萬有文庫
第一集一千種
王雲五主編

平面幾何學
面積

林鶴一　武田登三著
黄元吉譯

商務印書館發行

平面幾何學
面積

林鶴一 武田登三著

黄元吉譯

算學小叢書

王雲五主編

萬有文庫

第一集一千種

黃元吉譯

發行兼印刷者　上海寶山路　商務印書館

發行所　上海及各埠　商務印書館

中華民國十九年四月初版

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

PLANE GEOMETRY—AREA
By
HAYASHI AND TAKEDA
Translated by
HUANG YUAN CHI

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1930

B三四分

目　　次

平面幾何學　面積

第　一　章

矩形之面積

下列各項，須先知之。

1.　平面形之面積，或單稱積，係言其形內所容平面之量也。

2.　兩直線形能疊合者，此兩直線形必相等。然逆言之，兩直線形面積相等者，此兩直線形未必適能疊合。因有此區別，故兩直線形能疊合者，特稱之爲全等形。用$\equiv$之記號。

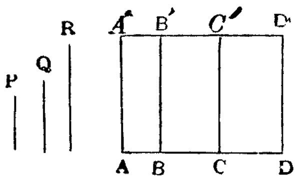
3.　以所定二線分，爲矩形之二鄰邊，則此矩形，卽稱之爲所定二線分所包之矩形。如 a，b 爲所定之二線分，則此二線分所包之矩形，卽以 a,b 之記號表示之

可也。又欲表$(AB+CD)$ 及 $(A'B'+C'D')$二線分所包之矩形，可用$(AB+CD)(A'B'+C'D')$之記號表示之。惟此爲表示矩形之記號，與代數學乘積之記號，意義不同。

4. 以所定一線分，爲正方形之一邊，則此正方形，卽稱之爲所定**一線分上之正方形**。如 AB 爲所定之一線分，則此一線分上之正方形，卽以$\overline{AB}^2$之記號表示之。此亦不與代數學二乘冪同意。

5. 於一線分上任定一點，是爲**內分**。於一線分之延長線上任定一點，是爲**外分**。由所分之點至線分之兩端，各爲**分**。外分之二分，易誤會，宜注意。

定理 1. 此一線分與彼若干線分和所包之矩形，等於彼若干線分各與此一線分所包各矩形之和。



題意 此一線分爲

H. 彼若干之線分爲 P, Q, R, 則

$$H.(P+Q+R)=H.P+H.Q+H.R.$$

證. $AA'=H$, $AB=P$, $BC=Q$, $CD=R$.

$\therefore$ $AD=P+Q+R$.

作 AA', AD 所包之矩形 $ADD'A'$,

由 B,C 兩點，作 AD 之垂線，與 $A'D'$ 相交於 B',C' 兩點。

如是則 $\square AD'=\square AB'+\square BC'+\square CD'.$

然 $\square AD'=H.(P+Q+R),$

$\square AB'=H.P,$

$\square BC'=H.Q,$

$\square CD'=H.R.$

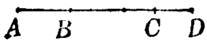
故 $H.(P+Q+R)=H.P+H.Q+H.R.$

注意 此定理所演之式，與代數學公式 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$ 雖屬相當。然其意味，各不相同。蓋代數學所用之文字，係代數。此定理所用之文字，係代直線，非數也。故幾何學之式，與代數學之式，勿涉混同，宜注意。

系. 同以一線分爲一邊之各矩形和，等於所同之一邊與他邊和所包之矩形。

主要問題 1. 於一直線上，順次取 A,B,C,D 四點，得式如次：

$$AC.BD=AB.CD+AD.BC.$$ 試證明之。



證. $AC.BD=(AB+BC).BD$

$=AB.BD+BC.BD$

$=AB.(CD+BC)+BC.BD$

$=AB.CD+AB.BC+BC.BD$

$=AB.CD+(AB+BD).BC$

$=AB.CD+AD.BC.$

注意. 此問題爲尤拉 (Euler) 之定理。

例題 I

1. 此二線分之差與彼一線分所包之矩形，等於此二線分各與彼

一線分所包兩矩形之差。

2. 二矩形有一邊相同者，此二矩形之差，等於所同之一邊與他二邊差所包之矩形。

3. 一線分，內分或外分爲二分，則全線上之正方形，等於二分各與全線所包兩矩形之和或差。

4. 二線分各分爲二部分則二全線所包之矩形，等於一線分上之二部分各與他線分上二部分所包各矩形之和。

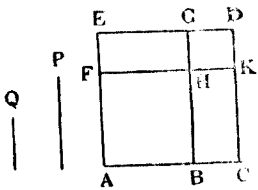
注意. 此蓋與代數學公式

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd \text{ 相當}$$

定理 2. 二線分和上之正方形，等於各線分上正方形之和加二線分所包矩形之二倍。

題意、 P,Q 爲二線分，

$$(P+Q)^2=P^2+Q^2+2P.Q$$



證. 於直線 ABC 上，

取 $AB=P$, $BC=Q$, 乃作 AC 上之正方形 $ACDE$。由 B 點作 AC 之垂線 BG, ED 交於 G。

又於 AE 上取 $AF=P$ 由 F 點作 AE 之垂線 FK。與 CD 交於 K。FK, BG 之交點爲 H。

如是則 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{HK}^2+KC.BC+FH.FE.$

卽 $(P+Q)^2=P^2+Q^2+P.Q+P.Q$

$=P^2+Q^2+2P.Q.$

別法. $(P+Q)^2=(P+Q)(P+Q)$

$=(P+Q).P+(P+Q).Q$ 〔定理 1〕

$=P^2+P.Q+P.Q+Q^2$ 〔定理 1〕

$=P^2+2P.Q+Q^2.$

注意。 此定理與代數學公式

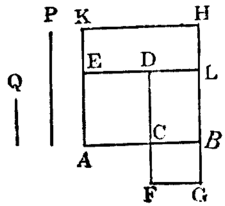
$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

雖屬相當。然其意味各不相同。

定理 3. 二線分差上之正方形，等於各線分上正方形之和內減二線分所包矩形之二倍。

題意。 P, Q 爲二線分

$$(P-Q)^2=P^2+Q^2-2PQ.$$



證。 於直線 ACB 上取 $AB=P$, $CB=Q$,乃作 AC 上之正方形 $ACDE$, 又作 AB 上之正方形 $ABHK$, 而 BC 上之正方形 $BCFG$, 係作於反對之側。

如是則 AEK, FCD, GBH 各成爲一直線。

乃延長 ED,使與 BH 交於 L。

如是則
$$\begin{aligned}\overline{AC}^2&=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-KH.KE-FD.FG\\&=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-AB.BC-AB.BC\\&=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2AB.BC.\end{aligned}$$

即 $(P-Q)^2=P^2+Q^2-2P.Q.$

別法。
$$\begin{aligned}(P-Q)^2&=(P-Q)(P-Q)\\&=(P-Q).P-(P-Q).Q\\&=P^2-P.Q-P.Q+Q^2\\&=P^2+Q^2-2P.Q.\end{aligned}$$

注意。 此證與代數學公式

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$ 相當。

主要問題 2. 於 AB 線分上，二等分於 C；又任意分之於 D，得式如次：

$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{2AC}^2+\overline{2CD}^2$，試證明之。

證．　$\overline{AD}^2=(AC+CD)^2$

$=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2+2AC.CD\cdots\cdots(1)$

$\overline{BD}^2=(BC-CD)^2$

$=(AC-CD)^2$

$=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2-2AC.CD\cdots\cdots(2)$

$(1)+(2)\cdots\cdots\cdots\cdots\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{2AC}^2+\overline{2CD}^2$.

例　題　II

1．設 C 爲線分 AB 之中點，則 $\overline{AB}^2=4\overline{AC}^2$，試證明之。

2．由二線分和之正方形，減其差之正方形，必適等於二線分所包矩形之四倍。

3．就所定之線分，分爲三分，使各分上正方形之和爲最小。

4．就所定之線分，分爲三分，則全線上之正方形等於各分上正方形之和加各二分所包矩形之倍。

注意．　本題係與代數學公式

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ 相當。

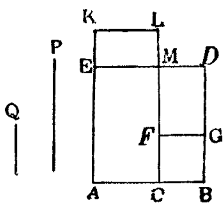
5．分 AB 線分於 C。令 $\overline{AC}^2=\overline{2BC}^2$ 得式如次，

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2AB.AC$，試證明之。

6．分 AB 線分於 C，令 $AC.AB=\overline{BC}^2$，

得式如次：　$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=3\overline{BC}^2$，　試證明之。

定理4．　二線分上各正方形之差，等於二線分之和與差所包之矩形。



題意．　$P.Q$ 爲二線分。

$P>Q$

當 $P^2-Q^2=(P+Q)(P-Q)$

證。 作 AB,令等於 P.

於 AB 上取 BC 等於 Q,故 AC 等於 $P-Q$.

乃於 AB,BC 上各作正方形 $ABDE,BCFG$.

延長 AE,令 $EK=Q$.

延長 CF,令 $FL=P$,與 ED 交於 M.

如是則 $\overline{AB}^2-\overline{BC}^2=AC.AE+FG.FM$.

然 $FG.FM=EM.EK$

故 $\overline{AB}^2-\overline{BC}^2=AK.AC$

$=(AE+EK)(AB-BC)$

$=(AB-BC)(AB-BC)$.

$P^2-Q^2=(P+Q)(P-Q)$.

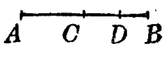
注意。 此定理與代數學公式

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$相當。

主要問題 3. 分一線分爲二分，此二分所包之矩形，等於半全線上之正方形與由中點至分點間距離上正方形之差。

題意。 C 爲線分 AB 之中點, D 爲任意之分點,當

$AD.BD=\overline{AC}^2\sim\overline{CD}^2$



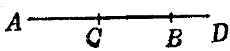
證。 $AD.BD=(AC+CD)$

$(BC\sim CD)$

$=(AC+CD)$

$(AC\sim CD)$

$=\overline{AC}^2\sim\overline{CD}^2$



〔定理 4〕

例 題 III.

1. 將線分 AB 二等分於 C,又任意分之於 D,得式如次,
$\overline{AD}^2 \sim \overline{BD}^2 = 2AB.CD$,試證明之。

2. 各矩形二邊之和有定長。則此各矩形中面積最大者。其二邊必係相等,試證明之。

3. 周圍相等之各矩形中求其面積之最大者若何。

4. 將線分 AB,內分或外分於 D, D',而 C 爲 AB 之中點,得式如次:

$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 4\overline{CD}^2 + 2AD.BD$

及 $\overline{AD'}^2 + \overline{BD'}^2 = 4\overline{CD'}^2 - 2AD'.BD'$,試證明之。

第 二 章

平 面 形 之 面 積

第 一 節

直 線 形 之 面 積

下列各項,須先知之。

1. 平行四邊形任以一邊爲底邊，底邊與其對邊之距離，卽平行四邊形之高。矩形任以一邊爲底邊,底邊之鄰邊,卽矩形之高。故所謂底邊與高者乃相提而並論。以何者爲底邊卽可見何者之爲高矣。

2. 三角形由其頂點至底邊作垂線，此垂線卽三角形之高。

3. 梯形之高卽平行二邊之距離,而平行之二邊,皆爲底邊,稱爲上底,下底。

4. 任於平行四邊形對角線上取一點，由此點作平行於各邊之直線,卽分原形爲四形,仍各爲平行四邊形。此四形中，有二形以原對角線爲對角線,故稱此二形爲附於對角線之平行四邊形。其他二形稱爲餘形。

定理5. **凡平行四邊形,同在一底邊上,又同在於二平行線之間,其面積必相等。**

題意． $AB \parallel FC$則

$\square ABCD = \square ABEF$

證． 在 $\triangle BCE, \triangle ADF$ 內，

$BC = AD$, $\angle BCE = \angle ADF$,

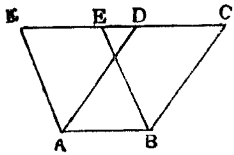
$\angle BEC = \angle AFD$

$\therefore \quad \triangle BCE = \triangle ADF$.

$\therefore$ 四邊形$ABCF - \triangle ADF$

$=$四邊形$ABCF - \triangle BCE$.

即 $\square ABCD = \square ABEF$.



系 1. 平行四邊形與同底，等高之矩形等積。

系 2. 兩平行四邊形 $\begin{cases} \text{等底，等高者必等積。} \\ \text{等底，等積者必等高。} \\ \text{等高，等積者必等底。} \end{cases}$

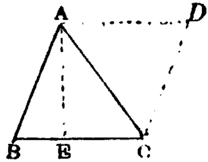
定理 6. 三角形之面積，等於同底，同高之矩形面積之半。

題意． $\triangle ABC$ 之底邊爲 BC，高爲 AE，則 $\triangle ABC = \frac{1}{2}BC.AE$

證． 由 A, C 兩點，各作對邊之平行線，相交於 D。如是則 $ABCD$ 爲平行四邊形。

故 $\triangle ABC = \frac{1}{2}\square ABCD$

$= \frac{1}{2}BC.AE$.

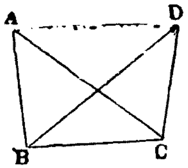


〔定理 5, 系 1〕

系 1. 兩三角形
- 等底，等高者必等積。
- 等底，等積者必等高。
- 等高，等積者必等底。

系 2. 三角形作一中線，必適分三角形爲二等分。

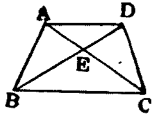
主要問題 4. 等積兩三角形 ABC,DBC,同以 BC 爲底邊，且同在一側，則聯其頂點成 AD 直線，必適與底邊平行。



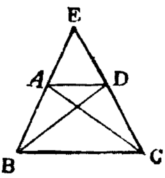
證. 由 A,D 兩點，各作底邊 BC 之垂線，此二垂線必相等，(兩三角形同底等積)且平行；
故 AD 平行於 BC。

例 題 IV

1. 試由面積之定理，證明下列之問題。
[將三角形二邊之中點聯成直線必適與第三邊平行。]



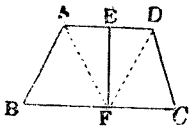
2. 令四邊形 $ABCD$ 兩對角線之交點爲E,若$\triangle ABE$ 等於 $\triangle DCE$, 則 AD 必適與 BC 平行。



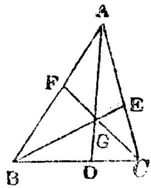
3. 四邊形 $ABCD$ 令其對邊 BA,CD 之延長線相交於 E,若 $\triangle EBD$ 等於 $\triangle EAC$, 則此四邊形必爲梯形。

4. 兩三角形底邊，頂角，面積皆相等者，此兩三角形必為全等。

5. 四邊形 $ABCD$。令其對邊 $AD.BC$ 之中點依次為 E,F，聯成 EF 直線。若此直線適分原形為二等分，則此四邊形必為梯形。



主要問題 5. 由三角形之重心，至各頂點聯成三直線必適分原三角形為三等分。



題意. ABC 為三角形，$AD.BE,CF$ 為三中線，G 為重心，則

$\triangle ABG=\triangle BCG=\triangle ACG$

證. $\triangle ABE=\triangle CBE$　〔定理 6　系 2〕

$\triangle AGE=\triangle CGE$　〔定理 6　系 2〕

(−

$\triangle ABE-\triangle AGE=\triangle CBE-\triangle CGE$

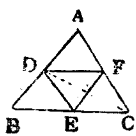
$\therefore$　$\triangle ABG=\triangle BCG$.

依同理，可證　$\triangle BCG=\triangle ACG$.

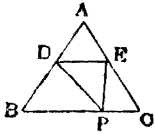
例　題　V.

1. 三角形之三中線，必適分面積為六等分。

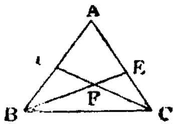
2. 將三角形每取二邊之中點聯成直線，必適分原三角形為四等分。



3. 將三角形二邊之中點聯成直線，以此直線爲另一三角形之底邊，而其頂點則在原形之底邊或其延長線上；如是則另一三角形必適等於原三角形四分之一。

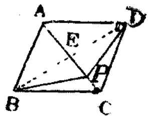


4. 三角形 ABC 之中線 BE, CD 相交於 F，如是則四邊形 $ADFE$ 必適等於三角形 BFC。



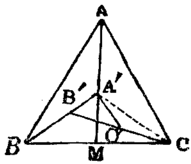
5. 在平行四邊形 $ABCD$ 對角線 AC 上任取 P 點，聯成 PB, PD，得式如次：

$\triangle APB = \triangle APD$，試證明之。

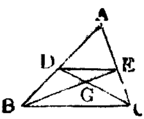


解法注意。 凡平行四邊形問題。往往作其對角線。爲解法之補助，

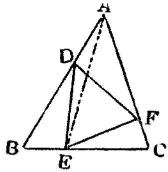
6. AM 爲三角形 ABC 之中線，A', B', C' 依次爲 $AM, A'B, B'C$ 之中線。如是則三角形 $A'B'C'$ 必適等於原三角形之八分之一。



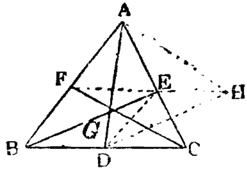
7. 三角形二邊之中點及重心，凡三點。問由此三點所成之三角形得原三角形若干分。



8. 三角形 ABC 各邊上各取三分之一。如 AD, BE, CF 則三角形 DEF 必適等於原三角形三分之一。



*9. 以三角形之三中線爲三邊成一三角形，此三角形必適等於原三角形四分之三。



主要問題 6. 將三角形二邊之中點聯成直線，以此直線爲平行四邊形之底邊，而其對邊則在於原三角形之底邊或底邊之延長線上，如是則此平行四邊形，必適等於原三角形之半。

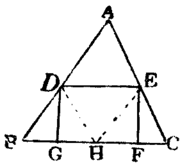
題意. ABC 爲三角形, $D.E$ 爲 AB, AC 二邊之中點，則

$$\square DEFG=\frac{1}{2}\triangle ABC.$$

證. 令 BC 之中點爲 H, 聯成 DH, EH 二直線; 如是則三角形 DHE 爲原三角形四分之一。

而 $\square DEFG=2\triangle DEH$

$\therefore\quad \square DEFG=\frac{1}{2}\triangle ABC.$

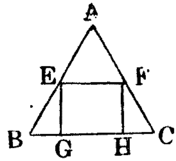


〔例題 V.2〕
〔定理 6〕

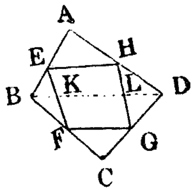
有*米者爲程途稍高之問題。初學者暫從略可也。

例 題 VI.

