Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Analysis II

Arbeitsblatt 33

Übungsaufgaben

Aufgabe 33.1.*

Es seien $P = \left(\frac{3}{4}, -1\right)$ und $Q = \left(2, \frac{1}{5}\right)$ zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$. Bestimme den Abstand zwischen diesen beiden Punkten in

a) der euklidischen Metrik,

b) der Summenmetrik,

c) der Maximumsmetrik.

d) Vergleiche diese verschiedenen Abstände der Größe nach.

Aufgabe 33.2. Zeige, dass die Summenmetrik im $\mathbb{R}^n$ eine Metrik ist.

Aufgabe 33.3. Zeige, dass die Maximumsmetrik im $\mathbb{R}^n$ eine Metrik ist.

Aufgabe 33.4. Es sei $n \geq 2$. Zeige, dass für die Norm $\|x\| := \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$ auf dem $\mathbb{R}^n$ kein Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ mit der Eigenschaft $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ existiert.

Aufgabe 33.5. Es sei M die Parabel, also der Graph der Quadratfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^2.$$

Entscheide, ob auf M durch

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2|$$

bzw. durch

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |y_1 - y_2|$$

eine Metrik definiert wird.

Aufgabe 33.6. Es sei
$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\right\}$$
der Einheitskreis. Zeige, dass man auf K eine Metrik definieren kann, indem man $d(P,Q)$ $(P,Q \in K)$ als den positiven Winkel zwischen den zugehörigen Strahlen durch den Nullpunkt $(0,0)$ ansetzt.

Aufgabe 33.7. Es sei
$$f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$
eine stetige konkave Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(t) > 0$ für $t > 0$ und sei
$$d\colon M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$
eine Metrik. Zeige, dass dann auch $f \circ d$ eine Metrik ist.

Aufgabe 33.8. Es seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume. Zeige, dass auf der Produktmenge $M_1 \times M_2$ durch
$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2}$$
eine Metrik gegeben ist.

Aufgabe 33.9. Zeige, dass auf jeder Menge M die diskrete Metrik in der Tat eine Metrik ist.

Aufgabe 33.10. Es sei (M,d) ein metrischer Raum. Zeige, dass folgende Eigenschaften gelten.

(1) Die leere Menge $\emptyset$ und die Gesamtmenge M sind offen.
(2) Es sei I eine beliebige Indexmenge und seien U_i, $i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch die Vereinigung
$$\bigcup_{i \in I} U_i$$
offen.
(3) Es sei I eine endliche Indexmenge und seien U_i, $i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch der Durchschnitt
$$\bigcap_{i \in I} U_i$$
offen.

Aufgabe 33.11.*

Es sei (M,d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die offenen Kugeln $U(x,\epsilon)$ offen sind.

Aufgabe 33.12. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die abgeschlossenen Kugeln $B\,(x, \epsilon)$ abgeschlossen sind.

Aufgabe 33.13.*

Wir betrachten im $\mathbb{R}^2$ die offenen Bälle $U = U((0,0),1)$ und $V = U((2,0),2)$. Man gebe für jeden Punkt

$$x \,=\, (a,b) \,\in\, U \cap V$$

einen expliziten offenen Ball mit Mittelpunkt x an, der ganz innerhalb von $U \cap V$ liegt.

Aufgabe 33.14. Zeige, dass auf dem $\mathbb{R}^n$ die euklidische Metrik, die Summenmetrik und die Maximumsmetrik dieselben offenen Mengen definieren.

Aufgabe 33.15. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass in M die sogenannte *Hausdorff*-Eigenschaft gilt, d.h. zu je zwei verschiedenen Punkten x und y gibt es offene Mengen U und V mit

$$x \in U \text{ und } y \in V \text{ und } U \cap V = \emptyset\,.$$

Aufgabe 33.16.*

Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass jede endliche Teilmenge $T \subseteq M$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 33.17. Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen in $\mathbb{C}$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 33.18. Zeige, dass die Menge

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

in $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 33.19. Zeige, dass die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen ist.

Aufgabe 33.20.*

Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Zeige, dass eine Teilmenge $Z \subseteq T$ genau dann offen in T ist, wenn es eine in M offene Menge U mit $Z = T \cap U$ gibt.

