贈閱

第一卷

第二期

本　期　目　錄

中學算學採取混合教授法的商榷（下）

余潛修

中學師生對于混合算學的觀念模糊，固然是因為與他們從前的習慣不同，但是就教科書本身上說，也要負大部份的責任．我們要知道教科書與教師同樣地是教材和學生間的媒介，因此，我們覺得一本良好的混合法算學教科書，至少應該注意到下列的事項：（1）引起學習的動機，并保持學習的興趣；（2）不僅敷陳公式，定理和圖形，尤應注意相互的聯絡和嚴格的選擇，務期使學者有正確明晰的認識和整個系統的觀念；（3）各科分量的支配，須均勻而不偏重；次序的排列，亦要適當；材料的組織，先直觀的而後入於論理的；尤應以函數觀念及實用主義為根本，而函數觀念的養成，要用圖解表示，才會正確；（4）對於基本事項，要多設習題，使之運算純熟而敏捷，選擇對於日常生活有密切關係的或是略加思考的習題，凡是涉及繁難的計算和艱深的理解的，絕對地刪除．

在歐美最初極力提倡混合教授法的，是德國的大算學家克萊因(Klein)，他的功績在算學教育史上是不可磨滅的．因為他努力鼓吹的結果，乃由全國算學專家集會制定有名的劃分時代轉變的米蘭改造方案(Meraner Lehrplan)，白連德孫(Behrendson)和哥丁（Gotting）根據這方案，編成一部混合法教科書（Lehrbuch der Mathematik nach Modern Grundsatzen),日人森之郎譯作"新主義算學教科書".這部書是以代數和直觀幾何的融合為主要題材,輔以三角和算術,特別偏重函數觀念和圖解.嗣後美國摩爾(Moore)受克萊因和培理(Perry)的影響,亦高唱改造算學教育,因為美國民族的思想非常進步,對于教育上種種新的制度和實驗,都有很深刻的研究和良好的效果,算學教育的改造自然不會例外,所以比較他國是易於接受新的主張. 根據這個主張而出版的混合法教科書很多,實驗的效果亦很顯著,其中最流行的要算布利氏(Breslisch)一書,這部書比我們先講的德國書,寫得更要澈底,每卷的卷末都附有日常計算必要的種種數值表,這就可以想見實用主義色彩的濃厚了,可惜材料太多,用作初中的教科書,似乎有些不太恰當,並且有許多地方不適合于我國的國情,所以採用的結果,沒有多大的成效.

我國在數年前曾自己編有混合算學三四種,內容多以布利氏一書為藍本,可是據我們看來,不過是披上一件混合的新式時裝,仍舊脫不了傳統的窠臼.這些事實,不待我們仔細檢討,連編者們自己也公開地承認,我們且抄他們的編輯大意裏的話來作證:

"混合算學我國向來沒有,西人偶然有幾種,也都不合我國的用,所以編輯不得不獨出心裁,譬如質因數檢驗法,最大公約圖解……連九分數,同循環小數的關係等都是本書的獨創". ——商務出版段育華編混合算術——

這部書的第一册,就講到展轉相除求最大公約的方法,詳細

討論 13 和 17 的因數檢驗法，並且所用的方法，比實際除法還要煩雜．此外對於實際生活不發生關係的循環小數和雞兎同籠的問題，也講得特別詳細．這一切在純粹講算術的教科書裡，我們都主張删减一些，不致使初學者感到畏懼和枯燥，不料竟發現於混合算學裡面，這眞有些令人不解！

"本書採德克萊因實用主義，注重函數圖表，學理與應用，兼籌並顧，不高陳玄義，徒苦初學，亦不似工師之徒言應用，流於器械，失訓練思想之要旨"

——中華出版張鵬飛編混合算學——

這幾句話本是編教科書的人的老生常談，用不着特別注意，可是我們略爲將全部看一遍，因爲每本都是很薄的，所有的篇幅還不及商務的一半，寫得太簡淺了．所以有些地方，不但沒有兼籌並顧，並且對于許多必要的教材，可以說是不籌未顧了．

編初中混合算學教科書，據我們所知道的，在理論上的錯誤算是很少，不過，有些編者往往祇顧到自己的興趣和學識，或許是偏見太深的緣故，完全不顧及學生的興趣和程度． 譬如中華出版的程廷熙，傅種孫兩先生編的混合算學，就犯着這個毛病．例如他們將不切實用的循環小數反覆詳細討論，這是我們不敢贊同的．

因此，我們覺得現在正需要一部良好的混合法教科書，關于這類的教材和編制，我們希望中等算學教育界的同人，加入詳細討論，以期在最近的將來，得到一個完善的方案，根據牠去編輯一部最適用的教本．現在就我們所想到的，在下述兩方面，貢獻

一點意見:

(1)教材上的混合舉例. 編混合算學最困難的地方,是在教材間的聯絡,因爲這部書忽而講到算術,忽而講到代數,忽而講到三角,忽而講到幾何,在中學學生,固然會給你講得莫明其妙,就是在編者自己,如果有人問『爲什麼要這樣講?』,恐怕一時亦會瞠目不知所答. 所以編者應該特別注意到什麼地方要混合. 例如,算術的百分,利息開方,得引用代數中的等量公理;算術及代數的原理,得引用圖解表示;解三角法的恒等式,可以利用因數分解的公式;代數方程式的圖解,及幾何作圖題的應用代數解析法;利用三角法解幾何上的問題;三角法之數值化和圖表化,——諸如此類的關係,不勝枚舉. 總期盡力發揮混合的妙處,而不露雜湊的痕跡.

(2)編制上的改良意見. 混合教科書限於篇幅,往往不能將比較瑣細的事項,一一講述,有些理化和工程上的術語及算學上的生僻名詞,也只能輕輕帶過,不容多加以說明. 因此,在上課時教師要耗費許多時間來解釋,甚至使學生研究的焦點移轉到他方面,這實在是很不合算的,無怪乎有人反對教科書中摻入理化和工程的教材. 爲補救這個缺點起見,編者最好是把關於要補充或註釋的部份附錄在每章的末尾,這個在教師固可節省許多上課的時間,同時在學生亦可藉此練習看參考書的能力,這是於雙方都有益的事情. 此外每章後面都要有個總綱,可以歸納和整理這章的內容,使學生了解和牢記這章的要點.

以上是我們對于這個重大的問題提出的一個簡單的討論，批評或有偏激，意思容未周詳，現在更就我國的現狀，揭示我們的主張，以作本文的結論：

(1)初中畢業的學生因為環境的緣故，絕對不會都有升學的機會，就能升學的說，又因為個性的關係，專門研究算學的更是寥寥無幾。我們要知道理論高深的算學，正如玄妙的哲學一樣，祗有少數人能創作，也祗有少數人去鑑賞。因此，初中的算學，除開注重基本事項以外，應該要大衆化，實用化，主要的目的是訓練有實用知識的市民，而不是希望每個人都成為算學家，這是我們主張採用混合法的第一理由。

(2)最近東方雜誌新年號，有一幅描寫現在中學教育崩潰的諷刺畫，大意是一張桌上堆積看許多瓶盛滿各科知識的藥水，什麼三角呵，算術呵，幾何呵，代數呵等等，應有盡有。一個教師拚命地向學生打針，注射得學生愁眉苦眼，無法消受。中學算學一科，分門別類有五六種之多，無怪乎學生大多數視為畏途。因此我們要配製混合溶液，使學生不但不感到苦味，並且能夠消化和有益，這是我們主張採用混合法的第二理由。

總之為要適合現在的急需和拯救學生的痛苦，我們深信唯有採用混合法算學，才能完成這兩個重大的使命。

不定式淺說

方烈

1. 一般之誤解. 取

(1) $$\frac{x^2-a^2}{x-a}$$

一式考之,當 $x=a$,式中之分子分母均爲 0,而式之值不定,因曰:"當 $x=a$ 時,(1)爲不定式".

或謂(1)之分子可劈爲 $(x-a)(x+a)$,故(1)之值實與 $x+a$ 之值等,因之,$x=a$ 時,(1)之值當爲 $2a$.

此種推論,殆可代表一般人之意見,然究其實,乃大謬不然.蓋

$$\frac{x^2-a^2}{x-a}=x+a$$

之一式,必須 x 不等於 a 時始爲眞確.若 $x=a$,上之等式即不能成立. 因由式之左邊變爲右邊時,左式之分子分母皆曾除以 $x-a$,當 $x=a$ 時,是以 0 作除數,爲代數學中所不取也.

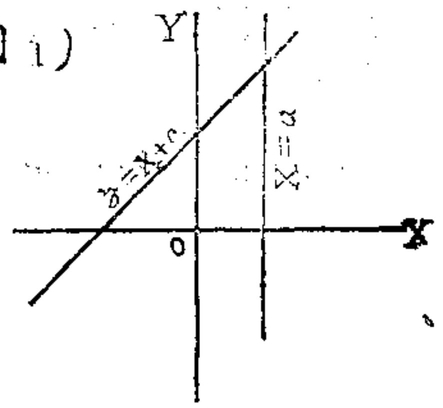
今若令 $$y=\frac{x^2-a^2}{x-a}, \qquad y'=x+a,$$

而作此兩式之圖,則見前者之圖爲兩條直線,後者之圖,僅爲一條直綫.因前式可書爲

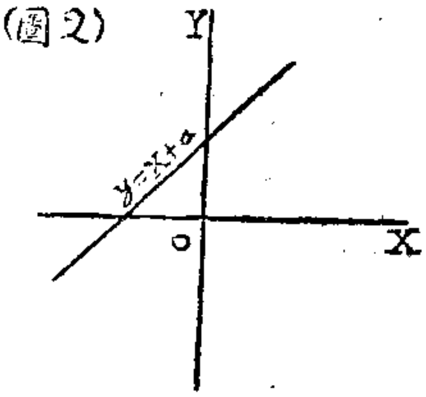
$$y(x-a)=x^2-a^2=(x-a)(x+a)$$

即 $$(x-a)(y-x-a)=0.$$

(圖1)



(圖2)



試比較觀之,當知(1)(2)兩圖,在 $x\neq a$ 時,固無處不脗合,但 $x=a$ 時, y' 之值爲 $2a$,而 y 之值仍爲不定也.

