大學叢書

拓撲學

上册

沙愛福
施雷發 著
江澤涵 譯

商務印書館發行

大學叢書

拓撲學

上冊

沙愛福
施雷發 著
江澤涵 譯

商務印書館發行

譯者序

蘆溝橋事變後一個多月，1937 年 8 月中，譯者離開北平與北京大學，行裝中只能帶了兩本書。其中的一本就是本書的原書。那時候以爲必須在皖南旌德鄉下住一個相當長久的時期，就有在鄉下翻譯一本拓撲學的志願。那年年底譯者到了長沙的臨時大學，這本書的翻譯纔眞正開始了。1938 年初，譯者到了昆明的西南聯合大學，去年又回到北平的北京大學；從翻譯開始到完成，經過了差不多整整的十年。這十年中時譯時停，或譯或教，經過了很多次的修改與抄寫，纔能付印。

原書在 1934 年出版時，卽被公認爲拓撲學入門的一本空前的好書。在這麼短的篇幅中，包括組合的拓撲學這麼多的材料；而且寫得淸楚嚴密，便于初學。這確是本書的特色。現在雖然已有了數種拓撲學新書，各有其優點，而本書仍未喪失他的地位。因其如此，本書譯本出版，或仍能適合國內的需要。

本書中數學名詞的譯名，多半遵照中國科學社的科學名詞審查會 1938 年編印的算學名詞彙編。譯者力求意譯，希望譯文一方面不失原意，一方面也近于通用的語句。改正原書不妥之處與譯者增加的字句，在譯文中都用彎括弧表明。但翻譯算學書，譯者很少經驗，在算學與文字兩方面，書中都難免有不妥之處，深望讀者發現時指正。

這十年中翻譯此書，得着許多位同事與學生的幫助，譯者極爲感謝。特別要致謝的，是開始時王湘浩先生的幫助，與完成時冷生明先生的幫助。校對時，韓春霖，趙中立與李經熙三先生幫忙很多。德中索引的翻譯與中德索引的編排，是魏執權先生幫忙作的。最後，譯者十分愉快的申明一點：商務印書館完全站在提倡學術的立場，不計營業的得失，願意出版這本書；而且在排印時不憚煩的改善，每頁自三次至七次之多。譯者衷心感謝他們。

江澤涵　　北大數學系，1947 年 7 月。

著者序

因爲著者之一 (*Threlfall*) 在 *Dresden* 專科學校講授拓撲學的機會，著者兩人纔着手編著本書。 但授課的講義，本書中只採用了一部分。本書的主要內容，還是後來著者兩人勤慎研討的結果。

拓撲學正在發揚光大的時期。 本書編著的目的，是想供給讀者這門算學的一個門徑與一個綱要。 因此我們並不想把最廣的定理，儘可能完備的搜集起來，然後證明。我們注意的是有用途的**概念**，與有效果而且有前途的**方法**；我們要詳細的界說這種概念，系統的詮釋這種方法，並且藉詳解實例來說明這些概念與方法。

本書並不假設讀者有特別的預備智識。 只有少數通用的定理，本書沒有證明就引用了。 但讀者從脚註中所援引的文獻，不難查出所需要的恰當證明。 ——本書限于組合的或代數的拓撲學，但是在儘可能的避免點集論的困難的情形下，也同時利用綿續概念。所以 *L. E. J. Brouwer* 所創始的單純複合形與流形的概念，在本書的討論中佔着中心的地位。——爲了不熟悉羣論及其中現時通用的術語的讀者的方便起見，我們在最後一章中彙集了本書所需用的羣論中的定理。 這一章有必要時可在第二章以後，第三章以前閱讀。 我們儘可能的使各章獨立。我們還很致力于編排書尾詳細的，依字母次序排列的索引。 書中

的附錄，指出更多的參考文獻；希望對于書中未詳論的理論，使讀者能藉此作更進一步的研究。由于篇幅的限制，有若干理論，書中根本未能提起。我們特別引爲缺陷的，是 *Alexander* 的對偶定理，*Alexandroff* 的閉點集理論與投影光譜（*Projektionsspektrum*）理論，都不能不割愛了。若一時尙無別的拓樸學教科書出版，講到這些理論，我們希望能繼續寫一本來彌補這缺陷。

我們能完成本書，最感激 *E. Trefftz* 教授。他不但犧牲他自己的時間，使我們能够有編著本書所需要的閒暇；而且他充分瞭解我們的困難，切實加以指示，更給我們不少的鼓勵。同樣的，我們感謝 *Dresden* 的算學家的討論會，特別是 *C. Weber* 教授的幫助。我們也感謝別處的算學家，*L. Bieberbach*, *K. Reidemeister*, *F. Hausdorff*, *H. Kneser*（特別參看 §58），*B. L. van der Waerden* 諸位教授的幫助。前兩位讀過校稿，後一位在 *Prage* 的講演 [1] 與啟發我們的談話，影響了本書的格局。我們還感謝 *Dresden* 的博士候選人 *W. Hantzsche* 與 *H. Wendt*；校對時，他們有許多的改善。最後我們要致謝出版者，他們擅長的技術，使校對簡易，而且印製完善。

Dresden, 1934 年 1 月。

H. Seifert.　　*W. Threlfall.*

書尾有附註與文獻索引。文獻按照著者姓名的字母次序排列。方括弧中的數字指文獻索引，上肩的小號的數字指附註。

目 錄

第一章 直覺的討論

第二章 單純的複合形

第三章 同調羣

第四章 單純的逼近

第五章 在一點處的性質

第六章 曲面的拓撲學

第七章 基本羣

第八章 覆疊複合形

第九章 三維流形

第十章　n 維流形

第十一章　綿續變換

第十二章　羣論中的定理

第一章 直覺的討論

§1 拓樸學的主要問題

拓樸學 (*Topologie*) 所討論的對象，是幾何圖形的，經過**拓樸變換** (*topologische Abbildung*)——正逆兩方面都單值(*eindeutig*) 而又都綿續的變換——而不改變的性質。我們暫時先把幾何圖形就當作是三維空間 (或更高維的空間) 中的點集。在空間的一笛卡兒坐標系中，綿續函數所表出的變換叫做**綿續變換**。這些變換函數——表出變換的函數——只要在這圖形的點集上有定義(不必在全個的空間中都有定義)。圖形的性質，經過拓樸變換而不改變的，叫做**拓樸性質**。兩個圖形間若是有**拓樸對應**，那就是說，若有一拓樸變換存在，把兩個圖形中的一個換成另一個，這兩個圖形就叫做**同胚的** (*homöomorph*) 圖形。

例如半個球面與圓域 (*Kreisscheibe*) 同胚，因為直角投影 (*Orthogonalprojektion*) 就是把半個球面換成 (圖 1 中用斜綫表示的) 圓域的一個拓樸變換。更普遍的說，若是一曲面能彎扭成另一曲面，他們就同胚。例如球面，立方形，與橢圓面同胚；平環 (*Kreisring*) 與有限高的圓柱面也同胚。

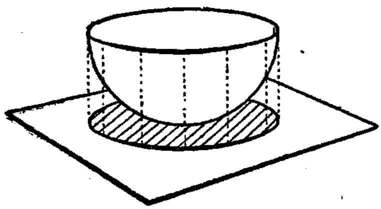


圖 1

同胚圖形的例子多而易見。但是也有圖形，例如歐幾里得平面與刺破了一個點的球面（減去了一個點的球面），不是一見就可以斷定他們同胚的。這兩個圖形間的畫形投影（*stereographische Projektion*）就是一個拓撲變換；而且他們也與圓域的內域同胚（§6，例2與3）。

要證明兩個點集不同胚，通常比較困難多了。點與線段顯然不同胚，因爲這兩個點集不能成一一對應。我們也容易看出線段與圓域不同胚。設 A, B, C 是圓域中的任意三點。從 A 點出發，能綿續的在圓域中走到 B 點，而不通過 C 點。圓域的這個性質是拓撲性質。線段却沒有這個性質：若要從線段的一端綿續的走到另一端，就必須通過線段的中點。若更進一步比較圓域與球體，我們就不能如此簡單的得着結論。圓域中有分開圓域的閉曲線；若是我們要想利用圓域的這個特徵，我們就必須證明一條閉曲線不能分開球體。但是爲什麼一條閉曲線不能裝滿一個分開球體的曲面呢？我們要證明圓域，球體，與更高維的相當的圖形不同胚（證明見§33），已經與證明線段與圓域不同胚的情形不同，不能有那麼簡易的方法了。

同胚的概念在拓撲學中的地位，與全合的概念（*Kongruenzbegriff*）在初等幾何學中的地位一樣。在初等幾何學中，兩個全合的圖形本質上無區別；同樣的，在拓撲學中，兩個同胚的或拓撲對應的圖形本質上也無區別。但是我們應當注意下述不同之處：兩個圖形若是全合，全個的空間就有一個剛體運動，使其中的一個圖形移到另一個；兩個圖形若是同胚，全個的空間却不必有一個拓撲變換，使其中的一個圖形換成另

一個。

例如全個的空間的任一拓撲變換都不能 (任一變狀 (*Deformation*) 當然更不能) 把圓週 (*Kreislinie*) 換成一個扭成結的 (*verknotet*) 曲線 (§ 52 末句)，如同三叉扭結 (*Kleeblattschlinge*) (圖 2)。 但是圓週與扭結 (*Knoten*) 同胚，因爲他們的點間有一個正逆兩方面都單值而又都綿續的變換；而且同胚這種關係只依賴于這兩個點集，與那包含他們的空間無干。

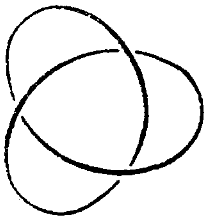


圖 2

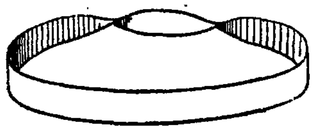


圖 3

同樣的，全個的空間沒有一個拓撲的自身變換 (*Selbstabbildung*)，把一個扭轉了 2π 的倍數的弧度的環帶 (*geschlossenes Band*) (圖 3) 換成一個未扭轉的環帶。 但是把這兩個環帶割開成兩個全合的長方條，使條上相當的點成對應，就可知這兩個環帶同胚。

在拓撲學中，扭結與圓週，或如此扭轉了的環帶與未扭轉的環帶，都是相同的圖形。只有把他安置在三維空間中的時候，他們才有區別。而且若是把那包含他的三維空間又當作是四維空間的子空間，因而可以引用四維空間的變狀，這種區別可又消失了。這是因爲經過四維空間的一個變狀，圓週可以換成扭結，而且在變狀的歷程中曲線還不自相穿割 (*Selbstdurchdringung*)； 就如同經過三維空間的一個變狀，圓週可換成橢圓。[1]

由此看來，此後我們要把一個圖形的拓撲性質分成兩種：一種是

“內在的”(*inner*),是經過這個圖形的所有的拓撲變換都不改變的性質;另一種是依賴于包含這圖形的空間的,是經過這全個空間的所有的拓撲變換都不改變的性質。

我們再舉一例來說明這種區別。設空間中有一圓週與一直線,同在一平面上,但無共點。圓週繞直線旋轉,產生一個環面(*Ringfläche* 或 *Torus*)。通過環面的任一點 O 有一母圓 a;我們把他叫做環面的經圓(*Meridiankreis*)。在旋轉時,O 點也產生一圓 b;我們把他叫做緯圓(*Breitenkreis*)(圖 4)。我們能不用空間的拓撲的自身變換,表出經緯圓的區別如下:經圓能在環體(*Vollring*,環面所包的立體)中縮成(*zusammenziehen*)一點,而緯圓不能,所以全個的空間的任一拓撲的自身變換,都不能把由環面與一個經圓所構成的圖形,換成由環面與一個緯圓所構成的圖形。但是經緯圓間的這區別並非環面的內在性質。空間雖然沒有一個變狀,把環面換成他自己,使經緯圓的地位交換;環面却有如此的一個拓撲變換。要想求得如此的一個拓撲變換,我們設想這環面是用有彈性的薄膜做成的。把他沿着 a 與 b 割開,彎扭成一個正方形(圖 5);再把這正方形沿着對角線摺疊起來,使正方形上原來的兩點,摺疊成一點

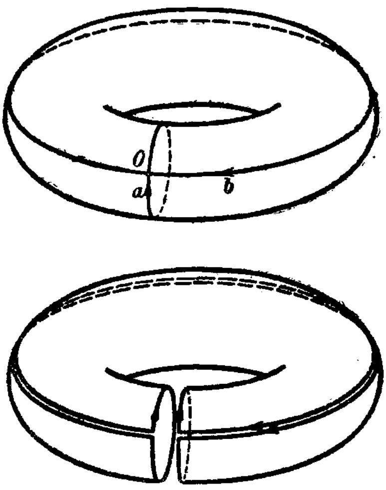


圖 4

的，成對應。這對應就是正方形的一個拓撲的自身變換，使 a 與 b 交換，而且相當於環面的一個同樣的自身變換。——將來在下節中，我們要提出曲面的能定向性 (*Orientierbarkeit*) 與雙側性 (*Zweiseitigkeit*)。這個性質供給我們另一個特徵，表明內在的拓撲性質與浸沒的拓撲性質 (*Einbettungseigenschaft*) 的區別。

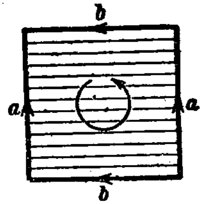


圖 5

拓撲性質間的這種區別，與微分幾何學中的度量 (*metrisch*) 性質間的區別相同。微分幾何學中的度量性質的一種是內在的，不依賴于曲面在空間中的位置，由第一個度量的基本式 (*Grundform*) 斷定；另一種是由曲面與空間所組成的圖形的度量性質，由第二個基本式斷定。

拓撲學的主要問題，就是要判斷給定的兩個圖形是否同胚，而且在可能的時候，列舉所有不同胚的圖形。我們起始時就把圖形看作是歐幾里得空間中的點集。雖然關于歐幾里得空間中的任意子集已經有很深博的理論*)，為避免引起不願意引起的集合論中的困難起見，我們將不再採用如此廣義的圖形概念了。我們將要採用的，只是 *L. E. J. Brouwer* 所創始的複合形 (*Komplex*) 的概念。複合形在本書討論的歷程中再加以限制，使成為流形 (*Mannigfaltigkeit*)。這種概念不過于寬泛，因而可以避免所不願引起的集合論中的困難；也不過于狹窄，因而可以包含差不多所有的有趣的圖形。所以我們現在要研究的拓撲學，不是集合論的，只是複合形與流形的拓撲學。

*) *Tietze-Vietoris* [8] 之 *I* 中的文獻。

複合形的特徵，使他有別于任意點集的，是他的能剖分爲三邊形的性質（*Triangulierbarkeit*）：複合形是由有限個或可數的無窮多個，不必平直的（*geradlinig*），線段，三邊形，四面體與高維的相當的圖形連接而成的。這種三邊形等的連接，並不限于在同一空間中，而且有時候還不要包含他們的空間。因爲這特徵，大部分所謂病態的點集都被擯在我們討論的範圍之外，而且我們的討論纔與幾何的直覺更爲接近。因此也有人把複合形的拓撲學叫做彈性橡皮的拓撲學。複合形的例子：所有的 *Riemann* 曲面，任何維的歐幾里得空間，投影平面與空間，所有的歐幾里得與非歐幾里得的空間型（*Raumform*），度量的運動羣的間斷域（*Diskontinuitätsbereiche*），與力學系統（*mechanischer System-*的位置空間（*Lagenraum*）與相空間（*Phasenraum*）。

我們要想向着我們的目的——主要的問題的解決——進展，我們必須探求複合形的拓撲不變的，能計算的，而且能作爲分類的標誌的性質。複合形的同調羣（*Homologiegruppe*）與基本羣（*Fundamental-gruppe*）是這種性質中最重要的，而且在我們討論中佔中心地位。

同時我們要看看，不用這些不變性的幫助，我們能進展到如何程度。所以我們不再從事預備，立卽直覺的討論主要問題的一部分，看看有些什麼不同胚的閉曲面。

§2 閉曲面

在前一節中，我們已經說過，環面沿着經緯圓切開之後，變成一個

正方形。反之,若是疊合一個正方形的每兩條相對的邊,我們又重得着環面。所以一個正方形的每兩條相對的邊當作是同一條線段的時候,這正方形就叫着環面的 *Poincaré* 基本多邊形。至少對於內在的拓撲性質說,這基本多邊形就可以完全代表環面。至于環面的面積,空間中的位置等特別的度量性質與浸沒性質,基本多邊形却不能表出;不過這些性質與曲面拓撲學是毫無關係的。所以從曲面的拓撲學的立場說,所有的環面,由疊合基本多邊形的對應邊而得着的,都等價 (*gleichwertig*),例如旋轉環面與扭成結的皮管子的表面就沒有區別。其實任一曲面都能够切開成一個或數個多邊形。我們要直接利用這事實,來下閉曲面的定義:一個閉曲面是由一對一對的連接有限個多邊形的邊而成的。這定義纔使閉曲面的圖形脫離了那包含他的空間,纔使他成爲不依賴于那包含他的空間而存在的二維流形——二維流形的概念,將來有正確的定義。

根據環面切開成正方形的方法,我們能用若干個多邊形,設想他們的邊成對的對應,表出一個閉曲面,因而得着一組無限多個閉曲面。爲達到這目的起見,我們先在環面上穿一個

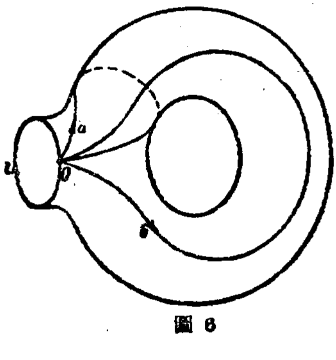


圖 6

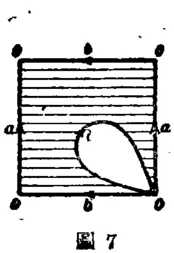


圖 7

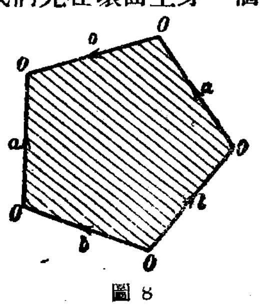


圖 8

大致是圓形的洞 (*Loch*)。假使洞邊緣 (*Lochrand*) l 通過 O 這個點。經過變狀之後，我們得着一個環柄 (*Henkel*) (圖 6)。我們也能先在環面切開成的正方形中表出這個圓洞 (圖 7)，然後把洞邊緣 l 在 O 點處切斷。這就等於把環柄沿着曲線 a 與 b 切開成五邊形 (圖 8)。這五邊形的 l 這邊不與別個邊成對應，其餘的都間隔的，成對的對應。

若是取兩個切開成五邊形的環柄，連接他們的洞邊緣 (圖 9)，然後消去公共洞邊緣 l，結果是一個八邊形，他的邊成對的對應 (圖 10)。疊合對應邊，

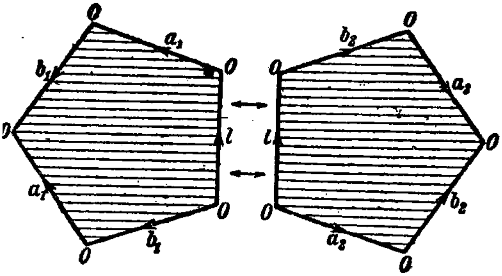


圖 9

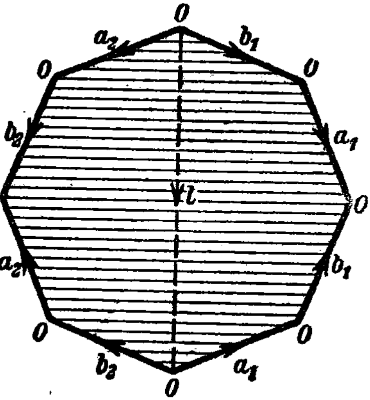


圖 10

因而疊合八個頂點成一點，這八邊形就包成一個雙環面 (*Doppelring-fläche*)。[2] 與從前討論環面時一樣，我們要在圖中表出成對的邊的對應關係：每對對應邊我們用同一個字母表示；而且用箭頭附在邊上，表明在疊合對應邊時，箭頭指着的方向應該符合。我們只要任意的選定多邊形的邊緣的一個方向，然後按照每一邊上的箭頭是否指着這個方向，規定這邊附帶一個指數 $+1$ ($+1$ 這指數常省去) 或 -1。邊的對應關係，以及這閉曲面，都能用一個式子表出。例如一個雙環面，若用圖 10

中所表出的邊的對應關係，而且選定那八邊形的邊緣的一個適當方向，他就可以寫成下式：

$$a_1\,b_1\,a_1^{-1}\,b_1^{-1}\,a_2\,b_2\,a_2^{-1}\,b_2^{-1}\text{。}$$

再在雙環面上穿一個圓洞，使洞邊緣通過點 O，沿着這個洞邊緣，還可以連接上另一個環柄。消去洞邊緣之後，我們得着一個十二邊形。如同雙環面可以變狀（變狀不毀壞拓撲性質）成一個安裝上了兩個環柄的球面，這十二邊形包成一個安裝上了三個環柄的球面。我們能如是得着的曲面，是能切開成 $4h$ 邊形的，安裝上了 h 個環柄的球面。因爲能任意變狀，這曲面也可以說是安裝上了 $h-1$ 個環柄的環面。下式

$$a_1\,b_1\,a_1^{-1}\,b_1^{-1}\cdots a_h\,b_h\,a_h^{-1}\,b_h^{-1} \qquad (h)$$

確定他的基本多邊形 —— $4h$ 邊形 ——的邊的對應關係。若是沿着多邊形的一條對角線 l 把 $a_i\,b_i\,a_i^{-1}\,b_i^{-1}$ 四條邊切下，我們就得着一個環柄切開成的五邊形。所以每一段 $a_i\,b_i\,a_i^{-1}\,b_i^{-1}$ 相當于一個環柄。

球面也有一個確定的基本多邊形；沿着球面上連接 O 與 P 兩點的弧 a 把球面割開。結果是一個二邊形，他的邊緣圓（*Randkreis*）是

$$a\,a^{-1}\text{。} \qquad (0)$$

這基本多邊形上有兩個不相同的，卽不相疊合的頂點 O 與 P（圖11），別個基本多邊形都不如此。疊合這二邊形的兩邊，使圓域再變成球面，就如同把張開的錢包在 O 與 P 兩個鉸鏈間的口子合攏起來，使他變成球形袋。

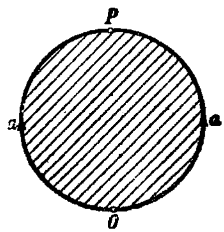


圖 11

安裝上了 h 個環柄 ($h=0,1,2,\cdots$) 的球面只是所有的不同胚的閉曲面的半數。從環柄著手,我們得着這半數的閉曲面;同樣的,從 *Möbius* 帶 (*Möbiusband*) 著手,我們纔可以得着其餘的半數。 *Möbius* 帶是一個扭轉了 π 弧度的環帶。圖 12 所表示的 *Möbius* 帶,可說明如下:設 O,P, M 分別是線段 c 的起點,終點,與中點;設另有一軸與 c 無共點。

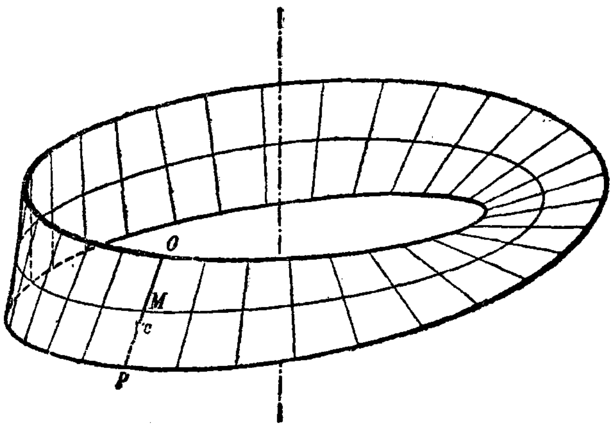


圖 12

使 c 繞軸旋轉,適合下列二條件:第一,c 與軸同在一平面上;第二,當這平面旋轉一週的時候,c 在旋轉平面中繞 M 旋轉的弧度恰等于 π。

若是把 *Möbius* 帶沿着線段 c 切開,結果是一個矩形。他的邊緣圖是

$$cr'cr''^{-1},$$

而且他們有兩個不相同(不相疊合)的頂點 O 與 P(圖 13)。r' 與 r'' 二自由邊連成一閉曲線或拓撲圓,是 *Möbius* 帶的邊緣。其餘兩邊 c 與 c 的指數並非相反,與從前討論的基本多邊形的邊不同;兩邊 c 與 c 的指數相同,表示他們的箭頭指着邊緣的同一方向。兩邊的這種對應叫做

反對應或第二種對應，而從前的那種叫做正對應或第一種對應。

環柄與 *Möbius* 帶的邊緣都是一個拓樸圓。但是他們有一個重要的區別：環柄在歐幾里得空間中是雙側的 (*zweiseitig*)，*Möbius* 帶却是單側的 (*einseitig*)。

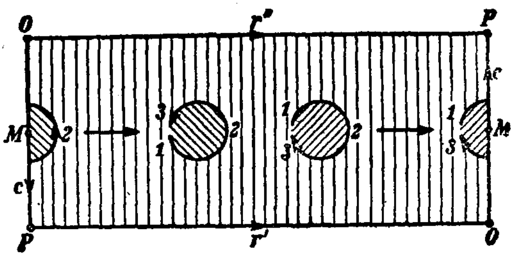


圖 13

雙側與單側的意義如下：設 *Möbius* 帶上有一隻小蟲沿着帶的中線爬行，他就可以不越過帶的邊緣爬到他的起點的反面。環柄的邊緣隔開環柄的兩面；我們能把一面塗成白色，另一面塗成黑色，而且使黑白兩色只在沿邊緣處啣接。*Möbius* 帶却非如此，他只有一側。

這單側性還不定是曲面的內在性質，所以還不能根據單側性，以爲一個扭轉了 π 弧度的環帶不能與一個沒有扭轉的環帶同胚。這麼抗議是很有理的。不過根據另一內在的性質，這兩種環帶確實不同胚。這性質可說明如下。設想不是一隻小蟲在曲面上爬行，却是一個帶有箭頭的，帶有 1 2 3 三個點的，小圓在曲面中移動。若是我們的曲面是 *Möbius* 帶，而且毫無厚度，我們就可以移動小圓，使他與原來的小圓疊合，但箭頭相反，1 2 3 三點與 3 2 1 三點分別相合 (圖 13)。若是在一曲面中能如此移動一個小圓，我們就說這曲面**不能定向** (*nichtorientierbar*)；否則說這曲面能定向 (*orientierbar*)。在能定向的曲面中，一個帶有箭頭的小圓，不但表明一個點的鄰域的定向 (*Orientierung*)，而且這一點

處的定向可以確定的移到每一點處去。能定向性是曲面的一個內在性質。反之,只有曲面浸沒在三維空間中的時候,曲面的雙側性纔有定義;所以雙側性是依賴於浸沒的情形的,不容與能定向性相混亂。其實將來還要證明,能定向的曲面雖然永不會是一個浸沒在歐幾里得空間中的單側曲面,但還可以是一個浸沒在別個三維空間中的單側曲面(§76)。

若是環柄上的圓洞用一個圓域蓋上,或者換個說法,把環柄上的洞邊緣連接到一個穿了洞的球面的邊緣上去,我們就從環柄得着一個環面。同樣的,也把 *Möbius* 帶的邊緣用一個圓域蓋上,那就是說,把 *Möbius* 帶的邊緣連接到一個穿了洞的球面的邊緣上去,我們就從有邊緣的 *Möbius* 帶得着一個閉曲面。在三維空間中,只有聽任曲面自相穿割的時候,纔能如此連接 *Möbius* 帶與穿了洞的球面,否則,是斷然不能實現的(§64)。不過我們能證明,在四維空間中,即使不聽任曲面自相穿割,也能使這種連接實現。所以閉 *Möbius* 帶是四維空間中的一個曲面。但是對於這曲面的內在性質說,他能否浸沒在空間中完全無關重要;我們只要在 *Möbius* 帶的邊緣與穿了洞的球面的邊緣間建立了一個拓撲對應,把每對對應點看作是同一點,閉 *Möbius* 帶的內在性質就能完全斷定了,而且在每一點的鄰近處,閉 *Möbius* 帶與平面的面片(*Flächenstück*)並無區別。至於如此界說的曲面能否全個的在空間中浸沒,與能否在空間中把兩個曲面沿着邊緣連接起來等問題,我們並不加以討論。

如此封閉了的 *Möbius* 帶就是投影平面 (*projektive Ebene*)。算學中所討論的閉曲面中,投影平面的重要,僅次于球面。投影幾何學中介紹投影平面的時候,並不說他是 *Möbius* 帶,却說他是用一條假(*uneigentlich*) 線封閉了的歐幾里得平面。根據後一種說法,在一個投影坐標系中,投影平面的點與三個實數的比 $x_1:x_2:x_3$ (0: 0: 0 除外) 成一一對應。若是 x_1,x_2,x_3 當做齊次的笛卡兒坐標*), $x=\frac{x_1}{x_3},y=\frac{x_2}{x_3}$ 就是歐幾里得平面中通常的笛卡兒坐標,方程式 $x_3=0$ 就代表那封閉歐幾里得平面而成投影平面的假(無窮遠)線。若是把 x_1,x_2,x_3 當作三維空間中的笛卡兒坐標,投影點就與通過原點的直線成一一對應。

我們現在要證明這線集與那組成閉 *Möbius* 帶的點集,在拓撲性質方面,完全沒有區別。取一個用原點做中心,半徑等于 1 的球面。這錐線集 (*Büschel*) 中的每一直線交球面于兩個徑點。這就把投影平面的點拓撲的換成了單位球面上的徑點耦。所以只要把球面上的每兩個徑點當作是同一個點,就得着投影平面。投影平面因此可以表出如下:用下半個球面的點做投影點的代表,而且設想在越過下半個球面的邊界——赤道圓——的時候,能從這圓上的一點跳到他的徑點。設平面 E 是球面的南極 S 處的切面。再把下半個球面直角的投影到平面 E (圖14),把他換成單位圓域。所以單位圓域的邊緣上每兩個徑點叠合

*) *G. Kowalewski, Analytische Geometrie* (*Leipzig* 1923), § 14, 頁 32。此處所需要的投影幾何學中的基本事實,在下列各書中都有適當的敘述,讀者可以參考: *F. Klein: Nichteuklidische Geometrie* (*Berlin* 1928),章 *I*; *L. Bieberbach, Projektive Geometrie* (*Leipzig* 1931); *Hilbert Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie* (*Berlin* 1932); *H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche* (*Leipzig* 1923).

之後,這單位圓域變成的閉域就代表投影平面。

根據這個變換,我們可以得着兩個結果。第一,投影平面與閉 *Mö-*

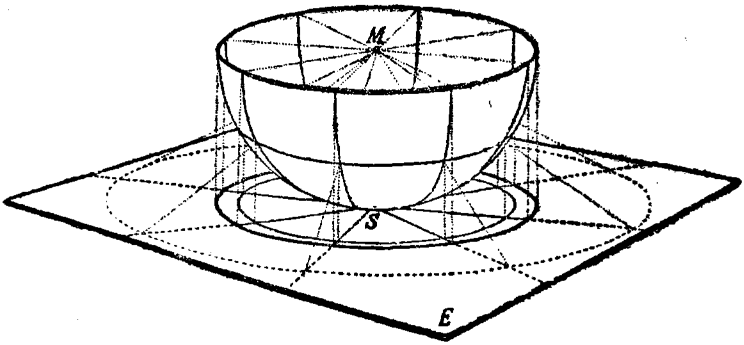


圖 14

bius 帶相同。設 r' 與 r'' 是圓域中與圓心等距的二平行線段。沿着這二線段把圓域切開成下列三部分,兩個弓形與其間的一個面片(圖15)。叠合單位圓域的邊緣上的徑點,恰使這面片變成一條 *Möbius* 帶,而且使這兩個弓形沿着 b 邊連接而成一個圓域。這 *Möbius* 帶與這圓域的邊緣都是 $r'r''$;所以後者就是封閉 *Möbius* 帶的圓域(圖 16)。

閉 *Möbius* 帶既然是投影平面的拓撲的代表, *Möbius* 帶也可以從此當作一個穿了洞的投影平面。這是 *Möbius* 帶的一個新表示法。洞不管在何處,結果所得的有邊緣的曲面在拓撲學中都等價。所以若是叠合徑點的一個圓域表示投影平面,我們就可以在圓域的中心穿一個圓洞,得着如圖 17 中所表示的 *Möbius* 帶。 圖 17 中的平環的外邊緣的徑點叠合,內邊緣是 *Möbius* 帶的邊緣。若是再把這平環沿着

虛線切開，然後疊合外邊緣上的兩個半圓，就重回到 *Möbius* 帶的原來表示法了。

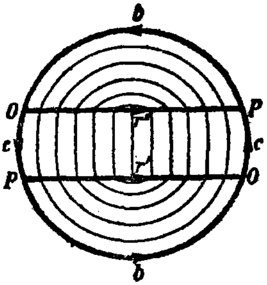


圖 15

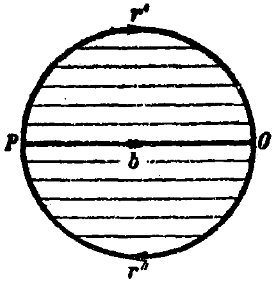


圖 16

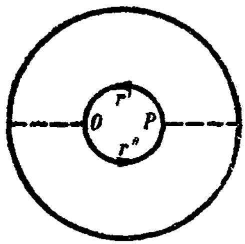


圖 17

第二，投影平面換成圓域的變換立刻使我們求得投影平面的基本多邊形。我們只要把單位圓域看作是一個二邊形，兩條邊都是 a 的二邊形。邊緣上徑點的疊合可用下式

$$aa$$

表出。a 邊的起點與終點疊合而成投影平面上的 O 點 (圖 18)，而 a 就是一條投影直線的像(*Bild*)線，把投影平面沿着 a 割開，我們就得着投影平面的基本多邊形。

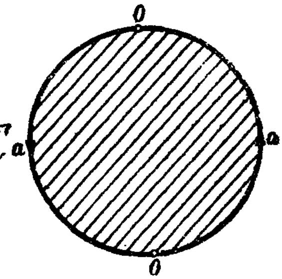


圖 18

因此投影平面也是能用一個基本多邊形代表的這一組閉曲面中的一個。他與這一組中的環面不同；環面是歐幾里得空間中的閉曲面；但是，若是不准自相穿割，投影平面 —— 其實所有的不能定向的閉曲面 —— 却不能浸沒在歐幾里得空間中 (證明見 §64)；

因爲 *Möbius* 帶，穿了洞的投影平面，與外 (或內) 邊緣圓上徑

點叠合之後的平環，這三個曲面同胚，所以在任一穿了洞的閉曲面上，沿着這個洞邊緣連接上一條 *Möbius* 帶或連接上一個穿了洞的投影平面，或叠合洞邊緣上每對的徑點，我們都得着同一個新曲面，這安裝在圓形洞上的 *Möbius* 帶有時候也叫做**交叉帽** (*Kreuzhaube*)。*)

現在只要在球面上安裝上若干 *Möbius* 帶，我們剩下而還未討論的閉曲面就能全體得着了。安裝 *Möbius* 帶的歷程與安裝環柄的一樣：在投影平面中穿一個洞(圖 18)，使洞邊緣 l 通過 O 點。若是在 O 點處把 l 切斷，從投影平面的基本多邊形就得一個三邊形，他們的邊緣圓是 aal。設想有兩個三邊形，他們的邊緣分別是 a_1a_1l 與 $a_2a_2l^{-1}$。把他們沿着洞邊緣連接起來，再把連接的線痕消去，我們就得一個四邊形，他的邊緣圓是

$$a_1a_1a_2a_2$$

(圖 19)。這就是安裝上了兩條 *Möbius* 帶的球面的基本多邊形。

這曲面也叫做單側的環管或**不能定向的環面**。若是不沿着連接的線痕 l，却沿着另一條對角線 m，把基本多邊形切開成兩個三邊形，再沿着 a_2 邊把他們連接起來，我們就得一個新的四邊形 (圖 20)，他的邊緣圓是 $a_1\,ma_1^{-1}\,m$。這四邊形所包成的當然是同一個曲面。我們先叠合 a_1 這條邊，使這四邊形變成圓柱面 (圖 21)。要得着我們的曲面，圓柱面的兩個界圓 m 上的點必須成對的叠合。但是我們不能叠合每一條

*) 要知道交叉帽這名稱的恰當，與他的圖形的詳細的說明，可看頁 13 的脚註中所援引的 *Hilbert Cohn-Vossen* 的書中頁 279 及以後。

母線上的兩個端點,因為如此疊合而成的是能定向的環面。設 x 是圓柱面的軸的平分垂線。我們必須疊合兩個界圓上的,對于 x 對稱的每

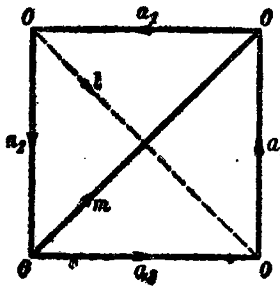


圖 19

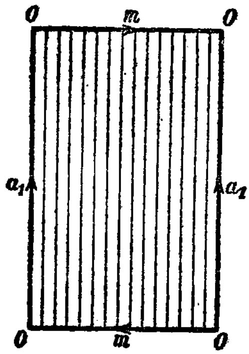


圖 20

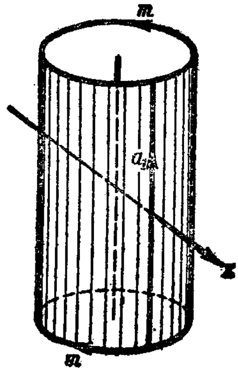


圖 21

兩個點,纔得着我們的不能定向的環面。

若是聽任圓柱面自相穿割,這兩個界圓的這種疊合也可以在歐幾里得空間中實現(圖22)。如此得着的單測的環管從頂到底的切開,結果是兩條 Möbius 帶。圖 23 表出其中的一個。

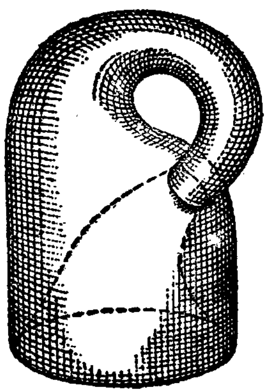


圖 22

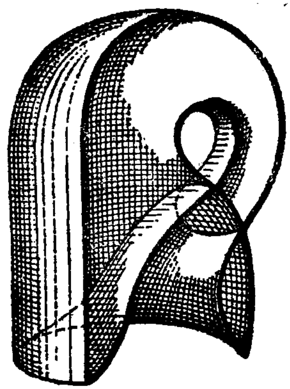


圖 23

球面上安裝 k 個 Möbius 帶所成的閉曲面,可以展開成一個基本多邊形,他的邊緣圖是

$$a_1a_1a_2a_2\cdots a_ka_k\text{。} \tag{k}$$

我們現在旣不知道，我們如此得着的這些閉曲面是否是所有的閉曲面，也還沒有證明這些閉曲面中沒有兩個同胚。 第一個疑問很容易解答，我們在 §38 中再說明。要證明這些曲面中每兩個不同胚，那就需要用同調羣的概念與他的拓樸不變性了(§39)。

上面所列舉的曲面還不能包括所有的曲面。 我們所得着的，到現在爲止，只是無邊緣的而且由有限個多邊形所連接成的閉曲面。 此外還有無窮的曲面，[4] 需要無窮多個多邊形拼嵌而成。例如歐幾里得平面與歐幾里得空間中的單葉雙曲面。

§3 同痕，同倫，同調

閉曲面是流形的特款。流形的不同胚的證法，粗淺的說，是根據流形上的低維域的一種分類。現在我們用曲面上的曲線這個最簡單的例子來說明。

我們先研究無重點的而且有確定的流向 (*Durchlaufungssinn*) 的閉曲線——定向圓的拓樸像。要達到一個曲面上的這種曲線的分類的目的，我們必須先規定這種的兩條曲線何時等價。我們說：若是兩條曲線 a 與 b 中的一條能在這曲面上綿續的變狀成另一條，這兩條曲線就等價。若是在把 a 綿續的變狀成 b 的任一瞬間，a 所變成的曲線都無重點，這變狀就是所謂同痕 (*isotop*) 變狀，而且 a 與 b 就說是同痕。例如環面上的兩個同樣定向的經圓同痕，圖 24 中的曲線 I 與 II 同痕，I 與 III 却不同痕。同痕變狀難以用算學的方式處置；所以與同倫

(*homotop*) 變狀比較，同痕變狀將來不佔重要的地位。

在 a 經過同倫變狀變成 b 的歷程中，a 所變成的曲線無須都無重點，其實，還可以任意自相交切。我們也無須假設 a 與 b 都無重點。若是 a 經過同倫變狀變成 b，我們就說他們同倫，或者更正確的說，自由同倫。同痕的曲線當然也同倫。圖 24 中的四條曲線的每一條都能在平面上縮成一點，都是所謂零倫(*nullhomotop*)的曲線，所以他們在平面上都同倫。環面上的一個有確定的流向的經圓與流向相反的經圓不同倫，一個經圓與一個緯圓不同倫，所有的經緯圓都不零倫。——我們能不引用變狀，直接的界說同倫的曲線如下：設 a 與 b 是曲面 $\mathfrak{F}$ 上的二曲線。若是平環(圖 25)能綿續的(無須拓撲的)換成 $\mathfrak{F}$ 上的一個點集，而他的定向的邊緣圓 $\bar{a}$ 與 $\bar{b}$ 分別換成 a 與 b，a 與 b 就說是同倫的曲線。在這種情形下，$\bar{a}$ 經歷同心圓變成 $\bar{b}$，就相當于 a 同倫的變狀成 b；而且，反之，在 a 同倫的變狀成 b 的時候，a 經過一個"廣義的"(*singulär*)平環，即平環的綿續像。

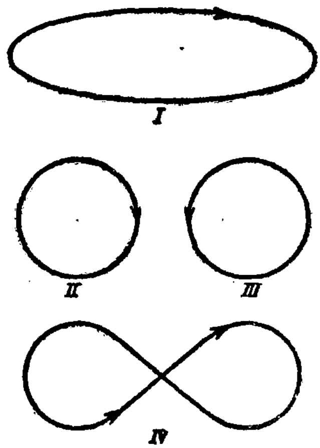


圖 24

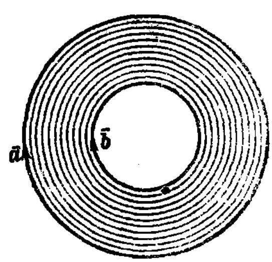


圖 25

這種變狀很自然的引出一種推廣，即引出閉曲線的一種極粗淺的但極重要的分類法，把閉曲線分成同調類

(*Homologieklass*)。我們不用平環——在拓撲學中，等于穿了兩個洞的球面——却用穿了兩個洞的虧格(*Geschlecht*) h 的能定向的曲面(圖 26 中表出 $h=1$ 的專款)替代，把他綿續的(正變換單値，逆變換無須單値)換

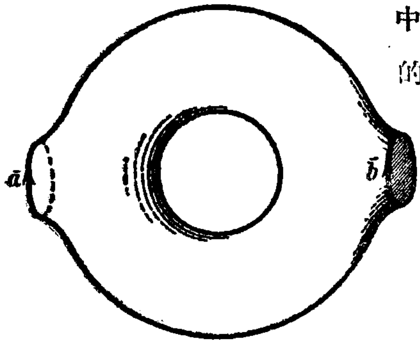


圖 26

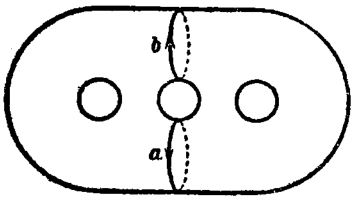


圖 27

成 $\mathfrak{F}$ 上的一個點集。若是這種變換存在，使洞邊緣 $\bar{a}$ 與 $\bar{b}$ (如圖中所確定了的方向)換成給定的二曲線 a 與 b，a 與 b 就說是互相同調 (*homolog*)。例如圖 27 中所表出的曲面 $\mathfrak{F}$ (安裝上了三個環柄的球面)上的曲線 a 與 b 就同調；因爲他們把 $\mathfrak{F}$ 分成兩個穿了兩個洞的環面，而且組成這樣的每一環面的邊緣。我們將來證明，同調類組成一 Abel 羣，即一維的同調羣。一維同調羣是曲面 $\mathfrak{F}$ 的拓撲不變性。利用他，我們纔能證明前節中所列舉的曲面都不同胚。例如，球面只有一個同調類，投影平面有兩個，而其他閉曲面的同調羣都是無窮羣。 我們如此粗略的所指出的概念，當然還需要正確的定義；所敘述的定理，也當然需要證明。這正是此後諸章中主要的問題。