Aufgabe 33.21. Sei M eine Menge, die mit der diskreten Metrik versehen sei. Zeige, dass jede Teilmenge von M sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

Aufgabe 33.22. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum M. Zeige, dass die Folge genau dann gegen $x \in M$ konvergiert, wenn die Folge der Abstände $d(x_n, x)$ in $\mathbb{R}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 33.23. Zeige, dass eine Folge in einem metrischen Raum maximal einen Grenzwert besitzt.

Aufgabe 33.24. Entscheide, ob im $\mathbb{R}^3$ (versehen mit der euklidischen Metrik) die Folge

$$x_n = \left(\frac{n^5 - 4n^2}{e^n}, \frac{-5n^4 + n^3 - n^{-1}}{13n^4 - 9n^2 + 5n + 6}, \frac{4\cos^3 n + 6n^2 + 5n - 2}{2n^2 - \sin^7 n} \right)$$

konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 33.25. Zu einem Dreieck $\triangle = (A, B, C)$ ist das Seitenmittelpunktsdreieck durch die Eckpunkte $\frac{1}{2}(A+B), \frac{1}{2}(A+C), \frac{1}{2}(B+C)$ gegeben. Diese Konstruktion ergibt eine rekursiv definierte Folge von Dreiecken $\triangle_n$, wobei $\triangle_1 = \triangle$ und $\triangle_{n+1}$ das Seitenmittelpunktsdreieck zu $\triangle_n$ ist. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $x_n \in \triangle_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass diese Folge konvergiert und bestimme den Grenzwert.

Aufgabe 33.26. Zeige, dass eine konvergente Folge in einem metrischen Raum genau einen Häufungspunkt besitzt.

Aufgabe 33.27. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Zeige, dass die Menge aller Häufungspunkte dieser Folge abgeschlossen ist.

Aufgabe 33.28.*

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum M. Zeige, dass die Folge genau dann gegen $x \in M$ konvergiert, wenn in jeder offenen Menge U mit $x \in U$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 33.29. (2 Punkte)

Entscheide, ob für vier Punkte A, B, C, X in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ stets die Abschätzung

$$d(A,B) + d(B,C) \leq d(A,X) + d(B,X) + d(C,X)$$

gilt.

Aufgabe 33.30. (3 Punkte)

Es seien P und Q zwei verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^2$ und G die dadurch definierte Gerade. Zeige, dass G abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 33.31. (6 (2+2+2) Punkte)

a) Definiere auf der Einheitssphäre, also der Kugeloberfläche

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\},$$

die „geodätische Metrik“, bei der der Abstand zweier Punkte $P, Q \in S$ durch die Länge der kürzesten Verbindung auf der Oberfläche gegeben ist.

b) Zeige, dass es sich um eine Metrik handelt.

c) Welchen Abstand besitzen die Punkte $(0,0,1)$ und $(1,0,0)$ in der euklidischen und in der geodätischen Metrik?

Die kürzeste Verbindung liegt auf dem Großkreis, den man enthält, wenn man die Kugeloberfläche mit der durch $P, Q, (0,0,0)$ gegebenen Ebene schneidet (wann definieren diese drei Punkte keine Ebene?). Die Formel für den Kreisumfang und die Tatsache, dass der Winkel proportional zur Bogenlänge ist, darf verwendet werden.

Aufgabe 33.32. (4 Punkte)

Es sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M, die gegen $x \in M$ konvergiere. Es sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine weitere Folge derart, dass die Abstände $d(x_n, y_n)$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$ sei. Zeige, dass auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.

Aufgabe 33.33. (4 Punkte)

Es sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M. Zeige, dass ein Punkt $x \in M$ genau dann ein Häufungspunkt der Folge ist, wenn es eine gegen x konvergente Teilfolge gibt.

Aufgabe 33.34. (4 (2+2) Punkte)

Es sei $z_n = (x_n, y_n)$ eine Folge im $\mathbb{R}^2$, die durch die beiden reellen Komponentenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben sei, und sei $z = (x, y)$ ein Punkt. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen.

(1) Wenn z ein Häufungspunkt von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, dann ist x ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und y ein Häufungspunkt von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) Wenn x ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und y ein Häufungspunkt von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, dann ist z ein Häufungspunkt von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Abbildungsverzeichnis