然則將若何而後可?今試令 x 依次取下列各值;換言之,即令 x 趨近於 a 爲其極限,*

$$2a,\quad \frac{3}{2}a,\quad \frac{4}{3}a,\quad \frac{5}{4}a,\cdots\cdots,\ \frac{n+1}{n}a,$$

則(1)式分子依次有下列各值:

$$3a^2,\quad \frac{5}{4}a^2,\quad \frac{7}{9}a^2,\quad \frac{9}{16}a^2,\cdots\cdots,\ \frac{2n+1}{n^2}a^2,$$

而其分母依次爲

$$a,\quad \frac{1}{2}a,\quad \frac{1}{3}a,\quad \frac{1}{4}a,\cdots\cdots,\ \frac{1}{n}a,$$

(1)式乃依次取得下列各值

$$3a,\quad \frac{5}{2}a,\quad \frac{7}{3}a,\quad \frac{9}{4}a,\cdots\cdots,\ \frac{2n+1}{n}a,$$

若 n 之值無限增加時,則見

$$\frac{2n+1}{n}a=\left(2+\frac{1}{n}\right)a$$

*此處假定讀者對於"極限"及"趨近於極限"之意義,已稍知一二.

趨近 $2a$ 爲其極限. 由是觀之, $2a$ 之一數,并非(1)式當 $x=a$ 時之"値". 上段討論,可約言之如下:

"當 x 趨近於 a 爲其極限時,(1)式趨近於 $2a$ 爲其極限,或(1)式以 $2a$ 爲其極限値". 以式表之則爲

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=2a.$$

2. 討論之範圍及其預備. 本文僅就下列三種不定式立論:

(a) $\frac{0}{0}$,　　(b) $\frac{\infty}{\infty}$,　　(c) $\infty-\infty$.

上節所述爲 (a) 之一例,其極限値爲一有限數. 但視原式之情形,上列各種不定式之極限値,可以爲零,可以爲有限數,亦可以爲無限. 後節當各舉一例以爲說明. 但當討論各種不定式時,若每次均依上節方法求其極限値,則將不勝其繁瑣. 今先述一

定理. 設 U,V 爲兩同時同値之變數,(即當 U 等於 a 時 V 亦等於 a;U 等於 b 時,V 亦等於 b,如此類推). 若 U 趨近極限,則 V 亦然,且兩者之極限相等,換言之,即

若　$\lim U=A$,　　則　$\lim V=A$.

3. 舉例.

(a) $\frac{0}{0}$ 之例.

例1. 當 n 爲正整數時,求 $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$

(1)節之例,即本例之特欵$(n=2)$, x不等於a時,

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}.$$

令

$$U=\frac{x^n-a^n}{x-a}, \quad V=x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}.$$

由2節之定理得

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})=na.$$

例2. 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$.

當x不等於$\frac{\pi}{2}$時,上式可整理爲

$$\frac{1-\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{\cos x}{1+\sin x}.$$

由前節定理以U,V各表此式之左,右邊,得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{0}{1+1}=0.$$

例3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^5+6x^4-4x^2}{8x^4+5x^3}$.

此式當x不等於0時,可書爲

$$\frac{3x^5+6x^4-4x^2}{8x^4+5x^3}=\frac{3x^3+6x^2-4}{x(8x+5)}.$$

同上之理,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^5+6x^4-4x^2}{8x^4+5x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^3+6x^2-4}{x(8x+5)}=\frac{-4}{0}=\infty.$$

(b) $\frac{\infty}{\infty}$之例.

例1.　求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\sec x}$.

因 $\dfrac{\tan x}{\sec x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}\Big/\dfrac{1}{\cos x}=\sin x.$

由前定理,此式當 $x\to\frac{\pi}{2}$ 之極限值爲 1.

例2.　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+7x-8}{x^2-2x+2}$.

x 爲任何定數(零須除開)時,分子分母可以 x^2 除之,即

$$\frac{3x^3-5x^2+7x-8}{x^2-2x+2}=\frac{3x-5+\dfrac{7}{x}-\dfrac{8}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}.$$

故由前定理,x 趨近無限時,則

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+7x-8}{x^2-2x+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-5+\dfrac{7}{x}-\dfrac{8}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=\infty.$$

例3.　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots\cdots+n}{n^3}$,　n 爲正整數,

n 取有限數時,由等差級數方法,其分子可簡書爲 $\dfrac{n(n+1)}{2}$,

即原式爲

$$\frac{1+2+3+\cdots\cdots+n}{n^3}=\frac{1+\dfrac{1}{n}}{2n},$$

故 n 趨近無限時,本前所設之定理,得其極限爲 0.

(c)　$\infty-\infty$ 之例.

例1.　求 $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right]$.

當 x 不等於 1 時,此式之前後兩項可通分併爲一項,即

$$\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{1-x}{x^2-1}=-\frac{1}{x+1}.$$

如前，$x\to 1$ 此式之極限値爲 $-\frac{1}{2}$.

例2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\csc x-\cot x)$.

當 x 不爲 0 時，

$$\csc x-\cot x=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

由前定理，$x\to 0$ 時此式之極限値爲 0.

例3. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(x\sqrt{2}-\sqrt{x^2+2ax})$

x 不爲 0 之任意有限値時，原式可書爲

$$\frac{(x\sqrt{2}-\sqrt{x^2+2ax})(x\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2ax})}{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2ax}}.$$

$$=\frac{x^2-2ax}{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2ax}}=\frac{x-2a}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\frac{2a}{x}}},$$

故 $x\to\infty$ 時，此式之極限亦趨於無限.

一元二次方程式根爲有理數的條件

王雍紹

假設一個一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的係數 a,b,c 都是有理數，並且 $b^2-4ac\geq 0$，我們能夠斷定這個一元二次方程式有兩個不等或等的實數來做它的根，這是說在普通實數裡面，一定有兩個滿足它的實數(不等或等)存在. 現在我們再進一步問一問，假定一元二次方程式的二根都是有理數，那麼係數 a,b,c 除了爲

整數(若爲分數,可以用分母的L.C.M.乘它們,使它們化成整數.)一個條件外,應當還有什麼限制? 本文的目的就在尋出這個限制,另外再舉幾個具有特別性質的例. 不過在以下討論中,a, b, c 概假定爲整數.

本來在實數中有理數同無理數的差別,不過是有理數可以用兩個互爲質數的 p, q 的商 p/q 來表示它($q\neq0$),無理數則不可.所以一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根 $\{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}\}/2a$ 欲爲有理數,必須 $D\equiv b^2-4ac$ 爲一整平方數. 若 $D>0$ 爲一整平方數,根據"有理數間應用加減乘除(除數不爲零)四項運算結果仍爲一有理數"一個定理,一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根 $\{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}\}/2a$ 之爲有理數,便無疑義了.

不過要 $D\equiv b^2-4ac>0$ 爲一整平方數,係數 a, b, c 間必有特殊關係. 如 $a+b+c=0$, $a-b+c=0$, $b^2-4ac=0$ 等等關係式成立時,由運算結果,$D>0$ 是 $(b+2a)^2$, $(b-2a)^2$, 0^2, 都是有理數的平方. 此外任取四題

$$(2x+3)(x+7)\equiv2x^2+17x+21=0, \tag{1}$$

$$(2x+3)(x-7)\equiv2x^2-11x-21=0, \tag{2}$$

$$(2x-3)(x+7)\equiv2x^2+11x-21=0, \tag{3}$$

$$(2x-3)(x-7)\equiv2x^2-17x+21=0, \tag{4}$$

它們的係數不能滿足上面的三個關係式,但 D 是 ±11 或 ±17 的平方. 於是我們知道一個一元二次方程式的根是有理數時,係數未必一定滿足上面三個關係式,上面三個關係式,只是一元二次方程式根爲有理數的充分條件.

爲了想尋出必要充分條件,我們作以下的推求.

設 $D\equiv b^2-4ac=(b+y)^2$,

則有 $-4ac=y(2b+y)$,

因等式右邊須爲 4 的倍數, y 必是偶數, 命爲 $y=2z$,代入上式;又得

$$ac=-z(b+z).$$

但 $-z+b+z=b$,

因得一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 根爲有理數的必要且充分條件如下.

定理. 在方程式 $ax^2+bx+c=0$ 中,若能將 ac 的積分爲兩個因子,其和恰同 b 相等時(b 的正負可以不管.),則它的二根爲有理數;又其逆亦眞.

在前所舉(1)同(4)兩例中:

$$ac=2\times21=42=14\times3=-14\times-3,$$

並且 $14+3=17$,或 $-14+(-3)=-17$;

又在(2)同(3)兩例中:

$$ac=2\times-21=-42=14\times-3=-14\times3,$$

並且 $14+(-3)=11$, 或 $(-14)+3=-11$,

所以它們的根都是有理數.

許多的特殊一元二次方程式,適合關係式 $ac=-z(b+z)$ 的 z 恰爲它們係數間的簡單函數. 當然,這樣所得出的新的關係式,常常成很整齊的形狀,方程式自身也有很多很有興趣的性質.

如 $z=\pm a$(或 $\pm c$,) $-b/2$,我們即得關係式

$$(\text{i})\qquad ac=-a(b+a),\text{即 } a+b+c=0;$$

$$(\text{ii})\qquad ac=a(b-a),\text{即 } a-b+c=0;$$

$$(\text{iii})\qquad ac=(b/2)[b-(b/2)],\text{即 } b^2-4ac=0,$$

就是幾個很好的例．於是因爲 $2+3-5=0$，可以做出六個一元二次方程式:

$$2x^2+3x-5=0,\qquad 2x^2-5x+3=0,$$

$$3x^2+2x-5=0,\qquad 3x^2-5x+2=0,$$

$$-5x^2+2x+3=0,\qquad -5x^2+3x+2=0,$$

它們的根都是有理數． 又因爲 $2-(-3)-5=0$，六個一元二次方程式:

$$2x^2-3x-5=0,\qquad 2x^2+5x+3=0,$$

$$3x^2-2x-5=0,\qquad 3x^2+5x+2=0,$$

$$-5x^2-2x+3=0,\qquad -5x^2-3x+2=0,$$

它們的根都是有理數． 再方程式

$$x^2+2x+1=0,\qquad x^2-2x+1=0,$$

的係數滿足關係式 $b^2-4ac=0$，所以它的二根也是有理數．除了我們已知 $b^2-4ac=0$ 表示方程式的二根同爲有理數 $-b/2a$ 外，現僅將係數滿足關係式(i)或(ii)的方程式，所有奇異性質，稍加說明，但證明則從略．

(i)關係式成立,我們可以得出下面三個定理:

定理1°． $a+b+c=0$ 爲一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 根爲有理數的充分條件，但非必要條件．

定理2°. $a+b+c=0$ 爲一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有有理數1爲其一根的必要且充分條件.

