙二人同繞跑道而跑，甲跑一圈需時12秒；乙跑一圈需時15秒。設二人同時由同地起跑，問(a)同向而進，幾時相遇？(b)異向而進，幾時相遇？

5. 有二位數，其數字之和是 15，交換兩位數字成一新數，這新數比原數大 9，求原數。

6. 有二位數，其數字之和是 14，交換兩位數字成一新數，這新數比原數小 20，求原數。

7. 有二位數，其十位數字比個位數字少 8，將個位數加 2，則其數等於十位數字之 11 倍，求這二位數。

126. 英語問題 例一：東倉有米 450 石；西倉有米 200 石，東倉每日取出 20 石；西倉每日存入 30 石。隔幾日後西倉的米等於東倉的米的 2 倍？

代數解法 設 x = 所求的日數，則在 x 日後東倉有米 $(450 - 20x)$ 石，西倉有米 $(200 + 30x)$ 石，由是得方程式

$$200 + 30x = 2(450 - 20x)$$

解之，得

$$x = 10, \text{ 所求的日數。}$$

英語解法 學者自己去解。

例二：把 .37 化成分數。

代數解法 因 $.37 = .37 + .0037$

$$= .37 + \frac{1}{100} \times .37$$

所以，若設 x = 所求的分數，則得方程式：

$$x = .37 + \frac{1}{100}x$$

移項，得

$$x - \frac{1}{100}x = .37$$

即

$$\frac{99}{100}x = .87$$

兩邊各以 $\frac{100}{99}$ 乘之，得

$$x = .87 \times \frac{100}{99} = \frac{87}{99}$$

這就是所求的分數。

算術解法 學者試自己去解。

習 題 十 一

1. 甲有國幣 100 元，乙有國幣 50 元。甲每日支出 3 元，乙每日支出 5 元。問幾日後甲比乙多有 18 元？幾日後甲所有的是乙所有的 $\frac{11}{10}$ ？

2. 東倉有米 960 石；西倉有米 600 石。每日從東倉取出 30 石，從西倉取出 40 石。問幾日後東倉存米等於西倉存米的 5 倍？

3. 甲乙共分法幣 500 元。甲所得的 6 倍比乙所得的 5 倍少 100 元。求各人所得的元數。

4. 甲乙二人所有元數相等。若乙給甲 50 元，則甲所有元數為 3 倍等於乙所有元數的 11 倍。問甲原有幾元？

5. 甲乙二人共有國幣 100 元，若乙給甲以甲所有的元數，則甲所有元數的 3 倍等於乙所有元數的 7 倍。問甲乙各有幾元？

6. 甲乙兩地相距 180 里。A 從甲地到乙地，每時行 8 里；B 從乙地到甲地，每時行 6 里。若二人同時起行，問相遇於何處？

7. 從甲地往乙地，步行需九時可到，車行需 6 時可到。某人步行了 3 小時，即改車行，先後共經七時而到。求步行所行的路程。

8. 大戰之後，某軍死傷 $\frac{1}{6}$ ，逃亡 4000 人。增兵 2000，再戰又損失 $\frac{1}{4}$ 。總計尚餘 15000 人。問該軍在大戰前原有幾人？

9. 船在靜水，每時行 5 里，今在水流速度每時 2 里的河中，上下一共共需 20 時。求河長及上行所需的時數。
10. 有兵一隊，備 80 日的糧食。經 23 日後增兵 2000 人，於是所有的糧食，僅能再支持 10 日。求原有兵數。
11. 以酒 12 斗與水 18 斗混合成薄酒；又以酒 9 斗與水 3 斗混合成濃酒。現在要把薄酒濃酒混合，使所含的酒與水各是 14 斗。問薄酒當用幾斗？
12. 某人用國幣 694 元，買馬 2 匹和牛 5 匹。馬比牛每匹貴 8 元。問牛每匹值幾元？
13. 工人作工一日得工資 3 角，曠工一日罰去 4 角，今在 30 日內除罰得 18 元。問共作工幾日？
14. 大小兩數的差是 20，和是 22，求這二數。
15. 大數比小數多 5，牠們的和是 255，求這二數。
16. 相鄰三整數的和是 33，求各數。
17. 相鄰五奇數的和是 55，求各數。
18. 某數的 3 倍與其 5 倍的和是 56，求該數。
19. 某數的 3 倍比該數與 5 的和大 15，求該數。
20. 大數是小數的 5 倍，大數與 5 的和比小數與 100 的和少 15，求大小二數。

第二章 正負數

I. 正負數的性質及其基本運算

§ 21. 負數的需要 為什麼需要負數？

請看下列：

[例] 求解 $x+4=3$

移項，得 $x=3-4=?$

這個減法問題，在我們不懂負數時，便不能進行。對於原方程式因此便無法求解。

上例只從解方程式方面，知道負數的需要。在日常生活方面，負數的用處也實在不小。

(參看習題十二。)

§ 22. 負數的意義

$$2-1=1, \quad 1-2=?$$

$$3-1=2, \quad 1-3=?$$

$$4-1=3, \quad 1-4=?$$

$$5-1=4, \quad 1-5=?$$

.....

在算術上，對於左列諸問題，各有確定答案，對於右面這些問題，就因被減數太小，說牠不能相減，沒有答案。但若仔細考究，右面諸問，被減數雖則都嫌太小，有所短少；然而所少幾何，不是也有大小的分別嗎？所以在代數上，乃就這所少的量加以推求。於是因

1-2 所少為 1，就說 1-2 得“負 1”以“-1”記之。

1-3 所少為 2，就說 1-3 得“負 2”以“-2”記之。

1-4 所少爲 3，就說 1-4 得“負 3”以“-3”記之。

1-5 所少爲 4，就說 1-5 得“負 4”以“-4”記之。

所以凡說“負幾”就是“不足幾”，“少幾”，或“欠幾”的意思。在算術，減法運算有時而窮；在代數，因爲增加了負數，於是任何的減法，就沒有不可運算的例外了。

明白了負數的意義，再看負數的尋常事例：

(a) 趙君以 2000 元的資本買物若干，其後全部賣出，得國幣 2350 元。於是趙君獲利

$$2350 \text{ 元} - 2000 \text{ 元} = 350 \text{ 元。}$$

錢君以 2000 元的資本買物若干。後全部賣出，得國幣 1500 元。錢君實在虧本

$$2000 \text{ 元} - 1500 \text{ 元} = 500 \text{ 元。}$$

但在代數上，我們可以說錢君虧本 500 元；也可以說錢君獲利

$$1500 \text{ 元} - 2000 \text{ 元} = -500 \text{ 元，}$$

只要注意所獲的利是“負”的就是了。說錢君獲利 -500 元，就是說他非特不會獲利，並且折本 500 元。

(b) 李生開學時由家帶來 60 元。入校後應繳學費 20 元，膳費 30 元，宿費 5 元，其他運動，圖書，醫藥等費共 8 元。問該生尙餘若干元？實在該生之款，不特一無所餘，而且短少 3 元。但在

代數上，又可說該生尚餘 -3 元。

(c) 某日室內溫度在正午時為華氏 70° ，午後二時上昇 5° ，午後四時下降 8° 。問此時室內溫度比正午時昇高幾度？這時溫度比正午時實在下降 3° 但在代數上，也可說上昇 -3° 。

(d) 李四自某鎮向東行 10 里，復向西行 15 里，問李四究在何處？李四距該鎮 5 里，並在該鎮之西。但在代數上，也可說李四在該鎮之東 -5 里。

習 題 十 二

$$1. \quad 5-6=-1 \quad 5-7=? \quad 5-8=? \quad 5-9=?$$

$$1-10=? \quad 1-11=? \quad 1-12=? \quad 1-13=?$$

$$2-100=? \quad 2-101=? \quad 2-103=? \quad 2-104=?$$

$$2. \quad 0-1=-1, \quad 0-2=-2, \quad 0-3=? \quad 0-4=?$$

$$0-10=? \quad 0-20=? \quad 0-30=? \quad 0-100=?$$

$$3. \quad 100-90=? \quad 100-95=? \quad 100-100=? \quad 100-105=?$$

$$100-110=? \quad 100-115=? \quad 100-120=? \quad 100-125=?$$

4. 某甲收入 50 元，支出 49 元。某甲有若干元？若收入 50 元，支出 60 元，某甲有若干元？

5. 某甲行路，前進 8 里，後退 5 里，結果前進幾里？若前進 8 里，後退 11 里，結果前進幾里？

6. 溫度上昇 10°C ，下降 5°C ，結果上昇幾度？若上昇 5°C ，下降 10°C ，結果上昇幾度？

7. 某人經商第一月獲利 100 元，第二月虧本 120 元。此兩月合計，

獲利若干元？損失若干元？

8. 某人經商第一月獲利 100 元，第二月折本 50 元。兩月合算，獲利若干元？損失若干元？

9. 某校本學期添設新生 100 名，舊生退學的 10 名，保送的 20 名，畢業的 55 名，問本學期減少若干人？增加若干人？

10. 測驗時做對 1 題得 5 分，做錯 1 題扣 1 分。某生做對 1 題，做錯 3 題。該生實得幾分？

§ 23. 負數正數絕對值 如前所述，自 2 減 6，結果欠 4，在代數，於 4 之前冠以“-”號，以示欠少的意思。這“-4”叫做“負 4。”推之，凡數之前冠以“-”號的都叫做負數，其“-”叫做負號。

對於負數而言，尋常的數 [例如 $6-2=4$ 的 4] 叫做正數。正數之前冠以“+”號，這“+”叫做正號。“正”與“負”對待而言；倘使沒有負數，那麼對於尋常的數，就不必加上什麼“正”的名號了。

略去數前的“+”，“-”符號，專指所餘的數字而言，這數字叫做該數的絕對值。例如 -3 的絕對值是 3，+3 的絕對值也是 3。 $+x$ 與 $-x$ ，牠們的絕對值同是 x 。

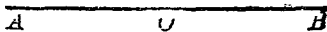
【註 1】除零外，凡數非負即正。負數之前既必冠以“-”號，那麼沒有“-”“-”符號的數就是專指正數。

【註 2】由前所述，可見“+，-”兩記號各有兩種意義：其一表“加減”；其二表“正負”。表加減時叫做運算符號；表正負時叫做性質符號。

在某一式內，這“+，-”號究竟是不是運算符？還是性質符號？自然能從上下文識別之。

習 題 十 三

1. 某人沿直線 AB 進行，行至與 O 點相距 20 尺的地方，問此人先在何處？若把向右的方向



當做正，那麼，假如說“此人距 O 點 -20 尺”，此人的位置是否確定？

2. 攝氏寒暑表的冰點是 0°C 。冰點以上的度數是正的，那麼 -10°C 在冰點下，抑在冰點上？與冰點相距幾度？

3. 假若在今日以前的時間，用正數表示。那麼在今日以後的時間，應如何表示？+3 年與 -8 年各表何時？

4. 解釋下列各條的實際意義：

(a) 某人經商，第一年獲利 -200 元，第二年損失 -400 元。

(b) 某人體重，本月減輕 -2 磅，前月加重 -2 磅。

(c) 某人算學成績，本月進步 -15 分，上月退步 -20 分。

5. 討論正負數的大小。(a) +5 比 +4 那個大？絕對值那個大？然則，在任何正數中，絕對值愈大的，他的價值是否愈大？

(b) -1 比 -2 那個大？絕對值那個大？然則，在負數中，絕對值愈大的，他的價值愈大，抑愈小？

(c) 0 比任何正數那個大？0 比任何負數那個大？

(d) 負數 $< 0 <$ 正數，對否？正數 $>$ 負數 < 0 ，對否？負數 $<$ 正數 > 0 ，對否？

正數 $<$ 負數 < 0 ，對否？

[注意] $>$ ，開口一邊向左，讀做大於； $<$ ，開口一邊向右，讀做小於。

§ 24. 正負數的運算 § 5 所講的運算公律適合於正數

的運算，也同樣適用於負數與正數間或負數與負數間的運算。請看下列事例：

(a) 趙君原負債 50 元，後收入 100 元，趙君所有的是
 $(-50)元 + (+100)元 = (+50)元。$

假使趙君先收入 100 元，後負債 50 元，那麼趙君所有的是
 $(+100)元 + (-50)元 = (+50)元$

所以趙君收入和負債的先後，對於趙君的資產總額是沒有關係的，這證明加法交換律適合於負數與正數間的運算。

(b) 趙君原欠錢君 50 元，又續借 30 元，趙君所有的是
 $(-50)元 + (-30)元 = (-80)元。$

假使趙君原欠錢君 30 元，又續借 50 元，那麼趙君所有的是
 $(-30)元 + (-50)元 = (-80)元。$

所以趙君向錢君多借少借的先後，結果對於趙君的資產總額沒有關係。這證明加法交換律也適用於負數與負數間的運算。

(c) 某君從半山每小時下行 3 里，先行了 2 小時，休息後又行 3 小時。那麼他共行了 5 小時，下行 15 里，就上山的成績來說，是行了 (-15) 里。這可用下式表明：

$$(2 \text{ 小時} + 3 \text{ 小時}) \cdot (-3) \text{ 里} = (5 \text{ 小時}) \cdot (-3) \text{ 里} = -(15) \text{ 里。}$$

但也可以說：他先於 2 小時內下行 6 里，休息後又於 3 小時內下行 9 里，共下行了 15 里，就上山的成績講，行了 (-15) 里，

用式表之，就是

$$(2 \text{ 小時})(-3) \text{ 里} + (3 \text{ 小時})(-3) \text{ 里} = (-6) \text{ 里} + (-9) \text{ 里} \\ = (-15) \text{ 里}。$$

這又是乘法分配律適合於負數與正數間的運算的證明了。

其餘如加法結合律，乘法交換律和乘法結合律的適合於一切正負數的運算，當然也可以證明的。以下所講正負數的四則運算，都以運算公律為根據。

§ 25. 正負數的加法 本問題可分三類如下：

(a) 正數 + 正數 例如，

$$(+2) + (+3) = +(2+3) = +5。$$

$$(+3) + (+4) = +(3+4) = +7。$$

普遍言之， $(+a) + (+b) = +(a+b)。$

(b) 負數 + 負數 例如，

$$(-2) + (-3) = -(2+3) = -5。$$

$$(-3) + (-4) = -(3+4) = -7。$$

普遍言之， $(-a) + (-b) = -(a+b)。$

由(a),(b)兩類看來，可見同號兩數相加時，就是把牠們的絕對值相加，而於其和冠以兩數原有的符號。此理甚明，例不多舉。

(c) 正數 + 負數 (或負數 + 正數) 異號兩數相加時，就是把牠們的絕對值相減，而於其差冠以絕對值較大之數的符號。

例如，

$$1. \quad 5 + (-3) = +(5-3) = +2。$$

絕對值較大之數的符號是正，差前冠以正號。

$$2. \quad (-5) + (+3) = -(5-3) = -2。$$

絕對值較大之數的符號是負，差前冠以負號。其理由可從多方面來解釋：

【第一】 據本節(a)，得 $+5 = (+2) + (+3)$ ，故

$$1. \quad +5 + (-3) = (+2) + (+3) + (-3) = (+2) + 0 \\ = +2 = +(5-3)。$$

又據本節(b)，得 $-5 = (-2) + (-3)$ ，故

$$2. \quad (-5) + (+3) = (-2) + (-3) + (+3) = (-2) + 0 \\ = (-2) = -(5-3)。$$

【第二】 據 §22, $(-3) = 1-4$ ，故

$$1. \quad 5 + (-3) = 5 + 1 - 4 = 6 - 4 = 2 = +(5-3)。$$

又據 §22, $(-5) = 1-6$ ，故

$$2. \quad (-5) + 3 = 1 - 6 + 3 = 4 - 6 = -2 = -(5-3)。$$

【第三】 1. 某甲經商，第一日賺5元，第二日折本3元。

二日合計，共賺 $(5-3)$ 元。但第二日折本3元，也可當作賺 (-3) 元，故二日合計，所賺元數又可以 $(+5)$ 元 $+$ (-3) 元來表示。

所以有

$$(+5)+(-3)=(5-3)=+(5-3)。$$

2. 第一日折本5元,第二日賺3元,則二日合計,折本元數爲 $2=(5-3)$,即賺利元數爲 $-(5-3)$;又二日合計,賺利元數又可寫成 $(-5)+(+3)$ 。所以有

$$(-5)+(+3)=- (5-3)。$$

以上三種解釋,不但適用於上述二例;推至任何其他數例,無往不真。所以總而言之,異號兩數相加,應如下式:

$$\text{當 } a > b \text{ 時, } (+a)+(-b) = +(a-b)。$$

$$\text{當 } b > a \text{ 時, } (+a)+(-b) = -(b-a)。$$

【註】代數和 爲與算術和(就是絕對值的和)加以區別起見,凡從上述正負數加法加得的結果,特地給他一個新的名稱叫做代數和。

例如 $+5$ 與 -3 的代數和就是 $(+5)+(-3)=2$ 。

習 題 十 四

求下列各代數和:

- | | |
|---------------------|------------------------|
| 1. $(-5)+8=?$ | 2. $5+(-8)=?$ |
| 3. $(-5)+(-8)=?$ | 4. $(-1)+100=?$ |
| 5. $1+(-100)=?$ | 6. $(-1)+(-100)=?$ |
| 7. $(-0)+100=?$ | 8. $+0+(-100)=?$ |
| 9. $(-0)+(-100)=?$ | 10. $(-2)+(-3)+(-4)=?$ |
| 11. $(-2)+(-3)+4=?$ | 12. $2+(-3)+(-4)=?$ |
| 13. $(-2)+3+(-4)=?$ | 14. $(-2)+3+4=?$ |
| 15. $2+(-3)+4=?$ | 16. $(-5x)+8x=?$ |

17. $5x + (-3x) = ?$

18. $(-5x) + (-3x) = ?$

19. $(-2x) + (-3x) + (-4x) = ?$

20. $(-2x) + (-3x) + 4x = ?$

21. $2x + (-3x) + (-4x) = ?$

22. $(-2x) + 100x = ?$

23. $(-x) + 100x = ?$

24. $(-x) + (-100x) = ?$

§ 23. 正負數的減法 本問題可分為兩類如下：

(a) 任何數 - 正數。先看下列：

1. $2 - (+5) = 2 + (-5) + (+5) - (+5) = 2 + (-5)。$

2. $(-2) - (+5) = (-2) + (-5) + (+5) - (+5)$
 $= (-2) + (-5)。$

由上二例看來，可見從任何數減去正數，就是把減數改變符號以與被減數相加。其理由更可普遍地證明如下：

$$x - (+a) = x + (-a) + (+a) - (+a) = x + (-a)$$

(b) 任何數 - 負數。先看下列：

1. $2 - (-5) = 2 + (+5) + (-5) - (-5) = 2 + (+5)$

2. $(-2) - (-5) = (-2) + (+5) + (-5) - (-5)$
 $= (-2) + (+5)。$

由上二例看來，可見從任何數減去負數，也就是把減數改變符號以與被減數相加。其理由也可普遍地證明如下：

$$x - (-a) = x + (+a) + (-a) - (-a) = x + (+a)$$

綜合(a)，(b)二類，乃得 $x - (\pm a) = x + (\mp a)$ 。換句話說：要兩數相減，就是把減數的符號改變以與被減數相加。

習 題 十 五

1. 某甲有現款 x 元，債務 y 元，其實際所有的財產是不是 x 元 $+(-y)$ 元？倘此人償清債務後，其所餘財產是不是 x 元 $-y$ 元？這樣看來， $x-y=x+(-y)$ ，對不對？

2. 某甲有現款 x 元 $+y$ 元，債務 y 元，則其實有財產是不是 x 元 $+y$ 元 $+(-y)$ 元（即 x 元）？倘若債權人忽將債權放棄，則某甲實有財產，是不是 x 元 $-(-y)$ 元？又此時某甲實有財產，是否就是他所有的現款 x 元 $+y$ 元？這樣看來， $x-(-y)=x+y$ 對不對？

3. $2-8=?$

4. $(-2)-3=?$

5. $2-(-8)=?$

6. $(-2)-(-3)=?$

7. $2x-8x=?$

8. $(-2x)-8x=?$

9. $2x-(-8x)=?$

10. $(-2x)-(-8x)=?$

11. $2-(-3)-4=?$

12. $(-2)-3-(-4)=?$

13. $2x-2x-(-4x)=?$

14. $x-2x-3x=?$

習 題 十 六

把下列各題中諸式相加：

1. $2x+3y,$

$-2x+y,$

$4x-8y.$

【解法】

$2x+3y$

$-2x+y$

$4x-8y$

$3x-4y$

【註】 $2x+(-2x)+4x=[2+(-2)+4]x=3x$

$3y+y+(-8y)=[3+1+(-8)]y=-4y.$

- | | | |
|----------------|--------------|--------------|
| 2. $3x+6y,$ | $-2x+7y,$ | $6x-9y.$ |
| 3. $x+y+z,$ | $3x-2y+4z,$ | |
| 4. $3x-6y-8z,$ | $-7x-2y-3z.$ | |
| 5. $x+y+z,$ | $5x+4y-8z,$ | $-8x-7y+5z.$ |

下列各區內，試自前式減去後式：

- | | |
|-----------------|--------------|
| 6. $x+2y,$ | $-10x+55y.$ |
| 7. $-x-2y,$ | $x+2y.$ |
| 8. $-x+2y,$ | $x-2y.$ |
| 9. $-8x+9y,$ | $-8x+9y.$ |
| 10. $8x+9y-5z,$ | $-8x+9y-5z.$ |
| 11. $x+2y-3z,$ | $4x+5y+6z.$ |

§ 27. 去括號 本問題可分兩類如次：

(a) 括號之前有正號的。 此時，欲去括號，直接撤去括號就是了。括號內各項的符號一律不變。例如，

$$+(A+B) = A+B. \quad (1)$$

$$+(A-B) = A-B. \quad (2)$$

此理甚明，無庸贅述。

(b) 括號之前有負號的。 此時，撤去括號後括號內所有各項的符號都應改變，原為正號的變成負號；原為負號的變成正號。其理由如下：

$$I. \quad -3-4 = -3+(-4) = -(3+4)$$

$$-5-8 = -5+(-8) = -(5+8)$$

推之, $-A+B = -A+(-B) = -(A-B)$

$$\therefore \underline{-(A+B) = -A-B.} \quad (3)$$

$$\text{II} \quad \begin{aligned} -(3+4) &= -[3+(-4)] \\ &= -3-(-4) = -3+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(3-3) &= -[3+(-3)] \\ &= -3-(-3) = -3+3 \end{aligned}$$

推之, $-(A-B) = -[A+(-B)]$
 $= -A-(-B) = -A+B$

$$\therefore \underline{-(A-B) = -A+B.} \quad (4)$$

【注意1】將上列(1),(2),(3),(4)諸式自右向左看,便得插入括號的規則:把若干項置入括號內,括號之前如有正號,被置諸項符號不變;括號之前如有負號,被置諸項符號全變。

$$\begin{aligned} \text{例如,} \quad 3+2-5 &= 3+(2-5), \\ 3+2-5 &= 3-(-2+5). \end{aligned}$$

【注意2】由§5(5)及本符,可得下列二式:

$$\begin{aligned} 1. \quad +m(x+y-z) &= mx+my-mz. \\ 2. \quad -m(x+y-z) &= -(mx+my-mz) \\ &= -mx-my+mz. \end{aligned}$$

習 題 十 七

撤去下列各式中的括號:

$$\begin{array}{ll} 1. \quad 3x-(y-3). & 2. \quad 3x+1(y-5). \\ 3. \quad 3x-(y+3). & 4. \quad 3x+(y+3). \end{array}$$

5. $-[x+(y-z)-d]$ 。

6. $=[x-(y-z)+d]$ 。

7. $3(x+y-z)$ 。

8. $4(x-y-z)$ 。

9. $5(x+3)+6y$ 。

10. $5(x-3)-6y$ 。

化簡下式：

11. $5(x-3)-6(x+6)$ 。

[解法] 原式 $=5x-15-6x-48=(5x-6x)-(15+48)=-x-63$ 。

12. $5(x-3)-6(x-8)+x-3$ 。

13. $9(x-y)+8(x-3)-x$ 。

14. $-5(x-3)+6(8-x)+9$ 。

15. $-3(x-1)+4(x-2)-5(x-3)$ 。

在下列四題內，把含 a, y 的各項放入冠有負號的括號內；含 x, z 的各項

放入冠有正號的括號內：

16. $a-2x+3y-4z$ 。

17. $a-[2x-(3y-4z)]$ 。

18. $a-[(2x-3y)+4z]$ 。

19. $a-[2x-(3y+4z)]$ 。

20. 設 $x=m+y$ ，則 $-(x-y)=- (m+y-y)=-m=-m-y+y$
 $=-(m+y)+y=-x+y$ 。

又設 $y=m+x$ ，則 $-(x-y)=- (x-m-x)=+m$
 $=+m+x-x=+y-x$ 。

這不是去冠有負號的括號規則的又一證明嗎？試仿此意說明 $-(5-8)$ 何以等於 $-5+8$ ，及 $-(7-3)$ 何以等於 $-7+3$ 。

§ 28. 正負數的乘法 本問題可分三類如下：

(I) 正數 × 正數 $(+a)(+b)=+ab$ 。例如 $(+2)(+3)=+6$ 。此理甚明，無須贅述。(II) 正數 × 負數 (或 負數 × 正數) 例如 $(+a)(-b)=?$ 欲答這個問題，先看特例：

$$1. \quad 2(-3) = 2 \text{ 個 } (-3) \text{ 的和 } = (-3) + (-3) = -6 \\ = -(2 \times 3)。$$

$$2. \quad 3(-5) = 3 \text{ 個 } (-5) \text{ 的和} \\ = (-5) + (-5) + (-5) \\ = -15 = -(3 \times 5)。$$

$$3. \quad 2(-b) = 2 \text{ 個 } (-b) \text{ 的和 } = (-b) + (-b) \\ = -2b = -(2 \times b)。$$

$$4. \quad 3(-b) = 3 \text{ 個 } (-b) \text{ 的和} \\ = (-b) + (-b) + (-b) \\ = -3b = -(3 \times b)。$$

推之，在普遍情形下，應有

$$a(-b) = a \text{ 個 } (-b) \text{ 的和} \\ = (-b) + (-b) + (-b) + \dots + \text{到 } a \text{ 個} \\ = -ab = -(a \times b)。$$

$$\underline{\underline{(+a)(-b) = -(a \times b)}}$$

用語言來說：“異號兩數相乘時，就是把兩數的絕對值相乘，而於其積之前冠以“-”號。”

例如，某人經商，每月獲利 50 元。三月合計，獲利應為 3(-50 元)；其實此人每月折本 50 元，三月共折本 150 元，也就是獲利 -150 元。然則，3(-50) 與 -150 可為此人所賺的元

數，不是相等嗎？

所以 $3(-50) = -150 = -(3 \times 50)$ 。

又如大戰時某軍每日後退 30 里，7 日合計，該軍後退 7×30 里。用負數說，該軍前進 $-(7 \times 30)$ 里。又每日後退 30 里，也就是前進 -30 里，7 日合計，該軍前進 $7(-30)$ 里。然則， $7(-30)$ 與 $-(7 \times 30)$ 同為該軍後退的里數，不應相等嗎？

所以 $7(-30) = -(7 \times 30)$ 。

以上兩例，都是 $(+a)(-b) = -(a \times b)$ 的例證。其他例證甚多，學者試各舉數條。

(III) 負數 × 負數 例如 $(-a)(-b) = ?$

欲答這個問題，先看特例：

$$1. (-2)(-3) = -2(-3) = -(-6) = 6。$$

(參看 § 27 及 § 27 注意 2 第 3 式)。

$$2. (-2)(-b) = -2(-b) = -(-2b) = 2b。$$

$$3. (-3)(-b) = -3(-b) = -(-3b) = 3b。$$

推之，在普遍情形下，應有

$$(-a)(-b) = -a(-b) = -(-ab) = ab。$$

$$(-a)(-b) = ab。$$

用語言來說：“兩負數相乘時，就是把兩數的絕對值相乘，而於其積之前冠以正號”。

例如，某人經商，每年獲利 -500 元，三年之後已無資本，則三年之前對現在說是 (-3) 年，當時原有的資本為 $(-3)(-500)$ ；其實此人每年折本 500 元，三年共折本 1500 元，此時資本已折盡，所以三年之前原有的資本就是 1500 元。然則 $(-3)(-500)$ 與 1500 同為此人三年前原有的資本，不是相等嗎？

所以
$$(-3)(-500) = 1500.$$

又如，大戰時某軍每日後退 30 里， 7 日共退 210 里而至甲地，也就是某軍於 7 日前在甲地前方 210 里；每日向甲地後退 30 里，就是前進 -30 里，七日之前對現在說也就是 -7 日，那麼，七日之前某軍是在甲地的前方 $(-7)(-30)$ 里。然則 210 與 $(-7)(-30)$ 同為該軍於七日前在甲地前方的里數，不是相等嗎？

所以
$$(-7)(-30) = 210.$$

以上兩例都是 $(-a)(-b) = ab$ 的例證，其他例證甚多，學完試各舉數條。

習 題 十 八

1. 由(I), (III)已知 $(+a)(+b) = +ab$,

$$(-a)(-b) = +ab,$$

則(甲) 同號兩數相乘，積是正的，還是負的呢？

(乙) $(+a)(+b) = (-a)(-b)$ ，對不對？

(丙) $(-a)(-b)(-c)(-d) = abcd$ ，對否？

(丁) $(-a)(-b)(-c)(-d)(-e)(-f) = abcdef$, 對不對?

2. 由(II)知 $(+a)(-b) = -ab$,

由(III)知 $(-a)(-b) = ab$,

然則(甲) $(-1)(-1)(-1) = ?$

$(-a)(-b)(-c) = abc$, 對不對?

(乙) $(-1)(-1)(-1)(-1) = ?$

$(-a)(-b)(-c)(-d) = abcd$, 然否?

(丙) $(-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = ?$

$(-a)(-b)(-c)(-d)(-e) = abcde$, 然否?

(丁) 異號兩數相乘, 積是正的, 還是正的呢?

3. $3 \times (-2) = ?$ $(-5) \times (-2) = ?$ $(-3) \times 2 = ?$

4. $(-3) \times (-2) \times (-5) = ?$ $(-5) \times (-2) \times (-1) \times (-3) = ?$

5. 設 $a=1$, $b=-2$, $c=-3$, 問 $a+b+c = ?$ $a+2b+3c = ?$

$2a \times 2b \times c = ?$ $abc = ?$ $2abc = ?$ $5abc = ?$

6. $2(-32x) = ?$ $3(-8x) = ?$ $4(-3xyz) = ?$

7. $2x(-3y) = ?$ $3x(-2y)(+3z) = ?$

$(-3x)(-2y)(-3z) = ?$

8. $2x(-3y) + (-2x)(-3y) + (-5x)(-3y) + (-7x)(+2y) = ?$

9. $2(-3x) + (-4)(-5x) - (-2)(-7x) = ?$

$(-2x)(-3x)(-4x) = ?$

10. (a) $(x-y)(x-y) = (y-x)(y-x)$, 對不對?

(b) $(x-y)(x-y)(x-y) = (y-x)(y-x)(y-x)$, 對不對?

(c) $(x-y)(x-y)(x-y)(x-y)$

$= (y-x)(y-x)(y-x)(y-x)$, 對不對?

(d) $(x-y)(x-y)(x-y)(x-y)(x-y)$

$= (y-x)(y-x)(y-x)(y-x)(y-x)$, 對不對?