§4 多維流形

曲面的不同胚的問題雖已能完滿解答，三維的與更高維的同樣的問題却還未解決。不同胚的三維空間，我們已不能完全列舉，更不必說更高維的了。多維空間的不同胚問題的討論，自然與直覺離開更遠。但這問題不僅自身很有興趣，他還在微分方程式論與兩個複變的函數論中出現。雖然所有的能定向的閉曲面都是函數論中的 *Riemann* 曲面，三維空間中也有兩個——投影空間與球式空間(*sphärische Raum*)——在拓樸學以外的算學中，佔重要的地位。

(實素的)投影空間的產生，是由於要用新點補充歐幾里得空間，使投影變換在新點集中成爲一一對應的變換。我們所習用的方法，是用一個假平面——在投影變換下，歐幾里得空間中的沒影平面 (*Flucht-ebene*) 的像平面——把歐幾里得空間封閉成投影空間。投影空間與歐幾里得空間不同：投影空間是閉空間，能由有限個四面體拼嵌而成 (§14)。

球式空間也是用新點封閉歐幾里得空間而成的。不過此處加入新點的目的，是要使等角變換 (*konforme Abbildung*)——歐幾里得空間中的球變換 (*Kugelverwandtschaft*)——在球式空間中成爲一一對應的變換。*) 球變換中之一是倒半徑變換 (*Abbildung durch reziproke Radien*)，而且歐幾里得空間經過這變換時，單位球 (反演球 *Inver-*

*) *F. Klein, Höhere Geometrie* (*Berlin* 1926) §50; *W. Blaschke, Differentialgeometrie I* (*Berlin* 1921) §40。

sionskugel) 的中心無像點。我們只要用這中心的像點（不用一個假平面的所有的點）封閉歐幾里得空間就得着這球式空間。這與封閉實數平面成實數球面相同。其實我們在 §14 中就要見到，球式空間就是球面的一種必然的三維的推廣。[5]

其他多維的流體，在算學中出現的，常常不是點流體，而是另一類的元素所組成的。我們已經知道一個非點所組成的二維的流體：三維的歐幾里得空間中所有通過一點的，未定向的直線所組成的集合。我們能把這流體換成投影平面，使鄰近的直線換成鄰近的點。一力學系統的所有位置組成另一類流體，我們舉**平面雙擺** (*ebens Doppelpendel*) 這最簡單的力學系統爲例。平面雙擺由兩條剛體棒桿 l_1 與 l_2 組成：l_1 的一個端點懸在 A 點處，他的另一端點 B 與 l_2 的一端點用一個圓關節 (*Gelenk*) 相連（圖 28）；他們在平面中自由運動，不受別種限制。這兩條棒桿與垂綫所成的兩個角 φ 與 ψ，可以用來確定這雙擺所有能佔有的位置；而且，若是 m 與 n 都是整數，(φ,ψ) 與 $(\varphi+m2\pi,\psi+n2\pi)$ 確定他的同一位置。所以要表出這雙擺的所有位置，我們可以用 $\varphi\psi$ 平面中邊長 2π 的一個正方形，而且叠合這正方形的每兩條相對邊。因爲這樣的正方形也代表環面，我們能說這雙擺的位置與環面中的點成對應，而且環面上鄰近的點相當于雙擺的鄰近位置。雙擺的一循環運動——回到起點的運動——所以相當于環面上的一條閉曲線。[6]

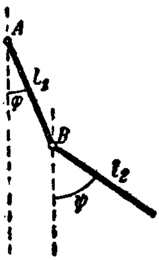


圖 28

若是用球關節代替圓關節，我們便得着**球面雙擺**（*sphärisches Doppelpendel*）他的所有位置與兩個球面上的點耦成對應，而且鄰近的位置與鄰近的點耦成對應。我們可以用四個參數，例如兩個球面的經緯度，來確定這雙擺的每一位置，所以球面雙擺的"位置空間"是一個四維流體。

我們現在要說明三維的（實素）投影空間中所有的定向直線，也組成一個四維流形，而且他同前一個例子一樣，可以看作是由兩個球面的點耦組成的，所以與前一個流形同胚。設想這實素投影空間浸沒在複素投影空間（他的點坐標是四個不全等於零的複數的比：x_1：x_2：x_3：x_4）之中。第一步我們證明定向的實直線的集合與零球

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

（他的點全是複點，那就是說，他的點的坐標是複數）的點成拓撲對應如下：每一條實直線與零球相交於兩個不同的相配複點 P 與 $\bar{P}$；而且，反之，零球上每兩個相配複點確定一條連接實線 g。設 P_1，P_2，P_3 是 g 的三個實點。g 的一個定向確定這三點的一個循環次序；假設 P_1，P_2，P_3 代表這次序。因爲交比

$$(P\,P_1\,P_2\,P_3) = \lambda \quad 與 \quad (\bar{P}\,P_1\,P_2\,P_3) = \bar{\lambda}$$

是相配複數，不是實數，其中恰有一個，其虛數部分是正數；假設就是 λ。又因爲

$$(P\,P_2\,P_3\,P_1) = \frac{1}{1-\lambda} \quad 與 \quad (P\,P_3\,P_1\,P_2) = \frac{\lambda-1}{\lambda},$$

λ 的這性質不因 P_1，P_2，P_3 的循環置換（*Vertauschung*）而改變。所以這定向的直線 g 唯一的確定 P 這個點。又因爲

$$(P\,P_1\,P_3\,P_2) = \frac{1}{\lambda}$$

的虛數部分是負的，相反定向的直線 g 確定 $\bar{P}$點。定向實線與零球的點間因此建立了一個一一對應的關係。

現在第二步，再用"左""右"兩個二次列線（*Schar*）的複直線產生這零球。*）設 l 是左二次列線中的一條直線，r 是右二次列線中的一條直線。給定了零球的一點 P，左［右］列線中恰有一條直線通過 P，與 r［l］交於一點 P_r［P_l］。所以每一點 P 恰唯一的確定兩個點，一點在 r 上，一點在 l 上；反之亦然。

*）*F. Klein, Höhere Geometrie*（*Berlin* 1926）§45，或 *E. Study, Geometrie der Kreise und Kugeln, Math. Ann.* 86（1922），或 *L. Bieberbach, Höhere Geometrie*（*Leipzig* 1933）。

所以要證明投影空間中的定向直線與兩個球面的點耦成一一對應，只要證明 $r[l]$ 的所有點，那就是說，一條投影直線的所有（複）點，組成一個實數球面。這是很顯然的。假設投影直線上有一投影坐標系 $\mu_1:\mu_2$。直線的點相當於 $\mu_1:\mu_2$ 所經歷的所有可能的複數（包含∞在內），所以恰組成一個實數球面。

如同球面雙擺的位置空間一樣，實素投影空間中所有的定向直綫的流形也與兩個球面的點耦成對應，鄰近的直綫相當于鄰近的點。

不只是力學系統的位置組成多維流形，他的運動狀態（*Bewegungszustand*）也組成叫做相空間的多維流形[7]。所謂一個質點的運動狀態，就是這質點在空間中的位置，速度的量與方向。我們舉下列的例子。設重力場中有一個質點，被限制在一個固定的球面上運動；而且他的能量——動能與位能的總和——在任何時間都等於一常數；而且這常數又如是之大，使他在運動歷程中能走到球面的最高點。這質點的每一運動狀態可以由他在球面上的位置（這需要兩個標誌）與他的速度的方向（這是第三個標誌）確定。速度的量已可以從預先給定的能量與位置斷定，所以並不必要。所以運動狀態與球面上的定向的綫素（*Linienelement*）成一一對應：相空間所以是一個三維空間，而且可以變成三維的投影空間（見§14，習題3）。運動狀態因此相當于投影空間中的點，鄰近的運動狀態相當于鄰近的點。

鄰域。我們起初把圖形看作是歐幾里得空間中的點集。後來把 *Möbius* 帶封閉成投影平面時，我們已經丟開了這種樸質的概念，而且還另下了曲面的定義，說他們是由多邊形拼嵌而成的。其實，把二維流形浸沒在空間中，雖有時還可以說有直覺做根據；但是那些不由點組成

的更高維的流形也要用點集代表，也要把他們浸沒在多維的歐幾里得空間中，在一般情形下，反是旣不自然又不適當的辦法。所以討論到這種流形的時候，我們更應該丟開那包含的空間。我們還應該注意，我們前此說明拓撲變換與同胚這兩個概念，還是根據于圖形浸沒在空間中這種看法。這是因爲在本書起始的時候，我們還是在空間中取一坐標系，用表示變換的坐標函數（*Koordinatenfunktion*）的綿續來界說變換的綿續的。但是我們在討論雙擺位置的流形的時候，我們並沒有用坐標函數，却也說明了這個流形與環面相同。所以我們必須另想辦法，把握着綿續的要素，不再利用空間中的坐標與坐標函數。

現在，我們試想一想，位置空間或相空間與歐幾里得空間中的點集究竟具有什麼共同的性質，使他們間能有綿續變換存在？在位置空間或相空間中，我們直覺的知道什麼元素（位置或運動狀態）與某一元素鄰近，什麼子集——當然有各樣不同的選擇——組成某一元素的鄰域（*Umgebung*）。一個換鄰域成鄰域的變換纔叫做綿續的變換。球面的點集與環面的點集的純數（*Mächtigkeit*）相等，所以這兩個點集成一一對應。但是他們不同胚，那就是說，他們間沒有一個一一對應的變換，使鄰近點換成鄰近點。所以鄰域的規定，是使算學的集合能成爲拓撲學所研究的對象的，或者說，使算學的集合能有空間性的，最低的條件。如何規定鄰域，我們可舉下列的空間爲例。在歐幾里得的空間中，一點的每一鄰域，必須包含那圍繞這點的一個球體中所有的點；鄰域的大小，視選擇的球體的大小而定。在球式空間中，一個點集必須包含有一

個够大的球面外所有的點,纔是這新加入的假點的鄰域。在投影空間中,給定了一條直綫,可以取一個細狹的單葉雙曲體圍繞這直綫,以這直綫爲軸。一投影直綫的鄰域必須包含以他爲軸的,够細狹的一個單葉雙曲體之內的所有直綫。

我們用鄰域概念做綿續性與拓撲變換的基礎,然後我們所要討論的圖形纔脫離了那包含的直覺空間,因而纔能與其他有空間性的對象,例如曲面,佔同等的地位。我們從此就要把空間看作是幾何學中的綿續點集。鄰域概念對于空間之成爲空間的關係的密切,因此也更爲明顯。我們將要認識的許多有意義的概念與定理,就都與距離 (*Entfernung*), 平直性 (*Geradlinigkeit*),甚至於空間的維數都不發生關係。若是要把一個點集當作空間,我們必須規定其中每一點的鄰點; 一個點集只要有了鄰域的規定,無須別種限制,就叫做**鄰域空間** (*Umgebungsraum*) (§5)。

有了鄰域概念,我們纔能建立最廣義的空間概念的界說,那就是說,纔能把最廣義的空間概念建立在集合論的基本概念之上,使他不依賴于模糊的直覺。而且如此得着的概念的普遍性最可以發揮廣大的作用:只要一個算學的集合能有一種鄰域的規定,使鄰域適合某些公理,我們就能把這集合當作一個空間 (最廣義的),而且能在這一空間中運用對於任意的鄰域空間所推出的概念與定理。

我們現在要用綜合幾何學做模範,要採用一種鄰域理論,把這章中所略述的概念與定理嚴密的建築起來;因此我們必須從新起始,完全脫

離直接的直覺。在開始數章中，只偶然有些例子表明普遍的討論與幾何問題間的關係。幾何學的個別問題，直到在第六章曲面拓撲學中，纔佔討論的中心地位。雖然如此，下一章却也不是完全討論最廣義的鄰域空間。其實我們所注意的，差不多都是十分特殊的鄰域空間，即我們已提起過的複合形。至於介乎我們所採用的最廣義的鄰域空間概念與複合形概念之間的，還有集合論的拓撲學，包括拓撲空間，*)他的點集，與維數論；**)我們都不加以討論。

*) 參看 *F. Hausdorff* [1], [2], 與 *P. Alexandroff* [16].
**) 參看 *Tietze Vietoris* [8] 之 V, 與 *Nöbeling* [1].

第二章 單純的複合形

§5 鄰域空間

聚集若干算學的個體而成的團體叫做集合 (*Menge*)。集合中的個體可以統稱為點。設有一個有限的，或無窮的，但非空的 (確實含有點的)集合，其中每點都有指定的某若干子集 (*Teilmenge*) 做他的鄰域，而且這些鄰域滿足下列二公設，這集合就叫做**鄰域空間**:

公設 A: 鄰域空間的每一點 P 至少有一鄰域；P 是他的每一鄰域中的一點。

若 $\mathfrak{M}$ 是這鄰域空間，我們就用 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$ 這記號表示 P 在 $\mathfrak{M}$ 中的一個鄰域。

公設 B: 設 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$ 是 P 的一個鄰域。$\mathfrak{M}$ 的任何一個含有 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$ 的子集，也是 P 的一個鄰域。

鄰域空間的例子: 設 $\mathfrak{M}$ 是全體正整數的集合，P 是其中任一數。相當于下列三種不同的鄰域的定義，我們得着三種不同的鄰域空間: 1. 含有 P 的任何子集都界說做 P 的鄰域。 2. 含有 P 與緊接 P 的前後各一數的任何子集都界說做 P 的鄰域。 3. $\mathfrak{M}$ 界說做 P 的唯一的鄰域。

這些例子只是用來表明鄰域空間這概念的普遍性，與後來的討論

並無關係。[8]

n 維的實數空間 $\mathfrak{R}^n$ 却是一個重要的例子。這裏的點，就是一組有固定次序的 n 個實數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。這種點的全體組成 $\mathfrak{R}^n$。$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 叫做點 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的坐標。[9] 設 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$ 是一個固定點，η 是一個大于零的常數，適合下列不等式

$$|x_i - \bar{x}_i| < \eta \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

的點 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 組成一個以 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$ 做中心的 η 方體 (η-*Würfel*)。我們採用如下的隣域定義：**任何含有一個這樣的 η 方體的子集就稱爲 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$ 這點的一個鄰域。** $\mathfrak{R}^n$ 自身是每一點的鄰域。如此規定鄰域的定義之後，實數空間 $\mathfrak{R}^n$ 纔成爲一個鄰域空間。

所謂 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 與 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$ 二點間的距離就是

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_i)^2} \tag{2}$$

這個非負數。設 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$ 是一個定點，ε 是一個大于零的常數。適合下列不等式

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_i)^2 < \varepsilon^2 \tag{3}$$

的點 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 組成一個 ε 球體 (ε-*Kugel*)。上文用 η 方體界說的鄰域，也可以改用 ε 球體：$\mathfrak{R}^n$ 中的任一子集，若含有一個這樣的 ε 球體的就稱爲點 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$ 的一個鄰域。這個 ε 球體是點 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2,$

$\cdots, \bar{x}_n$) 的一個特別鄰域，有時候也叫做（球形的）ε 鄰域：ε 鄰域的大小，按照 ε 的大小而定。但是我們不可用通常的意義去解釋鄰域，不可以爲鄰域這種子集不會含有距離遠的點，其實只要一個集合含有一個適當小的球形鄰域，他就已經是鄰域了。

設有集合 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$。屬于 $\mathfrak{A}$ 或 $\mathfrak{B}$（或同時屬于 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$）的點的全體，叫做連集 $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ (*Vereinigungsmenge*)。既屬于 $\mathfrak{A}$ 也屬于 $\mathfrak{B}$ 的點的全體，叫做交集 (*Durchschnitt*)。若交集無點，即 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 無共點。

設 $\mathfrak{M}$ 是鄰域空間，$\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{M}$ 中的非空的子集，Q 是 $\mathfrak{N}$ 中的一點，$\mathfrak{U}(Q|\mathfrak{M})$ 是 Q 在 $\mathfrak{M}$ 中的任一鄰域。我們從此規定：$\mathfrak{U}(Q|\mathfrak{M})$ 與 $\mathfrak{N}$ 的交集是 Q 在 $\mathfrak{N}$ 中的一個鄰域 $\mathfrak{U}(Q|\mathfrak{N})$。$\mathfrak{N}$ 因此也成爲鄰域空間。因爲公設 A 很顯然的滿足了。要證明公設 B 也滿足，設 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{N}$ 中的含有 $\mathfrak{U}(Q|\mathfrak{N})$ 的一個子集，而且 $\mathfrak{U}(Q|\mathfrak{N})$ 是 $\mathfrak{U}(Q|\mathfrak{M})$ 與 $\mathfrak{N}$ 的交集。$\mathfrak{U}(Q|\mathfrak{M})+\mathfrak{B}$ 所以是 Q 在 $\mathfrak{M}$ 中的一個鄰域；$\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{U}(Q|\mathfrak{M})+\mathfrak{B}$ 與 $\mathfrak{N}$ 的交集，所以也是 Q 在 $\mathfrak{N}$ 中的一個鄰域。根據這種規定，**鄰域空間的每一個非空的子集還是一個鄰域空間**。實數空間既已規定成鄰域空間，所以實數空間中的子集，例如三維空間中曲線與曲面，都是鄰域空間，他們的鄰域的定義都完全確定了。

例：設 $\mathfrak{M}$ 是實數直線 $\mathfrak{R}^1$，$\mathfrak{N}$ 是 $0 \leqq x < 1$ 這點集。給定了 $\mathfrak{N}$ 的一個子集，若是有一正數 ε 存在，使線段 $0 \leqq x \leqq \varepsilon$ 屬于這子集，這子集就是點 $x=0$ 在 $\mathfrak{N}$ 中的一個鄰域 $\mathfrak{U}(0|\mathfrak{N})$。

設 $\mathfrak{M}$ 是鄰域空間，$\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{M}$ 中的任一子集（空的或非空的），P 是 $\mathfrak{M}$ 中的一點。

若是 P 的每一鄰域 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$ 都含有無窮多的屬于 $\mathfrak{N}$ 的點，P 就叫做 $\mathfrak{N}$ 的凝點 (*Häufungspunkt*)。

若是 P 的每一鄰域 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$ 都含有屬于 $\mathfrak{N}$ 的點，也含有不屬于 $\mathfrak{N}$ 的點，P 就叫做 $\mathfrak{N}$ 的界點 (*Begrenzungspunkt*)。

若是 P 有一完全屬于 $\mathfrak{N}$ 的鄰域 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{M})$，$P$ 就叫做 $\mathfrak{N}$ 的內點 (*innerer Punkt*)。$\mathfrak{N}$ 的內點必屬于 $\mathfrak{N}$。

界點的全體叫做 $\mathfrak{N}$ 的界限 (*Begrunzung*)。$\mathfrak{N}$ 的每一點或是界點，或是內點。

仍用前例，設 $\mathfrak{N}$：$0 \leqq x < 1$ 是實數直線 $\mathfrak{M}$ 的子集。凡適合 $0 \leqq x \leqq 1$ 的點 x 都是 $\mathfrak{N}$ 的凝點，$x=0$ 與 $x=1$ 是界點，凡適合 $0 < x < 1$ 的點 x 都是內點。空子集無凝點，無界點，也無內點。若 $\mathfrak{N}=\mathfrak{M}$，$\mathfrak{N}$ 中的點全是內點。

設 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的子集。若是 $\mathfrak{N}$ 的界點完全不屬于 $\mathfrak{N}$，$\mathfrak{N}$ 就叫做 $\mathfrak{M}$ 的**開** (*offen*) **子集**；若是完全屬于 $\mathfrak{N}$，$\mathfrak{N}$ 就叫做 $\mathfrak{M}$ 的**閉** (*abgeschlossen*) **子集**。

只有單獨的一個鄰域空間 $\mathfrak{N}$ 的時候，我們就不能說他是開集或閉集，也不能說他的一點 P 是界點或內點。因爲這些概念的定義，都需要預先申明 $\mathfrak{N}$ 是那一個鄰域空間的子集。$\mathfrak{M}$ 的一個子集 $\mathfrak{N}$ 可以不是 $\mathfrak{M}$ 的開子集，而却是 $\mathfrak{M}$ 的一個子集(例如 $\mathfrak{N}$ 自己)的開子集。

線段 $0 \leqq x \leqq 1$ 是實數直線的閉子集，線段 $0 < x < 1$ 是開子集，線段 $0 \leqq x < 1$ 既不是開子集，也不是閉子集。$\mathfrak{M}$ 與他的空子集都是 $\mathfrak{M}$ 的開子集，也同時都是 $\mathfrak{M}$ 的閉子集。

任意多少個開子集的連集顯然還是開子集，任意多少個閉子集的交集顯然還是閉子集。

一個開子集若含有一點,他必定也含有該點的一個鄰域。一個閉子集是一個開子集的餘集 (*Komplementärmenge*)*) 開子集與閉子集也可以分別如此界說。

設 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的子集。$\mathfrak{M}$ 中的所有含有 $\mathfrak{N}$ 的閉子集確定一個交集,叫做 $\mathfrak{N}$ 的**閉包** (*abgeschlossene Hülle*)。$\mathfrak{N}$ 的閉包是 $\mathfrak{M}$ 中的,含有 $\mathfrak{N}$ 的,最小的閉子集。

子集的界點與敍列的極限點 (*Grenzpunkt*) 有區別。設有一無盡敍列(同一個點可以在敍列中出現多次)與一點 P,而且 P 的任一鄰域差不多含有這敍列中的所有的點;那就是說,給定了 P 的任一鄰域,這敍列中的點只有有限個不屬于這鄰域。這敍列就說是**收歛的**敍列,而且**趨近** P;P 就叫做這敍列的**極限點**。在前文中所說的廣義的鄰域空間中,一個收歛的點可以同時趨近若干不同的點。不過在實數空間中與在複合形中,這種缺陷是不會發生的。

§6 變換

設有二鄰域空間 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$,而且相當於 $\mathfrak{A}$ 的任一點 P,$\mathfrak{B}$ 中恰有一點 P' 與他對應。這就規定了一個換 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的**單値變換** T。$P'=T(P)$ 叫做 P 的**像點**。$\mathfrak{A}$ 所有的點的像點組成的集合 $\mathfrak{A}'$ 叫做 $\mathfrak{A}$ 的**像集**。$\mathfrak{A}'$ 是 $\mathfrak{B}$ 的一個子集,當然也可以與 $\mathfrak{B}$ 全合。若是 $\mathfrak{A}$ 中的任意兩個不

*) $\mathfrak{M}$ 中的,不屬于子集 $\mathfrak{N}$ 的點的全體組成一個集合,叫着 $\mathfrak{N}$ 的餘集,可以用 $\mathfrak{M}-\mathfrak{N}$ 表示。

同的點的像點也不同，這換 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的變換就叫做一一的 (*eineindeutig*) 變換。在這種情形下，若是相當于 $\mathfrak{A}'$ 的任一點 P'，我們使底點 (*Originalpunkt*) P 與他對應，我們就得着一個單值的換 $\mathfrak{A}'$ 成 $\mathfrak{A}$ 的逆變換 (*reziproke Abbildung*)，可以用 T^{-1} 表示。——關于變換，我們要分別出兩種不同的說法：若是 $\mathfrak{A}$ 的像集是 $\mathfrak{B}$ 的子集（也許與 $\mathfrak{B}$ 全合），我們就說這變換換 $\mathfrak{A}$ 到 (*in*) $\mathfrak{B}$；若 $\mathfrak{B}$ 的每一點都是像點，即 $\mathfrak{A}'=\mathfrak{B}$，我們就說這變換換 $\mathfrak{A}$ 成 (*auf*) $\mathfrak{B}$。

設變換 T 換 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$，另一變換 U 換 $\mathfrak{B}$ 到鄰域空間 $\mathfrak{C}$。$\mathfrak{A}$ 中任一點 P 有他的像點 $T(P)$ 的像點 $U[T(P)]$ 與他對應。因此規定了一個換 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{C}$ 的變換。這變換叫做 T 與 U 的積 (*Produkt*)，用 UT 表示 [注意積中因子的次序。採用這次序，然後 P 的像點纔是 $U[T(P)]$ $=UT(P)$]。

設有一變換換 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$，$\mathfrak{A}$ 中的一點 P 的像點是 $\mathfrak{B}$ 中的點 P'。若是給定了 P' 的任一鄰域 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{B})$，能有一鄰域 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$ 存在，他的像集完全屬于 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{B})$，我們就說這變換在 P 點處綿續。若是這變換在 $\mathfrak{A}$ 的任一點處都綿續，我們就簡單的說，這變換綿續。

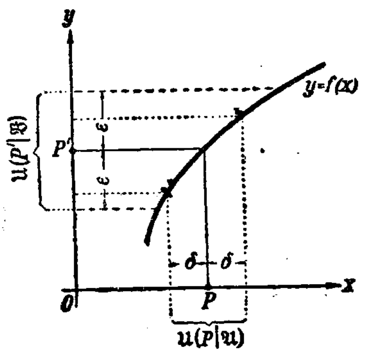


圖 29

綿續的這定義與他的通常定義一致。例如函數 $y=f(x)$ 可以看作是規定換實數直線 x 軸到實數直線

y 軸的一個變換。設 $\bar{x}$ 是一個定點。若是給定了任一正數 ε，有一個具有如次性質的正數 δ 存在：凡適合不等式 $|x-\bar{x}|<\delta$ 的點 x 都使 $|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$，$f(x)$ 就說是在 $\bar{x}$ 點處綿續。這是通常的定義。這就等於說，給定了像點 $\bar{y}=f(\bar{x})$ 的任一 ε 鄰域 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{B})$，有 $\bar{x}$ 的一個 δ 鄰域 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$ 存在，他的像點完全屬于這給定的 ε 鄰域。

設 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是 m 維的實數空間 $\mathfrak{R}^m$ 中的坐標，$y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 n 維的實數空間 $\mathfrak{R}^n$ 中的坐標。設 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{A}'$ 分別是 $\mathfrak{R}^m$ 與 $\mathfrak{R}^n$ 的子集。推廣前例，一個換 $\mathfrak{A}$ 成 $\mathfrak{A}'$ 的變換 T 也可以用 n 個函數

$$y_k=f_k(x_1, x_2, \cdots, x_m) \qquad (k=1,2,\cdots,n) \qquad (1)$$

表示。我們有下述定理。

定理 I: (1)中 n 個變換函數全綿續，是變換 T 的綿續的充要條件。[設 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$，是 m 個變數的函數，$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_m)$ 是一個定點。若是預先任意給定了一個 $\varepsilon\ (>0)$，能有一個具有如次性質的 $\delta\ (>0)$ 存在：凡 f 的定義域中所有適合不等式

$$|x_i-\bar{x}_i|<\delta$$

的點，都使

$$|f(x_1, x_2, \cdots, x_m)-f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_m)|<\varepsilon,$$

這函數就說是在這定點處綿續。這是分析學中所習用的定義。]

證明： 設 P 是 $\mathfrak{A}$ 中的一點。用 P 做中心的 δ 方體與 $\mathfrak{A}$ 的交集叫做點 P 的 δ 方體鄰域 $\mathfrak{W}_\delta(P|\mathfrak{A})$。每一鄰域 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$ 必定含有一個適當小的 δ 方體鄰域。因為 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$ 是 $\mathfrak{A}$ 與鄰域 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{R}^m)$ 的交

集，而後者就含有一個 δ 方體。

a) 設 T 是綿續的變換。設 P 是 $\mathfrak{A}$ 中的任一點，P' 是他的像點，$\mathfrak{W}_\varepsilon(P'|\mathfrak{A}')$ 是 P' 的預先給定的一個 ε 方體鄰域。因爲 T 的綿續性，有一個鄰域 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$ 存在，他的像集完全屬于 $\mathfrak{W}_\varepsilon(P'|\mathfrak{A}')$。$\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$ 就含有一個 δ 方體鄰域。這方體鄰域的像集當然也屬於那給定的 ε 方體鄰域。這就證明了(1)的函數全綿續。

b) 設(1)中的函數全綿續。預先給定的一個鄰域 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{A}')$，含有一個 ε 方體鄰域 $\mathfrak{W}_\varepsilon(P'|\mathfrak{A}')$。因爲(1)的綿續性，有一個 δ 方體鄰域 $\mathfrak{W}_\delta(P|\mathfrak{A})$ 存在，他的像集完全屬于 $\mathfrak{W}_\varepsilon(P'|\mathfrak{A}')$。這像集當然也屬于 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{A}')$。這就證明了 T 這變換綿續。

定理 *II*: **若是換鄰域空間 $\mathfrak{A}$ 到鄰域空間 $\mathfrak{B}$ 的變換綿續，這換 $\mathfrak{A}$ 成他的像集 $\mathfrak{A}'$ 的變換也綿續；反之，若換 $\mathfrak{A}$ 成 $\mathfrak{A}'$ 的變換綿續，這換 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的變換也綿續。**

證明: 任一鄰域 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{A}')$ 是一個鄰域 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{B})$ 與 $\mathfrak{A}'$ 的交集。$\mathfrak{A}$ 既然綿續的換到 $\mathfrak{B}$，就有一個鄰域 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$ 存在，他的像集完全屬于 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{B})$，當然屬于 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{B})$ 與 $\mathfrak{A}'$ 的交集；所以屬于 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{A}')$。因爲 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{A}')$ 是任意取定的一個鄰域，所以換 $\mathfrak{A}$ 成 $\mathfrak{A}'$ 的變換綿續。——反之，設換 $\mathfrak{A}$ 成 $\mathfrak{A}'$ 的變換綿續。任意給定的一個 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{B})$ 就確定了他與 $\mathfrak{A}'$ 的交集 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{A}')$。因爲換 $\mathfrak{A}$ 成 $\mathfrak{A}'$ 的變換綿續，就有一個鄰域 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$ 存在，他的像集完全屬于 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{A}')$。這像集當然也屬于 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{B})$。——換句話說，**在綿續性的定義中，我們可以用** P' **在**

$\mathfrak{A}'$ 中的鄰域替代 P' 在 $\mathfrak{B}$ 中的鄰域。

定理III: 若是一個換 $\mathfrak{A}$ 成 $\mathfrak{A}'$ 的綿續變換換 $\mathfrak{A}$ 的子集 $\mathfrak{N}$ 成 $\mathfrak{A}'$ 的子集 $\mathfrak{N}'$,這換 $\mathfrak{N}$ 成 $\mathfrak{N}'$ 的變換也綿續。

證明: 設 $\mathfrak{N}$ 中的一點 P 的像點是 P'。因爲換 $\mathfrak{A}$ 成 $\mathfrak{A}'$ 的變換綿續,給定了 P' 在 $\mathfrak{A}'$ 中的任一鄰域 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{A}')$,就有一個鄰域 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$ 存在,他的像集完全屬于 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{A}')$。$\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$與 $\mathfrak{N}$ 的交集是 P 在 $\mathfrak{N}$ 中的一個鄰域,這鄰域的像集當然完全屬于 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{A}')$,所以換 $\mathfrak{N}$ 到 $\mathfrak{A}'$ 的變換綿續。應用前定理,這換 $\mathfrak{N}$ 成 $\mathfrak{N}'$ 的變換也綿續。

定理IV: 若是有一變換綿續的換 $\mathfrak{A}$ 成 $\mathfrak{A}'$,又有一個變換綿續的換 $\mathfrak{A}'$ 成 $\mathfrak{A}''$,他們的積變換就也綿續的換 $\mathfrak{A}$ 成 $\mathfrak{A}''$。——顯然。

若是換 $\mathfrak{A}$ 成 $\mathfrak{A}'$ 的變換 T 是一一的,而 T 與逆變換 T^{-1} 都綿續,T 就叫做**拓撲變換**。設 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$是 P 的一個鄰域。因 T^{-1} 的綿續性,有一個鄰域 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{A}')$存在,他經過 T^{-1} 後的像集完全屬于 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$。所以 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$ 經過變換 T 後的像集含有一個 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{A}')$,也是 P' 的一個鄰域。因此有下述定理:

定理V: 拓撲變換與他的逆變換都換鄰域成鄰域;反之,若是一個一一的變換與他的逆變換都有這種性質,他必是一個拓撲變換。

若是一個拓撲變換,換 $\mathfrak{A}$ 成 $\mathfrak{B}$ 的一個子集 $\mathfrak{A}'$ ($\mathfrak{A}'$ 可與 $\mathfrak{B}$ 全合),我們也說他換 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$。

若是一個鄰域空間能拓撲的換成另一個鄰域空間,這兩個空間就叫做同胚的空間。

若是定理 III 與定理 IV 中的綿續變換改作拓撲變換，這二定理仍然成立。由是可以推出下述專款：若是鄰域空間 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 都與第三個鄰域空間 $\mathfrak{C}$ 同胚，$\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 就也同胚（同胚的協換性）。

我們只注意鄰域空間與他們的子集的，經過拓撲變換而不毀滅的性質。例如，實數空間的一個子集是直線，這句話所表明的就不是這種性質；因為一個拓撲變換即使把這直線換到另一實數空間，而這直線的像集還可以不是直線。

反之，鄰域空間 $\mathfrak{M}$ 的一個子集是一點 P 的鄰域，這句話所表明的卻是拓撲的不變性。因為經過換 $\mathfrak{M}$ 成 $\mathfrak{M}'$ 的一個拓撲變換，$\mathfrak{M}$ 中的點 P 的一個鄰域還換成 $\mathfrak{M}'$ 中的像點 P' 的一個鄰域。同樣的，一個子集的界點，內點，凝點，敘列的極限點，開子集，閉子集等都是拓撲的不變性。——這些概念的拓撲不變性的證法都相似，我們只舉一例，證明界點的拓撲不變性。設 $\mathfrak{M}$ 中的一點 R 是子集 $\mathfrak{N}$ 的界點。設有一拓撲變換，換 $\mathfrak{M}$ 成 $\mathfrak{M}'$，$\mathfrak{N}$ 成 $\mathfrak{N}'$，R 成 R'。因為 R 在 $\mathfrak{M}$ 中的所有的鄰域與 R' 在 $\mathfrak{M}'$ 中的所有的鄰域成一一的對應，既然 R 在 $\mathfrak{M}$ 中的每一鄰域含有 $\mathfrak{N}$ 的點與非 $\mathfrak{N}$ 的點，所以 R' 在 $\mathfrak{M}'$ 中的每一鄰域也含有 $\mathfrak{N}'$ 的點與非 $\mathfrak{N}'$ 的點。所以 R' 也是 $\mathfrak{N}'$ 的界點。——**一個換 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的變換的綿續性**也是拓撲不變性。因為若是用同胚的鄰域空間 $\mathfrak{A}'$ 與 $\mathfrak{B}'$ 分別替代 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$，由是引出的換 $\mathfrak{A}'$ 到 $\mathfrak{B}'$ 的變換還綿續。同樣的可以知道，一個變換是**拓撲變換**，也是拓撲不變性。

例：1．一條實數直線的線段 $0 \leqq x \leqq 1$ 換成另一條實數直線的線段 $0 \leqq y \leqq 1$ 的拓撲

變換。根據定理 I，這變換可以用一個綿續函數 $y=f(x)$ 表出，而且，在 0 與 1 之間的每一值，$f(x)$ 恰取一次。我們從分析學知道，如此的一個函數必定是單調增函數或單調減函數。因此，$f(x)$ 在 $x=0$ 處的值必定是最大值或最小值，線段的端點必定換成端點。

2. 刺破了一個點的球面換成實數平面的畫形投影。 三維實數空間中的單位球面

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$$

當作這空間的一個子集，也是一個鄰域空間。同樣的，刺破了一個點的球面，那就是說，減去了一個點的球面，也是一個鄰域空間。這刺破了一個點的球面與實數平面同胚。取北極 (0, 0, 1) 做減去了的點，從北極把這球面換成實數平面 $x_3=0$（赤道平面）的畫形投影，就是我們所要的一個拓撲變換。其實，球面上唯一的無像點的點就是北極；既然北極這一個點減去了，所以這變換是一一的。我們證明換球面成平面這方向的變換綿續：設 P' 是平面上的一點。給定 P' 的一個鄰域，我們必須求得原來的點 P 的一個鄰域，他的像集完全屬於 P' 的這個鄰域。P' 的任一鄰域必定含有一個 ε' 鄰域（用 P' 做中心的圓域）。原來的點 P 的一個帽形鄰域（*Kalotte*，球面與 P 在空間中的一個 ε 鄰域的交集），經過畫形投影，顯然換成一個含有 P' 的圓域的子集。只要這帽形鄰域適當小，他的像集就完全屬于 P' 的這預先給定的 ε' 鄰域。——同樣的，我們能證明換平面成球面的這方向的變換綿續。所以畫形投影是一個拓撲變換。

我們還可以寫下這變換的函數，從定理 I 得着另一證明。爲使原來的點與像點有區別起見，把赤道平面中的坐標 (x_1,x_2) 改稱爲坐標 (ξ_1,ξ_2)。我們推廣我們三維空間中的例子到 n 維空間，而且假定球的半徑是 r。我們很容易求出變換函數如下式：

$$\xi_i=\frac{r}{r-x_n}x_i; \qquad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

$$x_i=\frac{2r^2}{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_{n-1}^2+r^2}\xi_i,$$

$$x_n=\frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_{n-1}^2-r^2}{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_{n-1}^2+r^2}r。$$

這些函數分別在刺破了一個點的球面上與赤道平面上單值而且綿續。

3. 實數平面與圓的內域同胚。 要求得一個拓撲變換，我們只要用兩次不同的投影，把單位球面的下半（不含有赤道圓）換到南極處的切面：一次是中心投影，用球的中心 M 做投影中心（見圖14）；一次是垂直投影。這兩個變換都是拓撲變換。既然兩個拓撲變換的積還是一個拓撲變換，所以得着一個換圓的內域成實數平面的拓撲變換。

習題：1. 試證下列圖形同胚：有限高的圓柱面減去他的兩個邊緣圓，實數空間中的單葉雙曲面，平環減去他的兩個邊緣圓，與刺破了兩個點的球面。

2. 給定了圓域的邊緣圓的一個拓撲的自身變換，試證這變換可擴充成爲全個的圓域的一個拓撲的自身變換。

3. 設 $\mathfrak{M}$ 是實數空間中的一個子集，P 是不屬于 $\mathfrak{M}$ 的一點。試證：P 若是 $\mathfrak{M}$ 的界點，就也是凝點；P 若是 $\mathfrak{M}$ 的凝點，就也是界點。

§7 實數空間中的點集

我們此後要討論的鄰域空間，只限于與實數空間的子集同胚的這種特殊的鄰域空間。這種特殊的鄰域空間有顯著的特殊構造，與廣義的鄰域空間斷然不同。因其如此，所以有許多關于實數空間的子集的定理並非 §5 中的兩條公設的必然的結論。我們在本節中還只討論一種鄰域空間 $\mathfrak{M}$，他自身就是實數空間的子集。

設 P 是 $\mathfrak{M}$ 中的一點，$\mathfrak{M}$ 中所有的點，與 P 的距離小于一正數 ε 的，就是 $\mathfrak{M}$ 與用 P 做中心的 ε 球體的交集。根據實數空間中的鄰域的定義與子集中的鄰域定義，這交集是一個鄰域，叫做 P 在 $\mathfrak{M}$ 中的一個 ε 鄰域 $\mathfrak{U}_\varepsilon(P|\mathfrak{M})$。因爲 §5 的不等式 (3) 中用的是 $<$ 而非 $\leqq$，每一 ε 鄰域都是 $\mathfrak{M}$ 的一個開子集。而且 $\mathfrak{M}$ 的一個子集 $\mathfrak{N}$ 是否 P 在 $\mathfrak{M}$ 中的一個鄰域，須按照 $\mathfrak{N}$ 是否含有一個 $\mathfrak{U}_\varepsilon(P|\mathfrak{M})$ 而定。

設 P 與 Q 是實數空間的一個子空間中的點。若 P 非 Q，P 與 Q 必定有無共點的鄰域。例如用 P 與 Q 做中心的兩個適當小的 ε 球體。這是實數空間的每一個子空間具有的一個重要性質，却非每一個廣義的鄰域空間都如此。

根據這性質，一個收斂的敘列恰有一個極限點。給定了一個敘列，若是有一點 P 存在，他的每一個鄰域差不多含有敘列的所有的點，這敘列纔說是收斂的。P 就是這敘列唯一的極限點。因爲兩個不同的點 P 與 Q 必定有無共點的鄰域，而敘列的點不能同時差不多全在 P 的

每一個鄰域裏，又差不多全在 Q 的每一個鄰域裏。

初等分析學中證明的定理，通常都是關于實數空間的子集的定理，其中如凝點定理，綿續函數的最大值定理與匀綿續定理等，我們此後常要引用。

定理 I（凝點定理）：實數空間中的每一無窮的囿子集至少有一凝點。*）若是一個點集含有無窮多的點，他就叫做**無窮的點集**。若是實數空間中的一個子集完全屬于一個用原點作中心的有限的方體，他就叫做**囿集**（*beschränkte Menge*）。

定理 II：經過換一個實數空間到另一個實數空間的綿續變換，囿閉集合還換成囿閉集合。

證明：假設囿閉集合 $\mathfrak{M}$ 的綿續像集 $\mathfrak{M}'$ 不是囿閉集合。$\mathfrak{M}'$ 既不囿閉，$\mathfrak{M}'$ 中就有不同的點 $P'_1, P'_2, \cdots$，存在，他們組成的叙列或趨近不屬于 $\mathfrak{M}'$ 的界點 $\bar{R}$，或簡直沒有凝點。設 P_i 是 P_i' 的一個原來的點。根據定理的假設，$\mathfrak{M}$ 中的 $P_1, P_2, \cdots$ 這叙列有一屬于 $\mathfrak{M}$ 的凝點 R。因此 R 的像點 R' 屬于 $\mathfrak{M}'$，而且 R' 的每一鄰域含有叙列 $P'_1, P'_2, \cdots$ 中無窮多的點。這與這叙列所假定的性質矛盾。

由此可以推出下述定理。

定理 III（極大值定理）：設 $\mathfrak{M}$ 是實數空間的一個囿閉子集，$\mathfrak{M}$ 中的一個綿續函數必在 $\mathfrak{M}$ 中取一極大值與一極小值。

---

*）證明可參考 *K. Knopp, Funktionentheorie I*, 頁 22（*S. Göschen* 1926）。這書中的證明立可從二維空間推廣到 n 維空間。

因爲綿續函數把 $\mathfrak{M}$ 綿續的換到實數直線。

勻綿續定理可以敘述如下:

定理 *IV*: **設有一個綿續變換,換實數空間的一囿閉子集 $\mathfrak{A}$ 到一個鄰域空間 $\mathfrak{B}$。若是相當於 $\mathfrak{B}$ 中的每一點 Q,都任意的指定了一個鄰域 $\mathfrak{U}^*(Q|\mathfrak{B})$,就有一個具有如次性質的正數 δ 存在: $\mathfrak{A}$ 中每一點 P 的 δ 鄰域的像集,都完全屬于一個取得適當的點 Q 的這個鄰域 $\mathfrak{U}^*(Q|\mathfrak{B})$。**

證明: 假設此定理不確;因此在 $\delta=\frac{1}{i}$ 時,$i=1,2,\cdots$,就有一點 P_i 存在,他的 $\frac{1}{i}$ 鄰域的像集不屬于任一這種鄰域 $\mathfrak{U}^*(Q|\mathfrak{B})$。因爲 $\mathfrak{A}$ 的囿閉性質,敘列 $P_1, P_2, \cdots$, 有一屬於 $\mathfrak{A}$ 的凝點 P。設 P 的像點是 P', P' 的指定了的鄰域是 $\mathfrak{U}^*(P'|\mathfrak{B})$。因爲變換的綿續性,有一鄰域 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$ 存在,他的像集完全屬于 $\mathfrak{U}^*(P'|\mathfrak{B})$。因爲 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$ 含有無窮多的點 P_i, 所以有一適當大的 i 存在,使 P_i 這一點的 $\frac{1}{i}$ 鄰域完全屬于 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{A})$,他的像集也完全屬于 $\mathfrak{U}^*(P'|\mathfrak{B})$。這是矛盾。

若是 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 全合,而且綿續變換是么變換(*identische Abbildung*),就有下述結論:

定理 *V*: **若是相當于實數空間的一囿閉子集 $\mathfrak{A}$ 的每一點 Q, 都任意的指定了一個鄰域 $\mathfrak{U}^*(Q|\mathfrak{A})$, 就有一個具有如次性質的正數 δ 存在: $\mathfrak{A}$ 中每一點的 δ 鄰域, 完全屬于一個取得適當的點 Q 的這個鄰域 $\mathfrak{U}^*(Q|\mathfrak{A})$。**

勻綿續定理的通常敘述的方式如下:

定理 *VI*: **設有一個單值綿續的變換,變一個實數空間的一囿閉子**

集 $\mathfrak{A}$ 到另一實數空間 $\mathfrak{B}$。任意的給定了一正數 ε，就有一個如次性質的正數 δ 存在：若是 $\mathfrak{A}$ 中任二點的距離小于 δ，他們在 $\mathfrak{B}$ 中的像點的距離必小于 ε。