定理3°. 一元二次方程式的係數有關係式 $a+b+c=0$ 成立,則以其二根的有限次乘方做根的新一元二次方程式,係數亦必適合 $a+b+c=0$.

同樣,(II)關係式成立,我們亦可以得出下面的三個定理;

定理1'. $a-b+c=0$ 爲一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 根爲有理數的充分條件,但非必要條件.

定理2'. $a-b+c=0$ 爲一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有有理數 -1 爲其一根的必要且充分條件.

定理3'. 一元二次方程式的係數有關係式 $a-b+c=0$ 成立,則以其二根的奇數有限次乘方做根的新一元二次方程式,係數亦必適合 $a-b+c=0$;又其二根的偶數有限次乘方做根的新一元二次方程式,係數適合 $a+b+c=0$.

我們已經知道適合 $ac=-z(b+z)$ 的整數 z 存在時,一元二次方程式的根必爲有理數. 故若 $ac=10=1\times10=-1\times(-10)=2\times5=-2\times(-5)$, 必定 $b=1+10=11$ 或 $=-1+(-10)=-11$ 或 $=2+5=7$ 或 $=-2+(-5)=-7$, 方程式的根方能爲有理數. 又若 $b=10$, 必定 $ac=25,24,21,16,9,0,-11,-24,-39,-56,-75,-96\cdots$, 方程式的根方能爲有理數. 這樣,知道 ac 或 b 的數值,可以做出很多的根爲有理數的方程式,不是很有興趣的一件事麼? 以下造成一個 $|b|$ 自 0 到 20, ac 自 0 到 ±100 的表,以爲本文的結束. 任意一元

二次方程式的$|b|\geq 20$同$ac\leq 100$但$ac\geq -100$的數値恰能同時在表中檢出時,即可斷定它的二根爲有理數,否則皆不爲有理數.

$\lvert b\rvert=0$	$ac=0$ −1 −4 −9 −16 −25 −36 −49 −64 −81 −100
$=1$	$=0$ −2 −6 −12 −20 −30 −42 −56 −72 −90
$=2$	$=1$ 0 −3 −8 −15 −24 −35 −48 −63 −80 −99
$=3$	$=2$ 0 −4 −10 −18 −28 −40 −54 −70 −88
$=4$	$=4$ 3 0 −5 −12 −21 −32 −45 −60 −77 −96
$=5$	$=6$ 4 0 −6 −14 −24 −36 −50 −66 −84
$=6$	$=9$ 8 5 0 −7 −16 −27 −40 −55 −72 −91
$=7$	$=12$ 10 6 0 −8 −18 −30 −44 −60 −78 −98
$=8$	$=16$ 15 12 7 0 −9 −20 −33 −48 −65 −84
$=9$	$=20$ 18 14 8 0 −10 −22 −36 −52 −70 −90
$=10$	$=25$ 24 21 16 9 0 −11 −24 −39 −56 −75 −96
$=11$	$=30$ 28 24 18 10 0 −12 −26 −42 −60 −80
$=12$	$=36$ 35 32 27 20 11 0 −13 −28 −45 −64 −85
$=13$	$=42$ 40 36 30 22 12 0 −14 −30 −48 −68 −90
$=14$	$=49$ 48 45 40 33 24 13 0 −15 −32 −51 −72 −95
$=15$	$=56$ 54 50 44 36 26 14 0 −16 −34 −54 −76 −100
$=16$	$=64$ 63 60 55 48 39 28 15 0 −17 −36 −57 −80
$=17$	$=72$ 70 66 60 52 42 30 16 0 −18 −38 −60 −84
$=18$	$=81$ 80 77 72 65 56 45 32 17 0 −19 −40 −63 −88
$=19$	$=90$ 88 84 78 70 60 48 34 18 0 −20 −42 −66 −92
$=20$	$=100$ 99 96 91 84 75 64 51 36 19 0 −21 −44 −69 −96

—(完)—

四度空間

艾華治

過去的經驗,僅僅告訴我們有一度,二度,三度空間;三度以上的空間,簡直就沒有談到,不但沒有談到,恐怕連知道的也還不多,所以現在特別提出四度空間這個問題來討論. 我們的動機不是在想談高深理論,而是想介紹些新奇的觀念給讀者;我們的目的不是要將牠談得化神入微,唯妙唯肖,而是要讀者明瞭牠一般的情形. 還有一點,就是本篇講的是專以點爲,原素的空間因爲如果以直線,圓等做原素,空間的度數,又是一種講法,所以這一點是不得不申明的. 本篇約分爲五節,現在不妨先從牠的意義說起.

(1)四度空間在算學上的意義. 凡是學過算學或對於算學稍有常識的人,都知道一條直線可看爲由無窮的點集合而成的. 換句話說;一條直線上必含有無窮的點.任意在上面取一點,作爲定點,取一適當單位,從定點量到另一點,立刻就可以決定該點的位置;量得的結果,謂之該點的坐標. 如果該點在定點的右側,牠的坐標假定爲正數,反之則爲負數. 由此我們知道,直線上一點僅須要一個坐標,就可以決定其位置,所以稱直線爲一度空間. 集合無窮數的綫而成平面,自然平面上含有無窮數的線,任意取其中兩正交線作爲定線,橫的謂之 x 軸,縱的謂之 y

軸，其交點o謂之原點．再設從y軸向右量得的距離爲正數，反之則爲負數，從x軸向上量得的距離爲正數，反之則爲負數．如此，則平面上某一點的位置，可由x,y兩軸到該點所量得的兩距離，而決定之，此兩距離之數値，謂之爲該點的坐標．這樣，平面上一點，是需要兩個坐標決定的，所以稱平面爲二度空間．如果以我們所在的空間來講，除了上面的x軸.和y-軸之外，還可以在o點加上一個與x,y垂直的z-軸，此三條互相垂直的綫，決定三個互相垂直的平面，即yz平面，zx平面，xy平面．關於距離的正負，加以適當的假定後，在空間任意一點的位置，由上述三個平面到該點所量得的三個距離，立刻就可以決定．此所量得的三距離，謂之該點的坐標．我們的空間，其所以稱爲三度空間，就是因爲這裏一點的位置，是要三個坐標來決定的．這些結果，很明顯的告訴我們說．一度空間是用一個坐標決定一點的空間，二度空間是用兩個坐標決定一點的空間，三度空間是用三個坐標決定一點的空間，由此類推，我們很容易知道四度空間的意義了：四度空間，就是用四個坐標決定一點的空間．四度空間的意義雖然如此；但是四度空間的本體究竟怎樣？我們是否可以畫一個圖來表示牠，或者舉一個例來說明牠？談到這裏，就不免要發生困難了，因爲我們所在的空間是三度，我們僅具有三度空間裏的知識和經驗，四度空間的本體，我們絕沒有方法去表明，不過由類推的道理，我們可以說出種種和牠有關係的事實來．

(2)四度空間概念的發展觀．當非歐幾何還沒有發明以前，多度空間可說是還沒有人談到．譬如希臘時代亞里斯多德(Aristotle，384—322 B. C.)說："測度直線的大小，祇要向着一個方向測，平面的大小向着兩個方向測，立體的大小向着三個方向測，因爲物之大小祇盡於此，所以測度的方向也盡於此"，由這些話中，可見亞氏不但沒有想到四度空間，就是一度，二度，三度的名詞，也沒有應用到線，面，體上去．文藝復興後，算學家受了代數學進步的影響，才談起多度的量來，但是也沒有談到四度空間上面去，如汪里斯(Wallis 1616—1703)在他所著的代數上面說："長，寬，厚是空間的全部，除去這長，寬，厚三度外，不應當有第四度"．又如歐哰拿(Ozanam 1640—1717)說："兩個字母相乘的量猶如長方形，三個字母相乘的量猶如長方體，三個以上的字母相乘的量，看牠有幾個字母就是幾度的，但是這個量祇能想像的，因爲在自然界中，我們還不知道有什麽量是三度以上的"．又如康德(Kant 1724—1804)在他的(Critque pure reason)上說到"……現在還沒有找到三度以上的空間"．所以四度空間在這時期可以說還沒有人注意．到十九世紀的時候，一方面因爲歌須(Cauchy 1789—1857)複虛數函數論的建設，一方面因爲非歐幾何學的發明，算學界思想大變，漸漸感到四度空間的需要，於是注意牠的研究牠的也漸漸多了．不過在這個時期，牠的進步仍就是很慢．近來二十餘年，牠的進步就快多了．關於這類的文章，也很多很多了，如1900年三月的 Enseignement Mathematique，曾列出439篇

論文，是談四度或 n 度幾何學的．1907年羅利亞（Loria）統計，能找出六百篇論文，是談論這類東西的．最近桑墨維爾（Sommerville）統計至1911年止，有1832篇論文是關於 n 度何學的．

(3) 四度空間的解析幾何． 白笛卡爾（Descartes 1596—1650）發明解析幾何學後，代數與幾何就有了很密切的關係． 一個代數方程，可用幾何圖形來表示，同樣一個幾何圖形，也可用代數方程來代表． 例如有一個含兩個變數的代數方程 $y=x^2-2x+2$，牠所代表的幾何圖形，是一個拋物綫． 又如有一個含三個變數的方程 $x+y+z=10$，牠所代表的是一個平面。所以 $x+y+z=10$ 爲三度空間裏的一個二度空間． 依此類推，如果遇着一個含四個未知數的代數方程 $x^2+y^2+z^2+w^2=r^2$，我們一定說，牠是四度空間裏的一個球，或者說，$x^2+y^2+z^2+w^2=r^2$ 是四度空間裡的一個三度空間．由此知道，四個變數以上的一個代數方程，也同樣可以用幾何的意義來說明，所以四度空間裏的幾何，一樣可用解析方法來研究．