§ 29. 正負數的除法，除法為乘法的還原，所以除法的問題可由乘法結果推得其解答如次：

$$\therefore \begin{cases} (+a)(+b) = +ab \\ (+a)(-b) = -ab \\ (-a)(-b) = +ab \\ (-a)(+b) = -ab \end{cases} \quad \begin{cases} +a = \frac{+ab}{+b} & (1) \\ +a = \frac{-ab}{-b} & (2) \\ +a = \frac{+ab}{-b} & (3) \\ -a = \frac{-ab}{+b} & (4) \end{cases}$$

由上列四式觀之，乃得除法的規則如下：

[第一] 商的符號 同號兩數相除，其商為正；異號兩數相除，其商為負。

[第二] 商的絕對值 就是以除數絕對值除被除數絕對值所得之商。

$$3 \div (-3) = -1 \quad \{ 3 \div (-2) = -\frac{3}{2}$$

$$(-3) \div 2 = -\frac{3}{2} \quad (-3) \div 2 = -\frac{3}{2}$$

$$(-3) \div (-2) = \frac{3}{2} \quad (-3) \div (-2) = \frac{3}{2}$$

習題十九

$$1. (-2) \div (-1) = 2, (-6) \div (-2) = 3, (-4) \div 2 = -2, (-3) \div (-2) = \frac{3}{2}$$

$$2. (-3) \div (-6) = \frac{1}{2}, 3 \div (-6) = -\frac{1}{2}, (-3) \div 6 = -\frac{1}{2}, 2 \div 6 = \frac{1}{3}$$

$$3. 36 \div (-2) \div (-3) \div (-2) = ? \quad 36 \div (-2) \div (-3 \div 2) = ?$$

$$(-36) \div (-4) \div (-9) = ?$$

$$4. (-7)(-8) \div 2 \div (-4) = ? \quad (-7)(-8) \div (-2) \div (-7) = ?$$

$$(-2)(-3)(-5) \div (-6) \div (-5) = ?$$

$$5. -(-6x) \div 3 = ? \quad (-6x) \div (-3) = ? \quad 6x \div (-3) = ?$$

$$(-3)(-8x) \div (-6x) = ?$$

$$6. (-3)(+8x) \div (-6x) = ? \quad (-3)(-8x) \div 6x = ?$$

$$3(-8x) \div (-6x) = ? \quad (-3)(+8x) \div 6x = ?$$

II. 負數在解方程式上的應用

§ 20. 利用負數有時可減省移項手續。求解方程式依第一章所述方法，非先行移項，無法可得其解；但此種移項手續，在能利用負時，就非常簡便。請看下列：

例一 求解

$$2x - 4x = 2 - 8$$

[解法] 依正負數減法化簡兩邊，得

$$-2x = -6$$

兩邊各以 -2 除之，得

$$x = -6 \div (-2) = 3.$$

例二 某數 2 倍與 50 的和比這數 5 倍多 26，求這數。

[解法] 設某數為 x ，那麼某數 2 倍與 50 的和是 $2x + 50$ ，

某數 5 倍是 $5x$ 。由題意得方程式

$$2x + 50 - 5x = 26$$

移項，得

$$2x - 5x = 26 - 50$$

兩邊各自化簡，得

$$-3x = -24$$

兩邊各除以 -3 , 得 $x=8$

故此數為 8。

【註】本題臨用負數，只須把 50 移到右邊，否則若把含 x 的各項全都移到右邊，並把 20 移到左邊不可。

利用負數以解方程式，恆可把含 x 的各項一律移到右邊，不含 x 的各項一律移到左邊。這是習慣上通用的形式。在不符合的作用時，學者應該選擇適當的慣例。

§ 31. 利用負數有時方程式才能有根 前於 § 21 已略為提及，茲補足之。

例一 求解 $x+4=^{\circ}$ 。

【解法】移項，得 $x=3-4=-1$ 。

例二 大小二數的和是 2。大數 3 倍與小數 2 倍的和是 11，求大小二數。

【解法】設 x = 大數，那麼 $2-x$ = 小數。由題意得方程式

$$3x+2(2-x)=11$$

即

$$3x+4-2x=11$$

移項，得

$$3x-2x=11-4$$

∴

$$x=7,$$

而

$$2-x=2-7=-5.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{大數是 } 7; \\ \text{小數是 } -5. \end{array} \right.$$

在應用問題中，解方程式所得負根，有時合理，有時不合理；例如求資產而得負根，可以作負債解釋，是合理的，求人數而得負根，是不合理的。故解應用題而得負根，須與實在情形相符，方纔適用。

習題二十

用最簡便手續解下列各方程式：

- $3(x+2)+8=7(x-2)+16。$
- $x+2x-8x=7(x+5)-83。$
- $5(x+5)=7(x+2)+1。$
- $2x+3x=9(x+6)-64。$
- $5(x+5)=6(x+4)。$
- $9x-6+3(x+7)=2(x-1)+Cx。$
- $10+(x-3)-2(x-1)=x+8。$
- $2x-2(5x-3)=4(x+3)-3(x+1)。$
- $4(x-1)-(4x-1)=5(2-x)-10-x。$
- $6(7x-2)-3(x+5)=3(4x+1)。$

以下各式應用問題如得負根，應解釋是否合理：

- 大小兩數的和是 29，其差是 40。求這兩數。
- 某數的 3 倍比牠的 5 倍大 84。求這數。
- 攝氏 3 度的溫度相當於華氏幾度？
- 攝氏幾度何時與華氏幾度相同？
- 某數的 $\frac{1}{2}$ 與 10 之和等於牠的 $\frac{1}{3}$ 與 5 之和。求這數。
- 父年 35 歲，子年 10 歲。問幾年後父年是子的 6 倍？

17. 父親比兒子大 25 歲，30 年後父親的年紀是兒子的 2 倍。問現在父子各幾歲？

18. 甲有存款 500 元，乙有存款 100 元。每月甲比乙多賺 2 元。4 月後甲所有的元數是乙的元數的 4 倍。問甲、乙每月各賺幾元？

19. 甲的財產比乙的財產少 200 元。甲每月收入 50 元；乙每月收入 20 元。三個月後，甲的財產是乙的 3 倍。問甲乙二人原來各有幾元？

20. 大人每人得蘋果 8 枚，小孩每人得蘋果 5 枚。現共有 23 人，蘋果 118 枚。問大人小孩各幾人？

第三章 整式四則之一 加減法

§ 32. 引論 由前所述，已見依代數方法，引用文字代替未知數，以解應用問題，比之僅用算術的解法，手續簡而效力大。凡算術四則中認為極難的問題，一經利用代數方程式，便可立得其解。代數的效用不是已經很大了嗎？但是代數的奧妙，猶不止於此。試看下列諸題：

[問題一] 會員若干人共出費用 36 元。倘若會員多添 3 人，則每人可少出 2 元。問會員原有若干人？

[問題二] 兩數的積是 27，其各自平方的和是 90。求這兩數。

[問題三] $4+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots=?$

$$1+2+3+4+5+6+7+\cdots+1000=?$$

能以最簡的方法求得其值嗎？

【問題四】求 2^{100} 的前三位數字；

求 $\sqrt[10]{2}$ 的值至小數第二位。

【問題五】 $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = ?$

$$\frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x^2+5x+6} = ?$$

【問題六】 $123456789^2 - 123456788^2 = ?$ 能用簡法求得其值嗎？

上列諸問，都是代數上的普通問題，應用前面所述的方法能解此類問題之一否？可見代數的奧妙正多，以前兩章只不過略發其凡而已。

“登高自卑，行遠自邇。”欲解上述諸問題，亦須自整式四則起。

整式四則，就是整式的加減乘除。這些算法，乃是代數學中一切算法的基本；好比算術中整數四則是算術上一切算法的本原一樣。學者於此，不可不充份演習，以期熟練。熟練這些基本算法，固非已盡學習代數的能事；但是，假如連這些基本算法都不能應用自如，那麼後來處處困難，真是墮入苦海了！學者可不慎

之於始嗎？

§ 33. 關於整式的幾個重要名詞 爲便於說明起見，先述

下列幾個名詞：

(1) 整式，分式 一式往往含有一個文字或幾個文字，如該分子含有某文字而分母不含該文字，這式就叫做該文字的整式。非整式的叫做分式。

例如： $8x+5y$ ， $\frac{2}{8}x+\frac{7}{8}y$ 都是 x 的整式，也都是 y 的

整式。

$8x^2+5x$ ，是 x 的整式， $\frac{7}{8}y^2+\frac{2}{3}y+3$ 是 y 的整式。

$\frac{1}{x}$ 與 $\frac{1}{y^2}$ 都是 x 的分式而非整式。

$\frac{x}{y}$ 與 $\frac{x+y}{y^2}$ 都是 x 的整式；但就 y 言，則都是 y 的分式。

(2) 單項式，多項式 只有一項的整式叫做單項式，非單項式的整式叫做多項式。多項式中，依其含有二項，三項，四項，……等等，分別叫做二項式，三項式，四項式，……等等。

例如： $a+b$ 是二項式， $a+b-c$ 是三項式， $a+b-c+d$ 是四項式， $mxy+nabc$ 是二項式， $a \times b \div c \times d \div e$ 是單項式。二項式，三項式，四項式等等統叫做多項式。

(8) 指數、底、冪 例如： $8=2 \times 2 \times 2$ ； $16=2 \times 2 \times 2 \times 2$ ； $32=2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ，這些等式中，右邊須寫許多個相同因子連乘，算學家嫌其不便，乃別創簡寫的方法來表示。於是把上列各式寫為

$$8=2 \times 2 \times 2=2^3;$$

$$16=2 \times 2 \times 2 \times 2=2^4;$$

$$32=2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2=2^5.$$

這2的右角上所寫的3, 4, 5, 等字都叫做2的指數，8, 16, 32, 等，依次叫做2的三次冪，四次冪，五次冪，等。2)叫做底。

在通例， $a^n = a \times a \times a \times a \times \dots \times a$ 到 n 個。

這 a^n 的 n 叫做指數， a 叫做底， a^n 叫做 a 的 n 次冪。

習題二十一

1. 設 $x=2$ ；則 $5x=?$ ， $x^2=?$ 。試問 $5x$ 與 x^2 嗎？ $5x$ 的5叫做何數？ x^2 的5叫做何數？
2. 指數與係數有何區別？指數與底有何區別？指數與冪有何區別？底與冪有何區別？
3. 設 $x=2$ ，則 $2x=2$ 嗎？ $x^2=2$ 嗎？然則，當 x 為2時， $2x$ 與 x^2 的值是否相等？但當 x 任為何數時， $2x$ 與 x^2 的值是否常能相等？
4. 代數式與方程式有何區別？ $3x+8y-7z$ 是不是代數式？ $3x+8y=7z$ 是不是方程式？ $3x+8y-7z=0$ 是不是方程式？ $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ 是代數式，抑是方程式？

5. $1 \times 2 + 3 \div 4 - 5$ 是整項式? $a \times b \times c \times d \div e \div f \div g$ 是整項式?

$x^2 + 5x + 6$ 是整項式? $xy^2z + 1$ 是整項式? $\frac{1}{x+y}$ 是整項式?

6. 整式與分式有何區別? 分式中有所謂二項式或三項式否?

7. $\frac{7}{8}$ 是整式抑是分式? $\frac{7}{8}x$ 是不是 x 的整式? $\frac{7}{8x}$ 是不是 x 的整式?

$\frac{1}{x+y}$ 是不是 x 的整式? 是不是 y 的整式? $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ 是 x 的整式, 抑是 y

的整式? $\frac{3xy^2}{7z}$ 是何者的整式? 何者的分式? $\sqrt{x} + 5y$ 是何者的整式? 何

者的分式? $\frac{4}{b}m \div n$ 是不是 m 的整式? 是不是 n 的整式?

8. $(-1)^2(-1)^3(-1)^4 = ?$ $(-2)^2(-1)^3(-1)^4 = ?$

$(-1)^{2n}(-1)^{2n+1} = ?$ $(-1)^{2m+1}(-1)^{2n+1} = ?$

$[(-1)^3]^2 = ?$ $[(-1)^3(-1)]^2 = ?$

§ 34. 整式的整理 問題中所設的整式其形狀往往亂雜

無章。在進行加減乘除等算法以前, 務須把所設整式加以整理。

整理的手續如下:

(A) 整理數字因數 移各個數字因數於本項之首而求其積, 以爲本項文字因數的係數。

例 $2a^2b^25cd = 2 \times 5a^2b^2cd = 10a^2b^2cd$ 。

(B) 整理文字因數 依字母的次序, 順列各文字因數於數字因數之後, 且用指數把同因子記爲簡式。

例 $10a^2b^2a = 10a^2ab^2 = 10a^3b^2$ 。

$8dacbx = 8abcdx$ 。

(C) 合併同類整項，求同類項各係數的和置於公共文字之前，作為該文字的係數。

$$\begin{aligned} \text{例} \quad & -10a^2b + \frac{1}{3}a^2b - \frac{1}{2}a^2b = \left(10 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)a^2b \\ & \quad - 10\frac{1}{6}a^2b. \end{aligned}$$

(D) 顧列同文字的各项，就是把同文字的最高次項列為首項，餘各依次降低，這是依降幂排列，或者把最低次項列為首項，餘各依次升高，這是依昇幂排列。(在降幂排列，如遇缺項，可以較低次項列入該缺項的地位；如有零次項，以零次項為末項。在昇幂排列，如有缺項，當然把較高次項來代替；如有零次項，則以該零次項為首項。)

$$\text{例} \quad bx + c + ax^2 + x^3 = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

(依 x 的降幂排列)

$$\text{或} \quad bx + c + ax^2 + x^3 = c + bx + ax^2 + x^3.$$

(依 x 的昇幂排列)

§ 35. 整式的加法

(A) 單項式相加 幾個單項式相加，就是用“+”號聯結這些單項式而整理其結果。

(B) 例：求 $3a, -2d, 3b, 4b$ 的和。

$$\text{[解]} \quad 3a - 2d + 3b + 4b = 3a + 4b + 3b + 2d.$$

例二 求 $5x, 6x, x, 2x, -3x$ 的和。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad & 5x + 6x + x + 2x + (-3x) \\ & = [5 + 6 + 1 + 2 + (-3)]x = 11x. \end{aligned}$$

例三 求 $5xy, 6xy, -3xy, 4y^2, xy, -8y^2$ 的和。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad & 5xy + 6xy + (-3xy) + 4y^2 + xy + (-8y^2) \\ & = 5xy + 6xy + (-3xy) + xy + 4y^2 + (-8y^2) \\ & = [5 + 6 + (-3) + 1]xy + [4 + (-8)]y^2 \\ & = 9xy - 4y^2. \end{aligned}$$

(B) 單項式與多項式相加，也就是用“+”符號結要加的各式，而整理其結果。

例 求 $3x^2 + 6, -2x^2 + 3, 9x^2, -5$ 的和。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad & 3x^2 + 6 + (-2x^2 + 3) + 9x^2 + (-5) \\ & = 3x^2 + 6 + (-2x^2) + 3 + 9x^2 + (-5) \\ & = 3x^2 + (-2x^2) + 9x^2 + 6 + 3 + (-5) \\ & = 10x^2 + 4. \end{aligned}$$

(C) 多項式與多項式相加 幾個多項式相加，也就是用“+”符號結要加的各式，而整理其結果。

例 求 $3x^2 + 6, -2x^2 + 3, 9x - 4, 3x^3 + 6x - 8$ 的和。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad & 3x^2 + 6 + (-2x^2 + 3) + (9x - 4) + (3x^3 + 6x - 8) \\ & = 3x^2 + 6 + (-2x^2) + 3 + 9x - 4 + 3x^3 + 6x - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3x^3 + (3x^2 - 2x^2) + (9x + 6x) + (6 + 3 - 4 - 8) \\
 &= 3x^3 + x^2 + 15x - 3.
 \end{aligned}$$

但爲計算便利起見，常把欲加諸式，依某文字的昇幕或降幕排列之，且令同類諸項集於同行之內，而整理其結果。

例一 求 $3x^2+6$, $-2x^2+3$, $9x-4$, $3x^3+6x-8$ 的和。

$$\begin{array}{r}
 \text{[解]} \quad \quad \quad 3x^2 \quad \quad \quad +6 \\
 \quad \quad \quad -2x^2 \quad \quad \quad +3 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 9x-4 \\
 \quad \quad \quad 3x^3 \quad \quad \quad +6x-8 \\
 \hline
 3x^3 + x^2 + 15x - 3
 \end{array}$$

例二 求 $6x^2+9+8x^3$, x^3+1 , $9+x^3+3x+x^4$ 的和。

[解] 題中第一，第三兩式，指數大小的次序不整齊，故先加以整理。於是，得

$$\begin{array}{r}
 8x^3 + 6x^2 \quad \quad + 9 \\
 \quad \quad \quad x^3 \quad \quad \quad + 1 \\
 x^4 \quad \quad + x^3 + 3x + 9 \\
 \hline
 x^4 + 9x^3 + 7x^2 + 3x + 19
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{【註】} \quad \text{設 } x=10, \text{ 則 } 8x^3+6x^2 \quad + 9 = 8609 \\
 \quad \quad \quad x^3 \quad \quad \quad + 1 = 1001 \\
 \quad \quad \quad x^4 \quad \quad + x^3 + 3x + 9 = 10139 \\
 \hline
 \therefore x^4 + 9x^3 + 7x^2 + 3x + 19 = 19749
 \end{array}$$

習 題 二 十 二

1. $x^2 + x^3 = x^5$ 對不對? $2^2 + 2^3 = 2^5$ 對不對? $3^2 + 3^3 = 3^5$ 對不對? 然則 $x^m + x^n = x^{m+n}$ 對不對?

2. $2 + 2 = 2^1 + 2^1 = 2^{1+1} = 2^2$, 然則 $x + x = x^2$ 嗎? 試設 $x=1, 3, 4, 5$, 值來驗算。然則 $x + x = x^2$ 對不對? 總是不對嗎? 何時對?

3. $3x + 4x^2 = 7x^3$ 對不對? $3x + 4y = 7xy$ 對不對? 試設 $x=2, y=3$ 來驗算。

4. $3x$ 與 $4x^2$ 是不是同類項? $3x$ 與 $4y$ 是不是同類項? 不同類項能不能相加? 然則 $3x + 4x^2$ 應該等於 $7x^3$ 嗎? $3x + 4y$ 應該等於 $7xy$ 嗎? $3x + 4x^2$ 能相加成一項嗎? $3x + 4y$ 能相加成一項嗎?

[註] 以上四題所討論的可概括述之如下:

$$ax^m + by^m \neq (a+b)xy^m,$$

$$ax^m + bx^n \neq (a+b)x^{m+n}.$$

這是至淺至簡的道理,但是也是初學者最易發生的錯誤。設本會者都能認真這種錯誤吧?千萬留心!

6. 整理下列諸式:

(a) $5a^2a3b^6$, (b) $8x^27y^23$, (c) $3x^23x5y^2y$.

(d) $x + 2x^5 + 5x^3$, (e) $\frac{1}{2}x + x + 2x$, (f) $3x^2y + 5x^2y - 2x^2y$.

6. 求 $3x + 5x^2 + 6$, $7x^2 + 5 + x$, $7 + 2x + x^3$ 的和。

7. 求 $9x^2 + 8x^2 + 7x - 6$, $6x - 8x^2 - 9x^2 + 8x^3$, $x^2 - 1$ 的和。

8. 求下列各題代數式的代數和:

(a) $3x + 2y - z$, $x - 2y + 3z$, $-2x - 5y + z$.

(b) $a + b - c$, $a - b + c$, $-a + b + c$.

(c) $3ab + 4bc + 5ca$, $-ab + ac$, $-7ba + 2ca - 6b$.

(d) $x^2 + 6x^3 + x$, $-x^2 - 5x^3 + x^2$, $x^2 + 2x^2 + 8$.

$$(e) x^2 + x^2y^2 - 9y^4, \quad x^2 - x^2y^2 + 8y^4, \quad -x^2 - 9x^2y^2 + 8y^4.$$

$$(f) 7x^2 - 8x^2y + y^3, \quad 8x^2 - 7xy^2 + y^3, \quad -x^2 + 8xy^2 - 7y^3.$$

9. 求 $ab6c^2 + 3cba^2$, $3ab^2 + 6a^2c$, $7ab - 9ac^4$ 的和。

10. 設 $x = a + b + c$, $y = 2a + 3b - c$, $z = -3 - 4b$. 問 $x + y + z = ?$
 $x + y + 2z = ?$

§ 26. 整式的減法 前在 § 26 內，曾經說過“兩數相減，就是把減數的符號改變以與被減數相加。”這個道理在減數是單項式或多項式，仍是同樣真確的。茲舉例以示實際的做法：

例一 從 $3x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ 減去 $9x^2 - 3x + 6$ 。

[解法] 本題有兩種算式如下：

$$\begin{array}{r} \text{算式一} \quad 3x^3 + 2x^2 + 5x - 7 \\ \quad \quad \quad - 9x^2 + 3x - 6 \\ \hline 3x^3 - 7x^2 + 8x - 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{算式二} \quad 3x^3 + 2x^2 + 5x - 7 - (9x^2 - 3x + 6) \\ = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 7 + (-9x^2 + 3x - 6) \\ = 3x^3 + 2x^2 - 9x^2 + 5x + 3x - 7 - 6 \\ = 3x^3 - 7x^2 + 8x - 13 \end{array}$$

例二 從 $3x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ 減去 $9x^2 - 3x + 6$, $3x^3 - 3x - 5$, $2x^2 + 5x - 6$, $5x^4 - 8x + 6$ 的和。

[解法] 本題有兩種算法如下：

第一法：將所有各減式——變其各項原有的符號，以與被

減式相加。

$$\begin{array}{r}
 3x^3 \quad + 2x^2 + 5x - 7 \\
 - 2x^2 + 3x - 6 \\
 \hline
 3x^3 \quad + 3x + 5 \\
 - 2x^2 - 5x + 6 \\
 \hline
 - 5x^4 \quad + 8x - 6 \\
 \hline
 - 5x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 14x - 8
 \end{array}$$

第二法：先將諸減式相加，再從被減式減去加得的結果。

$$\begin{array}{r}
 9x^2 - 3x + 6 \\
 8x^3 \quad - 3x - 5 \\
 2x^2 + 5x - 6 \\
 5x^4 \quad - 8x + 6 \\
 \hline
 5x^4 + 8x^3 + 11x^2 - 9x + 1
 \end{array}$$

次變各項之號而與被減式相加，

$$\begin{array}{r}
 3x^3 + 2x^2 + 5x - 7 \\
 - 5x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 9x - 1 \\
 \hline
 - 5x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 14x - 8
 \end{array}$$

習題二十三

在下列各組代數式中，從前式減去後式：

1. $9x^3 + 8x^2 - 5x + 3$, $x^3 - x^2 + x - 8$.
2. $x + x^3 + 6x^2 - 5$, $8x^2 - x^4 + 5 - 8x$
3. $x + 2y + 3z$, $7x - 8y - 6z$,
4. $x^2y + 9xy^2 + 8x^2z - 6xz^2$, $8x^2y - xy^2 + 8xz^2 - 6x^2z$.
5. $x^2y + yz^2 + xy^2 + xz^2 + y^2z + x^2z$,
 $x^2y + 2xy^2 + 3xz^2 + 4x^2z + yz^2 + y^2z$.
6. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$,
 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5yz + 6zx$.
7. $a^3 + 8a^2b + 8ab^2 + b^3$, $-a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$.
8. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.
9. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $x^2y + y^2z + z^2x$.
10. $5x^6 + 2x^3 + x$, $4x^4 + 2x^2 + 10$.
11. $x^5 + 3x^2 - 8x$, $7x^4 - 10x^3 - 8 + x + 5x^2$.

12. 從 $2x^3 - 5x^2 + 6x - 7$ 減去何式, 其相減所得之差是

$$8x^3 + 6x^2 - 9x + 1?$$

13. 從何式減去 $a^3 + 2a^2b + 8ab^2 + b^3$, 其差是 $2a^3 + 2b^3?$

14. 從 $3ab + 2a^2b^2 + abc$ 減去 $5ab - 3abc + 5a^2b^2, abc + a^2b^2$ 的和。

15. 自 $3ab + 2a^2b^2 + abc, -3a^2b^2 + 2abc + 6ab$ 的和減去 $9a^3 + 6abc + 2$,

$$5bc + 2ab - 6a^2b^2, 8ab - 6a^2b^2 + 5abc$$
 的和。

16. 設 $w = a^2 + 3ab + b^2, y = a^2 + b^3, z = 2a^2 + 3ab + b^2 - a^3$,

$$\text{則 } x + y - z = ? \quad x - y + z = ? \quad -x - y + z = ?$$

將下列各式去括號而化簡之:

$$(a + b - c) - (a - b + c) - (a - b - c)$$

$$2a - b - [4c - (b - 2c)]$$

$$7x - \{5y - [3z + x - (y - z)]\}$$

$$3x - [-2y - (2y - 3x) - z] - [x - (y - 2z) + x]$$

習 題 二 十 四

解下列各方程式：³

$$1. 2x - [(x-3) + 5] = 3x - 6.$$

$$2. 2x - 3 - [3 - (x-6)] = 8.$$

$$3. 7x - \{5x - [3 + x - (4x-5)] + 6\} = 0.$$

$$4. \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{3} (x - \frac{1}{2}) \right] - \frac{1}{2} \right\} = 10.$$

$$5. 3x - [-2x - (2x-5) - 3] = x - [(2+x) - 6].$$

$$6. x^2 + 5x + 6 = 2x^2 + 6x + 5 - x(x+1).$$

$$7. 3x + 2y - 3 - (y+9) - (x-3+y) = 0.$$

$$8. 3x(2x-3) - 2x(3x-2) = 8.$$

第四章 聯立一次方程式

§ 37. 引論 前在第一章內，對於應用問題只用一個文字以代未知數，利用一個方程式以求其解。其法語簡，而為用不廣，因為應用問題之中，往往含有兩個或多個未知數。這類問題，大都可用兩個（或多個）文字以代未知數，列出兩個（或多個）方程式以求其解答。有時甚至非如此解法不可。本章各節，學者試與第一章比較讀之。

[問題]：有大小二數，大數 3 倍與小數 5 倍的和是 250，大數 5 倍與小數 3 倍的和是 250。試求此二數。

【解法】 設大數是 x ，小數是 y 。則由題意可得兩方程式：

$$\begin{cases} 3x+5y=230 & (1) \\ 5x+3y=250 & (2) \end{cases}$$

由此二式倘能求出 x, y 所代的值，那麼這個問題便完全解決了。但是怎樣可求 x, y 所代的值，是不能不有通法。以下數節，詳論此事。

§ 33. 聯立方程式及其求解的通則 就前節所立兩個方程式看，若與(1)中 x 以 $0, 5, 10, 15, \dots$ 等值，則得 y 之對應值 $46, 43, 40, 37, \dots$ 等，任以 $0, 46; 5, 43; 10, 40; 15, 37; \dots$ 等數代入(1)的 x, y ，方程式的兩邊無不相等，然而以之代入(2)式，兩邊就不盡相等。同樣，若與(2)中 x 以 $50, 47, 44, 41, \dots$ 等值，則得 y 之對應值 $0, 5, 10, 15, \dots$ 等，任以 $50, 0; 47, 5; 44, 10; 41, 15; \dots$ 等數代入(2)的 x, y ，方程式的兩邊無不相等；然而以之代入(1)式，兩邊便不盡相等。惟以 35 代 $x, 25$ 代 y ，(1)式的兩邊相等，(2)式的兩邊也能相等。此 $x=35, y=25$ 一組值叫做該兩方程式(1), (2)的根。普通言之，在含 x, y 的兩個方程式中，若以 m, n 二數代替 x, y ，兩個方程式均能適合，這 m, n 就叫做該二方程式的公共根。這兩方程式叫做聯立方程式。因其含有兩個未知數，並且都是一次的，故又叫做二元聯立一次方程式。

二元聯立方程式所以不似一元方程式易於求解的緣故，就在每個方程式各有兩個未知數 (x, y) ，不知其一，自然難知其他。故若利用適當手續，消去一個未知數，那麼另一未知數所代的值，自然可依第一章的方法去求解。消去的方法，最通用的有以下三種。

§ 29. 加減消去法 例一 試解聯立方程式：

$$\begin{cases} 3x + 5y = 230 & (1) \\ 5x + 8y = 250 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 230 & (1) \\ 5x + 8y = 250 & (2) \end{cases}$$

[解法] $3 \times (1)$ 得 $9x + 15y = 690$ (1')

$5 \times (2)$ 得 $25x + 15y = 1250$ (2')

(2') - (1') 得 $16x = 560$

故 $x = 560 \div 16 = 35$

以 x 的值代入(1)式，得

$$3 \times 35 + 5y = 230$$

故 $y = 125 \div 5 = 25$

[驗算] 把 $x = 35, y = 25$ ，代入(1), (2)兩式，則

$$105 + 125 = 230$$

$$230 = 230$$

$$175 + 75 = 250$$

$$250 = 250.$$

$$\text{例二 試解} \begin{cases} 80x+19y=79 & (1) \\ -12x+25y=1 & (2) \end{cases}$$

[解法] 因 $80=2 \times 3 \times 5$, $12=2 \times 3 \times 2$, 牠們的最小公倍是 $6 \times 5 \times 2$, 故以 2 乘(1)式兩邊, 以 5 乘(2)式兩邊, 乃得

$$\begin{cases} 60x+38y=158 & (1') \\ -60x+125y=5 & (2') \end{cases}$$

$$(1')+(2') \text{ 得 } \quad 83y+125y=158+5$$

$$\text{即} \quad 168y=163$$

$$\text{故} \quad y=1$$

以 y 的值代入(1), 得

$$\begin{aligned} 80x+19 \times 1 &= 79 \\ \text{故} \quad x &= 2. \end{aligned} \quad \therefore \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

[驗算] 把 $x=2, y=1$, 代入(1), (2)兩式, 則

$$60+19=79$$

$$79=79$$

$$-24+25=1$$

$$1=1$$

由上兩例看來, 可見用加減消去法以解二元聯立方程式, 其步驟如下:

1. 以適當的數 m 乘(1)式的兩邊得(1'), 又以適當的數

n 乘(2)式的兩邊得(2')，使這兩式(1')，(2')中 x 的係數的絕對值相同。〔此時 x 的係數，最好為(1)，(2)兩式中 x 的係數的最小公倍。〕

2. 絕對值相同的係數，如其符號不同，就把兩式相加以消 x ；如其符號相同，就把兩式相減以消 x 。
3. 解上所得方程式，得 y 值。
4. 以所得 y 值代入(1)或(2)，求得 x 值。
5. 以求得的 x, y 值，代入原設兩個方程式，驗其是否都能相合。

〔註1〕 上述四條，是先消 x 再求 y 。倘使先消 y 再求 x ，也是可以的，只要把上述四條中所有 x, y 換為 y, x 就是了。

〔註2〕 解聯立方程式所得 x, y 的值，欲知有無錯誤，須把這所得的數值代入原設兩個方程式，以驗是否都合。不可僅僅代入一個方程式，因為，解法手續雖有錯誤，所得的數往往仍僅適合一個方程式。但若同時代入另一方程式，他的錯誤就立刻發見了(參看 § 38)。

用任何方法解任何聯立方程式，欲驗所得的數有無錯誤，均須代入原設各個方程式驗其是否都適合，不獨在加減消去法如此，亦不獨在二元聯立方程式如此。初學代數的人，往往對此點不很注意，以致弄出大錯。我們務宜留心。

習 題 二 十 五

解下列各聯立方程式：

$$1. \begin{cases} x+2y=5 \\ 5x-2y=1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x+3y=9 \\ 5x+5y=21 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 5x+4y=19 \\ 4x+3y=23 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 17x+6y=29 \\ 23x-9y=5 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 45x+y=51 \\ x+45y=47 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 97y-72x=123 \\ 57y+48x=123 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6} \\ 8x+8y=1 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2(x+3) + (y+5) = 17 \\ 3(x-1) + 4(y+2) = 19 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} y=2x+1 \\ x=2y-17 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{x+y}{4} + \frac{x-y}{2} = 2 \\ .8x - .4y = .5 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 30x+7y=370 \\ 45x-23y=520 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 13x+48y=87 \\ 11x-32y=1 \end{cases}$$

§ 49. 代入消去法 [例] 求解聯立方程式：

$$\begin{cases} 3x+5y=230 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+3y=250 & (2) \end{cases}$$

【解法】 由(2)式得 $3y=250-5x$

即
$$y = \frac{250-5x}{3} \quad \text{①}$$

以(1)式中 y 值代入(1), 得

$$3x + \frac{5(250-5x)}{3} = 230$$

兩邊各乘以 3, 得

$$9x + 1250 - 25x = 690$$

解之, 得

$$85 = x$$

以 x 的值代入(1'),得

$$y = \frac{250 - 5 \times 35}{7} = 25$$

【驗算】把 $x=35, y=25$, 代入(1), (2)兩式, 則

$$105 + 125 = 230$$

$$230 = 230$$

$$175 + 75 = 250$$

$$250 = 250.$$

由上例看來, 可見用代入消去法以解二元聯立方程式, 六步驟如下:

1. 由(1)[或(2)]求出 $x = (?)y + (?)$ 這是(1')式。
2. 以(1')中的 x 值代入(2), [或(1)] 消去 x 求出 $y = ?$
3. 以 y 的值代入(1'), 求得 x 的值。
4. 以所得 x, y 的值代入原設兩個方程式, 驗其是否都能適合。

適合。

【注意】本解法的程序中, 第二步應特別注意。凡由(1)式求得 $x = (?)y + (?)$ 務須代入(2)式以消 x 。[若由(2)式求得 $x = (?)y + (?)$, 則應代入(1)式以消 x 。] 若仍代入(1)式, 就會得 $0=0$, 而 x, y 同時消去, 不能求 x , 也不能求 y 了。舉例如下:

$$\begin{array}{l} \text{【例】} \\ \text{求解} \end{array} \begin{cases} 2x + y = 8 & (1) \\ 4x + 3y = 6 & (2) \end{cases}$$

由(1)得

$$y = 8 - 2x$$

代入(1),則得 $2x+8-2x=8$

移項,得 $0=0$

x, y 同時消去,不能求出它們的數值了。

習題二十六

用代入消去法以解習題二十五的各題。

§ 41. 比較消去法 [例] 試解聯立方程式:

$$\begin{cases} 3x+5y=230 & (1) \\ 5x+3y=250 & (2) \end{cases}$$

[解法] 由(1)得 $y=(230-3x)\div 5$ (1')

由(2)得 $y=(250-5x)\div 3$ (2')

比較(1'), (2')得

$$(230-3x)\div 5=(250-5x)\div 3$$

兩邊各乘以 15, 得

$$3(230-3x)=5(250-5x)$$

解之,得 $x=560\div 16=35$

以 x 的值代入(1')得

$$y=(230-3\times 35)\div 5=25。$$

[驗算] 把 $x=35, y=25$, 代入(1), (2)兩式, 則

$$105\div 125=230$$

$$230=230$$

$$175 + 75 = 250.$$

$$250 = 250.$$

由上例看來，可見用比較消去法以解二元聯立方程式，其步驟如下：

1. 先由(1),(2)兩式各求出 $x = (?)y + (?)$ [或 $y = (?)x + (?)$].
2. 比較所得結果，寫成方程式 $(?)y + (?) = (?)y + (?)$ ，即是消去 x 而求 y [或得 $(?)x + (?) = (?)x + (?)$ ，就是消 y 以求 x].
3. 以 y 的值代入第一步所得 $x = (?)y + (?)$ 一式，就求得 x 值。
4. 以所得 x, y 的值代入原證兩個方程式，驗其是否都能適合。

習題二十七

試用比較消去法解習題二十五的各題。

習題二十八

試用最簡便的消去一個未知數的方法解下列各聯立方程式：

$$1. \begin{cases} 2(2x+3y) = 3(2x-3y) + 13 \\ 4x-3y = 4(3y-2x) - 15 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 7(x-y) = x+5 \\ 2(x+2y) = 5(3y-x) + 9 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x-y=2 \\ \frac{2x}{5} + \frac{3y}{2} = 2\frac{7}{10} \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x-3y=1 \\ \frac{3x}{4} + y=4 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{x+y}{4} + \frac{x-y}{2} = 5\frac{1}{2} \\ \frac{12x-8y}{15} = \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} y+5 = \frac{x+6}{2} \\ x = \frac{y+11}{2} \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x=y+1 \\ 7x+8y=2x-y+44 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{x+y}{3} + \frac{x-2y}{2} = 6 \\ \frac{x}{4} + \frac{x+y}{9} = 5 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 7x+11y=74 \\ 13x+22y=139 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 13x + \frac{12-y}{11} = 131 \\ 9y + 121 = 13x \end{cases}$$

§ 42. 二元應用問題的解法 求解兩元聯立方程的應用

問題，重要的步驟如下：

1. 細審題意，選擇未知數，以 x, y 代之。
2. 謹依題意，把已知數與未知數間的關係，列成兩個相異方程式。
3. 選用加減，代入，比較諸法之一（通常取其最便利的解上面所得二元聯立方程式。
4. 將所得 x, y 的值，代入原題，驗其是否相合（不可代入所列方程式）。

[例] 分桃與兒童，每人 4 個，餘桃 2 枚；每人 6 個，餘桃 12 枚。求桃數與人數。

【解法】 設桃數為 x ，人數為 y 。依題意得下列兩個方程式：

$$\begin{cases} x=4y+2 & (1) \\ x=6y-12 & (2) \end{cases}$$

解此聯立方程式，宜用比較消去法。因為，由(1)，(2)兩式，直接可得

$$4y+2=6y-12$$

解之，得

$$y=7$$

代入(1)求得

$$x=30$$

即 $\begin{cases} \text{人數是 } 7, \\ \text{桃數是 } 30. \end{cases}$

【驗算】 7人分桃 30枚，每人4枚，分去 28枚，餘 2枚。每人6枚，需桃 42枚，缺桃 12枚。

【注意】 由前 § 38 題之，可見含有兩個文字 (x, y) 的一個方程式，其 x, y 可得種種不同的數值。故欲確定 x, y 究為何值，非另有他一方程式與之聯立不可。故用兩個未知數以解應用問題時，必須求得兩個方程式。但是，假如由下列二方程式

$$\begin{cases} x+2y=6 & (1) \\ 2x=12-4y & (2) \end{cases}$$

以求 x, y ，那麼 x, y 的 值仍不能確定。因為由(2)式可得(1)式，由(1)式也可得(2)式。(1)，(2)二式外形雖異，其實一樣。故用兩個文字以解應用問題時，所立兩方程式，必須確為相異方程式。初學代數的人，往往不注意這一點，以致許多可解的問題，沒有方法去求解。我們務宜留心。

習題二十九

用二元聯立方程式解下列各題：

1. 習題七 (4), (5), (6)。
2. 習題八 (1), (3), (5)。
3. 習題九 (2), (3)。
4. 習題十 (6), (7)。
5. 習題十一 (5), (11), (14), (15)。
6. 有真分數，若把分母加 1，則其值是 $\frac{1}{3}$ ；若把分子加 1，則其值是 $\frac{1}{2}$ ，求這分數。
7. 有真分數，以其分子分母的和除分母分子的差，所得的商是 $\frac{4}{13}$ 。若把分母加 1，則分數的值是 $\frac{1}{2}$ 。求這分數。
8. 甲乙二人共有存款 1200 元。甲把自己的錢用去 $\frac{1}{2}$ ，乙把自己的錢用去 $\frac{3}{4}$ ，於是二人所餘的元數相等。問甲乙原來各有幾元？
9. 有甲乙二整數，牠們的和是 45。以乙數除甲數，商數是 5，餘數是 3。求甲乙二數。
10. 某人以國幣 2500 元買牛 10 匹和馬 20 匹。出賣時，牛每匹獲利 20 元，馬獲利 $\frac{1}{10}$ ，牛馬共賣 2800 元。問牛馬買價每頭各幾元？
11. 有三位數。其百位數字等於個位數字與十位數字的和。若把十位數字與百位數字交換，則所成新數比原數小 270。又百位數字與個位數字的和等於十位數字的 2 倍。求原數。
12. 快車長 178 市尺，慢車長 150 市尺。二車並行於平行軌道。若同向而行，自相遇至相離，需時 2 分 44 秒；若異向而行，自相遇至相離，需時 4 秒。問這二車每秒各行幾市尺？
13. 甲乙兩地相距 95 里，A 自甲到乙，B 自乙到甲，若 A 先出發 2 小時，則 B 行 3 小時而遇 A；若 B 先 3 小時出發，則 A 行 48 分鐘而遇 B。求 A、B 各人速度。