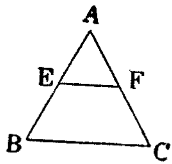
1. 三角形 ABC 之邊 AB, AC, 其中點依次爲 E, F, 由 E,F 兩中點作 BC 之垂線, 其正交點爲 G, H, 如是則四邊形 $EGHF$, 必適等於三角形 ABC 之半。



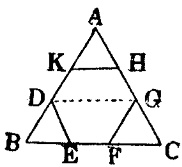
2. 將四邊形, 各邊之中點, 聯成平行四邊形, 此平行四邊形必適等於原形之半。



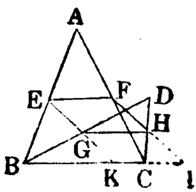
3. 三角形 ABC 之二邊 AB,AC,其中點依次爲E,F, 如是則四邊形$BEFC$ 爲梯形, 而其面積必適等於三角形 AEF 之三倍。



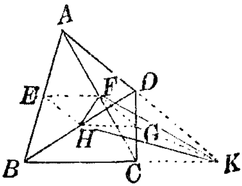
4. 設有正三角形紙片截其三隅使成正六角形, 問此正六角形之面積得原三角形若干分。



5. 同底同側之兩三角形聯其二邊之中點, 必成一平行四邊形; 其面積必適等於兩三角形差之半。



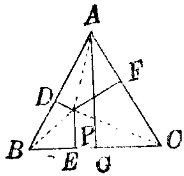
*6. 四邊形 $ABCD$ 兩對角線之中點爲 F, H, 兩對邊 AD, BC, 各延長之相交於 K; 如是則三角形 FHK 必適等於原四邊形四分之一。



將例題 $V. 3$ 及前題參證可也。

主要問題 7. 於正三角形內任取一點，由此點至三邊各作垂線，此三垂線之和恆不變。

題意. ABC 爲正三角形，P 爲形內任意之點，PD, PE, PF 爲各邊之垂線，則 $PD+PE+PF$ 恒不變。



證. P 與各頂點聯成直線，又由 A 作 BC 之垂線 AG.

如是則 $\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle BCP+\triangle CAP$

$$=\frac{1}{2}AB.PD+\frac{1}{2}BC.PE+\frac{1}{2}AC.PE \quad \text{〔定理 6〕}$$

$$=\frac{1}{2}BC.(PD+PE+PF) \quad [\because AB=BC=CA]$$

然 $\triangle ABC=\frac{1}{2}BC.AG$　　〔定理 6〕

$\therefore \quad PD+PE+PF=AG$

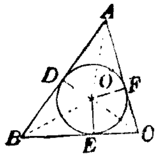
而 AG 爲一定之高

$\therefore \quad PD+PE+PF$ 亦爲一定。

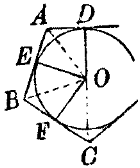
注意. 本題若依面積之定理解之，其法如何。

例　題　VII.

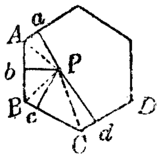
1. 三角形之面積，等於其周圍與內切圓半徑所包矩形之半。



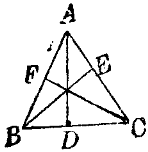
2. 外接於圓之多角形，其面積等於其周與圓半徑所包矩形之半。



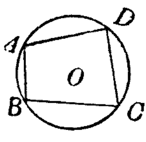
3. 由正多角形內任意之一點至各邊作垂線，其和恆不變。



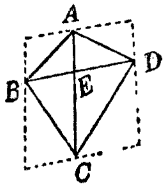
4. 由三角形各頂點至對邊各作垂線各與其邊所包之矩形，必皆相等。



5. 以所定之四邊作四邊形，若此四邊形可內接於圓；則於其圓內任何次序設置四邊，其面積不變。



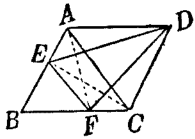
6. 以四邊形之兩對角線爲二邊，對角線之夾角爲夾角．使成一三角形；如是則原四邊形必適與此三角形等積。



7. 四邊形兩對角線之長及對角線之夾角，若皆爲一定，則其面積亦必爲一定；試證明之。

主要問題 8. 平行四邊形 $ABCD$ 之對角線 AC，準與 AC 平行作一直線；與 AB，BC 相交於 E，F，如是則三角形 AED 必適等於三角形 CDF。

明。聯 AF，CE 兩直線，



$\triangle ADE = \triangle ACE$ 〔定理6系1〕

$\triangle DFC = \triangle ACF$ 〔同 上〕

然 $\triangle ACE = \triangle ACF$ 〔同 上〕

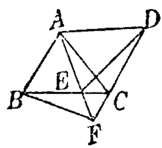
$\therefore$ $\triangle ADE = \triangle DEC$

解法注意。 凡如本題關於平行線者，往往於各點間酌添直線，俾可移動三角形之位置，而爲解法之補助。

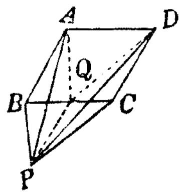
例 題 VIII.

1. 平行四邊形 $ABCD$，由 A 點引直線，與 BC，DC 或其延長線上相交於 EF；得式如次，

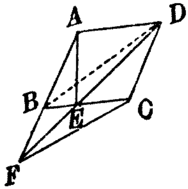
$\triangle ABF = \triangle ADE$，試證明之。



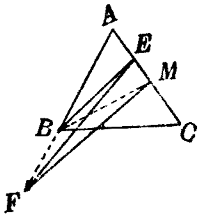
2. 由平行四邊形外之一點，與各頂點。聯成四個三角形，此四個三角形之中，以相對二邊爲底之二三角形之和或差，必適等於平行四邊形之半。



3. 平行四邊形 $ABCD$，由 D 點引一直線，與 AB 之延長線交於 F，得式如次：$\triangle ABE=\triangle CEF$，試證明之。

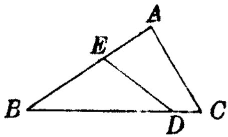


4. 三角形 ABC，由 AC 之中點 M 及頂點 B 任作兩平行線，與 AB 或 AC 或其延長線上相交於 F, E；如是則三角形 AEF 必適等於三角形 ABC 之半。

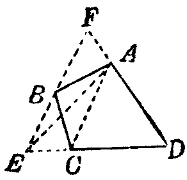


5. 求於三角形邊上一定點引一直線，適分此三角形為二等分。

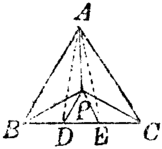
6. 直角三角形 ABC，其 AB 比 AC 大，於斜邊 BC 上取 D 點，令 $BD=AB$，由 D 點引一直線，分此三角形為二等分；此二等分線即 DE 與 AB 交於 E，如是則 BE, DE 恒等於 BC 之半。



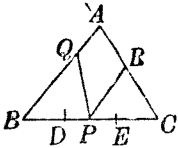
7. 四邊形 $ABCD$，由頂點 B 準與對角線 AC 平行引一直線與 DC, DA 之延長線相交於 E, F，如是則三角形 AED 必適與四邊形 $ABCD$ 相等。



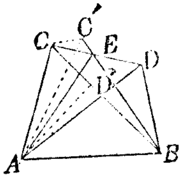
8. 求作與五角形等積之四角形。



9. 三角形 ABC,其底 BC 三等分於 D,E, 由 D,E 各與其近邊平行,作 DP,EP, 相交於 P;由 P 點與各頂點聯成直線, 必適分此三角形爲三等分。



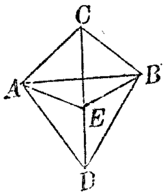
*10. 求於三角形邊上一點,引二直線,適分此三角形爲三等分。



*11. 立於 AB 上之兩三角形 ABC,ABD, 其頂點 C,D 聯成直線,E 卽爲其中點,得式如次:

$$\triangle ABE=\frac{1}{2}(\triangle ABC\pm\triangle ABD),$$

試證明之。

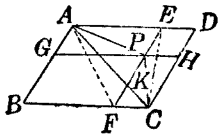


主要問題 9. 由平行四邊形 $ABCD$ 形內任意之一點 P,準與各邊平行引二直線;得式如次:

$$\triangle APC=\frac{1}{2}(\square PB\sim\square PD),$$ 試證明之。

證. 由 P 點作 GH,EF,使 $GH\parallel BC,EF\parallel AB$,聯成 AF,CE

兩直線,AC,EF 之交點爲K。



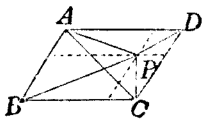
$$\frac{1}{2}\,\square PB=\triangle PFA$$
$$=\triangle APK+\triangle AKF$$
$$=\triangle APK+\triangle KEC$$
$$=\triangle APK+\triangle PKC+\triangle PEC$$
$$=\triangle APC+\triangle PEC$$
$$=\triangle APC+\frac{1}{2}\,\square PD.$$

($\because\triangle FAC=\triangle FEC$同減$\triangle FKC$
$\therefore\triangle AKF=\triangle KEC$)

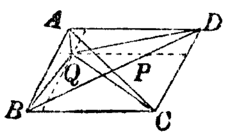
$$\therefore\triangle APC=\frac{1}{2}(\square PB\sim\square PD)$$

例題 IX.

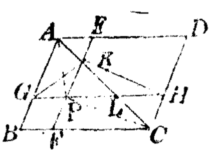
1. P 爲平行四邊形 $ABCD$ 形內之點,
$\triangle APC=\triangle APB\sim\triangle APD$,
試證之。



2. 平行四邊形 $ABCD$,其對角線之交點爲 P,而 Q 爲三角形 ABP 形內任意之點,
$\triangle AQC+\triangle BQD$
$=\triangle CQD-\triangle AQB$ 試證之。

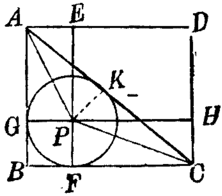


*3. 作平行四邊形 $ABCD$ 之對角線 AC,又由三角形 ABC 形內任意之一點 P,作AB,BC 之平行線 EF,GH,與 AC 相交於KL;如是則平行四



邊形 PD, PB 之差等於三角形 GKH 或 ELG 之二倍。

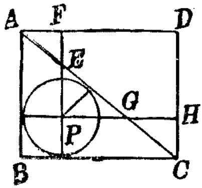
*4. 作矩形 $ABCD$ 之對角線 AC，又由三角形 ABC之內心 P，作各邊之平行線 EF，GH.



則 $$\triangle APC = \frac{1}{2}(\square AP + \square CP)$$

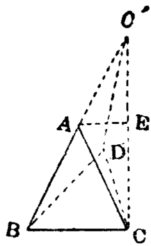
及 $$\square PD = \frac{1}{2}\square ABCD.$$ 試證之。

5. 等於矩形 $ABCD$ 之半之三角形 ABC，其內切圓之中心為 P；由 P 準與 AB, BC 平行引二直線，其與 AB 平行之直線，與AC, AD 相交於 E，F；而與BC平行之直線與 AC，CD 相交於 G, H；則



$\triangle PEG = \triangle AEF + \triangle CGH$，試證之。

主要問題 10. 諸三角形之底邊及周為一定之長，此諸三角形中，以二等邊三角形之面積為最大。



題意. 在 $\triangle ABC$ 內，$AB = AC$，其 BC 及周為定長。凡如 $\triangle BDC$ 任意之三角形，其周與 $\triangle ABC$ 相等者必為。

$\triangle ABC > \triangle BDC$

證. 延長 BA 令,$AC'=AC$,聯成 $C'D, DC, CC'$ 諸直線。

$AB+AC=AB+AC'=BC'$

$\therefore\ BD+DC=BC'$,

然 $BD+DC'>BC'$, 卽$BD+DC'>BD+DC$

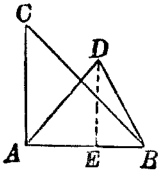
$\therefore\ DC'>DC$

故D點與BC,必在$\angle CAC'$二等分線AE之同側;又因$AE//BC$,故$\triangle ABC$之高大於$\triangle BDC$之高; $\therefore \triangle ABC>\triangle BDC$。

然$\triangle BDC$爲與$\triangle ABC$同底同周任意之三角形,故$\triangle ABC$爲最大。

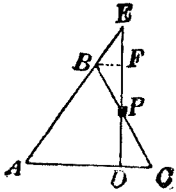
例 題 X.

1. 諸三角形之一邊及底邊有一定之長,此諸三角形中,以直角三角形之面積爲最大。

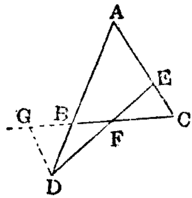


2. 諸角三形之底邊及高有一定之長,此諸三角形中,以二等邊三角形之周圍爲最小。

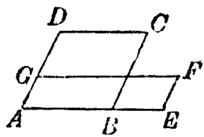
3. 就所設之相交二直線及一定點,任由定點引諸直線,與所設之二直線相交成諸三角形;此諸三角形中面積最小者,必係所引之直線以定點爲中點之三角形。



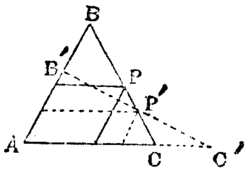
*4. 諸三角形頂角相同，夾此頂角之二邊和有一定之長；此諸三角形中，以二等邊三角形之面積爲最大。



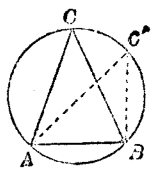
5. 就所設之周及角，作諸平行四邊形，以菱形之面積爲最大。



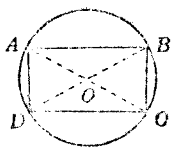
*3. 三角形ABC,於BC上任取P點，由P點準與他二邊平行各引直線，所成諸平行四邊形之中，其面積最大者其P點必爲BC之中點。



7. 就所設之底邊及頂角，作諸三角形，以二等邊三角形之面積爲最大。

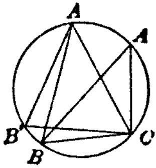


8. 求於所設之圓，作內接之矩形，令其面積爲最大。



9. 求於所設之半圓，作內接之矩形，令其面積爲最大。

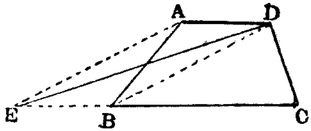
10. 內接於圓之諸三角形。以正三角形爲最大。



*11. 內接於圓邊數相等之諸三角形，以正多角形爲最大。

定理 7. 梯形之面積，等於同高而以兩底和爲底之三角形面積。

題意. $ABCD$爲梯形，其面積等於同高而以兩底 BC，AD 和爲底之三角形面積。



證. 聯 BD 直線，由 A 點準與 BD 平行引一直線，與 CB 之延長線相交於 E；又聯成 DE 直線，

則 $\triangle ABD=\triangle EBD$， 〔同底，等高〕

各加 $\triangle DBC$，

則 梯形 $ABCD=\triangle DEC$.

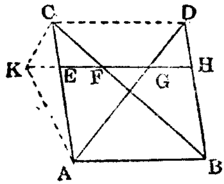
因 $AEBD$ 爲平行四邊形，故 $AD=BE$.

如是則 $\triangle DEC$ 之底邊，等於梯形兩底和，其高與梯形等。

系 1. 兩梯形之高及兩底和皆相等者，其面積必相等。

系 2. 梯形等於其高與不平行二邊中點之距離所包之矩形。

主要問題 11. 同底或等底且同在一側之兩等積三角形，以平行於底之直線截之，此截線上夾於各二邊間之線分必相等。



題意. $\triangle ABC=\triangle ABD$,

$FH//AB$,

則 $EF=GH$

證. 如謂EF不等於GH,

則

或 $EF<GH$,

而令 $FK=GH$,

聯成 AK,CK,CD 各直線，因 $\triangle ABC=\triangle ABD$，故 $CD//AB$

故 $AB//KH//CD$.

$\therefore$ $\triangle CKF=\triangle DGH$. 〔等底等高〕

梯形 $KABF$ = 梯形 $GABH$ 〔定理 7 系 1〕

———————————————(+

四邊形 $CKAB=\triangle ABD$

$=\triangle ABC$ 〔假設〕

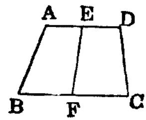
此不合理。 $\therefore EF\not< GH$.