證明：設 Q 是 $\mathfrak{B}$ 中的任一點。用 Q 的 $\frac{\varepsilon}{2}$ 鄰域，當作定理 IV 中的 $\mathfrak{U}^*(Q|\mathfrak{B})$。因此有一個具有如次性質的正數 δ 存在：$\mathfrak{A}$ 中的每一點的 δ 鄰域的像集，都完全屬于一個適當的點 Q 的 $\frac{\varepsilon}{2}$ 鄰域。若是 $\mathfrak{A}$ 中的二點 P_1 與 P_2 的距離小于 δ，P_2 就在 P_1 的 δ 鄰域中。因爲 δ 鄰域的像集完全屬于 $\mathfrak{B}$ 中的 $\frac{\varepsilon}{2}$ 鄰域，$\mathfrak{B}$ 中的 P_1' 與 P_2' 的距離必小于 ε。

爲將來應用起見，我們再證明關于實數空間中的點集的下述定理。

定理 VII：設 $\mathfrak{M}$ 是實數空間的一個子集（或是與這種的一個子集同胚），P 是 $\mathfrak{M}$ 中的一點，Ω 是 P 在 $\mathfrak{M}$ 中的一個鄰域，Ω_1 是 P 在 Ω 中的一個鄰域。Ω_1 就也是 P 在 $\mathfrak{M}$ 中的一個鄰域。

證明：Ω 含有 P 在 $\mathfrak{M}$ 中的一個 ε 鄰域 $\mathfrak{U}_\varepsilon(P|\mathfrak{M})$。同樣的，$\Omega_1$ 也含有一個 δ 鄰域 $\mathfrak{U}_\delta(P|\Omega)$。若是用 η 代表 ε 與 δ 二數中較小的一個，$\mathfrak{U}_\eta(P|\mathfrak{M})$ 當然完全屬于 Ω，$\mathfrak{U}_\eta(P|\Omega)$ 當然完全屬于 Ω_1。{因爲 $\mathfrak{U}_\eta(P|\mathfrak{M})$ 與 Ω 的交集是 $\mathfrak{U}_\eta(P|\Omega)$，所以 $\mathfrak{U}_\eta(P|\mathfrak{M})$ 就是 $\mathfrak{U}_\eta(P|\Omega)$。} $\mathfrak{U}_\eta(P|\mathfrak{M})$ 完全屬于 Ω_1。Ω_1 所以是 P 在 $\mathfrak{M}$ 中的一個鄰域。

設 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{M}$ 中的一個子集。根據 $\mathfrak{N}$ 在 $\mathfrak{M}$ 中的閉包 $\mathfrak{N}'$ 的定義，$\mathfrak{N}'$ 是 $\mathfrak{M}$ 中所有含有 $\mathfrak{N}$ 的閉子集的交集，所以 $\mathfrak{N}$ 在 $\mathfrak{M}$ 中的界點完全屬于 $\mathfrak{N}'$。**其實，$\mathfrak{N}$ 的閉包恰是 $\mathfrak{N}$ 與他的界限 $\overline{\mathfrak{N}}$ 的連集。**要證明這

句話，我們只須證明連集 $\mathfrak{N}+\overline{\mathfrak{N}}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的閉子集。設 R 是 $\mathfrak{N}+\overline{\mathfrak{N}}$ 在 $\mathfrak{M}$ 中的一個界點。他的任一 ε 鄰域 $\mathfrak{N}_\varepsilon(R|\mathfrak{M})$ 必定含有 $\mathfrak{N}+\overline{\mathfrak{N}}$ 的一點；此點或屬于 $\mathfrak{N}$，或是 $\mathfrak{N}$ 的一個界點 $\bar{R}$。若是後者的情形屬實，R 與 $\bar{R}$ 的距離小于 ε，而且 $\bar{R}$ 的任意鄰近處必定有 $\mathfrak{N}$ 中的點（根據界點的定義）。所以在這兩種情形下，$\mathfrak{N}_\varepsilon(R|\mathfrak{M})$ 中都必定含有 $\mathfrak{N}$ 中的點；這就是說，R 也是 $\mathfrak{N}$ 的界點，屬于 $\overline{\mathfrak{N}}$。——同樣的，我們可以證明 $\mathfrak{N}$ 在 $\mathfrak{M}$ 中的界限也是 $\mathfrak{M}$ 中的閉子集。

設 $\mathfrak{M}_1$ 與 $\mathfrak{M}_2$ 是 $\mathfrak{R}^n$ 中的無共點的二個閉子集。$d(P_1, P_2)$ 代表 $\mathfrak{M}_1$ 中一點 P_1 與 $\mathfrak{M}_2$ 中一點 P_2 的距離。所有的 $d(P_1, P_2)$ 的下限 δ 就叫做 $\mathfrak{M}_1$ 與 $\mathfrak{M}_2$ 這**二集合的距離**。—— 因爲 $\mathfrak{M}_1$ 與 $\mathfrak{M}_2$ 的閉閉性質，$\mathfrak{M}_1$ 與 $\mathfrak{M}_2$ 無共點，卽 δ 是正數。

$\mathfrak{R}^n$ 的一個閉子集中所有點耦間的距離的上限，就叫做這集合的**直徑** (*Durchmesser*)。

§8 疊合

在幾何學中，我們常把一個鄰域空間中的點分成組，再把這些組當作一個新鄰域空間中的"點"。例如平行投影把歐幾里得空間換成一個平面，就可以看作是把空間的點分成組。空間中所有的點，有同一個像點的（與投影方向平行的一條直線上的點）構成一組。他們同樣的換成這像點，因而我們不以爲他們有任何區別，而且把他們與像點疊合 (*identifizieren*) 成一點。——再舉一例。設 a 與 b 是二常數。歐幾里得

平面中沿 x 軸的直移 $x'=x+a$, 與沿 y 軸的直移 $y'=y+b$ 產生一個直移羣。若是二點的 x 坐標的差是 a 的倍數, y 坐標的差是 b 的倍數，那就是說，若是這羣中有一元，把其中的一點移到另一點，這二點就叫做相抵 (*äquivalent*) 點。把所有的相抵點歸在一組；直移羣就規定了平面中的點的一個分組法。我們能從每一組中選擇一個適當的代表點 (x, y)，使所有的代表點恰就是所有適合不等式 $0\leqq x<a, 0\leqq y<b$ 的點。這些點組成一矩形的內域，加上一頂點與二邊（圖 30）。因爲 $x=0$ 與 $x=a$ 這二邊相抵，$y=0$ 與 $y=b$ 這二邊相抵，由疊合歐幾里得平面中這種相抵點而成的空間恰是一個環面 (§1)。——最後，連接面片成曲面的時候，也需要疊合。設實數平面中給定了兩個三邊形，一個三邊形的某一邊與第二個三邊形的某一邊成對應。若要沿着這二邊把兩個三邊形連接起來，實際上先要在這二邊間取一個拓撲對應，再界說拓撲對應的點相抵。由疊合這兩個三邊形中的相抵點而成的是一個四邊形。

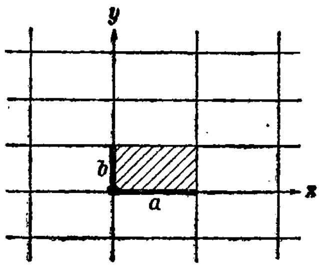


圖 30

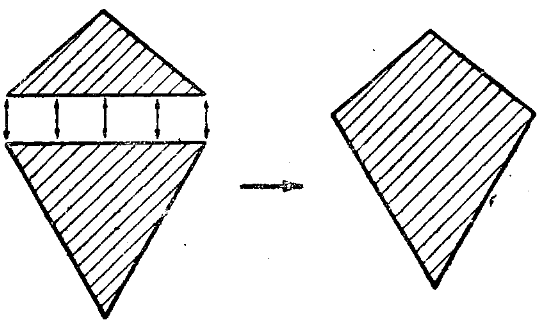


圖 31

現在我們要用集合論中的基本概念——如集合，子集，對應等——做根據，來確定叠合的意義。

設有一個鄰域空間 $\mathfrak{M}$，其中的點已分開成組（子集），每一點恰屬于一組。各組中點的數目不必相同；例如某一組可以只有一點，而另一組却可以有無窮多點。同一組中的點叫作**相抵**點。$\mathfrak{M}$ 中相抵點所構成的組當作新“點”，做成一個新集合 $\mathfrak{M}'$。設 P 是 $\mathfrak{M}$ 中的任意一點，P' 是 $\mathfrak{M}'$ 中含有 P 點的一組；只要把 P' 規定做 P 的像點，我們就得着一個換 $\mathfrak{M}$ 成 $\mathfrak{M}'$ 的變換。我們還要用下述的鄰域定義，使 $\mathfrak{M}'$ 成爲鄰域空間：設 P' 是 $\mathfrak{M}'$ 中的一點，他的所有的底點是 $\mathfrak{M}$ 中的點 P_1，$P_2, \cdots$。若 $\mathfrak{U}(P_i|\mathfrak{M})$ 是 P_i 在 $\mathfrak{M}$ 中的任一鄰域，我們就規定 $\mathfrak{U}(P_1|\mathfrak{M}) + \mathfrak{U}(P_2|\mathfrak{M}) + \cdots$ 這連集的像集爲 P' 在 $\mathfrak{M}'$ 中的一個鄰域 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{M}')$。這鄰域的定義顯然滿足公設 A。我們可以證明他也滿足公設 B 如下：設 $\mathfrak{U}'$ 是 $\mathfrak{M}'$ 中的一個含有 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{M}')$ 的子集，P_i 是 P' 的任一底點，$\mathfrak{U}$ 是 $\mathfrak{U}'$ 的底集合（含有 $\mathfrak{U}'$ 的每一點的所有底點）。因爲 $\mathfrak{U}$ 含有鄰域 $\mathfrak{U}(P_i|\mathfrak{M})$，所以是 P_i 的一個鄰域 $\overline{\mathfrak{U}}(P_i|\mathfrak{M})$。因爲 $\mathfrak{U}'$ 是連集 $\overline{\mathfrak{U}}(P_1|\mathfrak{M}) + \overline{\mathfrak{U}}(P_2|\mathfrak{M}) + \cdots = \mathfrak{U}$ 的像集，根據定義，$\mathfrak{U}'$ 是 P' 的一個鄰域。

我們從此規定，**由疊合 $\mathfrak{M}$ 中相抵點而成的鄰域空間就是 $\mathfrak{M}'$ 或與他同胚的鄰域空間。**

設鄰域空間 M 與 $\mathfrak{M}$ 同胚。而且 M 中的點，與 $\mathfrak{M}$ 中相抵點或不相抵點成對應的，也分別界說爲相抵點或不相抵點。若用 M 代替 $\mathfrak{M}$，

由叠合 M 中相抵點而成的鄰域空間 M′，也與 $\mathfrak{M}'$ 同胚。

給定了任一鄰域 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{M}')$，底點 P_i 有一個鄰域存在，例如上文所說的 $\mathfrak{U}(P_i|\mathfrak{M})$，他的像集完全屬于 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{M}')$；所以有下述定理。

定理 I: 這換 $\mathfrak{M}$ 成 $\mathfrak{M}'$ 的變換是一個綿續變換。

反之，若是一個鄰域空間 $\mathfrak{M}$ 綿續的換成另一個鄰域空間 $\mathfrak{M}'$，我們要問：由叠合 $\mathfrak{M}'$ 中每一點的底點而成的空間，在何種情形下，就是 $\mathfrak{M}'$? 下述定理解答這問題。

定理 II: 設有一個綿續變換換鄰域空間 $\mathfrak{M}$ 成 $\mathfrak{M}'$，P' 是 $\mathfrak{M}'$ 中的任一點，$\mathfrak{M}$ 中的 $P_1, P_2, \cdots$ 是 P' 的所有的底點，而且 $\mathfrak{U}(P_i|\mathfrak{M})$ 是 P_i 在 $\mathfrak{M}$ 中的任一鄰域。若每一連集 $\mathfrak{U}(P_1|\mathfrak{M})+\mathfrak{U}(P_2|\mathfrak{M})+\cdots$ 的像集都是 P' 在 $\mathfrak{M}'$ 中的一個鄰域，$\mathfrak{M}'$ 就是由叠合 $\mathfrak{M}'$ 中每一點的所有的底點（屬于 $\mathfrak{M}$）而成的空間。

證明: 我們只要證明，每一個鄰域 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{M}')$ 都是 $\mathfrak{U}(P_1|\mathfrak{M})+\mathfrak{U}(P_2|\mathfrak{M})+\cdots$ 這種的一個連集的像集。因爲變換的綿綿性，$P_1, P_2, \cdots$ 中每一點 P_i 有一個 $\overline{\mathfrak{U}}(P_i|\mathfrak{M})$，他的像集完全屬于 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{M}')$。設 $\mathfrak{U}$ 是 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{M}')$ 的點的所有的底點組成的集合。$\mathfrak{U}$ 含有 $\overline{\mathfrak{U}}(P_i|\mathfrak{M})$，所以也是 P_i 的一個鄰域 $\mathfrak{U}(P_i|\mathfrak{M})$。所以 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{M}')$ 是 $\mathfrak{U}(P_1|\mathfrak{M})+\mathfrak{U}(P_2|\mathfrak{M})+\cdots$ 這連集的像集。

相抵點已經規定了之後，我們有時不同時叠合，却分成若干階段去叠合所有相抵點。其實不管如何把叠合分成階段，不管階段的先後次序如何，結果顯然相同。這就是說：設 $\mathfrak{M}'$ 是由叠合 $\mathfrak{M}$ 中相抵點而成

的空間，$\mathfrak{M}''$ 是由疊合 $\mathfrak{M}'$ 中相抵點而成的空間。這兩次疊合確定了一個換 $\mathfrak{M}$ 成 $\mathfrak{M}''$ 的變換。$\mathfrak{M}''$ 就是由疊合 $\mathfrak{M}$ 中所有的，在 $\mathfrak{M}''$ 中有同一像點的點而成的空間。

證明：設 $\mathfrak{M}'$ 中的 $P'_1, P'_2, \cdots$ 是 $\mathfrak{M}''$ 中的 P'' 所有的底點，而 $\mathfrak{M}$ 中的 $P_{i1}, P_{i2}, \cdots$ 是 P'_i 的所有的底點。因爲換 $\mathfrak{M}$ 成 $\mathfrak{M}''$ 的變換綿續，所以根據定理 II，只需要證明 $\sum\limits_i \sum\limits_j \mathfrak{U}(P_{ij}|\mathfrak{M})$ 的像集是 P'' 的一個鄰域。因爲 $\mathfrak{M}'$ 是由疊合 $\mathfrak{M}$ 中相抵點而成的，所以 $\sum\limits_j \mathfrak{U}(P_{ij}|\mathfrak{M})$ 疊合成 $\mathfrak{M}'$ 中的一個鄰域 $\mathfrak{U}(P'_i|\mathfrak{M}')$；又因爲 $\mathfrak{M}''$ 是由疊合 $\mathfrak{M}'$ 中相抵點而成的，所以 $\sum\limits_i \mathfrak{U}(P'_i|\mathfrak{M}')$ 疊合成 P'' 在 $\mathfrak{M}''$ 中的一個鄰域 $\mathfrak{U}(P''|\mathfrak{M}'')$。

定理 III：設 $\mathfrak{M}$ 特別是實數空間中的一個閉子集，他的點已分開成相抵點組。設有一個單値的綿續的變換，換 $\mathfrak{M}$ 成另一實數空間的子集 $\mathfrak{M}'$，而且換 $\mathfrak{M}$ 中相抵點成同一點，換不相抵點成不同的點。*）$\mathfrak{M}'$ 就是由疊合 $\mathfrak{M}$ 中相抵點而成的空間。

證明：設 P_1 $P_2, \cdots$ 是 P' 的所有的底點，$\mathfrak{U}(P_i|\mathfrak{M})$ 是 P_i 的任一鄰域。根據定理 II，只需要證明每一連集 $\mathfrak{U}(P_1|\mathfrak{M})+\mathfrak{U}(P_2|\mathfrak{M})+\cdots$ 的像集是一個鄰域 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{M}')$。這像集顯然是 $\mathfrak{M}'$ 中的含有 P' 的一個子集 $\mathfrak{N}'$。假設 $\mathfrak{N}'$ 不是 P' 的一個鄰域；P' 的每一個 ε 鄰域中

*）並非任一分組法就能滿足定理中的假設。（設 $\mathfrak{M}$ 由 $0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq x'\leqq 1$ 兩線段組成，設每組恰有兩個相抵點：$x=0$ 與 $x'=1$ 相抵，$x=1$ 與 $x'=0$ 相抵，$x(0<x<1)$ 與 $x'(0<x'<1)$ 適合等式 $x'=x$ 的也相抵。若是用這種分組法，就無變換能滿足定理中的假設。）

含有屬于 $\mathfrak{M}'$ 而不屬于 $\mathfrak{N}'$ 的點。特別是相當於 ε 等于叙列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{i}, \cdots$ 中的每一值時，P' 的 $\frac{1}{i}$ 鄰域中含有不屬于 $\mathfrak{N}'$ 的一點 Q'_i。設 Q_i 是 Q'_i 的任一底點。因爲 $\mathfrak{M}$ 的閉閉性質，$Q_1, Q_2, \cdots$ 至少有一凝點 Q。因爲變換的綿續性，Q 的像點 Q' 的每一鄰域中含有叙列 $Q'_1, Q'_2, \cdots$ 中無窮多的點。但 P' 是這叙列的唯一凝點，所以 $Q' = P'$。所以 Q 是 $P_1, P_2, \cdots$ 中的一點；譬如說是 P_1。因爲 $Q_1, Q_2, \cdots$ 中無窮多的點屬于 $\mathfrak{U}(P_1|\mathfrak{M})$，所以 $Q'_1, Q'_2, \cdots$ 中無窮多的點屬于 $\mathfrak{N}'$。這是矛盾。

我們現在可以完全解答下述問題：設有三個變換，適合等式 $\psi\phi = \chi$（ϕ 先 ψ 後）。在何種情形下，若是其中的兩個變換綿續，第三個也綿續？在 §6 中我們已經說明，若 ϕ 與 ψ 綿續，χ 也必綿續。但若 ψ 與 χ 綿續，ϕ 却不一定綿續。例如，若 ψ 是換所有的點成同一個點的變換，不管 ϕ 是何種變換，χ 都綿續。現在根據定理 III，我們可以證明：若是 ϕ 與 χ 都綿續，ψ 在某種條件之下也綿續。

定理 IV：設有一個綿續變換 ϕ，換實數空間的一閉閉子集 $\mathfrak{M}$ 成另一實數空間的子集 $\mathfrak{M}'$，又有一個變換 ψ（不假設 ψ 綿續）換 $\mathfrak{M}'$ 成任一鄰域空間 $\mathfrak{M}''$。若換 $\mathfrak{M}$ 成 $\mathfrak{M}''$ 的變換 $\psi\phi = \chi$ 綿續，ψ 也必綿續。

證明：設 P' 是 $\mathfrak{M}'$ 中的任一點，$P'' = \psi(P')$ 是 $\mathfrak{M}''$ 中的像點。設 $P_1, P_2, \cdots$ 是 $\mathfrak{M}$ 中所有的，經過變換 ϕ 換成 P' 的點。因爲 χ 的綿續性，給定了任一鄰域 $\mathfrak{U}(P''|\mathfrak{M}'')$，有鄰域 $\mathfrak{U}(P_1|\mathfrak{M}), \mathfrak{U}(P_2|\mathfrak{M}), \cdots$ 存在，他們的像集都完全屬于 $\mathfrak{U}(P''|\mathfrak{M}'')$。若是我們規定 $\mathfrak{M}$ 中所有

的點，在 $\mathfrak{M}'$ 中有同一像點的相抵，根據定理 III，$\mathfrak{M}'$ 就是由疊合 $\mathfrak{M}$ 中相抵點而成的空間。所以連集 $\mathfrak{U}(P_1|\mathfrak{M}) + \mathfrak{U}(P_2|\mathfrak{M}) + \cdots$ 疊合成一個鄰域 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{M}')$。但是我們已經知道經過變換 χ，這連集的像集完全屬于 $\mathfrak{U}(P''|\mathfrak{M}'')$。所以 ψ 在 P' 點處綿續，所以 ψ 在 $\mathfrak{M}$ 中綿續。

若定理 IV 中的 ϕ 是一個換 $\mathfrak{M}$ 成 $\mathfrak{M}'$ 的一一的綿續的變換，而且 $\psi = \phi^{-1}$，$\psi\phi$ 就是么自身變換，當然綿續。

因此，得知 ϕ^{-1} 也綿續。這就證明了下述定理：

定理 V：若是一個變換，一一的綿續的換實數空間的一個閉子集(成另一個實數空間的子集)。他的逆變換就也綿續，所以他是一個拓撲變換。

例：1. 設 $\mathfrak{M}$ 是一個圓域(含有邊緣圓在內)。疊合邊緣圓上所有的點而成的空間是一個球面。因爲能把圓域綿續的換成球面，只使相抵點都有同一像點。例如，把從圓心到邊緣的半徑換成從南極到北極的經圓，因此把邊緣圓換成北極。根據定理 III，球面是由疊合圓域中所有的以北極爲像點的點而成的。

2. 設考慮實數空間中的，通過一點的所有直線所組成的線集。設 g 是其中的一直線。我們界說，一個繞 g 的圓錐體中所有的直線(或任一含有這種的線集的線集)組成 g 的一個鄰域。這錐線集因此成爲一個鄰域空間，他的點是直線。這空間與由疊合實數空間中的一個球面的每兩個徑點而成的鄰域空間同胚，也就是 §2 中所介紹的"投影平面"。

§9 n 維單純形

設

$$P_0, P_1, \cdots, P_n,$$

是實數空間 $\mathfrak{R}^m$ 中的 $n+1$ 個平直無關的 (*linear unabhängig*) (不屬

于同一個 $n-1$ 維的平直子空間的*) 點，$0\leqq n\leqq m$，而且 P_i 點的坐標是

$$p_{i1},\ p_{i2},\ \cdots,\ p_{im}。\qquad (i=0,1,\cdots,n) \tag{1}$$

設在 P_i 點處有一質量

$$\mu_i \geqq 0, \tag{2}$$

而且質量的總和等於一:

$$\mu_0+\mu_1+\cdots+\mu_n=1。 \tag{3}$$

這些質量有一確定的重心 X，他的坐標是

$$x_1=\sum_{i=0}^{n}\mu_i p_{i1},\ x_2=\sum_{i=0}^{n}\mu_i p_{i2},\cdots,x_m=\sum_{i=0}^{n}\mu_i p_{im}。 \tag{4}$$

$\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_n$ 就叫做 P 點的重心坐標 (*baryzentrische Koordinaten*); 他們受 (2) 與 (3) 二條件的限制。所有的重心組成 $\mathfrak{R}^m$ 中的一個 (平直的) n 維單純形 $\mathfrak{S}^n$。$\mathfrak{S}^n$ 是實數空間中的一個閉子集。$P_0, P_1, \cdots, P_n$ 叫做 $\mathfrak{S}^n$ 的頂點 (*Ecke*)。只要頂點給定了，n 維單純形也完全確定了。所以 n 維單純形也可以用頂點表示。

若是行列式不等於零的平直變換，改換坐標 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 爲平行坐標 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$，(4)的兩端變換的情形相同，所以

$$\xi_1=\sum_{i=0}^{n}\mu_i\pi_{i1},\ \ \xi_2=\sum_{i=0}^{n}\mu_i\pi_{i2},\cdots,\ \ \xi_m=\sum_{i=0}^{n}\mu_i\pi_{im}。 \tag{5}$$

這裏的 $\pi_{i1}, \pi_{i2}, \cdots, \pi_{im}$ 是 P_i 在新坐標系中的坐標。所以用重心坐

*) 仿射幾何學的基本概念，未界說的，可參考 *Schreier-Sperner, Analytische Geometrie* (*Leipzig* 1931)。

標表示重心的方式,在所有的平行坐標系中相同。

設 $\mathfrak{S}^n$ 屬于平直空間 $\mathfrak{L}^n$。我們可以特別選取坐標系 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$,使其中的 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 恰是 $\mathfrak{L}^n$ 中的平行坐標。$\pi_{i,n+1}$, $\pi_{i,n+2}$, $\cdots$, π_{im} 因此都等於零,(5) 變成

$$\xi_1 = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \pi_{i1}, \quad \xi_2 = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \pi_{i2}, \cdots, \quad \xi_n = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \pi_{in}。 \tag{6}$$

若更進而選取從 P_0 到 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的矢 (*Vektor*) 做坐標系的基矢 (*Basisvektor*),因此就有 $\pi_{ii} = 1$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 其餘的 $\pi_{ij} = 0$, 而且 (6) 變成

$$\xi_1 = \mu_1, \xi_2 = \mu_2, \cdots, \xi_n = \mu_n。 \tag{7}$$

在這種坐標系中,重心坐標 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 與平行坐標相同;所以 $\mathfrak{S}^n$ 的點適合下列不等式:

$$\xi_1 \geqq 0, \xi_2 \geqq 0, \cdots, \xi_n \geqq 0,$$

$$\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \leqq 1。$$

單純形是實數空間的子集,所以是鄰域空間。他的任一點的 ε 鄰域,就是他與用這點做中心的 ε 球體的交集。

零維單純形是單獨的一點,一維單純形是一條線段,二維單純形是一個三邊形,三維單純形是一個四面體。

若是把 (2), (3), (4) 中的下標 n 改作 $n-1$, 這三個公式所確定的,恰是 n 維單純形 $\mathfrak{S}^n$ 的所有重心坐標 $\mu_n = 0$ 的點。所以這點集

組成一個 $n-1$ 維單純形，叫做 $\mathfrak{S}^n$ 的 $n-1$ 維面 (*Seite*) $\mathfrak{S}_n^{n-1}$，與頂點 P_n 對立。同樣的，頂點 P_i 與面 $\mathfrak{S}_i^{n-1}$ 對立。

$\mathfrak{S}^n$ 中那些點，他們某 $n-k$ 個重心坐標都等於零，而其餘 $k+1$ 個重心坐標遵守條件 (2) 與 (3) 的，組成 $\mathfrak{S}^n$ 的 k 維面。k 維面也是一個單純形 $\mathfrak{S}^k$，一維面單純形有一個特別的名稱，叫作 $\mathfrak{S}^n$ 的**棱** (*Kante*)。k 維面的頂點也是 $\mathfrak{S}^n$ 的頂點；反之，$\mathfrak{S}^n$ 的任意 $k+1$ 個頂點佈成 (*aufspannen*) 一個 k 維面單純形。$\mathfrak{S}^n$ 共有 $\binom{n+1}{k+1}$ 個 k 維面單純形。

要求得這 $n+1$ 個質量的重心，可先求 $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{n-1}$ 的重心 X' (P_n 的對立面 $\mathfrak{S}_n^{n-1}$ 中的一點)，然後再求積聚在 X' 處的質量 $\mu_0+\mu_1+\cdots+\mu_{n-1}$ 與在 P_n 處的質量 μ_n 的重心 X。X 必定在連接 X' 與頂點 P_n 的線段上。若是把質量 μ_n 綿續的從 1 減到 0 而同時不改變其餘的 n 個質量的比，X' 就不改變地位，但是 X 綿續的在這連接線段上移動，從 P_n 起，到 X' 止。所以這線段上每一點都屬于這 n 維單純形 $\mathfrak{S}^n$。因此可知 $\mathfrak{S}^n$ 是由連接 P^n 與對立面 $\mathfrak{S}_n^{n-1}$ 的所有的點的線段組成的。

設 P 是實數空間中的一個定點，$\mathfrak{M}$ 是實數空間中的一個點集，所謂在 P 點處**投影** $\mathfrak{M}$，就是用線段連接 P 與 $\mathfrak{M}$ 的所有的點。這些線段的全體叫做 $\mathfrak{M}$ 在 P 點處的**投影錐體**。n 維單純形 $\mathfrak{S}^n$ 就是他的一個 $n-1$ 維面在對立的頂點處的投影錐體。他也是繼續 n 次在一個零維單純形處投影的結果。例如，P_0 在 P_1 處的投影錐體是 $\mathfrak{S}^n$ 的一條棱；這棱在另一個頂點處的投影錐體是一個二維面，等等；最後，這

$n-1$ 維面在還未用過的頂點 P_n 處的投影錐體就是全個的 $\mathfrak{S}^n$。

n 維單純形的凸形性 (*Konvexität*) 是一重要性質。實數空間的一個閉集合若是含有其中任二點的連接線段,就叫做一個**凸形域**。一個凸形域恰屬于一個最低維的平直空間 $\mathfrak{L}^r$, $\mathfrak{L}^r$ 的維數就叫做這個凸形域的維數。對於這空間 $\mathfrak{L}^r$ 說,凸形域含有內點。其實,他含有 $n+1$ 個平直無關的點,所以也含有一個 n 維單純形;而對于 $\mathfrak{L}^r$ 說,這單純形含有內點。我們把這凸形域在 $\mathfrak{L}^r$ 中的界限叫做他的**邊緣** (*Rand*)。把他在 $\mathfrak{L}^r$ 中的內點叫做他的**中間點**(*mittlere Punkt*)。我們後來(第 V 章)再證明:我們能用**內在的**(不依賴于含有這凸形域的實數空間的)拓撲性質,來區別凸形域的邊緣與中間點。——我們必須注意中間點與內點的區別。只在凸形域的維數與含有他的空間的維數相同的時候,凸形域的中間點纔都是內點;否則凸形域的每一點都是界點。一個零維單純形由一個中間點組成。

一個凸形域 $\mathfrak{B}$ 在一點處的投影錐體還是一個凸形域。設 Q_1 與 Q_2 是錐體中的任二點。這兩點在 $\mathfrak{B}$ 中必定有二像點(不一定只有這二像點)。因爲這二像點的連接線段完全屬于 $\mathfrak{B}$,所以這線段的投影錐體就含有連接線段 $(Q_1 Q_2)$。

因此可知:因爲一點 P_0 是一個零維凸形域,又因爲 n 維單純形是繼續 n 次在一點處投影的結果,所以 n 維單純形是凸形域,而且是 n 維的。——不但如此,他還是含有他的 $n+1$ 個頂點的最小的凸形域。因此他也叫做這 $n+1$ 個點的**凸形包** (*konvexe Hülle*)。

因爲 n 維單純形是凸形域，所以有確定的邊緣；他的所有的面組成邊緣，其餘點都是中間點。——一個零維單純形無邊緣，只由一個中間點組成。

每一單純形有一確定的中心（*Mittelpunkt*），他的重心坐標全相等：

$$\mu_0=\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_n\left(=\frac{1}{n+1}\right)。$$

設有一單値的變換，把一個 n 維單純形 $\mathfrak{E}^n$ 的頂點換成一個 r 維的單純形 $'\mathfrak{E}^r$ $(r\leqq n)$ 的頂點；$\mathfrak{E}^n$ 的每一頂點換成 $'\mathfrak{E}^r$ 的一個頂點，而 $'\mathfrak{E}^r$ 的每一個頂點都是像點。這變換可擴充成 $\mathfrak{E}^n$ 的一個變換如下。設 $\mathfrak{E}^n$ 的頂點處都各有一個質量，而 X 是這些質量的重心。若 $\mathfrak{E}^n$ 的一點處有某質量，就設想在 $'\mathfrak{E}^r$ 中的像點處也有相等的質量。$'\mathfrak{E}^r$ 的這些質量確定一個重心 $'X$。這換 X 成 $'X$ 的變換是一個換 $\mathfrak{E}^n$ 成 $'\mathfrak{E}^r$ 的平直的（仿射的）變換；他變換 $\mathfrak{E}^n$ 的頂點成 $'\mathfrak{E}^r$ 的頂點的情形，與原來的頂點間的變換一致。所以給定了頂點間的一個變換，就也完全確定了這平直變換。若是 $r<n$，這平直變換叫做降秩的（*ausgeartet*）變換。在這種情形下，$\mathfrak{E}^n$ 至少有二頂點換成 $'\mathfrak{E}^r$ 的同一頂點。若是 $r=n$，這平直變換也是拓撲變換。——$\mathfrak{E}^n$ 的一面也平直的換成 $'\mathfrak{E}^r$ 的一面，而且後者是前者的頂點的像點所佈成的。若是二頂點有同一像點，這二頂點所佈成的棱就完全換成這一像點。

要求得這種平直變換的解析公式，我們在含有 $\mathfrak{E}^n$ 的平直空間 $\mathfrak{L}^n$ 中取定平行坐標系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，在含有 $'\mathfrak{E}^r$ 的平直空間 $'\mathfrak{L}^r$ 中取定平行坐標系 $'\xi_1,{}'\xi_2,\cdots,{}'\xi_r$。設

$$\pi_{ij} \qquad (i=0,1,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$$

分別是 $\mathfrak{S}^n$ 的頂點 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ 的坐標，

$$'\pi_{ik} \qquad (i=0,1,\cdots,n;\ k=1,2,\cdots,r)$$

分別是像點 $'P_0, 'P_1, \cdots, 'P_n$ 的坐標 (其中自然可以有若干組相同的點)。若在 P_i 點處的質量是 μ_i, 在像點 $'P_i$ 處的質量也就是 μ_i。因爲方程式 (4), $\mathfrak{S}^n$ 中的質量的重心 X 的坐標是

$$\xi_1 = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \pi_{i1}, \quad \xi_2 = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \pi_{i2}, \cdots, \quad \xi_n = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \pi_{in}, \tag{8}$$

$'\mathfrak{S}^r$ 中的質量的重心 $'X$ 的坐標是

$$'\xi_1 = \sum_{i=0}^{n} \mu_i\,'\pi_{i1}, \quad '\xi_2 = \sum_{i=0}^{n} \mu_i\,'\pi_{i2}, \cdots, \quad '\xi_r = \sum_{i=0}^{n} \mu_i\,'\pi_{ir}。 \tag{9}$$

因爲 P_i 平直無關，我們能從方程式(8)與

$$\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_n = 1$$

解出 $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n$, 然後替入方程式 (9), 得着如下的一組一次方程式：

$$'\xi_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j}\xi_j, \quad '\xi_2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j}\xi_j, \cdots, \quad '\xi_r = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{rj}\xi_j。$$

因此恰有確定的換 $\mathfrak{L}^n$ 成 $'\mathfrak{L}^r$ 的平直變換存在，他依給定的情形換 $\mathfrak{S}^n$ 成 $'\mathfrak{S}^r$。

我們用頂點排列的一個次序，與由偶置換 (*Permutation*)*) 改成

*) 可參看 *B. L. van der Waerden, Moderne Algebra* (*Berlin* 1930) *I*, 頁 24.

的次序,來確定一個單純形的**定向**。例如 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ 這次序就確定一個**定向單純形** (*orientiertes Simplex*) E^n (用臘丁字母表示定向單純形,以別于不定向的單純形 (*nichtorientiertes Simplex*); 這定向的單純形我們寫作

$$E^n = +(P_0 P_1 \cdots P_n)。$$

交換 P_0 與 P_1 的次序,就改變了單純形的定向;我們用

$$-E^n = -(P_0 P_1 \cdots P_n) = +(P_1 P_0 \cdots P_n)$$

表示相反的定向單純形。若是一個不定向的單純形,也用頂點表示,我們就寫作

$$\mathfrak{E}^n = (P_0 P_1 \cdots P_n),$$

不加正負號。 n 維單純形頂點間的一個置換,確定這單純形自身的一個平直變換。定向的定義與這平直變換的行列式的正負有密切關係。偶置換相當于一個正行列式,奇置換相當于一個負行列式。 因爲我們知道 $n+1$ 個頂點的任一置換可以化作若干個二頂點的對換 (*Transposition*); 並且由二頂點 P_1 與 P_2 的對換所確定的平直變換,有一個負行列式。要證明後一句話, 只要取 P_0 做原點,取連接 P_0 與其他頂點的線段做基矢,確定一個坐標系。然後這平直變換的方程式是

$$x_1' = x_2,\ x_2' = x_1,\ x_3' = x_3,\ \cdots,\ x_n' = x_n,$$

所以他的行列式等于 -1。在 $n=1$ 的時候,這證法雖不能用,這結論却仍成立。——從幾何學的觀點說, 一個正四面體的偶置換就與奇置換不同: 給定了任一個偶置換, 就有一個適當的繞四面體中心的剛體

旋轉存在,他變換頂點的情形與這置換一致;奇置換却不然。

爲形式上簡單起見,我們也規定零維單純形的定向:在表示他的字母前加上一個正號或負號。

在 $n=1$ 的時候,$+(P_0\,P_1)$ 確定一個定向的線段;P_0 是"起點",P_1 是"終點"。一個定向的一維單純形可以用一個帶有箭頭的線段表示。在 $n=2$ 的時候,$+(P_0\,P_1\,P_2)$ 與由偶置換改成的 $+(P_1\,P_2\,P_0)$,$+(P_2\,P_0\,P_1)$ 都確定這三個頂點的同一個循環次序,所以確定三邊形週的一個方向。所以三邊形的定向可以用一個環形箭頭 (*Kreispfeil*) 表示。在 $n=3$ 的時候,$+(P_0\,P_1\,P_2\,P_3)$ 確定一個螺旋方向。一個螺旋體繞着通過頂點 P_0 的軸旋轉時,他的旋轉方向可以由 P_0 的對立面的頂點的次序斷定。所以這螺旋體是左向或右向的,可以由四面體的定向斷定。

我們前此所討論的都是實數空間中的單純形與他們的平直變換。若是把這種的一個 n 維單純形 $\mathfrak{e}^n$ 拓撲的變換成另一鄰域空間 $\mathfrak{M}$($\mathfrak{M}$ 的每一點都是像點),我們也把這像集叫做一個單純形 $\mathfrak{E}^n$;更正確的說,我們把他叫做拓撲的單純形;$\mathfrak{e}^n$ 是 $\mathfrak{E}^n$ 的原底 (*Urbild*)。設同一 $\mathfrak{M}$ 也可以看作是另一個原底單純形 $\bar{\mathfrak{e}}^n$ 的像集 $\mathfrak{E}^n$。若是能平直的變換 $\mathfrak{e}^n$ 成 $\bar{\mathfrak{e}}^n$,而且 $\mathfrak{e}^n$ 與 $\bar{\mathfrak{e}}^n$ 中相對應的點在 $\mathfrak{M}$ 中有同一像點,我們就說這兩個拓撲單純形 $\mathfrak{E}^n$ 與 $\overline{\mathfrak{E}}^n$ 相等 (*gleich*);而且只有在這種情形下,我們纔說他們相等。在拓撲單純形中,我們也借用他的原底的頂點,i 維面,中心,二點的連接直線段,邊緣,中間點等概念。我們却不說拓撲

單純形中的兩點間的距離，因為平直變換就改變距離。前此所討論的實數空間中的平直單純形當然能看作是拓撲單純形；在這種情形下，原底與像集相同，變換是么變換。此後若只說單純形，不加形容詞，都專指拓撲單純形而言。拓撲單純形當然也可以是平直單純形。

例如用四面形的中心做投影中心，把四面形投影成外接球面，四面形的四個二維的平直單純形就投影成球面上的四個拓撲單純形（球面三邊形）。

與平直單純形一樣，一個拓撲單純形也有兩個定向，可以用頂點的次序確定。

設 $\mathfrak{E}^n$ 與 $'\mathfrak{E}^n$ 是兩個拓撲單純形，$\mathfrak{e}^n$ 與 $'\mathfrak{e}^n$ 分別是他們的原底。$\mathfrak{e}^n$ 與 $'\mathfrak{e}^n$ 間一個變換很顯然的確定 $\mathfrak{E}^n$ 與 $'\mathfrak{E}^n$ 間的一個變換。若是前者是一個平直變換，後者這一個拓撲變換也就叫做 $\mathfrak{E}^n$ 與 $'\mathfrak{E}^n$ **這兩個拓撲單純形間的一個平直變換**。

§10 單純的複合形

聯合單純形成複合形。我們此後所討論的，只限於複合形這種特別的鄰域空間。第二至第五章，第七第八與第十一章論普遍的複合形，第六第九與第十章論特別的，叫做流形的，複合形。複合形所以是本書此後討論的中心。

複合形是有一個單純剖分 (*simpliziale Zerlegung*) 的鄰域空間。設一個鄰域空間 $\mathfrak{R}$ 中有一組（有限個，或可數的無窮多的）從零維到 n

維的拓撲單純形，而且這一組中每一單純形的每一個面單純形還屬于這一組。若是這一組單純形滿足下列四個條件，他就叫做 $\mathfrak{K}$ 的一個**單純剖分**:

(k_1) $\mathfrak{K}$ 的每一點至少屬于一個單純形。

(k_2) $\mathfrak{K}$ 的每一點只屬于有限個單純形。

(k_3) 兩個單純形或無共點，或其中一個是另一個的面，或他們的交集恰是他們的一個共面。——我們這裏說兩個拓撲單純形有一個共面，就用單純形相等的定義。這定義我們應該再提一次。假設我們所說的有一個共面的兩個單純形是二維的。根據這定義，在這兩個平直原底三邊形拓撲的變換到 $\mathfrak{K}$ 的時候，不但這兩個平直原底面必須換成 $\mathfrak{K}$ 中的同一個點集，而且他們的，平直對應（不是任意拓撲對應）下的對應點，必須換成同一個像點。

(k_4) 設 $\mathfrak{K}$ 的一點 P 只屬于單純形*) $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2 \cdots, \mathfrak{E}_r$, 而且 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{E}_1)$, $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{E}_2), \cdots, \mathfrak{U}(P|\mathfrak{E}_r)$ 分別是 P 在 $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \cdots, \mathfrak{E}_r$ 中的鄰域。連集 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{E}_1) + \mathfrak{U}(P|\mathfrak{E}_2) + \cdots + \mathfrak{U}(P|\mathfrak{E}_r)$就是 P 在 $\mathfrak{K}$ 中的一個鄰域 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{K})$。

若是一鄰域空間能如此剖分成單純形，他就叫做一個複合形。一個複合形有許多不同的單純剖分。若是我們只注意其中的一個，我們就把如此剖分了的複合形叫做**單純的複合形**，或者更正確的說，把他叫做單純剖分了的複合形，或有一個單純剖分的複合形。——此外，若是

*) 單純形 $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \cdots, \mathfrak{E}_r$ 的維數係從零到 n。維數指標通常都寫在右上角，但這裏沒有寫出。

$\mathfrak{K}$ 上的一個單純形是另一個的面單純形，我們就說這兩個單純形關聯 (*inzident*)。若是一個單純的複合形至少含有一個 n 維單純形，但不含有更高維的單純形，他就叫做 n 維的複合形。

我們將可看出，所有的拓撲的重要圖形都是複合形。下述的定理闡明此點。

預備定理：設實數空間 $\mathfrak{R}^m$ 中的一個點集 $\mathfrak{K}$ 由有限個或可數的無窮多的，從零維到 n 維的平直單純形組成，而且這些單純形與他們的面單純形滿足條件 (k_3)（這條件說，單純形不互相割開或穿透）之外，還滿足下述的條件：$\mathfrak{K}$ 的任一點都有一鄰域，只與有限個單純形有共點。$\mathfrak{K}$ 就是一個單純的複合形。

證明：$\mathfrak{K}$ 是實數空間的一個子集，所以是一個鄰域空間。根據定理的假設，$\mathfrak{K}$ 的單純形與他們的面單純形，不但滿足 (k_3)，還顯然滿足 (k_1) 與 (k_2)；所以只需要證明他們也滿足 (k_4)。(k_4) 中的 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{E}_i)$ 含有 P 在 $\mathfrak{K}_i$ 中的某一個 ε_i 鄰域；這 ε_i 鄰域恰含有 $\mathfrak{E}_i$ 中所有的，在 $\mathfrak{R}^m$ 中與 P 的距離小于 ε_i 的點。取一個比 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$ 都小的正數 η。根據定理的假設，還能設 η 如是的小，使 P 的 η 鄰域只與單純形 $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2, \cdots, \mathfrak{E}_r$ 有共點。所以 P 在 $\mathfrak{K}$ 中的 η 鄰域完全屬于 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{E}_1) + \mathfrak{U}(P|\mathfrak{E}_2) + \cdots + \mathfrak{U}(P|\mathfrak{E}_r)$，所以這連集是 P 在 $\mathfrak{K}$ 中的一個鄰域。條件 (k_4) 也滿足了。

例：1．球面是一個複合形。其實，根據上述的定理，實數空間中的四面形是一個單純的複合形。設四面形的中心就是球心，從球心投影四面形成球面。這投影是一個拓撲變換。四面形的拓撲像組成球面的一個單純剖分。若是用八面形或二十面形，我們得着球面的別種單

純剖分。參看 § 14。

2. 實數平面能分成無窮多的等邊三邊形，所以是一個複合形。

3. 實數平面中的一個三邊形自然是一個複合形。但若是把他剖分成無窮多的三邊形，如同圖 32 中所表示的，頂點 P 就不能滿足條件 (k_4)，所以這種剖分不是單純剖分。因爲，P 只屬于零維單純形 P，不屬于別個單純形，所以 (k_4) 中的連集 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{E}_1)+\mathfrak{U}(P|\mathfrak{E}_2)+\cdots+\mathfrak{U}(P|\mathfrak{E}_r)$ 只是 P 這一點，不是一個 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{K})$——我們在 § 14 中再舉他例。