14. 有雞犬不知其數。但知雞頭比犬頭多 3 個；雞足比犬足少 8 隻。
問雞犬各若干？

§ 43. 三元聯立方程式 如前 § 37 所述，解決應用問題，有時需用三個文字 x, y, z 以代未知數，立出三個不同方程式以求其根。茲舉例於下：

[問題] 甲, 乙, 丙三數的和是 60。甲數一倍, 乙數 2 倍與丙數 3 倍三者的和是 140。甲數 3 倍, 乙數 2 倍與丙數 5 倍三者的和是 220。求甲, 乙, 丙三數。

[解法] 設 x = 甲數, y = 乙數, z = 丙數, 由題意可得三個不同方程式:

$$\begin{cases} x + y + z = 60 & (1) \\ x + 2y + 3z = 140 & (2) \\ 3x + 2y + 5z = 220 & (3) \end{cases}$$

由此求 x, y, z 的值, 其法如下:

I. 由(1), (2)消去 x , 得(4)。

自(2)減(1)得 $y + 2z = 80$ (4)

II. 由(2), (3)消去 x , 得(5)。

以 3 乘(2)得 $3x + 6y + 9z = 420$ (2')

自(2')減(3)得 $4y + 4z = 200$

即 $y + z = 50$ (5)

III. 由(4), (5)消去 y 求 z 。

$$(4) - (5) \text{ 得 } \quad z = 30$$

$$\text{代入(5)得 } \quad y = 50 - 30 = 20$$

IV. 以 y, z 的值代入(1)求 x 。

以 $y=20, z=30$ 代入(1), 得

$$x + 20 + 30 = 60$$

$$\therefore \quad x = 10$$

故甲數為 10, 乙數為 20, 丙數為 30。

[驗算] 把 $x=10, y=20, z=30$ 代入(1), (2), (3)式, 則

$$10 + 20 + 30 = 60$$

$$60 = 60$$

$$10 + 40 + 90 = 140$$

$$140 = 140$$

$$20 + 40 + 150 = 220$$

$$220 = 220。$$

由此可見, 求解三元聯立方程式, 其通法如下:

第一步 在所給三個方程(1), (2), (3)中, 就兩個方程式如(1), (2)兩式消去 x , 得出一個含有 y, z 的方程式(4)。

第二步 再就(1), (3) [或(2), (3)] 兩式消去 x [不能消去 y 或 z] 又得一個含有 y, z 的方程式(5)。

第三步 (4), (5) 二式聯立, 求 y, z 的値 [依二元聯立方程式的解法]。

第四步 以所得 y, z 的値代入 (1), (2), (3) 中任何一式以
求 x 。

第五步 以所得 x, y, z 的値代入原設三個方程式。驗其
是否都能適合。

【注意 1】 在第一步內, 無論先消去那個文字 (x, y, z) 都是可以的, 只要手續簡便就是了。(參看例三)

【注意 2】 在第二步內, 所消去的文字須與第一步中所消去的相同。否則一, 二兩步中所得兩個方程式 (4), (5) 仍含三個文字, 不能求得其值了。

【注意 3】 倘選任何一式 [如 (2)] 只含兩個文字 (例如 x, z) 時, 那麼最好從其他兩式 (1), (3) 消去第三文字 (y), 以得 (4) 式。於是, 由 (2), (4) 兩式便可求得 x, z 的値。

$$\begin{array}{l}
 \text{【例一】 求解} \begin{cases} 3x + 2y + 4z = 9 & (1) \\ 5x + 3y + 5z = 13 & (2) \\ 7x + 7y + 3z = 17 & (3) \end{cases}
 \end{array}$$

【解法】 依通法分爲五步如下:

先由 (1), (2) 消去 y , 得 (4)。

$$3 \times (1) \text{ 得 } \quad 9x + 6y + 12z = 27$$

$$2 \times (2) \text{ 得 } \quad 10x + 6y + 10z = 26$$

$$\text{相減得} \quad -x \quad + 2z = 1 \quad (4)$$

II 次由 (1), (3) 消去 y , 得 (5)。

$$7 \times (1) \text{ 得 } \quad 21x + 14y + 28z = 63$$

$$2 \times (3) \text{ 得 } \quad 14x + 14y + 6z = 34$$

$$\text{相減得} \quad 7x \quad + 22z = 29 \quad (5)$$

III. 再由(4), (5)消去 x 以求 z , 並代入(4)以求 x .

$$7 \times (4) + (5), \text{ 得} \quad 86z = 86$$

$$\therefore \quad z = 1$$

$$\text{代入(4)得} \quad -x + 2 = 1$$

$$\therefore \quad x = 1$$

IV. 以 x, z 的值代入(1)求 y .

以 $x=1, z=1$, 代入(1)式得

$$8 + 2y + 4 = 9$$

$$y = 1$$

$$\text{故} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

V. 以 $x=1, y=1, z=1$ 代入(1), (2), (3)式, 驗其是否都能適

合。

$$8 + 2 + 4 = 9$$

$$9 = 9$$

$$5 + 3 + 5 = 13$$

$$13 = 13$$

$$7 + 7 + 3 = 17$$

$$17 = 17.$$

$$\begin{array}{l}
 \text{【例二】 求解} \begin{cases} x+y=5 & (1) \\ 2x+z=7 & (2) \\ x+3y+4z=13 & (3) \end{cases}
 \end{array}$$

【解法】 本題(1), (2)兩式, 各含兩個文字, 故不必仿通法求解, 只要依照注意3進行就好了。

I. 由(2), (3)消去 z , 得(4)。

$$4 \times (2) \text{ 得 } 8x + 4z = 28 \quad (2')$$

$$(2') - (3) \text{ 得 } 7x - 3y = 15 \quad (4)$$

II. 次由(4), (1)消去 y 以求 x , 並代入(1)以求 y 。

$$3 \times (1) + (4) \text{ 得 } 10x = 30'$$

$$\therefore x = 3$$

$$\text{以 } x=3 \text{ 代入(1), 得 } 3+y=5$$

$$y=2$$

III. 以 x, y 的值代入(2)求 z 。

$$\text{以 } x=3 \text{ 代入(2), 得 } 2 \times 3 + z = 7$$

$$\therefore$$

$$z=1$$

$$\text{故} \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

IV. 以 $x=3, y=2, z=1$ 代入(1), (2), (3)式, 驗其是否都能適合。

$$3+2=5$$

$$5=5$$

$$6+1=7$$

$$7=7$$

$$8+6+4=13$$

$$13=13.$$

$$\text{[例三] 求解} \begin{cases} x+2y+3z=6 & (1) \\ 3x+2y+2z=7 & (2) \\ 4x+2y+z=7 & (3) \end{cases}$$

$$\text{[解法] } (2)-(1) \text{ 得 } 2x-z=1 \quad (4)$$

$$(2)-(3) \text{ 得 } -x+z=0 \quad (5)$$

$$(4)+(5) \text{ 得 } x=1$$

$$\text{以 } x \text{ 的值代入(4), 得 } 2-z=1$$

$$\therefore z=1$$

$$\text{以 } x, z \text{ 的值代入(1), 得 } 1+2y+3=6$$

$$\therefore y=1$$

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

[驗算] 以 $x=1, y=1, z=1$, 代入(1), (2), (3)式。

$$1+2+3=6$$

$$6=6$$

$$8+2+2=7$$

$$7=7$$

$$4+2+1=7$$

$$7=7。$$

【按】本節解法若不用負數，就不能消去 y 以求 x, z ；勢必先消 x 或 z 。其手續比上面解法要繁得多了。這又是負數對於解方程式具有特效的一例。

習 題 三 十

試解下列各方程式：

$$1. \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = \\ x + 3y + 4z = 13 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y = 11 \\ y + z = 13 \\ x + z = 12 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 34 \\ 5x + 6y + 7z = 70 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 5x + 6z = 17 \\ x + y + 2z = 8 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x - 5y - 4z = 0 \\ x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - 4z = 1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 5x - y = 45 \\ 5y - z = 24 \\ 5x + z = 15 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 8x + 9y - 10z = 14 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{2z}{5} = \frac{1}{3} \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 6x + 7y - 8z = 29 \\ 4x + 5y - 2z = 21 \\ 6x - 4y - 3z = 14 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x + 3y + 4z = 1 \\ 5x + 3y + 2z = 1 \\ 3x - 3y - 7z = -7 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 5x + 3y - 7z = -1 \\ 5x - 3y + 6z = -6 \\ -5x + 5y - 3z = 3 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 3x+5y+z=16 \\ 7x+3y+z=16 \\ 5x-7y+z=-2 \end{cases} \quad 12. \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{4} = 1 \\ \frac{x}{2} + y - z = 0 \\ \frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 6 \end{cases}$$

§ 44. 三元應用問題的解法 求解這類問題時，其手續伊

與解二元應用問題相類似。茲述其步驟如下：

1. 細審題意，選擇三個未知數，以 x, y, z 代之。
2. 謹依題意，把已知數與未知數間的關係，列出三個相異方程式。（怎樣是相異方程式參看 § 42 的注意）
3. 用前節方法解這聯立三個方程式以求 x, y, z 的值。
4. 把所得的值，代入原題，驗其是否適合（不可代入所列方程式）。

【例】有甲，乙，丙三人。一年後三人歲數的和是 48。五年後乙，丙歲數的和等於甲的歲數的 3 倍。若今年甲，丙歲數的和是乙的 2 倍，試求甲，乙，丙今年各幾歲。

【解法】 x = 甲今年的歲數

y = 乙今年的歲數

z = 丙今年的歲數

依題意，應得下列三個相異方程式：

$$\begin{cases} x+1+y+1+z+1=48 \\ y+5+z+5=3(x+5) \\ x+z=2y \end{cases}$$

(1)
(2)
(3)

解上聯立方程式，得 $x=10, y=15, z=20$ 。

所以今年甲 10 歲，乙 15 歲，丙 20 歲。

習 題 三 十 一

1. 有甲，乙，丙三數，甲乙二數的和是 76，乙丙二數的和是 54，甲丙二數的和是 58。求甲，乙，丙三數。

2. 甲，乙，丙三數的總和是 58。以甲乙的和除這總和，其商是 2。以乙丙的和除這總和，得商 1 而餘 14。求這三數。

3. 有甲，乙，丙三人。甲乙合做一事項 2 日可成；甲丙合做，則須 3 日；乙丙合做，則須 4 日。問各人獨作，各須幾日可成？若三人合做，又須幾日可成？

4. 有三位數，其各位數字的和是 6。倒轉三位數字的次序所得新數比原數大 198。而百位數字與個位數字的和是十位數字的 2 倍。求原數。

5. 甲，乙，丙三人共有存款 900 元。甲比乙所多的元數等於乙比丙所多的元數。而甲的元數等於乙丙元數的和。求甲，乙，丙各有若干元。

6. 甲，乙，丙三人共有國幣 360 元。甲給乙及丙以該二人原有的元數，乙亦給甲及丙以該二人現有的元數。丙又給甲及乙以該二人現有的元數。於是三人所有之元數相等。問甲，乙，丙原來各有幾元？

7. 有一元，五元，十元法幣三種，共 16 張。其總價值是 126 元。若把一元法幣的張數與十元法幣的張數對調，則其總價是 45 元。求各種法幣的張數。

8. 有甲，乙，丙三數，甲乙的和是 25，乙丙的和是 35，甲丙的和 30。求這三數。

9. 某水手順流下行在 2 小時內可由 A 到 B。逆時速流而上，費 6 小時始到。若水流速度為零，則由 A 到 B 往返一次共需 8 小時。已知 $AC=AB+10$

里。問 A, B 相距幾里? 水流速度每時幾里? 這水手在靜水中每時能划幾里?

§ 45. 四元聯立方程式 問題中有時含有四個未知數, 必須列出四個方程式, 方能求得其解。其步驟大致與三元聯立方程式應用問題的解法相似, 茲舉二例以明其要。

[例一] 甲, 乙, 丙, 丁四數的和是 10。甲丁的和等於乙丙的和。甲數一倍, 乙數二倍, 丙數三倍與丁數四倍, 四者的和是 30。甲數三倍與乙數的和比丙數大 2。求各數。

[解法] 設甲數是 x , 乙數是 y , 丙數是 z , 丁數是 w 。依題意得下面四元聯立方程式:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 10 & (1) \\ x + 2y + 3z + 4w = 30 & (2) \\ 3x + y - z = 2 & (3) \\ x - y - z + w = 0 & (4) \end{cases}$$

I. 自(1), (4)消去 w :

$$(1) - (4) \text{ 得 } \quad 2y + 2z = 10 \quad (5)$$

II. 自(1), (2)消去 w :

$$4 \times (1) - (2) \text{ 得 } \quad 3x + 2y + z = 10 \quad (6)$$

III. 自(3), (6)消去 x :

$$(3) - (6) \text{ 得 } \quad -y - 2z = -8 \quad (7)$$

IV. 自(5), (7)消去 z :

$$(5) + (7) \text{ 得} \quad y = 2 \quad (8)$$

V. 以 y 值代入(5)求 z :

$$2 \times 2 + 2z = 10 \quad z = 3. \quad (9)$$

VI. 以 y, z 的值代入(3)求 x :

$$\text{以(8), (9)二式代入(3), 求得} \quad x = 1 \quad (10)$$

VII. 以 x, y, z 的值代入(1)求 w :

以(8), (9), (10)三式代入(1), 求得 $w = 4$.

【例二】有甲, 乙, 丙, 丁四數。甲, 乙, 丙三數的和是 60, 甲, 乙, 丁三數的和是 70, 乙, 丙, 丁三數的和是 90, 甲, 丙, 丁三數的和是 80, 求這四數。

【解法】設 $x =$ 甲數, $y =$ 乙數, $z =$ 丙數, $w =$ 丁數, 依題意得

$$\begin{cases} x + y + z = 60 & (1) \\ x + y + w = 70 & (2) \\ y + z + w = 90 & (3) \\ x + z + w = 80 & (4) \end{cases}$$

欲由上列四個方程式求出 x, y, z, w 的值, 不必如列一的解法; 可用較簡的手續求之如下:

(1) + (2) + (3) + (4) 得

$$3x + 3y + 3z + 3w = 300$$

就是,

$$x+y+z+w=100 \quad (5)$$

$$(5)-(1) \text{ 得} \quad w=40. \quad \text{丁數.}$$

$$(5)-(2) \text{ 得} \quad z=30. \quad \text{丙數.}$$

$$(5)-(3) \text{ 得} \quad x=10. \quad \text{甲數.}$$

$$(5)-(4) \text{ 得} \quad y=20. \quad \text{乙數.}$$

習題三十二

解四元聯立方程式:

$$1. \begin{cases} x+y+z+w=4 \\ x+y+z=5 \\ y+z+w=3 \\ x+y+w=3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x+2y+3z=14 \\ 2y+3z+4w=20 \\ x+2y+4w=21 \\ x+3z+4w=23 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x+y+z+w=20 \\ x+y=6 \\ y+z=10 \\ x+z=8 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x-y+z=20 \\ 2x+y-z=10 \\ x+y=30 \\ z+w=70 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x+2y+3z+w=18 \\ x+y+z=6 \\ x-y-z+w=0 \\ y-z-w=-2 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x+y+z+w=26 \\ x+2y+3z+4w=70 \\ x+3y+4z+2w=67 \\ x-y-2z-w=-23 \end{cases}$$

7. 將 50 爲四部。使第一、第三、第四、三部的和等於第二部的四倍；

第一、第二、第三、三部的和等於第四部的 $\frac{3}{2}$ ；而第一、第二、兩部的和等於第四部。求這四部各是多少。

8. 有甲、乙、丙、丁四種酒。甲種價每斤 1 角，乙種價每斤 2 角，丙種價每斤 3 角，丁種價每斤 4 角。現在要把四種酒混合，使成每斤 3 角的酒 10 斤。但知乙、丙兩種所用的斤數，等於甲、丁兩種所用的斤數，甲、丙、丁三種所用的斤數等於乙種所用斤數的 4 倍。求各種所用的斤數。

第五章 圖解

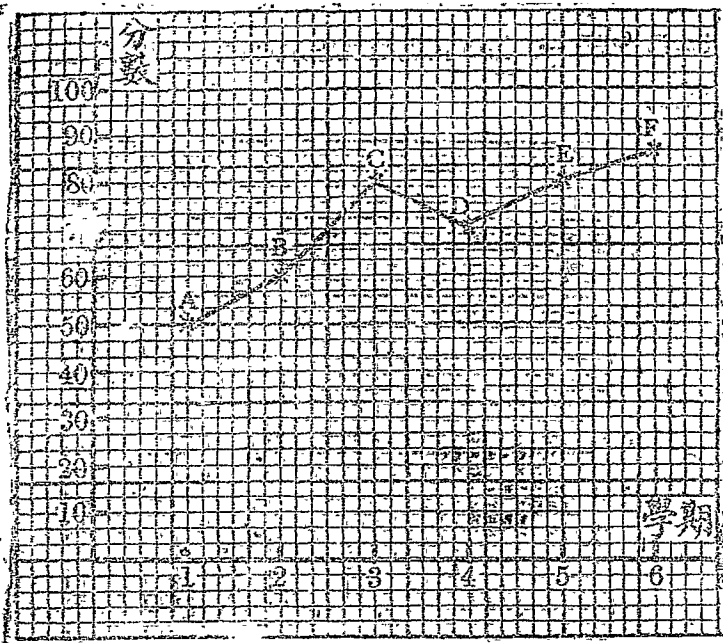
§ 46. 幾個簡單的例 欲明圖解的意義，先自下列諸例看起：

[例一] 某生在該三年，各學期成績如下表，試以圖表示升降的情狀。

學 期	1	2	3	4	5	6
成 績	50	60	85	70	80	88.6

[解法] 在方格紙上取縱橫兩相交直線，以橫線表示學期的次第，以縱線表示成績的分數，在橫線上取每 6 格代表一學期，在縱線上取每 3 格代表十分。乃由橫線上 1 處，向上數 50 分得 A 點，作記號“ \times ”表之；又由橫線上 2 處，向上數 60 分得 B 點，作記號“ \times ”表之；同樣得 C, D, E, F 諸點。最後以直線依次聯結其兩點得下圖：

[註] 由圖觀察，該生三年成績的升降情形，可以一目了然；不像原來資料，必須逐行逐列觀察，方能得其概貌。圖解的功用，就這一點，已可窺其概況了。



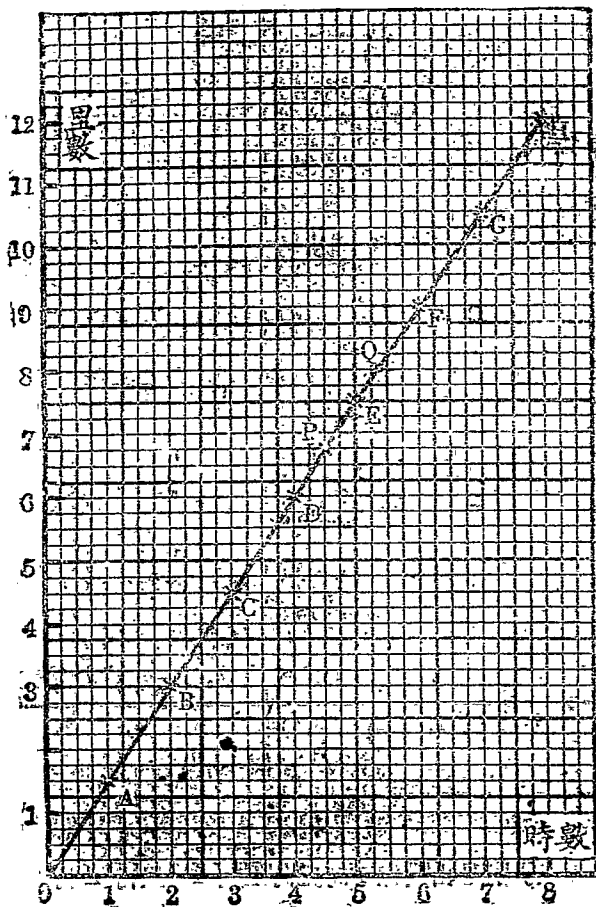
【例二】某人緩步慢行，每小時行 $1\frac{1}{2}$ 里，共行 8 小時而止，試作圖以明所行距離與所經時間的關係。

【解法】先將所行里數與所經時數，作一相應數值表。

所經時數	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
所行里數	0,	$1\frac{1}{2}$,	3,	$4\frac{1}{2}$,	6,	$7\frac{1}{2}$,	9,	$10\frac{1}{2}$,	12。

次取縱橫兩相交點線，在橫線取 4 格表 1 小時，在縱線上取 4 格表 1 里。於是自橫線 1 時處向上數 $1\frac{1}{2}$ 里得 A 點；再由橫

線上 2 時處向上數 3 里得 B 點；同樣，得 C, D, E, F, G, H 諸點。過各點聯一直線如下圖，這就是所求的時間距離相互變化的關係。



[註] 本例與前例有一重要不同之點。在前例 A, B, C, D, E, \dots 諸點，各為孤立之點。過 $A, B; B, C; C, D, \dots$ 諸點所以聯成直線者，不過為求路程的便利；直線 AB, BC, \dots 上其他諸點，本沒有什麼重要的意義。至於本例中，則 A, B, C, D, \dots 諸點不是孤立的。因為所行里數和所經時數，都是連續變化的數。非必從 0 時一躍而至 1 時，從 1 時一躍而至 2 時；在 0 時與 1 時，1 時與 2 時之間，更有無數個刹那。在這無數個刹那中，此人所行距離皆有確定的里數。由這無數個時數，里數的對應值，也得無數個點。這無數個點都在直線 AB, BC, \dots 之中。今在作圖手續中，所以只取整時數 0, 1, 2, \dots 等等者，不過為便利而已。

學者再拿上圖來看，不但 A 表中已載的事實，可以由圖一目了然，即 A 中未載的事實，也可由圖去推知。例如，欲知 $4\frac{1}{2}$ 小時共行幾里，可由橫線上 $4\frac{1}{2}$ 處，向上數到圖中 P 點，約得 6.75 里，就是所求的里數。欲知幾時間內可行 8 里，可由縱線上 8 處向左數到圖中 Q 點，約得 $5\frac{3}{8}$ 小時，這就是所求的時數。同樣，可解其他類似問題。圖解的功用，不是很大嗎？

[例三] 在方程式 $y = 2x + 5$ 中， x, y 俱為可變的數，試作圖以明變遷的情狀。

[註] 本題性質與上例(例二)性質略有不同。在上例，時數，里數俱為正量。本題的 x, y 則皆可正，可負。怎樣作圖？其法不難。但為便於說明計，應先述產程。

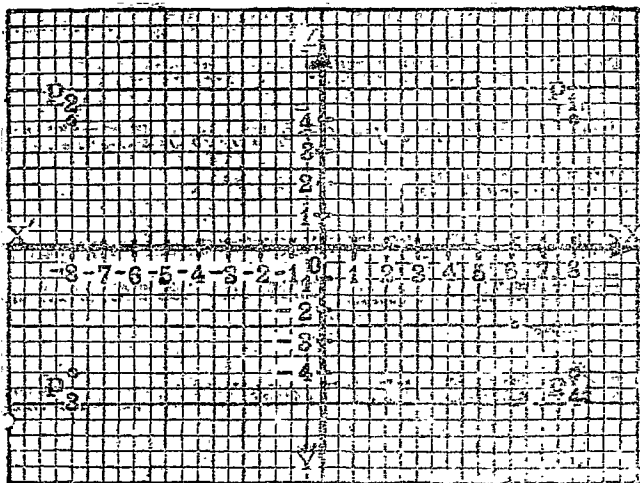
§ 47. 座標制 座標之用，在於決定點的位置。其規則如下：

1. 如下圖，在平面上取縱橫兩相交直線 XX', YY' 命其

交點爲 O 。這 O 點叫做原點，縱線 YY' 叫做縱軸或 y 軸；橫線 XX' 叫做橫軸或 x 軸。

2. 由是平面上任何一點，可定兩個數量。其一是該點與 x 軸的距離，叫做該點的縱標；其二是該點與 y 軸的距離，叫做該點的橫標。縱標，橫標統稱座標。

3. 又因兩點的位置雖不同，但與兩軸的距離猶可相同(例如下圖中的 P_1, P_2)，這樣不免混淆。故又設法爲之區別：點在 y 軸的右方，牠的橫標是正值；點在 y 軸的左方，牠的橫標是負值。點在 x 軸的上方，牠的縱標是正值；點在 x 軸的下方，牠的縱標是負值。



例如，上圖 P_1 的座標是 $(8, 4)$ ； P_2 的座標是 $(-8, 4)$ ； P_3 的座標是 $(-8, -4)$ ； P_4 的座標是 $(8, -4)$ 。反之，座標 $(8, -4)$ 的一點是 P_4 而非 P_3 ， P_2 或 P_1 。

[註] (1) 舉一點座標時，依習慣，須把座標寫於括號之內，前把寫標寫於縱標之前，如上例。

(2) $X'OX$ ， $Y'OY$ 相交，分平面為四部。其在 OX, OY 之間的，叫做第一象限；在 OY, OX' 之間的叫做第二象限；在 OX', OY' 之間的叫做第三象限；最後一部叫做第四象限。

各象限中座標的符號如何？學者自己去決定。

習題三十三

1. 某校五班來學生人數如下表：

學 年	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
人 數	65	54	180	165	255	245	330	305	362	255

試作圖以見其增減的情況。

2. 某病人某日體溫脈搏的記錄如下表：

時 間	上午 2	4	6	8	10	12	下午 2	4	6	8	10	12
體 溫	39	40	39.5	38	38.6	38	38	38.2	38.5	38.9	39.5	40
脈 搏	60	62	60	59	58	57	61	64	66	69	91	93

試作圖以見其變化的情況。

3. 試在各象限內坐標的符號。

4. 試在平面上定出下列各點。

(a) (3, 4)

(b) (-3, -5)

(c) (4, 3)

(d) (-5, -3)

(e) (5, -3)

(f) (-5, 3)

(g) (0, -10)

(h) (10, 0)

(i) (0, $\sqrt{2}$)

(j) ($-\sqrt{3}$, 0)

(k) (m, 0)

(l) (0, n)

§ 43. 兩元一次方程式的圖線 的明瞭深刻的涵義,乃可
討論 § 46 例三的作圖法。

由原方程式 $y = 2x + 5$, 若與 x 以極其適當的值, 可得 y
的對應值如下表:

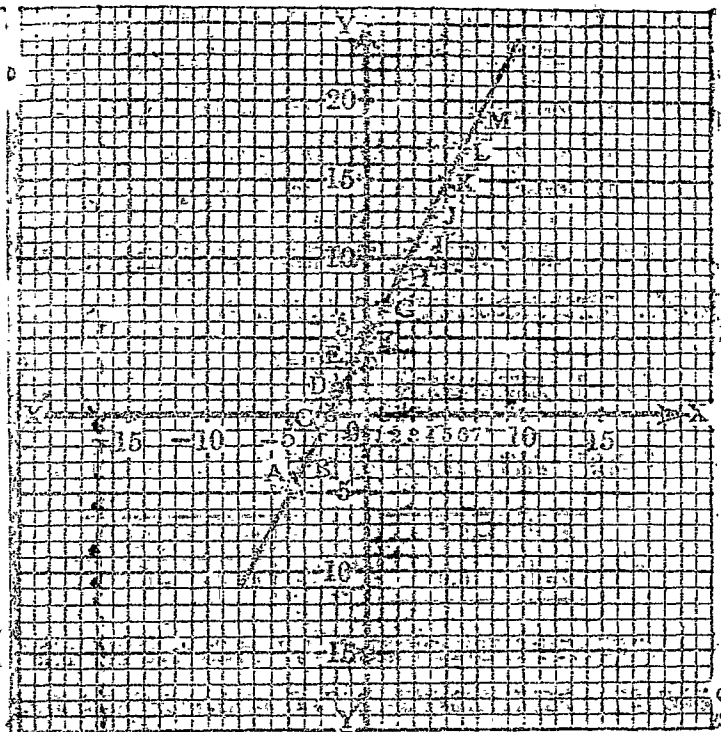
假 $x =$	-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,
則 $y =$	-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17,

乃以 x 的各值為橫標, y 的對應值為縱標, 定出 $A, B, C,$
..... M 諸點。最後過此諸點, 聯成一條平滑的線, 其形狀為一直
線, 這就是方程式 $y = 2x + 5$ 的圖線。

在 § 46 例三中, 所行里數 (y) 與所經時數 (x) 的關係亦為一次方程式 $y =$
 $\frac{3}{2}x$ 。這兩方程式的圖線皆是無限長的直線, 這是學者已經知道的。其實不但
如此, 任何兩元一次方程式, 如 $Ax + By + C = 0$, 它的圖線總是直線。這條定
理的證明, 因為解析幾何的範圍, 在此不能詳述, 僅有應加注意的:

(1.) 兩元一次方程式的圖線既然總是直線, 則於決定該圖線, 只須決
定其中兩點聯成直線就行了。不必照上面的方法, 求出許多點, 徒增無謂的麻
煩。

(2) 在這直線上的各點, 其座標皆合原方程式; 反之, 不在這線上的
各點, 其座標決不適合原方程式。



習題三十四

作下列各二元一次方程的圖解：

1. $3x + 2y = 5$

2. $3x - 2y = 5$

3. $-x + 3y = 10$

4. $x - 3y = -10$

5. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 10$

6. $3x - 2y = \frac{19}{2}$

7. $8x+4y=0$ 。

8. $8x-7y=0$ 。

9. $\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 5$ 。

10. $\frac{x+3}{2} + \frac{y-2}{3} = 6$ 。

11. $4x+6y=8$ 。

12. $0x+5y=10$ 。

13. $4x+8=0$ 。

14. $5y+10=0$ 。

15. $6x=0$ 。

16. $-7y=0$ 。

§ 49. 用圖線解聯立一次方程式 兩元聯立一次方程式，都可用圖解法去求根。手續甚簡，舉例如下：

[例一] 用圖解法解 $\begin{cases} x+2y=7 & (1) \\ 3x-5y=-1 & (2) \end{cases}$

[解法] 由(1)，(2)依次得 x, y 的對應數值表如下：

(1)	$x=$	-3,7	=	(2)	$x=$	-2,8
	$y=$	5,0			$y=$	-1,5

以(1)表中對應值為座標，定 A, B 兩點，由此畫得直線(1)。再以(2)表中對應值為座標，定 C, D 兩點，由此畫得直線(2)。

直線(1)，(2)的交點是 P ，它的座標(3, 2)就是原來聯立方程式中 x, y 的值，也就是所求的根。[因為 P 點既在直線(1)上，所以合方程式(1)；又在直線(2)上，所以也合方程式(2)。]

把 P 的座標(3, 2)代入(1)，(2)兩式，則

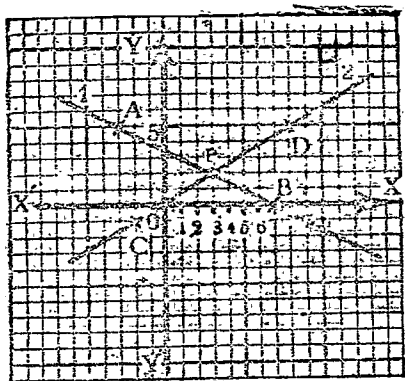
$$3+4=7$$

$$7=7$$

$$9-10=-1$$

$$-1=-1$$

兩式均能適合，故並無錯誤。



【例二】 用圖解法解
$$\begin{cases} x+5y=7 & (1) \\ 3x-2y=4 & (2) \end{cases}$$

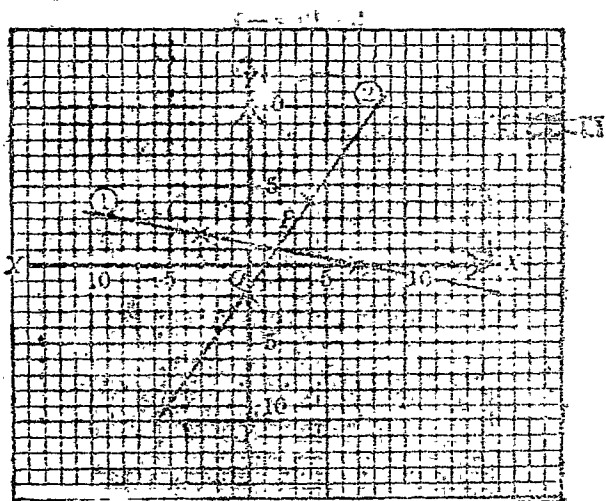
【解法】 作(1)式的圖線得直線(1)，又作(2)式的圖線得直線(2)。這兩直線的交點是 P ，牠的座標是 $(2, 1)$ 。

故所求的根是
$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

記 P 的座標 $(2, 1)$ 代入(1)，(2)兩式，則

$$2+5=7$$

$$7=7$$



$$y - 2 = 4$$

$$4 = 4$$

兩式都能適合，故並無錯誤。

習題三十三

1. 用圖解法解下列各組方程式：

$$(a) \begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ 2x - 7y = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 3x + 2y = 25 \\ x - 2y = -19 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 0 \\ 5x - 4y = 31 \end{cases}$$

2. 試用圖解法解下列各組立方程式：

$$(c) \begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 6x + 1 = 8y + 3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + y = 8 \\ 7x - 5y = 5x - 7y + 16 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - z = 14 - 6y \end{cases}$$

$$(a) \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 6x + 5m = 4y + 5m \end{cases}$$

3. 用代數解法解上題(題二)各聯立方程式。這結果怎樣解釋?