依同理 $EF\not> GH$,

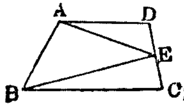
故 EF 必適等於 GH。

例　題　XI.

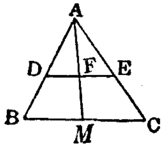
1.　由梯形二底邊之中點聯成直線，此直線必適分此梯形為二等分。



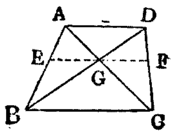
2.　以梯形不平行之一邊為底，對邊之中點為頂點，如是所成之三角形必適等於原形之半。



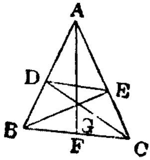
3.　三角形二邊間所夾之線分，若皆與底邊平行；此諸線分，與由頂點至底邊之中線相交，其交點必即為線分之中點。



4.　梯形對角線之交點為 G，由 G 引 EF，係與底邊 BC 平行；如是則 G 必為 EF 之中點。

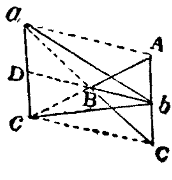


5.　三角形平行於底邊之直線，與二邊相交，由此兩交點；與底邊上兩頂點，聯成兩直線；此兩直線與由頂點至底邊之中線必同交於一點。



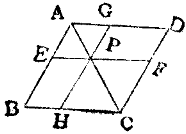
6.　三角形 ABC，由三頂點引三平行直線，與對邊相交於 a,b,c 三點；則

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\triangle abc,$$ 試證明之。



定理 8. 附於平行四邊形對角線之平行四邊形其餘形必相等。

題意. 由平行四邊形 $ABCD$ 之對角線上一點 P，準與二邊平行，作 EF，GH；條與二鄰邊平行；如是所成四平行四邊形之中，其附於對角線 $\square GE$，$\square HF$ 之餘形 BP，DP 必相等。



證. $\triangle ABC = \triangle ADC$,

$\triangle AEP = \triangle AGP$,

$\triangle PHC = \triangle PFC$.

由最初之式，減後二式之和；則

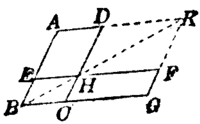
$\square BP = \square DP$.

主要問題 12. 求定理 8 之逆證

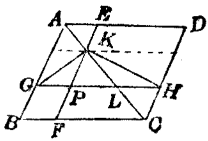
由 $\square BP = \square DP$，證明 P 點在 AC 上；

例題 XII.

1. 同為 B 角之兩等積平行四邊形 $ABCD$，$BGFE$，其 EF，CD 之交點為 H，而 AD，GF 之交點為 K，如是則 B 點必在 KH 直線上。

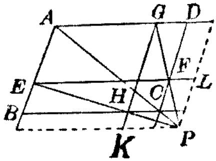


2. 平行四邊形 $ABCD$ 之對角線為 AC，三角形 ABC 內任意之一點為 P，由 P 點準與 AB，BC 平行作 EF，GH，

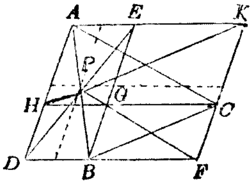


而與 AC 相交於 K, L;如是則平行四邊形 PD, PB 之差，必適等於三角形 GKH 或 ELF 之二倍。

*3. 準與平行四邊形 $ABCD$ 之二隣邊 AB, AD 平行，作 GH, EF 兩直線;其兩平行四邊形之對角線 EH, GF，必適與原形之對角線 AC 同交於一點。



*4. 以三角形之三邊各爲對角線，而其邊各與所設之二直線平行；如是凡成三個平行四邊形，此三平行四邊形之他三對角線，必同交於一點;試證之。



第二節

三角形邊上之正方形

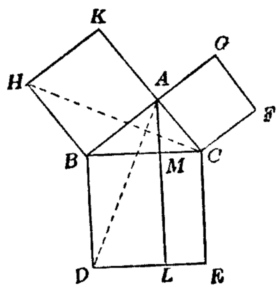
下例各項,須先知之。

1. 由一點 P 至 AB 直線上作垂線,其正交點稱爲**P 點對於 AB 直線上之正射影**。

2. 由線分 CD 之兩端 C, D, 各至 AB 直線上作垂線;其兩正交點間之部分,稱爲**線分 CD 對於 AB 直線上之正射影**。

3. 若線分 CD 之一端 C 在 AB 直線上,則線分 CD 對於 AB 直線上之正射影,爲由 D 點對於 AB 直線上之正射影與 C 點間之部分。

定理 9. 直角三角形斜邊上之正方形,等於他二邊上各正方形之和。



題意. $\triangle ABC$ 爲直角三角形,BC 爲斜邊,則

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$$

證. 於 BC, AB, AC 三邊上各作正方形 $BCED$, $ABHK$, $ACFG$, 由 A 作 BC 之垂線 AM,延長至與 DE 相交於 L;聯 HC, AD 兩直線: 則

$\triangle ABD \equiv \triangle BCH.$ 〔∵ 二邊夾角相等〕

$\triangle ABD = \frac{1}{2} \square BDLM,$ 〔定理 6〕

$\triangle BCH = \frac{1}{2} \overline{BH}^2$ 〔同上〕

$= \frac{1}{2} \overline{AB}^2.$

∴ $\square BDLM = \overline{AB}^2.$

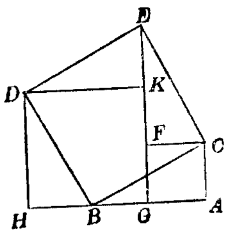
依理 $\square CELM = \overline{AC}^2.$

兩式相加,則

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$

注意. 此定理係紀元前六世紀希臘哲學家 Pythagoras 氏所發明。稱為 Pythagoras 之定理,甚為切要。本節所述之定理,問題,皆以此定理為基礎。此定理證法甚多。茲略述一二如次:

別證 1.



ABC 直角三角形 AC 邊上之正方形為 $ACFG$;
取 $GH = AB$, 而 GH 上之正方形為 $GHDK$,
取 $FE = AB$,聯 ED, EC, BD 各直線;
如是則 $\triangle ABC \equiv \triangle BHD$
$\equiv \triangle EKD \equiv \triangle CFE$

故四邊形 $BGED$ 為等邊。

然 $\angle HBD + \angle ABC = R\angle.$ 故 $\angle DBC = R\angle.$

故四邊形 $BCED$ 為正方形,卽 BC 上之正方形也。

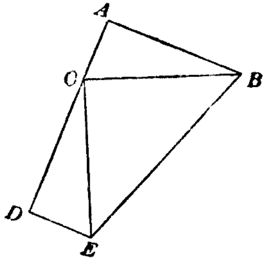
故 $\overline{BC}^2 = \triangle KDE + \triangle FEC +$ 多角形 $BDKFC$

$=\triangle HBD+\triangle ABC+$ 多角形 $BDKFC$

$=\overline{HG}^2+\overline{GA}^2$

$=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$.

別證 2.



ABC 直角三角形,作斜邊 BC 之垂線 CE,令 $CE=BC$,由 E 點作 AC 延長線上之垂線ED,聯 BE 直線;

如是則 $\triangle BCE=\frac{1}{2}\overline{BC}^2$

又 $\triangle ABC=\triangle DEC$ 〔何故〕

故 $AB=CD,\quad AC=DE$

故 梯形 $ABED=\triangle ABC+\triangle CDE+\triangle BCE.$

即 $\frac{1}{2}(AB+DE)AD=2\triangle ABC+\triangle BCE,$

$\frac{1}{2}(AB+AC)(AB+AC)=AB.AC+\frac{1}{2}\overline{BC}^2,$

$\frac{1}{2}(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2AB.AC)=AB.AC+\frac{1}{2}\overline{BC}^2,$

$\frac{1}{2}(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)=\frac{1}{2}\overline{BC}^2$

*故 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2.$

系 1. 直角三角形一邊上之正方形等於斜邊上之正方形減他一邊上之正方形。

〔就前定理之式移項即得。〕

系 2. 直角三角形由直角之頂點至斜邊作垂線,

截分斜邊爲兩部分，以一部分與斜邊所包之矩形，等於此部分之隣邊上之正方形。

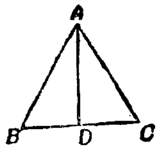
〔於定理 9 之證明中，可得此系之證明。〕

系 3. 正方形對角線上之正方形，等於正方形之二倍。

〔正方形之對角線，即直角二等邊三角形之斜邊。〕

系 4. 由正三角形之頂點至對邊所作之垂線上之正方形，等於半邊上之正方形三倍。

題意. ABC 正三角形，AD 爲由頂點 A 至其對邊所作之垂線，如是則 $\overline{AD}^2$ 等於半 BC 邊上正方形之三倍。



證. D 爲 BC 之中點，此無待證明。

故 $\overline{AD}^2=\overline{AB}^2-\overline{BD}^2$ 〔定理 9.系 1〕

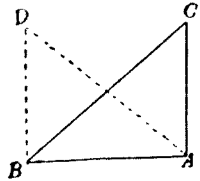
$=\overline{BC}^2-\overline{BD}^2$

$=4\overline{BD}^2-\overline{BD}^2$

$=3\overline{BD}^2.$

系 5. 三角形二邊上正方形之和，若適等於他一邊上之正方形，則此三角形必爲直角三角形。

〔定理 9 之逆〕



題意. 三角形 ABC。若 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$，則 ABC 必爲直角三角形。

證. 由 B 作 AB 之垂線 BD 令等於 AC，聯成 AD 直線。

則　$\overline{AB}^2+\overline{BD}^2=\overline{AD}^2$

即　$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AD}^2$.　〔$\because BD=AC$〕

然　$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$.　〔假設〕

$\therefore\quad \overline{AD}^2=\overline{BC}^2$.

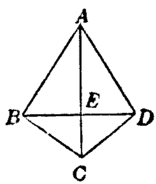
$\therefore\quad AD=BC$.

故 $\triangle ABC$，$\triangle ABD$ 三邊相等，必可疊合。

$\therefore\quad \angle BAC=\angle ABD=R\angle$.

故　$\triangle ABC$ 爲直角三角形。

主要問題13. 四邊形之對角線若成正交，則其相對兩邊上正方形之和，必適等於二邊上正方形之和。



題意. 四邊形 $ABCD$ 若 $AC\perp BD$，

則　$\overline{AB}^2+\overline{DC}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2$，

證. 因 $\triangle ABE$，$\triangle BCE$，$\triangle CDE$，$\triangle DAE$ 各爲直角三角形。

故　$\overline{AB}^2=\overline{AE}^2+\overline{BE}^2$，

$\overline{DC}^2=\overline{DE}^2+\overline{CE}^2$，

$$\overline{AB}^2+\overline{DC}^2=\overline{AE}^2+\overline{BE}^2+\overline{CE}^2+\overline{DE}^2.$$

又 $\overline{BC}^2=\overline{BE}^2+\overline{CE}^2$

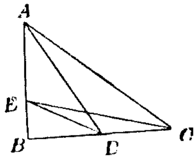
$\overline{AD}^2=\overline{AE}^2+\overline{DE}^2$ (+

$$\overline{BC}^2+\overline{AD}^2=\overline{AE}^2+\overline{BE}^2+\overline{CE}^2+\overline{DE}^2.$$

$$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{DC}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2.$$

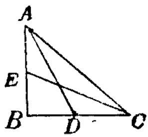
例題 XIII.

1 於直角三角形 ABC，作 DE，係與 BC，BA 二邊相交於 D，E，



則 $\overline{AD}^2+\overline{CE}^2=\overline{AC}^2+\overline{DE}^2$，試證之。

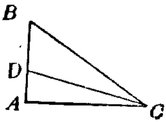
2. 直角三角形斜邊上正方形之五倍，等於他二邊之中線上各正方形之和四倍。



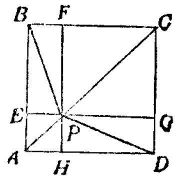
3. 直角三角形 ABC 之斜邊爲 BC，而 AB 邊上任意之點爲 D，則

$\overline{CD}^2+\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2$，

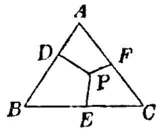
試證之。



4. 由正方形內任意之一點,與各頂點聯成直線;此諸直線上各正方形之和,等於由此點至各邊所作垂線上各正方形和之二倍。



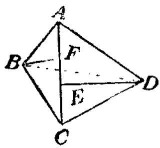
5. 由三角形 ABC 內一點 P 至 AB, BC, CA 各邊各作垂線;其正交點爲 D, E, F,則



$$\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2=\overline{AF}^2+\overline{CE}^2$$,試證之。

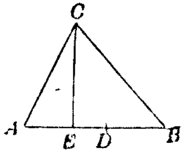
6, 任何邊數之多角形,由其形內一點至各邊作垂線,其正交點所截各邊之各部分上正方形之中,每間一以取之,其和必相等。

7. 四邊形 $ABCD$,其相對之兩角 A, C 爲直角;由頂點 B, D 至對角線 AC 所作之垂線爲 BF, DE;則



$$\overline{AE}^2+\overline{AF}^2=\overline{CE}^2+\overline{CF}^2$$,試證之。

8. ABC 三角形,B 角爲直角之半,AB 之中點爲 D;由頂點 C 至 AB 作垂線,其正交點爲 E;則



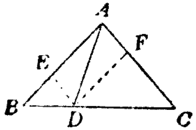
$$\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{DE}^2)$$,試證之。

9. 直角三角形 ABC 之三邊爲 a, b, c,而 a 爲斜邊;則

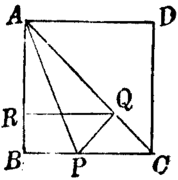
$(b+b+c)^2=2(a+b)(a+c)$，試證之。

10. ABC 爲直角二等邊三角形，D 爲斜邊 BC 上任意之點；則

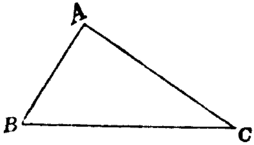
$$2\overline{AD}^2=\overline{BD}^2+\overline{DC}^2$$，試證之。



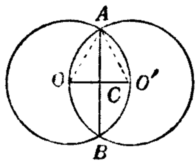
*11. 正方形 $ABCD$ 之對角線 AC 與 AB 邊夾成 BAC 角之二等分線爲 AP，與 BC 相交於 P；由 P 至 AC 作垂線 PQ，由 Q 至 AB 作垂線 PR；問 QR 上之正方形得原正方形若干分。



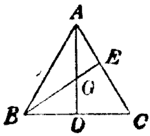
12. 直角三角形之一銳角爲他銳角之二倍；則大邊上之正方形，必等於小邊上正方形之三倍。



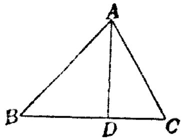
13. 相等二圓，其中心若互在圓周上，則其公共弦上之正方形必等於半徑上正方形之三倍。



14. 正三角形邊上之正方形，等於頂點與重心間之部分上正方形之三倍。



主要問題14.　三角形由頂點至底邊作垂線，卽分底邊爲兩部分；而此三角形二邊上正方形之差，必卽等於兩部分上各正方形之差。



題意.　ABC三角形，AD爲由A點至BC所作之垂線；

則

$$\overline{AB}^2 \sim \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 \sim \overline{DC}^2.$$

證

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2,$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{AD}^2,$$

$$(-$$

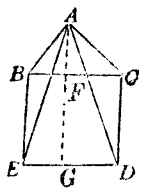
$$\therefore\ \overline{AB}^2 \sim \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 \sim \overline{DC}^2.$$

例　題　XIV.