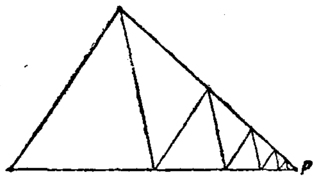


圖 32

爲將來應用起見，我們再說明一個單純的複合形 $\mathfrak{K}$，如何能由他的個別的單純形叠合而成。我們設想單純剖分中的每一單純形在適當高維的一個實數空間中有一個原底，而且這些原底無共點。這些原底組成一個鄰域空間 $\mathfrak{M}$。因爲每一個原底的單純形拓撲的變換成 $\mathfrak{K}$ 的一個子集，所以 $\mathfrak{M}$ 能綿續的變換成 $\mathfrak{K}$。若是把 $\mathfrak{M}$ 中所有的點，在 $\mathfrak{K}$ 中有同一像點的，規定做相抵點，由叠合 $\mathfrak{M}$ 中相抵點而成的，恰是這單純形的複合形 $\mathfrak{K}$。證明如下：設相當于 $\mathfrak{K}$ 中任一點 P 的每一原來的點，都任意取定了一個鄰域。設 $\mathfrak{U}$ 是這些鄰域的連集。因爲 $\mathfrak{K}$ 是複合形，根據 (k_4)，$\mathfrak{U}$ 的像集是 P 的一個鄰域。再根據 § 8 中的定理 II，$\mathfrak{K}$ 就是由叠合 $\mathfrak{M}$ 中相抵點而成的空間。

§11 單純複合形的表格

因爲 (k_3)，一個複合形的單純剖分中，任意兩個單純形不含有完全相同的頂點。根據這性質，我們只要有一個清單，列出複合形的所有頂點如何分組的佈成單純形，就能確定這個複合形。這清單就叫做複合

形的表格 (*Schema*)。圖 33 中所表示的複合形由一個三邊形與一條線段組成。他的表格如下：

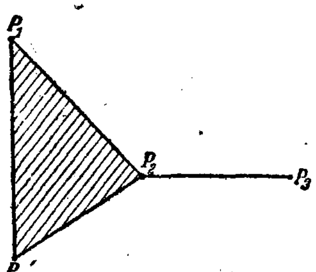


圖 33

$(P_0P_1P_2)$; (P_0P_1); (P_1P_2); (P_2P_0); (P_2P_3); (P_0); (P_1); (P_2); (P_3)。

我們將來要用另一種的表格——關聯矩陣 (*Inzidenzmatrix*) 來表示一個複合形。

若是兩個單純的複合形 $\mathfrak{K}$ 與 $\mathfrak{K}'$ 的表格相同，他們必定同胚。更正確的說，$\mathfrak{K}$ 與 $\mathfrak{K}'$ 間必有一拓撲變換，而且這拓撲變換在每兩個對應的單純形間是**平直的變換**。在求得這拓撲變換之先，我們要注意 $\mathfrak{K}$ 的任一點 P 恰是單純剖分中的一個單純形的中間點。因為根據 (k_1)，P 至少屬于一個單純形；P 所以是這單純形的，或他的一個面單純形的，中間點。根據 (k_3)，P 不會是兩個單純形的中間點。

設 P 是 $\mathfrak{K}$ 中的 $\mathfrak{E}$ 這單純形的中間點。我們先求出 $\mathfrak{E}$ 的頂點的對應頂點。這些對應頂點佈成 $\mathfrak{K}'$ 中的一單純形 $\mathfrak{E}'$，而且頂點間的一個對應確定一個換 $\mathfrak{E}$ 成 $\mathfrak{E}'$ 的平直變換。設 P 的像點是 P'。這換 P 成 P' 的變換就是我們要求得的，換 $\mathfrak{K}$ 成 $\mathfrak{K}'$ 的變換。這變換顯然是 $\mathfrak{K}$ 的點與 $\mathfrak{K}'$ 的點間的一個一一變換。*) 我們要證明他也是拓撲變換。設 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{K}')$ 是 P' 在 $\mathfrak{K}'$ 中的一個鄰域，$\mathfrak{E}'_1, \mathfrak{E}'_2, \cdots, \mathfrak{E}'_r$ 是含有 P'

*)（讀者試證此事實。）

點的單純形。根據鄰域空間的子集中的鄰域定義，$\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{K}')$ 與單純形 $\mathfrak{E}'_i$ ($i = 1, 2, \cdots$, 或 r) 的交集是 P' 在 $\mathfrak{E}'_i$ 中的一個鄰域。我們求得的平直變換，拓撲的換 $\mathfrak{E}_i$ 成 $\mathfrak{E}'_i$，所以 $\mathfrak{E}_i$ 中有一個鄰域 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{E}_i)$ 與 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{E}'_i)$ 對應。根據 (k_4)，連集 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{E}_1) + \mathfrak{U}(P|\mathfrak{E}_2) + \cdots + \mathfrak{U}(P|\mathfrak{E}_r)$ 是 P 在 $\mathfrak{K}$ 中的一個鄰域。這鄰域在 $\mathfrak{K}$ 中的像集當然屬于 $\mathfrak{U}(P'|\mathfrak{K}')$，所以這換 $\mathfrak{K}$ 成 $\mathfrak{K}'$ 的變換綿續。因爲 $\mathfrak{K}$ 與 $\mathfrak{K}'$ 的地位可以交換，所以逆變換也綿續。所以我們求得的變換是一個拓撲變換。

設有一個有限的或無窮的集合 $\mathfrak{W}$，其中若干子集已界說做"特出的" (*ausgezeichnet*) 子集。我們現在要解答下述問題：在何種情形下，$\mathfrak{W}$ 纔是一個複合形的表格？那就是說，在何種情形下，$\mathfrak{W}$ 中的元素與複合形的頂點成一一對應，而且 $\mathfrak{W}$ 的特出的子集與單純形的頂點集合成一一對應？下述的三個條件都必要：

(Sch_1) 特出的子集的每一個子集還是一個特出的子集。因爲每個單純形所有的面單純形還屬于複合形。

(Sch_2) 一個特出的子集至多含有 $n+1$ 個元素。

(Sch_3) 每一個元素只屬于有限個特出的子集。因爲 (k_2)。

要證明這些條件也充足，我們在 $2n+1$ 維的實數空間 $\mathfrak{R}^{2n+1}$ 中作一個適當的平直複合形。按照 $\mathfrak{W}$ 中有多少元素，也在 $\mathfrak{R}^{2n+1}$ 中取同樣多的點 $P_1, P_2, \cdots$，並且規定這些點與 $\mathfrak{W}$ 的元素間的一個一一對應。取這些點的時候，還能使他們滿足下列二條件：

(1) 他們無凝點;

(2) 只要 $k\leqq 2n+1$,每 $k+1$ 個點都佈成一個 k 維的平直空間;那就是說,他們屬于一個 k 維平直空間,但不屬于一個更低維的平直空間。

假定已經取定的 r 個點 $P_1, P_2, \cdots, P_r$ 滿足條件 (2),那就是說,其中任意 k $(k\leqq 2n+1)$ 個點都佈成一個平直空間。因爲這 r 個點所佈成的這種平直空間只有有限個,而且他們的維數至高是 $2n$,我們能在這些平直空間之外,選取一點 P_{r+1},他的 x_1 坐標減一還大于 $P_1, P_2, \cdots, P_r$ 中的每一點的 x_1 坐標。如此取定的 $P_1, P_2, \cdots, P_{r+1}$ 還滿足條件(2),因此所有的點 $P_1, P_2, \cdots$ 也滿足條件(2)。而且條件(1)也滿足了:因爲,即使所有的點組成無窮的點集,他們的 x_1 坐標旣無限的增加,他們不會有凝點的。

$\mathfrak{W}$ 中任一特出的子集的 $p+1$ 個元素的對應點能在 $\mathfrak{R}^{2n+1}$ 中佈成一個 p 維單純形。我們使這單純形與這子集對應。因此我們得着 $\mathfrak{R}^{2n+1}$ 中有限個或無窮多的,由零維到 n 維的單純形。我們用 §10 中的預備定理,能證明這些單純形的集合 $\mathfrak{K}$ 是一個複合形如下。設 $\mathfrak{S}^p$ 與 $\mathfrak{S}^q$ 是 $\mathfrak{K}$ 中的任二單純形,共有 $k+1$ 個不同的頂點。因爲 $q\leqq n$ 與 $p\leqq n$,所以 $k+1\leqq 2n+2$。根據條件 (2),這 $k+1$ 個頂點在 $\mathfrak{R}^{2n+1}$ 中佈成一個單純形 $\mathfrak{S}^k$,{$\mathfrak{S}^k$ 可以不屬于 $\mathfrak{K}$。} 因 $\mathfrak{S}^p$ 與 $\mathfrak{S}^q$ 都是 $\mathfrak{S}^k$ 的面單純形,所以 $\mathfrak{S}^p$ 與 $\mathfrak{S}^q$ 的交集或空無所有,或恰是一個共面。我們必須證明 $\mathfrak{K}$ 中任一點 Q 都有一個鄰域,只與有限個單純形有共點。用 Q

作中心，任意一個正數 ε 作半徑，作一球。設 $\bar{x}_1$ 是 Q 的 x_1 坐標。$\mathfrak{K}$ 的頂點的 $\bar{x}_1$ 坐標小于 $x_1+\varepsilon$ 的只有有限個。$\mathfrak{K}$ 中的單純形與這些頂點關聯的也只有有限個 (Sch_3)。只有這些單純形纔能與 Q 處的 ε 球體有共點。根據預備定理，$\mathfrak{K}$ 是一個複合形。——根據 $\mathfrak{K}$ 的作法，$\mathfrak{K}$ 的表格恰就是 $\mathfrak{W}$。

下述定理也同時證明了：

任意一個 n 維的複合形，都能在 $2n+1$ 維的實數空間中用一平直的複合形表出；那就是說，給定了任意一個 n 維複合形，$\mathfrak{R}^{2n+1}$ 中必有一個平直複合形存在，他的表格與給定的複合形的表格相同。

複合形的表格比複合形的原來的定義還簡單，他使我們對于可能的單純複合形的構造有更好的瞭解。不但如此，表格還開闢一研究拓撲學的途徑：建立嚴格的組合的 (*streng kombinatorische*) 拓撲學（本書所不討論的）。在這種拓撲學中，我們不把表格看作是用鄰域空間界說的複合形的一種寫法，却把他自身當作是單純的複合形的定義；再用某種變換（例如組合的重分 (*Unterteilung*)）推演出別個"能互相元變換"(*elementarverwandt*) 的複合形。能互相元變換的關係，在曲面拓撲學中就有例子，表明如何一步一步的運用這種關係(§37)。在嚴格的組合的拓撲學中，個別的單純形所以是由有限個頂點組成的特出的集合，並非塡滿了點的綿續空間。總之，嚴格的組合的拓撲學中的基本對像是表格的（至多可數的無窮多的）點與他們的特出子集，基本關係是能互相元變換的關係；但本書中拓撲學的基本對象是（綿續多的）點與他們的鄰域，基本關係是綿續變換。[10]

§12　有限複合形，純粹複合形，匀齊複合形

一個單純的複合形若是由有限個或無窮多的單純形組成，就分別叫做**有限或無窮複合形**。有限複合形中每一無窮點集至少有一凝點；因爲這複合形只有有限個單純形，所以必定有一個單純形含有點集中無窮多的點。反之，$\mathfrak{K}$ 若是一無窮複合形，他的所有的單純形的中心

就組成一無凝點的無窮點集。設 P 是 $\mathfrak{K}$ 的任一點。根據 (k_4)，凡含有 P 的單純形 $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \cdots, \mathfrak{S}_r$ 的連集是 P 的一個鄰域；這鄰域只含有這集合中的有限個點，這些單純形與他們的面單純形的中心。所以 P 不是這集合的凝點。這就證明了"有限複合形"與"無窮複合形"都是拓撲的不變性：**一個有限的單純的複合形不會與一個無窮的同胚**，換句話說，若是一個複合形可以單純的剖分成有限個單純形，他就不能單純的剖分成無窮多的單純形（參見 §10 中的例 3）。因此我們才可以說有限或無窮複合形，略去單純的這形容詞不用。—— 球面是一有限複合形，球面減去了一個點，或"刺破了一點"的球面，即實數平面，却是一個無窮複合形。

在一個單純的複合形 $\mathfrak{K}$ 中，任取非空的一組單純形。這些單純形與他們的面單純形組成 $\mathfrak{K}$ 的一個**子複合形** (*Teilkomplex*) $\mathfrak{K}_1$。$\mathfrak{K}_1$ 還是一個單純的複合形。

設 $\mathfrak{K}_1$ 是 $\mathfrak{K}$ 的一個子複合形，而且設，若是 $\mathfrak{K}_1$ 含有 $\mathfrak{K}$ 中的某一單純形 $\mathfrak{S}$ 的一個面單純形，就也含有 $\mathfrak{S}$。這種的 $\mathfrak{K}_1$ 叫做(在 $\mathfrak{K}$ 中的)**孤立的** (*isoliert*) 子複合形。我們只有一種方法，把 $\mathfrak{K}$ 分作最多數 τ (也可以是 ∞) 個孤立的無共點的子複合形。若是 $\tau = 1$，$\mathfrak{K}$ 就叫做**連通** (*Zusammenhängend*) 複合形。一個連通的單純的複合形也可以用下述特徵確定：他的任二頂點 P 與 Q 有一條連接的**棱道** (*Kantenweg*)。所謂棱道就是一串定向的棱，其中第一棱的起點是 P，最末一棱的終點是 Q，其餘的任一棱的終點與次一棱的起點相同。

孤立的子複合形是拓撲不變的。因爲可以只用拓撲不變的特徵界說孤立的子複合形如下：$\mathfrak{K}$ 的一個孤立的子複合形是 $\mathfrak{K}$ 的一個確含有點的，開的，而又同時閉的子集，卽 $\mathfrak{K}$ 的一個確含有點的無界限的子集。

證明：一個孤立的子複合形顯然是一個確含有點的無界限的子複合形。——反之，設 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{K}$ 的確含有點的無界限的子集。若 P 是 $\mathfrak{N}$ 中的一點，$\mathfrak{E}^i$ 是 $\mathfrak{K}$ 的單純剖分中的一個含有 P 的單純形，我們只需要證明 $\mathfrak{E}^i$ 完全屬于 $\mathfrak{N}$。假設 $\mathfrak{E}^i$ 中有一不屬于 $\mathfrak{N}$ 的點 P'。$\mathfrak{E}^i$ 中有一條連接 P 與 P' 的直線段 PP'。我們用一個參數 s 表示這線段上的點，而且在 s 從 0 增長到 1 的時候，相當于 s 的點依同一方向從 P 走到 P'。若 $\bar{s}$ 是所有屬于 $\mathfrak{N}$ 的點的參數值的上限，而且相當于 $\bar{s}$ 的點是 $\bar{P}$。$\bar{P}$ 的任一鄰域就含有 $\mathfrak{N}$ 的點與非 $\mathfrak{N}$ 的點，所以 $\bar{P}$ 是 $\mathfrak{N}$ 的一個界點。這與定理的假設矛盾。因此 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{K}$ 的一個子複合形 $\mathfrak{K}_1$，而且，若是 $\mathfrak{K}$ 的一點 P 屬于 $\mathfrak{K}_1$，$\mathfrak{K}$ 中的含有 P 的單純形就也屬于 $\mathfrak{K}_1$，這就證明了 $\mathfrak{K}_1$ 是一個孤立的子複合形。

因爲孤立的子複合形的拓撲不變的特徵，**連通性與 τ 還數也都是拓撲不變性。**

設 $\mathfrak{K}$ 是一個 n 維的單純複合形。若是 $\mathfrak{K}$ 的每一個 k 維單純形 ($k < n$) 至少是他的一個 n 維單純形的面單純形，$\mathfrak{K}$ 就說是**純粹的** (*rein*) 單純複合形；否則說是**非純粹的**單純複合形。所謂純粹的複合形 $\mathfrak{K}$ 的**邊緣**，就是他的所有的，只與他的奇數個 n 維單純形關聯的，$n-1$ 維單

純形的連集。 例如,我們的純粹複合形是歐幾里得空間中的恰有一個共棱的四個三邊形面片,(如同一本張開的四頁的書),除去這共棱之外,三邊形的其他棱組成這複合形的邊緣。——這裏的邊緣的定義與從前的單純形的邊緣 (頁 54) 一致, 因為單純形就是一個純粹的複合形。凸形域 (頁 53) 與元體 (*Element*, 頁 71) 都可以看作是純粹的複合形 (頁 73);他們的邊緣的定義也都包括在這裏的定義之內。

"n 維","純粹"與"邊緣"的拓撲不變性,在第五章中纔能證明。 因為 n 維的不變性, 我們用右上指標表明複合形 $\mathfrak{K}$ 的維數, 如同 $\mathfrak{K}^n$, 纔有意義。現在我們只能說明零維的拓撲不變性: 零維的複合形是由孤立的點所組成的複合形, 其中每一點是他自身的一個鄰域。 高維的複合形却非如此。

勻齊的 (*homogen*) 複合形是複合形中最特出的一種。 若是一個 n 維的複合形的每一點,有一個鄰域與 n 維球體的內域同胚,這複合形就叫做勻齊的複合形。所謂 n 維球體的內域,就是 n 維實數空間中的適合不等式 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1$ 的點所組成的。 ——例如,球面是一個勻齊的二維複合形; 圓域 (包含邊緣圓) 却不然, 因為在第五章就要證明, 界點不滿足勻齊的條件。 四面形上的棱複合形 (*Kantenkomplex*) 也不是勻齊的一維複合形。——雖然勻齊複合形的直覺意義非常明顯 (三維的歐幾里得空間就是一勻齊的複合形),要用算學的方式去研究三維以上的這種複合形却非易事 (§68), 所以我們不能把他們作為討論的中心。

§13 法重分

我們此後的目的,是要從複合形的一個給定了的單純剖分,推演出這複合形的,不依賴于這特別選定的剖分的性質。要達到我們的目的,我們無法先用特徵來確定一個複合形的所有的剖分;因爲可能的剖分太多了。我們必須用重分的方法,從一個複合形的一個給定了的單純剖分,得着別種剖分。只在把一個給定了的單純剖分重分到任意細密的程度之後,我們纔能研究他與任一剖分的關係,研究他與複合形當作點集時的關係(第六章)。

重分一個單純的複合形,是把每一單純形剖分成更小的子單純形,使他們還組成一個單純的複合形。重分的種類很多,我們將來所需要的只是一種,叫做**法重分**(*Normalunterteilung*)。一個單純的複合形的這種的重分的步驟如下:複合形的每一棱用中點分做兩個一維單純形。然後在每一個二維單純形的中心處,投影他的重分過的邊緣單純形。拓撲單純形的中心,我們已用平直原底單純形下過定義(頁 57);同樣的,我們在原底中先有了投影重分過的邊緣棱的定義,然後再引申到拓撲單純形上去。因爲一個一維單純形的投影錐體是一個二維單純形,每一個二維單純形因此重分成六個二維子單純形。——然後再在每一個三維單純形的中心處,投影他的重分過的邊緣面。每一個三維單純形因此重分成 4! 個三維子單純形。此外還新增加了二維的,一維

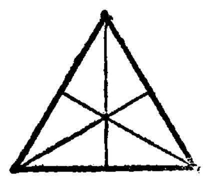


圖 34

的與一個零維的單純形（投影中心）。繼續如此，最後重分所有的 n 維單純形。圖 34 表出一個二維單純形的法重分。

一個單純的複合形 $\mathfrak{K}$ 的法重分還是一個單純的複合形。其實，只要在實數空間中取一個平直的複合形代表 $\mathfrak{K}$，取前者的法重分代表 $\mathfrak{K}$ 的法重分，然後利用 §10 中的預備定理，就可以證明 $\mathfrak{K}$ 的法重分是一個單純的複合形。

因爲單純的複合形的法重分是一個單純的複合形，我們還可以再做一次法重分。我們能繼續如此，做一個複合形的第 g 次的法重分。g 若是適當的大，子單純形就可以任意的小。更正確的說，我們有下述預備定理。

預備定理：設 $\mathfrak{E}^n$ 是一個平直的 n 維單純形，$\mathfrak{E}_1{}^n$ 是 $\mathfrak{E}^n$ 的第 g 次的法重分中任意一個子單純形。$\mathfrak{E}^n$ 中有一個同位相似的單純形，他含有 $\mathfrak{E}_1{}^n$，而且比 $\mathfrak{E}^n$ 小 $\left(\frac{n}{n+1}\right)^g$ 倍。

證明：我們只需要證明專款 $g=1$。因爲用這專款 g 次，我們的預備定理就證明了。——設 E^n 是 $\mathfrak{E}^n=(P_0\,P_1\cdots P_n)$ 中的，我們所注意的，子單純形。我們可以假定 E^n 的頂點 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 恰分別是面 $(P_0), (P_0\,P_1), \cdots, (P_0\,P_1, \cdots P_n)$ 的中心，仍舊不失去論證的普遍性。M_i 的重心坐標（頁 54）是

$$\mu_0=\mu_1=\cdots=\mu_i=\frac{1}{i+1},\ \mu_{i+1}=\mu_{i+2}=\cdots=\mu_n=0。\qquad(1)$$

取從 P_0 到 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的矢做平行坐標係 $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ 中的基矢，使坐標 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 分別與 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 相同（頁 51）。$\mathfrak{E}^n$ 因

此由下列不等式確定：

$$\xi_1 \geqq 0, \xi_2 \geqq 0, \cdots, \xi_n \geqq 0, \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \leqq 1。\qquad (2)$$

現在且看與 $\mathfrak{E}^n$ 同位相似的，縮小 $\frac{n}{n+1}$ 倍的單純形 $'\mathfrak{E}^n$：

$$\xi_1 \geqq 0, \xi_2 \geqq 0, \cdots, \xi_n \geqq 0, \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \leqq \frac{n}{n+1}。\qquad (3)$$

因爲 $M_i\,(i = 0, \cdots, n)$ 的坐標 (1) 適合不等式 (3)，所以 E^n 的頂點屬于 $'\mathfrak{E}^n$；因凸形性，所以 E^n 自己屬于 $'\mathfrak{E}^n$。

習題：設一個鄰域空間已剖分成單純形，滿足 (k_1)，(k_2) 與 (k_4)，而且任二單純形或無共點，或關聯，或有一個或數個共面。試證所有的單純形的法重分組成一個單純的複合形。[對於複合形的維數用算學歸納法，證明所有的單純形的法重分也滿足 § 10 中的 (k_3)，即證明任二單純形若有共點又非關聯，他們的交集就只是一個共面]

§14 複合形的例子

複合形的概念非常普遍。爲使我們了解他的範圍起見，我們列舉幾種常見的而又重要的鄰域空間，證明他們都是複合形。這幾種最簡單的複合形，我們將來時常引用。

n 維元體

n 維的實數空間 $\mathfrak{R}^n$ 中的點，他們的坐標適合下列不等式

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqq 1 \qquad (n \geqq 1) \quad (1)$$

的，組成一個集合，叫做實數空間的**單位球體**。他的拓撲的像集叫做 n **維元體**。$n = 2$ 的球體，叫做**元面片** (*Elementarflächenstück*)。適合 (1) 中等號的點組成球體的邊緣；他的拓撲的像集是**元體的邊緣**（參看頁 54）。邊緣的拓撲不變的意義在第五章中我們纔能第一次說明。

$\mathfrak{R}^n$ 中的每一凸形的 n 維域 $\mathfrak{B}$ 是一個 n 維元體。

證明: 用 $\mathfrak{B}$ 的一個中間點 O 做中心，做一個完全屬于 $\mathfrak{B}$ 的球體 $\mathfrak{k}$。設 $\bar{\mathfrak{k}}$ 是 $\mathfrak{k}$ 的邊緣 (圖 35)。 我們先證明在 O 點處的射線與 $\mathfrak{B}$ 的邊緣 $\bar{\mathfrak{B}}$ 恰一有共點。因爲 $\mathfrak{B}$ 是囿集，一射線至少通過 $\mathfrak{B}$ 的一個邊緣點。又因爲 $\mathfrak{B}$ 的邊緣 $\bar{\mathfrak{B}}$ 是 $\mathfrak{R}^n$ 中的一個閉子集(頁 43)，一條射線與 $\bar{\mathfrak{B}}$ 的交集必含有一個離 O 最遠的點 $\bar{P}$。我們現在就是要證明，除 $\bar{P}$ 點之外，$O\bar{P}$ 線段上的點都是 $\mathfrak{B}$ 的中間點: 用線段連接 $\bar{P}$ 與 $\mathfrak{k}$ 的所有的點。 因爲 $\mathfrak{B}$ 的凸形性，這些線段都屬于 $\mathfrak{B}$。 設 P' 是 $O\bar{P}$ 線段上的任一點，但非 $\bar{P}$。P' 就是一個完全屬于 $\mathfrak{B}$ 的球體的中心。 例如，取一線段，他與 $\mathfrak{k}$ 的半徑的比等于 $P'\bar{P}$ 與 $O\bar{P}$ 的比；用這線段做半徑，O 做中心的球體，就完全屬于 $\mathfrak{B}$。

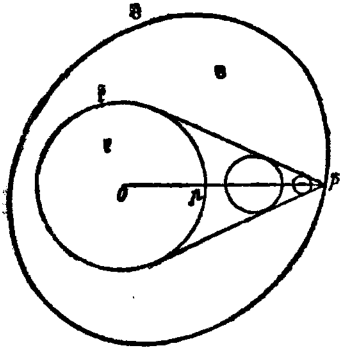


圖 35

設 $O\bar{P}$ 與 $\bar{\mathfrak{k}}$ 的交點叫做 $\bar{p}$。 $\bar{P} \longleftrightarrow \bar{p}$ 這對應給定一個一一的換 $\bar{\mathfrak{B}}$ 成 $\bar{\mathfrak{k}}$ 的變換。這變換在 $\bar{p} \to \bar{P}$ 這方向綿續。因爲，若是這變換在點 $\bar{p}$ 處不綿續，給定了一個鄰域 $\mathfrak{U}(\bar{P}|\bar{\mathfrak{B}})$，$\bar{\mathfrak{k}}$ 上就有一個以 $\bar{p}$ 爲極限的收歛點敘列 $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \cdots$ 存在，其中所有的點的像點 $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \cdots$ 都不屬于 $\mathfrak{U}(\bar{P}|\bar{\mathfrak{B}})$。 但是這些像點在 $\bar{\mathfrak{B}}$ 上有一個凝點；而且這凝點必定在線段 $O\bar{P}$ 上，所以必定是 $\bar{P}$，所以差不多所有的點 $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \cdots$ 都屬于 $\mathfrak{U}(\bar{P}|\bar{\mathfrak{B}})$。這是矛盾。再根據 頁 49 中的定理 V，這變換在 $\bar{P} \to \bar{p}$ 這方

向也綿續，所以是拓撲變換。——再把 $O\overline{P}$ 平直的變換成 $O\overline{p}$，這換 $\overline{\mathfrak{B}}$ 成 $\overline{\mathfrak{k}}$ 的變換就擴充成一個換全個的 $\mathfrak{B}$ 成球體 $\mathfrak{k}$ 的變換。

因爲平直的 n 維單純形是實數空間中的一個凸形域，他也能拓撲的變換成球體。因此 n 維球體與 n 維元體都是（純粹的）複合形。

n 維球 $\mathfrak{S}^n$

$n+1$ 維的實數空間 $\mathfrak{R}^{n+1}$ 中的點，他們的坐標適合等式

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n+1}^2=1 \qquad (n\geqq 0)$$

的，組成一個集合，叫做 $\mathfrak{R}^{n+1}$ 中的單位球；他的拓撲的像集簡單的叫做 n 維球，或 n 維的球式空間，用 $\mathfrak{S}^n$ 表示。零維球是兩個點。

一個 $n+1$ 維的凸形域 $\mathfrak{B}^{n+1}$ 的邊緣是一個 n 維球。 因爲我們已經求出一個換 $\mathfrak{B}^{n+1}$ 成 $n+1$ 維單位球體的拓撲變換，而且這變換就換 $\mathfrak{R}^{n+1}$ 的邊緣成球體的邊緣。 n 維球特別與 $n+1$ 維單純形的邊緣同胚。因此，我們得着 n 維球的一個最簡單的單純剖分。在 $n=2$ 的時候，這剖分由四面形的四個三邊形組成。

除去這種四面形式的剖分之外，有時候需要推廣二維球的八面形式的剖分，得着 $\mathfrak{S}^n$ 的另一個單純剖分。設

$$\mathfrak{v}_1,\ \mathfrak{v}_2,\ \cdots,\ \mathfrak{v}_{n+1}$$

是 $\mathfrak{R}^{n+1}$ 中分別從原點 O 到

$$(1,0,0,\cdots,0),\ (0,1,0,\cdots,0)\cdots,\ (0,0,0,\cdots,1)$$

的單位矢。

$$\varepsilon_1 \mathfrak{v}_1,\ \varepsilon_2 \mathfrak{v}_2,\ \cdots,\ \varepsilon_{n+1} \mathfrak{v}_{n+1} \qquad (\varepsilon_k = \pm 1) \qquad (2)$$

這 $n+1$ 個矢的終點與原點 O 是一個 $n+1$ 維單純形的頂點；這單純形叫做由 (2) 中的矢"佈成"的單純形。(2) 中的正負號一共有 2^{n+1} 個不同的組合，所以也有同樣多的單純形。二單純形的交集或是一個共面，由共矢佈成，或只是 O 這原點。在後一種情形下，一單純形的矢必與另一單純形的矢完全相反。根據 §10 的預備定理，這 2^{n+1} 個單純形組成一個複合形。而且這複合形顯然是一個凸形的鄰域空間，所以是一個 $n+1$ 維元體。他的邊緣是一個 n 維球，由 2^{n+1} 個 n 維單純形組成；(2) 中每一組的矢的終點是其中一個單純形的頂點。n 維球的這個剖分叫做"八面形式"的剖分。這剖分與四面形式的剖分不同，前者在原點處完全對稱；那就是說，交換徑點之後，即經過下列變換

$$x_1' = -x_1,\ x_2' = -x_2,\ \cdots,\ x_{n+1}' = -x_{n+1}$$

之後，這剖分中的每一單純形還換成這剖分中的一個單純形。

超平面 $x_{n+1} = 0$ 把這 n 維球剖分成兩半。他們都是 n 維元體：因爲在 x_{n+1} 軸的方向的平行投影，把他們都拓撲的變換成 $x_{n+1} = 0$ 這超平面上的單位球體。所以若是兩個 n 維的半球的邊緣上有一拓撲的對應，叠合對應點而成的，就是一個 n 維球。[11]

n 維球還可由另一方法叠合而成。赤道超平面 $x_n = 0$ 把一個 n 維球體

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqq 1$$

剖分成兩個 n 維元體。所以若是叠合這個球體的對于赤道超平面的對

稱的邊緣點，結果是一個 n 維球。

刺破了一個點的 n 維球（n 維球減去了一個點）與實數空間 $\mathfrak{R}^n$ 同胚，因爲頁 38 例 2 中的晝形投影的公式對于任一個維數 n 都成立。我們可以設想 $\mathfrak{R}^n$ 中增加一個假（或無窮遠）點，當作投影的中心的像點，使晝形投影成一個一一的變換。投影中心在 n 維球上的每一鄰域的像集，含有 $\mathfrak{R}^n$ 中的一個適當大球面之外的所有點，當然也含有這假點；我們就把這集合規定做這假點的鄰域。所以我們說，實數空間能用一個假點封閉成一個 n 維球。

單純星形 $\mathfrak{St}^n$

設 $\mathfrak{K}^{n-1}$ 是一個 $n-1$ 維的有限的單純複合形。增加一個新頂點 O，用 O 與 $\mathfrak{K}^{n-1}$ 做成一個 n 維複合形如下：用 O 與 $\mathfrak{K}^{n-1}$ 的每一個 i 維單純形 $\mathfrak{S}^i=(P_0\,P_1\cdots P_i)$，做成一個 $i+1$ 維單純形 $(O\,P_0\,P_1\cdots P_i)$；因此我們從 $\mathfrak{K}^{n-1}$ 的表格推出一個 n 維單純複合形的表格。這 n 維複合形後來常引用，叫做**單純星形** (*Simplexstern*) $\mathfrak{St}^n$，O 點叫做他的**中心**，複合形 $\mathfrak{K}^{n-1}$ 叫做他的外邊緣 (*Aussenrand*)。單純星形的外邊緣與單純形或凸形域的邊緣完全無關。一個單純的複合形中所有的單純形，有一個共公頂點的，組成一個單純星形。圖 36 中表示一個 $\mathfrak{St}^2$，粗線與濃點表示外邊緣 $\mathfrak{K}^1$ 的單純形。

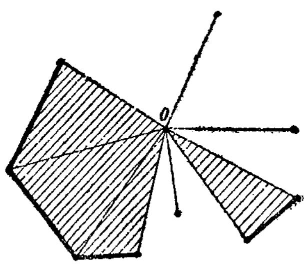


圖 36

實數空間 $\mathfrak{R}^n$ 中的每一凸形的 n 維域的外邊緣若是一個平直的

$n-1$ 維的單純複合形 $\mathfrak{S}^{n-1}$，這凸形域就能剖分成一個單純星形。其實，只要取這凸形域的一個中間點 O 做投影中心，從 O 投影外邊緣上的單純形，這凸形域就剖分成一個複合形。(根據 §10 中關于實數空間中的複合形的預備定理)他的表格確是單純星形的表格，所以他是一個 $\mathfrak{St}^n$。

n 維的投影空間 $\mathfrak{P}^n$

設想 $n+1$ 維的實數空間 $\mathfrak{R}^{n+1}$ 中，$n\geqq 2$，通過原點 O 的直線是一個新集合中的"點"。我們用下述的鄰域定義，使這新集合成一個鄰域空間，叫做 n 維的投影空間 $\mathfrak{P}^n$：設 g 是這種的任一直線，P 是 g 上任一點，而且 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{R}^{n+1})$是 P 在 $\mathfrak{R}^{n+1}$ 中的一個鄰域。所有的通過 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{R}^{n+1})$ 中的點的這種直線組成一個集合，我們把他規定做 g 的一個鄰域。在 $\mathfrak{U}(P|\mathfrak{R}^{n+1})$ 是一個 ε 球形鄰域的時候，g 的這鄰域是一個特別的鄰域，"圓錐體"鄰域。一條直線 g 與 $\mathfrak{R}^{n+1}$ 中 n 維的單位球有兩個交點 P_1 與 P_2。**若是 n 維球上的點集 $\mathfrak{M}=\mathfrak{S}^n$ 中每兩個徑點都規定作相抵點，由疊合 $\mathfrak{M}$ 中的相抵點而成的就是 $\mathfrak{P}^n$。** n 維球上的徑點耦與組成 $\mathfrak{P}^n$ 的線成一一對應。若要證明 $\mathfrak{P}^n$ 是由疊合每兩個徑點而成的空間，只要證明在這種對應之下，任二鄰域 $\mathfrak{U}(P_1|\mathfrak{M})$ 與 $\mathfrak{U}(P_2|\mathfrak{M})$ 的連集都換成 g 的一個鄰域，而且 g 的每一鄰域都是這種連集的像集。這證明留給讀者補充。

n 維球體的邊緣是一個 $n-1$ 維球。規定這 n 維球體的每一個中間點只與他自己相抵，而這 $n-1$ 維球的每兩個徑點相抵。**由疊合** n

維球體的如此規定的相抵點而成的空間也是 $\mathfrak{P}^n$。 $\mathfrak{P}^2$ 的這種表示法，我們已經在 § 2 中說過，能推廣到任何高維的空間。

設 g 是 $\mathfrak{R}^{n+1}$ 中通過原點的一條直線，且設

$$x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$$

是 g 上一點(但非原點)的(實數)坐標。 g 上任一點的坐標與這點的坐標只相差一個公因子。所以 $n+1$ 個不全等于零的數的比 $x_1: x_2: \cdots: x_{n+1}$ 與這種直線，即投影空間的點，成一一對應。 $n+1$ 個零不能確定一條直線，應當除外。 設 $\bar{x}_1: \bar{x}_2: \cdots: \bar{x}_{n+1}$ 是一個給定了的投影點，而且 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_{n+1}$ 都有定值。所有的投影點 $x_1: x_2: \cdots: x_{n+1}$ 適合下列不等式

$$|x_1 - \bar{x}_1| < \varepsilon, \cdots, |x_{n+1} - \bar{x}_{n+1}| < \varepsilon$$

的，組成 $\bar{x}_1: \bar{x}_2: \cdots: \bar{x}_{n+1}$ 的一個鄰域。因為實數空間中適合這些不等式的點 $(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$，組成 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_{n+1})$ 這點的一個方體鄰域，所以這些投影點相當于連接原點 O 與這鄰域的點的直線。投影點 $\bar{x}_1: \bar{x}_2: \cdots: \bar{x}_{n+1}$ 的如此一個鄰域的大小，不但與這投影點及選定的 ε 有關係，而且也與 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_{n+1}$ 的固定值有關係。

若是 $\mathfrak{S}^n$ 上的每兩個徑點叠合，$\mathfrak{S}^n$ 的八面形式的剖分的一個法重分(在原點處對稱的)就叠合成 $\mathfrak{P}^n$ 的一個單純剖分。我們必須先作法重分。因為，否則，叠合後的任意兩個 n 維單純形都有相同的頂點，不能滿足複合形的條件 (k_3) (參看 §13 中的習題)。

拓 撲 積

我們能從二鄰域空間 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 規定一新鄰域空間 $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$，叫做 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 的**拓撲積** (*topologische Produkt*) 如下：設 A 是 $\mathfrak{A}$ 中的任一點，B 是 $\mathfrak{B}$ 中的任一點。我們規定點耦 A, B 與 $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ 中的點 $A\times B$ 成一一對應。設 $\bar{A}\times\bar{B}$ 是 $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ 中的任一點，A 是 $\bar{A}$ 在 $\mathfrak{A}$ 中的任一鄰域中的一點，B 是 $\bar{B}$ 在 $\mathfrak{B}$ 中的任意一鄰域中的一點；我們再規定所有的這種點 $A\times B$ 組成的集合是 $\bar{A}\times\bar{B}$ 的一個鄰域，而且含有一鄰域的任一集合也是 $\bar{A}\times\bar{B}$ 的一鄰域。

例如實數平面，就是 x_1 軸與 x_2 軸兩條實數直線的拓撲積。——普遍的說，若 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 分別是實數空間 $\mathfrak{R}^a$ 與實數空間 $\mathfrak{R}^b$ 中的子集，則 $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ 就可以看作是實數空間 $\mathfrak{R}^{a+b}$ 中的一個子集。因爲，若

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_a \tag{A}$$

是 $\mathfrak{R}^a$ 中的 $\mathfrak{A}$ 的一點 A 的坐標，

$$x_{a+1},\ x_{a+2},\ \cdots,\ x_{a+b} \tag{B}$$

是 $\mathfrak{R}^b$ 中的 $\mathfrak{B}$ 的一點 B 的坐標，我們就可以取坐標

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_a,\ x_{a+1},\ \cdots,\ x_{a+b} \tag{$A\times B$}$$

所代表的點當做 $A\times B$。$\mathfrak{R}^{a+b}$ 中的這些點 $A\times B$ 組成一子集，與拓撲積 $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ 同胚。

習題：設 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 分別是實數空間 $\mathfrak{R}^a$ 與 $\mathfrak{R}^b$ 中的 a 維與 b 維的凸形域。若是用上文的看法，把拓撲積 $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ 看作是 $\mathfrak{R}^{a+b}$ 中的一個子集，他就是一個 $a+b$ 維的凸形域；而且 $\mathfrak{A}$ 的邊緣與 $\mathfrak{B}$ 的拓撲積加上 $\mathfrak{B}$ 的邊緣與 $\mathfrak{A}$ 的拓撲積就是 $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ 的邊緣。

定理：兩個複合形的拓撲積還是一個複合形。

證明：根據 §11，我們設想 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 分別是實數空間 $\mathfrak{R}^a$ 與 $\mathfrak{R}^b$ 中的平直的單純複合形。所以 $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{R}^a\times\mathfrak{R}^b$ 的一個子集，而且是 $\mathfrak{A}$ 的每一單純形 $\mathfrak{E}^\alpha$ 與 $\mathfrak{B}$ 的每一單純形 $\mathfrak{E}^\beta$ 的拓撲積的連集。設 $\mathfrak{E}^{\alpha-1}_\mu$ 與 $\mathfrak{E}^{\beta-1}_\nu$ 分別是 $\mathfrak{E}^\alpha$ 與 $\mathfrak{E}^\beta$ 的面單純形，每一拓撲積，$\mathfrak{E}^\alpha\times\mathfrak{E}^\beta$ 是一個 $\alpha+\beta$ 維的凸形域，而且他的邊緣由 $\mathfrak{E}^{\alpha-1}_\mu\times\mathfrak{E}^\beta$ 與 $\mathfrak{E}^\alpha\times\mathfrak{E}^{\beta-1}_\gamma$ 這些 $\alpha+\beta-1$ 維域組成(參看上文的習題)。我們可以逐步的用投影方法，求得 $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ 在 $\mathfrak{R}^{a+b}$ 中的一個單純的剖分如下：先把一維的凸形域(直線段)用中點分開。單純的剖分了所有的 $k-1$ 維域之後，在一個 k 維域中取一個中間點，再從這點處投影這 k 維域的邊緣，求得這 k 維域的一個單純剖分。我們能同樣的單純剖分每一域。如此得來的單純形滿足 §10 中的預備定理，所以組成 $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ 的一個單純剖分。

為將來應用起見，我們還證明下述的預備定理：

預備定理：設 $\mathfrak{K}^n\times \mathrm{t}$ 是複合形 $\mathfrak{K}^n$ 與單位線段 $0\leqq t\leqq 1$ 的拓撲積。P 是 $\mathfrak{K}^n$ 中的任一點，設變換 f 換 $\mathfrak{K}^n\times \mathrm{t}$ 到單純的複合形 K^m，而且具有如次性質：$f(P\times 0)$ 與 $f(P\times 1)$ 屬于 K^m 的同一單純形，而且 f 平直的變換 $P\times \mathrm{t}$ 成 $f(P\times 0)$ 與 $f(P\times 1)$ 的連接線段。若是 f 在子集 $\mathfrak{K}^n\times 0$ 與 $\mathfrak{K}^n\times 1$ 中綿續，f 必在全個的 $\mathfrak{K}^n\times \mathrm{t}$ 中綿續。

證明：設想 $\mathfrak{K}^n$ 是用 $x_1, x_2, \cdots, x_a$ 做坐標的實數空間 $\mathfrak{R}^a$ 中的一個子集，$\mathfrak{R}^1$ 是用 t 做坐標的實數直線。$\mathfrak{K}^n\times \mathrm{t}$ 所以是實數空間 $\mathfrak{R}^a\times\mathfrak{R}^1$ 中的一個子集。同樣的設想 K^m 是用 $y_1, y_2, \cdots, y_b$ 做坐標的實數空間 $\mathfrak{R}^b$ 中的一個平直複合形。f 這變換因此用下列函數

$$y_i(x_1, x_2, \cdots, x_a, t) = y_i(x_1, x_2, \cdots, x_a, 0)\ (1-t) + y_i(x_1, x_2, \cdots x_a, 1)t$$
$$(i, = 1, 2, \cdots, b)$$

表出，根據假設，$y_i(x_1, x_2, \cdots, x_a, 0)$ 與 $y_i(x_1, x_2, \cdots, x_a, 1)$ 都是 $x_1, x_2, \cdots, x_a$ 的綿續函數(參看頁34中的定理 I)，所以 $y_i(x_1, x_2, \cdots, x_a, t)$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_a, t$ 的綿續函數，即 f 在全個的 $\mathfrak{R}^n \times t$ 中綿續。

習題：1. 試證：由叠合一個 n 維球體的所有邊緣點而成的空間是 $\mathfrak{S}^n$。

2. 設有一變換，換拓撲積 $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ 中的每一點 $A \times B$ 成 $\mathfrak{A}$ 中的點 A. 試證這變換是一個換 $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ 成 $\mathfrak{A}$ 的綿續變換。

3. 設有一質點，限制在 a) 環面上，b) 球面上，以常速度運動。試證相空間(§4)是

a) 環面與圓的拓撲積，

b) 投影空間 $\mathfrak{P}^3$。[12]

4. 試證四維的實數空間 $\mathfrak{R}^4$ 中的三維單位球

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \tag{3}$$

能剖分成兩個全合的（有一繞中心的歐幾里得的剛體運動，把其中的一個換成另一個）環體(圓域與圓的拓撲積)：

$$x_1^2 + x_2^2 \leqq x_3^2 + x_4^2 \text{ 與 } x_1^2 + x_2^2 \geqq x_3^2 + x_4^2。$$