4. 解下列各聯立方程式(用代數法):

$$(a) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 2y = -1 \\ 8x + 8y = 24 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = -1 \\ 8x + 8y = 25 \end{cases}$$

第六章 整式四則之二 乘除法

I. 整式的乘法

§ 50. 單項式乘單項式。以單項式乘單項式，例如 $-2y^2(-5y^3) = ?$ 在此有兩個問題：第一，積的係數是什麼？第二，積的文字及其指數各是什麼？現在分別來討論。

[第一] 積的係數。先看上舉的特例：

$$-2y^2(-5y^3) = ?$$

因 $-2y^2 = -2 \times y^2$, $-5y^3 = -5 \times y^3$.

$$\begin{aligned} \text{故 } (-2y^2)(-5y^3) &= (-2 \times y^2)(-5 \times y^3) \\ &= (-2) \times y^2 \times (-5) \times y^3 \end{aligned}$$

這最後一式，係由四數相乘。依乘法交換律

$$^3 = (-2) \times y^2 \times (-5) \times y^3$$

可改寫爲 $(-2) \times (-5) \times y^2 \times y^3$

$$\begin{aligned} \therefore & \quad (-2y^2)(-5y^3) = (-2)(-5) \times y^2 \times y^3 \\ & \quad = 10 \times y^2 \times y^3. \end{aligned}$$

同樣在這例 $ay^2 \times by^3 = a \times y^2 \times b \times y^3 = ab \times y^2 \times y^3$, 就是說“兩個單項式相乘, 牠的積的係數, 等於乘式被乘式二者係數的積”。

[第二] 積的文字及其指數 先看特例, $y^2 \times y^3 = ?$

因 $y^2 = y \times y, y^3 = y \times y \times y$ 。

$$\therefore y^2 \times y^3 = y \times y \times y \times y \times y = y^5.$$

同樣之通例 $y^m \times y^n = y \times y \times y \times \dots \times$ 到 m 個

$\times y \times y \times y \times \dots \times$ 到 n 個

$= y \times y \times y \times \dots \times$ 到 $(m+n)$ 個

$$= y^{m+n}.$$

就是說“同文字相乘, 其積的文字, 就是那相乘的文字, 其積的指數, 等於乘式, 被乘式二者指數的和”。

[注意] 當不同文字相乘時, 只能用乘號連結兩乘的二次, 然後加以整理。

千萬不能把牠們的指數相加。例如,

$$m \times n = mn \neq m^2 \text{ 或 } n^2 \text{ 或 } m^2n^2$$

$$m^2 \times n^3 = m^2n^3 \neq m^5 \text{ 或 } n^5 \text{ 或 } m^5n^5$$

$$6m^2 \cdot 7n^3 \cdot 2m = 12m^3 \cdot 7n^3 = 84m^3n^3 \neq 84m^5 \text{ 或 } 84n^5 \text{ 或 } 84m^2n^5.$$

綜上 [第一], [第二] 兩條, 乃得單項式相乘的普遍法則。

學者用自己語言把牠總述出來。

$$\begin{aligned} \text{【例一】 } & (-2y^2)(-5y^3) \\ & = (-2)(-5)y^2y^3 = 10y^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{【例二】 } & (-3a)(-4b)(+5c) \\ & = (-3)(-4) \times 5(a \times b \times c) \\ & = 60abc. \end{aligned}$$

【例三】 求 $-2a^2b$, $-ab^2$, $4ac$, $8abc$ 的積。

$$\begin{aligned} \text{【解】 } & -2a^2b(-ab^2)4ac \times 8abc \\ & = (-2)(-1) \times 4 \times 8 \times a^2b \times ab^2 \times ac \times abc \\ & = 64a^{2+1+1+1}b^{1+2+1}c^{1+1} \\ & = 64a^5b^4c^2. \end{aligned}$$

習題三十六

求下列各組代數式的積：

- $x, 2x^2, 3x^3, 4x^4$ 。
- $-x, -2x^2, -2x^3, -4x^4, -5x^5$ 。
- $x^2y, -xy^2, -6x^2y^2, -8xyz, -x^2z^3$ 。
- $8a, -8b, -2c$ 。
- $(-2a)^2, -8b^3, (-5c)^2$ 。
- $(-a)^2, (-2a^2)^2, (-ab)^4$ 。
- axy, bxz, cyz 。
- $-axyz, -bxyz, -cxyz$ 。

9. $\frac{1}{2}xyx, -\frac{1}{3}xyz, -\frac{1}{4}xyz.$

10. $\frac{1}{2}xyz, \frac{1}{3}abc, -\frac{1}{4}xyz.$

§ 51. 單項式乘多項式 在算術，做乘法分配律， $3(4+5-2)=3\times 4+3\times 5-3\times 2$ 。在代數，做乘法分配律，亦有 $a(b+c-d)=ab+ac-ad$ 。這在前面已經講過了。故以單項式乘多項式，就是以這單項式分乘這多項式中的各項，而求這各部份的代數和。

[例一] $a(b+c-d+e-f)=ab+ac-ad+ae-af.$

[例二] 求 $3ab$ 與 $2a^2-2ab+2b^2-2ac+3bc+c^2$ 的積。

[解法] $3ab(2a^2-2ab+2b^2-2ac+3bc+c^2)$
 $=3ab\times 2a^2+3ab(-2ab)+3ab\times 2b^2$
 $+3ab(-2ac)+3ab\times 3bc+3ab\times c^2$
 $=6a^3b-6a^2b^2+6ab^3-6a^2bc+9ab^2c+3abc^2.$

習 題 三 十 七

求下列各組代數式的積：

1. $x-7, x.$

2. $x-2y, -3y.$

3. $2x-3y, 6y.$

4. $x+2y, -3x.$

5. $x^2-xy, 3xy.$

6. $x^2-3xy^2, -3xy.$

7. $x^2+xy+y^2, -4xy.$

8. $x^2+3x^2y+2xy^2-y^3, -2yx.$

9. $x^2+2x^2b+3xb^2+b^3, -ab.$

10. $x^2-x^2y^2-x^2y^3, -2x^2y^2.$

11. $3x^3 - 2x^2y^2 + 8xy^3, -5xy_0$

12. $-2x^3 + 3xy^2 + 6y^3, -8xy^2_0$

13. $x^3 + x^2y + y^3, -5yz_0$

14. $-x^2 + 2xy - y^2, -abyz_0$

§ 52. 多項式乘多項式 欲求 $(a+b+c)(x+y)=?$ 先把

$(x+y)$ 當做一數，以 m 代之，則 $(a+b+c)m = am + bm + cm$ ，
再以 $(x+y)$ 代 m ，則得 $(a+b+c)(x+y) = a(x+y) + b(x+y)$
 $+ c(x+y) = ax + ay + bx + by + cx + cy$ 。

故以多項式乘多項式，就是以乘式的各項——逐項乘——的被乘式的各項，
而求這各部份積的代數和。

[例一] $(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)(x+y)$

$$= x(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$$

$$+ y(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$$

$$= x^4 + \underline{3x^3y} + \underline{3x^2y^2} + \underline{xy^3} + \underline{x^3y} + \underline{3x^2y^2} + \underline{3xy^3} + y^4$$

$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

但在這樣算法內，得了各部份積以後，欲由這各部份積中歸併同類各項，往往容易看錯。所以不如下法為佳。

I. 將乘式被乘式，同依某文字的昇降（或降）排列，并將乘式屬於被乘式的下面。

II. 以乘式的各項遍乘被乘式的各項，并令所得部份積中同類各項排在同一直行之下。（如此便容易合併同類項。）

III. 按乘式加減法，合併同類項。

取上例一演之： $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$$\begin{array}{r} x + y \\ \hline x^3 + 3x^2y + 3x^2y^2 + xy^3 \\ \hline x^3y + 3x^2y^2 + 3xy^3 + y^4 \\ \hline x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \end{array}$$

【例二】求 $x^3 - 3 + 2x^2$, $-4x^3 + 2x + 1$ 的積。

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 \qquad -3 \\ -4x^3 \qquad + 2x + 1 \\ \hline -4x^6 - 3x^5 \qquad + 12x^3 \\ \hline 2x^4 + 4x^3 \qquad - 6x \\ \hline x^2 + 2x^2 \qquad - 3 \\ \hline -4x^6 - 8x^5 + 2x^4 + 17x^3 + 2x^2 - 6x - 3 \end{array}$$

【例一】此式，被乘式務須列於乘式的右邊（或左邊均可），當其末項在左，乘式等號就不易進行了。學者試將上例，改作以原式去乘，其結果如何。

【例二】學者試將上例改寫成 $\frac{x^3 + 2x^2 - 3}{-4x^3 + 2x + 1}$ 而乘之，其乘式與前例，其結果，是否亦有缺項（就是較低的級數項），應請每後查對。

習題 三十八

試求下列各題的積或商數：

1. $x + 6$, $x - 6$

2. $x+5, \quad x-6, \quad x+7.$
 3. $x+5, \quad x-3, \quad x-5, \quad x+6.$
 4. $x^2+5x+6, \quad x^2-5x-6.$
 5. $x^2-4x+4, \quad x^2+4x+4.$
 6. $x^2-4xy+4y^2, \quad x^2+4xy+4y^2.$
 7. $x^2+x^2-x+6, \quad 3x+x^2-2.$
 8. $x^2y^2+x^2-xy^2+4y^2, \quad 3xy+x^2-2y^2.$
 9. $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx, \quad x+y+z.$

【解法】 使 x 的降冪排列整式，整理式：

$$x^2 - xy - xz + y^2 - yz + z^2$$

$$x + y + z$$

$$x^2 - xy - xz + y^2 - yz + z^2$$

$$x^2y \quad -xy^2 - xyz \quad +y^2 \quad -y^2z + yz^2$$

$$x^2z \quad -xyz - xz^2 \quad +y^2z - yz^2 + z^2$$

$$x^2 \quad \quad \quad -3xyz \quad +y^3 \quad \quad \quad +z^3$$

10. $x^2+y^2+2xy+2xz+x^2, \quad x-y+z$

11. $x^2+4x^2+3x^2-2ab-3ac-3bc, \quad a+b+c$

12. $(x+2y+5)(x-2-6) = ?$

13. $(x^2+y^2+x^2y+xy^2)(x-y) = ?$

14. $(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)(x^3+a^2x^2+ax+a^3) = ?$

設與下列各式的結果通數之：

15. $(x+y)^2 = ?$ 16. $(x-y)^2 = ?$

17. $(x+y)^3 = ?$ 18. $(x-y)^3 = ?$

19. $(x+y)(x-y) = ?$ 20. $(x+y)(x^2-xy+y^2) = ?$

21. $(x-y)(x^2+xy+y^2) = ?$ 22. $(x+y+z)^2 = ?$

【注意】 上列各題(15-20)的結果，在代數上應用極廣，且極重要。

能熟練的人，此後應用自如，到處有左右逢源之樂；不能熟練的，必至時感困難，叫苦不已。他日成績的高下，在此已預下因子了。

II. 整式的除法

§ 53. 單項式除單項式 除法為乘法的逆元運算。單項式相除的問題，可由單項式相乘的方法求解決。

[例一] 在乘法既有 $3y(-2y^2) = -6y^3$ ，故
在除法應得， $(-6y^3) \div 3y = -2y^2$ 。

[例二] 在乘法， $ax^m y^p \cdot bx^n y^q = abx^{m+n} y^{p+q}$ ；故
在除法應得， $\frac{abx^{m+n} y^{p+q}}{ax^m y^p} = bx^n y^q$ 。

由上兩例看來，可得以單項式除單項式的方法如下：

[第一] 商的係數 以除式係數除被除式係數，其結果就是商的係數。

[第二] 商的文字及其指數 假使除式和被除式文字相同，其商的文字就是相除的文字，其商的指數等於自被除式中各文字指數減去除式中各該文字的指數。假使除式和被除式文字不同，其商只能寫成分數式，除式做分母，被除式做分子，而不能相除，指數也不能相減。

[例三] $-4x^2 y z^3 \div 6x y z^2 = -\frac{2}{3} x z$ 。

[例四] $6x^2 \div 3y = 2x^2 \div y \neq 2x$ 或 $2y$ 或 $2 \cdot \frac{x}{y}$ 。

$$\begin{aligned} \text{[例五]} \quad y^3 \div y^3 &= 1, \quad 3x^2 \div x^2 = 3, \quad 6x^2 \div (-2x^2) \\ &= -3. \quad \text{對不對?} \end{aligned}$$

習題三十九

將下列各組代數式中，試以左式除右式：

- | | |
|----------------------------|----------------------|
| 1. $-21x^3, -7x^2$. | 2. $21x^3, -7x^2$. |
| 3. $-21x^3, 7x^2$. | 4. $13xyz, 26xyz$. |
| 5. $-12x^2y^2z^2, 26xyz$. | 6. $6x^m y^n, 3xy$. |
| 7. $-51a^3b^4c^5, -17ab$. | 8. $-abcd, abcd$. |

求下列各式的結果：

- $8a^2b^2 \div (-4ab) \times 2ab = ?$
- $8a^2b^2 \div \{(-4ab) \times 2ab\} = ?$
- $16a^2b^2c^2 \div \{-8a^2b^2c^2 \div (-2a^2b^2c^2)\} = ?$
- $-8x^2b^4c^2 \div (-4x^2b^2c^2) \div (-2abc) = ?$
- $3x^3 \div (-2y^2) = ?$

§ 54. 以單項式除多項式 以單項式除多項式，怎樣除

法？仍可由單項式乘多項式的方法去推求。

因在乘法， $A(B+C+D) = AB+AC+AD$ 。

故在除法，應得 $(AB+AC+AD) \div A = B+C+D$

$$= \frac{AB}{A} + \frac{AC}{A} + \frac{AD}{A}.$$

用語言來說，就是“以單項式除多項式，等於以這單項式逐除這多項式中的各項，而求這各部分商的代數和。”

$$\begin{aligned}
 \text{[例一]} \quad & (12x^4 + 3x^3 + 2x^2) \div 2x \\
 & = 12x^4 \div 2x + 3x^3 \div 2x + 2x^2 \div 2x \\
 & = 6x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[例二]} \quad & (5a^2b^3c^4 - 10a^3b^4c^5 - 15a^4b^5c^6) \div 5abc \\
 & = ab^2c^3 - 2a^2b^3c^4 - 3a^3b^4c^5.
 \end{aligned}$$

習 題 四 十

$$1. \quad 22x^4 \div (2x^2 + 12x^3 + 4x) = 4x + 3x^2 + 5x^3. \quad \text{請不備註解答}$$

[注意] 在每代數時入，常有與乘積相反的錯誤。請求這者檢查自己。

$$2. \quad (2x^3 + 12x^2 + 4x) \div 22x^4 = ? \quad \text{請不備註解答}$$

試下列各除法：

3. $(x^2 + ax) \div x.$
4. $(2x^2 - 3ax) \div (-2x^2).$
5. $(94x^3 - 85ax) \div 17x.$
6. $(-2a - 6ax) \div (-3x).$
7. $(-x^2y - x^2y^2 - x^2y^3) \div (-xy).$
8. $(a^2b^2 - a^2b^3 - a^2b^4) \div (-a^2b).$
9. $(8ax^4 - 25b^2x^3 - 63ax) \div 5x.$
10. $(a^2 - a^3 + 2a^2b^2) \div (-a^2).$

下列各組代數式中，試將右式除左式：

11. $a^2 + ab + ac - ac^2, a.$
12. $ab - ab^2 + ab^3, -ab.$
13. $6^2m^2n^2 - 6^2mn - 2^2mn^2 + 5^2m^2n, -3^2mn.$
14. $-a^3 - 7a^2b + 5a^2 - 33a^2 + 9a^2, -4a^2.$
15. $am + 4ax + am, m.$

16. $am^2 + bm + cm, m_0$

17. $a(x+y) + b(x+y) + c(x+y), x+y_0$

18. $a(x+y)^2 + b(x+y)^2 - c(x+y), x+y_0$

19. 多項式除多項式 這是原法中比較嚴格的兩層。

【例一】容易證之。

【例一】 試以 $x+y$ 除 $ax+cy+bx+by+cx+cy$ 。

【解法】 把被除式改寫為 $a(x+y) + b(x+y) + c(x+y)$ 。

照著練習題 17, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{ax+cy+bx+by+cx+cy}{x+y} \\ &= \frac{a(x+y) + b(x+y) + c(x+y)}{x+y} \\ &= \frac{a(x+y)}{x+y} + \frac{b(x+y)}{x+y} + \frac{c(x+y)}{x+y} \\ &= a+b+c \end{aligned}$$

但是, 怎樣才能把被除式變為適當的形式, 使除後易於進行? 此手續往往繁而且難, 不盡做本例的覆轍。所以擬定他法, 不以這類第一等問題, 並非迂法。欲求速法, 請看下列:

【例一】 試以 x^2+2x-3 除 $2x^4+3x^3-5x^2+2x-3$

$$\begin{array}{r} \overline{) 2x^4+3x^3-5x^2+2x-3} \\ \underline{2x^4+4x^3-6x^2} \\ x^3+x^2+8x-3 \\ \underline{3x^3+6x^2-9x} \\ 3x^2+6x-9 \\ \underline{3x^2+6x-9} \\ 0 \end{array}$$

【說明】把除式被除式，各依 x 的降幂排列於同一橫行內，並在除式被除式之間作一豎線以區隔之。又在被除式之上作一橫線（橫線之上預備寫商數）。

(1) 以除式第一項 x^2 ，除被除式第一項 $2x^4$ ，得 $2x^2$ 。這就是商的第一項。

乃自被除式中減去除式 x^2+2x-3 的 $2x^2$ 倍，得第一餘式 $-x^2+x^2+9x-9$ 。

(2) 再以除式第一項 x^2 ，除餘式 $-x^2+x^2+9x-9$ 的第一項 $-x^2$ ，得 $-x$ 。這就是商的第二項。

乃自第一餘式 $-x^2+x^2+9x-9$ 中減去 x^2+2x-3 的 $-x$ 倍，得第二餘式 $3x^2+6x-9$ 。

(3) 再以除式第一項 x^2 除第二餘式 $3x^2+6x-9$ 的第一項，得 $+3$ 。這就是商的第三項。

乃自第三餘式 $3x^2+6x-9$ 中，減去除式 x^2+2x-3 的 $+3$ 倍，得餘數 0 。

由是得所求的商為 $2x^2-x+3$ 。

【例二】試以 $xy+x^2+y^2$ 除 $x^2y^2+x^4+y^4$ 。

【解法】先把除式，被除式，同依 x 的降幂排列，再行除算。

$$\begin{array}{r}
 y^2 - xy + x^2 \\
 x^2 + xy + x^2 \overline{) y^4 - xy^3 + x^2} \\
 \underline{y^4 + xy^3 + x^2y^2} \\
 -xy^3 \\
 \underline{-xy^3 - x^2y^2 - x^2y} \\
 x^2y^2 + x^2y + x^2 \\
 \underline{x^2y^2 + x^2y + x^2} \\
 0
 \end{array}$$

【例三】 試以 $1+x$ 除 x^2+1-2x

【解法】 (1) 先把除式，被除式，同按 x 的降幂排列，再行

$$\begin{array}{r}
 x-3 \\
 x+1 \overline{) x^2-2x+1} \\
 \underline{x^2+x} \\
 -3x+1 \\
 \underline{-3x-3} \\
 +4
 \end{array}$$

(2) 先把除式，被除式，同按 x 的昇幂排列，再行除算。

$$\begin{array}{r}
 1-3x+4x^2 \\
 1+x \overline{) 1-2x+x^2} \\
 \underline{1+x} \\
 -3x+x^2 \\
 \underline{-3x-3x^2} \\
 4x^2 \\
 \underline{4x^2+4x^3} \\
 -4x^3
 \end{array}$$

[說明] 這兩種方法所得的結果，形式各異，但是都對的。他們的不同在於答數的表示方法。

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x + 1} = x - 3 + \frac{4}{x + 1} \dots\dots\dots (1) \text{法}$$

$$\frac{1 - 2x + x^3}{1 + x} = 1 - 3x + 4x^2 - \frac{4x^3}{1 + x} \dots\dots\dots (2) \text{法}$$

(1)法的優點，在我們演至餘式第一項的指數，低於除式第一項的指數時，就可以不必再除下去，所以商的項數有限，簡而不繁。

(2)法恰巧相反，餘式的指數愈除愈大，商的項數可以隨意增加，沒有自然的限制。

由上面諸例看來，可見多項式相除的方法可總括之如下：

第一步 把除式被除式同依某文字的昇幂或降幂排列起來 (被除式中遇有缺項時，並須留出相當空位)。

第二步 以除式中第一項，除被除式中第一項，得商的第一項。

第三步 以商的第一項乘除式的各項，並將所得的積自被除式中減去之。

第四步 把第三步所得餘式，當做新被除式，再照第二步，第三步繼續進行，直到餘式為零而止 (但若除式不能除盡被除式時，則除式，被除式都應同依某文字的降幂排列。除算的手續，

應演至“餘式第一項某文字的指數，低於除式第一項某文字的指數”爲止。

習 題 四 十 一

試下列各除法：

1. $(x + 15x + 16) \div (x + 7)$ 。

2. $(x^2 - 15x + 56) \div (x - 7)$ 。

3. $(x^2 - 15x + 56) \div (7 - x)$ 。

4. $(x^2 + 15x + 56) \div (7 + x)$ 。

5. $(8x - 7xy - 3y^2) \div (2x - 3y)$ 。

6. $(4a^2 + 23a + 15) \div (4a + 5)$ 。

7. $(x^4 + x^3 + 1) \div (x^2 + x + 1)$ 。

8. $(x^4 + x^2 + 1) \div (x^2 - x + 1)$ 。

9. $(x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 2) \div (x - 2)$ 。

10. $(2x^4 + x^3 + x^2 + x - 2) \div (2x - 1)$ 。

11. $(x^3 + y^3) \div (x + y) = ?$

$$(x^3 + y^3) \div (x + y) = x^2 - x + y^2 + y$$

= $x^2 + y$ 。對不對？何故？

12. $(x^3 + y^3) \div (x + y) = ?$

$$\begin{array}{r}
 x^3 + y^3 \\
 \hline
 x + y \overline{) x^3 + y^3} \\
 \underline{x^3 + y^3} \\
 0
 \end{array}$$

對不對？何故？

【注意】上列兩題錯誤，也是初學代數的人常有的錯誤，學習時務宜

留心。

下列各題中試以右式除左式：

$$13. \quad x^4 + y^4 + z^4 y^2, \quad x^2 - xy + y^2.$$

$$14. \quad x^2 - y^4, \quad x - y.$$

$$15. \quad x^4 - y^4, \quad x + y.$$

$$16. \quad x^5 + y^5, \quad x + y.$$

$$17. \quad x^5 - y^5, \quad x - y.$$

$$18. \quad x^3 + y^3, \quad x + y.$$

$$19. \quad x^3 - y^3, \quad x - y.$$

$$20. \quad 12x^5 - x^5 + 32x^4 + 30x^3 - 3x^2, \quad 3x^3 + 10x^2 + 2x + 1.$$

$$21. \quad (x^2 - y^2) \div (x + y) = ?$$

$$\begin{array}{r} x^2 - xy + y^2 \\ \underline{-(x^2 + y^2)} \\ -xy + y^2 \\ x^2 - xy + y^2 \\ \underline{-(x^2 + y^2)} \\ -2xy + y^2 \\ x^2 - xy + y^2 \\ \underline{-(x^2 + y^2)} \\ -2y^2 \end{array}$$

試以 $x + y$ 除 $x^2 - y^2$ ，得商 $x^2 - xy + y^2$ ，餘 $-2y^2$ 。

$\therefore (x^2 - y^2) \div (x + y) = x^2 - xy + y^2 + (-2y^2) \div (x + y)$

$$22. \quad (x^4 + y^4) \div (x + y) = ?$$

$$23. \quad (x^4 + y^4) \div (x - y) = ?$$

$$24. \quad \text{試以 } x + 2y - z \text{ 除 } x^2 + 4xy - 4xz + 4y^2 - 8yz + 3z^2.$$

習 題 四 十 三

解下列各方程式：

1. $(x+1)(x+3) = (x+5)(x-5)$ 。

2. $(x+1)(x+2)(x+3) = (x^2+5x-5)$ 。

3. $(x+4)(x-5) = x^2-8$ 。

4. $(x^3-8) \div (x-2) = (x+3)(x-3)$ 。

5. $(37x^3+8) \div (2x+2) = (x^3-27) \div (x-3) + 2x^2$ 。

6.
$$\begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x+y} + \frac{x^2+y^2}{x-y} = x^2-xy+y^2+10 \\ \frac{x^3-y^3}{x-y} + \frac{y^3-x^3}{x-y} = x^2+xy+y^2+11 \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} \frac{x^2-16}{x+4} + \frac{y^2+2y+1}{y+1} = x(x+1) \\ \frac{x^2-16}{x-4} + \frac{y^2-2y+1}{y-1} = x(x-1) \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} \frac{x^3+y^3+9-9xy}{x+y+2} = x^2+y^2-xy+9 \\ 2x+2y+8=0 \end{cases}$$

9. 兩個連續奇數中，大數的平方比小數的平方大 92。求這兩個數。

10. 三個連續奇數的積比其中第二數的立方少 78。求這三個數。

11. 有一方形，若將其邊五尺，則積五尺，其面積不佳。若將其邊二尺，則積三尺，其面積也不佳。求這四方形的面積。

12. 兒童分糖。平均分派，每人得糖若干枚。若有一人作全額得糖，則每人可多得一枚；若有三人各得雙份，則每人可少得 2 枚。求糖與此人數。

第七章 公式的應用

§ 53. 引論 前章所述的乘除法都是通法，對於任何乘除問題均能適用。但是有時卻不是最簡的方法。因為有些乘除問題，常可依據公式，一望而得其結果；不必再用前章的方法實行核算。這些公式，就是前章習題三十八 15—23 諸題所得的等式。因其應用極廣，故再分節述其用法於下。

§ 57. 二數和的平方 由實行乘算，得公式：

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

自此以後，欲求二數和的平方，便可由這公式直接記出其結果，不必仍如前章方法，實施許多不必要的乘算手續了。

【例一】 $(2a+2b)^2 = ?$

【解法】 $(2a+2b)^2 = 9a^2 + 12ab + 4b^2$

【說明】 以 $(2a+2b)^2$ 與公式的左邊比較，可見 $2a$ 就是公式中的 x ， $2b$ 就是公式中的 y 。故欲求 $(2a+2b)^2$ 的結果，即以 $2a$ 代入公式中的 x ， $2b$ 代入公式中的 y 。於是得 $(2a+2b)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(2b) + (2b)^2 = 9a^2 + 12ab + 4b^2$ 。

【例二】 $(3x+5m)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5m + (5m)^2$

$$= 9x^2 + 30mx + 25m^2$$

【例三】 $\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{xy}{12} + \frac{y^2}{4}$ ，對不對？何故？

【注意】 上面的錯誤，理由原甚淺顯，但去初學者，偶不審心，往往有與尋
 常，氣本無時，千差百端。

【例四】 $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ 。對不對？何故？

【注意】 這種錯誤，理由也很淺顯。然而初學者往往不能見其，且其錯誤
 的形式，也不止一種。例如：

(1) 已知 $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ，有時便誤說 $\sqrt{a^2 + b^2} = a + \sqrt{b}$ 。譬如參
 考 83 的平方根，把 83 原平方如左式 $\frac{83}{2}$ 如此來無錯誤。但是今欲以上式
 既誤，更特詳得應說 $\sqrt{b^2} = b + \sqrt{a}$ ，於是便成大錯了。

(2) 已知 $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ，但有時便誤說 $(m^2 + n^2)^2 = m^4 + n^4$ 。

(3) 已知 $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ，但有時便誤說 $a^2 + y^2 = (x+y)^2$ 。

類此之例很多，不勝枚舉。讀者當看，務各審心。

習 題 四 十 四

依下列各式直接算出下列各式的結果：

- | | |
|---|---|
| 1. $(2x+4y)^3$ | 2. $(3xy+6z)^2$ |
| 3. $\left(\frac{x}{3}+y\right)^2$ | 4. $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{2}\right)^2$ |
| 5. $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)^2$ | 6. $\left(\frac{x}{3}+\frac{y^2}{4}\right)^2$ |
| 7. $\left(m^2n^2+\frac{n^2a^2}{2}\right)^2$ | 8. $\left(2x^2y-\frac{cd^2}{6}\right)^2$ |
| 9. $\left(\frac{ab}{8}-\frac{cd}{y}\right)^2$ | 10. $(25x^2+9y^2)^2$ |

11. $(3x^2+25y^2)^2$ 12. $(4m^2n^2+x^2y)^2$

13. $[(x+y)+x]^2=(x+y)^2+2x(x+y)+x^2=?$

14. $(a+2b+3c)^2=?$

§ 59. 二數差的平方 由質行乘算得公式

$$\underline{(x-y)^2=x^2-2xy+y^2}$$

這公式的結構公式大同小異，所不同的，只有第二項的符號，學者必須注意。

就此公式，便可不用乘法，直接寫出二數差的平方=?試看下列：

$$\begin{aligned} \text{【例一】 } (3a-4b)^2 &= (3a)^2 - 2(3a)(4b) + (4b)^2 \\ &= 9a^2 - 24ab + 16b^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{【例二】 } \left(\frac{2x}{3}-\frac{3y}{4}\right)^2 &= \left(\frac{2x}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{2x}{3}\right)\left(\frac{3y}{4}\right) + \left(\frac{3y}{4}\right)^2 \\ &= \frac{4x^2}{9} - xy + \frac{9y^2}{16}. \end{aligned}$$

習題四十三

試求下列各式的平方：

1. $(3a-4y)^2$

2. $(2xy-3z)^2$

3. $\left(\frac{x}{3}-y\right)^2$

4. $\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\right)^2$

5. $\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{4}\right)^2$

6. $\left(\frac{x}{3}-\frac{4y}{4}\right)^2$

7. $\left(3x^2y^2-\frac{7^2z^2}{3}\right)^2$

8. $\left(2a^2b-\frac{3c^2}{6}\right)^2$

9. $\left(\frac{a^2}{3} - \frac{c^2}{6}\right)^2$

10. $(x+y-z)^2$

11. $(x^2-y+z)^2$

12. $(x-y-z)^2$

13. $(x-y)^2 = x^2 - y^2$, 對不對? 何故?

14. $(y-y)^2 = x^2 + y^2$, 對不對? 何故?

15. $(x-y)^2 = x^2 - y^2$, 對不對? 何故?

16. $(x^2 - 2xy + y^2)^2 = [(x^2 + y^2) - 2xy]^2$
 $= (x^2 + y^2)^2 - 4xy(x^2 + y^2) + 4x^2y^2 = ?$

17. $(x-y)^4 = ?$

18. $(x+y)^4 = ?$

§ 10. 二數之差的平方 由實行乘算, 得公式

$$\underline{(x+y)(x-y) = x^2 - y^2}$$

假此公式, 以二數之和乘彼二數之差, 便可直接進行乘算, 不必實行乘算了。試看下列:

$$[I] \quad (5a+8b)(5a-8b) = (5a)^2 - (8b)^2 = 25a^2 - 64b^2.$$

$$[II] \quad \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right) = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}.$$

$$[III] \quad (2x+4y)(4x-8y) = 12x^2 - 12y^2. \text{ 對不對? 何故?}$$

$$[IV] \quad (x+y)^2(x-y)^2 = ?$$

$$[V] \quad (x+y)^2(x-y)^2 = [(x+y)(x-y)]^2$$

$$= (x^2 - y^2)^2$$

$$= x^4 - 2x^2y^2 + y^4.$$

二 四 十 六

1. $(2x+5y)(2x-5y)$

2. $(7x-8y)(7x+8y)$

3. $(9-x^2)(9+x^2)$

4. $\left(\frac{2x}{3}+\frac{3y}{2}\right)\left(\frac{2x}{3}-\frac{3y}{2}\right)$

5. $(7x+8y)(8x-7y)$

6. $(a+cb)(a-cb)$

7. $\left(\frac{8}{3}mn-\frac{2}{3}pq\right)\left(\frac{8}{3}mn+\frac{2}{3}pq\right)$

8. $(x^2-y^2)(x^2+y^2)$

9. $(2x+3y)(2x-4y)$

10. $(x-y)(x^2+y^2)(x+y)=?$

$$\begin{aligned} \text{【解法】 } (x-y)(x^2+y^2)(x+y) &= (x-y)(x^2-y^2)(x^2+y^2) \\ &= (x^2-y^2)(x^2+y^2) = x^4-y^4 \end{aligned}$$

11. $162 \times 18 = ?$

$$\text{【解法】 } 162 \times 18 = (10^2+2)(100-2) = 10000-4 = 9996$$

12. $(x-y)(x^2+y^2)(x^2+y^2)(x+y)=?$

13. $\left(\frac{2x}{3}-\frac{y}{2}\right)\left(\frac{4x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)\left(\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}\right)=?$

14. $104 \times 96 = ?$

15. $1012 \times 187 = ?$

16. $(2m+4n)^2(2m-4n)^2 = ?$

17. $(2x+y)^2(2x-y)(4x^2+y^2)^2 = ?$

§ 60. 二項式的立方 由實行乘算得公式：

$$\underline{(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$$

在此公式中，每項右邊的形式，好像沒有左邊那樣容易記，但是，
 假若能注意下列二點，便也不難記憶了。

(1) 各項的係數，自第一項起依次是 1, 3, 3, 1。

(2) x 的指數，自第一項起依次是 3, 2, 1, y 的指數，自第

二項起，依次是 1, 2, 3。

公式的左右兩邊，既能認清記熟，再看其用法如下：

【例一】 $(2m+3n)^2$

$$\begin{aligned} &= (2m)^2 + 3(2m)^2(3n) + 3(2m)(3n)^2 + (3n)^2 \\ &= 8m^2 + 36m^2n + 54mn^2 + 27n^2. \end{aligned}$$

【例二】 $\left(\frac{x}{2} + y\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{2}\right)y + 3\left(\frac{x}{2}\right)y^2 + y^2$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{3x^2y}{2} + \frac{3xy^2}{2} + y^2.$$

習題四十七

試求下列各式的結果：

1. $(3p+2q)^2$

2. $(3p+2q)^2$

3. $(11x+y)^2$

4. $(10y+z)^2$

5. $(11x^2y+1)^2$

6. $(xy+1)^2$

7. $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)^2$

8. $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)^2$

9. $\left(\frac{x^2}{10} + \frac{y^3}{3}\right)^2$

10. $\left(\frac{x^2}{3} + \frac{y^3}{10}\right)^2$

§ 81. 二數差的立方 由實行乘算得公式：

$$(x-y)^2 = x^2 - 3x^2y + 3xy^2 - y^2$$

此公式與前節公式大不相同；所不同的，只有符號一異。學生應記此公式清楚。

【例一】 $(x^2 - 5y^3)^2$

$$\begin{aligned}
 &= (x^2)^3 - 3(x^2)^2(5y^2) + 3x^2(5y^2)^2 - (5y^2)^3 \\
 &= x^6 - 15x^4y^2 + 75x^2y^4 - 125y^6.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{【例二】 } (a+b)^3(a-b)^3 &= (a^2-b^2)^3 \\
 &= a^6 - 2a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6.
 \end{aligned}$$

習題四十八

試求下列各式的位址：

- | | |
|---|---|
| 1. $(3m-n)^3$ | 2. $(4m^2-3n^2)^3$ |
| 3. $(5p-6q)^3$ | 4. $(3p-5q)^3$ |
| 5. $\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{3}\right)^3$ | 6. $\left(\frac{m}{3}-\frac{n}{2}\right)^3$ |
| 7. $(3x-y)^3(2x+y)^3$ | 8. $(10x^2y^2-5)^3$ |
| 9. $(x-y)^3 = ?$ $(y-x)^3 = ?$ | |

試問 $(x-y)^3$ 與 $(y-x)^3$ 有何關係？等不等？何故？

$$10. (x-y)^2 = ? \quad (y-x)^2 = ?$$

試問 $(x-y)^2$ 與 $(y-x)^2$ 有何關係？何故？

§ 62. 可化爲立方之和的 由實行乘得得公式

$$(x+a)(x^2-ax+a^2) = x^3+a^3$$

在這公式中，等號右邊的形式容易記清。左邊則應注意第二項裏的各項文字指數及其符號。至於第一括號內，形式甚簡，不能一見不忘。

學者應清記熟上式之後，再看它的用法：

$$\text{【例一】 } (3a+2p)(9a^2-6ap+4p^2) = ?$$

【解法】因 $9a^2 - 6ap + 4p^2$ 可化爲 $(3a)^2 - (3a)(2p) + (2p)^2$ ，故 $(3a+2p)(9a^2 - 6ap + 4p^2)$ 可化爲 $(3a+2p)[(3a)^2 - (3a)(2p) + (2p)^2]$ 。拿這和公式左邊比較，則 $3a$ 就是公式中的 x ， $2p$ 就是公式中的 y 。故所求的積就是在公式右邊把 x 換成 $3a$ ， y 換成 $2p$ 所得的結果。以簡明的算式表之如下：

$$\begin{aligned} & (3a+2p)(9a^2-6ap+4p^2) \\ &= (3a+2p)[(3a)^2-(3a)(2p)+(2p)^2] \\ &= (3a)^3+(2p)^3=27a^3+8p^3. \end{aligned}$$