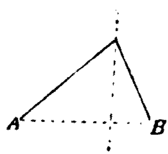
1.　三角形ABC，於BC邊上，在A反對之側作正方形$BCDE$；則

$$\overline{AB}^2 \sim \overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 \sim \overline{AD}^2,$$

試證之。



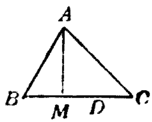
2.　某點與二定點之距離上各平方之差若爲一定；則某點之軌路必爲直線。



3. ABC 三角形，由 A 點至 BC 作 AM 垂線、D 爲 BC 之中點；則

$$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=2\,BC.DM,$$

試證之。

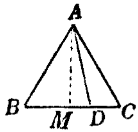


4, 於二等邊三角形 ABC 之底邊 BC 或其延長線上任取一點 D，得式如次：

$$\overline{AB}^2-\overline{AD}^2=BD.\ DC,$$

試證之。

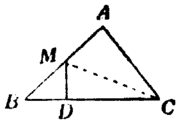
又求此題之逆證。



5. 直角二等邊三角形 ABC，其 AB 邊之中點爲 M，由 M 至斜邊 BC 作垂線 MD；則

$$\overline{BC}^2-\overline{BD}^2=\overline{AB}^2,$$

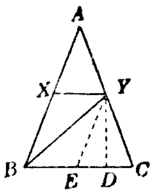
試證之。



*6. 準與二等邊三角形 ABC 之底邊 BC 平行作 XY 直線與 AB 相交於 X；與 AC 相交於 Y；則

$$\overline{BY}^2=\overline{CY}^2+BC.\ XY,$$

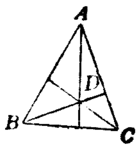
試證之。



*7. D 爲三角形 ABC 之垂心，得式如次：

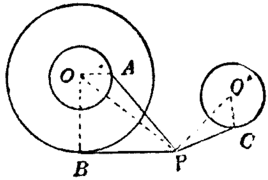
$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$$

$$=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2,$$ 試證之。



又求此題之逆證。

主要問題15. O, O' 爲相等二圓之中心，P 爲二圓外之一點；若以 O 爲中心以 PO' 爲半徑別作一圓，則由 P 所作三圓之三切線，必適爲直角三角形之三邊。



題意. 半徑 $OA=O'C$，P 爲二圓外之點，半徑 $OB=O'P$，則 PA, PB, PC 必爲直角三角形之三邊。

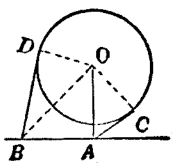
證. 聯 OA, OB, OP, $O'C$, OP 諸直線，則

$$\overline{PA}^2=\overline{OP}^2-\overline{OA}^2$$
$$=\overline{OB}^2+\overline{PB}^2-\overline{OA}^2$$
$$=\overline{OP}^2+\overline{PB}^2-\overline{OC}^2$$
$$=\overline{PB}^2+\overline{PC}^2. \qquad [\because \overline{O'P}^2-\overline{O'C}^2=\overline{PC}^2]$$

故 PA, PB, PC 爲直角三角形之三邊。 〔定理9系5〕

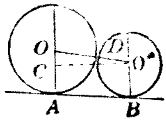
解法注意. 凡關於切線之問題，往往將切點與圓心聯成直線；又二圓相切之問題，往往聯其中心爲直線；此頗足爲之補助。

例 題 XV.

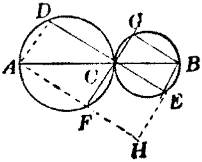


1. 由圓心至所設之直線 l 作垂線，其正交點爲 A，任於上取 B 點；如是則由 A, B 所作之切線上正方形之差必適等於 AB 上之正方形。

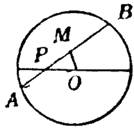
2. 外切二圓公共切線上兩切點間之部分上正方形，必適等於二圓徑所包之矩形。



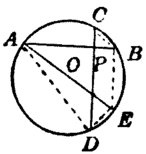
3. 兩圓相切於 C 點，由 C 作公共割線 DCE, FCG，係互爲垂直；而與相交於 D, E, F, G 各點，如是則此兩直線上正方形之和必適等於兩徑和上之正方形。



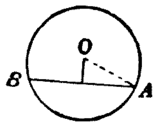
4. 就圓內所設之弦 AB，作直徑令與弦相交於 P 成半直角；如是則 AP, BP 各平方和，不拘弦之位置，恆等於半徑之平方二倍。



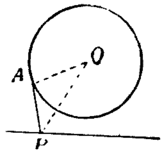
*5. 圓內兩弦相交成直角，由其交點所分之四部分上各正方形之和，必等於直徑上之正方形。



6. 試依面積之定理，證明次之問題；「所設之圓內諸弦之中，以直徑爲最大。」



7．由所設之直線上之點，作所設之圓之切線，求所作之切線爲最小。



定理 10.　鈍角三角形鈍角對邊上之正方形，等於夾鈍角之二邊上各正方形之和加夾鈍角之一邊與此邊上他一邊之正射影所包矩形之二倍。

題意．　$\triangle ABC$，$\angle A$爲鈍角，AB 上 AC 之正射影爲 AD；則

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2.AB.AD.$$

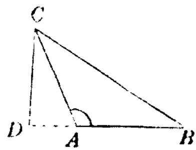
證．　因 $\angle A$ 爲鈍角，故 C 點之正射影，在 BA 之延長線上；

$$\therefore\ \overline{BC}^2=\overline{CD}^2+\overline{BD}^2$$

$$=\overline{CD}^2+(AB+AD)^2$$

$$=\overline{CD}^2+\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+$$

$$2.ABAD$$



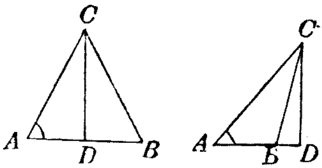
$$=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2.AB.AD.〔\because\ \overline{AC}^2=\overline{CD}^2+\overline{AD}^2〕$$

注意．　本題若 $\angle A$ 爲直角，則 D 與 A 疊合，而 AD 爲 O；成爲 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$．蓋與前定理即 *Pythagoras* 之定理，本屬一致云。

定理 11.　三角形銳角對邊上之正方形，等於夾銳角之二邊上各正方形之和內減夾銳角之一邊與此邊上他一邊之正射影所包矩形之二倍。

題意。 $\triangle ABC$，$\angle A$ 爲銳角，AB 上 AC 之正射影爲 AD，則

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2AB.AD.$$



證。 從 $\angle B$ 之爲銳爲鈍，以定 D 點在 AB 或 AB 之延長線上；然無論如何，必得下式：

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2&=\overline{CD}^2+\overline{BD}^2\\&=\overline{CD}^2+(AB\sim AD)^2\\&=\overline{CD}^2+\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2.AB.AD\\&=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2AB.AD.\end{aligned}$$

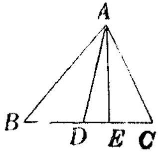
注意。 本題若 $\angle A$ 爲直角，則 AD 爲零，仍與定理 9 一致。

系。 三角形一邊上之正方形，若比他二邊上正方形之和爲大，或相等，或小，則其對角必爲鈍角，或直角，或銳角。

證。 依定理 9，10，11 而論；是三角形一邊上之正方形，由其對角之爲鈍角，或直角，或銳角，以知其比他二邊上正方形之和爲大，或相等，或小。

似此則其所假設者，係綜論角之大小，不留餘蘊；而其終結亦極盡邊之伸縮，不能涉兩可之見；故由轉換法，其定理 9，10，11 之逆證，不能不爲眞確；故此系必爲眞確無疑。

主要問題16. 三角形二邊上正方形之差，等於底邊與底邊上之中線對於底邊上之正射影所包矩形之二倍。



題意. ABC三角形，AD爲中線，DE爲AD對於BC上之正射影；則

$$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=2BC.DE.$$

證. 設$AB>AC$，則$\triangle ABD$，$\triangle ACD$兩三角形　　$\angle ADB>\angle ADC$，

$$\therefore\ \angle ADB>R\angle,\quad \angle ADC<R\angle,$$

$$\therefore\ \overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2+2BD.DE. \qquad \text{〔定理10〕}$$

$$\overline{AC}^2=\overline{DC}^2+\overline{AD}^2-2DC,DE. \qquad \text{〔定理11〕}$$

（−

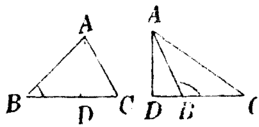
$$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=2BD.DE+2DC.DE \qquad 〔\because BD=DC〕$$

$$=2DE(BD+DC)$$

$$=2BC.DE$$

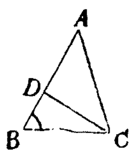
例　題　XVI.

1. ABC三角形，$\angle B$爲正三角形之一角，或正三角形之外角；則



$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2\mp AB.BC,$$試證之。

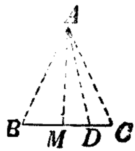
2. 二等邊三角形ABC之底BC上之正方形，等於AB邊與BC對於AB上之正射影所包矩形之二倍。



3. 於二等邊三角形ABC之底BC上任取一點如D,則

$$\overline{AB}^2-\overline{AD}^2=BD.DC,$$

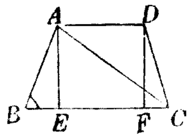
試證之。



4. AC為二等邊梯形$ABCD$之對角線, 則

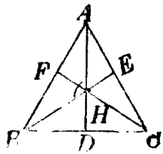
$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+AD.BC,$$

試證之。



*5. 三角形ABC之三垂線為AD,BE,CF,垂心為H,則

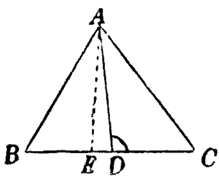
$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$$
$$=2(AD.AH+BE.BH+CF.CH),$$試證之。



定理12. 三角形二邊上正方形之和,等於半底邊上正方形之倍加由頂點所作之中線上正方形之倍。

題意。 在$\triangle ABC$內,AD為中線;則

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{BD}^2+\overline{AD}^2)$$



證。 AD不與BC成垂直,則$\angle ADC$為鈍角,由A作BC之垂線AE; 則

$$\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2-2BD.DE. \qquad \text{〔定理11〕}$$

$$\overline{AC}^2=\overline{DC}^2+\overline{AD}^2+2DC.DE \qquad \text{〔定理10〕}$$

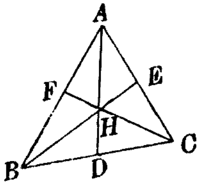
(+

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{BD}^2+\overline{AD}^2). \qquad \text{〔}\because BD=DC\text{〕}$$

解法注意. 凡關於三角形二邊上正方形之和及中線之問題,往往依此定理解之;宜注意。

主要問題17. 三角形各邊上正方形和之三倍,等於各中線上正方形和之四倍。

題意. AD, BE, CF 爲 $\triangle ABC$ 之中線, 則



$$3(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)$$
$$=4(\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2).$$

證.
$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{BE}^2+2\overline{AE}^2 \qquad \text{〔定理12〕}$$
$$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=2\overline{CF}^2+2\overline{AF}^2 \qquad \text{〔同 上〕}$$
$$\overline{CA}^2+\overline{AB}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2 \qquad \text{〔同 上〕}$$

(+

$$2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)=2(\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2)+2(\overline{AF}^2+\overline{BD}^2+\overline{AE}^2).$$

而 $$\overline{AF}^2=\frac{1}{4}\overline{AB}^2,\quad \overline{BD}^2=\frac{1}{4}\overline{BC}^2,\quad \overline{AE}^2=\frac{1}{4}\overline{CA}^2$$

故

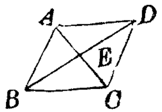
$$2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)=2(\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2)+\frac{1}{2}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)$$

兩邊各倍之,移項,則

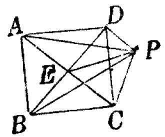
$$3(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)=4(\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2).$$

例題 XVII.

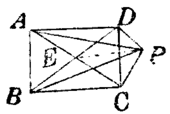
1. 平行四邊形各邊上正方形之和，等於對角線上各正方形之和。



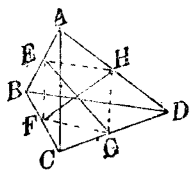
2. 由任意之一點至正方形各頂點所聯成之直線上各正方形之和，等於一對角線上之正方形加由此點至對角線交點間距離上正方形之四倍。



3. 由任意之一點至矩形每對角之兩頂點各聯成兩直線，此每兩直線上正方形之和必相等。



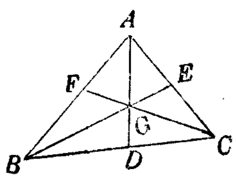
4. 四邊形兩對角線上各正方形之和，等於每對邊之兩中點所聯成之兩直線上正方形和之二倍。



5. 三角形 ABC 之重心爲 G，則

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2 =3(\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2)；$$

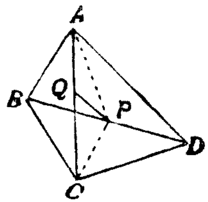
試證之。



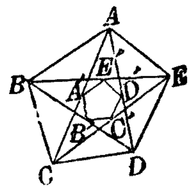
6. 四邊形 $ABCD$，其對角線 BD, AC 之中點爲 P, Q；則

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{PQ}^2,$$

試證之。



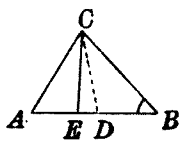
7. 五邊形 $ABCDE$ 之對角線爲 AC, BD, CE, DA, BE；其中點爲 A', B', C', D', E'；聯各中點成五邊形；如是則五邊形 $ABCDE$ 各邊上正方形和之三倍，等於五邊形 $A'B'C'D'E'$ 各邊上正方形和之四倍加各對角線上正方形之和。



8. 三角形 B 角爲半直角，AB 之中點爲 D，由 C 作 AB 之垂線其正交點爲 E；則

$$\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{DE}^2),$$

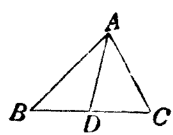
試證之。



9. ABC 三角形 BC 邊之中點爲 D，則

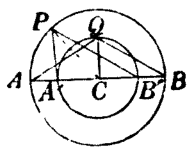
$$4\overline{AD}^2=2\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2-\overline{BC}^2;$$

試證之。



注意。 本題爲以三邊表中線之式。

10. 同心兩圓由中心引一直線與外圓及內圓之周相交於 A, B；A', B'；而 P 爲外圓周



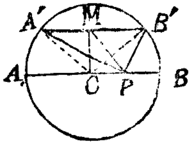
上之點，Q 爲內圓周上之點，則

$$\overline{QA}^2+\overline{QB}^2=\overline{PA'}^2+\overline{PB'}^2.$$ 試證之。

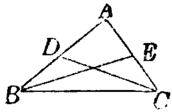
11. 準與圓徑 AB 平行作 $A'B'$ 弦，任於 AB 上取 P 點聯成 $A'P$, $B'P$，則

$$\overline{A'P}^2+\overline{B'P}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2,$$

試證之。

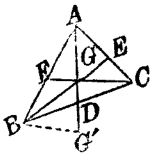


*12. 試依面積之定理，證明次之問題，「三角形大邊上之中線比小邊上之中線小」。

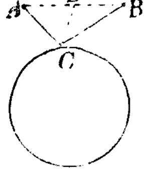


*13. 三角形 ABC 之重心爲 G，得式如次，試證明之，

$$\overline{AB}^2+3\overline{CG}^2=\overline{BC}^2+3\overline{AG}^2$$
$$=\overline{AC}^2+3\overline{BG}^2.$$



主要問題 18. 求由二定點至定圓周上之一點所作兩直線上各正方形之和爲最大及最小。



題意。 A, B 爲兩定點，C 爲定圓周上任意之點；求 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$ 爲最大及最小；其 C 點之位置若何。

解析。 聯成 A, B 直線，其中點爲 D；又聯成 AC, BC, DC 各直線，

如是則 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2$. 〔定理12〕

然 AD 爲一定，故 $2\overline{AD}^2$ 亦爲一定；

故欲令 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$ 爲最大或最小，必使 CD 爲最大或最小；

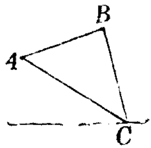
然 D 爲定點。

故由 D 點通過圓心之一直線與圓周相交之兩交點；即合所求最大最小 C 點之位置。

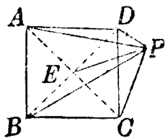
注意． 此問題稱爲(*Alhazen*)之問題。

例 題 XVIII.

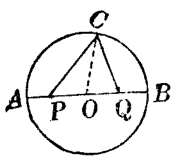
1． 求由二定點至定直線上之一點所作兩直線上各正方形之和爲最小。



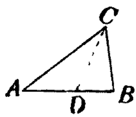
2． 求由一點至正方形各頂點所聯成之直線上各正方形之和爲最小。



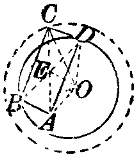
3． 圓徑上兩定點係與圓心成等距，如是則由兩定點至圓周上任意之一點所作之直線上各正方形之和恆不變。



4． 三角形之底邊及他二邊上正方形之和若皆爲一定；則其頂點必同在一圓周上。

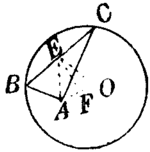


5. 矩形一頂點爲固定，他二頂點則在所設之圓周上滑動，如是則所餘之一頂點必恆在同心之圓周上。

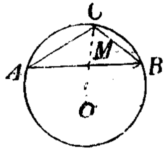


6. 矩形一頂點爲固定，他二頂點則在所設之圓周上滑動。如是則矩形對角線之交點恆在一圓周上，此圓周之圓心即固定之頂點與所設之圓心所聯成線分上之中點；試證之。

7. 由定點與弦之兩端若係夾成直角；則其弦中點之軌跡必爲圓周。



*8. 由所設之圓周上一定點 C 至 AB 弦之兩端所聯成之兩直線上正方形之和若爲一定；則弦之中點，必恆在 CO 之垂直線上。



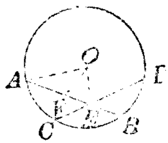
第三節

弦分所包之矩形

定理13. 圓內二弦相交，每由其交點所分之二部分所包之矩形必相等。

題意. AB,CD 爲二弦，相交於 E 點，

則　　$AE.BE=CE.DE.$



證。 圓心爲 O，聯 OE,OA 兩直線，由 O 作 AB 之垂線 OF；

如是則 F 爲 AB 之中點，

$$\therefore\quad AE.BE=\overline{AF}^2-\overline{EF}^2\qquad\text{〔主要問題3〕}$$

$$=(\overline{OA}^2-\overline{OF}^2)-\overline{OE}^2-\overline{OF}^2)$$

$$=\overline{OA}^2-\overline{OE}^2$$

$$=(\text{半徑})^2-\overline{OE}^2$$

依同理可證　$CE.DE=(\text{半徑})^2-\overline{OE}^2.$

$$\therefore\quad AE.BE=CE.DE.$$

二弦若於圓外相交，仍依同理推之可也。

系1. 通過圓內定點之弦，其弦分所包之矩形等於以定點爲中點之弦半分上之正方形。

〔相等二分所包之矩形，易知其爲正方形。〕

系2. 直角三角形由直角之頂點至斜邊作垂線，

分斜邊爲二分；此二分所包之矩形，等於垂線上之正方形。

〔以斜邊爲直徑作圓周，其直角之頂點，必在此圓周上；以垂線延長之，令再與圓周相交，依系1解之。〕

系3. AB，CD二線分相交於E，若$AE.BE=CE.DE$；則A,B,C,D必同在一圓周上。〔卽定理13之逆證〕.