(4) 由類推得來四度空間的奇異性質．四度空間裏有許多奇異的性質，是可以類推出來的． 譬如在平面上一個圓內，假想有生物存在，他們祇能在圓內運動，就是有天大的事要到圓外去，也做不到，除非是在圓周上開了一扇門才行． 不過此事在三度空間的生物看來，就覺得非常容易了，並不要在圓周上開門就可一躍而出，因爲三度空間的生物，不但有長，寬，並且還有高，所以不要經過圓周，就可跳到圓外去． 又如平面上的兩個

對稱三角形,要使牠們重合，萬萬是做不到. 但是如果從三度空間裏經過一遍,將這平面繞着對稱軸旋轉一個180°的角,立卽可以重合. 由此知道,三度空間裡認爲很容易的事，在二度空間裏往往做不到. 三度空間與四度空間的關係,也未常不是如此.有許多我們認爲做不到不可能的事,在四度空間裏覺得很普通很平凡. 譬如在四度空間裏,右手套不必經過手套口可將裏面翻成外面,外面翻成裏面,變成左手套，同樣左手套也可翻成右手套. 右脚的皮鞋不必從鞋口翻過來,可以翻成左脚的. 柔軟的球,不必破裂開,可以翻過來,使牠的裡面成爲外面,外面成爲裡面. 雞蛋不須要將殼打碎,可以將裡面的黃或白取出來. 有結的繩子,不必動牠的兩端,可以把牠的結解開. 鏈子的環不必打破,可以一個一個的分開. 一口上鎖的皮箱的鑰匙失掉了,不必叫銅匠來打開,可以將裏面的東西拿出來. 監獄裏面的囚犯,不必破壞窗壁或門戶,可以在裡面逃出來. 這許多情形,在我們三度空間的人看來，都是絕對不可能的，但是在四度空間裡,却是很普通而不足爲奇的事.

(5)四度空間的研究對於算學上的貢獻. 以我們三度空間的腦子，淺尠的經驗與知識，來想像複雜的四度空間或多度空間,自然是不容易的一回事;然而四度空間的研究對於算學上已有莫大的貢献,是我們不得不承認而不得不注意的. 譬如一個三角形,如果以一度空間的眼光來看牠,牠的性質很簡單，所以牠的幾何學也很簡單. 如果以二度空間的眼光來看牠,牠有角

度,邊線,頂點,高度,等邊,等角等等關係,牠的性質增加了,所以牠的幾何學也複雜了. 如果以三度空間的眼光來看牠,牠就與四面體,平面等等發生關係了,牠的性質比在二度空間增加了,所以牠的幾何學也比在二度空間複雜了.如果以四度空間的眼光來看牠,牠的性質比在三度空間更要增加,所以牠的幾何學比在三度空間也更要複雜,於是研究牠的範圍當然也要擴大了.所以說,由四度空間的研究可擴充幾何學研究的範圍,這是牠對於算學上最大的貢献.

最後要向讀者聲明的,就是(4)節裏所說的種種奇異性質不過是由類推得來的四度點空間裏的現象,可當作有趣的談話資料而已. 千萬不要誤會以爲研究四度幾何,就是討論這類妄誕不經之談. 再者,四度空間的研究并不專在點空間着想,他的範圍廣得很,恕不在本文討論了.

點之軌跡淺說(續)

夏伯初

IV 軌跡之範圍

求出軌跡之形狀,爲解决軌跡問題之一重要階段. 如在平面幾何學中所研究之軌跡圖形,或爲直線,或爲圓,或爲直線之一部分,或爲圓之一部分,甚至爲直線或圓之羣,普通書籍,載之甚詳,不復贅述(但在立體幾何學中則有時爲平面,爲球面,爲圓墻面,爲圓錐面,或此等表面之一部分,或此等表面之羣,或此等表面之交).

然亦有幾種特別情形,玆分列如下;

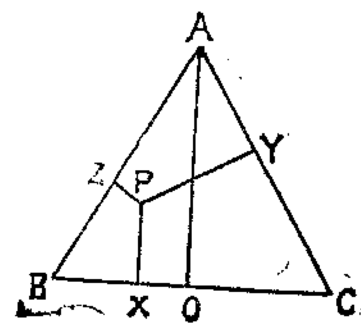
(1)軌跡爲孤點時. 有時適合某條件之點,獨一無二,或孤獨存在,不能成綫,此種孤點,亦可視爲軌跡.

例如一動點與一定圓周之距離爲定長時,則此動點之軌跡,爲定圓周同心之兩圓周,一在其內,一在其外. 若所設定長距離恰與定圓半徑相等時,則在定圓周內之一軌跡,即縮成一點,此點即是軌跡.

(2)軌跡爲面時. 在立體幾何學中,點之軌跡爲面時甚多. 例如距二定點有等距之點之軌跡爲一平面,又如距一定點有定距離之點之軌跡爲一球面. 在平面幾何學領域內,點之軌跡,一般爲線,但在特別情形時,亦得爲面,特舉兩例,以明一般.

例1. 求距正三角形之三邊距離和等於其高之點之軌跡.

此軌跡爲正三角形本身之面,何則,在其周上或面內任取一點時,由該點向各邊所作之垂線 Px, Py, Pz 之和,常等於其高 AO, 而面外之點皆無此性質,證明之有如次示:



設一邊爲 a, 高 AO 爲 h, 三垂線爲 x, y, z, 假令此中無爲零者,則

$$\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}az \text{ 及 } \frac{1}{2}ah$$

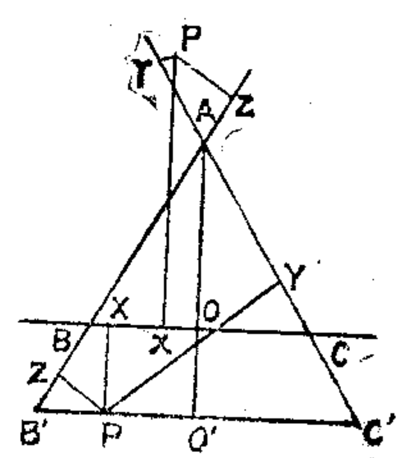
咸爲三角形之面積,故相等.

$$\therefore\ x+y+z=h.$$

次 P 點在面外時,若 P 在三角形內角之對頂角內,則三垂綫中之一,如圖 PX 較高 h 爲大甚明.

又若 P 在外角 B 與外角 C 之內時,通過 P 點作 BC 之平行線,又得正三角形 $AB'C'$, 由前證明,知 $Py+Pz$ 等於正三角形之高 AO', 但 $AO'>AO$,

故 P 點取於面外,則 $x+y+z>h$.



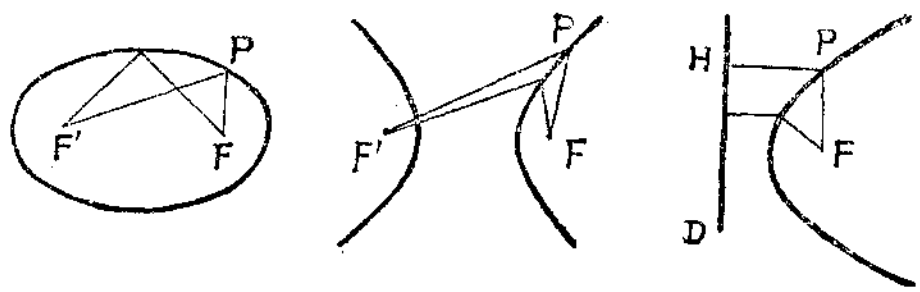
例2. 求距定點 O 小於定長 a, 大於定長 b 之點之軌跡.

此軌跡爲以 O 爲中心, a,b 各爲半徑所作兩圓周間之圓環面,甚明,但其周上之點,不合條件,均應除去.

(3)軌跡爲圓錐曲綫時. 初等平面幾何學中軌跡一般之形

狀,本限于直綫與圓之範圍,有時解作圖題時,發現軌跡爲圓錐曲綫——橢圓,雙曲綫,拋物線——者,在初等幾何學範圍內,雖不許應用,然略知其梗概,對於推測軌跡時,便益良多,茲特簡單說明如次:

〔甲〕橢圓爲距二定點 F,F' 之距離之和 PF+PF' 等於一定長時 P 點之軌跡.



(1) (2) (3)

此曲線之形如圖(1),二點 F 及 F' 稱爲此曲線之焦點.

〔乙〕雙曲線爲距二定點 F,F' 之距離之差 PF ∾ PF' 等於一定長時 P 點之軌跡,其曲線之形如圖(2),F 與 F' 爲其焦點.

在圖中於曲線之右枝上取 P 點,則 PF'—PF 爲定長,左枝上取 P 点,則 PF—PF' 爲定長.

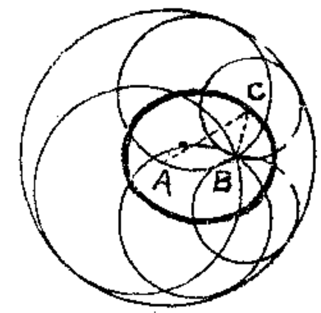
〔丙〕拋物綫爲距定點 F 與定直線 D 之距離 PF,PH 相等時 P 點之軌跡.

此曲線之形如圖(3),F 爲焦點,D 爲準綫.

注意. 此三曲綫與一直綫之交點不多於 2,與圓周之交或互相交,不多於 4.實際推測,即可知之.

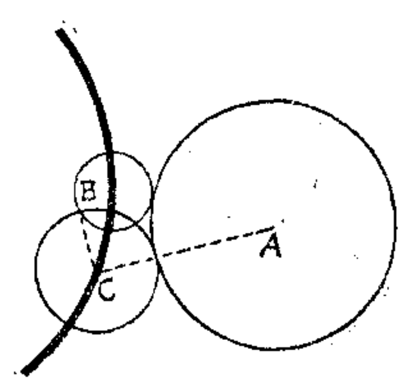
例1. 定圓 A 之內求通過一定點 B 作與此圓相切之圓心

C 之軌跡.