【例二】 $(5a+4m)(25a^2-20am+16m^2)=?$

【解法】 $(5a+4m)(25a^2-20am+16m^2)$

$$\begin{aligned} &= (5a+4m)[(5a)^2-(5a)(4m)+(4m)^2] \\ &= (5a)^3+(4m)^3=125a^3+64m^3. \end{aligned}$$

習 題 十 九

依公式將來自下列各口口填完：

1. $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

2. $(m^2+1)(m^2-m+1)$

3. $(3p+4q)(9p^2-12pq+16q^2)$

4. $\left(\frac{p^2}{4}+9\right)\left(\frac{p^2}{16}-\frac{p^2q}{4}+9q^2\right)$

5. $\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{3}\right)\left(\frac{m^2}{4}-\frac{mn}{6}+\frac{n^2}{9}\right)$

6. $(4a+2b)(4a^2-2ab+b^2)$

7. 下列諸等式中，哪個對？哪個不對？

(a) $(x+y)(x^2+xy+y^2)=x^3+y^3$

(b) $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3+y^3$

(c) $(x+y)(x^2-xy-y^2)=x^3+y^3$

8. 求 $(3m^2+2n^2)(3m^4+6m^2n^2+4n^4)=?$ 能用公式嗎？何故？怎樣才能應用公式？

9. 求 $(2x+3y)(4x^2+6xy+9y^2)=?$

$$\begin{aligned} \text{【解法】 原式} &= (2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2+12xy) \\ &= (2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)+12xy(2x+3y) \\ &= 8x^3+27y^3+24x^2y+36xy^2. \end{aligned}$$

10. 仿上題解法求題 8 的結果。

11. 求 $(5x^2+4y)(25x^4-10x^2y+16y^2)$

§ 83. 可化為立方之差的 由乘法得公式：

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$$

學者注意本節公式與前節公式何處相同，何處不同。把這關係公式區別清楚，勿使混淆，應用時就可免於錯誤了。

【例一】 $(3c-d)(9c^2+3cd+d^2)$

$$= (3c-d)[(3c)^2+(3c)d+d^2]$$

$$= (3c)^3-d^3=\underline{27c^3-d^3}.$$

【例二】 $\left(\frac{x}{2}-y\right)\left(\frac{x^2}{4}+\frac{xy}{2}+y^2\right)=\frac{x^3}{8}-y^3.$

習 題 五 十

依公式直接求出下列各式的結果：

1. $(9x^2 + 8xy + y^2)(3x - y)$ 。

2. $(x^2 + 8xy + 8y^2)(x - 3y)$ 。

3. $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x^2}{4} + \frac{xy}{6} + \frac{y^2}{9}\right)$ 。

4. $(4m^2n - 5p^2q)(16m^3n^2 + 20pq^2m^2n + 25p^2q^3)$ 。

5. $(7a - 8b)(49a^2 + 56ab + 64b^2)$ 。

6. $(5s - 6t)(25s^2 + 30st + 36t^2)$ 。

7. $(a - b)[(a - 1)^2 + (a - 1)(b - 1) + (b - 1)^2]$ 。

8. $(c - d)[(c - 2)^2 + (c - 2)(d - 2) + (d - 2)^2]$ 。

9. $(m + n)(m^2 + mn + n^2) = m^3 + n^3$ 。對不對？何故？

10. $(3a - 4b)(9a^2 + 24ab + 16b^2) = ?$ 能不能直接用公式？如其不能，

應如何變化才可用簡法求得牠的積（參看前節習題 9 的解法）？

§ 64. 三數和的平方 由乘法得公式：

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$$

用此公式，就可把三數和的平方，直接寫出來，不必實行乘算了。

【例一】 $(a + 2b + c)^2$

$$\begin{aligned} &= a^2 + (2b)^2 + c^2 + 2a(2b) + 2(2b)c + 2ac \\ &= a^2 + 4b^2 + c^2 + 4ab + 4bc + 2ac. \end{aligned}$$

【例二】 $(m - n - 2p)^2 = \{m + (-n) + (-2p)\}^2$

$$= m^2 + (-n)^2 + (-2p)^2 + 2m(-n) + 2m$$

$$\begin{aligned} & (-2p) + 2(-n)(-2p) \\ & = m^2 + n^2 + 4p^2 - 2mn + 4np = 4m^2 \end{aligned}$$

【例三】 $\left(x + \frac{y}{2} - \frac{z}{2}\right)^2 = \left\{x + \frac{y}{2} + \left(-\frac{z}{2}\right)\right\}^2$

$$\begin{aligned} & = x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(-\frac{z}{2}\right)^2 + 2x\left(\frac{y}{2}\right) \\ & \quad + 2\left(\frac{y}{2}\right)\left(-\frac{z}{2}\right) + 2x\left(-\frac{z}{2}\right) \\ & = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} + xy - \frac{yz}{2} - xz \end{aligned}$$

習題五十一

用公式直接求下列各式的結果：

- | | |
|---|---|
| 1. $(2x+y+3z)^2$ | 2. $(x+2y+3z)^2$ |
| 3. $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5}\right)^2$ | 4. $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} + z^2\right)^2$ |
| 5. $(m-n-p)^2$ | 6. $(-m+n+p)^2$ |
| 7. $(a+3b-5c)^2$ | 8. $(a-3b-5c)^2$ |

§ 65. 怎樣求 $(ax+b)(cx+d)$ 。由乘法得公式：

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (bc+ad)x + bd$$

在此公式中，等號右邊的首末兩項，通常不致弄錯，所宜注意的，就是當中一項 x 的係數。學者認清記熟之後，再看下列：

【例一】： $(x+5)(x-4)$ ：

$$= x^2 + (5-4)x + 5(-4)$$

$$= x^2 + x - 20。$$

【例二】 $(x-5)(x+4)$

$$= x^2 + [(-5)+4]x + (-5)4$$

$$= x^2 - x - 20。$$

【例三】 $(3y+2)(4y-5)$

$$= 12y^2 + (8-15)y + 2(-5)$$

$$= 12y^2 - 7y - 10。$$

【例四】 $(3y-2)(4y-5)$

$$= 12y^2 + (-8-15)y + (-2)(-5)$$

$$= 12y^2 - 23y + 10。$$

習 題 五 十 二

依公式直接求出下列各式的結果：

1. $(x+5)(x+6)$

2. $(x-5)(x-6)$

3. $(x+5)(x-6)$

4. $(x-5)(x+6)$

5. $(x+9)(x+10)$

6. $(x-9)(x-10)$

7. $(x+10)(x-9)$

8. $(x+9)(x-10)$

9. $(2x+5)(x+6)$

10. $(2x-5)(x-6)$

11. $(2x+5)(x-6)$

12. $(2x-5)(x+6)$

13. $(2x-5)(8x-7)$

14. $(2x-5)(8x+7)$

15. $(2x+5)(8x-7)$

16. $(2x+5)(8x+7)$

17. $(2x+3)(3x+2)$ 18. $(2x+3)(2x-2)$
 19. $(2x-3)(3x+2)$ 20. $(2x-3)(3x-2)$
 21. $(-x+5)(-2x-8)$ 22. $(-x+5)(-2x+8)$
 23. $(-2x+8)(-5x-9)$ 24. $(-2x-8)(-5x+9)$
 25. $(5x+8y)(5x-8y)$ 26. $(3x-8y)(3x-5y)$
 27. $(2x-8y)(8x+5y)$
 28. $(3x+5y)(4x+3y)(3x-5y)(4x-3y)$
 $= [(3x+5y)(3x-5y)][(4x+3y)(4x-3y)]$
 $= (9x^2-25y^2)(16x^2-9y^2) = 144x^4 - 481x^2y^2 + 225y^4$
 29. $(m+3n)(3m-4n)(m-3n)(3m+4n)$
 30. $(4x-3y)(5x+2y)(4x+3y)(5x-2y)$

§ 66. 怎樣求 $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ 由乘法可得公

式：

$$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) = x^4 + x^2y^2 + y^4$$

用此公式，也可省許多乘算手續。

[例一] $(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2) = ?$

[解法] $(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2)$
 $= [x^2+x(3y)+(3y)^2][x^2-x(3y)+(3y)^2]$
 $= x^4 + x^2(3y)^2 + (3y)^4 = x^4 + 9x^2y^2 + 81y^4$

{ [例二] $(x^2-4xy+16y^2)(x^2+4xy+16y^2)$

$$= x^4 + 16x^2y^2 + 256y^4$$

習題五十三

用公式直接求出下列各式的結果：

$$1. (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$$

$$2. (4c^2 - 2cd + d^2)(4c^2 + 2cd + d^2)$$

$$3. (9a^2 - 6ab + 4b^2)(9a^2 + 6ab + 4b^2)$$

$$4. (x^2 + 3xy + 2y^2)(x^2 - 3xy + 5y^2)$$

$$5. \left(\frac{x^2}{4} + \frac{xy}{6} + \frac{y^2}{9}\right)\left(\frac{x^2}{4} + \frac{xy}{6} + \frac{y^2}{9}\right)$$

$$6. \left(25x^2 - xy + \frac{y^2}{25}\right)\left(25x^2 + xy + \frac{y^2}{25}\right)$$

§ 67. 被除式是 $x^2 - y^2$ 的 在乘法中有 $(x+y)(x-y)$
 $= x^2 - y^2$, 故在除法, 便有

$$\frac{(x^2 - y^2) \div (x+y) = x-y}{\text{~~~~~}}$$

$$\frac{(x^2 - y^2) \div (x-y) = x+y}{\text{~~~~~}}$$

[例一] $(16m^2n^2 - 49p^2q^4) \div (4mn + 7p^2q^2) = 4mn - 7p^2q^2$

[例二] $\left(25x^2 - \frac{1}{4}y^2\right) \div \left(5x - \frac{1}{2}y\right) = 5x + \frac{1}{2}y$

§ 68. 被除式是 $x^3 + y^3$ 的 在乘法中有 $(x+y)(x^2 - xy + y^2)$
 $= x^3 + y^3$, 故在除法應有

$$\frac{(x^3 + y^3) \div (x+y) = x^2 - xy + y^2}{\text{~~~~~}}$$

$$\frac{(x^3 + y^3) \div (x^2 - xy + y^2) = x+y}{\text{~~~~~}}$$

[例一] $(8x^3 + 27m^3) \div (2x + 3m) = 4x^2 - 6mx + 9m^2$

$$[\text{例二}] \quad (8x^3 + 27m^3) \div (4x^2 - 6mx + 9m^2) = 2x + 3m.$$

§ 63. 被除式是 $x^3 - y^3$ 的 在乘法既有 $(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$, 故在除法應有

$$\underline{(x^3 - y^3) \div (x - y) = x^2 + xy + y^2}$$

$$\underline{(x^3 - y^3) \div (x^2 + xy + y^2) = x - y}$$

$$[\text{例一}] \quad (8x^3 - 125) \div (2x - 5) = 4x^2 + 10x + 25.$$

$$[\text{例二}] \quad (27x^3 - 64y^3) \div (9x^2 + 12xy + 16y^2) = 3x - 4y.$$

習題五十四

1. 下列各除法中, 那個能除盡?

$$(a) \quad (x^2 + y^2) \div (x + y)$$

$$(b) \quad (x^2 + y^2) \div (x - y)$$

$$(c) \quad (x^4 + y^4) \div (x + y)$$

$$(d) \quad (x^4 + y^4) \div (x - y)$$

$$(e) \quad (x^3 + y^3) \div (x - y)$$

$$(f) \quad (x^3 - y^3) \div (x + y)$$

2. 下列各等式, 那個對, 那個不對?

$$(a) \quad (x^2 + y^2) \div (x + y) = x + y$$

$$(b) \quad (x^2 + y^2) \div (x - y) = x - y$$

$$(c) \quad (x^4 + y^4) \div (x + y) = x^2 + y^2$$

$$(d) \quad (x^4 + y^4) \div (x - y) = x^2 - y^2$$

$$(e) \quad (x^2 - y^2) \div (x - y) = x - y$$

$$(f) \quad (x^4 - y^4) \div (x - y) = x^2 - y^2$$

$$(g) \quad (x^3 + y^3) \div (x + y) = x^2 + y^2$$

$$(h) \quad (x^3 - y^3) \div (x - y) = x^2 - y^2$$

$$(i) \quad (x^3 - y^3) \div (x + y) = x^2 - xy + y^2$$

$$(j) \quad (x^3 + y^3) \div (x - y) = x^2 + xy + y^2$$

[注意] 上列種種，理由雖簡，但教學代數的人往往弄錯。讀者讀者千萬留心。

3. $(x^2 \pm 8y^3) \div (x \pm 2y) = ?$
4. $(x^4 - y^4) \div (x^2 \pm y^2) = ?$
5. $(x^3 \pm y^3) \div (x \pm y) = ?$
6. $(81x^2 - 49y^2) \div (9x \pm 7y) = ?$
7. $(x^2 \pm y^2) \div (x \pm y) = ?$
8. $(125x^3 - 64y^3) \div (4y - 5x^2) = ?$
9. $(48x^3 - 27y^3) \div (12x^3 - 9y^3) = ?$
10. $(x^2 - y^2) \div (x \pm y) = ?$

習題五十五(雜題)

依公式重驗求出下列各題的結果：

1. $(a-b+c)(a+b-c)$
2. $(2a-3b-2c)(2a+3b-2c)$
3. $(ax^2+bx-c)(ax^2-bx+c)$
4. $(2x+y-z)(2x-y+z)$
5. $(2x+y-z)(2x+y-z)$
6. $\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} - \frac{c}{5}\right)\left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2} + \frac{c}{5}\right)$
7. $\left(x^3 + \frac{y}{3}\right)\left(x^3 - \frac{y}{3}\right)$
8. $(2x-2y)(2x-2y)$
9. $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)$
10. $(x^2+y)^2(x^3-y^3)^2$

11. $(x+y+z)(x+y-2z)$
 12. $(2a+2b)(a^2-ab+b^2)$
 13. $(x^2+y^2)^3(x^2-y^2)^3$
 14. $(3x+2y)(3x^2-12xy+5y^2)$
 15. $(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x-y+z)$
 16. $(3a+4b+5c)(3a+6b+5c)$
 17. $(3a-4b+5c)(-3a+4b-5c)$
 18. $(x-1)(x-5)(x-7)(x-11)$
 19. $(x-1)(x-3)(x-6)(x-8)$
 20. $(x+\frac{y}{2})(x-\frac{y}{3})(x^2+\frac{y^2}{4})(x^2+\frac{y^2}{9})(x-\frac{y}{2})(x+\frac{y}{3})$

第八章 因子分解法 乘法公式的逆轉應用

§ 70. 引論 (1)何謂因子? 何謂分解因子? 代數上因子的定義,與算術上因子的定義完全相同。就是“當 A, B, C, D, \dots 諸式的積等於某式 M 時, 則 A, B, C, D, \dots 諸式都叫做 M 的因子”。

例如, $3 \times 5 = 15$, 故 3 與 5 都是 15 的因子。

$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$, 故 $x-y$ 與 $x+y$ 都是 $x^2 - y^2$ 的因子。

$(x-y)(x+y)(x^2+y^2) = x^4 - y^4$, 故 $x-y, x+y$, 與 x^2+y^2 都是 $x^4 - y^4$ 的因子。

由已知某式 M ，求其因子，這手續叫做分解因子。

(2) 因子分解與乘除運算的比較 在乘法，已知兩個因子，欲求其積；在除法，已知積及一因子，欲求他一因子。這兩種運算，都有通法可以適用於任何問題。在因子分解，則僅知其積，欲求其因子。這就沒有定法，可以適用於任何問題。所以分解因子，實較乘法，除法為難。但是，倘能熟記前章所述的公式，及本章所述的各類因子分解法，對加揣摩，多事練習，純熟之後，也就沒有什麼難處了。

(5) 因子分解何以比乘除難？ 除法是乘法的還原算法，因子分解也是乘法的還原算法。除法有定則，不比乘法難；因子分解何以獨無定則，而比乘除俱難？欲明其故，試看下文：

例如在乘法， $(x+1)(x-4)$

$$=x(x+1)-4(x+1) \quad (a)$$

$$=x^2+x-4x-4 \quad (b)$$

$$=x^2-3x-4. \quad (c)$$

在除法或因子分解，倘能把上列三步逆其次序，如

$$x^2-3x-4=x^2+x-4x-4 \quad (c)$$

$$=x(x+1)-4(x+1) \quad (b)$$

$$=(x+1)(x-4). \quad (a)$$

則無論演算除法或分解因子，二者都無困難。但是，怎樣知道

x^2-3x-4 應改成 $x^2+x-4x-4$ 而不改成 $x^2+2x-5x-4$ 呢？這就是除法與因子分解難易的分野。

(4) 因子分解法在代數上的地位 因子分解既有上述的困難，那麼何必要分解因子呢？這可拿算術來看。在算術，各類算法中，能不用分數嗎？分數的計算能不用公約，公倍嗎？公約，公倍的計算，能不用因子分解嗎？然則因子分解，在算術上不是已佔了重要地位嗎？況在代數，除分數的化簡非利用因子分解不行外，他如求解二次方程式等，亦以因子分解為重要工具之一。因子分解之在代數，不亦極為重要嗎？

(5) 因子分解的限制 把一式分成因式，因式又可再分。如此繼續分解，豈非永無止境嗎？例如，利用公式

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B), \text{ 可得}$$

$$\begin{aligned} x^4 - y^4 &= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) \\ &= (x^2 + y^2)(x+y)(x-y) \\ &= (x^2 + y^2)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \\ &= (x^2 + y^2)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}) \\ &\quad (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}) \end{aligned}$$

.....

如此便永無止境。故必加以限制，手續方能確定。這個限制，就是“分成的因子須為整式；其文字並須不含方根”。至於文字的係

數，則可含方根，可以不含方根；在本書中，除有特別聲明外，所分因子，概以係數不含方根者為限。

不可再分的因子，叫做質因子。

(6) 因子分解問題，須分類解決如本節(2)所述，因子分解並無定法可以通用於任何問題，所以，只得分類求解。以下諸節，依次述之。

§ 71. 式內各項有相同質因子的 這類整式的因子，可由乘法分配律逆其次序以求之。因為依乘法分配律，有公式：

$$A(B+C-D) = AB + AC - AD$$

所以自右面左，當然得因子分解公式：

$$AB + AC - AD = A(B + C - D)。$$

[例一] $ax + ay + az - aw = a(x + y + z - w)。$

[例二] $3a^3x^3 + 6x^2 - 9xy = 3x(a^3x^2 + 2x - 3y)。$

[例三] $\frac{3x^2}{5} - \frac{7xy}{10} - \frac{9x^3}{5} = \frac{x}{5} \left(3x - \frac{7y}{2} - 9x^2 \right)。$

習題五十六

試化下列各式為其質因子的逆乘積：

1. $8a + 6b - 18c + 18。$

2. $7a^2x^3 - 14a^2xy - 49abxz + 56axw。$

3. $a^3x^3 + b^3x^3 + c^3x^3 + d^3x^3。$

4. $(-7a^3 - 21ab + 7a) - 14ax$ 。

5. $14x^3x^5 - 22a^2m^2x^3 + 30a^2x(y+x)$ 。

6. $m - my$ 。

7. $(x+y)(x+z) + (x+y)(x-z)$ 。

8. $p - pq(x+y) = p(-x-y)q$ 。對否？何故？

$p - pq(x+y) = p(1 - qx + qy)$ 。對否？何故？

[注意] 以上兩種錯誤，初學代數者常常有之。讀者當留意之。

9. $(m-n)^2 + (m-n)^2(x+y)$ 。

10. $(x+y)^3 - 8(x+y)^2 - (x+y)$ 。

11. $a^2b^2(x+y)^2 - mn(x+y)^2(x-y) - (x+y)^2$ 。

12. $8y(m+n) - 4(m+n)(x-z)$ 。

§ 72. 式內諸項可分為幾組，而各組有相同因子的。這

類問題的標準形式如下：

$$\underline{ax + by + ay + bx}$$

這式中所有各項不盡含相同因子，故與前節問題不同。所以

須把原式分為適當的兩組，以求其因子：

$$\begin{aligned} ax + by + ay + bx &= \underline{(ax + ay) + (by + bx)} \\ &= a(x + y) + b(y + x) \\ &= (x + y)(a + b) \end{aligned}$$

並且這分組的方法又可如下行之：

$$\begin{aligned} ax + by + ay + bx &= \underline{(ax + bx) + (by + ay)} \\ &= (a + b)x + (a + b)y \end{aligned}$$

$$= (a+b)(x+y)。$$

[例一] $s^2 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x^2) + (x+1)$
 $= x^2(x+1) + (x+1)$
 $= (x+1)(x^2+1)。$

[例二] 求 $ax+bx+ay+by+az+bz$ 的因子。

[解法] (1) $ax+bx+ay+by+az+bz$
 $= (ax+bx) + (ay+by) + (az+bz)$
 $= (a+b)x + (a+b)y + (a+b)z$
 $= (a+b)(x+y+z)。$

(2) $ax+bx+ay+by+az+bz$
 $= (ax+ay+az) + (bx+by+bz)$
 $= a(x+y+z) + b(x+y+z)$
 $= (x+y+z)(a+b)。$

[注意] 這方法叫做配項法，在於分組要適當，怎樣才是適當，不難編個標準：(1)所成各組中，任何一組的配項，須有公因子，(2)公因子中在兩因子分出以後，能提為另一因子再為公因。

習題五十七

試化下列各式為其因子乘積：

1. $ab+ac+bx+cx$

2. x^2+x^2+x+1

3. $x^2+x^2+x^2+1$

4. x^2-2x^2+2x-6

5. $3x^3+4x^2y+3xy^2+4y^3$ 6. $ax-bx-b+a$
 7. $5cx-10dx-12c+6c$ 8. $ak-bk-3a+3b$
 9. $4a^3-3ab-fa^2b+6b^3$ 10. $3xy-83by-cx+11bx$
 11. $5x^3+10x-5x^2-10$
 12. $-21ay+12cy+4cz-7ax$
 13. x^3+3x^2+3x+9
 14. $x^2+3yz+2ax^2+6xyz$
 15. $2c(r-2e)-5d(2e-r)$
 16. $5(ax-bx)+10(by-ay)$
 17. $2ax+4bx-6cx+ay+2by-3cy$
 18. $-x^2y+3xy-5y+x^2z-3xz+5z$

§ 73. 兩個平方差的二項式 在乘法既有 $(x+y)(x-y)$
 $=x^2-y^2$ 。故在因子分解有公式：

$$\underline{x^2-y^2=(x-y)(x+y)}$$

【例一】 求 $36a^2-25b^2$ 的因子。

$$\begin{aligned} \text{【解法】 } 36a^2-25b^2 &= (6a)^2-(5b)^2 \\ &= (6a+5b)(6a-5b)。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{【例二】 } x^4-16y^4 &= (x^2+4y^2)(x^2-4y^2) \\ &= (x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{【例三】 } \frac{x^4}{16}-\frac{m^4}{64} &= \left(\frac{x^2}{4}+\frac{m^2}{8}\right)\left(\frac{x^2}{4}-\frac{m^2}{8}\right) \\ &= \left(\frac{x^2}{4}+\frac{m^2}{8}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{m}{8}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{m}{8}\right)。 \end{aligned}$$

習題五十八

將下列各式寫成實因子的乘積：

1. $x^2 - 4y^2$

2. $36x^2 - 49y^2$

3. $301x^4 - 625y^4$

4. $81x^4 - 625y^4$

5. $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{625}$

6. $(x^2 - 16y^2)^2$

7. $289x^4 - 169y^4$

8. $(169x^2 - 144y^2)$

9. $1024y^4 - 625x^4$

10. $8x^2 - 18y^2$

11. $27x^2 - 75$

12. $92x^4 - 169y^4$

13. $(x+y)x^2 - (x-y)x^2$

14. $ab(x+y)^2 - ab(x-y)^2$

15. $mn(x-y)^2 - mn(x-y)$

16. 下列各等式中，要變因，那麼不變？

(a) $x^2 - y^2 = (x-y)^2$

(b) $x^2 + y^2 = (x+y)^2$

(c) $x^2 - y^2 = (x-y)^4$

(d) $x^2 + y^2 = (x+y)^2$

下列各式中，有因子的分解出來：

17. $x^2 - y^2$

18. $x^2 + y^2$

19. $2x^2 - \frac{1}{8}$

20. $\frac{7x^2}{8} - \frac{2y^2}{4}$

利用因式分解，用最簡約方法求下列二題：

21. $288^2 - 325^2 = ?$

22. $122456789^2 - 122456753^2 = ?$

§ 74. 完全平方的三項式 在乘法中有公式

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

在分解因式，有公式：

$$\underline{x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2}$$

$$\underline{x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{【例一】 } & 9m^2 - 30mn + 25n^2 \\ &= (3m)^2 - 2(3m)(5n) + (5n)^2 \\ &= (3m - 5n)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{【例二】 } & 72m^2 + 96mn + 52n^2 \\ &= 8(9m^2 + 12mn + 4n^2) \\ &= 8[(3m)^2 + 2(3m)(2n) + (2n)^2] \\ &= 8(3m + 2n)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{【例三】 } & x^2 + a^2 - y^2 - b^2 - 2ax + 2by \\ &= (x^2 + a^2 - 2ax) - (y^2 - 2by + b^2) \\ &= (x - a)^2 - (y - b)^2 \\ &= (x - a + y - b)(x - a - y + b). \end{aligned}$$

習題五十九

試化下列各式為其質因子的連積積：

1. $x^2 - 4xy + 4y^2$

2. $x^2 - 8x + 16$

3. $x^2 - cx + 9$

4. $y^2 + 12y + 36$

5. $4x^2 + 12mx + 9m^2$

6. $25y^2 - 35yz + 4z^2$

7. $169m^2 - 236mn + 121n^2$

8. $25p^2 - 233pq + 81q^2$

6. $\frac{x^2}{4} - xy + y^2$

10. $x^2 - \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{16}$

11. $\frac{a^2}{23} + \frac{2ab}{5} + b^2$

12. $\frac{c^2}{4} - \frac{cd}{3} + \frac{d^2}{9}$

13. $9m^2 - p^3 - 4pq - 4q^2$

14. $4a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

15. $x^2 + x + y^2 + y + 2xy$

18. $9x^2 - 6xy + y^2 - 8x + y$

17. 分解 $x^2 - a^2 - 2ay - y^2$ 成質因子的連乘積。

[解法] $x^2 - a^2 - 2ay - y^2 = (x^2 - a^2) - (2ay + y^2)$

$$= (x-a)(x+a) - y(2a+y).$$

[又法] $x^2 - a^2 - 2ay - y^2 = x^2 - (a^2 + 2ay + y^2) = x^2 - (a+y)^2.$

上列兩種結果，那個對？那個不對？何故？

[注意] 上列二種結果，都是要不得的錯誤。前者不合於 § 72 (注意) 所訂的兩個標準。後者沒有做完 (還可以繼續寫一步“(x+a+y)(x-a-y)”)。但是初學代數的人，往往不能免此。學者試各當心。

18. $x^2 - a^2 + 2ay - y^2$

19. $x^2 + a^2 - 2ay + y^2$ 。能不能及知為其質因子的連乘積？

下列各題，有因子的分解出來：

20. $9x^2 - 6xy + 4y^2$

21. $\frac{x^2}{4} - \frac{xy}{12} + \frac{y^2}{9}$

22. $4(a+5)^2 - 12(a+5)b + 9b^2$

23. $27(x+y)^2 - 48x^3$

24. $x^2 + 2xy + 2ab + y^2 - a^2 - b^2$

25. $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y + 4$

26. $\frac{x^2}{4} + \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9} + \frac{x}{2} + \frac{y}{3}$

27. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

§ 75. 立方和或差的二項式，在乘法既有公式：

$$\underline{(x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2) = x^3 \pm y^3}$$

故在分解因子有公式：

$$\underline{x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)}$$

$$\underline{x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)}$$

$$\begin{aligned} \text{[例一]} \quad 64x^3 - 125y^3 &= (4x)^3 - (5y)^3 \\ &= (4x - 5y)(16x^2 + 20xy + 25y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[例二]} \quad 2x^6 + 16y^6 &= 2(x^6 + 8y^6) \\ &= 2(x^2 + 2y^2)(x^4 - 2x^2y^2 + 4y^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[例三]} \quad x^6 - 27y^6 - x^4 + 9y^4 &= (x^6 - 27y^6) - (x^4 - 9y^4) \\ &= (x^2 - 3y^2)(x^4 + 3x^2y^2 + 9y^4) \\ &\quad - (x^2 - 3y^2)(x^2 + 3y^2) \\ &= (x^2 - 3y^2)(x^4 + 3x^2y^2 + 9y^4 - x^2 - 3y^2) \end{aligned}$$

習 題 六 十

試化下列各式為其因子之連乘積：

1. $27a^3 - b^3$

2. $125a^3 + 8b^3$

3. $1331m^3 - 512n^3$

4. $343m^3 - 125n^3$

5. $\frac{x^3}{8} - \frac{y^3}{27}$

6. $\frac{x^3}{4} + \frac{2y^3}{27}$

7. $mx^3 + mp^3y^3$

8. $\frac{x^3}{9} - \frac{y^3}{72}$

9. $5(x-y)^2 - 2^2$ 10. $3(x-y)^2 + 27(x+b)^2$
 11. $2x^2 - 12x(x-y)^2$ 12. $(1-x)^2 - (1-x)^2$
 13. $x^2 + y^2 + 2x + 2y$ 14. $x^2 - y^2 - x^2 + 2xy - y^2$
 15. $a^2 - a^2 - a + b + 2^2 - 2^2$
 16. $x^3 - x^3 - x + b - 2^2 - 2^2 + 2x^2$
 17. $x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$ (A)
 $= (x+y)(x^2 - xy + y^2)(x-y)(x^2 + xy + y^2)$ (B)

[註] 在分題因子時，係(A)之後，就不再作(B)，再按題意分解

18. $x^2 - 2^2$ 19. $2x^2 - 12x$
 20. $x^2 + 6x^2y + 12xy^2 + 2y^2$

$$\begin{aligned} &= (x^2 + 2y^2) + (6x^2y + 12xy^2) \\ &= (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) + 6xy(x + 2y) \\ &= (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2 + 6xy) \\ &= (x + 2y)(x^2 + 4xy + 4y^2) \\ &= (x + 2y)^2 \end{aligned}$$

21. (1) 上題求下列二式的因子：

$$(a) \quad x^2 + 3x^2y + 2xy^2 + y^2 \quad (b) \quad x^2 - 2x^2y + 2xy^2 - y^2$$

§ 53. 完全立方展開公式 在乘法既有公式：

$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$$

故在分解因子有公式：

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 &= (x + y)^3 \\ x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 &= (x - y)^3 \end{aligned}$$

依上公式，凡可化成二數和（或差）的立方的代數式，均因式得其因子，不必再用前節第 20 題的應類解法了。

$$\begin{aligned} \text{【例一】 } x^2 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 & \\ &= x^2 + 3x^2(2y) + 3x(2y)^2 + (2y)^3 = (x + 2y)^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{【例二】 } 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 & \\ &= (3x)^3 + 3(3x)^2 \cdot 1 + 3(3x) \cdot 1^2 + 1^3 = (3x + 1)^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{【例三】 } 125y^3 - 75y^2z + 15yz^2 - z^3 & \\ &= (5y)^3 - 3(5y)^2z + 3(5y)z^2 - z^3 = (5y - z)^3. \end{aligned}$$

習題六十一

試將下列各式按乘積因子的逆轉法：

1. $1 - 3x + 3x^2 - x^3$

2. $x^3 + 3x^2 + 27x + 27$

3. $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

4. $27a^3 - 108a^2b + 144ab^2 - 64b^3$

5. $27x^3 - 27x^2y + 27xy^2 - \frac{27}{27}$

6. $x^3 - 2xy + \frac{x^2y}{3} - \frac{2y^3}{27}$

7. $250x^3 - 150x^2 + 30x - 2$

8. $81m^3n^3 + 162m^2n^2p + 108mnp^2 + 27p^3$

9. $x^3 - 6m^2n + 12m^2n^2 - 8n^3$

10. $x^3 + 6x^2n^2 + 27mn^3 + 27n^3$

11. $x^3y^3 - 12x^2y^3 + 48xy^3 - 64y^3$

12. $a^3 - 6a + 45a - 12a^2$

13. $(a+b)^3 + 3(a+b)(a+b)^2 + 3(a+b)^2(a+b) + (a+b)^3$

$$14. (c+b)^3 - 6mn(c+b)^2 + 12m^2n^2(c+b) - 6m^3n^3$$

$$15. 1 - 3(x-y) + 3(x-y)^2 - (x-y)^3$$

$$16. x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3x^2 + 3y^2 + 6xy + 3x + 3y + 1$$

$$17. 64x^3 - 48x^2y + 12xy^2 - y^3 - 48x^3 + 3y^3$$

在下列各式內，各加以適當的數，使成完全立方：

$$18. x^3 + 6x^2 + 12x + ?$$

$$19. a^3 - 84b^2 + ?a^2b + ?ab^2$$

用最簡方法求出下列各題的結果：

$$20. 58^3 - 3 \times 58^2 \times 55 + 3 \times 58 \times 55^2 - 55^3 = ?$$

$$[\text{解法}] \quad 58^3 - 3 \times 58^2 \times 55 + 3 \times 58 \times 55^2 - 55^3 = (58 - 55)^3 = 3^3 = 27$$

$$21. 152^3 - 3 \times 152^2 \times 98 + 3 \times 152 \times 98^2 - 98^3 = ?$$

$$22. 42^3 + 3 \times 42^2 \times 58 + 3 \times 42 \times 58^2 + 58^3 = ?$$

77. 用配方法分解因式 在因子分解問題中，往往可於原式內加減同式，使原式化爲(1)兩個平方的差，(2)兩個立方的差，或(3)兩個立方的和，然後再依 §§ 73, 75 的方法以求其因子。這類分解法統叫做配方分解法。

$$\begin{aligned} [\text{例一}] \quad x^4 + 4 &= (x^2 + 2x + 2) - 4x^2 \\ &= (x^2 + 2)^2 - 4x^2 \\ &= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\text{例二}] \quad a^4 + a^2b^2 + b^4 &= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 \\ &= (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 \\ &= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) \end{aligned}$$

【注意】本例的結果與方法，二者都很重要。這結果可用為公式，解決許多同樣問題，節省冗長的劣好手續。該方法適用的範圍更廣。例如在 $x^4 + 6x^3 + 5x^2$ 中，若 b 為適宜的數，能使該式有因子時，即可用這個方法以求其因式。學者試拿 $b = -3, b = -7$ 來試驗。

【例三】 $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

$$= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 1$$

$$= (x+1)^3 + 1^3$$

$$= (x+1+1)[(x+1)^2 - (x+1) + 1]$$

$$= (x+2)(x^2 + x + 1)。$$

習題六十二

將下列各式寫成因子的結果積：

- | | |
|--|--------------------------------|
| 1. $x^2 - 5xy + 3y^2 + 20y^2$ | 2. $x^2 + 7x^2 + 3x + 3$ |
| 3. $x^2 + 3x^2 + 3x - 7$ | 4. $x^3 - 3x^2 - 3x^2 - 3x$ |
| 5. $3x^2 + 54x^2 + 108x^2 + 83$ | 6. $3x^2 - 6x^2 + 152x^2 - 12$ |
| 7. $8x^2 + 12x^2 + 10x^2 + 1$ | 8. $7x^2 + 10x^2 - 10x^2 + 27$ |
| 9. $x^2 + 5x^2 + 3x^2 + 126x^2$ | |
| 10. $c^2 + b + 3m^2 + 3b^2 + 3a + 3b + 2$ | |
| 11. $a^2 + 5a^2 + 27a + 28$ | |
| 12. $x^2 + y^2 + 2x^2 + 8y^2 + 2x + 12y + 9$ | |
| 13. $x^2 + 64$ | 14. $x^2 + \frac{1}{4}$ |
| 15. $4m^2c^4 + 16m^2$ | 16. $m^2 - 23m^2y^2 + y^4$ |
| 17. $x^2 - 5x^2y^2 + 4y^4$ | 18. $x^2 + 5x^2y^2 + 4y^4$ |

19. $x^2 + \frac{1}{64}$

20. $x^2 + y^2$ 有因子否?21. $x + y^2$ 。有沒有因子?

$$\begin{aligned}
 22. \quad x^2 - 3x - 4 &= x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \\
 &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = \left(x - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right) \\
 &= (x+1)(x-4)
 \end{aligned}$$

[注意] 本題解法內，應加括弧的一項與 x 的係數，有困難嗎?