證．由A,B,C三點作圓周，若D點不在此圓周上，則令CD與圓周之交點爲D'；

如是則 $AE.BE=CE.D'E.$

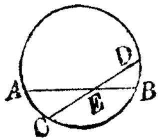
〔定理13〕

然 $AE.BE=CE.DE.$

〔假設〕

$\therefore$ $CE.D'E=CE.DE.$

$\therefore$ $D'E=DE.$



是不合理，故D點不能不在圓周上。

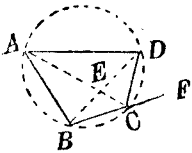
解法注意 證明A,B,C,D，四點同在一圓周上，須注意如下：

(1). 是否$\angle BAD+\angle BCD=2R\angle$.

(2). 是否$\angle BAD=\angle DCF$.

(3). 是否$\angle BAC=\angle BDC$.

(4). 是否$AE.CE=BE.DE$.



主要問題19. 三角形之垂心，分各垂線爲二分，每二分所包之矩形皆相等。

題意．在ABC三角形內AD，BE，CF各爲垂線．H爲垂心，

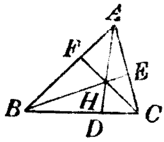
$$AH.DH=BH.EH=CH.FH.$$

證. $\angle E=\angle D=R\angle$,

故 $AEDB$ 同在一圓周上,

$\therefore\ AH.DH=BH.EH.$

〔定理13〕



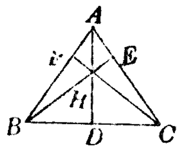
依同理$AFDC$ 同在一圓周上,

$\therefore\ AH.DH=CH.FH.$ 〔同上〕

$\therefore\ AH.DH=BH.EH=CH.FH.$

例 題 XIX.

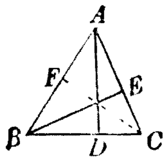
1. 三角形由各頂點至對邊各作直線,同交於一點;而各直線每由交點分爲二分所包之矩形若皆相等;則此交點必即爲三角形之垂心。



2. 三角形ABC,由A,B兩頂點至其對邊作垂線 AD, BE; 則

$\overline{AB}^2=AC.AE+BC.BD$,

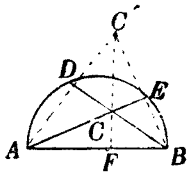
試證之,



3. 由半圓之直徑 AB, 任取二弦 AE,BD, 其交點爲 C, 則

$AC.AE+BC.BD=\overline{AB}^2$,

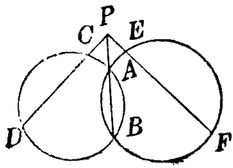
試證之。

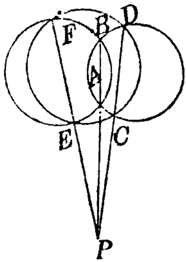


2 AD,BE之交點爲 C', 則

$AC'.\ AD+BC'.\ BE=\overline{AB}^2$,試證之。

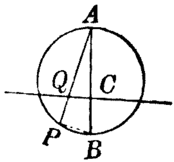
4. 相交二圓，由其公共弦或其延長線上之一點引兩直線，與各圓周相交；此四交點必同在一圓周上。



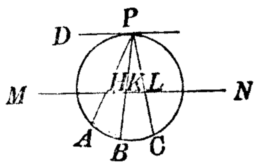


5. 三圓周每二圓周相交之公共弦必同交於一點。

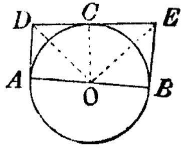
6. *CQ* 爲與圓徑 *AB* 或其延長線成垂直之定直線；由 *A* 任作 *AQP* 直線與圓周相交於 P，如是則矩形 $AP.AQ$ 恒爲一定。



7. 由圓周上 *P* 點引 *PA*，*PB*，*PC* 三弦，又由 *P* 作切線，準與切線平行作 *MN*，與三弦相交於 *H*，*K*，*L*. 則 $PA.PH+PB.PK=PC.PL$，試證之。

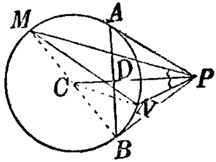


8. 直徑之兩端各有一切線，又任作一切線，被截於兩切線間之部分，由切點分爲二部

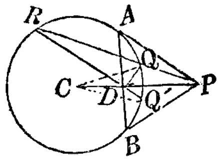


分;此二部分所包之矩形,等於半徑上之正方形。

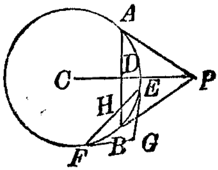
9. 由具中心 C 之圓外一點 P,引二切線 PA, PB;由 AB 弦之中點,任作 MN 弦;如是則P, C, M, N 必同在一圓周上;且 P 與中心 C 所聯成之直線,必為 $\angle MPN$ 之二等分線。試證之。



10. 如前題由P點任作割線 PQR,其 AB 必為 $\angle RDQ$ 之二等分線。

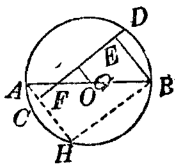


*11. 由具中心C之圓外一點 P 引二切線 PA, PB;又任作 EF 弦,令 EF 之中點在 AB 弦上,乃由 E, F 兩點各作切線;其交點必在以 CP 為直徑之圓周上。



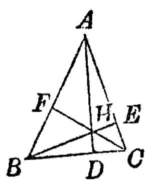
*12. 由圓徑 AB 之兩端,準與 CD 弦或其延長線成垂直作 AF, BE; 則

$AF.BE=CF.CE$, 試證之。



*13. 由三角形 ABC 之各頂點至對邊作垂線 AD, BE, CF,其垂心為 H, 則

$$2\,(AD.AH+BE.BH+CF.CH)=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$$

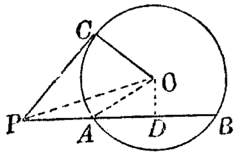


試證之。

定理14. 外分弦爲二分所包之矩形，等於由外分點所作切線上之正方形。

題意. AB 爲 O 圓之弦，P 爲 AB 之外分點，PC 爲切線，則

$PA.PB=\overline{PC}^2$，



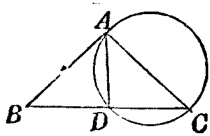
證。 聯 OP,OC,OA 各直線，由 O 作 AB 之垂線 OD，故 D 爲 AB 之中點。

$$\therefore PA.PB=\overline{PD}^2-\overline{AD}^2 \qquad \text{〔主要問題 3〕}$$
$$=(\overline{OP}^2-\overline{OD}^2)-(\overline{OA}^2-\overline{OD}^2)$$
$$=\overline{OP}^2-\overline{OA}^2$$
$$=\overline{OP}^2-\overline{OC}^2 \qquad [\because OA=OC]$$
$$=\overline{PC}^2.$$

注意。 此定理即前定理 13 兩弦圓外相交，其弦之兩端漸縮而併爲一點，如切點者，是也。

系 1. 直角三角形由直角之頂點至斜邊作垂線，所分斜邊之一分與斜邊所包之矩形，等於此分之隣邊上之正方形。

〔定理 9 系 2 同〕



證。 在 $\triangle ABC$ 內，$\angle BAC$ 爲直角，AD 爲 BC 之垂線，以 AC 爲直徑作圓周，必過 D 點；而 BA 與直徑 AC 成直

角，故爲切線。

$$\therefore\ \overline{BA}^2=BD.BC.$$

$$\overline{CA}^2=CD.BC.$$

系 2. 由圓外一點與圓周上一點聯成直線，此直線上之正方形，與由圓外之點外分一弦爲兩分所包之矩形，若適相等；則所聯之直線必爲切線。

證． P 爲圓外之一點，C 爲圓周上之一點，AB 爲弦，

由假設　　$\overline{PC}^2=PA.PB.$

若 PC 不爲切線，則 PC 必再與圓周相交，令其交點爲 C'，則

$$PC.PC'=PA.PB,\qquad\text{〔定理13〕}$$

$$\therefore\ \overline{PC}^2=PC.PC'.$$

$$\therefore\ PC=PC'.$$

是不合理，故 PC 必不再與圓周相交；故爲切線。

解法注意。 一直線是否爲圓之切線，欲證明者須注意如下；

(1)． 一直線與圓心之距離若等於半徑，此直線必爲切線。

(2)． 弦與弦之一端所引直線夾成之角若等於其隣之弓形角，此直線必爲切線。

(此應用甚廣；下例題 5,6,7,8,9 皆是。)

(3)． 卽定理14之系 2.

主要問題 20. 內接於圓之二等邊三角形，由其頂點任作 APQ 直線與底邊 BC 交於 P； 與圓周交於 Q，如是則矩形 $AP.AQ$ 恒爲一定。

證。 聯 QC 直線，

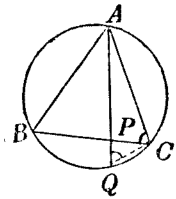
$\angle ACB = \angle ABC$〔假設〕

$= \angle AQC$,

即 $\angle ACP = \angle PQC$,

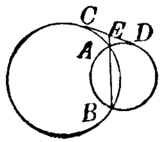
故 AC 爲 CPQ 圓之切線;

故 $AP.AQ = \overline{AO}^2$, 爲一定.

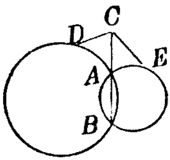


例 題 XX.

1. 相交二圓公共弦之延長線與公共切線相交，其交點必卽爲公共切線上兩切點間之中點。

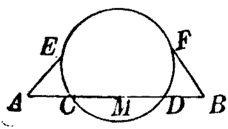


2. 兩圓公共弦之延長線上任取一點,作兩圓之切線,必相等。

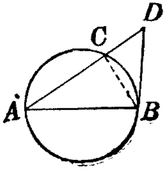


3. 由直線 ABC 上二定點 A,B 作圓周，由定點 C 作切線,其切點之軌跡必爲以 C 爲中心之圓周。

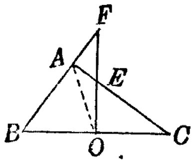
4. 線分AB 與圓之交點爲C,D,由A,B 各作切線若相等,則 AC 必等於 BD。



5. 由圓徑之一端A 任作一直線與圓周交於 C，又由直徑之他端作切線與 AC 延長相交於 D,如是則矩形 $AC.AD$ 必爲一定。

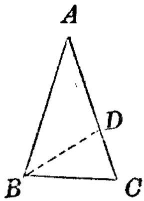


6. 直角三角形 ABC 斜邊 BC 之中點爲 O,由 O 作此邊之垂線,與他二邊相交於 E, F;又由直角之頂點 A 與 O 聯成直線;如是則 AO 上之正方形等於矩形 $OE.OF$。



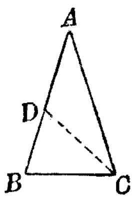
7. 二等邊三角形 ABC $(AB=AC)$,以 B 爲中心,BC 爲半徑作圓周,與 AC 交於 D;則

$\overline{BC}^2=AC.CD$ 試證之。



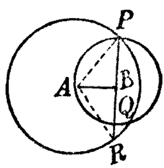
8. 二等邊三角形 ABC 之兩底角,各得頂角之二倍,則

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+AB.BC$, 試證之。



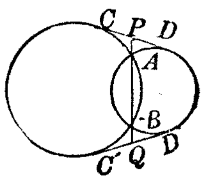
9. B 圓之周通過 A 圓之心.由兩圓之交點 P 作 PBQ 直徑,與 A 圓周相交於 R;則

$PQ.PR=2\overline{AR}^2$,試證之。



10. AB 爲相交二圓之公共弦,$CD,C'D'$ 爲公共切線;則

$\overline{PQ}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2$, 試證之。

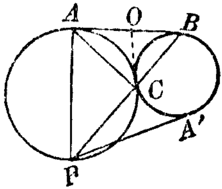


其 P,Q 爲 AB 與 $CD,C'D'$ 之交點。

主要問題 21.　二圓外切於 C，其公共切線上之兩切點爲 A,B，由 A 作直徑 AP，由 P 作他圓之切線 PA'；如是則 PA' 等於 PA。

證.　由 C 作公共切線與 AB 交於 O，

如是則 AO,CO,BO 三直線相等；〔何故〕



故 C 點在以 AB 爲直徑之圓周上，

故 AC,BC 夾成直角；

次聯 PC 直線因 $\angle ACP$ 爲立於半圓之角，故爲直角；

故 PCB 爲一直線；

而 PA 係與 AB 成垂直，

$$\overline{PA}^2=PC.PB \qquad \text{〔定理 14 系 1〕}$$

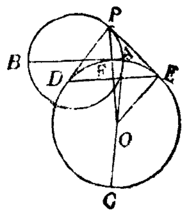
$$=\overline{PA'}^2. \qquad \text{〔定理 14〕}$$

$$\therefore \qquad PA=PA'.$$

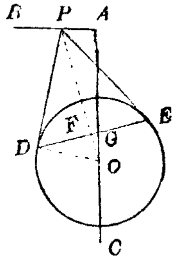
解法注意.　凡關於二圓相切之問題，即如本題於切點作公共切線，又如下例題 5 由中心與切點聯成直線，皆足爲解法之補助。

例題 XXI.

1.　AB,AC 爲直交二直線，以 AB,AC 爲直徑各作圓周，今由 AB 圓上一點 P 作他圓之切線，聯其兩切點成 DE 直線。又由他圓之中心 O 與 P 聯成 OP 直線；如是則 DE，OP 之交點 F 必在 AB 圓上。



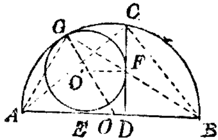
2. AB, AC 爲直交二直線，以 AC 上 O 點爲圓心作圓周；由 AB 上任意之點 P 作此圓之切線；聯其兩切點成 DE 直線；如是則不拘 P 點之位置若何，其 DE 直線，恒通過一定之點。



3. 如前題，PO，DE 之交點爲 F，此 F 點之軌跡若何？

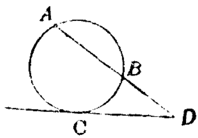
4. 由定點 G 任作一弦，於弦之兩端各作切線；此兩切線之交點必恒在一定直線上。

*5. 以 AB 爲直徑之半圓上，任取 C 點。由 C 作 AB 之垂線 CD，準與 CD，AD 及 AC 弧相切作圓周，其 AD 上之切點爲 E，如是則 $BE=BC$，試證之。



主要問題 22. 通過二定點且與一定直線相切作圓周。

題意．A，B 爲二定點，CD 爲定直線，求作一圓周通過 A，B 兩點且與 CD 相切。



作圖．聯 A，B 成直線，與 CD 延長相交於 D，作正方形，令等於矩形 $DA.DB$；乃以正方形之一邊爲半徑，D 爲中心，作圓周；與 CD

相交於 C,C';如是則作通過 A,B,C 或 A,B,C'之圓,俱合所求。

證. 由作圖 $DA.DB=\overline{DO}^2$

故 CD 爲切線, 〔定理14系2〕

而此圓通過 A,B.故合所求。

制限. A,B 兩點若非同在 CD 之一側,即爲無解。

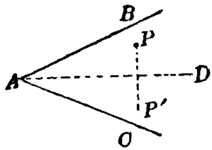
又 A,B 兩點有一點在 CD 上,若非 $AB\perp CD$ 亦爲無解。

注意. 就上題作圖法中,設題如次其解法若何?

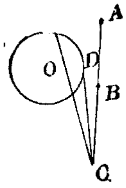
『求作正方形令與所設之矩形相等』。

例 題 XXII.