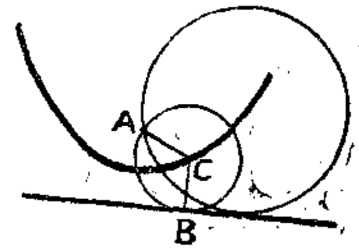
$CA+CB$ 常等於 A 圓之半徑,即 C 點常在以 A,B 爲焦點之橢圓周上. 逆而言之,在此橢圓周上之點皆爲合乎條件之圓心,故所求之軌跡爲此橢圓.

例2. 前題 B 點在 A 之外時如何?



此時 $CA \backsim CB$ 常等於定圓 A 之半徑,可知 C 之軌跡爲以 A,B 爲焦點之雙曲綫.圖示外切時之軌跡,爲雙曲線之一枝(近 B 處),內切時之軌跡爲他一枝.

例3. 通過一定點 A 且切於定直線之圓心 C 之軌跡.

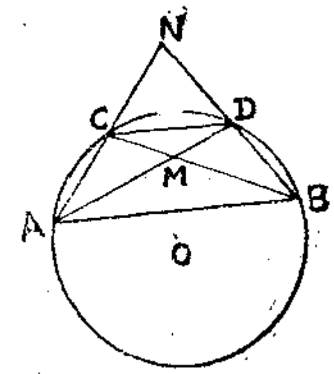


此軌跡爲以 A 爲焦點,定直綫爲準線之拋物線,因由 C 至定直線之距離 CB 常等於 CA 之故.逆證亦眞.

軌跡之一般及特殊形狀既如上述.然考察時首應注意其完備性與純粹性,否則極易起下列之誤會:

(1)若見適合於某條件之點在某圖形上,即斷定此圖形爲所求之軌跡,每以非軌跡之部分混爲軌跡,蓋即未注意純粹性之誤謬也.

例如 定圓 O 內有 AB, CD 二平行弦,CD 移動時(I)聯 AD, BC, 求其交點 M 之軌跡;(II)聯 AC, BD, 求其交點 N 之軌跡.

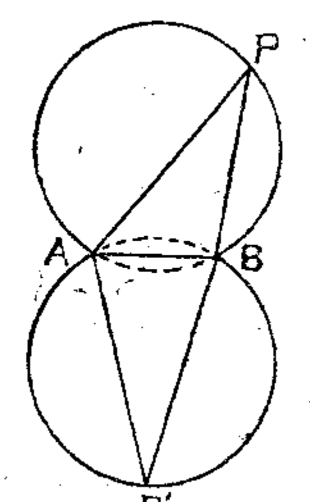


(ⅰ)解. AB與CD弦平行,則$\widehat{AC}=\widehat{BD}$, $\therefore \angle ABC=\angle BAD$,而AM=BM,若利用距A,B兩點有等距之點之軌跡,斷定M之軌跡爲AB之垂直二等分綫,即有錯誤. 蓋AD,BC之交點決無在圓外之可能,故AB之垂直二等分綫認爲軌跡,即應有在圓O內之限制,不能認全線爲軌跡也.

(ⅱ)解. AB//CD,則$\widehat{AC}=\widehat{BD}$,即AC=BD,因之ABCD成一內接於圓之等腰梯形,而$\angle CAB=\angle DBA$及$\angle NCD=\angle NDC$,故NC=ND,及NA=NB.此時若亦如前解,斷定N之軌跡爲AB之垂直二等分線,亦有誤謬,蓋交點雖距A,B等距離,但均在圓外,是又不能不有在圓外之限制也.

(2)若僅見軌跡之一部分,即斷定爲軌跡之全部,是未注意其完備性,仍不能認爲完全解答也.

例如 一點對於定直線張定角時,求其軌跡.



解. AB爲定長直線,P點對于AB直線張定角,則P點之軌跡爲APB弓形弧(因同弓形內弓形角相等).若認軌跡爲APB全圓周,即有不合條件之點(即$\widehat{APB}$之共軛弧)混雜於軌跡之內,是未注意其純粹性之故.但僅認APB弧爲軌跡全部,亦屬非是,蓋P點若至AB之他傍P'點之位置,則又有AP'B弓形弧,亦爲軌跡之一部,是又未意注完備性之誤謬也.然此軌跡既確定爲APB弧

及AP'B弧而A,B二點又均不合于條件,非軌跡之部分,應當除去.

V 軌跡之探討

發見軌跡,無公法可循,然普通探討方法,已經前人試用得有結果者,約有數種,臚列如次,以資參攷.

〔1〕檢查特別點法　特別點者即適合於題設條件之特別位置之點之謂.　初等幾何中特別點之種類,大致如下:

(第一)所求軌跡如有對稱軸,則可求此軌跡與其對稱軸之交點,此交點謂之軌跡之頂點.

所求軌跡有互相垂直之二對稱軸,則此二軸之交點,爲軌跡之對稱中心.但軌跡中亦有雖無對稱軸,而具有對稱中心者,宜注意之.

例如　求與二定點距離之比爲一定之點之軌跡,此時連結二定點之直線,爲軌跡之對稱軸,而軌跡圖形(圓周)與此直線之交點,即按定比內外分此二定點間有限直線所得二點,亦即所謂項點.

(第二)定軌跡中界限之點曰限點.　略舉之,有次之三種:

I.　終點,亦稱止點,軌跡止於此.

例如在有定長定位之底邊上求立有定大之角爲項角所成三角形內心之軌跡時,所求之軌跡恰終止於定底邊之兩端.　此二點亦係特別位置,謂之終點.

II.　外點,軌跡更不向此點外擴張;然亦不止於此點.

例如在二定圓中,作平行而且同向之動半徑,聯此兩半徑之

端作線分，以所設比內分之，則其內分點之軌跡爲一圓周．如該線分適與二定圓之外公切線相合時，所得軌跡上一點，在極端之位置．如此位置，顯然特別，而爲軌跡之一限點，即爲外點．

此外點之軌跡有對稱軸，亦有頂點．

Ⅲ．往返點．軌跡上之動點或進或退運行，進而達於某特別點，退而返諸進行之途．如是所達之特別點，謂之往返點．

例如一定直角三角斜邊兩端各在直交二直綫之一上運動，直角項與二直線交點，分居斜邊之兩旁，則其直角頂點之軌跡爲一直線分．此直線分之一端點，即往返點．

（第三）所求軌跡含有無窮遠處之點者，此軌跡必爲直線，可確定其方向．此種特別點謂之無窮遠点．

初等平面幾何學中所有軌跡僅爲直線及圓，故用此求特別點之方法，雖不一定能决定軌跡之爲何種綫，然能决定軌跡之非何種線．職是之故，若能多知特別點之種類，於求軌跡時裨益良多，以上所舉，不過常見者，學者於此處應就各題分別探索之．

〔2〕變更問題法　欲解一軌跡問題，可變爲較易之軌跡問題，再變爲更易之軌跡問題，累用此法可將欲解之問題化爲已解之問題，或化爲易解之問題而解之．此種方法謂之變更問題法．

例如求圓內等弦中點之軌跡，可以變爲求距定圓心有等距之點之軌跡，至易証明．

〔3〕變更條件法　推闡適合於所設條件之點，以知其又適合於一新條件，此適合於新條件之點又適合於另一新條件．如

是輾轉推至基本定理或已得其解之軌跡．此法可名之曰變更條件法．

如前例即是．

此外尙有相似應位法，旋轉法，平行移動法，反形法，射影法等，或涉及高等數學，或根據近世幾何，不便一一列舉． 他日再分別介紹之．

參考書籍

本編取材於下列各書甚多，不敢掠美，爰揭示如次，以誌謝忱：

1. E. Rouché et Ch. de Comberousse:— Traité de géometrié.

2. M. Desboves:— Questions de géométrie Elémentaire.

3. Nixon:— Euclid Revised.

4. Durell and Arnold:— Plane and Solid geometry.

5. Schultze-Sevenoak-Schugler:— Plane geometry.

9. 林 鶴 一；一軌跡問題

7. 柳原吉次；一軌跡及作圖

8. 白　井；一軌跡及作圖講義

9. 吳 在 淵；一高級幾何學

10. 傅　溥；一高中平面幾何學

11. 嚴 濟 慈；一幾何証題法

12. 吳 在 淵；一初等幾何學軌跡探討法

柏 拉 圖

Plato (427—347 B, C,)

瘦 桐

本期的封面畫,就是柏拉圖的幻想像. 氏大約在紀元前427年生於雅典一個大富豪家, 正當希臘大病疫流行而且是各市府交相戰爭的時候.

氏二十歲時,就學於蘇格拉底(Socrates), 前後一共八年,頗有成就. 自蘇氏被戮後,遂遍遊意大利(Italy),埃及(Egypt), 西西里(Sicily)及亞細亞(Asia)各地. 据希塞洛(Cicero)之傳說, 柏拉圖在意大利曾入畢達哥拉斯學派之學校,研究數理,與亞爾奇泰斯(Archytas),泰米阿斯(Timaeus), 納交爲密友,因得融會畢氏學派之學,而爲自已藥籠中物.

紀元前380年,氏回雅典講學,創設學校於郊外之森林中,稱爲 Academy,生徒極衆(人稱 Academists). 其教授之方法,一爲連續的講演,一爲啓發思想的對話.

氏好學深思,竭盡畢生精力,鑽研學術,年八十餘,始列讌會紀元前347年,猝然病逝,時八十一歲.

氏爲世界著名之哲學家而兼算學家, 與亞里士多德(Aristotle)' 德莫司登勒斯(Demosthenes)有雅典三聖之稱. 其關於哲學之貢獻極偉,因非範圍所及,故略而不論, 這裡僅叙其關於算學的

研究.

柏拉圖因受畢達哥拉斯學派之影響，認算學有發展思想之能力，異常重視，與其師蘇格拉底之輕忽算學意志截然不同，並謂算學爲教育兒童所不可少之科目．在他的一部名著Republic中,曾有下面段提倡算術的記載:

"凡是一個軍人,必須了解用算的技術，否則他就不知道如何去指揮部隊排列陣式．就是一個哲學家也不能例外,因爲他要識出事情的變異而得着眞實的道理，必須先做一個算術家才行．……算術具有偉大而高尚的效能，可使人們的心靈能夠了解抽象的數".