仿上題求下列各式的因子:

23. $x^2 - 4x - 5$

24. $x^2 - 4x - 12$

25. $x^2 - 2x - 43$

26. $x^2 - 35x - 33$

27. $x^2 + 35x - 36$

28. $x^2 - 16x - 36$

29. $x^2 - 5x - 36$

29. $x^2 + 5x - 36$

31. $x^2 - 5x - 36$

§ 7B. 三項式 $x^2 + px + q$ 假定所求的因子是 $x + m$ 及 $x + n$ ，就是

$$x^2 + px + q = (x + m)(x + n),$$

那麼依乘法，應得關係式 $\begin{cases} m + n = p & (1) \\ mn = q & (2) \end{cases}$

所以有下面的法則:

先求二數 m, n 使 (1), (2) 兩式皆適合，即得 $x^2 + px + q = (x + m)(x + n)$ 。

[注意] (1) 怎樣確定 m, n 的符號? 依下面的標準:

- (a) 若 p, q 皆是正數，那麼 m, n 也都是正數。
 (b) 若 q 是正數，而 p 是負數，那麼 m, n 都是負數。
 (c) 若 q 是負數，那麼無論 p 是正數或負數， m, n 必是一正，一負。

(2) 怎樣求定 m, n 的值? 最好先把 q 分成各種可能的因子，再看那一個中兩個因子的代數和是 p ，那麼這兩個因子便是所求的 m 及 n 。

[例一] 求 $x^2 - 5x - 24$ 的因子。

[解法] 本題 q 是負數，所以把 -24 分成一正，一負的兩個因子，得 $\pm 1, \mp 24; \pm 2, \mp 12; \pm 3, \mp 8; \pm 4, \mp 6$ ，八組。其中 $-8 + 3 = -5$ 。故知 $m = -8, n = 3$ 。

$$\therefore x^2 - 5x - 24 = (x - 8)(x + 3)。$$

[例二] 求 $x^2 - 28x + 27$ 的因子。

[解法] 本題 p 為負數， q 為正數，所以把 27 分為兩個負因子，得 $-1, -27; -3, -9$ 兩種。其中 $-1, -27$ 的代數和是 -28 。故知 $m = -1, n = -27$ 。

$$x^2 - 28x + 27 = (x - 1)(x - 27)。$$

[例三] 求 $x^2 + 4x + 6$ 的因子。

[解法] 本題 p, q 皆為正數，所以把 6 分成兩個正因子。但 6 的正因子只有 $1, 6; 2, 3$ 兩種。而 $1 + 6 \neq 4, 2 + 3 \neq 4$ 。故知 $x^2 + 4x + 6$ 沒有因子。

習題六十三

用本節的方法以解前節習題 23-31。

求下列各式的因子：

(a) $x^2 - 6x + 5$

(b) $x^2 - 4x - 5$

(c) $x^2 + 4x - 5$

(d) $x^2 - x - 132$

(e) $x^2 + x - 132$

(f) $x^2 - 23x + 132$

(g) $x^2 - x - 230$

(h) $x^2 + x - 330$

(i) $x^2 - 32x + 239$

(j) $x^2 + x - 462$

(k) $x^2 - x - 462$

(l) $x^2 - 43x + 402$

(m) $x^2 - 5xy - 14y^2$

(n) $x^2 + 5xy - 14y^2$

(o) $2x^2 + 12x + 10$

(p) $3x^2 - 12x - 15x$

(q) $x^2 - 6xy - 16y^2$

(r) $2x^2 - 52x^2 + 33x^2$

§ 79. 三項式 $ax^2 + bx + c$ 這類問題的解法有四種：第一，配方分解法，第二，乘除首係法，第三，十字相乘法，第四，分裂中項法，現在依次來講：

[第一法] 配方分解法 這就是 § 77 配方分解法的一個特例。其要點就在所加減的數須為適當的數。怎樣才是適當？觀察下列，並參看習題六十二第 22 題。

[例一] 求 $6x^2 + 13x + 6$ 的因子。

$$[\text{解法}] \quad 6x^2 + 13x + 6 = 6 \left[x^2 + \frac{13}{6}x + 1 \right]$$

$$= 6 \left[x^2 + \frac{13}{6}x + \left(\frac{13}{12} \right)^2 - \left(\frac{13}{12} \right)^2 + 1 \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= 6 \left[\left(x + \frac{13}{12} \right)^2 - \frac{25}{12^2} \right] \\
 &= 6 \left(x + \frac{13}{12} + \frac{5}{12} \right) \left(x + \frac{13}{12} - \frac{5}{12} \right) \\
 &= 6 \left(x + \frac{3}{2} \right) \left(x + \frac{2}{3} \right) \\
 &= (2x+3)(3x+2)。
 \end{aligned}$$

【例二】求 ax^2+bx+c 的因子。

【解法】 ax^2+bx+c

$$\begin{aligned}
 &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] \\
 &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2-4ac}{4a^2} \right] \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right)^2 \right] \\
 &= a \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right) \\
 &\quad \times \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right) \\
 &= a \left(x + \frac{b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right)
 \end{aligned}$$

【注意】本例的結果 $ax^2+bx+c = a \left(x + \frac{b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right)$

$\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$ ，可用作公式，以解同類的問題。例如求 $6x^2 + 13x + 6$

的因子。把這式和 $ax^2 + bx + c$ 來比較，那麼 $a=6, b=13, c=6$ 。代入上式，得

$$\begin{aligned} 6x^2 + 13x + 6 &= 6 \left(x + \frac{13 + \sqrt{13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{2 \cdot 6} \right) \left(x + \frac{13 - \sqrt{13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{2 \cdot 6} \right) \\ &= 6 \left(x + \frac{3}{2} \right) \left(x + \frac{2}{3} \right) = (2x+3)(3x+2) \end{aligned}$$

習題六(一) □

(I) 用因式法求下列各式的因子：

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1. $6x^2 - 11x + 4$ | 2. $6x^2 + 5x - 4$ |
| 3. $6x^2 - 5x - 4$ | 4. $6x^2 - 13x + 5$ |
| 5. $6x^2 + 7x - 5$ | 6. $6x^2 - 7x - 5$ |
| 7. $6x^2 - 15x + 10$ | 8. $6x^2 - 11x - 10$ |
| 9. $6x^2 + 11x - 10$ | 10. $12x^2 - 7x - 12$ |
| 11. $12x^2 - 25x + 12$ | 12. $12x^2 + 7x - 12$ |
| 13. $7x^2 - 46xy + 55y^2$ | 14. $7x^2 + 26xy - 55y^2$ |
| 15. $7x^2 - 24xy - 55y^2$ | |

(II) 利用本節例二求前題各式的因子：

[第二法] 乘除首係法 這個方法就是把原式乘以首項係數，同時也除以首項係數，使原式變成 $y^2 + my + n$ 之形，再按 § 78 的方法來分解。因為

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \frac{1}{a} [a \cdot ax^2 + c \cdot bx + a \cdot c] \\ &= \frac{1}{a} [(ax)^2 + b(ax) + ac] \end{aligned}$$

把 ax 當作 y ，那麼括號內的式子與 $y^2+by+ac$ 同，便可仿照 §78 的方法了。

$$\begin{aligned} \text{【例一】 } 6x^2 - 35x + 6 &= \frac{1}{6} [(6x)^2 - 35(6x) + 36] \\ &= \frac{1}{6} (6x - 36)(6x + 1) \\ &= (x - 6)(6x + 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{【例二】 } 16x^2 - 43x + 27 &= (4x)^2 - 12(4x) + 27 \\ &= (4x - 3)(4x - 9). \end{aligned}$$

習題六十五

用算除首係法以求習題六十四中 I (1) - (15)。

【第三法】 分裂中項法 假定所求的因子是 $px+m$ 及 $qx+n$ ，那麼

$$ax^2 + bx + c = (px + m)(qx + n)$$

依乘法應得關係式：

$$\begin{cases} a = pq \\ b = pn + qm \\ c = mn \end{cases}$$

於是得

$$\begin{cases} b = pn + qm \\ ac = pqmn = pn \cdot qm \end{cases}$$

就是說“ ax^2+bx+c 如可分成兩個因子，必可求得二數 pn, qm 使其和是 b ，其積是 ac ”。所以有下面的法則：

欲分 ax^2+bx+c 成因子，先求二數 D, E ，使 $D+E=b$ ， $DE=ac$ 。乃將原式前四項 $ax^2+Dx+Ex+c$ 。再用分組方法來分解。

[例一] 求 $6x^2+13x+6$ 的因子。

[解法] 本題 $ac=6 \times 6=36, b=13$ 。故所求二數是 4 與 9。於是得

$$\begin{aligned} 6x^2+13x+6 &= 6x^2+4x+9x+6 \\ &= 2x(3x+2)+3(3x+2) \\ &= (2x+3)(3x+2). \end{aligned}$$

[例二] 求 $6x^2+11xy-7y^2$ 的因子。

[解法] 本題 $ac=-42y^2, b=11y$ 。故所求二數是 $D=14y$ ， $E=-3y$ 。於是得

$$\begin{aligned} 6x^2+11xy-7y^2 &= 6x^2+14xy-3xy-7y^2 \\ &= 2x(3x+7y)-y(3x+7y) \\ &= (2x-y)(3x+7y). \end{aligned}$$

習題六十六

[第四法] 十字相乘法 仿 [第三法], 假定 $Ax^2 + Bx + C$ 有兩個因子: $ax+m, bx+n$, 那麼 $Ax^2 + Bx + C = (ax+m)(bx+n) = abx^2 + (an+bm)x + mn$ 。觀察上式, 即得下面的法則:

把 A 分成兩個因子 a, b ; C 分成兩個因子 m, n 。列成下

$$\begin{array}{r} a \quad m \\ \quad \times \\ b \quad n \\ \hline an + bm \end{array}$$

若 an 與 bm 的代數和是 B , 那麼 $ax+m, bx+n$ 就是原式的因子。否則非其因子。

[例一] 求 $6x^2 + 17x + 5$ 的因子。

[解法] 6 的因子, 只有 $\pm 1, \pm 6; \pm 2, \pm 3$ 。5 的因子只是 $\pm 1; \pm 5$ 。故所求因子必不出上述 6 的因子和 5 的因子的配合, 現在我們觀察中較可能的幾組, 配合如下:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ \quad \times \\ 6 \quad 5 \\ \hline 11 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \quad 5 \\ \quad \times \\ 6 \quad 1 \\ \hline 31 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \quad 1 \\ \quad \times \\ 3 \quad 5 \\ \hline 13 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \quad 5 \\ \quad \times \\ 3 \quad 1 \\ \hline 17 \end{array}$$

其中與 x 的係數相同的乃最後一式, 故得

$$6x^2 + 17x + 5 = (2x + 5)(3x + 1)。$$

[例二] 求 $6x^2 + 11x - 10$ 的因子。

[解法] 6 的因子，只有 ± 1 ； ± 6 ； ± 2 ， ± 3 。 -10 的因子只有 ± 1 ； ∓ 10 ； ± 2 ， ∓ 5 。故所求因子不出上述 6 的因子和 -10 的因子的配合，現在就觀察中較可能的幾種配合如下：

$$\begin{array}{cccccc} \begin{array}{r} 1 \pm 1 \\ \times \\ \hline 6 \mp 10 \\ \mp 4 \end{array} & \begin{array}{r} 1 \pm 10 \\ \times \\ \hline 6 \mp 1 \\ \pm 39 \end{array} & \begin{array}{r} 1 \pm 2 \\ \times \\ \hline 6 \mp 5 \\ \pm 7 \end{array} & \begin{array}{r} 1 \pm 5 \\ \times \\ \hline 6 \mp 2 \\ \pm 23 \end{array} & \begin{array}{r} 3 \mp 1 \\ \times \\ \hline 2 \mp 10 \\ \mp 23 \end{array} & \begin{array}{r} 3 \pm 10 \\ \times \\ \hline 2 \mp 1 \\ \pm 17 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{r} 3 \pm 5 \\ \times \\ \hline 2 \mp 2 \\ \pm 4 \end{array} & \begin{array}{r} 3 \pm 2 \\ \times \\ \hline 2 \mp 5 \\ \mp 11 \end{array} \end{array}$$

依次試之，知最後一式 $\left[\begin{array}{c} 3 - 2 \\ \times \\ 2 + 5 \\ \hline 11 \end{array} \right]$ 中與 x 的係數相符。

故得 $6x^2 + 11x - 10 = (3x - 2)(2x + 5)$ 。

[注意] 若最後一式仍不與 x 的係數相符，那麼原式不能因式。

習題六十七

用十字相乘法解習題六十五中此各題。

習題六十八

用最簡便的方法求下列各式的因子。

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| 1. $12x^2 + 28x + 15$ | 2. $15x^2 - 13x - 7$ |
| 5. $15x^2 - 23x + 7$ | 4. $12x^2 - 24x - 15$ |
| 6. $21x^2 + 58x + 21$ | 6. $21x^2 - 46x - 21$ |
| 7. $15x^2 - 224x - 15$ | 6. $152x^2 - x - 1$ |
| 9. $145x^2 + 146x + 35$ | 10. $66x^2 - 48x - 72$ |
| 11. $143x^2 - 88x - 35$ | 12. $58x^2 + 45x - 73$ |
| 13. $25x^2 + 50x + 9$ | 14. $25x^2 + 50x - 24$ |

§ 83. 因子分解的題類。自 § 71 至 § 79, 已把因子分解的重要方法, 分類講過了。學者對於各類問題, 或者不感困難。而於難題之下, 往往茫然不知其屬於何類, 當用何種方法。這是對於前述各種方法, 未能充分嫻熟, 應用自如的緣故。倘能再作一番有系統的複習, 確切認識各種公式的真義, 熟習各種公式的用法, 自能增進判別應用的能力。今再述因子分解的題類於下:

第一步 先察各項中有沒有公共單項因子。取出最高公共單項因子, 同時更得一個多項因子。

第二步 次察這多項因子屬於下列何類, 即依該類方法分解之:

- | | |
|---|-------------------------------------|
| (1) $x^2 - y^2$ | (2) $x^2 \pm y^2$ |
| (3) $x^2 \pm 2xy + y^2$ | (4) $x^2 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$ |
| (5) $x^2 + px + q$ | (6) $ax^2 + bx + c$ |
| (7) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$ | |

(8) $x^4 + kx^2y^2 + y^4$

(9) 能用配方法的。

第三步 如不屬於上列九種之一，試用子組分解法。

第四步 分得的因子假如仍有因子可分，再仿第二步，第三步，繼續分解。直至分得的因子皆為質因子而止。

習題六十九 (A)

求下列各式的因子：

1. $32n^2 + 48n^2 - 22n^4$

2. $12a - 58ay - 51ay^2$

3. $a^3 + a + b + a^2b$

4. $x^5 - \frac{a^2x}{13}$

5. $4a^2 - a^4 + 81 + 16a^2x - 36a - 27a^3$

6. $12a^2b^3 - 6a^2b - a^2 + a^2b^2 + 8a^2b - a^2b^3$

7. $18x^2b^3 - 1$

8. $a^5 + a - a^3 - 1$

9. $x^4 - 5x^2 - x + 3$

10. $x^4 - 7x^2y^2 + 81y^4$

11. $a^4 - a^2 + a + 1$

12. $81 - 18y^2 - 16x^4 - 24x^2y^2 - 8y^4$

13. $4h^5 + 9h^2k^3$

14. $1 - x + x^3 - x^6$

15. $x^3 - 82x^2 + 239x^2$

16. $5 - 8x - 4x^3$

27. $a^2 + \frac{a^4}{624}$

18. $a^4 - 86a^3 + 2256a$

19. $112 + 8a^3$

20. $a^2 + a^2 + b^2 - 6a$

21. $a^3 + 2a^2y + 6axy^2 + 27y^3$

22. $a^3 - 6a^2y + 12xy^2 - 7y^3$

23. $4a^4b^3 - 40a^2b^2c^2 + 16b^5c^4$

24. $ab^2 - a^2b + ac^3 - a^2c + ba^3 - 5a^2c$

25. $a^2 + 4y^2 + 8a^2 - 4xy - 12yz + 6xz$

26. $\frac{a^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} - \frac{xy}{8} - \frac{xz}{5} + \frac{2yz}{15}$

27. $a^3 + y^3 + 3a^2 + 12y^2 + 8a + 48y + 65$

28. $2a^2y - 2xy^2 - 6a^2y + 12a^2y^2 - 8xy^2$

29. $a^3 + a^2 + ca - y + ay + 12xy^2 - 2y - 8y^2$

30. $165a^2 - 74a^2y^2 - 143y^2$

31. $a^3 + 4xy + 4y^2 + 3a + 8y - 13$

32. $3a^2 - 6xy - y^2 + 15a - 8y - 24$

第九章 二次方程式 因子分解應用之一

I. 二次方程基本解法

§ 81. 引論 (1)何謂二次方程式?何謂高次方程式?

在 § 11, 我們已經講過, 式的次數是式中最高項的次數

所以在一個方程式中，諸項的次數最高是幾次，該方程式就叫做幾次方程式，例如

$$x^2 - 12x + 27 = 0, \quad x^2 + 5 = 0, \quad x^2 + y^2 = 25 - x,$$

皆是二次方程式；

$$x^3 + 8 = 0, \quad 2x^3 - x^2 + 50 = 0, \quad x^3 + x^2y = 8 + y,$$

皆是三次方程式；

$$x^4 + x + 5 = 0, \quad x^4 - 8 = 0,$$

皆是四次方程式。五次，六次者類推。

三次及三次以上的方程式都叫做高次方程式。

(2) 二次方程式的需要 設有問題：“二數之和是 12，二數平方的和是 90。求這二數。”

仿前函應用問題解法，令 $x =$ 甲數，則 $12 - x =$ 乙數。由題意得方程式

$$x^2 + (12 - x)^2 = 90$$

化簡，得 $x^2 - 12x + 27 = 0$

這是二次方程式與以前所述的一次方程式不同。所以要解這類問題，非熟悉二次方程式解法不可。以下諸節，詳論二次方程式的解法。

§ 82. 用因式分解法解二次方程式 這個方法的根據在於下面兩條原理：

(I) 二數的積是零，如 $AB=0$ ，那麼必有 $A=0$ 或 $B=0$ 。 因為假如 A, B 皆不為零，則 A, B 必為正數或負數；而 A, B 的積非正即負，不能為零了。

(II) 逆之，若有 $A=0$ 或 $B=0$ ，則 $AB=0$ 此理顯然，無待贅述。

依上面兩條原理，可得二次方程的解法如次：

【例一】 解方程式 $x^2 - 12x + 27 = 0$ (1)

【解法】 先把原式的左邊分解因子，得

$$(x-3)(x-9)=0 \quad (2)$$

再依(I)，得 $x-3=0$ ，或 $x-9=0$ (3)

用一次方程式解法得 $x=3$ ，或 $x=9$

【驗算】 用 $x=3$ 代入(1)，得 $3^2 - 12 \times 3 + 27 = 0$ 。所以 3 是(1)的根。再用 $x=9$ 代入(1)，得 $9^2 - 12 \times 9 + 27 = 0$ 。所以 9 也是(1)的根。

【注意】 由(3)中兩式解得 x 的二值一定都合(1)。因為這二值各合(3)中兩式之一，故依原理(II)都都合(2)，就是都合(1)式。要是不合，是計算或標上發生錯誤。

【例二】 解方程式 $6x^2 + x - 15 = 0$ (1)

【解法】 變原方程式為 $(3x+5)(2x-3)=0$

於是得 $3x+5=0$ ，或 $2x-3=0$

所以

$$x = -\frac{5}{3}, \text{ 或 } x = \frac{3}{2}$$

【驗算】以 $x = -\frac{5}{3}$ 代入原式(1), 左右兩邊都能適合。再

以 $x = \frac{3}{2}$ 代入原式(1), 左右兩邊也都能適合。

【例三】解 $5x^2 + x = 6(2 - x^2)$ 。

【解法】 $5x^2 + x = 12 - 6x^2$

$$11x^2 + x - 12 = 0$$

$$(11x + 12)(x - 1) = 0$$

$$x = -\frac{12}{11}, \text{ 或 } x = 1.$$

由上面三例看來, 可見利用因子分解以解二次方程式的步驟如下:

第一步 化簡原方程式, 使其一邊爲零, 他邊成 $ax^2 + bx + c$ 之形。

第二步 分解 $ax^2 + bx + c$ 成兩個一次因子。

第三步 令這兩個因子各等於零, 得兩個一次方程式。

第四步 解這兩個一次方程式, 就得原方程式的兩根。

第五步 欲知所得的兩根是否正確, 應把這兩根——代入原方程式的兩邊, 驗其是否相合。

習題七十

解下列各方程式(1—5 并須驗算):

1. $x^2 - 23x + 132 = 0$
2. $x^2 - x - 132 = 0$
3. $192x^2 - x - 1 = 0$
4. $156x^2 + 192x = -156 - 1$
5. $55x^2 - 50 = 15x + 6$
6. $2(x+1)(x+2) = (x+3)(x+4) - 3$
7. $(2x+1)(5x-2) = (x+2)(x-8) + 33$
8. $2x(x+1) = (x-1)(x+3) + (x-3)(x-1)$
9. $\frac{x^2}{5} + \frac{x}{5} = 22$
10. $\frac{x^2}{5} + \frac{7x}{5} = 12x - 43$
11. $x^2 - 22x = -30$
12. $5x^2 - 15x = 14$
13. $250x^2 + 10x - 240 = 0$
14. $24(x^2 - 10x) = 65$
15. $x(x+1)(x-1) + 6 = (x-2)(x+2)(x+3)$
16. $220x^2 + 220x = 0$
17. $x(x-4)(x+4) = x^2(x-3) - 5$
18. $(x-4)(x+4)(x^2+25) = x^4$
19. $(x+1)^2 = x^2 + 61$
20. $x^2 - (a-b)x = ab$

§ 83. 用配方法解二次方程式 用配方法以解二次方程

式,和用配方法以求二次式的因子,其在配方一步,手續完全相同。學者可比較觀之。

[例一] 解方程式 $x^2 - 12x + 27 = 0$ 。

[解法] 移項,得 $x^2 - 12x = -27$

兩邊各加 36, 得 $x^2 - 12x + 36 = 36 - 27$

就是 $(x-6)^2 = 9$

兩邊開平方,得 $x-6=3$, 或 -3 [何故有二?]]

故 $x=8+6$, 或 $-3+6$

∴ $x=9$, 或 3 。

[例二] 解方程式 $5x^2 + x = 6(2 - x^2)$ 。

[解法] 變原方程式為

$$5x^2 + x = 12 - 6x^2$$

移項,得 $11x^2 + x = 12$

兩邊各除以 11, 得 $x^2 + \frac{x}{11} = \frac{12}{11}$

兩邊各加 $(\frac{1}{22})^2$, 得 $x^2 + \frac{x}{11} + (\frac{1}{22})^2 = \frac{12}{11} + (\frac{1}{22})^2$

就是 $(x + \frac{1}{22})^2 = \frac{23^2}{22^2}$

兩邊開平方, 得 $x + \frac{1}{22} = \pm \frac{23}{22}$ (何故有二?)]

移項，得 $x = -\frac{12}{11}$ ，或 1。

〔註〕 複號“±”就是“+或-”的省寫。例如，“+5 或 -5”可寫成“±5”。

“ $\frac{23}{22}$ 或 $-\frac{23}{22}$ ”省寫爲“ $\pm\frac{23}{22}$ ”。

【例三】 解方程式 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 。

【解法】 $x^2 + 3x = -1$

$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

$$x + \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (\text{何故有二值?})$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \text{ 或 } \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$$

由上三例看來，可見用配方法解二次方程式，其步驟如下：

第一步 化簡原方程式，使其一邊不含 x ，他邊含 x 的二次項及一次項，並使 x^2 的係數爲 1。就是，變原方程式成 $x^2 + px = q$ 之形。

第二步 乃於 $x^2 + px = q$ 的兩邊各加 $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ 。

[使左邊變成 $(x + \frac{p}{2})^2$ 之形。]

第三步 乃把方程式

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = c$$

的兩邊各自平方，得兩個一次方程式：

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

第四步 解這兩個一次方程式，就得所求的兩根。

第五步 欲知所得兩根是否正確，應把這兩根一一代入原方程式的兩邊，驗其是否相合。

習題七十一

用此方法解習題七十的各題。

§ 84. 用公式解二次方程式 任何二次方程式，均可化為 $ax^2 + bx + c = 0$ 之形。這是二次方程的標準形式。能解這個方程式，那麼，凡是二次方程式，都可利用這解得的結果來求根。現在，先看這標準方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解法：

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\Delta)$$

兩邊各除以 a ，得

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

移項，得
$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

兩邊各加 $\frac{b^2}{4a^2}$ ，得 $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

就是
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

兩邊各開平方，得
$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

移項，得
$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

分開來寫，就是
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

再看這公式(B)的用法：上面解法中，各步算法對於 a, b, c 三數任爲何數，無不可通。故(B)式所表的根，可以用做解二次方程式的公式。就是說“當 a, b, c 任爲何值時，(A)式中 x 的值恆可由(B)式直接去求；不必仍依配方手續，把由(A)到(B)中間各步，——逐層寫出”。

[例一] 解方程式 $x^2 - 12x + 27 = 0$ 。

[解法] 拿這方程式和標準方程式(A)來比較,可見 $a=1$,
 $b=-12$, $c=27$ 。把這些數代入公式(B), 使得

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \times 1 \times 27}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2}$$

$$\therefore x_1 = 9, \quad x_2 = 3。$$

[例二] 解 $5x^2 + x = 6(2 - x^2)$ 。

[解法] $5x^2 + x = 12 - 6x^2$
 $11x^2 + x - 12 = 0$

$a=11$, $b=1$, $c=-12$, 故得

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 11 \times (-12)}}{2 \times 11} = \frac{-1 \pm 23}{22}$$

$$\therefore x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{12}{11}。$$

由上面兩例看來,可見用公式解二次方程式,其步驟如下:

第一步 化簡原方程式,使成 $ax^2 + bx + c = 0$ 之形。

第二步 把 a, b, c 三數的值代入公式(B),以求 x 的值。

第三步 欲知求得值是否正確,應把求得的兩值——代

入原方程式的兩邊,驗其是否相合。

習題七十二

利用公式以解習題七十的各題。

§ 65. 三種解法的比較 如上所述，求解二次方程式共有三法：(A) 利用因子分解法；(B) 配方法；(C) 用公式法。三法之中，各有短長；何者最優，不可一概而論。因為(1)利用因子分解法，在因子容易分解時，計算手續極簡；但當因子不易分解或不能分解時，則此法無效。(2)配方法適用於任何二次方程式，範圍極廣；但計算手續很繁。(3)用公式法亦能適用於任何二次方程式，牠的計算手續比用配方法較簡；但在因子易求時，代入公式仍不如用分解因子法求得簡捷。即以配方法與用公式法相較，也難判孰優孰劣。公式法計算手續，比之配方法固然較簡，但若無配方法，公式又何自而來？總之：三法之中，沒有什麼優劣；但在解決問題時，各有其宜罷了。

習題七十三

用最簡的方法解下列各題：

1. $x^2 - 4x - 21 = 0$

2. $x^2 - 4x - 77 = 0$

3. $x^2 - 15x - 154 = 0$

4. $3x^2 - 9x - 18 = 0$

5. $180x^2 + x - 251 = 0$

6. $280x^2 + x - 251 = 0$

7. $351x^2 + x - 251 = 0$

8. $351x^2 - x - 251 = 0$

9. $71x^2 - 8(x - 6) = 0$ 10. $97x^2 - 1084x + 18^2 = 0$
 11. $143x^2 + 23(x + 1)^2 = 0$ 12. $143x^2 - 48x - 143 = 0$
 13. $x^2 + 4x + 2 = 0$ 14. $x^2 + 2x - 4 = 0$
 15. $100x^2 + 20(x = 69$ 16. $3x^2 + 6x - 7 = 0$
 17. $100x^2 - 40(x = -111$ 18. $256x^2 = 1536x + 97$
 19. $8x^2 + 9x = (x + 1)(x - 6)$ 20. $(3x - 1)(x^2 - 5x - 24) = 0$

§ 26. 應用問題 解二次方程式應用問題，仍與以前解一次方程式應用問題步驟相同。所應特別注意的，就是“解得的二根，有時雖皆合所立方程式，而不盡合原題。所以解得的二根，必須一一代入原題，驗其是否皆合。”今述其步驟如下：

第一步 選擇題中適宜的數，作為未知數，用 x 代之。

第二步 依題意，把已知數與未知數間的關係列成方程式。

第三步 解這所立方程式，得二根。

第四步 把所得二根，先代入所立方程式，以驗在解方程式時，有無差誤，然後代入原題，驗其是否相合，不合者棄之。

[例一] 兩個連續正數的積是 132。求這兩數。

[解法] 設一數是 x ，那麼他數是 $x + 1$ 。依題意得方程式

$$x(x + 1) = 132$$

移項，得 $x^2 + x - 132 = 0$

分解因子，得 $(x + 12)(x - 11) = 0$

故 $x = -12$, 或 $x = 11$.

題設二數俱為正數, -12 為負數, 不合題意, 故不可用。

∴ $x = 11$ 一數,

而 $x + 1 = 12$ 他數。

[例二] 兄弟二人歲數的和是 35, 各人歲數平方的和等於兄 5 年後歲數的平方。求各人的歲數。

[解法] 設 $x =$ 兄的歲數, $35 - x =$ 弟的歲數。

依題意得 $x^2 + (35 - x)^2 = (x + 5)^2$.

化簡, 得 $x^2 - 80x + 1200 = 0$

分解因子, 得 $(x - 20)(x - 60) = 0$

故 $x = 20, x = 60$

兄弟歲數的和是 35, 兄的歲數不能大於 35。故 60 不合題意。

∴ $x = 20$, 兄年 20 歲,

而 $35 - x = 15$, 弟年 15 歲。

習題七十四

解下列各題(棄去不合題意的答案):

1. 大小兩數的差是 5, 其平方的差是 75。求這兩數。
2. 從某數的平方減去該數, 得 992。求該數。
3. 從某數平方的 2 倍, 加入該數的 5 倍, 得 150。求該數。

4. 某數四倍的平方等於該數 30 倍與 4 的積。求該數。
5. 從 -10 加某數，又從 -12 加該數。假知道兩個和相乘的積，等於該數 60 倍與 15 的和。求該數。
6. 兩個連續數相乘的積，等於其中小數平方的 3 倍。求這兩數。
7. 父子歲數的和是 40。其積是子年平方的 3 倍。問現年各幾歲？
8. 今年，父子歲數的和是 40。5 年前，父子歲數的積是子的歲數的 25 倍。問今年二人各幾歲？
9. 兄弟歲數的和是 70。10 年前二人歲數的積是 10 年後二人歲數的積的 $\frac{3}{10}$ 。問兄弟現年各幾歲？
10. 雞犬共計 7 隻。其足數平方的和是 416。問雞犬各有多少隻？
11. 雞犬共有 24 足。其頭數平方的和是 29。問雞犬各幾頭？
12. 分桃與兒童，每人 6 枚，不足 5 枚。已知桃數是人數的平方。求桃數。
13. 有二位數，其兩位數字的和是 12，十位數字是個位數字的平方。求這二位數。
14. 有二位數，其個位數字是十位數字的平方。交換兩位數字，所成新數比原數大 54。求這二位數。
15. 學生支配寢室，每室 11 人恰好住滿；若室數減 1，每間多住 1 人，則所餘人數尚為原來室數的平方。求人數。
16. 長方形的面積是 150 平方市尺，長比闊多 5 市尺。求長闊各是幾市尺。
17. 正方形的各邊是 20 市尺。另有長方形，其周界和這正方形的周界相等，而其面積是 300 平方市尺。求這長方形闊幾市尺。
18. 直角三角形三邊的尺數為連續數。求各邊的是。〔在直角三角形內，斜邊平方 = 其他兩邊各自平方的和。〕
19. 正方形的面積是 100 平方市尺。若將其一邊減少若干市尺，他邊增加這所減市尺數的 2 倍，而成長方形，則其面積不變。求這長方形的長。

20. 二數的差是 10, 積是 75。求這二數。

§ 87. 簡易高次方程式 高次方程式中, 常有能用解二次方程式的方法來解的。這類解法大致不外(1)利用 § 82 所述原理, 把原方程式分成兩個二次以下的方程式, (2)重複應用二次方程式的解法。現在, 舉例來說明。

[例一] 解方程式 $(x-2)(x^2-6)=3x-6$ 。

[解法] 變原方程式為

$$(x-2)(x^2-6)=3(x-2)$$

移項, 得 $(x-2)(x^2-6)-3(x-2)=0$

分解因子, 得 $(x-2)(x^2-6-3)=0$

據 § 82(I), (II), 得 $x-2=0$, $x^2-9=0$

故 $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=-3$ 。

[例二] 解方程式 $(x^2-5)^2-3(x^2-5)-4=0$ 。

[解法] 把 (x^2-5) 當做 y , 原方程式變為 $y^2-3y-4=0$ 。

解之, 得 $y=4$, 或 $y=-1$

就是 $x^2-5=4$, 或 $x^2-5=-1$

故 $x=\pm 3$, 或 $x=\pm 2$

[例三] 解 $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)=-8$ 。

[解法] $[(x-3)(x-4)][(x-1)(x-6)]=-8$

$$(\underline{x^2-7x+12})(\underline{x^2-7x+6})+8=0$$

$$(x^2-7x)^2+18(x^2-7x)+30=0$$

把 x^2-7x 當做一個未知數去求解，得

$$x^2-7x=-10, \text{ 或 } x^2-7x=-3$$

再用二次方程式解法解 $x^2-7x=-10$

得 $x_1=2, \text{ 或 } x_2=5$

同樣，解 $x^2-7x=-3$

得 $x_3=\frac{7+\sqrt{17}}{2}, \text{ 或 } x_4=\frac{7-\sqrt{17}}{2}$

【例四】 解方程式 $x^3=8$

【解法】 化原方程式為 $x^3-2^3=0$

分解因子，得 $(x-2)(x^2+2x+4)=0$

由此，得 $x-2=0$ (A) 及 $x^2+2x+4=0$ (B)

解(A)，得 $x=2$

解(B)，得 $x=\frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{-3}}{2} = -1 \pm \sqrt{-3}$$

所以原方程式共有三根：

$$x_1=2, \quad x_2=-1+\sqrt{-3}, \quad x_3=-1-\sqrt{-3}$$

【註】 由負數開平方所得的數叫做虛數。其性質等到第十三章再講。

習題七十五

解下列各方程式：

1. $x^4 - 12x^2 + 36 = 0$

2. $x^4 - 9x^2 + 14 = 0$

3. $x^4 - 10x^2 + 24 = 0$

4. $x^4 - 2x^2 - 24 = 0$

5. 試解 $x^3 - 1 = 0$ (求其六根)