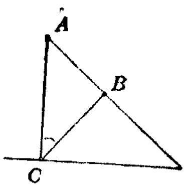
1. 求作一圓令通過所設之點且與所設之二直線相切。



2. 求作一圓令通過所設之二點且與所設之圓相切。

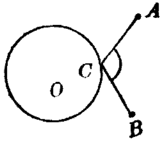


3. 求於所設之直線上定一點，令此點對於所設之二點含成最大之角。

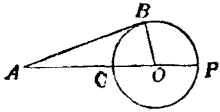


4. 求於所設之圓周上定一點，令此點對於所設之二點含成最大之角。

又含成最小之角若何？



5. 求作一矩形，令二邊之差等於所設之直線，而其面積與所設之正方形相等。



6. 依前題，改『二邊之差』爲『二邊之和』若何？

7. 面積相等之諸矩形中其周之最小者必爲正方形。

第三章

計算應用問題

自來所云直線，面積，等，皆但言其量；卽所云直線者，未言其爲若干之數，但渾舉一直線之量而已；所云面積者，未言其爲若干之數；但渾舉一面積之量而已。

玆章所述，則於直線，面積，等所占之量，概以數明之。

然所謂量者究應以如何之數表之；

則如下列各項，須先詳審之。

1. 此量合於同種類之他量若干倍，則此量爲他量之倍量，他量爲此量之約量。

2. 此量爲他二量之約量，則此量爲他二量之公約，或稱公度。

3. 二量有公度者，此二量爲可通約量，無公度者爲不可通約量，

故凡同種類之二量，非爲可通約量；卽爲不可通約量。

於是有定理如次：

定理 15. 凡量與單位量成爲可通約者，必可以整數或分數表之。

何者,量 S 與單位量 T 既爲可通約,必有公度;令其公度爲 K, 則

$$S=mK,\qquad T=nK,\qquad m,n \text{ 爲整數。}$$

因　　$nS=mnK,\quad mT=mnK.$

故　　$nS=mT.$

故　　$S=\frac{m}{n}T.$

T 爲單位,故表 S 量之數爲 $\frac{m}{n}$,

而 $\frac{m}{n}$ 隨之爲數而成整數或分數。

逆之,則有定理如次:

定理 16.　凡量能以整數或分數表之者必係與單位量成爲可通約。

T 爲單位量,(例如 1 寸) S 爲表以整數(例如 5 寸)之量,如是則 T 自身爲二量之公度。

若表 S 量之數爲分數;(例如 $\frac{5}{3}$ 尺)則 T 之若干分 (如上例則爲 3 分)爲二量之公度。

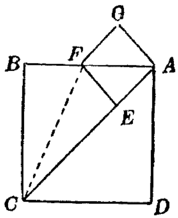
下定理卽由此二定理以斷定者也。

定理 17.　凡量與單位量不可通約者,不能以整數或分數表之。

然此不可通約之量,究應以如何之數表之,玆就其不可通約者略舉一例如次。

正方形對角線與邊爲不可通約之量。

何者,在正方形 $ABCD$ 之對角線 AC 上取 CE 令等於 AB,由 E 作 AC 之垂線,與 AB 交於 F;



如是,則 $BF=EF=AE$.

$(\because \triangle BCF \equiv \triangle ECF)$

故 AC, AB 之公度,同於 AB, AE 之公度。 (何故)

依同理 AB, AE 之公度,同於 AF, AE 之公度。

然 AF, AE 爲正方形 $AEFG$ 之對角線與邊。

故求 AF, AE 之公度,如法更演一正方形而得其對角線與邊之公度;同於最初之問題。

依同理,求 AF, AE 之公度,知法遞演得無數正方形。恒歸於同一之問題;故此法無結局,故無公度;即爲不可通約量。

如是則正方形之邊與對角線之長,不能以整數或分數表之。

然可求其偏近於眞之分數;演之如次:

對角線 AC,比 AB 邊大,比 AB 之二倍小。

即 $$AB<AC<2AB.$$

若取 AB 之 $\frac{1}{10}$, 則 AC 必比其 14 倍大;而比其 15 倍小。

即 $$\frac{14}{10}AB<AC<\frac{15}{10}AB,$$

又取 AB 之 $\frac{1}{100}$,則 AC 必比其 141 倍大;而比其 142 倍小

即 $$\frac{141}{100}AB<AC<\frac{142}{100}AB.$$

又取 AB 之 $\frac{1}{1000}$, 則

$$\frac{1414}{1000}AB<AC<\frac{1415}{1000}AB,$$

又取 AB 之 $\frac{1}{10000}$, 則

$$\frac{14142}{10000}AB<AC<\frac{14143}{10000}AB,$$

今就上式，以 AB 爲單位，(例如1寸)化分數爲小數；則

$$1\text{寸}<AC<2\text{寸},$$

$$1.4\text{寸}<AC<1.5\text{寸},$$

$$1.41\text{寸}<AC<1.42\text{寸},$$

$$1.414\text{寸}<AC<1.415\text{寸},$$

$$1.4142\text{寸}<AC<1.4143\text{寸},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此蓋從單位 AB 等分之數漸次增多，而 AC 之夾數，次第接近，可至於任何之程途；終不能謂之相等。

故表 AC 之數，疏密隨人所欲；因其有特殊之性質，卽所謂偪近於眞之分數，是也。凡如是性質之數稱之爲不盡數。

爰有定理如次：

定理 18. 凡量與單位量不可通約者，以不盡數表之。綜言之，

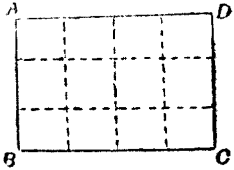
1. 凡量與單位量可通約者，以整數或分數表之。
2. 凡量與單位量不可通約者，以不盡數表之。

定理 19. 表矩形面積之數，等於表底邊及高之數之積。

題意． $ABCD$ 爲矩形，以同一之線單位表 AB, BC 之數爲 a, b。以線單位上之正方形爲面積單位表此矩形面積之數爲 S。則

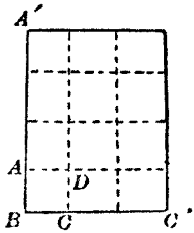
$$S=a\times b.$$

證 (I)．<u>a, b 爲整數：</u>



分 AB 爲 a 等分，分 BC 爲 b 等分，由各分點準與各邊平行各作直線，如是則矩形 $ABCD$ 爲 $a\times b$ 箇正方形，而其各正方形卽面積單位，所以

$$S=a\times b.$$



(II). a,b 均爲分數:

$$a=\frac{p}{m} \qquad b=\frac{q}{n}$$

延長 BA，令 BA' 等於 $m.AB$;

延長 BC，令 BC' 等於 $n.BC$;

乃作矩形 $A'C'$。

如是則矩形 $A'C'$ 爲矩形 $ABCD$ 之 mn 倍表其面積之數爲 pq;

故 $$mns=pq.$$

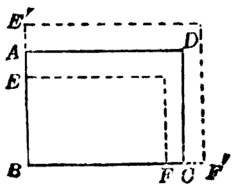
故 $$S=\frac{pq}{mn}$$

$$=\frac{p}{m}\times\frac{q}{n}$$

$$=a\times b.$$

*(III). ab 爲不盡數:

a,b 爲不盡數，則必在近於相等之兩分數之間，今其分數爲 $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n}$, 及 $\frac{m'}{n}$, $\frac{m'+1}{n}$,



如圖，表 BE 之數爲 $\frac{m}{n}$，而表 BE' 之數爲 $\frac{m+1}{n}$,

又表 BF 之數爲 $\frac{m'}{n}$，而表

BF' 之數爲$\frac{m'+1}{n}$，

又表 BF 之數爲 $\frac{m'}{n}$，而表 BF'之數爲$\frac{m'+1}{n}$，則

$$\frac{m}{n}<a<\frac{m+1}{n}, \text{及} \ \frac{m'}{n}<b<\frac{m'+1}{n},$$

兩兩相乘，$\frac{mm'}{n^2}<ab<\frac{m+1}{n}\times\frac{m'+1}{n}$……………………(1)

而表矩形 EF 之數爲 $\frac{mm'}{n^2}$，

表矩形 $E'F'$ 之數爲$\frac{m+1}{n}\times\frac{m'+1}{n}$，

故表矩形 $ABCD$ 之數 S，其關係如次：

$$\frac{mm'}{n^2}<S<\frac{m+1}{n}\times\frac{m'+1}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)及(2)可見 S 及 ab 不拘 n 之值如何，恒在於 $\frac{m+1}{n}\times\frac{m'+1}{n}$ 與 $\frac{mm'}{2}$之間。

故 S 與 ab 之差必比$\frac{m+1}{n}\times\frac{m'+1}{n}$與$\frac{mm'}{n^2}$之差小，卽比

$$\frac{1}{n}\left(\frac{m}{n}+\frac{m'}{n}\right)+\frac{1}{n^2}\text{小。}$$

而 $\frac{m}{n}+\frac{m'}{n}$比 $a+b$ 小，故爲有限之值；故若 n 爲無窮大，則 $\frac{1}{n}\left(\frac{m}{n}+\frac{m'}{n}\right)$必致偪近於零；$\frac{1}{n^2}$ 亦必偪近於零。

故 $\frac{1}{n}\left(\frac{m}{n}+\frac{m'}{n}\right)+\frac{1}{n^2}$ 其 n 爲無窮大，無論如何必致偪近於零。

然 S 及 ab 均爲一定之數,故差亦爲一定,不與 n 之值俱變。

故 $S-ab$ 不得不等於零。

故 $$S=a\times b.$$

注意. 凡如此類,a,b 之中,或一爲整數一爲分數,又或一爲整數或分數,一爲不盡數,俱以同理證明可也。茲從略。今將此定理普通述之如次:

矩形之面積,等於底高相乘之積。

系 1. 表正方形面積之數(S)等於表一邊之長之數(a)之二乘冪(平方)

公式 $$S=a^2.$$

系 2. 表平行四邊形面積之數(S)等於表底邊及高之數(a 及 h)之積。

公式 $$S=ah.$$

系 3. 表三角形面積之數(S)等於表底邊及高之數(a 及 h)之半積。

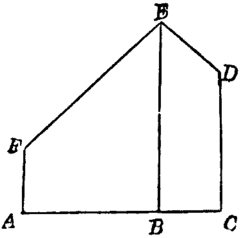
公式 $$S=\frac{1}{2}ah.$$

系 4. 表梯形之面積(S)等於表兩底之數(a 及 b)之和與高之數(h)相乘之半積。

公式 $$S=\frac{1}{2}(a+b).\ h$$

主要問題 23. 如圖,$ACDEF$ 五邊形,FA,EB 及 DC 均與底邊 AC 成垂直,其高依次爲 1.5 尺,

12尺，9尺，　又　$AB=36$尺，$BC=12$尺，求平均之高。



解.　四邊形 $ABEF$ 爲梯形，故其面積爲

$$\frac{1}{2}(1.5+12)\times 36\text{方尺}$$

卽　243 方尺

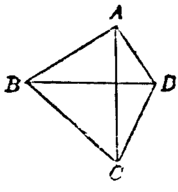
又四邊形 $BCDE$ 爲梯形，

故其面積爲$\frac{1}{2}(12+9)\times 12$方尺$=126$方尺，

故全面積爲$(243+126)$方尺$=369$方尺，

故其平均之高爲 $369\div(36+12)$尺$=7.6875$尺。

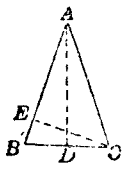
例　題　XXIII.



1.　四邊形兩對角線相交成直角，其長爲 5 尺，8 尺，求面積。

2.　三角形面積 20 方寸，有一邊 5 寸，求此邊上之高。

3.　三角形 ABC，其 AB，BC 爲 10 寸，8 寸，而 AB 上之高爲 4 寸，求 BC 上之高。



4.　梯形上底 4 寸，下底 9 寸，高 6 寸，求面積。

5.　梯形上底 7 寸，下底 14 寸，

面積 147 方寸，求高。

6. 平行四邊形，二邊之長 8 尺，10 尺，其夾角 30 度，求面積。

7. 四邊形對角線之長 8 尺，10 尺，其夾角 30 度求面積。

8. 三角形 ABC，內接圓及三傍接圓之半徑為 r, r', r'', r'''。其面積為 S，三邊 a,b,c 之半和為 s，則

(I) $S=sr=(s-a)r'=(s-b)r''=(s-c)r'''$，

(II) $\frac{1}{r}=\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}$. 試證之。

定理 20. 表直角三角形斜邊上正方形面積之數(a^2)等於表他二邊上正方形面積之數(b^2 及 c^2)之和，

公式 $a^2=b^2+c^2$.

依此定理，知直角三角形，由二邊之長，可求其餘一邊之長。

公式
$$a=\sqrt{b^2+c^2}.$$
$$b=\sqrt{a^2-c^2}.$$
$$c=\sqrt{a^2-b^2}.$$

系 1. 表正方形一邊之長之數為 a，則表其對角線之長之數必為 $a\sqrt{2}$。 〔參照定理 9 系 3〕

系 2. 表正三角形半邊之數為 a，則表其高之數必為 $a\sqrt{3}$。 〔參照定理 9 系 4〕

注意 1. 此系 1，2 應用甚廣，宜注意。

注意 2. 表直角三角形三邊之長求其皆為整數，則依 $a^2=b^2+c^2$ 以求 a,b,c. 然有恆等式如次：

$$(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2,$$

據此則 x^2+y^2, x^2-y^2, $2xy$ 為直角三角形三邊之數，

例如 $x=2$, $y=1$:

則　　$x^2+y^2=5$,　$x^2-y^2=3$,　$2xy=4$.

而　　$5^2=3^2+4^2$ 是 5, 3, 4 爲直角三角形之三邊。

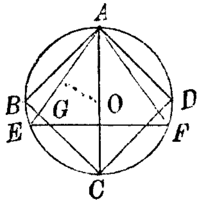
又或　　$x=3$, $y=2$

則　　$x^2+y^2=13$,　$x^2-y^2=5$　$2xy=12$

而　　$13^2=5^2+12^2$ 是 13, 5, 12 爲直角三角形之三邊。

凡如是求得之整數。固無不合於直角三角形之三邊者也。

主要問題 24. 圓內所接正方形及等邊三角形其正方形邊長十尺，問等邊三角形邊長若干尺。



解。 $ABCD$ 爲內接於圓之正方形，AEF 爲接於同圓內之等邊三角形；

AB 爲 10 尺，

作對角線 AC，其長爲 $10\sqrt{2}$ 尺；

〔定理 20 系 1〕

故此圓之半徑 OA 爲 $5\sqrt{2}$ 尺。

由中心 O 準與 AE 成垂直作 OG，於是 $\triangle AOG$ 形內。

$$\angle OAG=30^\circ \qquad \therefore \ \angle AOG=60^\circ$$

故 AG 可作爲正三角形之高，(AOG 即此正三角形之半)

故　$$AG=OG\sqrt{3}=\frac{OA}{2}\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\sqrt{3}=\frac{5}{2}\sqrt{6}.$$

〔定理 20 系 2〕

故等邊三角形邊長 $5\sqrt{6}$ 尺。

例 題 XXIV.

1. 在梯形 $ABCD$, $AB=5$ 尺，上底 $BC=24$ 尺，下底 $AD=27$ 尺，D 角爲直角，求面積。

2. 二等邊梯形上底 10 尺，下底 18 尺，邊 5 尺，求面積。

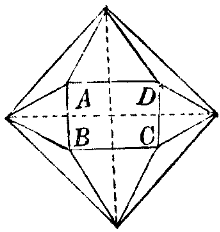
3. 以線圍作正方形，其面積爲 324 方尺；若改作正六邊形，其面積幾何？

4. 有正三角形與正方形其周圍相等，面積以何者爲大？

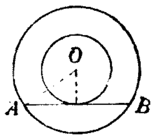
5. 外接於正方形之圓，其正方形每邊一尺，又內接於正三角形之圓，其正三角形每邊二尺四寸，問此兩圓孰大？

6. 外接於圓之正六角形與內接於圓之正六角形，其周圍與圓徑之比若何？

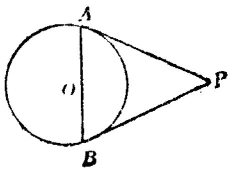
7. 有矩形二邊之長爲十寸，八寸，以此矩形之四邊爲底，各向形外作四個正三角形，將各頂點聯成直線，即成四邊形；其面積應得若干方寸？



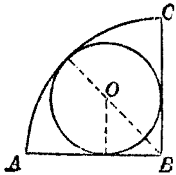
8. 半徑 53 寸及 45 寸之兩同心圓；若大圓之弦即小圓之切線，問此弦長若干？



9. 半徑二尺一寸，於距圓心三尺五寸處 P 點，作此圓之切線；聯其兩切點成一弦，求此弦之長。

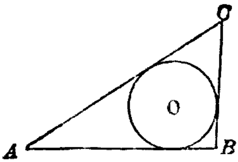


10.　由圓池近傍作二切線，其長 18 尺。所夾之角爲 60 度；求池徑。



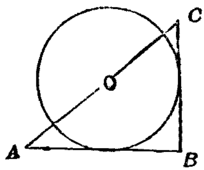
11.　四分之一之圓內接一圓，其四分之一之圓半徑爲 r，求內接圓半徑。

12.　直角三角形夾直角之兩邊爲 5 寸，12寸，求內接圓半徑。



13.　直角三角形夾直角之兩邊爲 5 寸，12 寸，於斜邊上取中心準與他二邊相切，求作一圓，問此圓半徑若何？

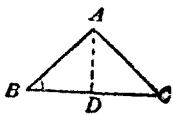
14.　半徑 r 尺之圓內所接正八邊形，其每邊之長若何？



主要問題 25.　三角形之二邊爲 2 寸，3 寸，此兩邊所夾之角，爲直角之二分之一，或二直角之三分之二，求第三邊之長；至分位而止。

解　(I).　$AB=2$ 寸，　$BC=3$ 寸，

$$\angle ABC=\frac{1}{2}R\angle,$$



由 A 作 BC 之垂線 AD，則

$$AD=BD,$$

故 $\triangle ABD$ 爲正方形之半。

故 $BD=\frac{1}{\sqrt{2}}AB=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, 〔定理 20 系〕

又因 $\angle ABC$ 爲銳角,

故 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2BC.BD$, 〔定理 11〕

$\therefore\quad AC=\sqrt{2^2+3^2-2\times3\sqrt{2}}=\sqrt{13-6\sqrt{2}}=\sqrt{13-6\times1.4142}$

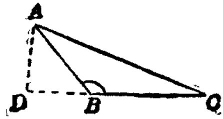
$=\sqrt{4.5148}=2.1$ 強

卽第三邊爲二寸一分強。

(II). $AB=2$ 寸, $BC=3$ 寸, $\angle ABC=\frac{2}{3}2R\angle$,

由 A 作 BC 之垂線 AD,其 D 點在 CB 之延長線上,

而因 $\angle ABD=\frac{1}{3}2R\angle$,故 $\triangle ABD$ 爲正三角形之半,而 BD 爲其一邊之半,



$\therefore\quad BD=\frac{1}{2}AB=1$.