他們的公共邊緣是一個環面，適合(3)與方程式

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2。\tag{4}$$

在赤道超平面 $x_4 = 0$ 中取定笛卡兒坐標 ξ_1, ξ_2, ξ_3 (頁38的例2)。從北極(0, 0, 0, 1)到 $x_4=0$ 的畫形投影把這邊緣環面換成一個以 ξ_3 軸爲旋轉軸的旋轉環面。赤道超平面用北極的像點封閉成的球式空間，被這旋轉環面剖分成兩個環體。第一個的"心線"(*Seele*)是 ξ_1, ξ_2 平面中的單位圓，第二個的是 ξ_3 軸(圖37)。

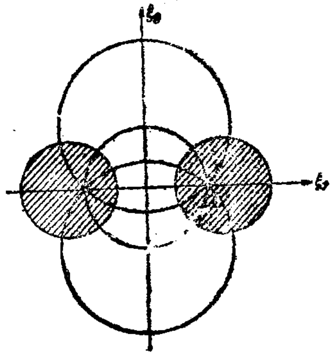


圖 37

5. 球式空間有一變狀（球式空間中的一剛體運動），把習題4中的環面換成他自身，而且交換其經緯圓(參看頁4，與§46中的習題)。

6. 若是叠合徑點，把三維單位球換成投影空間 $\mathfrak{P}^3$，上面所說的環面就換成一個單葉雙曲面，他的投影坐標適合方程式(4)；他與環面同胚，也把 $\mathfrak{P}^3$ 剖分成兩個環體，所以三維的投影空間與球式空間都可以由一個環面剖分成（能分別用投影變換或球式空間中的剛體運動互相變換的）環體。試證明之。

7. 試證：n 維的實數空間中的每一(非空的)開子集都是一個無窮的複合形。[在這子集中取出逐漸細密的 n 維方體，然後把他們重分爲單純形。]

第三章 同調羣

我們已經說明了複合形與他的單純剖分這兩種概念。此後的討論多少與下列未解決的問題有直接關係：複合形的完全分類與他們的性質的探討。所謂複合形的性質，只是拓撲變換所不毀滅的，而且不依賴于個別的單純剖分的性質。我們開始雖然是研究複合形的一個單純剖分，我們在下章中就要證明，從一個單純剖分所得着的一個重要性質，即同調羣，就不依賴于這選用的單純剖分，就是拓撲不變性。

本章中完全不用綿續統的拓撲學 (*Kontinuumstopologie*) 的鄰域，綿續等概念，因此是純粹組合的討論。本章中所說的 n 維的複合形 $\mathfrak{K}^n$ 簡直可以用他的表格代表；n 維的複合形就是"頂點"的集合，其中有某種特出的子集合界說作"單純形"，而且適合 § 11 中的 (Sch_1)，(Sch_2)，(Sch_3) 三條件。爲簡單計，我們只討論有限的複合形。

§15 鍊

設 $\mathfrak{K}^n$ 是一個有限的 n 維的單純複合形。$\mathfrak{K}^n$ 中若干個 k 維單純形，每一個都取定了一確定的定向與一正整數的倍數，組成 $\mathfrak{K}^n$ 中的一個 k 維的**單純鍊** (*simpliziale Kette*)。

零個 k 維單純形組成一個特殊的 k 維鍊 0。若是 $k > n$，0 是唯一的 k 維鍊。每一個定向的單純形取一次，也是一個 k 維鍊。

若是一個 k 維單純形不在一個 k 維鍊中出現，我們就說這 k 維單純形在這鍊中的倍數是零。若是一個定向的 k 維單純形 E^k 在一個 k 維鍊中的倍數是 a，我們就說相反定向的 $-E^k$ 在這鍊中的倍數是 $-a$。

兩個 k 維鍊 U^k 與 V^k 的和 U^k+V^k 還是一個 k 維鍊。定義如下：若是一個定向的單純形 $E^k_\varkappa$ 在 U^k 中的倍數是 $u_\varkappa$，在 V^k 中的倍數是 $v_\varkappa$，他在 U^k+V^k 中的倍數就是 $u_\varkappa+v_\varkappa$。設想 $\mathfrak{K}^n$ 中所有的 k 維單

純形都有了確定的定向，用 $E^k_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots, \alpha^k)$*) 表示。因此 k 維鍊與 α^k 維的整數矢**)

$$(u_1, u_2, \cdots, u_{\alpha^k}) \tag{U^k}$$

成一一對應，而且兩個 k 維鍊的相加就相當於與他們對應的矢相加，這就是說，k 維鍊組成一個 α^k 維的框格 $\mathfrak{T}^k$，一個 *Abel* 羣。我們能用定向的單純形 $E^k_1, E^k_2, \cdots, E^k_{\alpha^k}$ 作這羣的一個基底 (*Basis*, §81)。 我們採用通常討論 *Abel* 羣的辦法，用加法寫；所以

$$U^k = u_1 E^k_1 + u_2 E^k_2 + \cdots, + u_{\alpha^k} E^k_{\alpha^k}。$$

注意下述的**計算規律**(*Rechenregel*):

若 $m U^k = 0$ 與 $m \neq 0$，即知 $U^k = 0$。所以 $\mathfrak{T}^k$ 的每一元的級 (*Ordnung*) 都無窮。

§16 邊緣，閉鍊

設 E^{k-1} 是定向的單純形 E^k 的一個面單純形。下述的規律規定 E^k 的方向"**引出** (*induzieren*)"E^{k-1} 的一個確定的方向：若是頂點 P_0 與 $\mathfrak{E}^{k-1}$ 在 E^k 中對立，而且 $E^k = \varepsilon(P_0 P_1 \cdots P_k)$，$\mathfrak{E}^{k-1}$ 上被引出的定向就是 $\varepsilon(P_1 P_2 \cdots P_k)$。 一個定向的單純形 E^k 的所有的 $k-1$ 維面，每一個取定被引出的定向與倍數 1，組成一個 $k-1$ 維鍊，叫做

*) 如通常的右上指標一樣，α^k 的右上指標 k 表示維數，不是冪。

**) 下文用的概念：矢框格 (*Gitter*)，*Abel* 羣，直接和 (*direkte Summe*) 等等，在第十二章中都有定義。

E^k 的邊緣*)。 設 E^k 的 $k-1$ 維面都已有了任意給定的定向，而且這些定向的面是 $E_0^{k-1}, E_1^{k-1}, \cdots, E_k^{k-1}$。$E^k$ 的邊緣就是

$$F[E^k]=\varepsilon\sum_{\iota=0}^{k}(-1)^{\iota}(P_0 P_1\cdots P_{\iota-1}P_{\iota+1}\cdots P_k)=\sum_{\iota=0}^{k}\varepsilon_\iota E_\iota^{k-1}$$

這 $k-1$ 維鍊。 這裏的 $\varepsilon_\iota=+1$ 或 $=-1$，按照 E_ι^{k-1} 的任意給定了的定向是否被引出的定向而定。邊緣用 $F[\ ]$ 這記號表示。

我們規定任意一個 k 維鍊 $U^k=\sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k}u_\varkappa E_\varkappa^k$ 的邊緣就是個別的 k 維單純形的邊緣的和：

$$F[U^k]=F[\sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k}u_\varkappa E_\varkappa^k]=\sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k}u_\varkappa F[E_\varkappa^k]。$$

因此有下列諸計算規律：

$$F[U^k\pm V^k]=F[U^k]\pm F[V^k], \tag{1}$$

$$F[m\,U^k]=m\,F[U^k], \tag{2}$$

$$\text{若 } F[m\,U^k]=0 \text{ 與 } m\neq 0, \text{ 即知 } F[U^k]=0。 \tag{3}$$

(3) 是 (2) 的結果。

我們規定零維鍊的邊緣就是 0 這數。

若是 k 維鍊的邊緣等于零，那就是說，在 $k>0$ 的時候，是 0 這 $k-1$ 維鍊，在 $k=0$ 的時候，是 0 這數，這 k 維鍊就叫做**閉鍊**或**環**

---

*) 一個定向的單純形的邊緣（邊緣鍊）是定向的單純形的一個平直組合。一個不定向的單純形或一個純粹的複合形（頁 67）的邊緣是一個點集。這兩種邊緣大有區別。

$(Zykel)$。每一個零維鍊都是閉鍊。

因爲(1)，兩個閉鍊的和或差還是閉鍊。所以閉鍊組成 k 維的框格 $\mathfrak{T}^k$ 的一個子框格 $\mathfrak{G}^k$。在 $k=0$ 的時候，$\mathfrak{G}^0$ 與 $\mathfrak{T}^0$ 相同。

關于邊緣鍊，有下述重要的定理。

定理：**每一個邊緣鍊都是閉鍊。**

證明：因爲每一個 $k-1$ 維邊緣鍊都是定向的 k 維單純形的邊緣鍊的和，我們只需要證明一個定向的 k 維單純形 E^k 的邊緣鍊是閉鍊。又因爲每一個零維鍊都是閉鍊，每一個一維單純形的邊緣鍊就是閉鍊；所以我們可以假設 $k>1$。設

$$E^k=(P_0 P_1\cdots P_k), \qquad (k>1)$$

$\mathfrak{E}^{k-2}$ 是一個預先給定的，與 E^k 關聯的 $k-2$ 維的單純形。我們假設 $P_2, P_3, \cdots, P_k$ 恰是 $\mathfrak{E}^{k-2}$ 的頂點；因爲我們能用偶數個置換，把 $(P_0 P_1\cdots P_k)$ 這記號中任意 $k-1$ 個頂點移到後面，這假設並不使論證受到任何限制。根據邊緣的定義，

$$F[E^k]=(P_1 P_2\cdots P_k)-(P_0 P_2\cdots P_k)+\cdots,$$

所以

$$F[F[E^k]]=(P_2\cdots P_k)-(P_2\cdots P_k)+\cdots;$$

只有這裏寫出的兩個單純形含有頂點 $P_2,\cdots,P_k$ 全體。因爲他們互相消去，$(P_2\cdots P_k)$ 這單純形不在 $F[F[E^k]]$ 中出現。由此可知 $F[F[E^k]]=0$。

例：設 $\mathfrak{K}^n$ 是圖38中表出的平環的一個單純剖分 $\mathfrak{K}^2$。每一個三邊形有一個環形箭頭，

表示這三邊形的定向。這些定向的三邊形，每一個取一次，組成一個二維鍊 U^2。要確定 U^2 的邊緣，我們依次考慮所有的棱。棱$(P_1\ P_5)$ 決不會在 $F[U^2]$ 中出現，因為與他關聯的只有兩個三邊形 $+(P_4\ P_1\ P_5)$ 與 $+(P_2\ P_5\ P_1)$，而且這兩個三邊形在棱$(P_1 P_5)$上引出相反的定向：$+(P_1P_5)$ 與 $+(P_5\ P_1)$。同樣的，棱 $(P_1\ P_4)$ 與別個中間棱都不在 $F[U^2]$ 中出現。但是外圓週上的棱(P_1P_2)只與一個三邊形 $+(P_5\ P_1\ P_2)$關聯，他的被引出的定向是 $+(P_1\ P_2)$。所以 $+(P_1\ P_2)$在 $F[U^2]$ 中的倍數是 1。所以內圓週與外圓週上的棱，每一個取 1 當倍數，定向由箭頭確定，恰組成 $F[U^2]$。內圓週與外圓週上的棱分別組成閉鍊 B_i^1 與 B_a^1。例如在 P_2 這頂點上，棱 $+(P_1P_2)$ 引出的定向是 $+(P_2)$，而棱 $+(P_2\ P_3)$引出的是相反的定向$-(P_2)$。

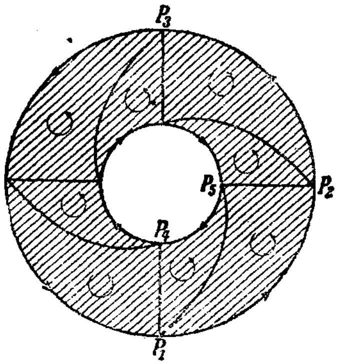


圖 38

§17 同調鍊

$\mathfrak{R}^n$ 上的邊緣鍊是閉鍊，但閉鍊不一定是邊緣鍊，例如上節所說的平環的外圓週 B_a^1 就不是邊緣鍊。若是一個閉 k 維鍊 U^k 是 $\mathfrak{R}^n$ 上一個 $k+1$ 維鍊 U^{k+1} 的邊緣，我們就說 U^k 是**零調** (*nullhomolog*) **鍊**：用記號

$$U^k \sim 0$$

表示。我們應該更正確的說：在 $\mathfrak{R}^n$ 上，$U^k\sim 0$；表明 U^{k+1} 屬于 $\mathfrak{R}^n$。同樣的，

$$\text{在 } \mathfrak{k} \text{ 上，} U^k \sim 0$$

表明 U^{k+1} 屬于 $\mathfrak{R}^n$ 的子複合形 $\mathfrak{k}$。若是在 $\mathfrak{k}$ 上，$U^k\sim 0$，當然在 $\mathfrak{R}^n$ 上也是如此；但反之則不盡然。

普遍的說，若兩個閉鍊或非閉鍊的差是一個零調鍊，這兩個鍊就說是同調鍊；那就是說，

$$U^k \sim V^k,\ 若\ U^k - V^k \sim 0。$$

$U^k \sim V^k$ 這關係叫做一個同調式 (*Homologie*)。

因爲零調鍊是閉鍊,所以從 $U^k \sim V^k$, 即知 $F[U^k - V^k] = 0$, 或 $F[U^k] = F[V^k]$;也就是說,同調鍊的邊緣相同。若 $U^k \sim 0, V^k \sim 0$, 即知

$$U^k = F[U^{k+1}],\ V^k = F[V^{k+1}];$$

應用 §16 中的 (1),

$$U^k \pm V^k = F[U^{k+1} \pm U^{k+1}],$$

所以 $U^k \pm V^k \sim 0$。零調鍊的和與差還是零調鍊。所以零調的 k 維鍊組成閉 k 維鍊的框格 $\mathfrak{G}^k$ 的一個子框格 $\mathfrak{N}^k$。所以同調式可以加減或用整數乘。但是我們就有一個例子,表明不能消去同調式中的因子:

若 $mU^k \sim 0$, 在普遍的情形下,未必 $U^k \sim 0$。

並且,若是 $U^k \sim V^k, V^k \sim W^k$, 即知 $U^k \sim W^k$。因爲 $U^k - V^k$ 與 $V^k - W^k$ 是零調鍊,他們的和 $U^k - W^k$ 也是零調鍊。因此,所有的閉 k 維鍊能分開成組,每一組中的鍊互相同調,不同組的鍊不互相同調。這種組叫做同調類。例如零調鍊就組成這麼一個同調類。

例: 1. 我們要求出平環 (圖 38) 這例子的一維同調類。用前節的記號與結果:

$$F[U^2] = B_a^1 + B_i^1,$$

所以

$$B_a^1 + B_i^1 \sim 0, 或\ B_a^1 \sim -B_i^1。$$

所以 B_a^1 與 $-B_i^1$ 屬于同一同調類。——我們證明任一閉一維鍊 U^1 都與 B_i^1 的一個倍數同

調。若是 U^1 含有外圓週上的一棱，我們可以用與他關聯的三邊形的其他二棱替代他；其實，我們只要適當的給定三邊形一個定向，然後作成如此定向的三邊形邊緣 Δ^1 與 U^1 的和。因爲 $\Delta^1 \sim 0$, U^1 與 Δ^1 的和還是一個與 U^1 同調的鍊。我們能如此求得一個鍊 $'U^1$，他與 U^1 同調，而且不含有外圓週上的棱。若是 $'U^1$ 中含有一個"對角"棱，例如 $+(P_1P_5)$，我們也可以同樣的用 $+(P_1 P_4)+(P_4 P_5)$ 替代他。消去 $'U^1$ 中所有的對角棱之後，結果是一個 $''U^1$，他既不含有外圓週上的棱，也不含有對角棱，而且是與 $'U^1$ 同調的閉鍊。我們要證明 $''U^1$ 只含有內圓週上的棱，不含有輻射棱。假定他含有輻射棱，例如$(P_5 P_2)$。因爲 $''U^1$ 是閉鍊，P_2 不能在他的邊緣中出現。又因爲除 $(P_5 P_2)$ 之外，他不含有別個與 P_2 關聯的棱，$(P_5 P_2)$ 在 $''U^1$ 的倍數必定是零。所以 $''U^1$ 完全在內圓週上。因爲 $''U^1$ 是閉鍊，內圓週上所有的棱在 $''U^1$ 中的倍數必相等；那就是說

$$''U^1 = m\, B^1_i。$$

這裏的 m 是一整數。

我們已經證明了平環的這剖分中的每一個閉一維鍊必定與

$$0,\ \pm B^1_i,\ \pm 2\, B^1_i,\ \pm 3\, B^1_i, \cdots$$

這一組鍊中的一個同調，我們再證明這組鍊中的任意兩個都不同調。假定

$$m'\, B^1_i \sim m''\, B^1_i,$$

或 $(m'-m'')B^1_i = m\, B^1_i \sim 0$，我們能證明 $m = 0$ 即 $m' = m''$ 如下。既然 $m\, B^1_i$ 這鍊是一個二維鍊的邊緣，每一個與內圓週鄰接的三邊形在這二維鍊中的倍數必定是 m。但是因爲這二維鍊的邊緣不含有中間棱，他必定含有其他每一個三邊形的 m 倍。所以他必定就是 mU^2，他的邊緣是 $m(B^1_i + B^1_a)$。只有 m 等于零的時候，這邊緣纔能 $=m\, B^1_i$。這就證明了有無窮多的同調類存在，而且 B^1_i 的倍數是他們的代表。

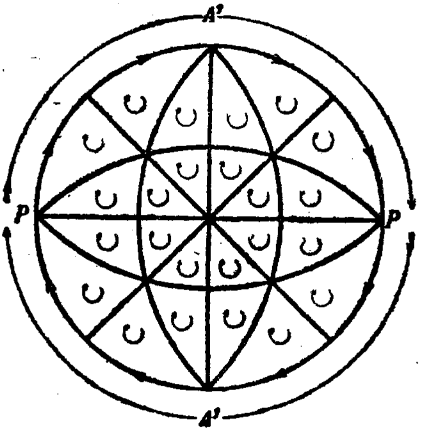


圖 39

2. 設 $\mathfrak{K}^n$ 是投影平面 $\mathfrak{P}^2$，圖 39 給定他的單純剖分。根據 §2，若是邊緣圓上每兩個對應頂點或對徑棱當作相同，這圓域就疊合成投影平面。有了這種規定之後，圖 39 就可當作是代表投影平面的單純複合形 $\mathfrak{P}^2$ 的一個簡寫的表格。例如圖中的二點 P 就當作是投影平面中同一點；上半圓週的四條定向棱，(每一棱取一次) 所組成的一維鍊 A^1，就當作與下半圓週上的一維鍊相同。若是給定所有的三邊形的定向，使每兩個有公共中間棱的三邊形在這棱上引出相反的定向(如圖中所表出的)，我們就得着一個二維鍊 U^2，他的邊緣 $= +2A^1$，所以

$2A^1 \sim 0$。任意一個二維鍊的邊緣若等于 A^1 的一個倍數，這二維鍊必定是 U^2 的一個倍數，$= kU^2$，因爲這二維鍊的邊緣不含有中間棱，所有的三邊形在這二維鍊中的倍數必定相等。但是 $F[kU^2] = +2kA^1$，那就是說，投影平面中的 A^1 這一個閉鍊（投影直線）不 ~ 0。

任一閉一維鍊 U^1 或 ~ 0 或 $\sim A^1$；那就是說，只有兩個一維同調類存在。若是 U^1 不是已經在圖中的圓週上，我們能如同在平環的例中一樣，一步一步的把每一中間棱換成與他鄰接的三邊形的其他二棱，結果把 U^1 移到邊緣。因此我們得着圓週上一個一維鍊 $'U^1 \sim U^1$。因爲 $'U^1$ 在投影平面 $\mathfrak{P}^2$ 中是閉鍊，所以是 A^1 的倍數。因爲 A^1 的偶數倍數零調，所以 $'U^1$ 與 U^1 都 ~ 0 或都 $\sim A^1$。

§18 同調羣

從羣論的立場說，同調類就是把 $\mathfrak{G}^k$（閉 k 維鍊的框格），按照 $\mathfrak{N}^k$（零調鍊的框格）分成的剩餘類 (*Restklass*)；因爲閉鍊 U^k 與 V^k 同調的充要條件是他們的差零調，也就是他們屬于 $\mathfrak{N}^k$ 在 $\mathfrak{G}^k$ 中的同一剩餘類。若是我們再把二同調類 H_1^k 與 H_2^k 的和規定做 H_1^k 中任一鍊與 H_2^k 中任一鍊的和所屬的同調類，k 維的同調類就組成一個 *Abel* 羣，卽商羣 $\mathfrak{G}^k/\mathfrak{N}^k$。他叫做這單純的複合形 $\mathfrak{K}^n$ 的第 k 個同調羣 (*die k-te Homologiegruppe*) $\mathfrak{H}^k$。我們爲什麽注重這商羣，而不注重別個羣，例如所有的 k 維鍊的羣與閉鍊的羣？這是因爲同調羣是複合形的拓撲不變性，不依賴于所選用的單純剖分；我們現在只注意複合形的一個單純剖分的時候，這理由自然還不顯明。同調羣的拓撲不變性，如同上述的平環，投影平面與環面三個例子中所表明的，雖然容易猜想而知，但並非容易證明。證明要等到下一章再說。

$\mathfrak{L}^k$, $\mathfrak{G}^k$, $\mathfrak{N}^k$ 這些羣雖然都是框格，（有有限個母元 (*Erzeugend*) 的自由 *Abel* 羣），同調羣 $\mathfrak{H}^k$ 除零元之外，通常却含有有限級的元。不過 $\mathfrak{G}^k$ 有有限個母元，$\mathfrak{H}^k$ 是 $\mathfrak{G}^k$ 的商羣，所以 $\mathfrak{H}^k$ 也有有限個母元。

所以 $\mathfrak{H}^k$ 是下述的有限個循環羣的直接和：p^k 個自由循環羣與 ρ^k 個 $c_1^k, c_2^k, \cdots, c_{\rho^k}^k$ 諸級的循環羣，這裏每一個 c^k 可假定是前一個的因子(§86)。*) p^k 與 $c_1^k, c_2^k, \cdots, c_{\rho^k}^k$ 都由羣 $\mathfrak{H}^k$ 唯一的確定了，是羣 $\mathfrak{H}^k$ 的特徵。p^k 叫做 $\mathfrak{K}^n$ 這單純的複合形的第 k 個 *Betti* 數 (*Bettische Zahl*)，$c_1^k, c_2^k, \cdots, c_{\rho^k}^k$ 叫做 $\mathfrak{K}^n$ 的 k 維撓係數(*Torsionskoeffizient*)。至於撓係數這名稱的根據，我們將來用透鏡空間 (*Linsenraum*) 的例子加以說明 (§61)。

$\mathfrak{H}^k$ 是 ρ^k+p^k 個循環羣的直接和。在每一循環羣中取一母元，再在每一個代表母元的同調類中取一個 k 維鍊做代表。設取定的 ρ^k+p^k 個 k 維鍊是

$$A_1^k, \cdots, A_{\rho^k}^k, B_1^k \cdots, B_{p^k}^k 。\tag{1}$$

任一閉鍊 U^k 都與他們的一個平直組合同調：

$$U^k \sim \xi_1 A_1^k + \xi_2 A_2^k + \cdots + \xi_{\rho^k} A_{\rho^k}^k + \eta_1 B_1^k + \eta_2 B_2^k + \cdots + \eta_{p^k} B_{p^k}^k 。\tag{2}$$

因爲 $c_\mu^k A_\mu^k \sim 0$，爲簡單計，我們能限定 $0 \leqq \xi_\mu < c_\mu^k$；$\eta_\mu$ 沒有限制。有了這種法化 (*Normierung*) 的規定之後，每一個 U^k 顯然的只確定一組係數 ξ_μ，η_μ。(1) 中這種的一組 ρ^k+p^k 個閉鍊叫做 k 維的同調基 (*Homologiebasis*)。我們不但知道第 k 個同調羣是抽象羣，能由撓係數與 *Betti* 數確定，而且能求出他的同調基，這是很重要的事實。

有一個撓係數 c_μ^k 出現的拓撲意義，就是有一個閉 k 維鍊存在，他

*) 這裏的右上指標是維數，不是冪。

的 c^k_μ 倍纔能 ~ 0。

Betti 數 p^k 也是同調無關的閉 k 維鍊的最多的個數。有限個 k 維鍊 $U^k_1, U^k_2, \cdots, U^k_r$ 若是不適合任一係數不全等于零的同調式

$$t_1 U^k_1 + t_2 U^k_2 + \cdots + t_r U^k_r \sim 0,$$

他們就說是**同調無關** (*homolog unabhängig*),否則是**同調相關** (*homolog abhängig*)。同調基 (1) 中的每一個 A^k 同調相關,因為 $c^k_\mu A^k_\mu \sim 0$; $B^k_1, B^k_2, \cdots, B^k_{pk}$ 却同調無關,因為只有在 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{pk}$ 都等于零的時候,

$$\eta_1 B^k_1 + \eta_2 B^k_2 + \cdots + \eta_{pk} B^k_{pk}$$

纔能 ~ 0。根據 (2),任意一閉 k 維鍊的適當倍數,例如 c^k_1 倍,與 B^k_1, $B^k_2, \cdots, B^k_{pk}$ 一個平直組合同調,所以比 p^k 個還多的 k 維鍊都同調相關。

一個連通的單純複合形的第零個同調羣是一個自由循環羣。我們能取一個定向的零維單純形,例如 E^0_1,做同調基。設想所有的零維單純形 $E^0_1, E^0_2, \cdots, E^0_{\alpha^0}$ 的定向都用一個加號確定了。設

$$U^0 = \mu_1 E^0_1 + \mu_2 E^0_2 + \cdots + \mu_{\alpha^0} E^0_{\alpha^0}$$

是任一零維鍊。因為 $\mathfrak{K}^n$ 的連通性,E^0_1 與 E^0_ν 二頂點有一棱道連接,而且可以規定其中有公共頂點的每二棱的定向在這頂點上引出相反的定向。這棱道組成一個鍊 U^1,而且

$$F[U^1] = \pm (E^0_1 - E^0_\nu),$$

所以$E_1^0 \sim E_\nu^0$。U^0與E_1^0的$u_1+u_2+\cdots+u_{\alpha^0}$倍同調。——若是$m \neq 0$，$mE_1^0$就不$\sim 0$。一個一維單純形的邊緣含有一個頂點的$+1$倍，與另一個頂點的$-1$倍，倍數的和等于0。任一一維鍊的邊緣也如此，那就是說，每一零調的零維鍊也如此。所以E_1^0組成一個同調基，第零個同調羣是只有一個母元的自由循環羣。

利用零維鍊的代數值(*algebraischer Wert*)這概念，我們還能簡單的表明零維同調類的特徵如下：設零維單純形都用$+$號確定了定向，所謂零維鍊的代數值，就是他的所有的零維單純形的倍數的和。例如U^0，他的代數值就是$u_1+\cdots+u_{\alpha^0}$。所以一個連通的複合形中的兩個零維鍊同調的充要條件，就是他們的代數值相等。

我們能同樣容易的證明，若$\mathfrak{K}^n$由τ個孤立的連通的子複合形組成，第零個同調羣就是有τ個母元的自由*Abel*羣。所以零維的撓係數不存在。

若是$k>n$，$\mathfrak{K}^n$中只有0這一個k維鍊，所以只有一個k維的同調類，$\mathfrak{K}^n$的同調羣$\mathfrak{H}^k$只含有零元。——若是$k=n$，因爲非零的$n+1$維鍊不存在，同調類與n維閉鍊的個數相等；那就是說，若是$U^n \sim V^n$，U^n就$=V^n$。有限個k維鍊$U_1^k, U_2^k, \cdots, U_r^k$若不適合任一係數不全等于零的方程式

$$t_1 U_1^k + t_2 U_2^k + \cdots + t_r U_r^k = 0,$$

他們就說是平直無關，否則，平直相關。所以在$k=n$的時候，平直關係與同調關係相同。所以第n個*Betti*數p^n也等于平直無關的閉n維

鍊的最多的個數。n 維的撓係數不存在：因爲若是 $mU^n \sim 0$，mU^n 就 $=0$；若是 $U^n \neq 0$，m 就 $=0$。

無窮的複合形的同調羣的界說應當如何，我們簡略的說明如下：一個鍊還是有限個單純形的集體；邊緣，閉鍊，與同調式的定義都與有限複合形的相同。k 維的同調羣的元還是 k 維閉鍊的同調類。不過無窮複合形的同調羣通常不是有有限個母元，所以不能用 Betti 數與撓係數表出他的特徵。

§19 計算幾個簡單的複合形的同調羣

1. **平環**（頁 84）中每一個一維鍊 U^1 都與鍊 B_i^1 的一個倍數同調，而且 B_i^1 的任一不等于零的倍數不 ~ 0，所以一維同調羣是自由循環羣，B_i^1 是同調基。前面已經表明 $\mathfrak{H}^0$ 也是自由循環羣。因爲不等于零的閉二維鍊不存在，$\mathfrak{H}^2$ 只含有零元。所以 Betti 數是

$$p^0=1,\ p^1=1,\ p^2=0;$$

任何維數的撓係數都不存在。

2. **投影平面**（頁 87）。一維同調類有兩個。$\mathfrak{H}^1$ 的級所以是二，A^1 這鍊（投影直線）是同調基。因爲不等于零的閉二維鍊不存在，$\mathfrak{H}^2$ 只含有零元：

$$p^0=1,\ p^1=0,\ p^2=0;$$

有一個一維撓係數等于 2。

3. **環面**可以用附圖（圖 40）中剖分了的方域代表。方域的每兩個對

立邊當作是同一條棱（頁 4）。剖分中的棱分爲中間棱與邊緣棱兩種。邊緣棱在方域的邊 a 與 b 上。中間棱又可以分爲縱棱，橫棱與對角棱三種。要確定同調羣，我們可以與討論平環的例子一樣的進行。

I. 任意一個閉一維鍊 U^1 有一個同調的，只含有邊緣棱的一維鍊。若是 U^1 含有一個中間的縱棱或對角棱，加上這棱的右鄰三邊形的邊緣鍊之後，這棱就用這三邊形的其他二棱替代了；若是 U^1 含有一條中間的橫棱，也可以用這棱的下鄰三邊形的其他二棱替代。經過有限次替代之後，我們得着一個在方域的邊緣上的一維鍊 $'U^1$, $\sim U^1$。因爲 $'U^1$ 是閉鍊，所以 a 邊上的所有的棱在 $'U^1$ 中出現的次數相等，b 邊上的所有的棱出現的次數也相等。設他們的次數分別是 α 與 β。

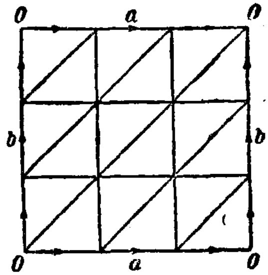


圖 40

邊 a 上的所有的棱每一個取一次，——方向在圖中確定了！——組成一個閉一維鍊 a^1。同樣的我們有一個閉一維鍊 b^1。所以

$$U^1 \sim {}'U^1 = \alpha a^1 + \beta b^1。$$

閉鍊 a^1 與 b^1 的同調類所以是第一個同調羣的母元。

II. $\alpha a^1 + \beta b^1 \sim 0$ 的充要條件是 $\alpha = \beta = 0$。我們給定所有的三邊形的定向，使每兩個有一公共中間棱的三邊形在這棱上引出相反的定向。因爲方域的對立邊在環面上是要疊合的，所有的定向的三邊形組成一個二維鍊 U^2，他的邊緣等于零。現在設 $\alpha a^1 + \beta b^1 \sim 0$，即這一

維鍊是一個二維鍊的邊緣。因爲這邊緣不含有中間棱，這二維鍊必定含有所有的三邊形，而且這些三邊形的倍數相等。所以這二維鍊必定是 U^2 的倍數，是閉鍊，所以 $\alpha a^1+\beta b^1=0$。因爲 a^1 與 b^1 無公共棱，$\alpha=\beta=0$。所以第一個同調羣 $\mathfrak{H}^1$ 是有兩個母元的自由 Abel 羣，a^1 與 b^1（環面上的經圓與緯圓）組成 $\mathfrak{H}^1$ 的同調基。$\mathfrak{H}^0$ 與 $\mathfrak{H}^2$ 都是自由循環羣。所以

$$p^0=1,\ p^1=2,\ p^2=1;\quad \text{撓係數不存在。}$$

若是用更多的縱橫線與相當的對角線去剖分這方域，我們得着的同調羣仍相同。其實不管給定了何種剖分，只要不過于繁難，我們還可以證明同樣的結論，因此我們很自然的發生這種猜想：同調羣不依賴于選定了的剖分，已經由環面這鄰域空間確定了。不過在證明（第四章）之前，我們不能不想到也許能有別種剖分引出不同的結論。

4. **單純星形**。設 $\mathfrak{K}^n$ 是一個單純星形，他的中心是 O，外邊緣是 $\mathfrak{K}^{n-1}$。設 U^k 是 $\mathfrak{K}^n$ 上任一個閉 k 維鍊($k>0$)。我們能求得一個鍊 $'U^k$ 與 U^k 同調，而且不含有 $\mathfrak{K}^{n-1}$ 的 k 維單純形。例如若 $\mathfrak{K}^{n-1}$ 上的單純形 $E^k=\varepsilon(P_0P_1\cdots P_k)$ 在 U^k 中的倍數是 u，從 U^k 減去

$$E^{k+1}=\varepsilon(OP_0P_1\cdots P_k)$$

這單純形的邊緣的 u 倍，我們就得着一個與 U^k 同調的鍊，不含有 E^k。我們如此依次把 U^k 中 $\mathfrak{K}^{n-1}$ 的單純形都消去，結果得着一個鍊 $'U^k\sim U^k$，$'U^k$ 中的 k 維單純形都與 O 關聯。但是 $'U^k=0$。因爲，若是 $'U^k$ 含有一個單純形 $'E^k$ 的 $'u$ 倍，$'U^k$ 的邊緣就也含有 $'E^k$ 上與 O 對立的

面單純形 $'E^{k-1}$ 的 $'u$ 倍。但是 $'E^k$ 是 $\mathfrak{K}^n$ 中唯一的用 $'E^{k-1}$ 作面與 O 作頂點的 k 維單純形。所以從 $F['U^k]=0$, 可知 $'u=0$。這就證明了：**若是 $k>0$, 一個單純星形上的每一閉 k 維鍊都是零調鍊。**

$$p^0=1,\ p^1=p^2=\cdots=p^n=0;\ 撓係數不存在。$$

5. n **維單純形。** 因爲一個 k 維單純形也能當作是一個單純星形，(他的中心是一個頂點，外邊緣是這頂點的對立面)，所以除了第零個同調羣之外，n 維單純形的其他同調羣都只含有零元。

6. n **維球。** 我們用四面形式的剖分 (頁 73)。所以這 n 維球 $\mathfrak{S}^n$ 是一個 $n+1$ 維單純形 $\mathfrak{E}^{n+1}$ 的邊緣。根據 5., $\mathfrak{S}^n$ 上的一個閉 k 維鍊 U^k $(k>0)$ 在 $\mathfrak{E}^{n+1}$ 上零調，是一個鍊 U^{k+1} 的邊緣。除了 $k+1=n+1$ 之外，U^{k+1} 也在 $\mathfrak{S}^n$ 上，所以若是 $0<k<n$, 在 $\mathfrak{S}^n$ 上 $U^k\sim 0$。若是 $k=n$, 因爲 E^{n+1} 這定向單純形是唯一的 $n+1$ 維單純形，U^{n+1} 必定是 E^{n+1} 的倍數：

$$U^{n+1}=u\,E^{n+1},$$

所以

$$F[U^{n+1}]=u\,F[E^{n+1}]。$$

因爲 $\mathfrak{S}^n$ 只是 n 維複合形，若是 $u\neq 0$, $u\,F[E^{n+1}]$ 在 $\mathfrak{S}^n$ 上不零調。我們所以得着下述結論：**一個 $n+1$ 維單純形的邊緣的第零個與第 n 個同調羣都是自由循環羣，其他同調羣都只含有零元：**

$$p^0=1,\ p^1=p^2=\cdots=p^{n-1}=0,\ p^n=1;\ 撓係數不存在。$$

稍爲複雜的例子，例如三維流體，就可以有任意多個，等于任意值

的撓係數。參看第九章中的 §61 與 §62 中的習題 4。

§20 能除的同調式

$\mathfrak{T}^k$, $\mathfrak{G}^k$, $\mathfrak{N}^k$ 這三個框格之間，還可以再加入一個框格 $\mathfrak{D}^k$，由所有的 k 維鍊，每一個都有一個不等于零的倍數屬于 $\mathfrak{N}^k$ 的，組成。這種的鍊顯然組成一個框格。因爲，若是 cU^k 與 dV^k 屬于 $\mathfrak{N}^k (c \neq 0, d \neq 0)$，$cd(U^k \pm V^k)$ 必屬于 $\mathfrak{N}^k$；那就是說，若是二鍊 U^k 與 V^k 屬于 $\mathfrak{D}^k$，他們的和與差也屬于 $\mathfrak{D}^k$。$\mathfrak{N}^k$ 是 $\mathfrak{D}^k$ 的子框格，而 $\mathfrak{D}^k$ 又是 $\mathfrak{G}^k$ 的子框格。因爲 $\mathfrak{N}^k$ 中的鍊都是閉鍊，屬于 $\mathfrak{N}^k$ 的 cU^k 當然也是閉鍊；根據 §16 中的公式 (3)，U^k 也是閉鍊。所以有下列一串框格：

$$\mathfrak{T}^k,\ \mathfrak{G}^k,\ \mathfrak{D}^k,\ \mathfrak{N}^k,$$

其中每一個含有他以後的框格。

$\mathfrak{D}^k$ 中的鍊就說是**能除的零調** (*divisions-nullhomolog*, 記號 ≈ 0)。

$$U^k \approx 0$$

的意義就是說：有一個整數 $c \neq 0$ 存在，使 $cU^k \sim 0$。能除的零調鍊有時候也叫做**邊緣因子** (*Randteiler*)。若是 $\mathfrak{T}^k$ 中的二鍊 T_1^k 與 T_2^k 的差 ≈ 0，我們就說他們互相**能除的同調** (*divisionshomolog*)：

$$T_1^k \approx T_2^k。$$

這樣的一個關係叫做一個**能除的同調式** (*Divisionshomologie*)。

一個能除的同調式可以加上或減去另一個能除的同調式，可以乘上一個整數；這就等于說，$\mathfrak{D}^k$ 是一個框格。能除的同調式與通常的同

調式不同，他還可以除一個不等于零的因子(能除的同調式這名稱的來源)。

$$bW^k \approx 0 \tag{1}$$

的意義是說，有一個適當的 $c \neq 0$ 存在，使 $c(bW^k) \sim 0$。若是 $b \neq 0$，這同調式也與

$$W^k \approx 0 \tag{2}$$

的意義相同，所以從(1)得着(2)。

我們再討論按照子框格 $\mathfrak{N}^k$ 分開 $\mathfrak{D}^k$ 而得着的剩餘類。這些剩餘類都是同調類，也是同調羣 $\mathfrak{H}^k=\mathfrak{G}^k/\mathfrak{N}^k$ 中有限級的元，因爲 $\mathfrak{D}^k$ 中的每一個鍊有一個不等于零的倍數屬于 $\mathfrak{N}^k$。反之，若是一個鍊的一個不等于零的倍數零調，這鍊必定屬于 $\mathfrak{D}^k$，所以 $\mathfrak{D}^k$ 恰由{所有的}有限級的同調類組成。換句話說，商羣 $\mathfrak{D}^k/\mathfrak{N}^k$ 是同調羣的子羣，由同調羣中{所有的}有限級的元組成。這羣叫做 k 維的**撓羣** (*Torsionsgruppe*)。他的級等于 k 維的撓係數的積。

若是按照子框格 $\mathfrak{D}^k$ 分開 $\mathfrak{G}^k$，所有的閉鍊就分成互相能除的同調鍊組。商羣 $\mathfrak{G}^k/\mathfrak{D}^k$ 叫做 k 維的 *Betti* **羣** (*Bettische Gruppe*)。[13] 根據羣論中的下述關係 (§83)：

$$\mathfrak{G}^k/\mathfrak{D}^k \text{ 與 } (\mathfrak{G}^k/\mathfrak{N}^k)/(\mathfrak{D}^k/\mathfrak{N}^k) \text{ 單純同構},$$

我們也能把 *Betti* 羣看作是同調羣 $\mathfrak{H}^k=\mathfrak{G}^k/\mathfrak{N}^k$ 被撓羣 $\mathfrak{D}^k/\mathfrak{N}^k$ 除的商羣。因爲 $\mathfrak{H}^k$ 是撓羣與有 p^k 個母元的自由 *Abel* 羣的直接和，所以 *Betti* 羣本身是有 p^k 個母元的自由 *Abel* 羣。加入的框格 $\mathfrak{D}^k$，因此

使同調羣分成兩部分：有限的部分是撓羣，無窮的部分是 Betti 羣。這裏我們當然要注意我們只說 Betti 羣是同調羣的一個商羣，並不說他是同調羣的一個子羣。

有了同調基，同時就有了撓基與 Betti 基。用 $c_1^k, c_2^k, \cdots, c_{\varrho^k}^k$ 級的循環羣的直接和代表撓羣，在每一循環羣中取一母元(一確定的同調類)，再在每一母元中取一代表鍊。這 ρ^k 個鍊就組成一個撓基 (*Torsionsbasis*)。——若是我們同樣的用 p^k 個自由循環羣的直接和代表 Betti 羣，在每一自由循環羣中取一母元 (一組互相能除的同調鍊)，再在每一母元中取一代表鍊，這 p^k 個鍊就組成一個 Betti 基 (*Betti Basis*)。任一閉鍊所以與這 p^k 個基鍊的一個平直組合能除的同調。頁 89 上的同調基

$$A_1^k, A_2^k, \cdots, A_{\varrho^k}^k, B_1^k, B_2^k, \cdots, B_{p^k}^k$$

中的 ρ^k 個 A^k 組成一個撓基，p^k 個 B^k 組成一個 Betti 基。從一個 Betti 基

$$B_1^k, B_2^k, \cdots, B_{p^k}^k$$

換成另一個 Betti 基，

$$'B_1^k, 'B_2^k, \cdots, 'B_{p^k}^k \;,$$

都可以由一整數的么模 (*unimodular*) 的變換

$$'B_\mu^k \approx \sum_{\nu=1}^{p^k} b_{\mu\nu} B_\nu^k \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, p^k)$$

實現。

環面(§19，例 3)無撓基，撓羣只含有零元；鍊 a^1 $(=B_1^1)$ 與 b^1 $(=B_2^1)$

——經圓與緯圓——組成 Betti 基。投影平面（§19，例 2）無 Betti 基，Betti 羣只含有零元；鍊 A^1——投影直線——組成撓基。

彙集前此所遇見的羣與框格：

$\mathfrak{T}^k$ 所有的 k 維鍊的框格

$\mathfrak{G}^k$ k 維閉鍊的框格

$\mathfrak{D}^k$ 能除的零調鍊的框格

$\mathfrak{N}^k$ 零調鍊的框格

$\mathfrak{H}^k=\mathfrak{G}^k/\mathfrak{N}^k$ 同調羣

$\mathfrak{D}^k/\mathfrak{N}^k$ 撓羣

$\mathfrak{G}^k/\mathfrak{D}^k$ 或 $\mathfrak{H}^k/(\mathfrak{D}^k/\mathfrak{N}^k)$ Betti 羣。

§21 從關聯矩陣計算同調羣

我們已經有了任一單純複合形的同調羣的定義。我們現在要說明一個普遍的方法，用這方法至少可以計算有限的複合形的同調羣。爲了達到這目的，我們設想所有的單純形都有了確定的定向（零維單純形都加上了 + 號），用

$$E^k_\varkappa \qquad (\varkappa=1,2,\cdots\alpha^k;\ k=0,1,\cdots,n)$$

表示。在 $0\leqq k\leqq n-1$ 的時候，有下列邊緣關係 (*Berandungsrelation*)：

$$F[E^{k+1}_\lambda]=\sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k}\varepsilon^k_{\varkappa\lambda}E^k_\varkappa \qquad (\lambda=1,2,\cdots,\alpha^{k+1})。\quad (1)$$

矩陣

$$\left(\varepsilon^k_{\varkappa\lambda}\right) = \mathsf{E}^k \qquad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

可以看作是縱橫兩列的表。左縱列中是 k 維的定向單純形，上橫列中是 $k+1$ 維的；$\varkappa$ 橫列與 λ 縱列的交點是 $\varepsilon^k_{\varkappa\lambda}$，就是定向的單純形 $E^k_\varkappa$ 在 E^{k+1}_λ 的邊緣鍊中的係數。$\varepsilon^k_{\varkappa\lambda}=+1$ 或 $=-1$，或 $=0$，按照 $E^k_\varkappa$ 的定向與被 E^{k+1}_λ 引出的相同，或相反，或 $E^k_\varkappa$ 與 E^{k+1}_λ 不關聯而定。矩陣 E^k 就叫做這複合形的這單純剖分的 k 維的關聯矩陣。[14]