【解法】 $(x^2+1)(x-1) = 0$

$x^2+1=0$, 或 $x-1=0$

$(x+1)(x^2-x+1) = 0$, 或 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

∴ $x+1=0, x^2-x+1=0$, 或 $x-1=0, x^2+x+1=0$

∴ $x_1 = -1, x_2 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}, x_3 = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}$

$x_4 = 1, x_5 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, x_6 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$

6. $x^3 - 64 = 0$ (求其六根)

7. $x^3 + 1 = 0$ (求其六根)

8. $x^4 - 81 = 0$ (求其四根)

9. $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

10. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

11. $(x^2+1)^2 - (x^2-2x+1) = 0$

12. $x^3 + 3x^2 + 3x + 28 = 0$

13. $(x^2-2)(2x-2) = 2x^2-4$

14. $x^3 + 8 + x^2 - 4 = 0$

15. $(x^2+x)^2 - 22(x^2+x) + 45 = 0$

16. $(x^2+3)^2 - 19(x^2+3) + 84 = 0$

17. $(x^2+6x+2)^2 + (x^2+6x+2) - 6 = 0$

$$18. (x+2)(x+3)(x+7)(x+8)=864$$

$$19. (x-1)(x+3)(x+8)(x+4)=-84$$

$$20. 7x^4+6x^3-9x^2=0$$

II. 聯立二次方程式

§ 83. 聯立二次方程式的需要 求解關於二次方程式的應用問題，有時以引用兩個未知數，設立兩個方程式，聯立求解為較便。這種情形蓋與聯立一次方程式相類似；所不同的，只不過方程式的次數罷了。

[例一] “二數的和是 12，其平方的和是 90。求這二數”
[見 § 81(2)]

是仿前面聯立一次方程式應用問題解法，設一數是 x ，
數是 y 。那麼依題意，應得聯立方程式：

$$\begin{cases} x+y=12 \\ x^2+y^2=90 \end{cases} \quad (2)$$

如能由此求出 x, y 的值，就能解決本問題。

[例二] “二數的積是 27，其平方的和是 90。求這二數。”

設 $x =$ 一數， $y =$ 他數。依題意得聯立方程式：

$$\begin{cases} xy=27 \\ x^2+y^2=90 \end{cases} \quad (1)$$

如能由此求出 x, y 的值，就能完全解決本問題。但是怎樣求 x, y ？以下諸節，略論其法。

§ 89. 兩個方程式中的一個是一次的 在聯立二次方程式中,如有一個方程式是一次的,則這聯立方程式,恆可依一定方法去求根。先看下列:

[例一] 解聯立方程式:

$$\begin{cases} x + y = 12 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 & (2) \end{cases}$$

[解法] 由(1),得 $x = 12 - y$ (1')

代入(2),得 $(12 - y)^2 + y^2 = 20$

解之,得 $y_1 = 3, y_2 = 9$

把 y_1 代入(1'),得 $x_1 = 12 - 3 = 9$

把 y_2 代入(1'),得 $x_2 = 12 - 9 = 3$

故所求的根有二組:

$$\begin{cases} x_1 = 9 \\ y_1 = 3 \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 9. \end{cases}$$

[例二] 解聯立方程式:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 + 10x - 5y = -17 & (2) \end{cases}$$

[解法] 由(1),得 $x = 3 - 2y$ (1')

代入(2),得 $(3 - 2y)^2 + (3 - 2y)y + y^2 + 10(3 - 2y) - 5y = -17$

解之,得 $y_1 = \frac{28}{3}, y_2 = 2$

把這兩值代入(1'),得 $x_1 = -\frac{47}{3}$, $x_2 = -1$

故所求的根有二組:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{47}{3} \\ y_1 = \frac{28}{3} \end{cases} \text{ 及 } \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

由上兩例看來,可見聯立二次方程式中,如有一個方程式是一次的,恆可依下列步驟去求解:

第一步。由一次方程中求出 $x = (?)y + (?)$ [或 $y = (?)x + (?)$]。

第二步。把第一步的結果代入二次方程式,化簡之後,應得含 y (或 x) 的一元二次方程式。

第三步。由這一元二次方程式求出 y 值(或 x 值)。

第四步。把所得結果,一一代入第一步所得的方程式,求 x 值(或 y 值)。

第五步。欲知所得結果是否正確,可把各組 x, y 的値一一代入原來聯立方程式,驗其是否能合該兩方程式。

[注意] 第五步的代入驗算法,只能證明所得的値是否適合原來方程組。不能證明所得的値是不是原方程組的全部解答。因為如有一個方程式是一次的,答案有的有兩組,有的只有一組。要是在有兩組答案的聯立方程式,求得了一組的値而加以驗算,可以適合所給的方程式,但不能由這驗算的過程中得知有沒有其他答案。

習題七十六

解下列各聯立方程式：

$$1. \begin{cases} x+2y=5 \\ x^2+xy=8 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x+3y=5 \\ x^2-xy+y^2=x+y-1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x+y=2 \\ x^2-y^2=2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x+y=3 \\ y^2-x^2=1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x+y=\frac{13}{6} \\ xy=1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 4x+5y=2 \\ 2kxy=1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x+4y=2 \\ 5x^2+3cxy+16y^2=cx+8y \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x+y=0 \\ x^2-xy+y^2=2 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} (x+y)(x-y)=xy-21 \\ (x+3)(y-4)=xy-23 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x^2+y=0 & (1) \\ x^2-x-y=6 & (2) \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} (x+5)(y+3)=29 \\ (x-4)(y+4)=-18 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} y^2+xy-x^2=-1 \\ 13x-17y=39 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x^2+xy+x-y=14 \\ x^2+xy-x+y=13 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} (3x+4y)(4x-3y)=7 \\ (x+2)(y-4)=xy-13 \end{cases}$$

[注意] 第10題的解法：可把(1),(2)兩式相減，再以所得之方程式與(1)或(2)聯立求解。請類方法應用很廣，不盡能解本題而已。

§ 99. 兩個方程式俱為二次的 在聯立方程式中，假如兩個方程式皆是二次的，那麼這類聯立方程式，不盡可解（指僅用

二次方程式解法而言)。假如，有聯立方程式：

$$\begin{cases} x^2 + y = 3 & (1) \\ x + y^2 = 5 & (2) \end{cases}$$

由(1)求 $y = 3 - x^2$ ，代入(2)，得 $x + (3 - x^2)^2 = 5$ ，

這是四次方程式，僅用二次方程式解法不能求出牠的根。又若由

(2)求得 $x = 5 - y^2$ ，代入(1)式，得 $(5 - y^2)^2 + y = 3$ ，

也是一個四次方程式，不能適用二次方程式的解法。不但如此，

任用其他方法，都不能把這聯立方程式，變為二次方程式範圍以

內的問題。所以在聯立方程式中，假如兩個方程式皆是二次的，

那麼僅用二次方程式解法，通常總是不能求解。所可解者，特例

而已。現在分三類述其大要於下：

第一類。一個方程式成 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ 之形者，在 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = J$ 內，把 y 當做已知數恆可求得

$$x = (?)y \quad (A)$$

及 $x' = (?)y \quad (B)$

把(A)和他一方程式聯立，

可仿§89求解

把(B)和他一方程式聯立，

也可仿§89求解

於是得所求各值也。

[例一] 解聯立方程式：

$$\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0 & (1) \\ 2x^2 - y^2 + x - y = 15 & (2) \end{cases}$$

【解法】由(1),把 y 當做已知數,求得

$$x = y \quad (A)$$

及

$$x = \frac{3}{2}y. \quad (B)$$

I. 先把(A)與(2)聯立,仿 § 89 求解,得二組根:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{15} \\ y_1 = \sqrt{15} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\sqrt{15} \\ y_2 = -\sqrt{15} \end{cases}$$

II. 再把(B)與(2)聯立,仿 § 89 求解,又得二組根:

$$\begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -\frac{45}{14} \\ y_4 = -\frac{15}{7} \end{cases}$$

故所求的根共有四組如上。

【驗算】 $x_1 = \sqrt{15}, \quad y_1 = \sqrt{15}$

$$2(\sqrt{15})^2 - 5(\sqrt{15})(\sqrt{15}) + 3(\sqrt{15})^2 = 0$$

$$2(\sqrt{15})^2 - (\sqrt{15})^2 + \sqrt{15} - \sqrt{15} = 15.$$

$$x_2 = -\sqrt{15}, \quad y_2 = -\sqrt{15}$$

$$2(-\sqrt{15})^2 - 5(-\sqrt{15})(-\sqrt{15}) + 3(-\sqrt{15})^2 = 0$$

$$2(-\sqrt{15})^2 - (-\sqrt{15})^2 + (-\sqrt{15}) - (-\sqrt{15}) = 15.$$

$$x_3 = 3, \quad y_3 = 2$$

$$2(3)^2 - 5(3)(2) + 3(2)^2 = 0$$

$$2(3)^2 - (2)^2 + 3 - 2 = 15。$$

$$x_4 = -\frac{45}{14}, \quad y_4 = -\frac{15}{7}$$

$$2\left(-\frac{45}{14}\right)^2 - 5\left(-\frac{45}{14}\right)\left(-\frac{15}{7}\right) + 3\left(-\frac{15}{7}\right)^2 = 0$$

$$2\left(-\frac{45}{14}\right)^2 - \left(-\frac{15}{7}\right)^2 + \left(-\frac{45}{14}\right) - \left(-\frac{15}{7}\right) = 15。$$

【例二】 解聯立方程式：

$$\begin{cases} x^2 + xy = 1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy + y^2 = 2 & (2) \end{cases}$$

【解法】 本題內(1),(2)兩個方程式，雖然都不屬於 $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ 之形，但若由(1),(2)兩式消去不含 x, y 的一項，便可化成該形：[這是一種有用的解法，用牠可以解決許多同類問題，學者務宜注意。]

$$2(1) - (2) \text{ 得} \quad 2x^2 + xy - y^2 = 0$$

$$\text{即} \quad (2x - y)(x + y) = 0$$

$$\text{故得} \quad 2x - y = 0 \quad (A)$$

$$\text{及} \quad x + y = 0。 \quad (B)$$

I. 先把(A)與(1)聯立[或與(2)聯立]，仿§89求解，得

二組根：

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ y_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

II. 再把(B)與(1)聯立,仿 §89 求解,不能求出牠的根。

這是因為原方程式可化爲

$$\begin{cases} x(x+y) = 1 \\ y(x+y) = 2. \end{cases}$$

其中 $x+y \neq 0$, 而(B)則 $x+y=0$, 二者互相矛盾的緣故。故所求的根只有兩組。

$$[\text{驗算}] \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad y_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 2.$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad y_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 1$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 2.$$

第二類。 兩式相除可得一個一次方程式。本類中任何問題，皆可仿下列兩例去求解。

【例一】 解聯立方程式：

$$\begin{cases} x^2 + xy = 1 & (1) \\ xy + y^2 = 2 & (2) \end{cases}$$

【解法】 (2) ÷ (1) 得 $\frac{y}{x} = 2$ ，即 $y = 2x$ (3)

把(3)與(1)聯立 [或與(2)聯立]，仿 § 89 求解，得所求的根是

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ y_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

【驗算】 與第一類第二例相同。

【例二】 解 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 & (1) \\ 2x^2 + 3xy + y^2 = 77 & (2) \end{cases}$

【解法】 因原方程組可化爲

$$\begin{cases} (x+y)(x-y) = 7 \\ (x+y)(2x+y) = 77 \end{cases}$$

故以(1)除(2)，得 $\frac{2x+y}{x-y} = 11$

化簡，得 $4y = 3x$ (3)

把(3)與(1) [或(2)] 聯立，仿 § 89 求解，得所求的根是

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = -3 \end{cases}$$

【驗算】

$$x_1 = 4, \quad y_1 = 3$$

$$(4)^2 - (3)^2 = 7$$

$$2(4)^2 + 3(4)(3) + (3)^2 = 77.$$

$$x_2 = -4, \quad y_2 = -3$$

$$(-4)^2 - (-3)^2 = 7$$

$$2(-4)^2 + 3(-4)(-3) + (-3)^2 = 77.$$

習題七十七

解下列各聯立方程式：

$$1. \begin{cases} 6x^2 + 5xy - 6y^2 = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 8x^2 - xy + y^2 + x = 23 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 6 \\ 4x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + 3xy - y^2 + 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} (x-y)(x+y) + x + y = 0 \\ 9x^2 - 2y^2 = 4 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} (x-2y+1)(2x-y-1) = 0 \\ x^2 + 3xy - y^2 + x - y = 3 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ (x-y)(x+2y) = 3 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 4x^2 - 7xy + 2y^2 = \\ 2x^2 - xy - 2y^2 = 4 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x^2 + 2xy - 2y^2 = 13 \\ (x+y)(x+2y) + x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \text{(用兩式相減法或代入法)}$$

$$11. \begin{cases} x^2 - y^2 - 2x = 0 & (1) \\ 2x^2 + 2xy - 5x = 0 & (2) \end{cases}$$

[提示] $3 \times (2) - 5 \times (1)$, 得 $x^2 + 6xy + 5y^2 = 0$ (3)

例 3 與 (1) [(或 (2))] 聯立, 仿第一題的方法去求解。

$$12. \begin{cases} x^2 - xy - y^2 + \frac{y}{2} = 0 \\ 2x^2 - 5y^2 + y = 0 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x^2 - 7y^2 + 2x - 2y = 0 \\ xy + x^2 - y^2 - 5x + 5y = 0 \end{cases}$$

第三類。 設法求出 $x+y=?$, $x-y=?$ 解聯立方程式, 有時可由題中所給的二式, 設法求出 $x+y$ 及 $x-y$ 的值。如能做到這一步, 那麼由此以求 x, y 的值便無多大問題了。但是怎樣去求 $x+y$ 及 $x-y$ 的值? 學者觀察下列, 自然會明白。

$$[\text{例一}] \quad \text{求解} \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 & (1) \\ xy = 3 & (2) \end{cases}$$

[解法] 學者注意: 我們的目的是在於求得 $x+y=?$ 但是要得 $x+y=?$ 只須得 $(x+y)^2=?$ 便可, 就是, 求得 $x^2 + 2xy + y^2=?$ 就行了。試拿 (1), (2) 兩式來看, 怎樣可得 $x^2 + 2xy + y^2=?$ 豈不是把 (2) 的 2 倍加入 (1) 式嗎? 故用下法求 $x+y$:

$$(1) + 2 \times (2) \text{ 得 } x^2 + 2xy + y^2 = 16$$

$$\text{故 } x + y = \pm 4 \quad (3)$$

依同理去求 $x - y$:

$$(1) - 2 \times (2) \quad x^2 - 2xy + y^2 = 4$$

$$\text{故 } x - y = \pm 2 \quad (4)$$

解(3), (4)分別聯立, 可得四組聯立方程式如下:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -4 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -4 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

解之, 得四組根:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -1 \\ y_3 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -3 \\ y_4 = -1 \end{cases}$$

【驗算】 $x_1 = 3, \quad y_1 = 1$

$$(3)^2 + (1)^2 = 10$$

$$(3)(1) = 3。$$

$$x_2 = 1, \quad y_2 = 3$$

$$(1)^2 + (3)^2 = 10$$

$$(1)(3) = 3。$$

$$x_3 = -1, \quad y_3 = -3$$

$$(-1)^2 + (-3)^2 = 10$$

$$(-1)(-3) = 3。$$

$$x_4 = -3, \quad y_4 = -1$$

$$(-3)^2 + (-1)^2 = 10$$

$$(-3)(-1) = 3。$$

$$\text{【例二】 求解 } \begin{cases} x+y=5 & (1) \\ xy=6 & (2) \end{cases}$$

【解法】 本題中已知 $x+y=5$ ，例如再能求得 $x-y=?$ 便不難求出 x, y 的值。今用下法（參看例一）求 $x-y$ 的值。

(1)式兩邊平方，得

$$x^2 + 2xy + y^2 = 25 \quad (1')$$

(1') - 4 × (2)，得 $x^2 - 2xy + y^2 = 1$

故

$$x-y = \pm 1 \quad (3)$$

把(3)與(1)聯立，得兩組方程式：

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

解之，得兩組根：

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 2, \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

【驗算】

$$x_1 = 3$$

$$y_1 = 2$$

$$3 + 2 = 5$$

$$(3)(2) = 6。$$

$$x_2 = 2,$$

$$y_2 = 3$$

$$2 + 3 = 5$$

$$(2)(3) = 6。$$

習題七十八

解下列各聯立方程式：

$$1. \begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x^2 + y^2 = 24 \\ xy = 15 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 20 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 61 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 52 \\ xy = 4 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x + y = 5 \\ x^3 + y^3 = 65 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x + y = 5 \\ x^3 + y^3 = 257 \end{cases}$$

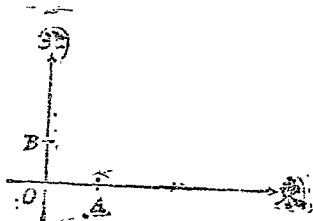
$$10. \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 12 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x^2 + y^2 + 5xy = 15 \\ xy + 3x + 2y = 11 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 4x^2 + 8xy + y^2 = 32 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

習 題 七 十 九

- 兩數的積是 21，其各自平方的和是 58。求這兩數。
- 把 6 元分與若干人，若使人數加 4，則每人應少得 7 元。求原有人數。
- 兩數的差是 40，其各自平方的和比其和大 76。求這兩數。
- 假定比快車每小時少行 1 里，二車同行 72 里，慢車比快車多行 1 小時。求慢車每小時行幾里。
- 把 9 分錢用紙幣，使各部立方的和是 133。求這兩部。
- 有二數，其和等於其積，而其平方之和少 4。求這二數。
- 用 115 元買米若干石。倘若米價每石降價 3 元，就可多買米 3 石。買米價原為若干？
- 自大小二數的和加上該二數各自平方的和，其結果是 633。自數二數的立加上該數各自平方的差，其結果為 74。求這二數。
- 大小二數的積比大數的 10 倍多 51，而比小數 10 倍多 91。求這二數。
- 甲乙二數各有兩位。甲數的個位數字，十位數字依次等於乙數的十位數字，個位數字。甲乙二數各自平方的差是 1989。甲乙二數的和等於兩數差的 55 倍。求這二數。
- 長方形的兩邊是 8 市尺和 10 市尺，現在要將這形口縮放大的長和寬的 3 倍而不變兩邊的比。問縮形兩邊各是幾市尺？
- 如右圖，甲從 A 向東進行，乙從 B 向北進行。3 秒鐘之後，二人相距 $2\sqrt{13}$ 市尺。5 秒鐘之後，二人相距 $2\sqrt{139}$ 市尺。若 $OA=4$ 市尺， $OB=3$ 市尺。問二人每秒各行幾市尺？



13. 自二數的積加上該二數的和，其結果是 79。若自該二數的積減去該二數的和，則其結果是 47。求該二數。

14. 有三位數，其個位數字等於其他兩位數字之和。第一、第三兩位數字之和比第二位數字的平方大 5。若於原數加 396，則各位數字的次序倒轉。求原數。

15. 某車於若干時內進行 360 里。倘該車每時多行 5 哩，則少行 2 小時。求該車原有的速度(限用立方程式)。

第十章 分式四則 因子分解應用之二

§ 91. 引論 (1) 何謂分式? 在算術，以 5 除 3 可寫成 $3 \div 5$ 或 $\frac{3}{5}$ 。後者與前者其實相同。但為種種便利起見，有時亦採用後式，並且給他一個新的名稱叫做分數。其中 3 叫做分子，5 叫做分母。

同樣，在代數上，以代數式 B 除 A ，原可寫成 $A \div B$ ；但為便利計，又常寫成 $\frac{A}{B}$ 。這 $\frac{A}{B}$ 叫做分式。其中 A 叫做分子， B 叫做分母。

例如， $\frac{y}{x}$ ， $\frac{3}{x+y}$ ， $\frac{x+y}{x^2+y^2}$ ，皆為分式。其中， y ， 3 ， $x+y$

各為分子； x ， $x+y$ ， x^2+y^2 各為分母。

(2) 分式的需要。分式在代數裏面，除與分數在算術裏

面，有同樣重要外，更有其他妙用。請看下列兩個問題：

【問題一】“兩數的積是 27，其平方的和是 90。求這兩數”。
 本題若用一個未知數來求解，則應設 x 為一數， $\frac{27}{x}$ 為他數。而得
 方程式
$$x^2 + \left(\frac{27}{x}\right)^2 = 90.$$

【問題二】“有大小兩數。其各自倒數的和是 $\frac{4}{3}$ 。以其和的立方，除其立方的和得商 $\frac{7}{13}$ 。求這兩數”。用二元聯立方程式解之如下：

$$\text{設 } x = \text{一數}, \quad y = \text{他數},$$

依題意應得聯立方程式：

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{3} \\ x^3 + y^3 = 7 \\ (x+y)^3 = 13 \end{cases}$$

怎樣解上列兩題所得方程式，非先熟悉分式的算法不可。

(3) 分式問題的分類。代數上關於分式的基本問題，大部與算術相同。就是約分，通分，加法，減法，乘法，除法，化簡整分式等。

在算術，欲約的分，通分，四則，等等算法，非先熟悉求 L. C. M. 及 H. C. F. 兩種算法不可。在代數亦然。故先述 H. C. F. 及 L. C. M. 的求法於下。

§ 92. 怎樣求 H. C. F.? 若甲式是乙式的因子, 又是丙式的因子, 又是丁式的因子, 則甲式叫做乙, 丙, 丁諸式的公因子。若乙, 丙, 丁諸式中, 公因子不止一個, 那麼, 其中數字係數最大, 文字次數最高的公因子, 叫做最高公因子, 簡寫為 H. C. F.

例如在 x^2-2x , x^3-2x^2 , x^4-4x^2 三式中, 因

$$\begin{cases} x^2-2x=x(x-2); \\ x^3-2x^2=x^2(x-2); \\ x^4-4x^2=x^2(x^2-4)=x^2(x+2)(x-2)。 \end{cases}$$

故 x 是三式的公因子; $x-2$ 也是三式的公因子; $x(x-2)$ 也是三式的公因子。其中以 $x(x-2)$ 的次數為最高, 故 $x(x-2)$ 是三式的 H. C. F.

由是得 H. C. F. 的求法如下:

第一步. 先把所給各式——分成質因子 (務須分成質因子, 否則容易錯誤)。

第二步. 察詳質因子中那幾個是各式的公因子。

第三步. 乃把第二步所察知的各式的公因子, ——取出連乘之, 就得所給各式的最高公因子。

[例一] 求 $x^3-xy^2+2x^2y-2y^3$, x^4-y^4 , $x^3-xy^2+3x^2y-2y^3$ 的 H. C. F.

[解法]

$$(1) \quad x^3 - xy^2 + 2x^2y - 2y^3 = (x+2y)(x+y)(x-y);$$

$$(2) \quad x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x+y)(x-y);$$

$$(3) \quad x^3 - xy^2 + 3x^2y - 3y^3 = (x+3y)(x+y)(x-y).$$

由(1),(2),(3)三式看來,可見 $x+y$ 是各式的公因子, $x-y$ 也是各式的公因子。此外 $x+2y$, x^2+y^2 , $x+3y$ 均非諸式的公因子。故所求的 H. C. F. 是 $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ 。

[例二] 求 $x^3 - 5x + 6$, $x^2 - 4$, $x^3 + 5x^2 - 14x$ 的 H. C. F.

[解法] 1. $x^3 - 5x + 6 = (x-2)$

2. $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

3. $x^3 + 5x^2 - 14x = x(x-2)(x+7)$

$$\text{H. C. F.} = x-2.$$

[例三] 求 $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, $x^3 + 2x + 3$, $x^2 - 2x - 3$ 的 H. C. F.

[解法] 本題中,一,二兩式不易求出因子。所以先把第三式分成因子,再察所得因子中那幾個是其他二式的公因子。如此比較便利。

因 $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

乃以 $x+1$ 除第一式,得整商 $x^2 + x + 1$; 又以 $x+1$ 除第二式,得整商 $x^2 - x + 3$ 。故知 $x+1$ 為三式的公因子之一。

又以 $x-3$ 除 $x^2 + x + 1$, 不能除盡,故知 $x-3$ 非三式的

公因子。

$\therefore x+1$ 就是所求的 H. C. F. ☺

上面所講用分解因子法求 H. C. F., 全憑觀察。對於較為簡單的問題, 最為便捷。但遇着不易分解因子的代數式, 必須用算術中已學過的輾轉相除法來求。

假使有 A, B 兩式, 依降冪 (或昇冪) 排列, B 的次數比 A 的次數小; 或雖次數相同, 但 B 的最高次項的係數, 小於 A 的最高次項係數, 則用輾轉相除法, 用 B 除 A , 得商 Q_1 , 賸餘 R_1 , 次以 R_1 除 B , 得商 Q_2 , 賸餘 R_2 。復次以 R_2 除 R_1 , 得商 Q_3 , 賸餘 R_3 。如此法做去, 除至 N 次後恰巧除盡無餘, 那麼, 此時的最後餘數 R_n 便是 A, B 兩式的 H. C. F.

$$\begin{array}{r}
 Q_1 \\
 B \overline{) A} \\
 \underline{BQ_1} \quad Q_2 \\
 R_1 \quad \overline{) B} \\
 \underline{R_1Q_2} \quad Q_3 \\
 R_2 \quad \overline{) R_1} \\
 \underline{R_2Q_3} \\
 R_3 \\
 \vdots \\
 R_n \overline{) R_{n-1}} \\
 \underline{R_nQ_{n+1}} \\
 0
 \end{array}$$

由上式所示，可知 R_n 可除盡 R_{n-1} ，可除盡 R_3 ，可除盡 R_2 ，所以也可除盡 $R_1 (R_1 = R_2 Q_2 + R_3)$ ，除盡 B ，除盡 A 。故 R_n 是 A 和 B 的公因子。

何以 R_n 是最高公因子呢？假使有一公因子 X 大於 R_n ，那麼，公因子 X 可除盡 A ，除盡 B ，除盡 $A - BQ_1$ 即 R_1 ，除盡 $B - R_1Q_2$ 即 R_2 ，除盡 R_3 ，除盡 R_n 。但照我們的假定， X 比 R_n 大， X 除盡 R_n 是不可能的，所以 R_n 是所求的 H. C. F.

[例一] 求 $4x^3 - 3x^2 - 24x - 9$ 和 $8x^3 - 2x^2 - 53x - 39$ 的 H. C. F.

x	$4x^3 - 3x^2 - 24x - 9$	$8x^3 - 2x^2 - 53x - 39$	2
	$4x^3 - 5x^2 - 21x$	$8x^3 - 6x^2 - 48x - 18$	
$2x$	$2x^2 - 3x - 9$	$4x^2 - 5x - 21$	2
	$2x^2 - 6x$	$4x^2 - 6x - 18$	
3	$3x - 9$	$x - 3$	
	$3x - 9$		
	0		

H. C. F. = $x - 3$ 。

[註] 用左式除右式得商 2，並第一餘式 $4x^2 - 5x - 21$ 。用第一餘式除左式得商 x ，並第二餘式 $2x^2 - 3x - 9$ 。用第二餘式除第一餘式，得商 2，並第三餘式 $x - 3$ 。用第三餘式除第二餘式得商 $2x + 3$ ，無餘。故第三餘式 $x - 3$ 為最後餘式，而為左右二式的 H. C. F.

[注意] a. 式中遇有單項因子時，須先把它除去，後再用假分相除法求 H. C. F. 假使除去後個單項因子中有公因子時，這公因子須乘入用假分相除法求得的 H. C. F. 中。

b. 若一式含有某因子，而其他式則否，可先將這某因子消去，無論在計算中的那一步都沒有關係。

c. 假使在計算中有分數起見，可把一式中所有的因子，乘其他一式，或計算中的餘式。

[例二] 求 $2x^4 + x^3 - x^2 - 2x$ 和 $6x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x$ 的 H. C. F.

[解法] 先除去前式的單項因子 x ，後式的單項因子 $2x$ 。並將這些單項因子的 H. C. F. x ，予以保留。

$$2x^4 + x^3 - x^2 - 2x = x(2x^3 + x^2 - x - 2)$$

$$6x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x = 2x(3x^3 - 2x^2 + x - 2)$$

次求 $2x^3 + x^2 - x - 2$ 和 $3x^3 - 2x^2 + x - 2$ 的 H. C. F. 爲避免計算時有分數起見，將後式乘 2 再用假分相除法求他們的 H. C. F.

	$2x^3 + x^2 - x - 2$	$6x^3 - 4x^2 + 2x - 4$	3
	7	$6x^3 + 8x^2 - 8x - 6$	
-2x	$14x^3 + 7x^2 - 7x - 14$	$-7x^2 + 5x + 2$	
	$14x^3 - 16x^2 - 4x$	17	
17x	$17x^2 - 3x - 14$	$-119x^2 + 85x + 34$	-7
	$17x^2 - 17x$	$-119x^2 + 21x + 98$	
14	$14x - 14$	$64)64x - 64$	
	$14x - 14$	$x - 1$	
	0		

H. C. F. 是 $x-1$ 乘前所保留的單項因子的 H. C. F.
 $x = x(x-1)$ 。

【說明】左式除右式後，將因子 7 乘左式，這是因為第一餘式 $-7x^2+5x+2$ 不能整除 $2x^3+x^2-x-2$ 的緣故。第一餘式乘因子 17，也是爲了同樣的理由。最後消去 64，是因爲原式中沒有這單項因子，消去牠可使計算便利而和所求的 H. C. F. 沒有關係。

求三個不易分解因子的代數式的 H. C. F. 時，先求兩式的 H. C. F.，再用這 H. C. F. 與第三式求。求四式的 H. C. F. 時，更用上邊第二次求得的 H. C. F. 與第四式求。五式，六式以上，可照此類推。

習 題 八 十

求下列各式的 H. C. F.

- $15a^2bx^2y^2, -45b^2y^3, -18ca^4b^4c^2y^3$ 。
- $98c^2b^3c^4, 18ca^3b^2c^4, -30c^4b^3c^2$ 。
- $3(a+b)^3, 4(a+b)^2, 3(a+b)^2(a-b)$ 。
- $3(x+2)(x+1), 12(x+1)(x+3), 6(x+1)^2(x-5)^2$ 。
- $x^2+3x+2, x^2+3x+4, x^3+2x^2+8x+4$ 。
- $a+b, a^3+b^3, a^4-b^4$ 。
- $ax+ay-bx-by, a^4-b^4$ 。
- $m^2-n^2, m^2+mn, n^2n+mn^2$ 。
- $4x^3+12x^2y+8xy^2, 18xy^2+24y^3$ 。
- $x^2-3x-4, x^2-8x+15, x^2-16x$ 。
- $a^2+2a-3, a^2+7a+12, a^4+27a$ 。
- $x^3+4ab+8b^2, c^2+2ab-3b^2, a^2+8a^3+12b^2$ 。
- $x^2-4xy+4y^2, x^3-8y^3, x^4-16y^4$ 。

14. $x^3 - 2x^2y - 3xy^2 + 6y^3, 2x^2 - 5xy + 2y^2$ 。

15. $a-b$ 與 $-a+b$ 有沒有公因子? $a-b$ 是不是這兩式的公因子?
 $-a+b$ 呢? 然則 $(a-b)(-a+b)$ 是不是這兩式的 H. C. F.? 何故?

16. $2x^4y^2 + 7x^2y^3 - 5x^2y^4, 2x^2y^3 + 11x^2y^4 + 5xy^5$ 。

17. $x^3 + 2x^2 - x - 2, x^2 + x - 2, x^2 - 3x + 2$ 。

18. $8a^3 - 1, 8a^2 + 4a + 2, 16a^4 + 4a^2 + 1$ 。

19. $c^3 - a, a^2 - 7a^2 + 6, a^2 - 3a^3 + 5a^2 + 3a - 6$ 。

20. $5x^3 + a - 2, 4a^3 + 4a^2 - a - 1$ 。

21. $x^3 + 2x^2 - 13x + 10, x^3 + x^2 - 10x + 8$ 。

22. $24x^4 - 5x^3 - 67x^2 - 32x, 18x^4 - 6x^3 - 33x^2 - 18x$ 。

23. $1 + x + x^3 - x^5, 1 - x^2 - x^3 + x^7$ 。

24. $3x^5 - 13x^2 + 23x - 21, 6x^5 + x^2 - 44x + 21$ 。

§ 33. 怎樣求 L. C. M.? (1) 倍式? 若乙式是甲式的因子，則甲式叫做乙式的倍式。例如， $x-y$ 是 x^2-y^2 的因子，故

x^2-y^2 是 $x-y$ 的倍式；又 $x+y$ 也是 x^2-y^2 的因子，故 x^2-y^2 也是 $x+y$ 的倍式。

(2) 公倍式。若乙，丙，丁諸式都是甲式的因子，則甲式叫做乙，丙，丁諸式的公倍式。例如， $x+y, x-y$ 皆是 x^2-y^2 的因子，故 x^2-y^2 是 $x-y$ 及 $x+y$ 的公倍式；又如 $x+y, x-y$ 也都是 x^4-y^4 的因子，故 x^4-y^4 也是 $x+y$ 及 $x-y$ 的公倍式。

(3) 最低公倍式。若乙，丙，丁諸式中，公倍式不止一個，

其中，數字係數最小，文字次數最低的公倍式叫做最低公倍式，簡寫為 L. C. M.

例如， $x^2 - y^2$ ， $x^4 - y^4$ ， $x^6 - y^6$ ， $2x^2 - 3y^2$ ， $(x^2 - y^2)(x + y)$ ，等都是 $x + y$ 與 $x - y$ 的公倍式。其中數字係數最小，文字次數最低的是 $x^2 - y^2$ 。故 $x^2 - y^2$ 是 $x + y$ 與 $x - y$ 的 L. C. M.

(4) 怎樣求最低公倍式？ 例如有 A, B, C 三式，可分成因子如下：

$$A = a^2 b^3 c^4 m x, \quad B = a^3 b^2 c^3 n y^2, \quad C = a b c^5 p z^3$$

因所求的 L. C. M. 同時須為 A, B, C 的倍式，故必含有此三式中的相異因子。至於相同因子，則 L. C. M. 必含有各式中同文字所能除盡該文字的最低次數。故所求的最低公倍式是

$$\text{L. C. M.} = a^3 b^3 c^5 m n p x y^2 z^3.$$

由是得 L. C. M. 的求法如下：

第一步。 先把所給各式一一分為質因子（務須分為質因式）。

第二步。 把各式中所有相異的質因子並二式以上公有的質因子一一連乘，（公因子的指數應取最高的）就得所求的 L. C. M.

[例一] 求 $x^2 - 2x, x^3 - 2x^2, x^4 - 4x^2$ 的 L. C. M.

[解法] $x^2 - 2x = x(x - 2)$

$$x^3 - 2x^2 = x^2(x-2),$$

$$x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x+2)(x-2)$$

$$\therefore \text{L. C. M.} = x^2(x-2)(x+2).$$

【例二】求 $x^3 - xy^2 + 2x^2y - 2y^3$, $x^4 - y^4$,

$x^3 - xy^2 + 3x^2y - 3y^3$ 的 L. C. M.

