

**Mathematik für Anwender I****Arbeitsblatt 6****Übungsaufgaben**

AUFGABE 6.1. Berechne im Polynomring  $\mathbb{C}[X]$  das Produkt

$$((4 + i)X^2 - 3X + 9i) \cdot ((-3 + 7i)X^2 + (2 + 2i)X - 1 + 6i).$$

AUFGABE 6.2.\*

Sei  $K$  ein Körper und sei  $K[X]$  der Polynomring über  $K$ . Zeige, dass der Grad folgende Eigenschaften erfüllt.

- (1)  $\text{grad}(P + Q) \leq \max\{\text{grad}(P), \text{grad}(Q)\}$ ,
- (2)  $\text{grad}(P \cdot Q) = \text{grad}(P) + \text{grad}(Q)$ .

AUFGABE 6.3. Zeige, dass in einem Polynomring über einem Körper  $K$  gilt: Wenn  $P, Q \in K[X]$  beide ungleich 0 sind, so ist auch  $PQ \neq 0$ .

AUFGABE 6.4.\*

Sei  $K$  ein Körper und sei  $K[X]$  der Polynomring über  $K$ . Es sei  $a \in K$ . Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung

$$\psi: K[X] \longrightarrow K, P \longmapsto P(a),$$

folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien  $P, Q \in K[X]$ ).

- (1)  $(P + Q)(a) = P(a) + Q(a)$ .
- (2)  $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$ .
- (3)  $1(a) = 1$ .

AUFGABE 6.5. Setze in das Polynom  $2X^4 + X^3 - 3X^2 + X + 5$  die Zahl  $\sqrt{2}$  ein.

AUFGABE 6.6.\*

Zeige, dass

$$z = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{2}}$$

eine Nullstelle des Polynoms

$$X^3 + 3X + 2$$

ist.

AUFGABE 6.7. Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$2X^3 - 5X^2 - 4X + 7$$

die Variable  $X$  durch die komplexe Zahl  $2 - 5i$  ersetzt.

AUFGABE 6.8. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung (also das Einsetzen eines Polynoms in ein weiteres) von zwei Polynomen wieder ein Polynom ist.

AUFGABE 6.9. Sei  $K$  ein Körper und sei  $K[X]$  der Polynomring über  $K$ . Wie lautet das Ergebnis der Division mit Rest, wenn man ein Polynom  $P$  durch  $X^m$  teilt?

AUFGABE 6.10. Führe in  $\mathbb{Q}[X]$  die Division mit Rest „ $P$  durch  $T$ “ für die beiden Polynome  $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$  und  $T = 2X^2 + 3X - 1$  durch.

AUFGABE 6.11. Sei  $K$  ein Körper und sei  $K[X]$  der Polynomring über  $K$ . Zeige, dass jedes Polynom  $P \in K[X]$ ,  $P \neq 0$ , eine Produktzerlegung

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit  $\mu_j \geq 1$  und einem nullstellenfreien Polynom  $Q$  besitzt, wobei die auftretenden verschiedenen Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  und die zugehörigen Exponenten  $\mu_1, \dots, \mu_k$  bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

AUFGABE 6.12.\*

Es seien  $P$  und  $Q$  verschiedene normierte Polynome vom Grad  $d$  über einem Körper  $K$ . Wie viele Schnittpunkte besitzen die beiden Graphen maximal?

AUFGABE 6.13. Es sei  $F \in \mathbb{C}[X]$  ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass  $F$  in Linearfaktoren zerfällt.

AUFGABE 6.14. Bestimme die kleinste reelle Zahl, für die die Bernoullische Ungleichung zum Exponenten  $n = 3$  gilt.

AUFGABE 6.15. Es sei  $P \in \mathbb{R}[X]$  ein Polynom mit reellen Koeffizienten und sei  $z \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle von  $P$ . Zeige, dass dann auch die konjugiert-komplexe Zahl  $\bar{z}$  eine Nullstelle von  $P$  ist.

AUFGABE 6.16.\*

Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2$$

mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(-1) = 2, f(1) = 0, f(3) = 5.$$

AUFGABE 6.17. Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2 + dX^3$$

mit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 0, f(-1) = 1.$$

AUFGABE 6.18. Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $R = K[X]$  der Polynomring über  $K$ . Sei

$$P = \{F \in K[X] \mid \text{Der Leitkoeffizient von } F \text{ ist positiv}\}.$$

Zeige, dass  $P$  die drei folgenden Eigenschaften besitzt.

