Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Vorlesung 58

Eigenschaften des Dachprodukts

Satz 58.1. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension m. Es sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von V und es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann bilden die Dachprodukte*

$$v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_n} \text{ mit } 1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m$$

eine Basis von $\bigwedge^n V$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass ein Erzeugendensystem vorliegt. Da die Elemente der Form $w_1 \wedge \ldots \wedge w_n$ nach Lemma 57.5 (1) ein Erzeugendensystem von $\bigwedge^n V$ bilden, genügt es zu zeigen, dass man diese durch die angegebenen Elemente darstellen kann. Für jedes w_j gibt es eine Darstellung $w_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i$, daher kann man nach Lemma 57.5 (4) die $w_1 \wedge \ldots \wedge w_n$ als Linearkombinationen von Dachprodukten der Basiselemente darstellen, wobei allerdings jede Reihenfolge vorkommen kann. Sei also $v_{k_1} \wedge \ldots \wedge v_{k_n}$ gegeben mit $k_j \in \{1, \ldots, m\}$. Durch Vertauschen von benachbarten Vektoren kann man nach Lemma 57.5 (3) (unter Inkaufnahme eines anderen Vorzeichens) erreichen, dass die Indizes (nicht notwendigerweise streng) aufsteigend geordnet sind. Wenn sich ein Index wiederholt, so ist nach Lemma 57.5 (2) das Dachprodukt 0. Also wiederholt sich kein Index und diese Dachprodukte sind in der gewünschten Form.

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit zeigen wir unter Verwendung von Lemma 14.7, dass es zu jeder n-elementigen Teilmenge $I = \{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$ (mit $i_1 < \ldots < i_n$) eine K-lineare Abbildung

$$\bigwedge^n V \longrightarrow K$$

gibt, die $v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_n}$ nicht auf 0 abbildet, aber alle anderen in Frage stehenden Dachprodukte auf 0 abbildet. Dazu genügt es nach Satz 57.7, eine alternierende multilineare Abbildung

$$\triangle \colon V^n \longrightarrow K$$

anzugeben mit $\triangle(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}) \neq 0$, aber mit $\triangle(v_{j_1}, \ldots, v_{j_n}) = 0$ für jedes andere aufsteigende Indextupel. Es sei U der von den v_i, $i \neq i_k$, erzeugte Untervektorraum von V und $W = V/U$ der Restklassenraum. Dann bilden die Bilder der v_{i_k}, $k = 1, \ldots, n$, eine Basis von W, und die Bilder von allen anderen n-Teilmengen der gegebenen Basis bilden dort keine Basis, da mindestens ein Element davon auf 0 geht. Wir betrachten nun die zusammengesetzte Abbildung

$$\triangle : V^n \longrightarrow W^n \cong (K^n)^n \xrightarrow{\det} K .$$

Diese Abbildung ist nach Satz 16.9 multilinear und nach Satz 16.10 alternierend. Nach Satz 16.11 ist $\triangle(z_1, \ldots, z_n) = 0$ genau dann, wenn die Bilder von z_i in W keine Basis bilden. □

Bei $V = K^m$ mit der Standardbasis $e_1, \ldots, e_m$ nennt man die $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$ mit $i_1 < \ldots < i_n$ die *Standardbasis* von $\bigwedge^n K^m$.

Bemerkung 58.2. Zu Basen $v_1, \ldots, v_m$ und $w_1, \ldots, w_m$ eines K-Vektorraumes V mit den Beziehungen

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

erhält man zwischen den Basen

$$v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_n} \text{ mit } 1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m \text{ und } w_{i_1} \wedge \ldots \wedge w_{i_n} \text{ mit } 1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m$$

des $\bigwedge^n V$ die Beziehung

$$v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_n} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq m} \left(\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{s=1}^{n} a_{i_s j_{\pi(s)}} \right) w_{i_1} \wedge \ldots \wedge w_{i_n}$$

Dies beruht gemäß Lemma 57.5 (4) auf

$$\begin{aligned} v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_n} &= \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij_1} w_i \right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij_n} w_i \right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq m} \left(\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{s=1}^{n} a_{i_s j_{\pi(s)}} \right) w_{i_1} \wedge \ldots \wedge w_{i_n}. \end{aligned}$$

Korollar 58.3. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension m. Dann besitzt das n-te äußere Produkt $\bigwedge^n V$ die Dimension*

$$\binom{m}{n}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 58.1 und Aufgabe 3.15 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)). □

Insbesondere ist die äußere Potenz für $n = 0$ eindimensional (es ist $\bigwedge^0 V = K$) und für $n = 1$ m-dimensional (es ist $\bigwedge^1 V = V$). Für $n = m$ ist $\bigwedge^m V$

eindimensional, und die Determinante induziert (nach einer Identifizierung von V mit K^m) einen Isomorphismus

$$\bigwedge^m V \longrightarrow K,\ (v_1, \ldots, v_m) \longmapsto \det(v_1, \ldots, v_m).$$

Für $n > m$ sind die äußeren Produkte der Nullraum und besitzen die Dimension 0.

Wir erweitern die in der letzten Vorlesung gezeigte natürliche Isomorphie $(\bigwedge^n V)^* \cong \operatorname{Alt}^n(V, K)$ zu einer natürlichen Isomorphie

$$\bigwedge^n V^* \cong \left(\bigwedge^n V\right)^* \cong \operatorname{Alt}^n(V, K).$$

Satz 58.4. *Es sei K ein Körper und V ein n-dimensionaler Vektorraum. Es sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine natürliche Isomorphie*

$$\psi\colon \bigwedge^k V^* \longrightarrow \left(\bigwedge^k V\right)^*$$

mit

$$(\psi(f_1 \wedge \ldots \wedge f_k))(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = \det(f_i(v_j))_{ij}$$

(mit $f_i \in V^*$ und $v_j \in V$).