【解法】 $x^3 - xy^2 + 2x^2y - 2y^3$

$$= (x+2y)(x+y)(x-y)$$

$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x+y)(x-y)$$

$$x^3 - xy^2 + 3x^2y - 3y^3 = (x+3y)(x+y)(x-y)$$

$$\text{L. C. M.} = (x+2y)(x^2+y^2)(x+3y)(x+y)(x-y).$$

單項式的 L. C. M. 固然可以用上述的觀察方法求得。但遇到不能用觀察方法求得 L. C. M. 的代數式，我們不能不用另一種方法。這種方法是利用 L. C. M. 與 H. C. F. 的關係而成立的。

假定 A 與 B 的 H. C. F. 是 F ； a 與 b 是 A 與 B 被 F 除後的商； X 是兩式的 L. C. M.，

$$A = aF, \quad B = bF,$$

$$X = abF \text{ (參看本節最低公倍式的定義).}$$

$$AB = aF \cdot bF$$

$$= F \cdot abF$$

$$=FX,$$

$$\text{或 } X = \frac{AB}{F} = \frac{A}{F'} \times B = \frac{B}{F''} \times A.$$

由此可以知道求兩式的 L. C. M. 的算法，祇要將 H. C. F. 除兩式的積；或者拿 H. C. F. 除任何一式，再以其商乘他一式。

【例二】求 $2x^4 + x^3 - 20x^2 - 7x + 24$ 與 $2x^4 +$

$8x^3 - 13x^2 - 7x + 15$ 的 L. C. M.

兩式的 H. C. F. 是 $x^2 + 2x - 3$

以此數除兩式，得：

$$2x^4 + x^3 - 20x^2 - 7x + 24 = (x^2 + 2x - 3)(2x^2 - 3x - 8)$$

$$2x^4 + 8x^3 - 13x^2 - 7x + 15 = (x^2 + 2x - 3)(2x^2 - x - 5)$$

所以 L. C. M. 是 $(x^2 + 2x - 3)(2x^2 - 3x - 8)(2x^2 - x - 5)$ 。

求三個代數式的 L. C. M. 時，先求兩式的 L. C. M.，再用這 L. C. M. 與第三式求。求四個代數式的 L. C. M. 時，更用上述第二次求得的 L. C. M. 與第四式求。五式，六式以上，也可照此類推。

習題八十一

1. 求 $x^3 + x^2 + 4x + 4$, $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$, $x^3 + 2x^2 + 2x$ 的 L. C. M.

$$\text{【解法】 } x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x+1)(x^2+4)$$

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (x+1)(x^2+2x+2)$$

$$x^3 + 2x^2 + 2x = x(x^2 + 2x + 2)$$

$$\therefore \text{L. C. M.} = x(x+1)(x^2+2x+2)(x^2+4)$$

上面解法有沒有錯誤？何故？

2. 求習題八十(1—10)諸題中各式的 L. C. M.

3. 求下列各組多項式的 L. C. M.

(a) $x^2 - y^2, x^3 - y^3$.

(b) $x^2 + y^2, x^2 - xy + y^2, x + y$.

(c) $2x - y, 4x + 2y, 4x^2 - y^2$.

(d) $1 - a, a - 1, a^2 - 1, a^3 - 1, a^4 - 1$.

(e) $(a-b)(b-c), (b-c)(c-a), (c-a)(b-a)$.

(f) $(a+b)^2 - c^2, a^2 - (b+c)^2$.

4. 求 $4x^3 - 11x^2 + 4x + 2$ 和 $3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$ 的 L. C. M.

§ 21. 分式符號的變化 依除法符號定則，可知

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{-A}{B} = -\frac{A}{-B}$$

所以“在任何分式中，若把分子，分母的符號同時改變，則分式的符號不變；若只變分子，分母二者符號之一，則分式的符號均為改變”。

例如，

$$(1) \frac{m}{x-y} = \frac{-m}{y-x} = -\frac{m}{y-x} = -\frac{-m}{x-y}$$

$$(2) \frac{m}{(x-y)^2} = \frac{-m}{-(y-x)^2} = -\frac{m}{-(y-x)^2} = -\frac{-m}{(y-x)^2}$$

$$(3) \frac{m}{(x-y)^3} = \frac{-m}{(y-x)^3} = -\frac{m}{(y-x)^3} = -\frac{-m}{(x-y)^3} \circ$$

$$(4) \frac{m}{(x-y)^4} = \frac{-m}{-(y-x)^4} = -\frac{m}{-(y-x)^4} = -\frac{-m}{(y-x)^4} \circ$$

學者注意 $x-y$ 與 $y-x$ 符號的關係； $(x-y)^2$ 與 $(y-x)^2$ 符號的關係； $(x-y)^3$ 與 $(y-x)^3$ 符號的關係； $(x-y)^4$ 與 $(y-x)^4$ 符號的關係。

習 題 八 十 二

下列各等式中，變號(±)處該用何號？

$$1. \frac{p}{x-y} = \frac{\pm p}{(y-x)} = \frac{\pm p}{-(y-x)} = -\frac{\pm p}{(y-x)} = \frac{p}{\pm(y-x)} \circ$$

$$2. \frac{p}{x-y} = \frac{\pm p}{(y-x)} = \frac{\pm p}{-(y-x)} = -\frac{\pm p}{(y-x)} = \frac{p}{\pm(y-x)} \circ$$

$$3. \frac{a+b}{x-y} = \frac{-a\pm b}{x-y} = \frac{\pm a\pm b}{y-x} = \frac{-a-b}{\pm x\pm y} \circ$$

$$4. \frac{a-b}{x-y} = \frac{-a\pm b}{x-y} = \frac{\pm a\pm b}{y-x} = \frac{-a+b}{\pm x\pm y} \circ$$

$$5. \frac{a-b}{(x-y)^2} = \frac{-a\pm b}{(y-x)^2} = \frac{\pm a\pm b}{(y-x)^2} = \frac{-a\pm b}{\pm(y-x)^2} \circ$$

§ 95. 分數變化的原理 分數的種種變化，都以一條原理為根據，學者於此務須確切認明。這條原理，就是“分數的分子分母，同以不等於0的某數乘之（或除之），分數的數值不變。”用算式來表，就是：

$$\frac{m.A}{m.B} = \frac{A}{B}, \quad (1)$$

及

$$\frac{A}{B} = \frac{m.A}{m.B}. \quad (2)$$

證之如下：

依 § 91(1), 知 $\frac{A}{B} = A \div B$ 。

依算術除法定理“除數，被除數，同時增加若干倍，所得之商不變”。

故得 $m.A \div m.B = A \div B$ 。

敬成分數記法，就得 $\frac{m.A}{m.B} = \frac{A}{B}$ 。

上面是證明(1)式的。(1)式既能成立，那麼，(2)自無問題。

因為在(1)式中，由右向左看，就是(2)式。

§ 93. 約分 依上節 (1)式，可見“在任何分式中，若分母，分子有相同因子，可把這相同因子對消，而不變分式的值。”

例如，

$$(1) \frac{16m^2x^2y^3}{8mxy^2z^3} = \frac{8mxy^2 \times 2mxy}{8mxy^2 \times z^3} = \frac{2mxy}{z^3}.$$

$$(2) \frac{6x^2 - 13x + 6}{9x^2 - 4} = \frac{(3x-2)(2x-3)}{(3x-2)(3x+2)} = \frac{2x-3}{3x+2}.$$

從分子，分母中消去相同因子，從分子，分母的次數減低，保

數減小，此手續叫做約分。約分的步驟如下：

第一步。先求分子，分母的 H. C. F. 把原分式 $\frac{A}{B}$ 寫成

$$\frac{\text{H.C.F.} \times A'}{\text{H.C.F.} \times B'}$$

第二步。直接由 $\frac{\text{H.C.F.} \times A'}{\text{H.C.F.} \times B'}$ 消去 H. C. F. 得 $\frac{A'}{B'}$ 。這種

經過約分後的分式，叫做最簡分式。

習題八十三

將 $\frac{x^3 - 4xy^2 + 2y^3 - 4y^3}{2y^2 + xy - x^2}$ 成最簡分式。

$$\text{【解法】} \frac{x^3 - 4xy^2 + 2y^3 - 4y^3}{2y^2 + xy - x^2} = \frac{(x+y)(x^2 - 4y^2)}{(y+x)(2y-x)} = \frac{x^2 - 4y^2}{2y - x}$$

這解法有沒有錯誤？何故？

2. 約下列各式成最簡分式：

$$\frac{(x-y) + (x-y)^2}{(x-y)(x+y)}, \frac{x+b}{a^2+b^2}, \frac{x+3}{4x^2}$$

$$\text{【解法】} (a) \frac{(x-y) + (x-y)^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{(x-y)^2}{x+y}$$

$$(b) \frac{x+b}{a^2+b^2} = \frac{1+1}{a+b} = \frac{2}{a+b}$$

$$(c) \frac{x+3}{4x^2} = \frac{3}{4x^2}$$

上述解法對不對？何故？

【注意】 1, 2 兩題解法的錯誤，也是同學常犯的，最易之處，在於(1)不

知所消的公因子須爲最高，然後分式才是最簡；(2) 知所消去的，須爲分子、分母全式的相同因子，非分子、分母中特殊項的相同因子。讀者於此，務宜留心。

把下列各分式約成最簡分式：

3. $\frac{x^2 - y^2}{(y-x)^2}$

4. $\frac{x-y^2}{y^2-x}$

5. $\frac{x^2 - y^2}{y^2 - x^2}$

6. $\frac{y-x}{x^2 - y^2}$

7. $\frac{x^3 - 1}{1 - x^2}$

8. $\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}$

9. $\frac{x^2 + y^2}{x^4 - y^4}$

10. $\frac{y^2 - x^2}{x^5 - y^5}$

11. $\frac{x^5 - y^5}{y^4 - x^4}$

12. $\frac{x^3 + y^3}{x^5 + y^5}$

[註] 第 10, 12 兩題中分子分母的 H. C. F. 可仿 § 92 例三求之

13. $\frac{x^2 - 7x + 6}{x^4 - 29x^2 + 100}$

14. $\frac{x^2 + 6x + 6}{(x^2 - 4)(x^2 - 9)}$

15. $\frac{a^2 - 6b^2}{12b^2 - ab - a^2}$

16. $\frac{a^2 + ab - 6b^2}{8b^2 - 2ab - a^2}$

17. $\frac{(x-y)^2 - x^2}{(y+z)^2 - x^2}$

18. $\frac{x^2 + xy + y^2}{x^4 + x^2y^2 + y^4}$

19. $\frac{(a-b)^3 + (b-a)}{(b-a)^4 + (a-b)}$

20. $\frac{(a-b)^3 + (b-a)}{(b-a)^3 + (a-b)}$

§ 97. 通分 把 A, B, C 諸分式各用同數乘之，化成新分式 A', B', C' ，使(1) $A' = A, B' = B, C' = C$ ，並使(2) A', B', C' 諸式的分母皆爲 A, B, C 的三個分母的最低公倍數，這手續叫做通分。

[例一] 把 $\frac{a}{b^2}$, $\frac{1}{ab}$, $\frac{1}{a^2}$ 通分。

[解法] 先求 b^2 , ab , a^2 的 L. C. M. 即 a^2b^2 , 作為新分式的公分母。

次察, $\frac{a}{b^2}$ 的分母乘以何數, 才得 a^2b^2 ? 不是乘以 a^2 嗎? 分母既乘以 a^2 , 則分子不是也要乘以 a^2 嗎? 故知所求分式之一是

$$\frac{a \times a^2}{b^2 \times a^2} = \frac{a^3}{a^2b^2}$$

同理, 其他二分式應是

$$\frac{1 \times ab}{cb \times ab} = \frac{ab}{a^2b^2}$$

及

$$\frac{1 \times b^2}{a^2 \times b^2} = \frac{b^2}{a^2b^2}$$

[例二] 把 $\frac{1}{x+y}$, $\frac{2}{x-y}$, $\frac{3}{x^2-y^2}$ 通分。

[解法] 仿例一, 知所求諸式的分母是 $x+y$, $x-y$, x^2-y^2 的 L. C. M. 即是 x^2-y^2 。故所求分式是

$$\frac{1 \times (x-y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{x-y}{x^2-y^2}$$

$$\frac{2(x+y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{2x+2y}{x^2-y^2}$$

$$\frac{3}{x^2-y^2} = \frac{3}{x^2-y^2}$$

由上面兩例看來，可得通分的步驟如下：

第一步。先由所給諸式 A, B, C 中，求出諸分母的 L. C. M.

第二步。次以 A, B, C 諸式的分母，依次除這 L. C. M.，得整商 a, b, c 。

第三步。乃以 a 乘 A 的分子分母；以 b 乘 B 的分子分母；以 c 乘 C 的分子分母，就得所求的分式。

[注意] 第三步所得的分數不可再行約分。

習題八十四

1. 把 $\frac{1}{x^2-y^2}, \frac{1}{y^2-xy}, \frac{1}{x^2+xy}$ 通分

[解法] 因 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x^2-y^2} = \frac{1}{(x+y)(x-y)}; \\ \frac{1}{y^2-xy} = \frac{1}{y(y-x)}; \\ \frac{1}{x^2+xy} = \frac{1}{x(x+y)}. \end{array} \right.$

故諸分母的 L. C. M. 是 $(x+y)(x-y)(y-x)xy$ 。於是所求的分式是

$$\frac{1}{x^2-y^2} = \frac{(y-x)xy}{(x+y)(x-y)(y-x)xy};$$

$$\frac{1}{y^2-xy} = \frac{(x+y)(x-y)x}{(x+y)(x-y)(y-x)xy};$$

$$\frac{1}{x^2+xy} = \frac{(x-y)(y-x)y}{(x+y)(x-y)(y-x)xy}.$$

解法對不對？何故？

把下列各題諸分式通分：

$$2. \frac{1}{a+b}, \frac{1}{a-b}, \frac{1}{b^2-c^2}$$

$$3. \frac{2cy^3}{ca^2b^3ca^2}, \frac{5cx^2y^3}{2ca^2b^2ca^3}, \frac{2a^2b^2ca^2}{3abcd^2}$$

$$4. \frac{x-y}{x+y}, \frac{x+y}{x-y}, \frac{x^2+y^2}{x+y}, \frac{x+y}{x^2+y^2}, \frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

$$5. \frac{3}{x^2-ax}, \frac{5}{x^3-a^2x}, \frac{7}{x^3-ax^2}$$

$$6. \frac{a-b}{a^2+2ab+b^2}, \frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}, \frac{a^2-1}{a^2-1}$$

$$7. \frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$$

$$8. \frac{1}{x^2-y^2}, \frac{1}{x^2-y^3}, \frac{1}{x^2-y^4}$$

$$9. \frac{1}{x^2-xy+y^2}, \frac{1}{x^2+xy+y^2}, \frac{1}{x^2+x^2y^2+y^2}$$

$$10. \frac{1}{a-b}, \frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-b}, \frac{1}{a-b}$$

$$11. \frac{m^2-9n^2}{m^2-9n^2}, \frac{m^2+9n^2}{m^2-9n^2}, \frac{m^2+9n^2}{m^2-27n^3}$$

$$12. \frac{1}{(x-y)(y-z)}, \frac{1}{(x-z)(z-y)}, \frac{1}{(x-x)(y-z)}$$

$$13. x^2-xy+y^2, \frac{x^2-y^2}{x-y}, x^2+xy+y^2$$

§ 93. 分式加減法 這問題可分兩類如下：

【第一類】 分母相同的。在除法有

$$\frac{A+B-C}{D} = \frac{A}{D} + \frac{B}{D} - \frac{C}{D}, \text{ 故在分式有}$$

$$\frac{A}{D} + \frac{B}{D} - \frac{C}{D} = \frac{A+B-C}{D}.$$

所以“同分母諸分式的加減法，就是把諸分子依其原有的符號相加減，以其結果作為所求分式的分子，而以原有同分母作為所求分式的分母”。

$$\begin{aligned} \text{例如, } \frac{m}{x} + \frac{3m}{x} + \frac{p}{x} - \frac{q}{x} & \\ &= \frac{m+3m+p-q}{x} = \frac{4m+p-q}{x}. \end{aligned}$$

$$\text{又如, } \frac{x^2}{x-y} - \frac{y^2}{x-y} = \frac{x^2-y^2}{x-y} = x+y.$$

$$\begin{aligned} \text{又如, } \frac{x^2}{x^2-y^2} - \frac{y^2}{x^2-y^2} &= \frac{x^2-y^2}{x^2-y^2} \\ &= \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)} = \frac{x^2+xy+y^2}{x+y}. \end{aligned}$$

【第二類】分母不盡相同的。當所欲加減諸分式的分母不盡相同時，可用通分法使其分母相同，再仿第一類加減之。

$$\text{【例一】 } \frac{x}{y} - \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = ?$$

$$\text{【解法】 } \frac{x}{y} - \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{x^2z}{xyz} - \frac{xy^2}{xyz} + \frac{y^2z}{xyz}$$

$$= \frac{x^2z - xy^2 + yz^2}{xyz}.$$

$$[\text{例二}] \quad \frac{x+2y}{x^2-xy} + \frac{2x+y}{x^2-3xy+2y^2} - \frac{x-3y}{x^2-2xy} = ?$$

$$\text{解法]} \quad \because \begin{cases} x^2 - xy = x(x-y); \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = (x-y)(x-2y); \\ x^2 - 2xy = x(x-2y). \end{cases}$$

故通分後所得的分母該是 $x(x-y)(x-2y)$ 。於是

$$\begin{aligned} & \frac{x+2y}{x^2-xy} + \frac{2x+y}{x^2-3xy+2y^2} - \frac{x-3y}{x^2-2xy} \\ &= \frac{(x+2y)(x-2y) + x(2x+y) - (x-3y)(x-y)}{x(x-y)(x-2y)} \\ &= \frac{x^2 - 4y^2 + 2x^2 + xy - x^2 + 4xy - 3y^2}{x(x-y)(x-2y)} \\ &= \frac{2x^2 + 5xy - 7y^2}{x(x-y)(x-2y)} = \frac{(2x+7y)(x-y)}{x(x-y)(x-2y)} \\ &= \frac{2x+7y}{x(x-2y)} = \frac{2x+7y}{x^2-2xy}. \end{aligned}$$

[注意] 由任何演算所得的分式，如其分子、分母有相同因子時，總要約成最簡分式。

習題八十五

求下列各式的結果：

1. $\frac{2x}{x+y} + \frac{-3y}{x-y}$

2. $\frac{c^3}{c^2-y^2} - \frac{y^3}{x^2-y^2}$

3. $\frac{a^2}{c^2+l^2} - \frac{b^2}{a^2+b^2}$

4. $\frac{c^2}{c^2-l^2} - \frac{b^2}{c^2-l^2}$

5. $\frac{a^2-3b}{a^2+3ab+3b^2} - \frac{b^2-3b}{a^2+3ab+3b^2}$

6. $\frac{x-z}{x+y} + \frac{x-y}{x+y} - \frac{y-z}{x+y}$

7. $\frac{3}{x} + \frac{4}{y^2} - \frac{5}{xy}$

8. $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

9. $\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy}$

10. $\frac{n}{m^2} + \frac{m}{n^2} + \frac{1}{n^2}$

11. $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}$

12. $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x+y}{x^2-y^2}$

13. $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a^2-b^2}$

14. $\frac{a-b}{(a+b)^2} + \frac{a+b}{(a-b)^2}$

15. $\frac{x+y}{x^2-y^2} + \frac{x-y}{x^2-y^2}$

16. $\frac{a^2+1}{a^2-4} - \frac{a^2-1}{c^2+\frac{1}{4}}$

17. $\frac{x^2+xy+y^2}{x-y} + \frac{x^2-xy+y^2}{x+y}$

18. $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2} - \frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$

19. $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2} + \frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$

20. $\frac{m^2+mn+n^2}{m^3-n^3} - \frac{m^2-mn+n^2}{m^2+n^2}$

21. $a-1 + \frac{2}{a-1}$

22. $a+b - \frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{4-b}$

[注意] 任何整式，可當做分母是1的分式。

$$23. \frac{1}{x^2-3xy+2y^2} + \frac{1}{x^2-4xy+3y^2} + \frac{1}{x^2-5xy+6y^2}$$

$$24. \frac{x^3+x^2y}{x^2-y^2} - \frac{x(x-y)}{xy+x^2} - \frac{2xy}{x^2-y^2}$$

$$25. \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2} - \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2} - \frac{8ab^3}{(a^2-b^2)^2}$$

$$26. \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}$$

$$27. \frac{x}{y^2-yz} + \frac{y}{z^2-zx} + \frac{z}{x^2-xy}$$

$$28. \frac{x+a}{x^2-(b+c)x+bc} + \frac{x+b}{x^2-(c+a)x+ca} + \frac{x+c}{x^2-(a+b)x+ab}$$

$$29. \frac{1}{a^2-(b-c)^2} - \frac{1}{b^2-(c-a)^2} - \frac{1}{c^2-(a-b)^2}$$

$$30. \frac{a^2-bc}{(a+b)(c+a)} + \frac{b^2-ca}{(b+c)(a+b)} + \frac{c^2-ab}{(c+a)(b+c)}$$

§ 90. 加減演算中分母應力求其簡 前節所述加減法，乃式中一切加減問題的基本算法，倘能應用純熟，對於任何分式加減問題，自可求得其結果。但在若干加減問題中，苟非用這些技巧，那就笨拙不堪了。今舉兩例於下：

$$[\text{例一}] \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y^2-x^2} = ?$$

[解法] 因 $y^2-x^2=(y-x)(y+x)$ 其中 $y-x$ 與第二分式的分母 $x-y$ 只有符號不同，故通分之後所得的分母應為 $x(y-x)(y+x)$ ，而不必用 $x(x-y)(y-x)(y+x)$ 。所以把第二分式分

母的符號變換，得

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y^2-x^2} &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y-x} + \frac{1}{(y-x)(y+x)} \\ &= \frac{(y-x)(y+x) + x(y+x) + x}{x(y-x)(y+x)} \\ &= \frac{y^2 + xy + x}{x(y-x)(y+x)} \end{aligned}$$

$$[\text{例二}] \quad \frac{x}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(c-b)(a-c)} + \frac{1}{(c-a)(b-a)} = ?$$

【解法】因 $c-b = -(b-c)$, $a-c = -(c-a)$, $b-a = -(a-b)$, 故在第二分式中

$$(c-b)(a-c) = (b-c)(c-a),$$

而在第三分式中

$$(c-a)(b-a) = -(c-a)(a-b).$$

於是原分式的和可寫成

$$\begin{aligned} & \frac{x}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} - \frac{1}{(c-a)(a-b)} \\ &= \frac{(c-a) + (a-b) - (b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{2(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{-2}{(a-b)(c-a)}. \end{aligned}$$

【注意】諸分母的 L. C. M. 是 $(a-b)(b-c)(c-b)(c-a)(c-a)(b-a)$.

習 題 八 十 六

求下列各式的簡化結果：

$$1. \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-a} + \frac{1}{a^2-b^2}$$

$$2. \frac{1}{x-4y} + \frac{1}{x+4y} - \frac{1}{16y^2-x^2}$$

$$3. \frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2-5x+4} - \frac{1}{4-5x+x^2}$$

$$4. \frac{1}{(a-b)(a+b)} + \frac{2}{(b-a)(a+b)} + \frac{3}{b^2-a^2}$$

$$5. \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-3)(2-x)} + \frac{1}{(2-x)(3-x)}$$

$$6. \frac{m}{(a-b)(b-a)} + \frac{n}{(c-a)(b-a)} + \frac{1}{(b-a)(a-c)}$$

$$7. \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-c)(b-a)} + \frac{1}{c(a-a)(c-b)}$$

$$8. a^2+a+1 + \frac{a^3}{1-a} - \frac{3}{a-1} - (a-1)$$

§ 103. 分式乘法 兩分式相乘，就是把兩式的分子相乘，作為積的分子；兩式的分母相乘，作為積的分母。用算式來表，就

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

理由何在？證之如下：

[證] 設以 x 代 $\frac{A}{B}$ ，以 y 代 $\frac{C}{D}$ ，則說

“商 \times 除式=被除式”之理，應得

$$Bx = A, \quad (1)$$

$$Dy = C. \quad (2)$$

把(1),(2)相乘得 $BDxy = AC$

兩邊同除以 BD ，得 $xy = \frac{AC}{BD}$

就是 $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$ 。

[例一] $\frac{2a}{5b} \times \frac{3c^2}{4a^3} \times \frac{5bc}{6abc^2} = ?$

[解法] 原式 = $\frac{2a \times 3c^2 \times 5bc}{5b \times 4a^3 \times 6abc^2} = \frac{5c}{12a^2b}$ 。

[例二] 化簡下式：

$$\left(x^2 + xy + y^2 + \frac{2y^3}{x-y}\right) \left(\frac{-2y^3}{x^3+y^3} + 1\right) \times \frac{1}{x-y}。$$

[解法] 原式 = $\frac{x^3 - y^3 + 2y^3}{x-y} \cdot \frac{x^3 + y^3 - 2y^3}{x^3 + y^3} \cdot \frac{1}{x-y}$
 $= \frac{x^3 + y^3}{x-y} \cdot \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{x^3 + y^3} \cdot \frac{1}{x-y}$
 $= \frac{x^2 + xy + y^2}{x-y}。$

習題八十七

求下列各式的結果：

1. $\frac{x^2y^2}{x^3z^3} \times \frac{yz^3}{xy^3}$

2. $\frac{mp}{nq} \times \frac{nq}{np}$

3. $\frac{ab}{cx} \times \frac{xy}{by}$

4. $\frac{mn}{mx} \times \frac{yz}{ny} \times \frac{x}{pz}$

5. $\frac{(2m)^3}{n} \times \frac{(3n)^2}{p} \times \frac{(4p)^3}{m}$

6. $\frac{(-a)^2}{c^3} \times \frac{(-b)^2}{a^3} \times \frac{(-c)^2}{b^3}$

7. $\frac{(3a)^3}{(4a)^4} \times \frac{(8b)^2}{(2a)^3} \times \frac{(4c)^3}{(5b)^3}$

8. $\frac{a^2m}{b^3p} \times \frac{b^2n}{c^2m} \times \frac{c^2p}{a^2n}$

9. $\frac{x+y}{x-y} \times \frac{x^2-y^2}{x^3+y^3}$

10. $\frac{2x^2-32}{2x-6} \times \frac{3x+6}{6x^2+24}$

11. $\frac{x-5}{x+3} \times \frac{9-a^2}{2b-x^2}$

12. $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} \times \frac{a^2+b^2}{a^3+b^3}$

13. $\frac{2a^2-a-1}{2b^2+5a+2} \times \frac{4a^2+a-14}{16a^3-49}$

14. $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right)$

15. $\left(2 + \frac{x^2+y^2}{xy}\right) \left(\frac{xy^2-xy^2}{x^2-y^2} + x-y\right)$

16. $\left(1 + \frac{4}{a^2}\right) \times \frac{a^4}{a^2-2a+3}$

17. $\frac{a^2+b^2}{a-b^2} \times \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \times \frac{a+b}{a-b} \times \frac{a^2-a^2}{b^2+a^2}$

18. $\frac{y^2-y-2}{y^2+2y+15} \times \frac{y^2-y-12}{y^2+y-42} \times \frac{y^2-y-20}{y^2-7y-8} \times \frac{y^2-y-56}{y^2-6y+8}$

§ 101. 分式除法: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = ?$ 這問題可從分式乘法去解

法:

因為在乘法, 已知 $\left(\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}\right) \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$,

依左除法，應有 $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$

也就是 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ 。

所以“兩分式相除，就是把除式（非整式）的分子，反為上下倒轉，以爲被除式相乘”。

$$[\text{例一}] \quad \frac{1}{x} \div \frac{1}{y} = \frac{1}{x} \times \frac{y}{1} = \frac{y}{x}。$$

$$[\text{例二}] \quad \frac{a+b}{a-b} \div \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$$

$$= \frac{a+b}{a-b} \times \frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$$

$$= \frac{a+b}{a-b} \times \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2} = 1。$$

$$[\text{例三}] \quad \left(1 + \frac{y}{x}\right) \div \left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)$$

$$= \frac{x+y}{x} \div \frac{x^2+y^2}{y^2} = \frac{x+y}{x} \times \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{y^2}{x(x^2+xy+y^2)} = \frac{y^2}{x^3-x^2y+xy^2}。$$

習題八十八

解下列各分式：

1. $\frac{4m^2y^3}{7ab} \div \frac{8m^2y^3}{14ab^2}$

2. $\frac{25r^2b^2}{9mn} \div \frac{27mn}{5ab}$

3. $20x^2 \div \frac{x^2}{y^3}$

4. $\frac{2^2z^3}{y^2} \div z^3$

5. $\frac{abc}{xy} \div \frac{bcd}{yz}$

6. $\frac{a^2+ab}{a^2-ab} \div \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

7. $\frac{x^2+y^2}{x-y} \div \frac{x+y}{x^2-y^2}$

8. $\frac{x^2+y^2}{x-y} \div \frac{x^2-y^2}{x+y}$

9. $\frac{a^2-14a-15}{a^2+4a-5} \div \frac{2a^2-5a-7}{2a^2-3a+14}$

10. $\frac{(a-b)^2-c^2}{(a+b)^2-c^2} \div \frac{a^2-(b-c)^2}{a^2-(b+c)^2}$

11. $\frac{2a^2-5a-12}{5a^2+6a-5} \div \frac{3a^2-7a-4}{6a^2+6a-4} \div \frac{4a^2+4a-3}{6a^2-a-2}$

12. $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y} \div \frac{x^2+x^2y+xy^2}{x-y} \div \frac{x^2-xy}{x^2+xy}$

13. $\frac{x^2+y^2-2+2xy}{z^2-x^2-y^2+2xy} \div \frac{z+y+x}{z+y-x}$

14. $\frac{x^3+y^3+3xy(x+y)}{x^3-y^3-3xy(x-y)} \div \frac{x(x+2y)+y^2}{x(x-2y)+y^2}$

15. $\frac{a^2-2a+1}{a-5} \times \frac{a^2+a-2}{a^2-2a+1} \div \frac{a^2+8a}{a^2+4a^2-5a}$

132. 疊分式的化簡 在分式 $\frac{A}{B}$ 中，如 A, B 二者之一

是分式，或都是分式，那麼這分式 $\frac{A}{B}$ 就叫做疊分式。化簡疊分式，

實際就是演分式除法。所以疊分式的化簡可依下法去做：

【第一法】 先把疊分式的分子，分母，各依分式加減法改或

最簡分式。再按(上節)分式除法去化簡。

$$\text{例如, } \frac{\frac{x+y}{y+z} \cdot \frac{x^2+y^2}{xy}}{\frac{z+y}{z-y} \cdot \frac{y^2+z^2}{yz}} = \frac{x^2+y^2}{xy} \times \frac{yz}{y^2+z^2} = \frac{(x^2+y^2)z}{(y^2+z^2)x}$$

但最簡不加下法爲簡:

[第二法] 先在原分式的分子分母中, 求出所有整分式的最小公分母(即諸分母的 L. C. M.), 以這最小公分母通乘各分式的分子分母, 然後再去化簡。

$$\text{例如, } \frac{\frac{x+y}{y+z}}{\frac{z+y}{z-y}} = \frac{xyz \left(\frac{x+y}{y+z} \right)}{xyz \left(\frac{z+y}{z-y} \right)} = \frac{x^2z + y^2z}{xy^2 + xz^2} = \frac{(x^2+y^2)z}{(y^2+z^2)x}$$

$$\text{又如, } \frac{\frac{x+y+z}{y+z+x}}{\frac{x-y+z}{y-z+x}} = \frac{xyz \left(\frac{x+y+z}{y+z+x} \right)}{xyz \left(\frac{x-y+z}{y-z+x} \right)} = \frac{x^2z + xy^2 + yz^2}{x^2z - xy^2 + yz^2}$$

習題八十九

化簡:

$$1. \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

$$2. \frac{3a - 2a^2}{1 + \frac{2a}{a}}$$

$$3. \frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}$$

$$4. \frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1}}$$

$$5. \frac{\frac{a-y}{y} - \frac{a}{x}}{\frac{x+y}{y} - \frac{x}{a}}$$

$$6. \frac{\frac{a^2+a}{a^2} + 1}{\frac{a^2}{a^2} - \frac{a}{y} + 1}$$

$$7. \frac{\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-7x+12}}$$

$$8. \frac{\frac{x+y}{x} - \frac{x}{y}}{\frac{y}{x} - \frac{y}{x} + \frac{x+y}{y} - \frac{x}{y}}$$

$$9. \frac{(1+x) \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right]}{\frac{x}{x+1}}$$

$$10. \frac{\frac{x+2}{x-3} - \frac{x-2}{x+3}}{\frac{x-2}{x-3} - \frac{x+2}{x+3}}$$

$$11. \frac{\frac{x+y}{x-y} - \frac{xy}{x-y}}{\frac{x+y}{x-y} - \frac{xy}{x-y}}$$

$$12. \frac{\frac{3x-7}{2x-5} - \frac{2x-11}{2x-5}}{\frac{3x-7}{2x-5} - \frac{2x-11}{2x-5}}$$

$$13. \frac{\frac{a}{1+\frac{a}{1+\frac{1}{a}}} - \frac{a}{1+\frac{a}{\frac{a+1}{a}}} - \frac{a}{1+\frac{a^2}{1+a}} - \frac{a}{\frac{1+a^2+a^3}{1+a}}}{\frac{a^2-2}{1+a+a^2}}$$

$$14. \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}$$

$$15. \frac{\frac{a}{a^2 - \frac{a+1}{1+\frac{1}{a-1}}}}$$

習題九

$$1. \frac{a^2-1}{x-y} \text{ 按差式與和式的積。}$$

例題 1 $\frac{x^3+y^3}{x-y} = x^2+xy+y^2 + \frac{2y^3}{x-y}$

2. 化下列各式成整式，或整式與分式之和：

(a) $\frac{x^2+16}{x+2}$

(b) $\frac{x^4+y^5}{x^3+y^3}$

(c) $\frac{x^3-x^3}{x^3+y^3}$

(d) $\frac{abcd+c}{abc}$

(e) $\frac{mn+ps}{mnpq}$

(f) $\frac{mnpq}{mn+pq}$

3. 化下列各式為分式：

(a) $x^2+xy+y^2 + \frac{x^3-x^3}{x-y}$

(b) $a^2-ab + \frac{b^2}{a-b} + \frac{-2b^3}{a-b}$

化簡下列各式：

4. $\left(y + \frac{xy}{y-x}\right) \left(y - \frac{xy}{x-y}\right) \times \frac{y^2-x^2}{y^2+x}$

5. $\left(\frac{x}{1+a} + \frac{1-a}{a}\right) \div \left(\frac{a}{1-a} - \frac{1-a}{a}\right)$

6. $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) (xy+yz)$

7. $\left(\frac{x}{y} + 1\right) \left(\frac{y}{x} - 1\right) \left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)$

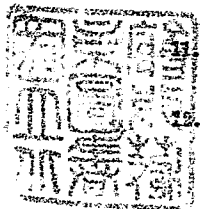
8. $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^2$

9. $\left(\frac{x}{3y} + \frac{2y}{3x}\right)^2 - \left(\frac{2x}{3y} - \frac{5y}{3x}\right)^2$

10. $\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) \div \left(a - \frac{1}{a}\right)$

$\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) \div \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right)$

$\left(\frac{x}{x^2} + \frac{a}{a} + 1\right) \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{a}{a} + 1\right)$



$$13. \frac{1}{y - \frac{1}{y}} + \frac{1}{y + \frac{1}{y}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{y^2}}$$

$$14. \frac{x-2}{6} \left[\frac{x-4}{9} - \left(\frac{2-8x}{4} - \frac{2x+1}{12} \right) \right]$$

$$15. \frac{x+y}{(y-x)(y-x)} + \frac{y+x}{(x-y)(x-y)} - \frac{x+y}{(x-y)(x-y)}$$



中華民國政府教育審定
 本圖書於二十六年七月
 領到中字第二十二號執照

中華民國二十六年七月審定本第一版
 中華民國三十五年拾月渝第三七版（中元道林紙本）

(57323B)

初級中學用

復興科 代數 二冊

上訂定價國幣柒角貳分

外埠運費在內

版權所
 翻印必究

發行所	印刷所	發行人	校訂者	編著者	主編者
商務印書館	商務印書館	朱經農	段育華	虞明禮	王雲五
		上海河南路			