圖 41 表出的複合形，只有一個二維單純形，他的單純形也都有確定的定向。他的關聯矩陣 E^0 與 E^1 如下：

E^0	E^1_1	E^1_2	E^1_3
E^0_1	0	-1	-1
E^0_2	$+1$	0	$+1$
E^0_3	-1	$+1$	0

E^1	E^2
E^1_1	$+1$
E^1_2	$+1$
E^1_3	-1

單純的複合形能完全從關聯矩陣確定。 有了關聯矩陣，我們就能確定每一個 k 維單純形 $E^k_\varkappa$ 所有的 $k-1$ 維面，每一個 $k-1$ 維面的 $k-2$ 維面等等，因此最後能確定 $E^k_\varkappa$ 的頂點。所以有了關聯矩陣，我們就能確定複合形的表格，也就能確定複合形自身。所此我們能從關聯矩陣推演出複合形的所有的性質，特別是他的同調羣。我們現在就是要從關聯矩陣計算同調羣。

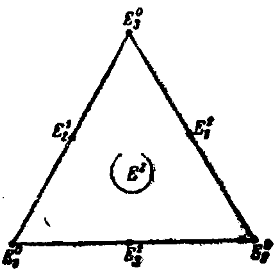


圖 41

設方程式 (1) 中的 $k>0$。因爲邊緣是一個閉鍊，我們再求 (1) 中邊緣的邊緣，即有

$$F[F[E_\lambda^{k+1}]] = \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} \varepsilon_{\varkappa\lambda}^k F[E_\varkappa^k] = \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} \varepsilon_{\varkappa\lambda}^k \sum_{\iota=1}^{\alpha^{k-1}} \varepsilon_{\iota\varkappa}^{k-1} \; E_\iota^{k-1}$$

$$= \sum_{\iota=1}^{\alpha^{k-1}} \left(\sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} \varepsilon_{\iota\varkappa}^{k-1} \; \varepsilon_{\varkappa\lambda}^k \right) E_\iota^{k-1} = 0。$$

因爲 E_ι^{k-1} 乎直無關，他們的係數都等於零：

$$\sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} \varepsilon_{\iota\varkappa}^{k-1} \; \varepsilon_{\varkappa\lambda}^k = 0 \qquad (\iota=1,2,\cdots,\alpha^{k-1};\ \lambda=1,2,\cdots,\alpha^{k+1})。$$

這一組方程式能用矩陣論*) 中的記號，寫成一個矩陣方程式：

$$\mathsf{E}^{k-1}\,\mathsf{E}^k = 0 \qquad (k=1,2,\cdots,n-1)。 \quad (2)$$

這些方程式表明 $k+1$ 維單純形的邊緣的邊緣等于零，所以也就是表明每一個邊緣鍊都是閉鍊。

定向的單純形

$$E_1^k,\ E_2^k,\ \cdots,\ E_{\alpha^k}^k$$

組成 $\mathfrak{T}^k$ (所有的 k 維鍊的框格) 的一個特殊基底。我們現在對于每一個維數 $k=0,1,\cdots,n$, 取一個新基底，

$$U_1^k,\ U_2^k,\ \cdots,\ U_{\alpha^k}^k,$$

*) 可參考 *B. L. Bieberbach, Analytische Geometrie* (*Leipzig* 1932) §11，或 *Schreier-Sperner, Vorlesungen über Matrizen* (*Leipzig* 1932)。

替代前文的特殊基底。對于這些鍊，下列邊緣關係

$$F[U_\lambda^{k+1}] = \sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k} {}'\varepsilon_{\varkappa\lambda}^k\, U_\varkappa^k \tag{1'}$$

成立；他們替代邊緣關係(1)，給定一個新矩陣 $'\mathsf{E}^k$。因爲邊緣的邊緣仍等于零，這些新的，左上角加了一撇的矩陣也適合下列方程式:

$$'\mathsf{E}^{k-1}\, '\mathsf{E}^k = 0_\circ$$

我們現在要取定每一框格 $\mathfrak{T}^k$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$ 的一個新基底，使新矩陣的形式最簡單，化成所謂法式 (*Normalform*) H^k。我們一步一步的把由 E^k 組成的基底改變成最後適用的新基底。每一步我們只改變一個確定的維數的一個基底鍊。每一步只是下列兩種**元變換** (*elementare Transformation*) 的一個:

a) 用 $U_\tau^t = E_\tau^t + E_\upsilon^t$ $(\tau \neq \upsilon)$ 替代 E_τ^t；

b) 用 $U_\tau^t = -E_\tau^t$ 替代 E_τ^t。

經過變換 a) 之後，除 U_τ^t 外，所有的 $U_\varkappa^k$ 都與舊的 $E_\varkappa^k$ 相同。所以只改變了 E^{t-1} 與 E^t 兩個關聯矩陣。E^{t-1} 中只改變了第 τ 個縱列。要知道如何改變，我們寫下

$$F[U_\tau^t] = F[E_\tau^t + E_\upsilon^t] = \sum_{\sigma=1}^{\alpha^{t-1}} (\varepsilon_{\sigma\tau}^{t-1} + \varepsilon_{\sigma\upsilon}^{t-1}) U_\sigma^{t-1} = \sum_{\sigma=1}^{\alpha^{t-1}} {}'\varepsilon_{\sigma\tau}^{t-1}\, U_\sigma^{t-1};$$

所以

$$'\varepsilon_{\sigma\tau}^{t-1} = \varepsilon_{\sigma\tau}^{t-1} + \varepsilon_{\sigma\upsilon}^{t-1}{}_\circ$$

因此我們必須把 E^{t-1} 中的第 v 個縱列加到第 τ 個縱列上去纔得着 $'\mathsf{E}^{t-1}$。——矩陣 E^t 中的左縱列的 E^t_τ 用 $U^t_\tau = E^t_\tau + E^t_v$ 替代，他的上橫列不變。寫下

$$F[U^{t+1}_\lambda] = F[E^{t+1}_\lambda] = \cdots + \varepsilon^t_{\tau\lambda} E^t_\tau + \cdots + \varepsilon^t_{v\lambda} E^t_v + \cdots$$

$$= \cdots + \varepsilon^t_{\tau\lambda}(E^t_\tau + E^t_v) + \cdots + (\varepsilon^t_{v\lambda} - \varepsilon^t_{\tau\lambda}) E^t_v + \cdots$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\alpha^t} {}'\varepsilon^t_{\mu\lambda} U^t_\mu,$$

卽知

$$'\varepsilon^t_{\mu\lambda} = \varepsilon^t_{\mu\lambda} \quad (\mu \neq v)$$

$$'\varepsilon^t_{v\lambda} = \varepsilon^t_{v\lambda} - \varepsilon^t_{\tau\lambda};$$

那就是說，E^t 中的第 v 個橫列減去第 τ 個橫列就改變成 $'\mathsf{E}^t$。

元變換 b) 使 E^{t-1} 中的第 τ 個縱列與 E^t 中的第 τ 個橫列改變正負號。

如同用一個元變換把基底 E 改變成基底 U，我們能再用元變換把 U 改變成基底 V。矩陣 $'\mathsf{E}^k$ 就也同 E^k 一様的改變了。特別我們能先改變 E^t 中第 τ 個橫列的正負號，再用變換 a)，然後又恢復第 τ 個橫列的原來的正負號；如此應用 a) 與 b) 的結果是使 E^t 中的兩個橫列相加的一個變換。

a) 與 b) 這兩種變換是鍊的變換。他們能產生矩陣四種元變換（橫

列或縱列的相加，橫列或縱列的變號），*) 把一個整數矩陣化成 §87 中所給定的法式。這法式的從左上角起的對角線上，是不變因子(*invarianter Faktor*)，他們的個數與矩陣的秩 (*Rang*) 相等；其餘的元都是零。

我們現在開始說明化所有的關聯矩陣為法式的步驟。**) 先把 E^0 化成所說的法式，其中的不變因子在從左上角起的對角線上 (圖 42)。

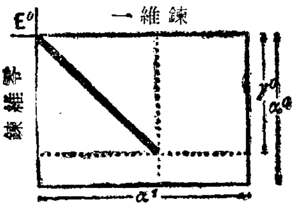


圖 42

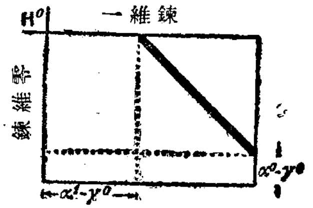


圖 43

再用適當的元變換，把不變因子移到那劃分右上角的斜線上 (圖 43)。不變因子的個數等于 E^0 的秩 γ^0。從圖 42 中的矩陣改變成圖 43 中的矩陣的時候，E^1 中的橫列也同時改變了，但是 E^1 的左縱列還與 E^0 的上橫列相同。因為仍舊 $E^0\,E^1=0$，所以在改變了的矩陣 E^1 中，最後的 γ^0 個橫列中都是零元。我們再處置矩陣 E^1 的最前 $\alpha^1-\gamma^0$ 個橫列。這些橫列的變換相當于 E^0 中最前 $\alpha^1-\gamma^0$ 個縱列的變換；因為這些縱

*) 我們可以連帶注意，元變換 *a*) 與 *b*) 是兩個特殊的，變基底 E^t 成新基底 U^t 的整數的么模的變換。公式(1)普遍的表明固定了 σ 的值的時候，$\varepsilon^{t-1}_{\sigma\tau}$ 這一組變數與 E^t_τ 是同步 (*kogredient*) 變量；固定了 λ 的值的時候，$\varepsilon^t_{\tau\lambda}$ 這一組變數與 E^t_τ 是逆步 (*kontragredient*) 變量。因為我們不需要普遍的整數的么模變換，我們在這裏只限于 *a*) 與 *b*) 這兩種。普遍的討論可看 § 71。至于下列事實，每一個整數的么模變換可化作如同 *a*) 與 *b*) 這兩種變換的乘積，我們並不需要，所以也不證明。

**) 我們只需要 $E^{k-1}\,E^k=0$ 這一個矩陣方程式。至于矩陣 $E^0, E^1, \cdots, E^n$ 是否是一個單純複合形的關聯矩陣，對于這種步驟毫無影響。

列中只有零，他們的變換並不改變 $\varepsilon^0_{\iota\varkappa}$ 的值。E^0 所以有了最後所要的形式，可用 H^0 表示。變換 E^1 中的縱列，對于 H^0 不發生影響；用這種變換，把 E^1 化成法式 H^1，H^1 中的不變因子的地位與 H^0 中的相同。其他矩陣 E^2, $\cdots$ E^{n-1}，我們也一個一個的，同樣的都化成法式。

關聯矩陣 E^k 都如此化成法式 H^k。H^k 中的，在劃分右上角斜線之外的元都是零(圖44)，這線段上的最前 ρ^k 個數 $c_1^k, c_2^k, \cdots, c_{\rho^k}^k$ 不等于 1，每一個是前一個的因子，叫做 k 維的撓係數；其餘 $\gamma^k-\rho^k$ 個數都等于 1。

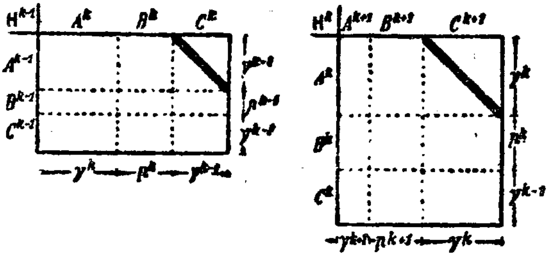


圖 44

關聯矩陣化成法式之後，我們的目的就容易達到了；因爲我們從法式 H^k，就可以如下的確定 k 維鍊的，閉 k 維鍊的與零調的 k 維鍊的框格 $\mathfrak{T}^k$, $\mathfrak{G}^k$, $\mathfrak{N}^k$，因此也可以確定同調羣。

H^{k-1} 的上橫列中的 k 維鍊 $(k=1,2,\cdots,n)$ 之中，最後的 γ^{k-1} 個的邊緣都不等于零，因爲 H^{k-1} 中最後的 γ^{k-1} 個縱列含有不變因子 $c_1^{k-1}, c_2^{k-1}, \cdots, c_{\gamma^{k-1}}^{k-1}$。我們把這些鍊叫做

$$C_1^k,\ C_2^k,\ \cdots,\ C_{\gamma^{k-1}}^k。$$

設 H^k $(k=0,1,\cdots,n-1)$ 的左縱列中最前的 γ^k 個鍊是

$$A_1^k,\ A_2^k,\ \cdots,\ A_{\gamma^k}^k。$$

他們能除的零調 (≈ 0)。因爲 H^k 中最後的 γ^k 個縱列含有不變因子 $c_1^k, c_2^k, \cdots, c_{\gamma^k}^k$,所以邊緣的關係如下:

$$F[C_\lambda^{k+1}] = c_\lambda^k A_\lambda^k \qquad (\lambda=1, 2, \cdots, \gamma^k; k=0, 1, \cdots, n-1)。\qquad (3)$$

在 k 等于從 0 到 n 的任一整數的時候,C^k 與 A^k 並不必都存在。因爲每一個零維鍊都是閉鍊,在 $k=0$ 的時候,C^0 不存在。因爲無 $n+1$ 維的單純形,所以無不等于零的能除的零調的 n 維鍊,所以在 $k=n$ 的時候,A^n 不存在。因爲能除的零調鍊 A^k 是閉鍊,而 C^k 却不是閉鍊,所以一個鍊 A^k 顯然不能同時也是一個鍊 C^k。不過 A^k 與 C^k 通常不必恰就是 α^k 個基底鍊,我們把其餘的叫做

$$B_1^k,\ B_2^k, \cdots, B_{p^k}^k。$$

他們也同 A^k 一樣是閉鍊,但不是能除的零調鍊。他們的個數是

$$p^k = \alpha^k - \gamma^k - \gamma^{k-1}, \qquad (4)$$

$0<k<n$。若是 $k=0$, $p^0=\alpha^0-\gamma^0$; 若是 $k=n$, $p^n=\alpha^n-\gamma^{n-1}$。設 $\gamma^{-1}=\gamma^n=0$。然後 k 等于從零 0 到 n 的任一整數時,公式 (4) 都成立。

因爲 H^{k-1} 的上橫列組成所有的 k 維鍊的框格 $\mathfrak{T}^k$ 的一個基底 $(k=1, 2, \cdots, n)$,每一個 k 維鍊就可以寫成下式:

$$V^k = \sum_{\lambda=1}^{\gamma^k} x_\lambda^k A_\lambda^k + \sum_{\mu=1}^{p^k} y_\mu^k B_\mu^k + \sum_{\nu=1}^{\gamma^{k-1}} z_\nu^k C_\nu^k。$$

因爲 A_λ^k 與 B_μ^k 是閉鍊,只有在

$$\sum_{\nu=1}^{\gamma^{k-1}} z_\nu^k F[C_\nu^k] = \sum_{\nu=1}^{\gamma^{k-1}} z_\nu^k c_\nu^{k-1} A_\nu^{k-1} = 0$$

的時候，V^k 纔能是閉鍊；因爲 A_ν^{k-1} 平直無關，只有在所有的 $z_\nu^k = 0$ 的時候，這方程式纔能成立。——在 $k=0$ 的時候，C_ν^0 不存在，所以每一閉鍊是 A_λ^0 與 B_μ^0 的一個平直組合。

所以 k 維閉鍊的框格 $\mathfrak{G}^k(k=0, 1, \cdots, n)$ 是 γ^k 個鍊 A_λ^k 與 p^k 個鍊 B_μ^k 佈成的。

我們再看零調的 k 維鍊的框格 $\mathfrak{N}^k$。一個 k 維閉鍊

$$V_k = \sum_{\lambda=1}^{\gamma^k} x_\lambda^k A_\lambda^k + \sum_{\mu=1}^{p^k} y_\mu^k B_\mu^k \qquad (k=0, 1, \cdots, n-1) \quad (5)$$

若零調，他必是一個 $k+1$ 維的鍊的邊緣；因爲 $k+1$ 維鍊 A_λ^{k+1} 與 B_μ^{k+1} 都是閉鍊，V^k 就必是 C_λ^{k+1} 的一個平直組合的邊緣，如同

$$V^k = F\left[\sum_{\lambda=1}^{\gamma^k} z_\lambda^{k+1} C_\lambda^{k+1}\right] = \sum_{\lambda=1}^{\gamma^k} z_\lambda^{k+1} c_\lambda^k A_\lambda^k。\quad (6)$$

因爲 A_λ^k 與 B_μ^k 平直無關，方程式(5) 與 (6)的係數必定一一相同；那就是說

$$x_\lambda^k = z_\lambda^{k+1} c_\lambda^k, \quad y_\mu^k = 0。$$

所以 k 維鍊(5)零調的充要條件，是係數適合

$$x_\lambda^k \equiv 0 \ (\text{模 } c_\lambda^k), \quad y_\mu^k = 0。\quad (7)$$

在 $k=n$ 的時候,鍊 A^n 不存在,這些方程式還成立;因爲唯一的零調的 n 維鍊就是 0 這個鍊。所以兩個 k 維鍊 V^k 與 $'V^k$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 屬于同一同調類的充要條件,是

$$x_\lambda^k \equiv {'x_\lambda^k} \ (\text{模}\ c_\lambda^k), \ y_\mu^k = {'y_\mu^k}。 \tag{8}$$

若把(5)中的係數 x_λ^k 用適合下列不等式

$$0 \leqq \xi_\lambda^k < c_\lambda^k \tag{9}$$

的 ξ_λ^k 替代,就得着一個同調鍊:

$$V^k \sim \sum_{\lambda=1}^{Q^k} \xi_\lambda^k A_\lambda^k + \sum_{\mu=1}^{p^k} \eta_\mu^k B_\mu^k。 \tag{10}$$

因爲法化的條件 (9),所有的相當于 $c_\lambda^k=1$ 的 A_λ^k 在 (10) 的右邊都消去了,所以 (10) 中的第一個和只要從 1 起,到 ρ^k 止;這裏的 ρ^k 表示矩陣 $\mathbf{E}^k$ 的不等于 1 的不變因子的個數,根據(8),給定了 V^k,係數 ξ_λ^k 與 η_λ^k 也就確定了。

換句話說,根據 (7) 與 (8),同調羣 $\mathfrak{H}^k$ 的循環子羣,用鍊 A_1^k 或 A_2^k $\cdots$, 或 $A_{Q^k}^k$ 的同調類做母元的,他們的級分別是 c_1^k 或 $c_2^k, \cdots$, 或 $c_{Q^k}^k$;用 B_1^k, 或 $B_2^k, \cdots$, 或 $B_{p^k}^k$ 的同調類做母元的,都是自由循環羣。根據(10),同調羣的每一元恰能用這些子羣的元(每一子羣中取一元)的和代表。$\mathfrak{H}^k$ 所以是這些子羣的直接和,$A_1^k, A_2^k, \cdots, A_{Q^k}^k$ 與 $B_1^k, B_2^k, \cdots, B_{p^k}^k$ 組成 k 維的同調基,$B_1^k, B_2^k, \cdots, B_{p^k}^k$ 組成 k 維的 *Betti* 基。$p^k =$

$\alpha^k-\gamma^k-\gamma^{k-1}$ 是 k 維的 *Betti* 數，$c_1^k, c_2^k, \cdots, c_{\rho^k}^k$ 是 k 維的撓係數。同調羣因此確定了，下述定理所以也證明了。

定理：若是單純的複合形 $\mathfrak{K}^n$ 中的 k 維單純形有 α^k 個；γ^k 是關聯矩陣 E^k 的秩，k 維的 *Betti* 數就是

$$p^k=\alpha^k-\gamma^k-\gamma^{k-1}$$

$(\gamma^{-1}=\gamma^n=0)$，k 維的撓係數是 E^k 的不等于 1 的不變因子；n 維的撓係數不存在。

爲着與複合形的別種的非數字的不變性，例如後來推演出來的基本羣，有區別起見，*Betti* 數與撓係數有時也叫做**不變數**（*numerische Invariante*）。

§22 塊形鍊

雖然在理論上說，同調羣總能用關聯矩陣計算。但實際的計算却可以很繁難。例如圖 40（頁 93）中給定的環面的單純剖分，就有 $\alpha^0=9, \alpha^1=27, \alpha^2=18$；我們就要討論 27 列的矩陣。不用說把這矩陣化成法式，就是只把他們寫出，已嫌太長太繁了。

所以最需要有一個比較簡單的，計算這些不變數與同調羣的方法。從前 k 維鍊中的項是個別的單純形，我們現在用整個的鍊（把他們叫做塊形（*Block*））。如同從前個別的單純形聯合成鍊，我們現在用有限個塊形聯合成塊形鍊（*Blockkette*）。我們現在要用塊形鍊來計算同調羣。

我們選取有限個 k 維單純鍊

$$Q_1^k,\ Q_2^k,\ \cdots,\ Q_{\bar{\alpha}^k}^k$$

$(k=0,1,\cdots,n)$，把他們叫做 k 維的塊形，要他們滿足下列條件：

(Bl_1) $Q_1^k,\ Q_2^k,\ \cdots,\ Q_{\bar{\alpha}^k}^k$ 平直無關，那就是說，若

$$t_1 Q_1^k + t_2 Q_2^k + \cdots + t_{\bar{\alpha}^k} Q_{\bar{\alpha}^k}^k = 0,$$

卽有 $t_1=t_2=\cdots=t_{\bar{\alpha}^k}=0$。例如若是選取的塊形每兩個都不含有公共的 k 維單純形，這條件就滿足了。

塊形的平直組合就叫做塊形鍊。因爲塊形平直無關，兩個塊形鍊 $\sum t_\mu Q_\mu^k$ 與 $\sum {}'t_\mu Q_\mu^k$ 相等的充要條件，就是 $t_1={}'t_1,\ t_2={}'t_2,\cdots,t_{\bar{\alpha}^k}={}'t_{\bar{\alpha}^k}$。因爲塊形鍊是特殊的單純鍊，每一塊形鍊有一確定的邊緣，因此我們也有閉塊形鍊與零調的塊形鍊。

我們還要使塊形鍊滿足下列條件：

(Bl_2) $k+1$ 維的塊形鍊的邊緣是一個 k 維的塊形鍊。——只要每一個 $k+1$ 維的塊形的邊緣還是一個塊形鍊，這條件就滿足了：

$$F[Q_\lambda^{k+1}]=\sum_{\varkappa=1}^{\bar{\alpha}^k} \bar{\varepsilon}_{\varkappa\lambda}^k Q_\varkappa^k \qquad (\lambda=1,2,\cdots,\alpha^{k+1})。\ (1)$$

(Bl_3) 每一個 k 維的閉單純鍊有一同調的塊形鍊。

(Bl_4) 若是一個 k 維塊形鍊零調，那就是說，是一個 $k+1$ 維的單純鍊的邊緣，他就也是一個 $k+1$ 維塊形鍊的邊緣。

這四個條件不互相矛盾。因爲 $\mathfrak{R}^n$ 的定向單純形是一組特殊的塊

形鍊，滿足這些條件。

要計算同調羣，我們可以不討論細分的單純鍊，只討論粗分的塊形鍊。計算的步驟恰同從前一樣。所不同的，我們現在不從單純複合形的關聯矩陣着手，却從邊緣關係 (1) 給定的，**塊形的關聯矩陣**

$$\left(\bar{\varepsilon}^k_{\varkappa\lambda}\right)=\bar{\mathrm{E}}^k,$$

着手。

雖然如此，我們還再演證一次，同時也可以表明何處需要這四個條件。

設 $k>0$。因爲邊緣的邊緣等于 0，我們再求 (1) 的兩端的邊緣，就得着 0 這 $k-1$ 維鍊。所以

$$\sum_{\varkappa=1}^{\bar{\alpha}^k}\sum_{\iota=1}^{\bar{\alpha}^{k-1}}\bar{\varepsilon}^k_{\varkappa\lambda}\,\bar{\varepsilon}^{k-1}_{\iota\varkappa}\,Q^{k-1}_\iota=0,$$

因爲 Q^{k-1}_ι 平直無關，卽有

$$\sum_{\varkappa=1}^{\bar{\alpha}^k}\bar{\varepsilon}^{k-1}_{\iota\varkappa}\,\bar{\varepsilon}^k_{\varkappa\lambda}=0,\ \text{或}\ \bar{\mathrm{E}}^{k-1}\,\bar{\mathrm{E}}^k=0。$$

用么模的變換改變矩陣的左縱列與上橫列中的塊形 Q^k，同 §21 中一樣，我們可以同時把所有的矩陣 $\bar{\mathrm{E}}^k$ 化成法式 $\bar{\mathrm{H}}^k$。

$\bar{\mathrm{H}}^k$ 的左縱列與上橫列的塊形鍊仍平直無關。 k 維的塊形鍊分成三種 $(k=0,1,\cdots,n)$：

1. 塊形鍊 $\bar{A}^k_\lambda$ $(\lambda=1,2,\cdots,\bar{\gamma}^k)$；他們是能除的零調鍊。

2. 塊形鍊 $\overline{B}^k_\mu$ $(\mu=1, 2, \cdots, \overline{p}^k)$； 他們也是閉鍊，但每一個的任一不等于零的倍數都不是一個 $k+1$ 維的塊形鍊的邊緣。

3. 塊形鍊 $\overline{C}^k_\nu$ $(\nu=1,2, \cdots, \overline{\gamma}^{k-1})$；他們不是閉鍊，而且

$$F[\overline{C}^k_\nu]=\overline{c}^{k-1}_\nu \ \overline{A}^{k-1}_\nu 。$$

這裏 $\overline{\gamma}^k$ 是 $\overline{\mathsf{E}}^k$ 的秩，$\overline{c}^k_\nu$ 是 $\overline{\mathsf{E}}^k$ 的不變因子，$\overline{p}^k=\overline{\alpha}^k-\overline{\gamma}^k-\overline{\gamma}^{k-1}$ $(\overline{\gamma}^{-1}=\overline{\gamma}^n=0)$。——現在同從前一樣，任一閉塊形鍊是 $\overline{A}^k_\lambda$ 與 $\overline{B}^k_\mu$ 的一個平直組合；因爲 (Bl_4)，零調的 k 維塊形鍊也是 $k+1$ 維的塊形鍊的邊緣，所以就是 $\overline{c}^k_\varkappa \overline{A}^k_\varkappa$ 與他們的平直組合。每一閉塊形鍊，並且，因爲(Bl_3)，每一閉單純鍊，都恰與一個如下列形式的平直組合

$$\xi_1 \overline{A}^k_1+\xi_2 \overline{A}^k_2+\cdots+\xi_{\overline{\gamma}^k} \overline{A}^k_{\overline{\gamma}^k}+\eta_1 \overline{B}^k_1+\eta_2 \overline{B}^k_2+\cdots+\eta_{\overline{p}^k} \overline{B}^k_{\overline{p}^k}$$

同調；這裏也是 $0\leqq\xi_\lambda<\overline{c}^k_\lambda$，$\eta_\mu$ 無限制。所以相當于不等于 1 的不變因子的 $\overline{A}^k$ 與所有的 $\overline{B}^k$ 組成 k 維的同調基，$\overline{B}^k$ 組成 k 維的 *Betti* 基。所以 *Betti* 數是

$$p^k=\overline{p}^k=\overline{\alpha}^k-\overline{\gamma}^k-\overline{\gamma}^{k-1}, \tag{2}$$

撓係數是 $\overline{\mathsf{E}}^k$ 的不等于 1 的不變因子 $\overline{c}^k_\nu=c^k_\nu$。

例：1. 在環面上(§19)，我們能選取頂點 O，一維鍊 a^1 與 b^1(經緯圓)，與二維鍊 U^2(由協合 (*kohärent*) 定向的二維單純形組成）做一組塊形。因爲這些 k 維的塊形無公共的單純形，(Bl_1) 滿足了。因爲他們也是閉鍊，(Bl_2) 也滿足了。在 $k=0$ 的時候，一個連通的複合形的每兩個零維單純形都同調，在 $k=1$ 的時候，我們已經證明過，每一個一維閉鍊與某一個 $\alpha a^1+\beta b^1$ 同調；在 $k=2$ 的時候，所有的二維閉鍊是 U^2 的倍數。所以(Bl_3)滿足了。最後，這些塊形也滿足 (Bl_4)。因爲 $k=0$ 的時候，0 這零維鍊是唯一的零調零維鍊，在 $k=1$ 的時候，我們已經在頁 93 上的 II 段中證明過，若是一個零調的一維鍊由塊形 a^1 與 b^1 組成，他必定是 0 這一維鍊，而且無不等于 0 的零調二維鍊。塊形關聯矩陣是

$\bar{E}^0$	a^1	b^1
O	0	0

,

$\bar{E}^1$	U^2
a^1	0
b^1	0

從這兩個矩陣我們仍舊得着從前計算出的同調羣。

2. 球面的八面形式的剖分 (§14) 有下列一組塊形: 赤道圓上的兩個徑點,赤道圓由這兩個徑點分成的兩個半圓(每一個半圓由兩個一維單純形組成),球面由赤道圓分成的兩個半球面。—— 若是再加一次法重分,然後把對徑的塊形當作同一個塊形,就得着投影平面的一組塊形。這一組塊形中每一個維數的塊形只有一個。這種塊形的選取可以推廣到任意維數。我們能利用這組塊形求得投影空間 $\mathfrak{P}^n$ 的關聯矩陣,因而從關聯矩陣計算 $\mathfrak{P}^n$ 的同調羣。但這種計算頗費周折,我們不擬採用。將來我們還有簡單的方法求得 $\mathfrak{P}^n$ 的同調羣 (頁 167)。

在討論流形的時候 (例如 §§ 41, 61, 67),塊形鍊這概念的用處更爲顯明。

§23　模 2 鍊,連 通 數, Euler 公 式

本章前數節中推論的根據,是鍊與邊緣這兩個概念,而這兩個概念的主要根據,完全是單純形的定向這一個概念。但是不用定向,我們也能相似的建立鍊的一種理論。這種不用定向的,不定向的鍊,叫做模 2 (*mod* 2) 鍊。在模 2 鍊的理論中,我們將要得到連通羣 (*Zusammenhangsgruppe*) 與連通數 (*Zusammenhangszahl*),分別相當于用定向的鍊的理論中的同調羣與 *Betti* 數。後來還要表明,關于 (定向的) 鍊的有效的定理與方法極容易引伸爲對于模 2 鍊的定理與方法。連通羣可從同調羣推證。從這一點看來,連通羣的重要性比較狹小。 但是他的普遍性更大,因爲在同調羣失效的時候,他還使普遍的推證可能。所以從另一方面看,他更爲重要。例如對偶定理 (*Dualitätssatz*) 這類定理,

若是用通常的鍊，我們只能證明對于能定向的流形這定理成立，若是用連通羣我們就能把這定理引伸到不能定向的流形。[15]

我們在本節中只討論不定向的單純形，換句話說，把定向相反的兩個單純形當作無區別。所以鍊 U^k 的兩倍與 $U^k-U^k=0$ 無區別。因此有下列必然的結論：若是二鍊

$$U^k = u_1 E_1^k + u_2 E_2^k + \cdots + u_{\alpha^k} E_{\alpha^k}^k ,$$

$$'U^k = 'u_1 E_1^k + 'u_2 E_2^k + \cdots + 'u_{\alpha^k} E_{\alpha^k}^k$$

中的相當係數，相差一個偶數，$u_\nu = 'u_\nu$（模 2），$\nu=1, 2, \cdots, \alpha^k$，這二鍊無區別。這樣的兩鍊就說是模 2 同餘 (*kongruent*)。所有的模 2 同餘的鍊 U^k, $'U^k$, $\cdots$，就當作是同一個模 2 鍊。我們能在模 2 鍊與 k 維的子複合形間建立一一對應的關係，規定模 2 同餘的鍊 U^k, $'U^k$, $\cdots$ 與一個子複合形對應如下：一個定向的單純形 E^k 在 U^k 中的倍數是奇數，因而在 $'U^k$, $\cdots$ 中的倍數也是奇數，是 $\mathfrak{E}^k$ 這不定向的單純形屬于這子複合形的充要條件。*）這子複合形就說是屬于 U^k（也屬于 $'U^k$, $\cdots$）的子複合形。（這子複合形並不一定由 U^k 中的**所有**的單純形組成。）一個模 2 鍊所以與一個 k 維的純粹的子複合形並無區別。我們所以採用"模 2 鍊"這名稱，而不採用"子複合形"，一方面因爲"模 2"是習用的概念，一方面也因爲我們將來要討論的廣義的模 2 鍊就不是子複合形。與子複合形一樣，模 2 鍊也用德文體字母表示。

*）這裏必須把"空的子複合形"也當作一個子複合形。這與頁 66 上不同。

我們必須界說模 2 鍊的和與邊緣。我們從兩個通常的鍊 U^k 與 V^k 着手;若是

$$W^k = U^k + V^k,$$

而且 $\mathfrak{W}^k$, $\mathfrak{U}^k$, $\mathfrak{V}^k$ 分別表示相當的模 2 鍊,我們就把 $\mathfrak{W}^k$ 這個模 2 鍊規定作 $\mathfrak{U}^k+\mathfrak{V}^k$ 這個和:

$$\mathfrak{W}^k = \mathfrak{U}^k + \mathfrak{V}^k。$$

所以組成 $\mathfrak{U}^k+\mathfrak{V}^k$ 的單純形,就是所有的在 U^k+V^k 中用奇數作倍數的單純形,也就是所有的只在 U^k 或 V^k 中用奇數作倍數的單純形,換句話說,就是在 $\mathfrak{U}^k$ 或 $\mathfrak{V}^k$ 二鍊的一個中出現的不定向的單純形。若是一個單純形同時屬于 $\mathfrak{U}^k$ 與 $\mathfrak{V}^k$,他就不屬于他們的和。

我們已經說過,每一鍊能用矢代表,矢的偏矢 (*Komponent*) 就是鍊中單純形的倍數;鍊的加法可以化作矢的加法,這種方法也能用來討論模 2 鍊。不過我們必須用模 2 餘數類作矢的偏矢,不用整數。偶數與奇數的兩個餘數類用 $\breve{0}$ 與 $\breve{1}$ 表示。然後有下列計算規律:

$$\breve{0}+\breve{0}=\breve{0}, \qquad \breve{0}+\breve{1}=\breve{1}, \qquad \breve{1}+\breve{1}=\breve{0},$$

$$\breve{0}\cdot\breve{0}=\breve{0}, \qquad \breve{0}\cdot\breve{1}=\breve{0}, \qquad \breve{1}\cdot\breve{1}=\breve{1},$$

例如 $\breve{1}+\breve{1}=\breve{0}$ 這規律就是說,二奇數的和是一偶數。模 2 鍊 $\mathfrak{U}^k$ 就可以寫作矢

$$\mathfrak{U}^k = (\breve{u}_1, \breve{u}_2, \cdots, \breve{u}_{\alpha^k});$$

這裏 $\breve{u}=\breve{1}$ 或 $\breve{0}$, 按照單純形 $\mathfrak{E}^k$ 在 $\mathfrak{U}^k$ 中的倍數是奇數或偶數而定。$\mathfrak{U}^k$ 與

$$\mathfrak{V}^k=(\breve{v}_1,\breve{v}_2,\cdots,\breve{v}_{\alpha^k})$$

的和就是

$$\mathfrak{U}^k+\mathfrak{V}^k=(\breve{u}_1+\breve{v}_1,\breve{u}_2+\breve{v}_2,\cdots,\breve{u}_{\alpha^k}+\breve{v}_{\alpha^k})。$$

$\mathfrak{E}_1^k,\mathfrak{E}_2^k,\cdots,\mathfrak{E}_{\alpha^k}^k$ 特別的相當于單位矢:

$$\mathfrak{E}_1^k=(\breve{1},\breve{0},\cdots,\breve{0}),\ \mathfrak{E}_2^k=(\breve{0},\breve{1},\cdots,\breve{0}),\cdots,\ \mathfrak{E}_{\alpha^k}^k=(\breve{0},\breve{0},\cdots,\breve{1})。$$

所以 $\mathfrak{U}^k$ 也可寫成

$$\mathfrak{U}^k=\breve{u}_1\mathfrak{E}_1^k+\breve{u}_2\mathfrak{E}_2^k+\cdots+\breve{u}_{\alpha^k}\mathfrak{E}_{\alpha^k}^k。\tag{1}$$

爲寫法一致起見,我們也簡單的用 $\mathfrak{E}_k$ 替代 $\breve{1}\,\mathfrak{E}^k$, 消去 $\breve{0}\,\mathfrak{E}^k$。 若是所有的 $\breve{u}=\breve{0}$, 就寫作 $\mathfrak{U}^k=\breve{0}$。

一個定向的單純形 E^k 的 $k-\hat{1}$ 維面, 每一個取用被引出的定向, 組成 E^k 的邊緣。因爲模 2 鍊的理論中不用定向,我們界說 $\mathfrak{E}^k$ 的邊緣 $F[\mathfrak{E}^k]$ 是由所有的不定向的 $k-1$ 維面組成的模 2 鍊:

$$F[\mathfrak{E}_\varkappa^k]=\sum_{\iota=1}^{\alpha^{k-1}}\breve{\varepsilon}_{\iota\varkappa}^{k-1}\,\mathfrak{E}_\iota^{k-1}。\tag{2}$$

這裏的 $\breve{\varepsilon}_{\iota\varkappa}^{k-1}=\breve{1}$ 或 $\breve{0}$,按照 $\mathfrak{E}_\iota^{k-1}$ 與 $\mathfrak{E}_\varkappa^k$ 關聯與否而定。——我們然後界說一個模 2 鍊(1)的邊緣就是個別的單純形的邊緣的和:

$$F[\mathfrak{U}^k]=\sum_{\varkappa=1}^{\alpha^k}\breve{u}_\varkappa\,F[\mathfrak{E}_\varkappa^k]。$$

所以一個 $k-1$ 維單純形屬于 $F[\mathfrak{U}^k]$ 的充要條件, 就是他與 $\mathfrak{U}^k$ 中奇數個單純形關聯。零維模 2 鍊的邊緣是 0 這個數。

所有的對于通常鍊界說的概念,都可以引伸到模 2 鍊。

若是一個模 2 鍊 $\mathfrak{U}^k$ 的邊緣等于零:

$$F[\mathfrak{U}^k]=0,$$

$\mathfrak{U}^k$ 就說是閉的。例如投影平面(圖 39,頁 87)中三邊形的全體就是一個模 2 閉鍊,因為每一條棱恰與兩個三邊形關聯。雖然我們從前說過,投影平面中通常的二維閉鍊不存在。§12 中所說的無邊緣的純粹子複合形都是模 2 閉鍊。

所有的零維模 2 鍊都是閉鍊。

若是一個模 2 鍊 $\mathfrak{U}^k$ 是一個 $k+1$ 維模 2 鍊的邊緣,$\mathfrak{U}^k$ 就說是零調。普遍的說,若是兩個模 2 鍊(不一定是閉鍊)相差一個零調模 2 鍊他們就叫做**互相模 2 同調**。

因為一個單純形的邊緣是一個模 2 閉鍊,**每一個模 2 零調鍊都是閉鍊。**

我們現在能把任一單純複合形 $\mathfrak{K}^n$ 所有的模 2 閉鍊分成互相同調的類。若是兩個同調類的和用兩個代表鍊的和的同調類表示,這些同調類組成一個羣 $\mathfrak{H}^k$。$\mathfrak{H}^k$ 與同調羣 $\mathfrak{H}^k$ 相似,叫做這單純複合形 $\mathfrak{K}^n$ 的**第 k 個連通羣**。一個有限的複合形 $\mathfrak{K}^n$ 的連通羣也是有限的。因為只有 2^{α^k} 個不同的 k 維鍊,所以當然只有有限個同調類。因為 $\mathfrak{U}^k+\mathfrak{U}^k=0$, $\mathfrak{H}^k$ 的每一不等於零的元的級都是 2。$\mathfrak{H}^k$ 所以是有限個級 2 的羣的直接和。這些羣的個數 q^k 就叫做 $\mathfrak{K}^n$ 的**第 k 個連通數**。*)

---

*) 這名稱的意義在 §41 (定理)中纔說明。

若是一組模 2 鍊

$$\mathfrak{U}_1^k, \mathfrak{U}_2^k, \cdots, \mathfrak{U}_r^k, \tag{3}$$

只在所有的 $\breve{t}_i = \breve{0}$ 的時候,纔適合方程式

$$\breve{t}_1 \mathfrak{U}_1^k + \breve{t}_2 \mathfrak{U}_2^k + \cdots + \breve{t}_r \mathfrak{U}_r^k = 0, \tag{4}$$

他們就說是**平直無關**。若是他們也是閉鍊,而且只在所有的 $\breve{t}_i = \breve{0}$ 的時候纔適合下列同調式

$$\breve{t}_1 \mathfrak{U}_1^k + \breve{t}_2 \mathfrak{U}_2^k + \cdots + \breve{t}_r \mathfrak{U}_r^k \sim 0, \tag{5}$$

他們就說是**同調無關**;否則**同調相關**。例如 r 個不同的單純形就平直無關。

$\breve{\mathfrak{H}}^k$ 是 q^k 個級 2 的羣的直接和。從每一羣取一個不等于零的元(即一個模 2 同調類),再從每一個這種的同調類取一個代表;這 q^k 個代表顯然的組成一組同調無關的模 2 鍊。這樣的一組 q^k 個模 2 鍊叫做 k **維的連通基** (*Zusammenhangsbasis*)。比 q^k 個還多的模 2 鍊必同調相關。設 $\mathfrak{U}_1^k, \mathfrak{U}_2^k, \cdots, \mathfrak{U}_r^k$ 是同調無關的模 2 鍊。所有的平直組合 $\breve{t}_1 \mathfrak{U}_1^k + \breve{t}_2 \mathfrak{U}_2^k + \cdots + \breve{t}_r \mathfrak{U}_r^k$ 中,每不同的兩個都不同調。所以至少有 2^r 個不同的同調類。但是因爲 2^{q^k} 是 $\breve{\mathfrak{H}}^k$ 的級,$\breve{\mathfrak{H}}^k$ 總共只有 2^{q^k} 個同調類,所以 $r \leqq q^k$。所以 k **維的連通數也是同調無關的** k **維模 2 鍊的最多的個數**,與 *Betti* 數相似。

從前我們用關聯矩陣計算 *Betti* 數 p^k,現在我們也能同樣的從模 2 關聯矩陣求連通數。所謂模 2 關聯矩陣,就是從邊緣關係(2)得着的矩陣

$$\breve{\mathsf{E}}^{k-1}=\left(\breve{\varepsilon}^{k-1}_{\iota\varkappa}\right)\quad(\iota=1,2,\cdots,\alpha^{k-1},\ \varkappa=1,2,\cdots,\alpha^{k},\ k=1,2,\cdots,n)。$$

計算的步驟同從前差不多處處相同。我們只要注意現在是模 2 鍊。矩陣中的元不是整數，只是餘數類 $\breve{0}$ 與 $\breve{1}$。從前化爲法式的步驟的主要根據是 $\mathsf{E}^{k-1}\mathsf{E}^{k}=0$，現在也有相當的方程式

$$\breve{\mathsf{E}}^{k-1}\breve{\mathsf{E}}^{k}=\breve{0}。$$

這裏的 $\breve{0}$ 簡略的代表 α^{k-1} 橫列，α^{k+1} 縱列的一個矩陣，他的所有的元是 $\breve{0}$。因爲 $\breve{1}=-\breve{1}$，§21 中的元變換 a) 與 b) 中的第二種是么變換，自然消去。模 2 關聯矩陣 $\breve{\mathsf{E}}^{k}$ 的法式 $\breve{\mathsf{H}}^{k}$ 中，除了劃分 $\breve{\mathsf{H}}^{k}$ 的右上角的斜線上的元都等于 $\breve{1}$ 之外，其餘的元都等于 $\breve{0}$。設 δ^{k} 是等于 $\breve{1}$ 的元的個數。

$\breve{\mathsf{E}}^{k-1}$ 的上橫列與 $\breve{\mathsf{E}}^{k}$ 的左縱列是 $\mathfrak{K}^{n}$ 的 α^{k} 個 k 維單純形。他們平直無關，每一個 k 維模 2 鍊是他們的一個平直組合。這種性質經過元變換不變，所以 $\breve{\mathsf{H}}^{k-1}$ 的上橫列與 $\breve{\mathsf{H}}^{k}$ 的左縱列中的 k 維鍊還有這種性質。他們分成 $\mathfrak{A}^{k}_{\lambda}$，$\mathfrak{B}^{k}_{\mu}$，$\mathfrak{C}^{k}_{\nu}$ 三組。$\mathfrak{C}^{k}_{\nu}$ $(\nu=1,2,\cdots,\delta^{k-1})$ 是 $\breve{\mathsf{H}}^{k-1}$ 的上橫列中最後的 δ^{k-1} 個模 2 鍊。因爲每一個這種縱列中有一元等于 $\breve{1}$，他們都不是閉鍊。$\mathfrak{A}^{k}_{\lambda}$ $(\lambda=1,2,\cdots,\delta^{k})$ 是 $\breve{\mathsf{H}}^{k}$ 的左縱列中最前的 δ^{k} 個模 2 鍊。因爲

$$F[\mathfrak{C}^{k+1}_{\lambda}]=\mathfrak{A}^{k}_{\lambda}\qquad(\lambda=1,2,\cdots,\delta^{k})\tag{6}$$