氏對於幾何學興味尤濃．以幾何學爲鍛鍊思考之要具，並奉爲神聖的科學．他以爲宇宙的秘密,是要從形數裏找出來的,所以有(God eternately geometrizes)之言,其校門上懸有一額,上面刻着"不學幾何學者不許入吾門"(Let no one ignorant of geometry enter my door.),可以想見他醉心到何等地步了.

氏治幾何學並無甚麼的特殊創作,然主張用精確的定義,清晰的假定,嚴密的論証爲研究的基礎,發明解析証明法(Analytic method)以補綜合証明法(Synthetic method)之不足，痛惡以功利主義而論幾何學;能夠促醒幾何學中所用之邏輯及方法之改良,改革往昔幾何學家研究之態度,致使此後之希臘算學,有長足之進步,我們至今探源溯本,不能不歸功於柏拉圖的提倡哩.

點 科 大 學(續)

嚴開楝譯

第 二 幕

時　間：兩星期後.

佈　景：與前同,但在背景前擺着一張桌子,四圍有幾把椅子.在桌上有張紙板標着$x^2+2y=0$.

〔(1,−½),(2,−2),(3,−9/2),(−2,−2),(−1,−½)上. (2,−2)就主席位,別的人也都坐下.〕

(2,−2):(敲桌以維持秩序)將要開會了!會員們,我們聚集在這裡來討論選舉新會員的. 因爲我們和A會的聯歡會卽刻就要在此地舉行,我們必定要快點才好. 當我唸出一個名字時,請你們順次地發表意見.預備好了嗎?

(−1,−½):說罷!(懶懶地靠在椅子上)

(2,−2):第一個是(2,7),(1,−½),你有什麼意見?

(1,−½):我不喜歡她.

(2,−2):你反對選她麼?

(1,−¼):當然.

(2,−2):那麼,說出理由來.

(1,−½):我不喜歡她.

(−1,−½):(急忙跳起)那不公平,因爲一個人不喜歡她而………

(1,−½):嗯,但是這人是富有判斷力的.

(−1,−½):你配!

(2,−2):守秩序!我們是不是要試驗一下?

（$-1,-\frac{1}{2}$）：好！

（$1,-\frac{1}{2}$）：那才可以解決．

（$2,-2$）：〔當她將標牌遮住並且將(2,7)代入〕不對，——4加14——她不適合我們的條件．

（$1,-\frac{1}{2}$）：我不是已經說過了嗎！

（$-1,-\frac{1}{2}$）：啊，你呀．（輕蔑似地坐下）．

（$2,-2$）：在我們表上的第二個是（a,b）——一個奇怪的名字．

（$3,-\frac{3}{2}$）：（大聲地）太籠統了．

（$-1,-\frac{1}{2}$）：是的，當人家同她談話的時候，她時時改變她的名字．我喜歡一定不變的點．

（$-2,-2$）：她企圖着給別人一個好印象——與任何人妥協．

（$1,-\frac{1}{2}$）：除此以外她可算一個狡黠的蝙蝠，

（$2,-2$）：大家意見一致，我們也用不着試驗了．再討論（$-4,-8$）．

（$-1,-\frac{1}{2}$）：她可以．

（$-2,-2$）：她行得．

（$3,-\frac{3}{2}$）：是，她是一個可愛的女孩子．

（$2,-2$）：（實地計算）16減16，好，她可以被選．現在輪到（1,5）了，各位有什麼意見？

（$-2,-2$）：她與我們的樣式大不相同，頂好試驗一下．

（$2,-2$）：1加10，不成！我們再來看（0,0）如何．

（$-2,-2$）：啊，她確實漂亮得可以．雖然有幾分小孩樣的嬌癡氣，但是實質純樸得很．

（$3,-\frac{3}{2}$）：她可以適合我們的條件嗎？

（$1,-\frac{1}{2}$）：我想她有資格進我們這個會．

（$2,-2$）：0加0，是啊，她能適合我們的條件．再，最末一個就是（$-4,-9$）．

(3, − $\frac{3}{2}$)：她負得太厲害了，不够資格．

(−1, −½)：每次祗要别人與你不同，你就說她沒有資格．但是我偏要說她嬌嬈可愛．

(2−, −2)：啊，試驗一下

(2, −2)：16減18，她簡直不合．那麽，我們已經選好了(−4, −8)同(0, 0)．(敲門聲自外入) $3x-y=0$的會員和新生都來了，你們準備好到聯歡會嗎？

(衆　人)：好了．

〔除了(∞)外，(2, −2)都請她們進來了．於是兩會舊會員分開排列在桌子兩邊，每會中的第一個人都捏着標牌，新生們對着桌子站在前面，祗有(0, 0)蜷縮地躲在後面．〕

(−4, −8)：〔對着(0, 0)〕怎麽樣？來吧！

(0, 0)：她們都不理我．(她仍然像可憐的樣子，直到喊叫她的名字時，她才表示驚訝．)

(2, −2)：新同學們，經過我們嚴格精細地考查，這一次我們已經在你們當中選上兩位加入我們的會．合乎$x^2+2y=0$因而被選為會員，不僅是一件光榮的事情，有連絡感情的機會，並且也是我們的職責．因為我們這個集會來源是很遠的，一點一點地連續下來，也不知道經過了多少時間，我們現在應該繼續地一點一點連下去，不叫本會在任何時地停頓．在新會員加入之先，讓我把舊會員介紹一下．同時請記錄員把各人地位指點出來，這樣諸位就可以知道本會的經過了．(當每個會員說出她的名字時，(1, −½)就在方格紙上那點作一×號．直到所有的名字都唸完後，她將那些點連成為兩部份．再將新生加進去，她才將這曲線作成．)我們現在邀請(−4, −8,)來加入我們裡面，她在我們這個團體中完成一個重要的部份．

〔（$-4,-8$）走到桌子面前.〕你願意遵守$x^2+2y=0$的會章嗎？

（$-4,-8$）：願意.

（$2,-2$）：我們還選了（0,0），她是我們會裡的一個重要份子．〔對着（0,0）〕你願意隨着我們嗎？

（0,0）：願意.

〔（$2,-2$）對着（$-1,-3$）表示她的事已經做完，於是她回到她的團體裡．接着（$-1,-3$）走向前.〕

（$-1,-3$）：現在要介紹$3x-y=0$的會員給各位了．（當會員們說出自己的名字時，（$-2,-6$）就在方格紙上將她們標出，等到（0,0）被選後，這直線才繼續通過原點.）我們這會今年祇選上了（0,0）爲會員.

（0,0）：我？阿，我不相信有這麼一回事！

（$-1,-3$）：你情願加入我們會嗎？

（0,0）：啊，情願.

（a,b）：嘿！好足的風頭！誰願意跑到曲綫上面去？

（$-1,-3$）：$x^2+2y=0$和$3x-y=0$畢竟又携手了．這完全是（0,0）的功勞，我們湊到任何人都比不上，我提議向她歡呼三聲.

衆人〔除開（a,b）〕：原點萬歲！萬歲！萬歲！請演講！

（0,0）：我所要說的就是我之所以有今日的成就，完全要謝謝我的雙親——兩個坐標軸！

（完）

世外奇談

(續)

A Square 原著　　乙閣譯

3. 二元世界的居民

二元世界中的成年人,其長度和寬度,約合你們的十一英寸. 十二英寸的,就可以算是巨人了.

我們的婦女們都是直線.

我們的兵士及下等階級的勞工們,是兩邊相等的三角形,其等邊之長大約十一英寸左右,底邊很短(常常不到半英寸),所以他們的頂角尖得可怕. 那最不長進的下等人們,底邊有不過八分之一英寸的,其頂角之尖幾乎和婦女們沒有分別. 爲了和他種三角形分別起見,我們也叫他們做等腰三角形,以後每逢提到他們的時候,我就沿用這個名稱了.

我們的中等階級,是由正三角形所組成的.

我們的公務人員和紳士們,是正方形(我自已忝在其列)和正五邊形.

往上就是貴族了,他們也有等級,從六等邊起,邊數逐漸增多,以至得到正多邊的榮銜爲止. 最後邊數愈多,邊長愈小,差不多和圓形一樣的,就歸爲元(圓)老階級,這是我們人類中最高的一級.

依照我們這兒的自然定律,凡屬男孩,一定比他的父親多一邊,因之每傳一代,在社會上的地位,照例晉升一級. 例如正方形的兒子是正五邊形,他的孫子是正六邊形;如此例推.

但是這條定律對於商人不常適用,對於工人和兵士們更是無效. 這類人的邊不都相等,實在說起來,眞不配叫做人類,所以不能享受自然定律所賦與的權利,因之等腰三角形的兒子,仍舊是等腰三角形. 話雖如此,希望並未全斷,縱然是等腰

階級的人們，他的子孫仍然可以有上進的希望．因爲經過了長期的軍事訓練，或勤勉熟練的工作之後，那兵士和勞工階級中的優秀分子，底邊可以增長少許，同時其餘兩等邊也縮短一點，這種例子是常見的．由元老們主持，將他們的子女，再配爲夫婦，常能產生更近似於正三角形的嬰孩．

等腰階級的生產率雖高，但是從等腰家庭中產出眞正三角形，是一件極其希罕的事．因爲要想得一個眞正地道的正三角形子孫，不但要經過許多代的小心擇配，而且一代一代的祖先，都要能勤儉自持，堅忍自勵，繼續不斷的努力長進．一旦成功，不但合家歡樂，就是近鄰遠戚，也無不傳爲美談．經過社會局衛生科嚴密檢查之後，如果該嬰孩確爲正三角形，就給與證明書，同時在莊嚴的典禮之下，歸入正三角形階級，說到這裡，讀者一定要問到要證明書有何用處？祇要生出的兒子是正方形，就可以證明父親是正三角形，何必多此一舉呢？諸君不要急，且聽我來道．第一層我們稍有地位的婦女們，決不下嫁沒有證書的正三角形，再說有時候稍爲有一點兒不正的三角形，也可以產生正方形的兒子，不過在這種情形之下差不多千篇一律的都沒有好結果，再傳一代下去，不是到不了正五邊形的地位，就是仍舊退化爲三角形．這是閑話，表過不提．

却說那產生正三角形的等腰父母，此時的心情，眞是又悲又喜，喜的是鴉巢生鳳，喜溢門楣，悲的是離別在卽，永難再見．因爲嬰孩檢查合格之後，當時就被取去，由那沒有兒女的正三角形，領作螟蛉之子．領取的時候，必須發誓永遠不准此子回他的老家，或是看望他的親族，爲的是怕這血氣未定的青年，於不知不覺之間，學了壞樣，仍舊回到原來的地位去．

再說這種千載難逢的盛事，不但那可憐的下等人們引爲幸事，就是一班貴族中人士，也是十分歡迎的． 這班高等階級的人們，各人心裡明白，知道這種稀有的現象，對於他們的利益，毫無妨碍，却又爲防止下層革命極有用的屏障． 假使這些尖角的亂民，完全沒有上升的希望，也許在他們作亂的時候，找到很有本事的首領，縱然有元老們的智慧，也無法應付． 但是造物者最聰明不過，一面叫他們增長智識，

一面又令他們的銳角，依同樣比例增加，逐漸變成近似於正三角形的度數. 所以兵士階級中最兇暴可怕的動物們，智識增長之後，論理應該更會利用他們的武器來作亂，可是上帝同時却把他們武器的危險程度減輕了!