又因 $\angle ABC$ 爲鈍角,

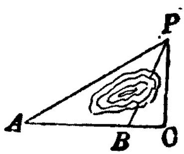
故 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2BC.BD$, 〔定理 10〕

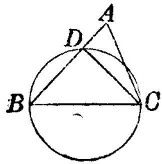
$\therefore\quad AC=\sqrt{2^2+3^2+2\times3\times1}=\sqrt{19}=4.3$ 強,

即第三邊爲四寸三分強。

例 題 XXV.

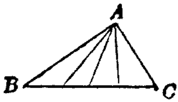
1. 於通東西路線之北,有一塔 P; 由 P 至路上 A 點之距離爲 150 尺, 由 A 向東 70 尺爲 B 點, 欲求 PB 之距離因有障礙,故再向東 30 尺乃正北見塔, 問 PB 之距離幾何?





2.　三角形 ABC,其 CA, AB, BC 之長爲 51 寸, 52 寸, 53 寸;以 BC 爲直徑作圓周, 與 AB 相交於 D; 問 DB, DC 之長各若干?

3.　三角形之三邊爲 5 寸, 6 寸, 7 寸;問最大之中線若干?

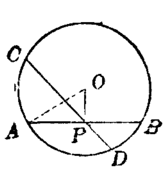


4.　直角三角形夾直角之二邊爲 a, b,由斜邊之四等分點與直角之頂點聯成三直線,問此三直線之長各幾何?

5.　三角形 ABC 之三邊 AB, BC, CA 爲 1 尺 2 寸, 2 尺 5 寸, 1 尺 7 寸, 試比較各角之大小,并證明本形爲鈍角三角形。

6.　二等邊三角形一邊與底邊之比,爲 1000 與 149 之比,問頂角爲銳角抑爲鈍角?

主要問題 26.　圓半徑 6 寸,距圓心 4 寸處設一點,由此點引最短之弦,其長若干? 且由此點任作一弦,其弦上兩分所包矩形之積又若干?



解。　OA 爲圓半徑, P 爲距中心 4 寸之點,

由 P 點所引之弦 AB,係與 OP 成垂直,

故爲最短。

由是　$AP=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}=\sqrt{6^2-4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$,

故弦長爲 $4\sqrt{5}$ 寸。

次 CD 爲由 P 點任意所作之弦。

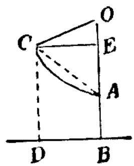
$$CP.DP=\overline{AP}^2,\qquad \text{〔定理 13 系 1〕}$$

$$=(2\sqrt{5})^2=20,$$

即　20 方寸。

例題 XXVI.

1. 池中生草一莖，出水三尺，今斜眠此草至其端與水面平，由其平處至原出水處計相距六尺，問池深若干？



2. 有絲下垂，其上端固着柱上，下端離地一尺；今曳其下端至離原處一尺三寸之處，則其離地爲一尺五寸；求此絲上端離地之高。

3. 於高 150 尺處，有燈臺一座，高 90 尺，求於平地取若干距離，俾與臺頂臺址合成最大之角。

4. 高於海面 h 之處，望見海面，其距離若何？

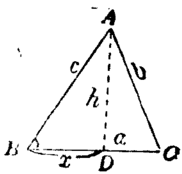
但地球半徑爲 r.

定理 2′. 表三角形三邊之數爲 a, b, c 三邊之和之半爲 s，表三角形面積之數爲 $\triangle$. 則

$$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

證. BC, AC, AB 爲 a, b, c;

$AD\perp BC$.



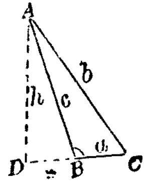
令 BD 爲 x，則

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2\pm 2BC.BD.$$

即　$b^2=c^2+a^2\pm 2ax$.

$\therefore \qquad \pm 2ax = b^2 - c^2 - a^2$

$\therefore \qquad \pm x = \dfrac{b^2 - c^2 - a^2}{2a},$



又 $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2$，令 AD 為 h，

則 $\qquad h^2 = c^2 - x^2$

$$= (c+x)(c-x)$$

$$= \left(c + \frac{b^2 - c^2 - a^2}{2a}\right)\left(c - \frac{b^2 - c^2 - a^2}{2a}\right)$$

$$= \frac{1}{4a^2}(2ac + b^2 - c^2 - a^2)(2ac - b^2 + c^2 + a^2)$$

$$= \frac{1}{4a^2}\{b^2 - (a-c)^2\}\{(a+c)^2 - b^2\}$$

$$= \frac{1}{4a^2}(b+a-c)(b-a+c)(a+c+b)(a+c-b)$$

$$= \frac{1}{4a^2}(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$$

$$= \frac{4}{a^2}\, s(s-a)(s-b)(s-c).$$

$\therefore \qquad h = \dfrac{1}{2}a \times \dfrac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

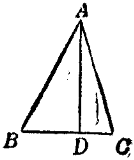
然 $\triangle ABC$ 為 $\dfrac{1}{2}BC.AD$，所以

$$\triangle = \frac{1}{2}a \times \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

注意． 此公式為 *Heron* 或 *Hero* 所證明；彼乃希臘算學家，西歷紀元前 120 年間人。

主要問題 27. 三角形三邊之長為 4 尺，5 尺，7尺，問對於 4 尺之邊之高若干？求至小數第三位。



解。 $BC=4$尺，$AC=5$尺，$AB=7$尺，三邊和之半爲 8尺；

故面積爲$\sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)}$方尺，

$=\sqrt{96}$方尺。

故對於 4 尺之邊之高爲$\frac{2\sqrt{96}}{4}=\frac{\sqrt{96}}{2}=4.898$強。

卽其高爲4.898尺強。

例 題 XXVII

1. 三角形三邊之長爲6寸，7寸，11寸，求面積。

2. 三角形 ABC，由A作 BC之垂線，與BC交於D；而$AB=52$，$BC=56$，$AC=60$，求BD之長若干？

3. 三角形內接圓及三傍接圓之半徑爲 r r'，r''，r'''表其面積之數爲S，則

$$S=\sqrt{rr'r''r'''}，$$ 試證之。

雜 題 集

1. 直角三角形斜邊上之正三角形，等於他二邊上正三角形之和。

2. 三角形 ABC 於其二邊 AB，AC 上任作平行四邊形 $ABHK$，$ACFG$；其 HK，FG 之交點爲 L，乃於 BC 上作 $BEDC$ 平行四邊形，其 BE 邊係與 LA 相等且平行；如是則 BD 平行四邊形等於AH，AF 兩平行四邊形之和。

注意。 此問題卽 *Pythagoras* 定理之擴張者也。

3. 三角形三邊之長若爲x^2-1，$2x$，x^2+1，則此三角形必爲直角三角形。

4. 三角形一邊上之正方形，若比他二邊上正方形之和爲大或相

等或小，則其對角必爲鈍角或直角或銳角，試依定理 12 證之。

5. 下題求逆證。

由圓徑一端 A，任引一直線，與圓周交於 C；又由直徑之他端作切線，與 AC 交於 D；

如是則矩形 AC，AD 必爲一定。

注意 此有兩逆證，宜注意。

6. $ABCD$ 爲正方形，E 爲 AD 之中點，F 爲 BE，AC 之交點，則有如下之係關。

$$\triangle AEF=\frac{1}{2}\triangle CEF$$

$$=\frac{1}{8}\triangle ABE$$

$$=\frac{1}{4}\triangle BCF,$$ 試證之。

7. $\triangle ABC$，其 BC 之三等分點爲 D，E；則

$2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=6\overline{BD}^2+3\overline{AD}^2$ 試證之。

但 $2BD=DC$。

8. $\triangle ABC$ 之重心爲 G，而 P 爲任意之點，則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+3\overline{GP}^2$，試證之。

9. 於圓徑 AB 上取 C，D 兩點。係與圓心 O 成等距離，由 C 任作 EF 弦成 DEF 三角形，其三邊上正方形之和，恆爲一定。

10. 圓內正交二弦 AC，BD 上正方形之和，等於半徑上正方形之八倍內減 OP 上正方形之四倍。(O 爲圓心，P 爲二弦之交點。)

11. 由圓外之點 P，作直徑 AB之垂線PQ，又由P任作割線PCD，係與圓周交於 C，D；則

$$\overline{PQ}^2 = PC.PD \pm AQ.BQ.$$

試證之。

12. 由直角三角形 ABC 之斜邊BC上任意之點P，作斜邊之垂線，使與 AB，AC 相交於 Q，P；則

$$\overline{PQ}^2 = BP.CP - BQ.AQ,$$

$$\overline{PR}^2 = BP.CP + AR.CR.$$

試證之。

13. 由圓外一點 A，作 AB，A C，兩切線；而 AB，AC之中點爲D，E，由DE上任意之點G作切線GF，必適等於GA。

14. AB爲圓徑，P爲 AB 上之點，Q爲圓周任意之點，由Q作切線，而 PR 爲此切線之垂線，

$$AB.PR = \overline{PQ}^2 + AP.BP.$$

15. 四邊形 ABCD 每對邊延長相交，其交點爲 EF。如是則 BD，AC，EF之中點必同在一直線上。

16 圓內所接四邊形，每對邊延長相交，其兩交點距離上之正方形，等於由兩交點所作兩切線上各正方形之和。

17. △ABC 爲二等邊三角形，AB＝AC，O 爲內接圓之中心，O'爲∠BAC內傍接圓之中心，今由 O及O'準與底邊BC平行引二直線，與二邊相交於P，Q；P，'Q'；則

$$\overline{OO'}^2 = PQ.P'Q',$$試證之。

18. 三角形 ABC 分底邊 BC爲 m＋n相等部分，

乃於 BC 上取D點，今 BD，CD 爲此部分之n倍，m倍，得式如次：

$$m\overline{AB}^2+n\overline{AC}^2=(m+n)\overline{AD}^2+m\overline{BD}^2+n\overline{CD}^2$$，試證之。

注意。 此題係由定理 12 及雜題集 7 觸類而引伸之者也。

19. 直角三角形各邊上各作正方形，發生各問題如次：

BC 爲斜邊，各斜邊上之正方形爲 BCDE，ABFG，ACHK，

(1) 各正方形對角線之交點爲O，O′，O″；則
$\triangle BCO=\triangle ABO'+\triangle ACO''$，試證之。

(2) $\triangle ABC=\triangle BFL+\triangle CHM$試證之。
但$LF\perp BC$，$HM\perp BC$，

(3) $BL=CM$，試證之。

(4) $\triangle ABC=\triangle AGK=\triangle CDH=\triangle BEF$，試證之。

(5) $\overline{BC}^2+\overline{GK}^2=\overline{BG}^2+\overline{CK}^2$試證之。

(6) $\overline{DH}^2=\overline{AB}^2+4\overline{AC}^2$，
$\overline{EF}^2=\overline{AC}^2+4\overline{AB}^2$，試證之。

(7) $\overline{GK}^2+\overline{EF}^2+\overline{DH}^2=6\overline{BC}^2$，試證之。

(8) 六邊形 EFGKHD，各邊上正方形之和。等於 BC 上正方形之八倍。

(9) 於 DE 上向形外準與 $\triangle ABC$ 全等作 DEQ 三角形（但$DQ \cong AB$）

四邊形$FGKH=FBCH=ABEQ=ACDQ$，

(10) 依上題證明 pythagoras 之定理

附　　錄

例題解法指針

例題 I.

1. 依定理 1 證明。

如二線分爲 a, b, 彼一線分爲 c, 則 $(a-b)c=ac-bc$, 此與代數學公式相合。

2. 即前題之逆證。

3. 分前線爲二部分，其各部分爲 a, b, 則可證

$$(a+d)^2=(a+b)a+(a+b)b$$

又當推想正方形卽二邊相等之矩形。

4. $(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d$, 注意於此可也。

例題 II.

1. 卽定理 2 之關係，變爲整齊者也。

2. 依主要問題 2 之證明，改加爲減可也。

3. 線分 AB 之中點爲C, 任意之點爲D, 則

$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=2\overline{AC}^2+2\overline{CD}^2=$(一定)$+2\overline{CD}^2$ 求此式爲最小。

4. $(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2$注意於此可也。

5. $\overline{AB}^2=(AC+BC)^2$

6. $AB^2=(AC+BC)^2$

例題 III.

1. 依定理 4 解之。

2. 二邊之和爲 AB, 分點爲 D, 中點爲 C, 則

$AD.BD=\overline{AC}^2-\overline{CD}^2=$(一定)$-\overline{CD}^2$, 求此式爲最大。

3. 與前題同理。

4. 先依主要問題 2, 次以 $\overline{2CD}^2$ 加減. 依定理4解之,

例題 IV.

1. 以二邊之中點,各爲三角形之頂點,依定理 6 系 2 解之。
2. 雙方同加一三角形,可也。
3. 雙方同減一三角形,可也。
4. 以此兩三角形內接於相等之圓,卽可得其證明。
5. 聯 AF,DF 兩直線,依定理 6 系 2 解之。

例題 V.

1. 依定理 6 系 2 解之。
2. 聯 DC 直線依定理 6 系 2 解之
3. $\triangle DEP=\frac{1}{4}\triangle ABC$, 卽依前題解之。
4. 注意 $\triangle ABE=\triangle BDC$。
5. 聯BD直線,E爲BD之中點,$\therefore \triangle ABE=\triangle AED$.
又由B及D所作AC之垂線必相等。

6. 聯A'C直線,則 AC,BC',BA',AM 依次爲 $\triangle A'B'C'$, $\triangle A,B'C$ $\triangle ABM$, $\triangle ABC$ 之中線。

7. 重心 G 爲中線 BE 上三等分點之一。

$\therefore \triangle DGE=\frac{1}{3}\triangle BDE$,以下依(3)題解之。

8. 聯 AE 直線,則$\triangle ADE=\frac{1}{3}ABE$, $\therefore \triangle BDE=\frac{2}{3}\triangle ABE$ $=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\triangle ABC=\frac{2}{9}\triangle ABC$, 依同理。求 $\triangle ADF$, $\triangle CEF$ 合於 $\triangle ABC$ 之分數。

9. 由中點 D 作 DH,令 DH=BE,與 EF 之延長線相交於 H; 乃聯 AH 直線,成 $\triangle ADH$, 卽三中線爲邊之三角形。

而 E 適當其重心。

例　題　VI.

1. 依主要問題 6 解之。

2. 聯 BD 直線。

3. 由 BC 之中點，與 E，F 各聯成直線。

4. 分各邊爲三等分，依前題解之。

5. EG，FH 各延長之，令與底 BC 或其延長線相交，依主要問題 6 解之又▭FG＝▭FK－▭HK。

6. AB，DC 之中點爲 E，G；聯 E，H，G，F 必可成平行四邊形，又聯成 GK 直線；

$$\triangle HKF=\triangle HKG+\triangle GKF+\triangle HGF$$

將此式右邊變化，可也。

例　題　VII.

1. 由內切圓心與各頂點聯成直線，卽成三個三角形。

2. 由圓心與各頂點聯成直線，依前題解之。

3. 由此點與各頂點聯成直線，成各三角形；而此多角形之周圍與面積固皆爲一定者也。

4. 皆等於三角形 ABC 之二倍。

5. 由各頂點與圓心各聯成直線。

6. 由各頂點準與對角線平行各作直線，卽成一平行四邊形，以此四邊形與原四邊形比較，可也。

7. 與前題同意。

例　題　VIII.

1. 聯 AC 直線。

2. 由形外之點 P，作 PQ，係與 AB 平行，而與 B 相交於 Q，乃聯成 AQ，DQ 兩直線。

3. 聯 BD 直線，則 $\triangle AEB=\triangle BED$。

4. 作中線 BM, △BEM＝BEF, 各加 △ABE, 可也

5. 由前問題, MF, BC 之交點與定點 E 聯成直線, 卽所求之二等分線。

6. 聯 AD 直線, BC 之中點爲 M, 聯 ME, MA 兩直線, 依作圖, ME ∥ AD, 次證明 △BEM, △BED 皆爲二等邊三角形。

7. 依本題, 邊數多之多角形可漸次變爲邊數少之多角形。

8. 參照前題。

9. 聯 AD, AE 兩直線, △ABD＝$\frac{1}{3}$ △ABC。

10. 聯 AP 直線, BC 之三等分點爲 D, E; 由DE作平行線, 可也。

11. 兩三角形, 在 AB 反對之側爲差, 同側爲和; 差者易解。和則由 D, C 各作 AB 之平行線, 與 BE 或其延長線上相交於 D, C′; 聯成 AD′, AC′ 兩直線。

然卽得△ACB＝△AC′B, 餘類推。又 E 爲C′D之中點。宜注意•

例 題 IX.