他們是零調模 2 鍊。其他模 2 鍊叫做 $\mathfrak{B}^{k}_{\mu}$ $(\mu=1,2,\cdots,\alpha^{k}-\delta^{k}-\delta^{k-1})$。他們都只是閉鍊，不是零調鍊。*)

---

*) 模 2 鍊 $\mathfrak{A}^{k}_{\lambda}$，$\mathfrak{B}^{k}_{\mu}$，$\mathfrak{C}^{k}_{\nu}$ 通常不是屬于 §21 中所說的鍊 A^{k}_{λ}，B^{k}_{μ}，C^{k}_{ν} 的模 2 鍊。例如，關聯矩陣的法式 H^{k-1} 中的一個鍊 C^{k}_{ν} 之下若有一個偶數撓係數，屬于他的模 2 鍊是閉鍊，但不是模 2 鍊 $\mathfrak{C}^{k}_{\nu}$ 中的一個。

最普遍的 k 維閉模 2 鍊是 $\mathfrak{A}_{\lambda}^{k}$ 與 $\mathfrak{B}_{\mu}^{k}$ 的一個平直組合；因為 $\mathfrak{A}_{\lambda}^{k}\sim 0$，所以與一個平直組合

$$\sum_{\mu=1}^{\alpha^k-\delta^k-\delta^{k-1}} \breve{\eta}_{\mu}\ \mathfrak{B}_{\mu}^{k} \tag{7}$$

同調。反之，因為邊緣關係 (6) 中只有 $\mathfrak{A}_{\lambda}^{k}$，若是 $\breve{\eta}_{\mu}$ 不全等于 $\breve{0}$，這麼一個平直組合就不 ~ 0。所以 $\mathfrak{B}_{\mu}^{k}$ 組成一個 k 維的連通基。第 k 個連通數是

$$q^k = \alpha^k - \delta^k - \delta^{k-1}, \tag{8}$$

$\delta^{-1} = \delta^n = 0$。$\delta^k$ 是 $\breve{\mathsf{H}}^k$ 的秩，也就是最大的，不等于 $\breve{0}$ 而等于 $\breve{1}$ 的，子行列式的列數。經過橫列或縱列的相加，秩不變，所以 δ^k 也是原來的模 2 關聯矩陣 $\breve{\mathsf{E}}^k$ 的秩。

我們現在要說明 *Betti* 數 p^k 與連通數 q^k 間的一個關係。設矩陣 E^k 有 g^k 個偶數不變因子，所以有 γ^k-g^k 個奇數不變因子（其中也能有等于 1 的）。所以 E^k 的法式 H^k 有一個 γ^k-g^k 列的子行列式等于奇數（這 γ^k-g^k 個奇數不變因子的乘積），但是他的所有的 γ^k-g^k+1 列的子行列式都等于偶數；因為元變換不改變行列式的因子（§87），E^k 也如此。若是把 E^k 中所有的偶數元用 $\breve{0}$ 替代，所有的奇數元用 $\breve{1}$ 替代，這就把 E^k 變成了模 2 矩陣 $\breve{\mathsf{E}}^k$，$\breve{\mathsf{E}}^k$ 所以也有一個 γ^k-g^k 列的子行列式等于 $\breve{1}$，他的所有的 γ^k-g^k+1 列的子行列式都等于 $\breve{0}$。$\breve{\mathsf{E}}^k$ 的秩所以是

$$\delta^k = \gamma^k - g^k。 \tag{9}$$

用這値替入 (8),我們求得

$$q^k = (\alpha^k - \gamma^k - \gamma^{k-1}) + g^k + g^{k-1}\,。\tag{10}$$

右端的括弧 (頁 109) 內的數是 *Betti* 數 p^k, 所以

$$q^k = p^k + g^k + g^{k-1}\,,\tag{11}$$

這裏的 $q^{-1} = q^n = 0$。

k **維的連通羣能從** k **維與** $k-1$ **維的同調羣確定**。——因爲這兩個同調羣確定了 *Betti* 數 p^k, 與 k 維的及 $k-1$ 維的撓係數,所以確定了 g^k 與 g^{k-1}, 所以也確定了連通數 q^k 與連通羣。

連通數 q^k 不比 *Betti* 數 p^k 小。

在模 2 鍊的理論中,我們也能界說塊形鍊,用塊形鍊計算連通羣。這種引用塊形鍊時所需要的條件也相當于條件(Bl_1) 至 (Bl_4)。詳細的論證讓讀者補充,作爲練習。

我們計算過同調羣的複合形的例子中,只有投影平面 (頁 92) 有一個撓係數,而且是一個偶數。這裏的 $g^1 = 1$, 所以 $q^1 = p^1 + g^1 = 1$, $q^2 = p^2 + q^2 = 1$。 這結果與下列事實相符: 投影平面有一個非零調的一維模 2 鍊(投影直線);還有一個二維模 2 鍊,由單純剖分中所有的單純形組成。其餘的例子沒有撓係數,所以連通數與 *Betti* 數相等。

Euler **示性數** (*Charakteristik*)。 我們根據公式 (11) 的指示,求 $n+1$ 個 $(-1)^k q^k$ 的和。因爲 $g^{-1} = g^n = 0$, 所以

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k p^k。$$

根據頁 109 上的公式

$$p^k = \alpha^k - \gamma^k - \gamma^{k-1}$$

與頁 112 上的公式

$$p^k = \bar{\alpha}^k - \bar{\gamma}^k - \bar{\gamma}^{k-1},$$

$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k q^k$ 又等于

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \alpha^k \text{ 與 } \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \bar{\alpha}^k;$$

這裏 α^k 是一個單純剖分中的 k 維單純形的個數，$\bar{\alpha}^k$ 是一個塊形剖分中的 k 維塊形的個數。所以

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k p^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \alpha^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \bar{\alpha}^k = -N; \quad (12)$$

N **這數叫做這個單純的複合形 $\mathfrak{K}^n$ 的** *Euler* **示性數。**

下章中我們要證明 N 是 $\mathfrak{K}^n$ 的拓撲不變性，不依賴于這選定的單純剖分。若是我們假設這結果，任意維的複合形的這公式 (12) 就是 *Euler* **多面形公式**(*Polyederformel*)的推廣。四面形的 *Betti* 數在 §19 (例 6)中已經求出。四面形的單純形的個數 α^k 也很容易計算；所以

$$\sum_{k=0}^{2}(-1)^k p^k = 1-0+1 = \sum_{k=0}^{2}(-1)^k \alpha^k = 4-6+4 = 2 = -N。$$

四面形的 *Euler* 示性數是 -2。所以在 $\mathfrak{K}^n$ 是四面形的時候，公式(12)

與事實符合。參看第六章 §38 與 §41。

習題：1. 用 §19 中的例子，覆驗公式 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k p^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \alpha^k$。

2. n 維球與 n 維投影空間的示性數 $N(\mathfrak{S}^n)$ 與 $N(\mathfrak{P}^n)$ 適合關係 $N(\mathfrak{S}^n)=2N(\mathfrak{P}^n)$。

3. 設一個一維的連通的複合形 $\mathfrak{K}^1$ 有 α^0 個零維單純形，α^1 個一維單純形。試利用公式 $-\alpha^0+\alpha^1=-p^0+p^1$，證明：這個"棱複合形"恰可消去 $-\alpha^0+\alpha^1+1$ 個一維單純形，而不分斷。

§24 假流形與能定向性

我們現在利用我們已有的資料，來討論一類特別的，叫做假流形 (*Pseudomannigfaltigkeit*) 的，複合形，作為討論流形的初步。

閉假流形的定義如下：

(PM_1) 他是一個純粹的，有限的，n 維的單純複合形 $(n \geqq 1)$。因為純粹，他的每一個 k 維單純形至少與一個 n 維單純形關聯（純粹條件）。

(PM_2) 每一個 $n-1$ 維單純形恰與兩個 n 維單純形關聯（無分支條件 (*Unverzweigtheitsbedingung*)）。

(PM_3) 給定了每兩個 n 維單純形，有一串連接他們的 n 維的與 $n-1$ 維的單純形存在；其中 n 維與 $n-1$ 維的單純形互相間隔，每一個單純形與下一個單純形關聯（連接條件）。

若是一個閉假流形的 n 維單純形都**能協合**的定向，那就是說，若是所有的 n 維單純形都能定向，使每一個 $n-1$ 維單純形被兩個關聯的 n 維單純形引出相反的定向，這閉假流形就說是**能定向** (*orientierbar*)。

若是不能協合的定向，這閉假流形就說是**不能定向**。

設有一個能定向的，協合的定了向的閉假流形。設這流形上給定了一個 n 維閉鍊。若是知道了這鍊中的單獨的一個單純形的倍數，這鍊就完全確定了。因爲每一個 n 維單純形，與這給定的 n 維單純形有公共 $n-1$ 維面的，在鍊中也必須有相同倍數；而且根據 (PM_3)，任一個 n 維單純形，都能與原來給定的那 n 維單純形，用一串 n 維的單純形連接。所以所有的 n 維單純形在鍊中的倍數都相同，所以第 n 個同調羣 $\mathfrak{H}^n$ 就是只有一個母元的自由羣；換句話說，第 n 個 Betti 數 $p^n = 1$。能定向的閉假流形有兩個不同的協合的定向法。這兩個閉 n 維鍊的任一個，是 n 維同調羣的一個基底。我們能同樣的證明，一個不能定向的假流形上，除 0 這鍊之外，無 n 維閉鍊。$\mathfrak{H}^n$ 所以只是一個零元：$p^n = 0$。所以一個閉假流形能不能定向，可以從第 n 個同調羣斷定：**能定向性的充要條件是第 n 個 Betti 數 p^n 等于 1。**

但是能定向的與不能定向的閉假流形的第 n 個連通數都是 $q^n=1$。因爲 n 維單純形的全體恰是唯一的不等于零的 n 維的閉模 2 鍊。

我們將來（§36）要證明，複合形是否一個假流形，是拓撲不變性。證明的方法是從同調性質（包括連通數）推出定義中的性質 (PM_1)，(PM_2) 與 (PM_3)，並且證明同調性質是不變性。所以現在值得注意，條件 (PM_3) 能用 $q^n=1$ 替代，更正確的說，下列兩組條件

$$(I)\quad (PM_1),\ (PM_2),\ (PM_3)$$

$$(II)\quad (PM_1),\ (PM_2),\quad q^n=1$$

等價。我們已經證明了 $q^n=1$ 是 (I) 的結果。反之,我們要從 (II) 證明 (PM_3): 設取定了一個 n 維單純形。所有的 n 維單純形,能與他用一串關聯的, n 維與 $n-1$ 維的互相間隔的, 單純形連接起來的, 組成一個 n 維模 2 鍊 $\mathfrak{U}^n$。因為根據 (PM_2), $\mathfrak{K}^n$ 的每一個 $n-1$ 維單純形恰與兩個 n 維單純形關聯,所以 $\mathfrak{U}^n$ 的每一個 $n-1$ 維的單純形也是如此,所以 $\mathfrak{U}^n$ 是閉鍊。若是還有 n 維單純形不屬于 $\mathfrak{U}^n$, 同樣可得一個 n 維模 2 鍊,所以 q^n 至小是 2。這與假設矛盾,所以 $\mathfrak{U}^n$ 含有 $\mathfrak{K}^n$ 的每一個單純形。

關于閉流形的第 $n-1$ 個同調羣,我們也能證明一些普遍定理。

定理 I: 能定向的假流形 $\mathfrak{K}^n$ 的關聯矩陣 E^{n-1} 的法式 H^{n-1} 如式 (1),不能定向的如式 (2):

$$\mathsf{H}^{n-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} (1), \quad \mathsf{H}^{n-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} (2)。$$

所以在(2)這種情形時,秩等于縱列的個數。在(1)這種情形時,秩等于縱列的個數減 1。而且只有在(2)這種情形時,有一個等于 2 的不

變因子。

證明: 因爲 $\mathfrak{K}^n$ 的每一個 $n-1$ 維的單純形恰與兩個 n 維的單純形關聯，E^{n-1} 的每一橫列中恰有兩個絕對值等于 1 的元，其餘的元都是零。連接條件(PM_3)就是說：若是把 E^{n-1} 的縱列任意分成兩組，必定有一橫列，他的兩個不等于零的元不同在一組的縱列之中。完全根據代數的推論 (§87)，E^{n-1} 的法式只能是 (1) 或 (2)。因爲矩陣(1)的上橫列中的第一個 n 維鍊是閉鍊，所以他必定屬于能定向的假流形。在(2)這種情形時，這種閉鍊不存在，所以假流形不能定向。

E^{n-1} 的不等于 1 的不變因子就是 $n-1$ 維的撓係數。所以上述定理也可以說成下式：

定理 *II*: 若是一個閉假流形 $\mathfrak{K}^n$ 能定向，他就無 $n-1$ 維的撓係數；若是他不能定向，他就恰有一個等于 2 的撓係數。

所以不能定向的閉假流形上，有一個 $n-1$ 維閉鍊 U^{n-1}，他自己不零調，而他的兩倍纔零調；而且任一個具有這性質的 $n-1$ 維閉鍊與 U^{n-1} 只相差一個零調鍊。我們得着如此一個 $n-1$ 維鍊 U^{n-1} 如下：設 $E_1^n, E_2^n, \cdots, E_{\alpha^n}^n$ 是 $\mathfrak{K}^n$ 的任意定了向的 n 維單純形。因爲 $\mathfrak{K}^n$ 不能定向，n 維鍊

$$U^n = E_1^n + E_2^n + \cdots + E_{\alpha^n}^n$$

的邊緣不等于零。一個 $n-1$ 維單純形在 $F[U^n]$中的倍數是 0 或是 2，按照關聯的兩個 n 維單純形在這 $n-1$ 維單純形上引出的定向相反或相同而定。所以 $F[U^n]$ 等于一個 $n-1$ 維鍊 U^{n-1} 的兩倍。所以 U^{n-1}

的兩倍零調。假如 U^{n-1} 是一個 n 維鍊 V^n 的邊緣，就會有

$$2U^{n-1}=F[2V^n]=F[U^n],\ F[U^n-2V^n]=0。$$

既然不能定向的閉假流形上，除 0 這 n 維鍊之外，無 n 維閉鍊存在，所以 $U^n=2V^n$。但每一個 n 維單純形只在 U^n 中出現一次，所以這結論矛盾。

一個**有邊緣的** (*berandet*) **假流形**由性質 (PM_1), (PM_3) 與下述替代 (PM_2) 的性質規定：

$(\overline{PM}_2)$ 每一個 $n-1$ 維單純形至多與兩個 n 維單純形關聯，而且至少有一個 $n-1$ 維單純形只與一個 n 維單純形關聯。

根據純粹的複合形的邊緣的定義(頁 83 的脚註)，有邊緣的假流形的邊緣就是所有的，只與一個 n 維單純形關聯的，$n-1$ 維單純形。不在邊緣上的點與單純形分別叫做**中間點**與**中間單純形**。

若是一個有邊緣的假流形的 n 維單純形能協合的定向，那就是說，若是能給定他們的定向，使他們在每一個中間的 $n-1$ 維單純形上引出相反的定向，這假流形就叫做**能定向的假流形**。

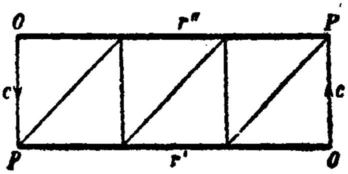


圖 45

平環(頁 84)與 *Möbius* 帶 (圖 45, {c 這二邊應疊合}) 是能定向與不能定向的假流形最簡單的例子。

設有一單純星形 $\mathfrak{St}^n$，他的中心是 O，他的外邊緣是一個閉假流形 $\mathfrak{A}^{n-1}$。這樣的一個單純星形 $\mathfrak{St}^n$ 也是一個有邊緣的假流形的例子。因

爲他的外邊緣滿足 (PM_1) 與 (PM_3)，$\mathfrak{St}^n$ 也滿足這兩個條件。因爲外邊緣的一個 $n-1$ 維單純形只與一個 n 維單純形關聯，所有其餘的(與 O 關聯的) $n-1$ 維單純形都與兩個 n 維單純形關聯，$(\overline{PM_2})$ 也滿足了。**若是 $\mathfrak{A}^{n-1}$ 能定向，$\mathfrak{St}^n$ 也能定向；反之亦然。**設

$$(O\,P_1\cdots P_{n-1})$$

是 $\mathfrak{St}^n$ 的一個與 O 關聯的 $n-1$ 維單純形，與他關聯的兩個 n 維單純形是

$$E^n=+(O\,P_1\cdots P_{n-1}\,P_n) \text{ 與 } 'E^n=-(O\,P_1\cdots P_{n-1}\,'P_n)。$$

這兩個定向的單純形在$(O\,P_1\cdots P_{n-1})$上引出相反的定向。E^n 與 $'E^n$ 各有一面屬于 $\mathfrak{A}^{n-1}$。若是這兩個面單純形用引出的定向：

$$E^{n-1}=+(P_1\cdots P_{n-1}\,P_n),\ 'E^{n-1}=-(P_1\cdots P_{n-1}\,'P_n),$$

E^n 與 $'E^n$ 在共面 $(P_1\cdots P_{n-1})$上也引出相反的定向。因此，$\mathfrak{A}^{n-1}$ 的 $n-1$ 維單純形的一個協合定向相當于 $\mathfrak{St}^n$ 的 n 維單純形的一個協合定向，反之亦然。協合的定了向的星形的邊緣鍊顯然是協合的定了向的外邊緣。

我們已經說過，能定向的閉假流形上的每一個 n 維閉鍊就是這協合的定了向的假流形的一個倍數。關于有邊緣的能定向的假流形，若是只討論邊緣在假流形的邊緣上的 n 維鍊，也有一條相當的定理。證明與對于閉假流形的證明一樣。

一個閉假流形的能定向性可以用第 n 個 *Betti* 數 $p^n=1$ 表出。關于有邊緣的假流形，就無相似的定理。例如(不定能向的) *Möbius* 帶與(能定向的)平環，他們的同調羣相同。所以閉假流形的能定向性的拓撲不變性比有邊緣的假流形的容易證明。前者是同調羣的不變性的直接結論(第四章)，而後者還需要邊緣的不變性與第五章中的更深的資料。

第四章 單純的逼近

在前一章中，我們先界說了一個單純的複合形的組合的表格，然後說明如何從表格求同調羣。在本章中，我們要證明同調羣的拓撲不變性。爲達到我們的目的起見，我們先介紹複合形 $\mathfrak{K}^n$ 上的廣義的 k 維單純形（§25）。所謂廣義的單純形就是實數空間中的平直單純形的綿續像。然後用廣義的單純形組成廣義鍊（§26），再界說廣義鍊的相加，廣義鍊的邊緣，廣義的閉鍊，與零調（是邊緣）的廣義鍊；於是把廣義鍊分成廣義的同調類。這種同調類組成這複合形的第 k 個廣義的同調羣（§27）。根據定義，我們就可以知道這同調羣是拓撲不變性，與 $\mathfrak{K}^n$ 的單純剖分無干。若是 $\mathfrak{K}^n$ 有了一個給定的單純剖分，我們可以用單純的逼近法（*simpliziale Approximation* 頁 150），把 $\mathfrak{K}^n$ 上的每一廣義鍊（經過若干次法重分之後）改換成 $\mathfrak{K}^n$ 的這剖分中的一個單純鍊，而不改變這廣義鍊的主要的拓撲性質，因此能證明廣義的同調羣與單純的同調羣相同（§28）。最基本的逼近定理（*Approximationssatz*）表明逼近的單純鍊的存在（§28）。

單純的逼近就是從複合形的一個綿續變換到一個"單純"變換的普遍歷程。變狀定理的內容正是說，每一個綿續變換可以"變狀"成一個單純變換（§31）。我們還連帶的研究變換的變狀在同調羣上所產生的影響。

§25 廣義單純形

若 $\mathfrak{M}$ 是 n 維的有限的或無窮的複合形*）$\mathfrak{K}^n$ 上的一個點集，而且是實數空間中的一個平直單純形 $\mathfrak{x}^k$ 的一個確定的單值而又綿續的像集，他就叫做一個廣義的 k 維單純形 $\mathfrak{X}^k$。我們現在所論的只是不定向的單純形，所以用德文體字母表示。

若是同一點集一方面看作是 $\mathfrak{x}^k$ 的像集，另一方面又看作是另一個 k 維單純形 $\bar{\mathfrak{x}}^k$ 的像集，因此有兩個廣義的 k 維單純形，是 $\mathfrak{K}^n$ 上的同一

*）任一鄰域空間中，例如一複合形的任一不等於零的子集中，我們也同樣的能界說廣義的單純形，鍊與同調羣。因此，$\mathfrak{K}^n$ 並無須是複合形。但只有用複合形的時候，我們纔從定義得着重要的結果。[16]

點集 $\mathfrak{M}$。若是 $\mathfrak{x}^k$ 與 $\bar{\mathfrak{x}}^k$ 間有一平直變換，而且平直對應點在 $\mathfrak{K}^n$ 上有同一像點，這兩個廣義單純形就說是**相等**，看作沒有區別。

$\mathfrak{x}^k$ 與 $\bar{\mathfrak{x}}^k$ 這兩個單純形都叫做這廣義的單純形 $\mathfrak{X}^k$ 的**原底**。原底用小寫字母表示。

若是兩個廣義單純形雖然是 $\mathfrak{K}^n$ 上同一點集 $\mathfrak{M}$，但他們的原底間無上文所說的那種平直變換，他們就是不同的廣義單純形。

設 $\mathfrak{X}^k$ 在 $\mathfrak{K}^n$ 上。$\mathfrak{X}^k$ 的維數 k 可以大於，小於，或等於複合形的維數 n。

例：$\mathfrak{K}^n$ 的一個單純剖分中的一個單純形能看作是一個廣義的 k 維單純形。因為他是實數空間中的一個平直原底單純形的拓撲像集。——若是一個平直的 k 維單純形的點全體變換成複合形上的一個點，這個點就是一個廣義的 k 維單純形。歐幾里得空間中的一個三邊形，不管如何摺疊的，甚至於壓擠成一條線或一個點的，也是一個廣義的二維單純形。實數平面中的一個 *Peano* 曲線*) 也是一個廣義的一維單純形。

$\mathfrak{x}^k$ 變換成 $\mathfrak{K}^n$ 上的一個點集 $\mathfrak{M}$ 的時候，$\mathfrak{x}^k$ 的一個 i 維面 $\mathfrak{x}^i$ 也同時變換成 $\mathfrak{M}$ 的一個子集 $\mathfrak{N}$，$\mathfrak{N}$ 看作是 $\mathfrak{x}^i$ 的像集，他就叫做這廣義的 k 維單純形 $\mathfrak{X}^k$ 的 i **維面** $\mathfrak{X}^i$，也是一個廣義的 i 維單純形。這樣的 $\mathfrak{X}^k$ 與 $\mathfrak{X}^i$ 就說是**關聯的**單純形。

我們用原底 $\mathfrak{x}^k$ 的定向，來規定廣義單純形的**定向**。定向的單純形用臘丁體字母表示。所以 $\mathfrak{M}$ 若是一複合形 $\mathfrak{K}^n$ 上的一個點集，而且是一個定向的 k 維單純形 x^k 的一個確定的單值綿續像集，他就是一個定向的廣義的 k 維單純形 X^k。設用另一平直單純形 $\bar{x}^k$ 替代 x^k，而且能把 x^k 平直的**同向的** (*mit Erhaltung der Orientierung*) 變換成 $\bar{x}^k$，

*) *F. Hausdorff, Mengenlehre* [2]，頁 202。

使平直對應的點換成 $\mathfrak{M}$ 中同一點。這由變換原底 x^k 與 $\bar{x}^k$ 而得着的兩個**定向的廣義的單純形就當作相等**,沒有區別。

每一個定向的廣義的單純形 X^k,有一個**定向相反的**,用 $-X^k$ 表示。我們只要改變 x^k 的定向,但仍舊用換 x^k 成 $\mathfrak{M}$ 的變換,就得着 $-X^k$。X^k 與 $-X^k$ 所以確定同一不定向的廣義的單純形 $\mathfrak{X}^k$。

X^k 與 $-X^k$ 能相等,那就是說,x^k 能平直的變換成 $-x^k$,而且平直對應的點在 $\mathfrak{X}^k$ 上有同一個像點。在這種情形下,定向的 X^k 與屬於 X^k 的不定向的 $\mathfrak{X}^k$ 都說是**降秩的**單純形。一個滿秩(即非降秩)的單純形也有兩個相反的定向;一個降秩的單純形的這兩個定向無區別。

例:1. $\mathfrak{R}^n$ 的一個單純剖分中的一個 $k-1$ 維單純形 $\mathfrak{S}^{k-1}$ 能看作是一個廣義的 k 維單純形 $\mathfrak{X}^k$;因爲我們能取一個以 p_0, p_1, $\cdots$, p_k 做頂點的原底 $\mathfrak{x}^k$,把 $\mathfrak{x}^k$ 平直的變換成 $\mathfrak{S}^{k-1}$,使兩個頂點,如同 p_{k-1} 與 p_k,變換成 $\mathfrak{S}^{k-1}$ 的同一頂點。$\mathfrak{x}^k$ 有一個平直的自身變換,改變他的定向;例如只交換頂點 p_{k-1} 與 p_k 而不改變其餘的頂點的這平直變換。平直對應的點在點集 $\mathfrak{M}=\mathfrak{S}^{k-1}$ 上有同一像點。$\mathfrak{X}^k$ 這單純形所以是 $\mathfrak{R}^n$ 上的一個降秩的廣義單純形。普遍的說,若是一個廣義的 k 維單純形是由平直的變換他的原底 $\mathfrak{x}^k$ 成一個單純形 $\mathfrak{S}^{k-i}$ $(i>0)$ 得來的,這廣義的單純形就也是降秩的單純形(頁 54)。

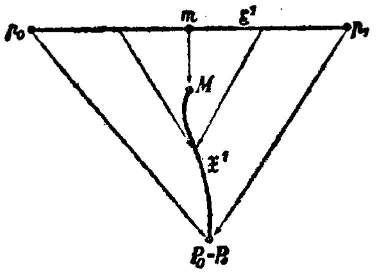


圖 46

2. 設原底是實數直線上的線段 $(p_0\,p_1)=\mathfrak{x}^1$(圖 46)這一維單純形。若是疊合 $\mathfrak{x}^1$,使與中心 m 等距離的每二點合成一點,我們就得着一個廣義單純形 $\mathfrak{X}^1$。假設 $\mathfrak{X}^1$ 在實數平面中。$\mathfrak{X}^1$ 是降秩的單純形,因爲 $(p_0\ p_1)$ 這線段上的,以 m 爲中心的反射(*Spiegelung*),就是這線段的一個反向的(*mit Umkehrung der Orientierung*)平直的自身變換,而且這線段上平直對應的點在 $\mathfrak{X}^1$ 上有同一像點。但若是把這線段如此疊合,使 p_0 與 p_1 變換成像線段上的一個頂點,m 變換成像線段的另一頂點,但是以 m 爲中心的每二反射點不都變換成同一個像點,從這變換得着的就只是廣義的一維單純形,却非降秩的一維單純形。

3. 若是一個廣義的單純形 $\mathfrak{X}^k$ 的 $k+1$ 個頂點都不同,這單純形必是滿秩的單純形。因爲原底 $\mathfrak{x}^k$ 的一個反向的平直的自身變換,至少把一個頂點換成另一個(不同的)頂點。

但若是一個廣義的 k 維單純形 $(k>0)$ 只有一個點,原底的所有的點都變換成這個點,

這單純形必是降秩的單純形。——一個零維單純形必滿秩。這裏應該注意，零維單純形的定向也確定了(頁 57)。

§26 廣義鍊

複合形 $\mathfrak{K}^n$ 上有限個——有時候零個——**滿秩的廣義的** k 維單純形，每一個都取定了一個確定的定向與一個正整數的倍數，組成一個**廣義的** k **維鍊**。若是定向的廣義的 k 維單純形 X^k 在鍊中的倍數是 a，我們就也說，定向相反的單純形 $-X^k$ 在這鍊中的倍數是 $-a$；若是一個廣義的單純形不在這鍊中出現，我們就也說這單純形的倍數是 0。

因爲 $\mathfrak{K}^n$ 的一個單純剖分中的每一個 k 維單純形也能看作是廣義的 k 維單純形——因爲他是平直單純形的拓撲像——，所以第三章中所討論的單純鍊也是廣義鍊。給定了 $\mathfrak{K}^n$ 的一個**單純剖分**，我們纔能界說**單純鍊**，單純鍊由這單純剖分中的單純形組成。反之，**廣義鍊**由廣義的單純形組成，與 $\mathfrak{K}^n$ 的每一單純剖分都無干。

廣義 k 維鍊中也有 0 這 k 維鍊。他不含有廣義的單純形，他也算做**單純**鍊。

兩個廣義鍊的**相加**，就只要把在這兩個鍊中出現的每一個定向的廣義的單純形的倍數相加。

若是用鍊的相加作聯合運算 (*Verknüpfungsprozess*)，$\mathfrak{K}^n$ 上的廣義的 k 維鍊組成一 *Abel* 羣。

這些定向的滿秩的廣義的 k 維單純形能用來作母元，所以這羣通常有綿續的無窮多母元。零元就是 0 這 k 維鍊。把一個鍊中的所有的

廣義的單純形都改變定向，或者換一個說法，不改變定向，却把所有的倍數都乘上 -1，我們就得着負元。一個廣義鍊 V^k 中若是有定向的單純形 $X_1^k, X_2^k, \cdots, X_r^k$ ($\mathfrak{X}_1^k, \mathfrak{X}_2^k, \cdots, \mathfrak{X}_r^k$ 都不相等)，他們的倍數分別是 $v_1, v_2, \cdots, v_r$ (而且所有其他廣義的單純形的倍數都是零)，這鍊就能寫作

$$V^k = v_1 X_1^k + v_2 X_2^k + \cdots + v_r X_r^k。 \tag{1}$$

根據廣義鍊的定義，我們立刻得下列計算規律：若是 $m V^k = 0$，而 $m \neq 0$，卽有 $V^k = 0$. 若是在鍊的定義中，我們也允許鍊中有降秩的單純形，這規律就不能成立。

若是(1)中，我們不假設廣義的單純形 $\mathfrak{X}_1^k, \mathfrak{X}_2^k, \cdots, \mathfrak{X}_r^k$ 都不相等，却允許相等的或相反定向的單純形出現，然後把他們聯合起來或消去，(1)仍然有意義。我們還可以允許 (1) 中有降秩的廣義單純形，但不把他們算做鍊中的項，只把他們看作與 0 的意義相同。從形式的觀點說，這種辦法也有其優點。所以將來遇着 (1) 的時候，若未特別聲明，這些可能的情形就都算作沒有除外。

我們爲什麼不把廣義鍊簡直界說作一個確定的單純的原底鍊的綿續像呢？這裏的理由是：若是換用這種鍊，就不能立下鍊的加法定義，而不依賴於選用的原底複合形。我們的目的，是要立下我們現在就要提到的廣義的同調羣的定義，而且從他的定義，就知道他是 $\mathfrak{R}^n$ 的拓撲不變性。要達到這目的，廣義鍊的能相加的這種性質，是不能避免不用的。

§27 廣義的同調羣

若是 x^k $(k > 0)$ 是定向的廣義單純形 X^k (也能是降秩的) 的原底，而且

$$F[x^k]=\sum_{\nu}x_{\nu}^{k-1},$$

我們就把廣義的 $k-1$ 維鍊 $\sum_{\nu}X_{\nu}^{k-1}$ 界說作 X^k 的邊緣，寫作

$$F[X^k]=\sum_{\nu}X_{\nu}^{k-1}。$$

這裏的 X_{ν}^{k-1} 是 X^k 的定向的 $k-1$ 維面，他的原底是 x^k 的定向的(由 x^k 引出的定向)面 x_{ν}^{k-1}。即使 X^k 是滿秩的，X_{ν}^{k-1} 中也可能有降秩的。

圖 47

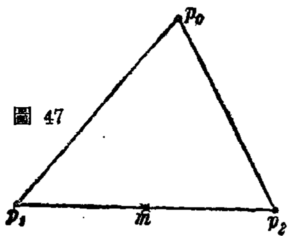
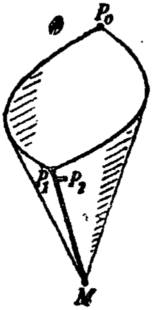


圖 48



摺成漏斗形的三邊形 X^2 (圖 48) 就是一個這種的例子，在原底線段 $(p_1\ p_2)$ 的中心 m 處 (圖 47)，摺疊這線段，做成 X^2 的一邊；不疊合原底三邊形中其他的點。在頁 131 上已經說過，若是線段$(p_1\ p_2)$上以 m 作中心每兩個反射點都疊成一點，結果是一個降秩的單純形。因為降秩的單純形不算，所以 $F[X^2]$只由兩個廣義的一維單純形組成，他們組成漏斗的邊緣。——我們可以設想這例中的廣義的單純形都在三維的實數空間這複合形上。

X^k 的邊緣的定義不依賴于這特別選定的原底 x^k。設 $\bar{x}^k$ 是 X^k 的另一原底。根據廣義的單純形相等的定義，有一平直變換 T 存在，他同向的換 x^k 成 $\bar{x}^k$，而且使 T 下對應的點在 X^k 上有同一像點。但是 T 也同向的平直的變換 $F[x^k]=\sum_{\nu}x_{\nu}^{k-1}$ 中的單純形成 $F[\bar{x}^k]=\sum_{\nu}\bar{x}_{\nu}^{k-1}$ 中的單純形。再根據廣義的單純形

相等的定義，$\sum\limits_{\nu} x_{\nu}^{k-1}$ 與 $\sum\limits_{\nu} \bar{x}_{\nu}^{k-1}$ 這二鍊換成同一個廣義鍊 $F[X^k]$。

一個廣義的單純形的邊緣能等於零。例如線段 x^1 摺叠成的拓撲圓，他的邊緣就只由定向相反的兩個零維單純形組成。

$-X^k$ 的邊緣顯然的等於 X^k 的邊緣乘 -1：

$$F[-X^k] = -F[X^k]。$$

X^k 若特別是降秩的單純形，X^k 就與 $-X^k$ 相等，所以

$$F[X^k] = F[-X^k] = -F[X^k]。$$

根據頁 133 上的計算規律，只有 0 這鍊與他的負鍊相等。**所以一降秩的廣義的單純形 X^k 的邊緣是 0 這 $k-1$ 維鍊。**

我們界說一個廣義的 k 維鍊的邊緣就是他的個別的 k 維單純形的邊緣的和：

$$F\Big[\sum_{\nu} v_{\nu} X_{\nu}^k\Big] \doteq \sum_{\nu} v_{\nu} F[X_{\nu}^k]。 \tag{2}$$

若是和 $\sum v_{\nu} X_{\nu}^k$ 中有相等的，相反的或降秩的單純形（降秩的單純形在鍊中與零的意義相同），他們的邊緣必定也相等，相反或等於零；所以不管(2)的左端如何寫下，右端所表示的總是同一個廣義鍊。——一個零維鍊的邊緣總是 0 這個數。

若是一個廣義鍊的邊緣等於零，這鍊就叫做**閉鍊**。若他是一個 $k+1$ 維的廣義鍊的邊緣，他就叫做**零調鍊**。——所以零維的廣義鍊都是閉鍊。如同討論單純鍊時一樣（頁 84 與頁 86），我們能證明閉（零調）鍊的和與差還是閉（零調）鍊。

任一廣義的 $k+1$ 維單純形 X^{k+1} 的邊緣是一個廣義的 k 維閉鍊，因爲原底 x^{k+1} 的邊緣就是閉鍊。所以任一個廣義的 $k+1$ 維鍊的邊緣鍊也如此；即**每一個零調的廣義鍊都是閉鍊**。

若是二廣義鍊（不必是閉鍊）的差零調，這二鍊就說是（在 $\mathfrak{K}^n$ 上）**同調**。二同調鍊必有相同的邊緣，參看頁 86 。——我們也可以界說能除的同調。若是一個廣義鍊的一個不等於零的倍數零調，這鍊就說是**能除的零調**（≈ 0）。

廣義的 k 維閉鍊可以分成同調鍊類。給定了兩個同調鍊類，從每一類中任取一個廣義鍊，這二鍊的和又確定一同調類。如此確定的同調類就界說作前二同調類的和。有了和的定義，同調類組成一羣，**第 k 個廣義的同調羣**。在第三章中我們討論過一單純剖分的同調羣；在證明他們與廣義的同調羣相同之前，爲區別起見，我們把前者叫做**單純的同調羣**。

因爲我們要先證明這兩種同調羣相同，然後用這種事實去斷定單純的同調羣的拓撲不變性，所以我們先要確實明白廣義的同調羣的拓撲不變性。爲方便起見，我們討論下述更普遍的問題：若是複合形 $\mathfrak{K}^n$ 綿續的（單值的，但不必一一的）變換到複合形 K^m（K^m 可以與 $\mathfrak{K}^n$ 相同），這變換 φ 在廣義的同調羣上產生什麼影響？φ 變換 $\mathfrak{K}^n$ 上的一個廣義的單純形 X^k 成 K^m 上的一個廣義的單純形 Ξ^k 。X^k 的原底 x^k 經過綿續的變換 f 換成 X^k，X^k 再經過綿續的變換 φ 換到 K^m。乘積變換 $\varphi\cdot f$ 還是綿續的變換。相反定向的 $-X^k$ 換成 $-\Xi^k$ 。若是

X^k 與 $-X^k$ 相等，Ξ^k 與 $-\Xi^k$ 也必相等；那就是說，一個降秩的單純形換成一個降秩的單純形。（但是一個滿秩的單純形當然也可以換成一個降秩的單純形。）因此一個廣義鍊

$$V^k=\sum v_{\varkappa}\ X^k_{\varkappa}$$

有一個完全確定的像鍊 $\sum v_{\varkappa}\ \Xi^k_{\varkappa}$。和 $V^k+'V^k=\sum v_{\varkappa}X^k_{\varkappa}+\sum' v_{\varkappa}\ X^k_{\varkappa}$ 的像鍊等於像鍊的和，那就是說，等於 $\sum v_{\varkappa}\ \Xi^k_{\varkappa}+\sum' v_{\varkappa}\ '\Xi^k_{\varkappa}$。而且鍊的邊緣換成像鍊的邊緣。我們把這些結果簡單的述成下列定理：

定理 *I*：設 φ 是換 $\mathfrak{K}^n$ 到 K^m 的一個綿續變換。廣義鍊還變成廣義鍊。若是 $\mathfrak{K}^n$ 上的鍊與邊緣適合一個方程式，經過變換之後他們在 K^m 上的像鍊還適合相同的方程式。

特別的，閉鍊還換成閉鍊，零調鍊還換成零調鍊。所以給定了 $\mathfrak{K}^n$ 上的每一（廣義的）同調類，K^m 上就有一完全確定的像同調類與他對應，而且二同調類的和與像同調類的和對應。所以證明了下述的重要定理：

定理 *II*：設有一個綿續的變換 φ 換 $\mathfrak{K}^n$ 到 K^m。這變換 φ 引出一個同構 (*homomorph*) 變換 ϕ (§83)，換 $\mathfrak{K}^n$ 的第 k 個廣義的同調羣到 K^m 的第 k 個廣義的同調羣。——若是 $\mathfrak{K}^n$ 與 K^m 同胚，而且 φ 是換 $\mathfrak{K}^n$ 成 K^m 的一個拓撲變換，ϕ 就是一個一一的同構變換 (1—*Isomorphismus*)；所以同胚的複合形的廣義同調羣都相同。

因爲拓撲變換使 $\mathfrak{K}^n$ 與 K^m 的廣義鍊成一一對應，上述定理的後一部分眞確。

習題：1．用逼近定理（見 §28）可以證明廣義的同調羣與單純的同調羣一致。假設逼近定理證明了，試證：環面（§19）的第一個同調群於每一個同構［一一的同構］的自身變換都能由環面的一個綿續的［拓撲的］自身變換實現。

2．用同樣的假設，試證：平環沒有一個拓撲的自身變換，同向的換一個邊緣圓，而反向的換另一個邊緣圓。

§28　逼近定理，單純的同調羣的不變性

一個複合形有了一個給定的單純剖分，我們就能計算他的單純的同調羣。不過單純的同調羣可能與這選定的單純剖分有關係，因此還不能斷定他的拓撲不變性。反之，根據定義，廣義的同調羣是拓撲不變性；但我們還無計算他的方法，那就是說，還無方法求出他的 *Betti* 數與撓係數。現在就是要證明單純的同調羣與廣義的同調羣相同，因此斷定單純的同調羣的拓撲不變性。

證明的根據是下述定理：

逼近定理：設 $\mathfrak{K}^n$ 是一個有限的或無窮的複合形，而且有一個給定的單純剖分。若 A^k 是 $\mathfrak{K}^n$ 上的一個廣義的 k 維鍊，而且他的邊緣*) A^{k-1} 是 $\mathfrak{K}^n$ 的這單純剖分中的一個單純鍊（特別可以是 0 這 $k-1$ 維鍊），就有一與 A^k 同調的單純鍊 $\overline{A}^k$ 存在（根據頁 136，$\overline{A}^k$ 的邊緣也是 A^{k-1}）。 A^k 的維數 k 可以小於等於或大於 $\mathfrak{K}^n$ 的單純剖分的維數。

若我們假設 A^k 是閉鍊，$A^{k-1}=0$，這定理就是說

(I) 每一廣義的 k 維閉鍊與一個單純的 k 維鍊同調。

*) 在 $k=0$ 的時候，A^{k-1} 是單純鍊的這條件自然不存在。

逼近定理中的 k 若是用 $k+1$ 替代,這定理就是說

(II) 若是一個單純的 k 維鍊是一個廣義的 $k+1$ 維鍊的邊緣,他也就是一個單純的 $k+1$ 維鍊的邊緣。

根據(I) 與 (II),我們能證明單純的同調羣與廣義的同調羣相同。因為兩個單純的同調鍊當然也廣義的同調,一個單純的同調類中的閉鍊可以看作是廣義鍊,所以屬於同一個廣義的同調類。所以給定了一個單純的同調類,就恰有一個廣義的同調類與他對應。因為 (II),非單純的同調的兩個單純鍊也不廣義的同調。所以給定了不同的單純的同調類,與他們對應的廣義的同調類也不同。最後,因為 (I),每一個廣義的同調類都含有一單純的同調類,所以單純的同調類與廣義的同調類間的對應是一一的。—— 這對應也是一一的同構的對應,那就是說,給定了兩個單純的同調類的和 $\overline{H}_1+\overline{H}_2$,與他對應的恰是對應的兩個廣義的同調類的和 H_1+H_2。我們要求出 H_1+H_2,只要在 H_1 與 H_2 這兩類中各取定一個代表鍊,再作這二代表鍊的和;但是我們能從 $\overline{H}_1$ 與 $\overline{H}_2$ 這兩類中各取一個單純閉鍊做我們的代表鍊。

所以若能證明逼近定理,就證明了廣義的同調羣與單純的同調羣相同。在證明逼近定理 (§30) 之前,我們先要討論實數空間的稜柱體 (*Prisma*)。

§29 實數空間中的稜柱體

我們在 §9 (頁 56) 中說過,一個平直單純形的平直的自身變換的

行列式是正數，就是這變換同向的充要條件。設 x^n 與 $'x^n$ 是 n 維的實數空間 $\mathfrak{R}^n$ 中的兩個定向的平直 n 維單純形。若是 $\mathfrak{R}^n$ 有一個平直變換，同向的換 x^n 成 $'x^n$ 而且他的行列式是正數，我們就說 x^n 與 $'x^n$ 的**定向相等**。若是另一個 n 維單純形 $''x^n$ 的定向與 $'x^n$ 的定向相等，x^n 與 $''x^n$ 的定向也就相等。一個定向的 n 維單純形可以說是確定**全個** $\mathfrak{R}^n$ **的一個定向**，而且與 x^n 的定向相等的 n 維單純形也都確定 $\mathfrak{R}^n$ 的這一個定向。

設 x^k 是 $\mathfrak{R}^n$ 中的一個平直單純形，x^k_g 是 x^k 的 g 次**法重分**。設 $\mathfrak{R}^n$ 中含有 x^k 的平直子空間是 $\mathfrak{L}^k$。x^k 的定向確定了 $\mathfrak{L}^k$ 的一個定向。所以我們能使 x^k_g 所有的 k 維子單純形的定向，都與 x^k 的定向相等。將來我們提到一個**定向的**單純形的法重分的時候，就是把子單純形都看作如此定向。——在 $k=0$ 的時候，定向的零維單純形與定向的法重分相同。