Beweis. Wir betrachten die Abbildung (mit k Faktoren)

$$V^* \times \cdots \times V^* \longrightarrow \operatorname{Abb}(V \times \cdots \times V, K)$$

mit

$$(f_1, \ldots, f_k) \longmapsto \Big((v_1, \ldots, v_k) \longmapsto \det\ (f_i(v_j))_{ij}\Big)\ .$$

Für fixierte $f_1, \ldots, f_k$ ist die Abbildung rechts multilinear und alternierend, wie eine direkte Überprüfung unter Verwendung der Determinantenregeln zeigt. Daher entspricht diese nach Korollar 57.8 einem Element in $\left(\bigwedge^k V\right)^*$. Insgesamt liegt also eine Abbildung

$$V^* \times \cdots \times V^* \longrightarrow \left(\bigwedge^k V\right)^*$$

vor. Eine direkte Prüfung zeigt, dass die Gesamtzuordung ebenfalls multilinear und alternierend ist. Aufgrund der universellen Eigenschaft gibt es daher eine lineare Abbildung

$$\psi\colon \bigwedge^k V^* \longrightarrow \left(\bigwedge^k V\right)^*.$$

Diese müssen wir als Isomorphismus nachweisen. Sei dazu $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V mit der zugehörigen Dualbasis $v_1^*, \ldots, v_n^*$. Nach Satz 58.1 bilden die

$$v_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge v_{i_k}^*, 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n,$$

eine Basis von $\bigwedge^k V^*$. Ebenso bilden die

$$v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k}, 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n,$$

eine Basis von $\bigwedge^k V$ mit zugehöriger Dualbasis $(v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k})^*$. Wir zeigen, dass $v_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge v_{i_k}^*$ unter ψ auf $(v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k})^*$ abgebildet wird. Für $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$ ist

$$\left(\psi\left(v_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge v_{i_k}^*\right)\right)\left(v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_k}\right) = \det\left(v_{i_r}^*\left(v_{j_s}\right)_{1 \leq r,s \leq k}\right).$$

Bei $\{i_1, \ldots, i_k\} \neq \{j_1, \ldots, j_k\}$ gibt es ein i_r, das von allen j_s verschieden ist. Daher ist die r-te Zeile der Matrix 0 und somit ist die Determinante 0. Wenn dagegen die Indexmengen übereinstimmen, so ergibt sich die Einheitsmatrix mit der Determinante 1. Diese Wirkungsweise stimmt mit der von $(v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k})^*$ überein. $\square$

Dachprodukte bei linearen Abbildungen

Korollar 58.5. *Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine K-lineare Abbildung

$$\bigwedge^n \varphi\colon \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^n W$$

mit $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \mapsto \varphi(v_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(v_n)$.

Beweis. Die Abbildung

$$V^n \stackrel{\varphi \times \cdots \times \varphi}{\longrightarrow} W^n \stackrel{\delta}{\longrightarrow} \bigwedge^n W$$

ist nach Aufgabe 16.27 multilinear und alternierend. Daher gibt es nach Satz 57.7 eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^n W$$

mit $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \mapsto \varphi(v_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(v_n)$. $\square$

Proposition 58.6. *Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\bigwedge^n \varphi\colon \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^n W$$

die zugehörige K-lineare Abbildung. Dann gelten folgende Eigenschaften.

(1) *Wenn φ surjektiv ist, dann ist auch $\bigwedge^n \varphi$ surjektiv.*
(2) *Wenn φ injektiv ist, dann ist auch $\bigwedge^n \varphi$ injektiv.*

(3) *Wenn U ein weiterer K-Vektorraum und*

$$\psi\colon U \longrightarrow V$$

eine weitere K-lineare Abbildung ist, so gilt

$$\bigwedge^n (\varphi \circ \psi) \,=\, \left(\bigwedge^n \varphi\right) \circ \left(\bigwedge^n \psi\right).$$

Beweis. (1). Seien $w_1, \ldots, w_n \in W$ gegeben und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ Urbilder davon, also $\varphi(v_i) = w_i$. Dann ist

$$\left(\bigwedge^n \varphi\right)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) \,=\, w_1 \wedge \ldots \wedge w_n.$$

Nach Lemma 57.5 (1) ergibt sich die Surjektivität. (2). Wir können aufgrund der Konstruktion des Dachproduktes annehmen, dass V und W endlichdimensional sind. Die Aussage folgt dann aufgrund der expliziten Beschreibung der Basen in Satz 58.1. (3). Es genügt, die Gleichheit für das Erzeugendensystem $u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$ mit $u_i \in U$ zu zeigen, wofür es klar ist. □

Orientierungen und das Dachprodukt

Unter Bezug auf das Dachprodukt kann man generell die Orientierung auf einem reellen Vektorraum auf die Orientierung einer Geraden zurückführen, wie die folgende Aussage zeigt.

Lemma 58.7. *Es sei $V \neq 0$ ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum der Dimension n. Dann entsprechen durch die Zuordnung*

$$[v_1, \ldots, v_n] \longmapsto [v_1 \wedge \ldots \wedge v_n]$$

die Orientierungen auf V den Orientierungen auf $\bigwedge^n V$.

Beweis. Es seien $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_n$ zwei Basen von V mit der Beziehung

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \,=\, M \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Dann gilt nach Korollar 57.6

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \,=\, (\det M) w_1 \wedge \ldots \wedge w_n,$$

woraus die Wohldefiniertheit der Abbildung und die Aussage folgt. □