造物者的調劑手段，是多麼值得讚美呵! 這樣看起來，二元世界之所以適於貴族專政，真可說是天命攸歸. 多邊階級和元老們，利用這自然定律及人類不能遏止的上進心理，常常能弭亂於未萌. 加之醫學發達，也予維持治安以不少的助力. 有些比較聰明的亂黨首領，經國家醫院醫師施行手術之後，變爲十分齊整，立卽可以升入正人階級，享受自然定律所賦與的權利. 因之有許多事實上還差得遠的亂黨首領爲了後來可以變爲貴族，都被引誘到國立醫院來，這一來却自投羅網了，有的被終身監禁，那最頑強不化，無法可治的，就處以死刑. 於是那些等腰亂黨旣沒有首領，又沒有計劃，很容易的被國家所豢養的他們同類給剿滅了，要不然就由元老們設計使他們內部彼此猜忌，互相殘殺. 這種變亂，在我們每年統計報告上總不下一百二十條起，此外還有二百三十五次的小暴動，通通是這樣解決的.

4. 二元世界中的婦女

諸位如果認爲我們兵士們的銳角是可怕的，那麼一定可以想像到我們的婦女們更是可怕得多. 因爲兵士是楔，婦女是針，兩頭都是尖的. 更加上她們可以任意隱藏，叫人看不見，你想想，二元世界中的婦女，决不是可以忽視的.

但是也許有些年青的讀者們，問到二元世界的婦女，如何能使她們不被看見，這一層我想不必解釋就應該明白. 不過有些人是不肯用腦子的，所以還是讓我說幾句話來解釋.

放一口針在桌上，把你的眼睛靠着桌沿，從牠的旁面看去，不消說可以看見牠的全長；但是如果從牠的兩頭看去，那麼除了一點之外，就什麼也沒有了，實際上幾乎是看不見了. 我們的婦女正是一樣；她側身相向的時候，我們看她是一條直綫，她那口與眼所在的一端——我們這兩種器官是合而爲一的——向着我們的時候，我們僅僅看見一個極亮的小點；但是如果她的後頭向看我們——這一頭是不很亮的，

幾乎和無生物一樣發暗——，那就和帶着隱形盔一般了。

讀者們現在總該明白我們所處地位的危險吧？如果認爲體面商人的角度是有危險性的，如果認爲和工人相撞是不免流血的，如果認爲和軍官碰頭是要受重傷的如果認爲輕輕的觸着兵士們的頂角就可以致死命的，——那麼和婦女們相撞，除了立卽嗚呼哀哉以外，還能怎樣？何况她們又有隱身之術，卽便看得見也不過淡淡的一點光兒，縱然是極其小心的人，也難總總避免相撞呢？

爲了減輕這種危險起見，二元世界中隨時隨地都頒定得有法律；在那偏南溫度不高的地方，吸力較大，人類常有不由自主的運動，對於婦女們的禁律，當然要嚴厲得多。不過由下列摘要，可見一斑：

1. 凡住宅東面必設一門，專爲婦女出入之用；出入之際，態度須莊重斯文；不得擅入男子用門或西門．

2. 婦女在公共地方行走時，須不斷地叫喊，違者處以極刑．

3. 凡婦女患羊角瘋症，痙攣症，久年傷寒，劇烈嚏噴，及一切能使身不自主的病症，一經驗實，立卽處死．

有些地方規定婦女在公共場所站立或行走時，須將後身左右擺動，令在後面的人知道她的所在，否則處以極刑．有的地方規定婦女行動時，後面要跟隨一人，兒子，僕役，丈夫都可以．有的地方完全把婦女禁錮起來，除非有宗教儀節的日子纔可出去走走．但是我們元老中明白事理的人，以爲對於婦女們的禁令太繁，不但減少人口，耗傷元氣，而且增加家庭謀殺案件，所得不償所失．因爲婦女們在家被禁，在外受制，有時候憤激起來，常有殘殺她們的丈夫和子女，以洩其忿的事情；在那比較寒冷的區域，有時在一兩個鐘頭之內，全村男丁，都遭了婦女們的毒手．所以上面所述三條法律，在治安較好的地方，已很夠用，差不多可認爲是我們婦女法的全部了．

其實保護我們的，並不在乎法律，而在婦女們本身的利益．因爲雖然她們一退身之勢，就可致人死命，但是如果她們的尖端，不能從那臨命掙扎的犧牲者的身體

內立時拔出去，她們那脆弱的身軀，也是要香消玉碎，同歸於盡的．

加之習慣風俗，也偏向着我們．我前面曾經說過在那文化落後的地方，婦女們在公共場所，是要左右擺動她們後身的．其實這種動作，在有史以前，已為文明都市中以禮法自繩的婦女們的一種習慣，幾乎成為一種本能行為．用法律來强迫實行這種當然的動作，是有損於體面的．元老階級中的命婦們那種優美的，有韻味的調和的擺動，可以使商人婦女見而生羨，轉相模仿，雖則不免有東施效顰之誚，然而那等腰家庭中的婦女，看見她們那種像鐘擺一般的單調擺動，也是一樣的讚美而效尤．這些下等家庭之內，婦女後身擺動，並非生活上所必需，尚且相習成風．所以在稍有地位和聲望的家庭裏面，『後身運動』的普及，與時俱進，丈夫子女們，因此得免於看不見的危險，這不能不說是大幸事了．

但是不要以為我們婦女們是一點情感也沒有的．不幸在她們感情衝動的那一會兒，來不及顧到其他一切．這是由於她們身體構造的不同所致，毫無疑義．因為就頂角而言，她們比那最低級的等腰形尚且不如，所以一點腦力也沒有，當然不會回憶，評判或預測，記憶力更不消說是沒有的．因此在忿怒的當兒，她們是不認親疎的．我曾親眼看見過一個婦人，把她的全家都殺害了，半點鐘之後，她的怒氣平息了，同時死體也被人移走了，她還問到她的丈夫和子女是怎樣了！

只要婦女們在可以隨意轉彎的地方，千萬不要惹惱了她們．當她們在寢室內的時候——這種寢室是故意做成叫她們不能轉身的——你只管隨便做什麼說什麼都不要緊，因為此時她們有天大本領也施展不出來；無論她們如何恫嚇也可以不怕，就是為了要平息她們的怒氣，許給她們點什麼也無關係，因為事情過去以後不一會兒，她們就完全忘記了．

總而言之，我們的家庭生活，很為美滿，不過在那兵士階級中的下等家庭，却不可同日而語．在那裏，做丈夫的旣無機智，又不謹愼，常常惹出慘不可言的事變．這班軍人以為他們的武器是萬能的，有恃無恐，性情兇暴，從不會假充斯文，往往忘記為婦女們另闢寢室，或者在戶外狂言妄語，得罪了他們的妻子，又不肯當時認錯

賠罪. 加之天生劣質,不善辭令,比不上那聰明的元老們,能夠花言巧語,轉瞬之間就可取得牀頭人的歡心. 結果總是一場慘殺;等腰階級中最兇悍好亂者下的場,往往如此,然而這並不是沒有好處的,許多元老們都以爲這種女性的毀滅,乃上天所命,藉以消滅過剩的人口,并可遏亂於未萌,這也不可謂爲沒有相當的理由.

然而在那規律森嚴的元老家庭中,他們的生活,決不如你們在三元世界裏面那樣的美滿,這是我敢斷言的. 如果和平的意義,只是限於不殺人而止,那麼在他們家庭中,這種的和平是有的,不過他們夫妻間志趣不同,嗜好自異,元老們爲求安全起見,只好犧牲家庭幸福. 原來在那元老或多邊階級的家庭中,做母親和女兒的,一定要把眼和口常常向着她們的丈夫及他的男友,這種習慣,說不清是從什麼時候就有了的——現已爲上等階級的婦女們一種本能的動作. 假使有聲望的人家,有婦女背向丈夫的事情發生,都認爲是一種不祥之兆,家道從此衰敗,亦未可知.可是這種習慣,對於安全方面,固然很好,然而也有壞處,且聽我道來.

在工人或商人的家裏,婦女們處理家務的時候,可以背向着丈夫,不犯忌諱,所以一天之內,至少有些時候家裏面是靜悄悄的,只聽見微微的呼聲知道她們的所在而已. 但是在上等家庭中却不然了. 那懸河之口和尖銳的眼光永遠牢牢地對着那一家之主,談鋒之健,無以復加. 要阻止她們發言,比要避免她們的刺費事得多更兼所言皆爲無意識之談,連她們自己也不知道說些什麼,又沒有自制的能力,無怪乎許多憤世嫉俗的人,都說寧願受那無形的刺而死,不願受那安全的絮聒而生啊!