1. 由力點, 引二隣邊之平行線, 依主要問題 9 解之。

2. 依主要問題 9 分別求其等式以相加可也。

3. 聯 AP, CP 二直線, △APC＝△GKH, 依主要問題 9 解之可也。

4. 由P作AC 之垂線就 △AKP 與 △AEP及PKC 與 △PHC 兩兩比較可也。

5. 依前題解之。

例 題 X.

1. 同底之三角形高較大者, 面積亦較大。

2. 依主要問題 10 之圖, CE 爲高, BC 爲底邊, 求於 AE 上定 A 點。BA＋AC 爲最小。

3. AB, AC 爲相交二直線, P 爲定點, BC 二等分於P, DE 爲由P任引之直線, BF ∥ AC, 就 △BPE, △DPC 比較大小可也。

附記。 BC 二等分於 P，其作圖如何。

4. 依題作二等邊三角形，又任作三角形比較，可也。

5. 分爲三角形，依前題解之。或就 ▭GC，▭BF 比較，可也。

6. P'爲 BC 上任意之點，$P'B'=P'C'$ 則▭ $AP'=\frac{1}{2}\triangle B'C'A$，

▭ $AP=\frac{1}{2}\triangle BCA$。依(3)題將兩三角形比較，可也。

7. 與(1)題同理。

8. ABCD 爲內接於圓任意之矩形，依前題，令△ABD 爲最大，卽合所求。

9. 作全圓，依前題解之。

10. ABC 爲內接於圓任意之三角形，A' 爲 BAC 弧之中點，則 $\triangle BA'C>\triangle BAC$，B 爲 $A'BC$ 弧之中點）則 $\triangle AB'C<\triangle BA'C$。

依同理，於邊有不等者，必更可作其再大之三角形。〔譯者按，卽係內接於圓之三角形，若係三邊皆等，則不復能作再大之三角形〕

11. 與前題同理。

例　題　XI

3. 依主要問題 11 解之。

或聯成 DM，ME 兩直線，就△ ADM＝△AEM 證明之。

故聯 DE 兩頂點所成之 DE 線分，必適爲公共底邊 AM 所平分。

4. 依主要問題 11 解之。

5. 依(3)，(4)題解之。

6. bB 之延長線與 aC 相交於 D而AacC 爲梯形，依(4)題解之。

例　題　XII.

1. 參證主要問題 12。

2. 由 R 點引二隣邊之平行線，依定理 8 解之。

3. EH,GF 之交點爲 P,證明 AC 同交於 P,由 P 點引二隣邊之平行線,其他邊延長之,遂如圖得數多之平行四邊形;依定理 8 及主要問題 12 解之。

4. DE,HK 之交點爲 P,由 P 引二隣邊之平行線,與 DF,FK 相交於 L,M。

乃就 ▱GL=▱GM 證明之,可也。

例題　XIII.

1. AD 爲直角三角形 ABD 之斜邊。

2. $\overline{AB}^2=4\overline{BE}^2$ 宜注意。

3. $\overline{CD}^2=\overline{AC}^2+\overline{AD}^2$

4. 形內皆直角三角形,宜注意。

5. 由 P 點與頂點聯成直線,$\overline{AD}^2+\overline{PD}^2=\overline{AF}^2+\overline{PF}^2$,餘類推。

6. 即前題之廣義也。

7. $\overline{AE}^2=\overline{AD}^2-\overline{DE}^2$。餘類推。

8. $\overline{AC}^2=\overline{AF}^2+\overline{EC}^2=\overline{AE}^2+\overline{EB}^2$,餘依主要問題 2 解之。

9. 展開左邊。

10. 由 D 作 AB,AC 之垂線,卽得兩直角二等邊三角形,依此求 $\overline{BD}^2+\overline{DC}^2$,可也。

或由 A 作 BC 之垂線,變化 $\overline{AD}^2$ 可也。

11. $\triangle APB=\triangle AQR$. $\therefore AQ=AB$, $\therefore \overline{AQ}^2=\overline{AB}^2$.

次證明 $\triangle AQR$ 爲直角二等邊三角形,求 $\overline{AB}^2$ 與 $\overline{QR}^2$ 之關係。

12. $\angle B=60^0$, $\angle C=30^0$, $\therefore \triangle ABC$ 爲正三角形之半。

13. 圓心與圓周之交點聯成直線,卽成正三角形。

14. G 爲重心,則 $AG=\frac{2}{3}AD$.

例題　XIV.

1. 由 A 作 ED 之垂線。

2. 依主要問題14解之。

3. 依定理 4 解之，又別解則依主要問題 16 解之。

4. 由 A 點作 BC 之垂線 AM。

5. 聯 MC 直線。

6. $AB \parallel YE$, $YD \perp BC$。

7. 證明 $\overline{AB}^2 \sim \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 \sim \overline{DC}^2$，可也。

例　題　XV.

1. 聯 OD, OB, OC 各直線，C, D 爲切點，O 爲圓心。

2. 聯兩圓心 O, O′ 成直線。由切點A, B各作直徑。又 $AB \parallel O'C$。

3. 由切線C作通徑 ACB，聯成 AD, AF, BG, BE 各直線。

4. 依主要問題 2 解之。

5. 正交兩弦 AB, CD 之交點爲 P，聯成 CB, AD 兩直線，又作直徑AE；如是則 △ADE 爲直角三角形。

7. P爲所設之直線上任意之點，PA爲切線，O爲圓心，

$\overline{AP}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OA}^2$，依此解之可也。

例　題　XVI.

2. ∠B 爲銳角。

3. ∠B 爲銳角。

4. ∠B爲銳角。而 $AE \perp BC$, $DF \perp BC$，故 $BE = FC$

5. AB 對於 ∠AHB，BC 對於 ∠BHC，AC 對於 ∠AHC，依定理求之。

例　題　XVII.

2. PE 爲兩三角形之中線。宜注意。

3. 聯 P 與對角線之交點成直線。

4. 聯各邊之中點,卽成平行四邊形;依(1)題解之。

5. AD,BE,CF 爲中線,就 △AGB,△BGC,△AGC 三三角形,依定理12解之。

6. 聯 AP,CP 兩直線 AP,CP,PQ 各爲三角形之中線,依定理12解之。

7. 就 ABCD,BCDE,CDEA……四邊形,依前題解之。

8. 作中線CD。

10. 聯成 PC,QC 兩直線,各爲三角形之中線。

11. 聯成 A'C,B'C,MC,MP 各直線;但M爲 A'P' 之中點。
△PMC,△A'MC 均爲直角三角形,宜注意。

12 若AB>AC,則BE<CD,

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AE}^2+\overline{BE}^2)$,$\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{DC}^2$

然 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2>\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$.

$\therefore$ $\overline{AE}^2+\overline{BC}^2>\overline{AD}^2+\overline{DC}^2$.

然 AD>AE 以下略。

13. DG'=DG作△ABG'而BG 爲其中線。

例題 XVIII.

1. AB 爲兩定點,聯成AB直線,求其中點。

2. 卽對角線之交點。

4. 此因頂點與底邊之中點所聯成之線分爲一定。

5. ABCD 爲矩形,A 爲定點,B,D 二頂點在圓心O之圓周上,由各頂點與圓心 O 聯成直線,依例題 XVII,3 證明 OC 爲一定。

6. 如(7)題之圖,E 爲矩形 BC 對角線之交點,OA 之中點爲 F證明 FE 爲定。

7. 同前題。

8. 由 AB 之中點M與 C,O 兩點各聯成直線,證明 $\overline{CM}^2\sim\overline{OM}^2=$ (一定)

例　題　XIX.

1. AD, BE, CF 同交於 H。

證明 BFEC, AFDC, ABDE 各爲同在一圓周上，乃由外角之關係，證明$\angle ADB=\angle ADC$，餘可類推。

2. 由 C 作對邊之垂線，將等式之右邊變形可也。

3. $CF\perp AB$

6. 聯 PB 直線。

7. 聯 AB, BC 兩直線，依前題參證可也。

8. 證明$\triangle DOE$爲直角三角形，依定理13系2解之。

9. APBC 同在一圓周上，$\therefore CD.PD=AD.BD=MD.ND.$

10. RCQ'P 同在一圓周上，$\triangle CQD\equiv\triangle CQ'D$。

11. CHG 在一直線上，而 CEGF 同在一圓周上。
又CAPB同在一圓周上，$\therefore$ACBG同在一圓周上。

12. 依圖解之。可也。

13. AD.AH=AF.AB，及 AD. AH=AC. AE，餘依同理相加，可也。

例　題　XX.

4. AB 之中點爲 M，將 $\overline{AE}^2$, $\overline{BF}^2$ 變形，可也。

5. 皆等於 $\overline{AB}^2$

6. 證明 OA 爲 AEF 圓之切線，可也。

7. 證明 BC 爲 ADB 圓之切線，可也。

8. 作 $\angle ACB$ 之二等分線 CD。將$\overline{AB}^2$變化，可也。
或證明 BC 爲 ADC 圓之切線。

9. 聯 AP, AR 各直線，AP 爲 ABR 圓之切線。

10. PA=QB，$\therefore PQ=AB+2AP$.兩邊取平方，可也。

例　題　XXI.

1. 證明 $OP.OF=\overline{OA}^2$.
2. $OG.OA=OF.OP=\overline{OD}^2$。 ∴G爲定點。
3. 以 OG 爲直徑之圓周。
4. 與(2)題比較對照自明。
5. 如圖,聯 GF,FB 接成一直線上。∴ $\overline{BE}^2=BG.BF=BD.BA=\overline{BC}^2$。

例 題 XXII.

1. P 爲定點,AB,AC 爲二定直線,作∠A 之二等分線. AD,P 點對於 AD 之對稱點爲 P′,依主要問題 22 解之。
2. 由A,B 二定點任作一圓,令與定圓相交。
3. 由A,B二定點作一圓,令與定直線相切,求其切點。
4. 依(2)題解之。
5. AB 爲所設正方形之邊,OB 爲二邊之半差。
7. 矩形之二邊爲 x,y; $(x+y)^2=4xy+(x-y)^2$

例 題 XXIII.

1. 20方尺。 2. 8寸。
3. 5寸。 4. 39方寸。
5. 14寸。 6. 40方尺。
7. 20方尺。
8. (1)$\triangle ABC=\triangle ABO+\triangle BCO+\triangle CAO$

$$=\frac{1}{2}AB.OD+\frac{1}{2}BC.OE+\frac{1}{2}AC.OF.$$餘類推。

又 $\triangle ABC=2\triangle AO'G-2\triangle BGO'-2\triangle CHO'$

$=Sr'-r'(s-c)-r(s-b)$,餘類推。

(11) $\frac{1}{r}=\frac{s}{S},=\frac{1}{r'}=\frac{s-a}{S}$, 餘類推。

例　題　XXIV.

1. 由 B 作 AD 之垂線,求此高,答 102 方尺。

2. 24 方尺, 3. $216\sqrt{3}$方尺. 4. 正方形大。

5. 外接於正方形之圓大,蓋圓徑大者圓亦大也。

6. $3:1$及$1:2\sqrt{3}$. 7. $(160+82\sqrt{3})$方寸。

8. 56寸。 9. 33.6寸。 10. $12\sqrt{3}$尺。

11. $(\sqrt{2}-1)r$。 12. 2寸。 13. $\frac{60}{17}$寸。

14. $r\sqrt{2-\sqrt{2}}$尺。

例　題　XXV.

1. $10\sqrt{134}$尺 2. 28寸及45寸。 3. 依例題XVII 9,
對於 5 寸邊之中線爲最大。

4. $\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$, $\frac{1}{4}\sqrt{(a^2+9b^2)}$, $\frac{1}{4}\sqrt{b^2+9a^2)}$。

5.6. 參照定理11系。

例　題　XXVI.

1. $4\frac{1}{3}$尺。 2. 269寸。 3. $60\sqrt{10}$尺。 4. $\sqrt{h(h+2r)}$

例　題　XXVII.

1. $(6\sqrt{10})$。 2. 20。 3. 依例題XXIII。8

蓋 $r=\frac{S}{s}$, $r'=\frac{S}{s-a}$, $r''=\frac{S}{sb}$ 等。

雜　題　集

1. ABC 爲直角三角形,A 爲直角 ABF,BCD,ACE 各爲正三角

形,聯成 CF,AD 兩直線,$\triangle ABD = \triangle FBC$, 由 AB 之中點 M 與 F,C 各聯成直線,$\triangle AMC = \triangle AFC$,以此兩式相加,餘類推。

3. 聯 LB,AE 兩直線,LBEA 爲平行四邊形等於▭BMNE。(M,N 爲 LA與BC,ED之交點)且等於▭ABHK。

4. $AM = BM$ 爲直角, $AN > BM$ 爲銳角, $AM < BM$ 爲鈍角;(M 爲BC之中點)

7. $\overline{AB}^2 + \overline{AE}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2)$, $\overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AE}^2 + \overline{DE}^2)$。相加可也。

8. 聯 PD 直線,先就$\triangle APC$ 依定理 12,次於$\triangle PBD$依前題解之。(D爲AC之中點)

9. 聯 CF,OF 各直線。

$\overline{CF}^2 + \overline{DF}^2 = 2(\overline{OC}^2 + \overline{OF}^2)$, $\overline{CF}^2 + \overline{DE}^2 = 2(\overline{OC}^2 + \overline{OE}^2)$。

二式相加,又兩邊各加 2CE.CF。

10. $\overline{AC}^2 = (AP + PC)^2 = \overline{BD}^2 = (BP + PD)^2$,由此變化,可也。

11. 作切線 PR,聯 PO,OR 兩直線,

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{QO}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{OR}^2 - \overline{QL}_2$$

$$= PC.PD + \overline{AO}^2 - \overline{QO}^2, \quad \text{以下略。}$$

若 Q 在 AB 之延長線上則爲差。

12. 作 $\triangle ABC$ 之外接圓,與 RP 相交於 E,D。

$$BQ.AQ = EQ.DQ = \overline{PD}^2 - \overline{QP}^2 = BP.CP - QP^2$$

$$\therefore PQ^2 = BP.CP - BQ.AQ \quad \text{以下略}$$

13. O 爲圓心, AO 與 DE,BC 之交點爲 H,K, $\overline{OG}^2 - \overline{AG}^2 = \overline{OH}^2 - \overline{AH}^2 = (OH + AH)(OH - AH) = OA.OK = \overline{OB}^2 = \overline{OF}^2$

$$\therefore \overline{AG}^2 = \overline{GF}^2 \qquad \therefore AG = GF。$$

14 作 QC 直徑,$PE \perp QC$.延長 QP 與圓周交於 D,聯成CD直線。

$$AB.PR = QC.QE = QD.QP = (QP + PD)QP$$

$=\overline{QP}^2+PD.PQ$。

15. 以 DF, BF 爲邊，作 DFBK 平行四邊形，又以CF, AF爲邊，作 CFAH 平行四邊形；

如是則 AD, BC, KH必同交於一點；〔例題XII,3〕且BC,AC之中點，卽KF, HF之中點，必同在一直線上。

16. 作△BCE，△CDF 之外接圓，其兩圓周之交點必適在 EF上，(何故)命其點爲G；

$\overline{EE'}^2=EC.ED=EG.AF$

$\overline{FF'}^2=FC.FB=EG.EF$。 兩式相加。

17. $OD \parallel QQ, \overline{OO'}^2=\overline{OD}^2=\overline{O'D}^2=\overline{QQ}^2-\overline{O'D}^2$,

然 $QQ'=CQ+CQ'=OQ+O'Q'$

又 $O'D=O'Q-DQ'=O'Q'-OQ$, 依此代入上式。

18. 分BC 爲 m+n 等分，其一等分若爲 XY，則

$BD=nXY$, $DC=mXY$。

$\therefore$ $mBD=mnXY=nCD$。

$AE \perp BC$

若 E 在 C,D 之間則 ∠ADC 爲銳角，而∠ADB 爲鈍角，依定理 10,11 解之。

附記

(1) $BD=\dfrac{n}{m+n}BC, CD=\dfrac{m}{m+n}BC$，故本題可變之如次，$m\overline{AB}^2+n\overline{AC}^2=(m+n)\overline{AD}^2+\dfrac{mn}{m+n}\overline{BC}^2$

(2) 若 ∠BAC 爲直角，則

$m^2\overline{AB}^2+n^2\overline{AC}^2=(m+n)^2\overline{AD}^2$。

(3) 若 BC 分爲 m−n 箇相等部分，延長CB至D，令BD, CD爲此部分之 n 部分，m 部分，

$$m\overline{AB}^2 - n\overline{AC}^2 = (m-n)\overline{AD}^2 + m\overline{BD}^2 - n\overline{CD}^2$$

19. (1) 各三角形爲正三角形之四分之一。

(2) $AN \perp BC$

$\triangle BFL \equiv \triangle ABN$, $\triangle CHM \equiv \triangle CNA$.

(3) 依前題解之。

(4) $\triangle ABC \equiv \triangle CDP$.

C爲PH之中點, $\therefore \triangle CDP = \triangle CDH$.

(5) 因四邊形 BCKG 之對角線爲正交。

(6) 因DH爲直角三角形PDH之斜邊。

(7) 以前題之式相加。