- (1) Entweder ist  $F \in P$  oder  $-F \in P$  oder  $F = 0$ .
- (2) Aus  $F, G \in P$  folgt  $F + G \in P$ .
- (3) Aus  $F, G \in P$  folgt  $F \cdot G \in P$ .

AUFGABE 6.19. Es sei  $K[X]$  der Polynomring über einem Körper  $K$ . Zeige, dass die Menge

$$\left\{ \frac{P}{Q} \mid P, Q \in K[X], Q \neq 0 \right\},$$

wobei zwei Brüche  $\frac{P}{Q}$  und  $\frac{P'}{Q'}$  genau dann als gleich gelten, wenn  $PQ' = P'Q$  ist, mit einer geeigneten Addition und Multiplikation ein Körper ist.

AUFGABE 6.20. Berechne in  $\mathbb{Q}(X)$  die folgenden Ausdrücke.

- (1) Das Produkt

$$\frac{2X^3 - 5X^2 + X - 1}{X^2 - 2X + 6} \cdot \frac{X^2 + 3}{5X^3 - 4X^2 - 7}.$$

- (2) Die Summe

$$\frac{4X^3 - X^2 + 6X - 2}{X^2 - 4X - 3} + \frac{X^2 - 3}{3X^2 + 5}.$$

- (3) Das Inverse von

$$\frac{6X^3 - 9X^2 + 5X - 1}{X^4 - 4X^3 + 3X^2 - 8X - 3}.$$

AUFGABE 6.21. Skizziere die Graphen der folgenden rationalen Funktionen

$$f = g/h: U \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei  $U$  jeweils das Komplement der Nullstellenmenge des Nennerpolynoms  $h$  sei.

- (1)  $1/x$ ,
- (2)  $1/x^2$ ,
- (3)  $1/(x^2 + 1)$ ,

- (4)  $x/(x^2 + 1)$ ,
- (5)  $x^2/(x^2 + 1)$ ,
- (6)  $x^3/(x^2 + 1)$ ,
- (7)  $(x - 2)(x + 2)(x + 4)/(x - 1)x(x + 1)$ .

AUFGABE 6.22. Es sei  $K$  ein angeordneter Körper,  $K[X]$  der Polynomring und

$$Q = K(X)$$

der Körper der rationalen Funktionen über  $K$ . Zeige unter Verwendung von Aufgabe 6.18, dass man  $Q$  zu einem angeordneten Körper machen kann, der *nicht* archimedisch angeordnet ist.

AUFGABE 6.23.\*

Sei  $x$  eine reelle Zahl,  $x \neq 1$ . Beweise für  $n \in \mathbb{N}$  durch Induktion die Beziehung

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

AUFGABE 6.24. Berechne die Hintereinanderschaltungen  $f \circ g$  und  $g \circ f$  der beiden rationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3}{x - 2} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4}.$$

AUFGABE 6.25. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von zwei rationalen Funktionen wieder rational ist.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 6.26. (3 Punkte)

Berechne im Polynomring  $\mathbb{C}[X]$  das Produkt

$$((4 + i)X^3 - iX^2 + 2X + 3 + 2i) \cdot ((2 - i)X^3 + (3 - 5i)X^2 + (2 + i)X + 1 + 5i).$$

AUFGABE 6.27. (3 Punkte)

Führe in  $\mathbb{Q}[X]$  die Division mit Rest „ $P$  durch  $T$ “ für die beiden Polynome  $P = 5X^4 - 6X^3 + \frac{3}{5}X^2 - \frac{1}{2}X + 5$  und  $T = \frac{1}{7}X^2 + \frac{3}{7}X - 1$  durch.

AUFGABE 6.28. (4 Punkte)

Führe in  $\mathbb{C}[X]$  die Division mit Rest „ $P$  durch  $T$ “ für die beiden Polynome  $P = (5 + i)X^4 + iX^2 + (3 - 2i)X - 1$  und  $T = X^2 + iX + 3 - i$  durch.

AUFGABE 6.29. (2 Punkte)

Beweise die Formel

$$X^u + 1 = (X + 1)(X^{u-1} - X^{u-2} + X^{u-3} - \dots + X^2 - X + 1)$$

für  $u$  ungerade.

AUFGABE 6.30. (4 Punkte)

Es sei  $P \in \mathbb{R}[X]$  ein nichtkonstantes Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeige, dass man  $P$  als ein Produkt von reellen Polynomen vom Grad 1 oder 2 schreiben kann.

AUFGABE 6.31. (4 Punkte)

Man finde ein Polynom  $f$  vom Grad  $\leq 3$ , für welches

$$f(0) = -1, f(-1) = -3, f(1) = 7, f(2) = 21$$

gilt.



## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7