在你們三元世界的讀者們目光中,我們婦女的情形,好像是太可憐了,其實又何嘗不然呢? 最下等的男性,可以有增長角度的希望,後來有升入正途的可能,但是婦女們決不能作此想. 『做了婦女,永遠是婦女』是上天所命,進化定律是不容女性分脊一攤的. 然而我們至少還可以讚美造物者之巧妙的安排,因爲不給她們希望,也不給她們記憶力和預測力,不叫她們想到過去和將來的屈辱,使她們昏然無知的生活着,二元世界的法律,當然也是根據這點而定的. (未完)

問題欄

本欄之目的，在徵集關於中等算學範圍內之種種問題，不拘科目，不限難易，以供讀者之研究，藉收觀摩之效． 凡本刊讀者，皆可提出問題，及解決本欄內所提出之問題． 無論出題或解題，概依收到之先後，次第編號發表，而出題者及解題者之姓名及所在學校或住址，均隨題披露． 數人同解一題，解法同時則擇尤發表，解法異時則分段刊登． 來稿務祈繕寫清楚，姓名住址尤須明晰． 至解題時所用圖形，務請用黑色墨水精確作好，連帶寄下． 編者謹啟．

問題已解決者

1. 解次之聯立方程式：

$$x+y+z=3 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$x^2+y^2+z^2=21 \quad\cdots\cdots(2)$$

$$x^3+y^3+z^3=57 \quad\cdots\cdots(3)$$

解法（湖北省立女子高級中學一上王克敏）

由（2）式

$$(x+y+z)^2-2(yz+zx+xy)=21.$$

將（1）式代入簡單之得

$$yz+zx+xy=-6. \quad\cdots\cdots(4)$$

又因 $$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$$

$$=3(21+6)=81,$$

故由（3）得

$$xyz=-8. \quad\cdots\cdots(5)$$

由（1），（4），（5）知 x,y,z 爲次列三次方程式之三根：

$$X^3-3X^2-6X+8=0.$$

即 $(X+2)(X-1)(X-4)=0.$

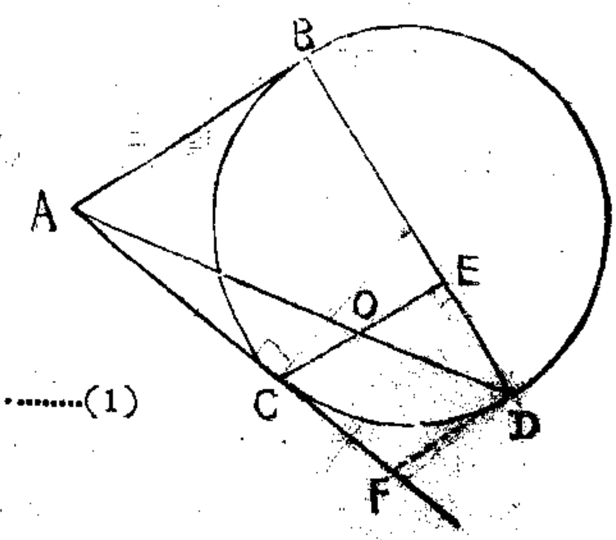
故得 $x=-2,\quad y=1,\quad z=4.$

編者按原題對於 x,y,z 三未知數均爲對稱式,故此三根之六種不同的排列,均爲本題之答案.

3. 自圓外一點 A 作直線切圓於 B,C. 過 B 作直徑 DB,再作 CE⊥DB,求證 AD 平分 CE.

解(湖北省立師範黃開茂)

設 AD 與 CE 相交於 O. 過 D 作切線交 AC 於 F,則因 AB,FD 爲切線, BD 爲直徑,



$\therefore$ AB, FD $\perp$ BD,

而 AB, FD $/\!/$ CE;

又 AB=AC, DF=CF.

今 OE: AB=OD: AD,

$$\therefore\ OE=\frac{OD\cdot AB}{AD}=\frac{OD\cdot AC}{AD}\cdots\cdots(1)$$

又 OC: DF=AO: AD,

$$\therefore\ OC=\frac{AO\cdot DF}{AD}=\frac{AO\cdot CF}{AD}.$$

但 CF: AC = OD: AO, $\therefore\ CF=\dfrac{OD\cdot AC}{AO}$,

$$\therefore\ OC=\frac{AO\cdot CF}{AD}=\frac{AO}{AD}\cdot\frac{OD\cdot AC}{AO}=\frac{OD\cdot AC}{AD}\cdots\cdots(2)$$

由(1),(2) OE = OC,

故 AD 平分 CE.

本題解者尚有湖北省立女子高級中學王克敏,張瓊英兩君,解法同,不另錄.

6. 通過已知之三定點各作一直線,令此所作三線成一三角形,內切於一已知圓.

本題由湖北省立實驗學校初中三下賀德駿君寄來一解，不甚完備. 在嚴濟慈君所著幾何證題法（算學叢書第九種，商務書館出版）中 37 至 39 頁曾有一解，但該解法中假設已知三定點中，至少有一點在已知圓外，故亦僅為特例之一. 今仍保留於此，以待讀者之研究.

提 出 之 問 題

提出者湖北省立師範黃開茂.

7. 在直線 AB 上求一點，令自此至 C，D 二定點距離平方之差為一定.

8. 有山高 a 尺，其頂有樹高 b 尺，在平地上 P 點望之，則山之對角等於樹之對角；求 P 點與山之距離.

提出者國立武漢大學嚴棟開.

9. 有三連續數，設其中數為一平方數，則此三連續數之乘積，必能以 60 除盡之. 求證.

10. 試解 $\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}=\frac{10}{3}\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$.

11. 二項式定理為

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}a^2b^{n-2}+nab^{n-1}+b^n$$

當 $n=1$ 時，含有 $n-1$ 為因數之各係數均為 0，故

$$a+b=a+a^0b+ab^0+b$$

即 $$a+b=2(a+b)$$

$$\therefore\quad 1=2.$$

書　評

高級中學用解析幾何　張敬熙編

北平文化學社發行

民國二十一年三版

二〇二頁.　定價一元二角

這本書是民國十七年出版的，不到兩年就再版了，三版最近又快售罄了，在國內中等算學出版界貧乏，各校競用原文教科書的年頭，竟有這樣廣大的銷路，不能不令我們有些驚奇，因此，我想不但有注意它的價值，而且有批評它的價值.

從這本書的例言，知道它的內容大多取材于斯密士和改耳二氏所著的"解析幾何原理"，不過，另外添設一章幾何之應用，這是很值得我們注意的. 我們要知道高中解析幾何教學的最大目標，是在使學者用代數方法研究幾何圖形性質，或是用座標方法解決幾何軌跡難題，正如用代數方法解決算術四則難題一樣的巧妙；這個能夠引起學者不少的興趣，據我所看見的高中解析幾何教科書，特別注意到這個地方的委實很少，所以這章是全書中最精彩的地方.

初學解析幾何的人最感受困難的是符號的定則，編者對于這方面似乎沒有詳細的討論，甚至祇當作一種規約，而不加以嚴謹明晰的說明，强令學生牢記，結果不但是記不牢，反而弄得觀念模糊不清，這是我們引為缺憾的.

例如：在16頁，直線的法線式$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$. 式中p恆為正，$\alpha\angle2\pi$，但當$p=0$時又要假定 $\alpha\angle\pi$. 這裏應該將直線在各象限的法線式逐一討論，以求其法線式，並須用圖解表示. 如果在第三和第四象限內，假定p可以為負數，則α祇受小于π的一個限制，照這樣講法，我想是比較便利而清楚些. 在65頁，"P與O在AB之異側則AB至P，距離為正，在同側則為負，若過原點則以向上者為正，向下者為負". 這個規約應該將p的座標代入AB的法線式，再由點和線在同異側的區别，詳

細決定符號的正負.我們覺得要使學生懂得透徹,才能記得牢固.

編者對于基本事項,雖是講得過於簡略,但是對於高深的部分,却是講得特別詳細. 例如極和極線,及高等平面曲線在普通高中教科書裡是不太見到的. 這些在高等算學雖是應用很廣的教材,可是不適宜於初學,像這樣輕重倒置的編制,我們是不敢贊同的. 此外,篇中所彪陳的定理都是用正座標講的,但是習題却有許多用斜座標的,使學者望而生畏,幾乎無從下手;這是我們認爲要改良的.

其次,在編制上,編者開始就講座標之變換,這是我們認爲不妥當的,因爲初學的時候,軌跡和方程的意義都不太明白,致他"方程之次數不因座標軸之變換而有改變"的理論和使方程化爲簡單的功用,怎麼會有澈底了解. 我們的意見,是講完直線的性質以後才開始,至少是要排在軌跡和方程一章以後才對.

總而言之,這本書仍不失爲一本可用的高中教科書,教料豐富,叙述簡潔,理論嚴謹,而無滯晦的色彩;編制的次序,大體合乎教學原理,倘若編者對我們所提出各點的意見,認爲可採的話,我們便希望他在下次再版時,請他改正,並注意類似下列的錯誤——或許是疏忽——的地方:

在97頁,定義,半徑爲正數之圓曰實圓,爲負數之圓曰虛圓.

圓之半徑係取其絕對值,當然無所謂正負,此處正數必係實數之誤,負數必係虛數之誤,或者可以改爲半徑之平方爲正數之圓曰實圓;爲負數之圓曰虛圓.

在158負,橢圓方程式$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,與切線方程式 $y=mx+b$ 聯立所得之等根關係式爲$b=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$.在同一定理中以同一文字代表兩個不同的係數,很容易使學生混淆不清,所以$y=mx+b$.應改爲$y=mx+k$,較爲妥當.

此外,書中魯魚亥豕之處,在三版後還是非常多,可惜沒有時間替它校正,這是要請編者特別注意的.

最後,我們以十二分的誠意,盼望編者用原有編輯的勇氣,把這本書好好地加以修正,使成爲一本不僅可用而且合乎時代的教科書,那不但是高中學生的福音,且也是我們在高中教算學的同人的好消息. （余潛修）（王雍紹）

本刊第一期目錄

本刊啓事

(一)本刊草創伊始加之出版匆促疎忽謬陋在所不免還祈海內高明有以教之

(二)本刊除特約國內有名學者及中學算學教師長期撰述稿件外尤歡迎讀者投稿凡關於中等算學之稿件不拘門類一律歡迎揭登後略致薄酬以答雅意

(三)自第三期起問題欄中另闢一部專載國內有名大學入學試驗算學試題并附解法以供中學生升學預備之參考讀者幸注意焉

(四)本刊徵求紀念定戶辦法如下

1. 本社爲紀念創刊優待讀者起見擬徵求紀念定戶一百號
2. 凡自第一卷第一期起定閱全年者即爲紀念定戶
3. 紀念定戶特價一元郵費在內
4. 徵求期間自民國廿二年一月起至三月底止