設含有平直單純形 $\mathfrak{x}^k$ 的實數空間的維數至少是 $k+1$，含有 $\mathfrak{x}^k$ 的平直 k 維子空間是 $\mathfrak{L}^k$。若是直移 $\mathfrak{x}^k$ 成另一個平直單純形 $\mathfrak{y}^k$，而且直移的矢不屬於 $\mathfrak{L}^k$，$\mathfrak{x}^k$ 的軌跡就叫做**棱柱體** $\mathfrak{z}^{k+1}$，$\mathfrak{x}^k$ 與他的面單純形 $\mathfrak{x}^i_\nu$ $(0\leqq i<k)$ 叫做棱柱體 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 的**底面** (*Grundseite*)，$\mathfrak{y}^k$ 與他的面單純形叫做棱柱體的**頂面** (*Dachseite*)。直移時，$\mathfrak{x}^k$ 的每一個 i 維面的軌跡是一個棱柱體 $\mathfrak{z}^{i+1}$，叫做一個 $i+1$ 維的**壁面** (*Wandseite*)。$\mathfrak{x}^k$ 的中心的軌跡是棱柱體的**軸**，$\mathfrak{x}^k$ 的任一點的軌跡是**軸的一條平行線段**。軸的中心叫做棱柱體的**中心**。因爲每一個壁面也是一個棱柱體，所以也

同樣的有一個中心。 一維棱柱體是一條線段，二維棱柱體是一個平行四邊形，三維棱柱體是一個三邊棱柱體。 此後我們假設 $k>0$。

若是另有一個 $k+1$ 維的棱柱體 $\bar{\mathfrak{z}}^{k+1}$，就有一個換 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 成 $\bar{\mathfrak{z}}^{k+1}$ 的**平直變換**，換底單純形 $\mathfrak{x}^k$ 成底單純形 $\bar{\mathfrak{x}}^k$。 任意的給定了這兩個底單純形間的一平直變換，這換 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 成 $\bar{\mathfrak{z}}^{k+1}$ 的變換就完全確定了。這變換換 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 的中心成 $\bar{\mathfrak{z}}^{k+1}$ 的中心。

因爲底單純形是凸形域，棱柱體也是凸形域；那就是說，棱柱體是實數空間的一個閉子集，含有他的每兩個點的連接線段。 所以從棱柱體的中心起始的每一個射線，恰與棱柱體的邊緣有一個共點，而棱柱體的邊緣由 $\mathfrak{x}^k$, $\mathfrak{y}^k$, 與壁面 $\mathfrak{z}_\nu^k$ $(\nu=0,1,\cdots,k)$組成。

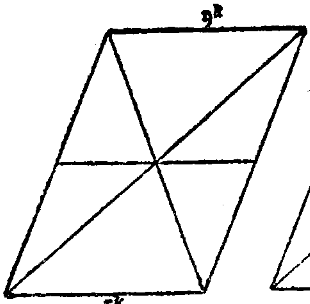
$\mathfrak{z}^{k+1}$ 的所有上述性質也都能用解析方法說明。取 $\mathfrak{x}^k$ 的一個頂點作坐標系的原點，用從這頂點到 $\mathfrak{x}^k$ 的其餘頂點的矢 $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \cdots, \mathfrak{v}_k$，與從原點起始的代表直移的方向的矢 $\mathfrak{t}$ 作基矢。這棱柱體就由下列矢

$$\lambda_1\mathfrak{v}_1+\lambda_2\mathfrak{v}_2+\cdots+\lambda_k\mathfrak{v}_k+\tau\mathfrak{t}$$
$$(0\leqq\lambda_i\leqq 1;\ \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k\leqq 1;\ 0\leqq\tau\leqq 1)$$

的終點組成。解析方法我們不再詳述。

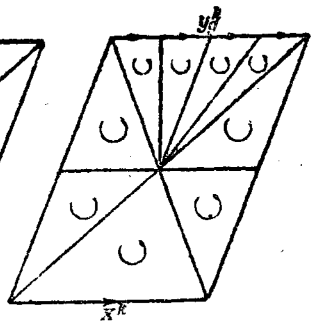
我們現在要把棱柱體剖分成單純形。我們有無窮多可能的剖分方法。但此後我們只需要一種特殊的**單純剖分**。 先法重分 $\mathfrak{y}^k$ g 次。 g 也可以是零；在這種情形下，$\mathfrak{y}^k$ 就未重分。然後剖分 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 的所有的壁面如下： 每一個一維壁面用他的中心剖分成兩個一維單純形。 若是 i 維壁面 $\mathfrak{z}_\mu^i$ 已經剖分了，在每一個 $i+1$ 維壁面 $\mathfrak{z}_\nu^{i+1}$ 的中心處投影他

的邊緣 ($i=k$ 的時候，$\mathfrak{z}_\nu^{i+1}$ 就是 $\mathfrak{z}^{k+1}$)，參看頁 75。 $\mathfrak{z}_\nu^{i+1}$ 的邊緣由下列三種面組成：未重分的底面 $\mathfrak{x}_\nu^i$，g 次法重分的頂面 $\mathfrak{y}_\nu^i$ 與若干個已經剖分的壁面 $\mathfrak{z}_\mu^i$。先如此剖分一維壁面，然後剖分所有的壁面，到 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 爲止，就得着我們所需要的 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 的單純剖分。——圖 49 與圖 50 說明兩個簡單的情形。



$k=1, g=0$

圖 49



$k=1, g=2$

圖 50

現在我們確定棱柱體 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 的**定向**，那就是說，在含有 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 的 $k+1$ 維的平直空間中，給定 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 的所有的 $k+1$ 維子單純形相等的定向。這些定向的單純形，每一個取 1 當倍數，組成一個鍊，我們把他叫做 z^{k+1}。$\mathfrak{z}^{k+1}$ 的底單純形 $\mathfrak{x}^k$ 與 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 的一個 $k+1$ 維單純形關聯，這 $k+1$ 維單純形在 $\mathfrak{x}^k$ 上引出的方向就規定作 $\mathfrak{x}^k$ 的方向。如此定向的 $\mathfrak{x}^k$ 叫做 x^k。 我們在重分了的頂面 $\mathfrak{y}^k$ 上確定一個定向，相當於底面 x^k 直移後的定向；因此 $\mathfrak{y}^k$ 上有一個鍊 y^k，含有所有的 g 次的法重分中的定向單純形 (見圖 50)。同樣的我們可以界說 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 的 k 維壁面上的鍊 z_ν^k，$k-1$ 維底面上的鍊 x_ν^{k-1}，與 $k-1$ 維頂面上的鍊 y_ν^{k-1}。我們能給定底單純形 x^k 的面單純形 x_ν^{k-1} 的定向，使

$$F[x^k]=\sum_{\nu} x_{\nu}^{k-1} \tag{1}$$

中的右端不必再用係數 $\varepsilon_\nu=\pm 1$。爲簡單起見,我們假設已經如此定向了。

如此得着的單純鍊除 (1) 之外,還適合下列的**連接公式** (*Verbindungsformel*):

$$F[y^k]=\sum_{\nu} y_{\nu}^{k-1}, \tag{2}$$

$$F[\sum_{\nu} z_{\nu}^{k}]=\sum_{\nu} x_{\nu}^{k-1}-\sum_{\nu} y_{\nu}^{k-1}, \tag{3}$$

$$F[z^{k+1}]=x^k-y^k-\sum_{\nu} z_{\nu}^{k}。 \tag{4}$$

方程式 (2) 說,頂面的法重分的邊緣等于邊緣的法重分。 方程式 (4) 說,棱柱體的邊緣由底面,頂面與 k 維的壁面——都重分了,定向了,而且看作是鍊——組成。(3) 是 (1),(2) 與 (4) 的結果。因爲 (4) 的左端是邊緣,所以是閉鍊,所以他的邊緣是 0 這 $k-1$ 維鍊;求 (4) 的右端的邊緣,再應用 (1) 與 (2),結果恰是 (3)。

至於公式 (2) 與 (4),至多只有正負號的錯誤。 例如公式 (4) 中 z^{k+1} 的邊緣中的一個單純形 E^k,就必定是 x^k 中,或 y^k 中,或一個鍊 z_ν^k 中的一個單純形;因爲 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 的別個 k 維單純形恰與兩個 $k+1$ 維的單純形關聯,而且後者的相等定向在這 k 維單純形上引出相反的定向。*) 若是 E^k 是鍊 z_ν^k 中的一個定向單純形,z^{k+1} 中只有一個 $k+1$ 維單純

*) 設含有 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 的 $k+1$ 維的平直空間是 $\mathfrak{L}^{k+1}$。$\mathfrak{L}^{k+1}$ 的一個平直的自身變換若不移動 E^k 的任一點,而交換與 E^k 關聯的兩個 $k+1$ 維單純形,這變換的行列式必是負數。

形 E^{k+1} 與 E^k 關聯，在 E^k 上引出一個確定的定向；這定向所確定的正負號就是 E^k 在 $F[z^{k+1}]$ 中的正負號。因爲 z^k_ν 中的單純形定向相等，z^{k+1} 中的單純形定向又相等，所以 z^k_ν 的另一個定向單純形在 $F[x^{k+1}]$ 中的正負號必與 E^k 的相同。(4) 中的 x^k 的正負號都無錯誤，因爲我們所取定的 z^{k+1} 的定向，就是要他在 x^k 上引出 x^k 這個定向。同樣的因爲 y^k 上的定向就是相當于 x^k 直移後的定向，y^k 的正負號也都無錯誤。所以下列的兩個公式成立：

$$F[y^k] = \sum_\nu \eta_\nu y^{k-1}_\nu, \tag{2'}$$

$$F[z^{k+1}] = x^k - y^k - \sum_\nu \xi_\nu z^k_\nu。 \tag{4'}$$

同樣的，我們知道一個壁面的邊緣必定是

$$F[z^k_\nu] = x^{k-1}_\nu - y^{k-1}_\nu + \cdots; \tag{3'}$$

這裏的點表示未寫出的若干 $k-1$ 維的壁面 z^{k-1}_λ。

(4′) 的右端的邊緣就是 z^{k+1} 的邊緣的邊緣，必等于零。利用 (1)，(2′)，(3′) 我們得着

$$\sum_\nu x^{k-1}_\nu - \sum_\nu \eta_\nu y^{k-1}_\nu - \sum_\nu \xi_\nu (x^{k-1}_\nu - y^{k-1}_\nu + \cdots) = 0。$$

比較單純形的係數，卽知

$$\eta_\nu = \xi_\nu = 1。$$

因此公式 (2)，(3)，(4) 都證明了。

若是綿續的變換棱柱體 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 到複合形 $\mathfrak{K}^n$，而且用 X^k, Y^k, Z^{k+1},

X^{k-1}_ν, Y^{k-1}_ν, Z^k_ν 分別表示鍊 x^k, y^k, z^{k+1}, x^{k-1}_ν, y^{k-1}_ν, z^k_ν 的廣義像，根據 §27 的定理 I, 我們只要把公式 (1) 到 (4) 中的小寫體字母改成大寫體字母，廣義鍊還適合這四公式。假設綿續的變換有限個棱柱體 $\mathfrak{z}^{k+1}$, $'\mathfrak{z}^{k+1}$, $\cdots$ 到 $\mathfrak{R}^n$。由 $\mathfrak{z}^{k+1}$, $'\mathfrak{z}^{k+1}$, $\cdots$ 的定向底單純形 x^k, $'x^k$, $\cdots$ 的廣義像 X^k, $'X^k$, $\cdots$ 組成廣義鍊

$$A^k = a\,X^k + {'a}\,{'X^k} + \cdots,$$

再同樣的組成

$$\begin{aligned}
B^k &= a\,Y^k + {'a}\,{'Y^k} + \cdots,\\
C^{k+1} &= a\,Z^{k+1} + {'a}\,{'Z^{k+1}} + \cdots,\\
A^{k-1} &= a\sum X^{k-1}_\nu + {'a}\sum {'X^{k-1}_\nu} + \cdots,\\
B^{k-1} &= a\sum Y^{k-1}_\nu + {'a}\sum {'Y^{k-1}_\nu} + \cdots,\\
C^k &= a\sum Z^k_\nu + {'a}\sum {'Z^k_\nu} + \cdots。
\end{aligned}$$

根據用大寫體字母的公式 (1) 到 (4)，這些廣義鍊適合下列

$$\text{連接公式}\begin{cases}
F[A^k] = A^{k-1} & (I)\\
F[B^k] = B^{k-1} & (II)\\
F[C^k] = A^{k-1} - B^{k-1} & (III)\\
F[C^{k+1}] = A^k - B^k - C^k。 & (IV)
\end{cases}$$

§30 逼近定理的證明

單純的逼近的歷程給我們一個廣義鍊 A^k 的一個逼近鍊 $\bar{A}^k$ 的求法。在這歷程中，A^k 中廣義的 k 維單純形的頂點用單純剖分 $\mathfrak{R}^n$ 中的

隣近頂點替代；而且每一個廣義的單純形的所有頂點的替代頂點也是 $\mathfrak{K}^n$ 中一個單純形的頂點（這單純形却不必是 k 維的）。在 A^k 的廣義單純形適當的細小的時候，這種替代纔可能。否則，A^k 中一個廣義單純形的兩個頂點可以在 $\mathfrak{K}^n$ 的兩個距離很遠的單純形中，替代他們的兩個隣近頂點就可以不屬於 $\mathfrak{K}^n$ 的同一個單純形。所以有時候在應用單純的逼近這歷程之前，需要先重分這廣義鍊。因此逼近鍊的求法應分成兩步：

第一步：從 A^k 到他的一個重分（頁 147 到 149）。

第二步：這重分過的鍊的單純的逼近（頁 149 到 155）。

關于 $k=0$ 的討論不屬于後來關于 $k>0$ 的討論的範圍。我們先行證明在 $k=0$ 時的逼近定理。設

$$A^0 = a\,X^0 + {}'a\,{}'X^0 + \cdots。$$

若 X^0 屬于 $\mathfrak{K}^n$ 的某一個單純形，我們就用直線段連接 X^0 與這單純形的一個頂點 Y^0（參看頁 57）。我們用相同的正負號給定 X^0 與 Y^0 的定向。然後這連接線段就可以看作是一個一維單純形 Z^1，他的邊緣是 $X^0 - Y^0$。

$$\bar{A}^0 = a\,Y^0 + {}'a\,{}'Y^0 + \cdots$$

這單純鍊就與 A^0 同調。——此後我們只討論 $k>0$。

我們可以假設 $\mathfrak{K}^n$ 是一個有限的複合形。因為一個無窮的單純的複合形 $\mathfrak{K}^n$ 上的一個廣義鍊只在 $\mathfrak{K}^n$ 的單純剖分中的一個有限的子複合形上。這句話在只有一個廣義的單純形 X^k 的時候，可以證明如下。

若是 X^k 與 $\mathfrak{R}^n$ 的無窮多的單純形有共點，X^k 上就有一個無凝點的點叙列。這點叙列能看作與原底 x^k 上的一個有凝點 H 的無窮叙列對應。這換 x^k 成 X^k 的變換就在 H 點處不綿續，與廣義的單純形的定義矛盾。因爲 A^k 只由有限個廣義的單純形組成，A^k 只在 $\mathfrak{R}^n$ 的一個有限的子複合形上。所以只要證明關于有限的複合形的逼近定理，關于無窮的複合形的逼近定理也就證明了。

第一步：廣義鍊 A^k 的重分

a) 連接棱柱體

我們先討論 $\mathfrak{R}^n$ 上的一個定向的廣義的單純形 X^k。X^k 也可以是降秩的。我們取一個棱柱體 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 的定向的底單純形 x^k 作爲 X^k 的原底。假設 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 的頂單純形已經有了 g 次法重分，而且 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 也如上節一樣的單純剖分了。然後綿續的變換 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 到 $\mathfrak{R}^n$，使 x^k 換成 X^k 的情形與給定的情形一致，而且使每一條與軸平行的線段換成一點；換個說法，就是先用平行投影法把棱柱體換成他的底單純形 x^k，然後再把 x^k 換成 X^k。因此，頂單純形 y^k（正確的說，前節中所說的，由 g 次法重分中的子單純形所組成的鍊 y^k）換成一個廣義鍊 Y^k，叫做 X^k 的 **g 次法重分**；鍊 z^{k+1} 換成一個廣義鍊 Z^{k+1}，叫做 X^k 與 Y^k 的**連接鍊** (*Verbindungskette*)。

g 次法重分與連接鍊都由 X^k **唯一的**確定了，與 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 的選擇無關。其實，若 $\bar{\mathfrak{z}}^{k+1}$ 是另一個棱柱體，與 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 一樣的剖分了定向了，就有一個換 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 成 $\bar{\mathfrak{z}}^{k+1}$ 的平直變換 T 存在，換定向的底單純形 x^k 成定向

的底單純形 $\bar{x}^k$。因爲 x^k 與 $\bar{x}^k$ 間對應的點在 X^k 上有同一像點，而且 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 與 $\bar{\mathfrak{z}}^{k+1}$ 的與軸平行的線段都各換成一點，所以 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 與 $\bar{\mathfrak{z}}^{k+1}$ 間在 T 下對應的點在 $\mathfrak{R}^n$ 上有同一個像點。最後，T 同向的變換 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 的子單純形成 $\bar{\mathfrak{z}}^{k+1}$ 的子單純形，所以，根據廣義的單純形相等的定義，廣義鍊 Z^{k+1} 與 $\bar{Z}^{k+1}$ 相等，Y^k 與 $\bar{Y}^k$ 相等。

設 A^k 是任一廣義鍊。A^k 的個別的單純形的 g 次法重分(連接鍊)的和就界說作 A^k 的 **g 次法重分** B^k (連接鍊 C^{k+1})。設

$$A^k = a\,X^k + {}'a\,'X^k + \cdots, \tag{1'}$$

用 ${}^{(\varkappa)}Y^k$ 與 ${}^{(\varkappa)}Z^{k+1}$ 分別表示 ${}^{(\varkappa)}X^k$ 的 g 次法重分與連接鍊，卽有

$$B^k = a\,Y^k + {}'a\,'Y^k + \cdots, \tag{2'}$$

$$C^{k+1} = a\,Z^{k+1} + {}'a\,'Z^{k+1} + \cdots。 \tag{3'}$$

若是(1′)的右端有一個單純形，例如 X^k，是降秩的單純形，因而 $X^k = -X^k$，卽知 $Y^k = -Y^k$, $Z^{k+1} = -Z^{k+1}$，所以 $Y^k = 0$, $Z^{k+1} = 0$。所以不問 (1′) 有無降秩的單純形，法重分 B^k 與連接鍊 C^{k+1} 都由 A^k 唯一的確定了。

b) 連接公式

棱柱體 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 變換成廣義的單純形 X^k 的時候，壁面 $\mathfrak{z}^k_\nu$ 的每一個與軸平行的線段也換成一點。所以 $\mathfrak{z}^k_\nu$ 上的鍊 x^{k-1}_ν, y^{k-1}_ν, z^k_ν 依次換成 X^k 的面單純形 X^{k-1}_ν, X^{k-1}_ν 的 g 次法重分 Y^{k-1}_ν，與 X^{k-1}_ν 及 Y^{k-1}_ν 的連接鍊 Z^k_ν。關于其餘的廣義的單純形 $'X^k, \cdots$ 的棱柱體 $'\mathfrak{z}^{k+1}, \cdots$，也有同樣的情形。　根據本頁上的公式 (1′) 與頁 143 上的公式 (1)，A^k

的邊緣就是

$$A^{k-1}=a\sum X_{\nu}^{k-1}+{}'a\sum {}'X_{\nu}^{k-1}+\cdots。\tag{4'}$$

所以 A^{k-1} 的法重分是

$$B^{k-1}=a\sum Y^{k-1}+{}'a\sum {}'Y^{k-1}+\cdots,\tag{5'}$$

A^{k-1} 與 B^{k-1} 的連接鍊是

$$C^{k}=a\sum Z_{\nu}^{k}+{}'a\sum {}'Z_{\nu}^{k}+\cdots,\tag{6'}$$

而且 § 29 中的公式 (I) 到 (IV) 成立:

$$F[A^k]=A^{k-1}\tag{I'}$$

$$F[B^k]=B^{k-1}\tag{II'}$$

$$F[C^k]=A^{k-1}-B^{k-1}\tag{III'}$$

$$F[C^{k+1}]=A^k-B^k-C^k。\tag{IV'}$$

公式(II')說: **廣義鍊 A^k 的 g 次法重分的邊緣等于邊緣的 g 次法重分。**

若是 g 適當的大, y^k, $'y^k$, $\cdots$ 的子單純形就任意的小;根據 § 7 中的勻綿續定理, A^k 的 g 次法重分的廣義的 k 維單純形也同樣的任意的小。更正確的說: 若是設想 $\mathfrak{R}^n$ 是適當高維的實數空間中的平直複合形 (根據 §11 這總是可能的), $\mathfrak{R}^n$ 上兩點間的距離就是這空間中的歐幾里得距離,而且若是 A^k 的重分適當的細密, B^k 的廣義的單純形的直徑就能任意的小。

廣義鍊 A^n 的重分已經說明了,現在進而討論第二步。

第二步: 還重分過的鍊 A^k 的單純的逼近

a) 連接棱柱體

設 B^k 是一個廣義鍊，P 是 B^k 的一個單純形的一個頂點。B^k 的所有的廣義的單純形，用 P 做一個頂點的，就叫做以 P 做中心的廣義的星形。我們現在假設 A^k 的重分如此細密，使 B^k 的每一個廣義的星形至少屬于 $\mathfrak{R}^n$ 的單純剖分的一個星形的內域(與 $\mathfrak{R}^n$ 的這星形的外邊緣無共點)。根據 §7 的定理 V，這是可能的。其實，若 Q 是 $\mathfrak{R}^n$ 的任一點，我們就取 $\mathfrak{R}^n$ 上含有 Q 的一個單純星形的所有內點做 Q 的鄰域 $\mathfrak{U}^*(Q|\mathfrak{R}^n)$。因此有一個有如次性質的數 $\varepsilon>0$ 存在：$\mathfrak{R}^n$ 的任一點的 ε 鄰域屬于 $\mathfrak{R}^n$ 的一個星形的內域。我們只要重分 A^k 到如此地步，使 B^k 的單純形的直徑都小于 $\varepsilon/2$，就達到了我們的目的。

爲使與第一步類似起見，我們表示廣義鍊 A^{k-1} 與 A^k 的 g 次重分，不用 B^{k-1} 與 B^k，改用 A^{k-1} 與

$$\mathsf{A}^k=\alpha\,\Xi^k+{}'\alpha\,{}'\Xi^k+\cdots。$$

不過我們還再聲明一次，這裏的右端可以有相等或相反的單純形，甚至于也有降秩的單純形。設 $P_1, P_2, \cdots$ 是廣義的單純形 $\Xi^k, {}'\Xi^k, \cdots$ 的所有的頂點；若是有重合的頂點，我們只寫一次。每一頂點 P_λ 是一個由 A^k 的 k 維單純形所組成的廣義星形的中心。求 A^k 的逼近，就是：相當于每一頂點 P_λ，我們取定 $\mathfrak{R}^n$ 的單純剖分中的一頂點 Q_λ 做逼近的頂點；Q_λ 的選取只要遵守一個條件：$\mathfrak{R}^n$ 上以 Q_λ 做中心的星形的內域含有 A^k 上以 P_λ 做中心的廣義的星形。因爲以 P_λ 做中心的廣義的星形可能屬于 $\mathfrak{R}^n$ 的幾個星形的內域，Q_λ 的選擇通常不止一個

可能。不過只要把頂點 Q_λ 取定了，求 A^k 的逼近的其餘的步驟就完全確定了。**單純逼近的主要的一步**就是取定廣義頂點 P_λ 的逼近的單純頂點 Q_λ。圖 51 的例子中，$\mathfrak{K}^2$ 是由平直等邊三邊形組成的一個複

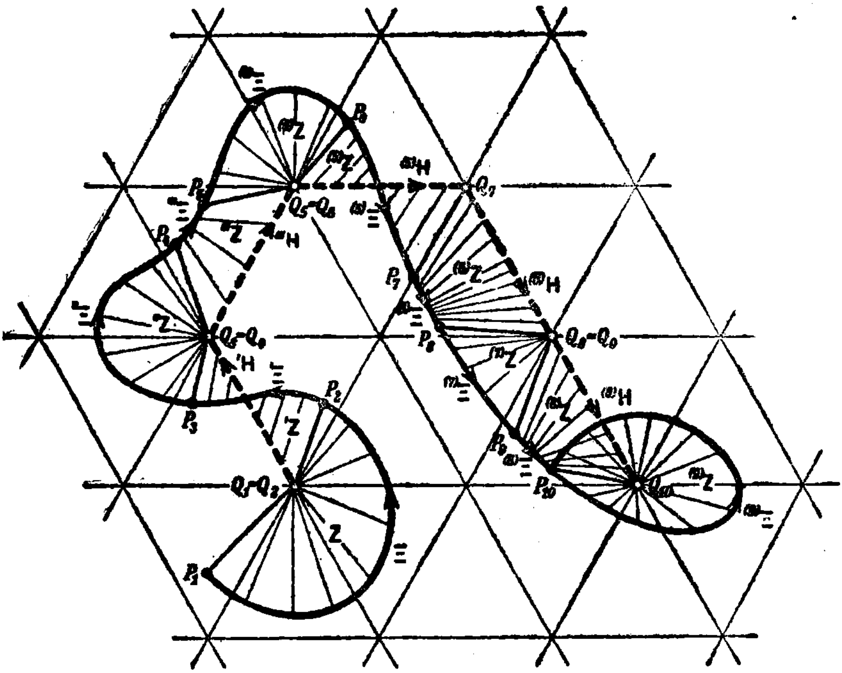


圖 51

合形，$\mathfrak{K}^2$ 上有一個廣義的一維鍊（粗線表示）。*)

我們現在先討論單獨的一個廣義的單純形，例如 Ξ^k。設他的頂點是 $P_1, P_2, \cdots, P_Q$，逼近的頂點是 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_Q$。P_ν 是不同的頂點，

*）〔譯者按，此圖中以 P_8 爲中心的廣義星形不屬于 $\mathfrak{K}^2$ 的一個星形的內域，故此圖有錯誤。讀者可試作改正。〕

Q_ν 中也許有重合的。我們要證明這些 Q_ν 是 $\mathfrak{K}^n$ 的單純剖分的一個單純形的頂點。以 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_\rho$ 做中心的這些星形的內域都含有這個廣義的單純形 Ξ^k,所以這些星形都含有 Ξ^k 的任一點 P 做公共內點*)設 P 屬于 $\mathfrak{K}^n$ 的某一單純形 $\mathfrak{E}^j$。$\mathfrak{K}^n$ 的一個星形 $\mathfrak{St}$,含有 P 做內點的,必定含有 $\mathfrak{E}^j$,而且 $\mathfrak{E}^j$ 不完全在這 $\mathfrak{St}$ 的外邊緣上;所以這 $\mathfrak{St}$ 的中心是 $\mathfrak{E}^j$ 的一個頂點。所以 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_\rho$ 是 $\mathfrak{E}^j$ 的一個 i 維面單純形 $\mathfrak{E}^i$ 的頂點,或是 $\mathfrak{E}^j$ 自身的頂點;而且因為 $\mathfrak{E}^i$ 與 P 都屬於 $\mathfrak{E}^j$,$\mathfrak{E}^i$ 的每一個點與 P 有一條連接直線段,所以 $\mathfrak{E}^i$ 的每一點與 Ξ^k 的每一點有一條連接直線段。**)

我們再用一個 $k+1$ 維的棱柱體 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 的定向的底單純形 x^k 做 Ξ^k 的原底,界說換 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 到 $\mathfrak{K}^n$ 的一個綿續變換如下。

1. x^k 依給定的情形變換成 Ξ^k。

2. y^k(現在不用剖分)平直的變換成 $\mathfrak{E}^i$ 如下:若是底單純形 x^k 的一個頂點 p_λ $(\lambda = 0, 1, \cdots, k)$ 換成 Ξ^k 的一個廣義頂點 $P_\mu(\mu=1, 2, \cdots, \rho)$,而且 P_μ 的逼近頂點是 Q_μ,頂單純形上的對應的頂點 q_λ 就換成 $\mathfrak{E}^i$ 的頂點 Q_μ。

3. $\mathfrak{z}^{k+1}$ 的一條與軸平行的線段(pq)平直的變換成 Ξ^k 中的像點 P 與 $\mathfrak{E}^i$ 中的像點 Q 的連接直線段;這連接線段存在,因為我們已經說過 Ξ^k 的每一點能與 $\mathfrak{E}^i$ 的每一點用直線段連接。圖 51 中 $\mathfrak{K}^n$ 上的連接線段都用直線表出了。

---

*) 星形的一個不在外邊緣上的點叫做內點。

**) 直線段是對于 $\mathfrak{E}^j$ 說的,參看頁 57。

這換 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 到 $\mathfrak{R}^n$ 的變換已經如此的確定了；根據 §14 中的預備定理（頁 79），他還綿續。他換原底 y^k 成單純形 $\mathfrak{S}^i$。因此可以把 $\mathfrak{S}^i$ 當作一個定向的廣義的單純形 H^k。此後 H^k 就叫做 Ξ^k 的（單純的）**逼近**。

$\mathfrak{z}^{k+1}$ 上的鍊 z^{k+1} 也綿續的變換成 $\mathfrak{R}^n$ 上的一個廣義鍊 Z^{k+1}。Z^{k+1} 叫做 Ξ^k 與他的逼近 H^k 的**連接鍊**。

單純鍊

$$\mathsf{A}^k = \alpha\, \Xi^k + {}'\alpha\, {}'\Xi^k + \cdots \qquad (1'')$$

中的個別單純形的逼近（連接鍊）的和就界說作 A^k 的**逼近**鍊 B^k（**連接鍊** Γ^{k+1}）；所以

$$\mathsf{B}^k = \alpha\, \mathsf{H}^k + {}'\alpha\, {}'\mathsf{H}^k + \cdots \qquad (2'')$$

$$\Gamma^{k+1} = \alpha\, \mathsf{Z}^{k+1} + {}'\alpha\, {}'\mathsf{Z}^{k+1} + \cdots。 \qquad (3'')$$

如同頁 148 上一樣，在逼近的頂點取定了之後，A^k 的逼近鍊與連接鍊都由 A^k 唯一的確定了，與 A^k 的右端有否降秩的單純形無干。圖 51 中的粗虛線表示逼近鍊 B^k。

廣義的單純形 ${}^{(\lambda)}\mathsf{H}^k$ 或是 $\mathfrak{R}^n$ 的單純剖分中的一個 k 維的單純形，或是一個降秩的廣義的單純形（頁 131，例 1）；而降秩的廣義單純形在鍊中的意義與 0 相同。所以 B^k 是一個單純鍊。

b）連接公式

棱柱體 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 按照上述的條件 1. 到 3. 變換到 $\mathfrak{R}^n$ 的時候，每一個壁面 $\mathfrak{z}_v^k$ 也經過一個變換，適合相當的條件：

1. $\mathfrak{z}_\nu^k$ 的底單純形 x_ν^{k-1} 變換成 Ξ^k 的面 Ξ_ν^{k-1}。

2. y^k 平直的變換成 $\mathfrak{R}^n$ 的單純剖分中的單純形 $\mathfrak{S}^i$ 的時候，y^k 的面 y_ν^{k-1} 也經過一個換成單純形 $\mathfrak{S}^h$ 的平直變換；$\mathfrak{S}^h$ 或就是 $\mathfrak{S}^i$ 或是 $\mathfrak{S}^i$ 的一個面單純形。根據棱柱體 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 的變換的求法，若是 x_ν^{k-1} 的頂點 p_λ 換成 Ξ_ν^{k-1} 的頂點 P_μ，y_ν^{k-1} 的對應頂點 q_λ 就換成 P_μ 的逼近頂點 Q_μ。

3. 因為 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 的變換平直的換每一條與軸平行的線段 (pq) 成像點的連接線段 (PQ)，當然也同樣的換 $\mathfrak{z}_\nu^k$ 的每一條與軸平行的線段。

這就證明了：$\mathfrak{z}_\nu^k$ 上的鍊 x_ν^{k-1}, y_ν^{k-1}, z_ν^k 分別換成 Ξ^k 的面 Ξ_ν^{k-1}, Ξ_ν^{k-1} 的逼近 H_ν^{k-1}，與 Ξ_ν^{k-1} 及 H_ν^{k-1} 的連接鍊 Z_ν^k。

關于別個廣義的單純形 $'\Xi^k, \cdots$ 的棱柱體 $'\mathfrak{z}^{k+1}, \cdots$，也有同樣的結果。根據頁 153 上的 $(1'')$ 與頁 143 上的 (1)，A^k 的邊緣是

$$\mathsf{A}^{k-1} = \alpha \sum \Xi_\nu^{k-1} + {}'\alpha \sum {}'\Xi_\nu^{k-1} + \cdots。\tag{4''}$$

所以 A^{k-1} 的逼近是

$$\mathsf{B}^{k-1} = \alpha \sum \mathsf{H}_\nu^{k-1} + {}'\alpha \sum {}'\mathsf{H}_\nu^{k-1} + \cdots,\tag{5''}$$

A^{k-1} 與 B^{k-1} 的連接鍊是

$$\Gamma^k = \alpha \sum \mathsf{Z}_\nu^k + {}'\alpha \sum {}'\mathsf{Z}_\nu^k + \cdots,\tag{6''}$$

而且 §29 中的公式 (I) 到 (IV) 對于這些鍊也成立：

$$F[\mathsf{A}^k] = \mathsf{A}^{k-1},\tag{I''}$$

$$F[\mathsf{B}^k] = \mathsf{B}^{k-1},\tag{II''}$$

$$F[\Gamma^k] = \mathsf{A}^{k-1} - \mathsf{B}^{k-1},\tag{III''}$$

$$F[\Gamma^{k+1}] = \mathsf{A}^k - \mathsf{B}^k - \Gamma^k。\qquad (IV'')$$

公式 (II'') 說，**廣義鍊的逼近的邊緣等于邊緣的逼近。**

綜 合

現在只要綜合第一步與第二步的結果。把第一步中的連接鍊 C^k 與 C^{k+1} 分別加上第二步中的連接鍊 Γ^k 與 Γ^{k+1}，即得着下列新的連接鍊:

$$V^k = C^k + \Gamma^k,$$

$$V^{k+1} = C^{k+1} + \Gamma^{k+1}。$$

我們在第二步起始的時候改變了記號，把 B^k 與 B^{k-1} 分別改叫做 A^k 與 A^{k-1}。所以我們從**連接公式** (I') 到 (IV')，與 (I'') 到 (IV'')，求得

$$F[A^k] = A^{k-1} \qquad (I)$$

$$F[\mathsf{B}^k] = \mathsf{B}^{k-1} \qquad (II)$$

$$F[V^k] = A^{k-1} - \mathsf{B}^{k-1} \qquad (III)$$

$$F[V^{k+1}] = A^k - \mathsf{B}^k - V^k。\qquad (IV)$$

不間 A^k 是什麽樣的廣義鍊，這些結果都成立。我們現在假設 A^k 是閉鍊，所以 $A^{k-1} = 0$。所以法重分 B^{k-1} 與他的逼近 B^{k-1} 也等于零，而且連接鍊 C^k 與 Γ^k 同樣的等于零，因此 V^k 也等于零。於是公式 (IV) 化簡成

$$F[V^{k+1}] = A^k - \mathsf{B}^k,$$

那就是說，**每一個廣義的閉鍊有一個同調的單純鍊。**

現在再假設 A^k 的邊緣 A^{k-1} 是單純鍊。g 次法重分後，我們從 A^{k-1} 得着 B^{k-1}，然後又從 B^{k-1} 得着單純逼近 B^{k-1}。我們說 $\mathsf{B}^{k-1} = A^{k-1}$，因爲**任一單純鍊 A^i 的 g 次法重分 B^i 的單純逼近就是 A^i 自身。**

在 $i=0$ 的時候，這句話成立。因爲零維鍊 A^0 與他的 g 次法重分相同，而且 A^0 的每一個零維鍊的單純逼近也是這零維鍊自身。關于 $i-1$ 維鍊 A^{i-1}，特别是關于 A^i 的一個 i 維單純形 E^i 的邊緣，我們假設這句話已經證明了。設 E^i_g 表示 E^i 的 g 次法重分，E^i_g 的單純逼近是鍊 U^i。根據歸納法的假設，$F[E^i_g]$ 的單純逼近就是 $F[E^i]$。又因爲逼近的邊緣等于邊緣的逼近，所以

$$F[U^i] = F[E^i]。 \tag{1}$$

現在設 e^i 是 E^i_g 的一個子單純形。e^i 的頂點的逼近是 E^i 的某些頂點，所以 e^i 自身的逼近或是 εE^i ($\varepsilon = \pm 1$) 或是 E^i 的一個面。在後者情形下，e^i 的逼近是降秩的單純形，所以在 E^i_g 的逼近中等于 0。所以逼近 U^i 只能是 E^i 的一個倍數。因爲 (1)，恰好 $U^i = E^i$。

若是

$$A^i = \gamma\, E^i + {}'\gamma\, {}'E^i + \cdots$$

是 $\mathfrak{K}^n$ 的任一個 i 維單純鍊，

$$B^i = \gamma\, E^i_g + {}'\gamma\, {}'E^i_g + \cdots$$

是他的 g 次法重分，B^i 的單純逼近就是

$$\mathsf{B}^i = \gamma\, U^i + {}'\gamma\, {}'U^i + \cdots$$

$$= \gamma E^i + '\gamma\, 'E^i + \cdots$$
$$= A^i。$$

這句話在 i 維的時候因此證明了，所以在任何維數的時候也證明了。

我們所以能把公式 (I) 到 (IV) 中的 A^{k-1} 改變成 B^{k-1}。(IV)改變成

$$F[V^k] = 0,$$

那就是說,V^k 是閉鍊。設 A^{k-1} 的所有的 $k-1$ 維單純形所組成的子複合形叫做 $\mathfrak{A}^{k-1}$。根據 V^k 的求法*),V^k 在 $\mathfrak{A}^{k-1}$ 上。V^k 在 $\mathfrak{A}^{k-1}$ 上的單純逼近是 $\mathfrak{A}^{k-1}$ 上的一個 k 維鍊,而且與 V^k 同調 (頁 156)。因爲 $\mathfrak{A}^{k-1}$ 不含有 k 維單純形,所以這逼近是 0 這 k 維鍊,所以 $V^k \sim 0$。應用公式 (IV), $A^k - \mathsf{B}^k - V^k \sim 0$, 所以恰好 $A^k \sim \mathsf{B}^k$。

逼近定理的證明因此完成了。**同調羣的拓樸不變性確定了，所以以同調羣爲根據的概念與定理也就同時證明了是複合形的拓樸性質。**) 例如 *Betti* 數與撓係數可以由同調羣確定，所以是不變性。連通數可以由 *Betti* 數與偶撓係數的個數求得,所以是不變性；*Euler* 示性數由間隔的加減 *Betti* 數而成,所以是不變性，而且所有的單純剖分的示性數都相等。** 若是我們不考慮複合形的所有的單純剖分,只用某種重分與合併 (*Oberteilung*)，如同 §37 中所討論的，把複合形的一個

*) $V^k = C^k + \Gamma^{\gamma}$ 中的鍊 C^k 顯然在 $\mathfrak{A}^{k-1}$ 上。根據頁 156 上的討論,Γ^k 也在 $\mathfrak{A}^{k-1}$ 上。

**) 我們在這裏應該注意,在 $k > n$ (單純剖分的維數)的時候,第 k 個廣義的同調羣的定義也同第 k 個單純的同調羣 (頁 91) 的一樣,而且也從此證明了他們相同。

單純剖分改變成新的剖分，我們也容易證明這單純剖分的上述性質不因為這種重分與合併而改變。不過我們已無須引用單純剖分的這種重分了；不問同一個複合形的兩個單純剖分有否一個公共的重分，我們已經證明了他們的上述性質都相同。

我們所得着的結果不只是不變性的證明，還有更深遠的意義。我們固然也能改用更簡單的辦法把一個單純剖分與另一個連貫起來。[17] 但是我們所特別注重的是立下同調羣的拓撲不變性的定義，因此一勞永逸的解除了單純剖分(複合形的建設性的定義)的束縛。雖然現在費了我們不少的篇幅，但此後用不着處處用逼近的方法，也是一種便利。例如在將來證明流形的變換定理的時候，我們就能得着補償：利用不變性的定義減少困難。

§31 變換的變狀與變換的單純逼近

我們現在要轉而討論的定理，也是一個逼近定理；不過他不是關于廣義鍊的逼近，却是關于一個換複合形 $\mathfrak{K}^n$ 到複合形 K^m 的綿續變換的逼近。要陳述這定理，我們需要介紹兩個概念：變換的變狀與單純變換。這兩個概念在拓撲學中都有很重要的任務。

為簡單計，我們假設 $\mathfrak{K}^n$ 是一個有限的複合形。設有兩個綿續的變換 g_0 與 g_1 換 $\mathfrak{K}^n$ 到 K^m。若是"g_0 與 g_1 間有一綿續束的變換存在"，我們就說 g_0 能同倫的變狀成 g_1。所謂 g_0 與 g_1 間有一綿續束的變換存在，就是說：與參數 t, $0\leqq t\leqq 1$, 的每一個值對應的，有一變換

g_t 存在，給定的 g_0, g_1 分別與 $t=0, t=1$ 對應，而且當 t 與 $\mathfrak{K}^n$ 上的點 P 綿續的變的時候，像點 $g_t(P)$ 也綿續的變。

上述的同倫的變狀的定義與下述的等價：設 $\mathfrak{K}^n \times \mathrm{t}$ 是 $\mathfrak{K}^n$ 與單位線段 $0 \leqq t \leqq 1$ 的拓撲積。設有一個綿續的變換 f 換 $\mathfrak{K}^n \times \mathrm{t}$ 到 K^m，使 $f(P\times 0)=g_0(P), f(P\times 1)=g_1(P)$。$g_0$ 能同倫的變狀成 g_1 與否，就看有這麼一個變換 f 存在與否而定。——有了 $\mathfrak{K}^n \times \mathrm{t}$ 的變換 f, 只需要命

$$g_t(P)=f(P\times t), \tag{1}$$

就可以界說一束變換，換 $\mathfrak{K}^n$ 到 K^m。反之，有了換 $\mathfrak{K}^n$ 的一綿續束的變換 g_t, 方程式 (1) 就界說了換 $\mathfrak{K}^n \times \mathrm{t}$ 的一個綿續變換 f。

第二個定義的優點是，拓撲積的一個單獨的變換就可以確定一束的所有的變換。$\mathfrak{K}^n \times \mathrm{t}$ 叫做 $\mathfrak{K}^n$ 的**變狀的複合形** (*Deformationskomplex*), t 叫做變狀的參數。

最適當的辦法是把變狀的複合形如下的安置在一個實數空間中。設給定了一個有限的複合形 $\mathfrak{K}^n$ 與他的單純剖分。設 $\mathfrak{R}^{r+1}$ 是用 x_1, $x_2, \cdots, x_r, t$ 做坐標的實數空間。根據 §11，只要 $r \geqq 2n+1$，我們就能假設 $\mathfrak{K}^n$ 是 $\mathfrak{R}^{r+1}$ 的平直子空間 $t=0$ 中的一個平直複合形。在 $\mathfrak{R}^{r+1}$ 中直移 $\mathfrak{K}^n$, 從平直空間 $t=0$ 移到平直空間 $t=1$。$\mathfrak{K}^n$ 的軌跡恰是變狀複合形 $\mathfrak{K}^n \times \mathrm{t}$。

若是 g_0 能變狀成 g_1, g_1 顯然的也能變狀成 g_0。若是 g_1 又能變狀成 g_2, g_0 也能變狀成 g_2。因此換 $\mathfrak{K}^n$ 到 K^m 的綿續變換能彙集成能互

相同倫變狀的類，叫做**變換類** (*Abbildungsklass*)。

我們只要求變換 $g_t(0 \leqq t \leqq 1)$ 是單值的綿續變換。若是所有的變換都是拓撲變換，我們就說變換 g_0 **同痕的變狀**成 g_1。這換變狀的複合形到 K^m 的變換却不必同時也是拓撲變換。例如一圓域 $\mathfrak{K}^2$ 在實數平面 K^2 中的剛體的移動，就是一個同痕的變狀。

K^m 能與 $\mathfrak{K}^n$ 相同，因此 g_t 能是 $\mathfrak{K}^n$ 的一個**自身變換**。若 g_0 特別是么變換，這一綿續束的自身變換（拓撲的自身變換）g_t 就叫做複合形 $\mathfrak{K}^n$ 的一個**同倫的（同痕的）自身變狀**。此後我們只討論同倫的變換，所以通常省去同倫的這形容詞。

這換單純的複合形 $\mathfrak{K}^n$ 到一個單純的複合形 K^m 的一個綿續變換，若是平直的（頁 58）換 $\mathfrak{K}^n$ 的單純剖分中每一個單純形 $\mathfrak{E}^i$ $(i=0, 1, \cdots, n)$ 成 K^m 的一個單純形 Σ^j $(j \leqq i)$，就叫做換 $\mathfrak{K}^n$ 到 K^m 的一個**單純變換**。若是知道了 $\mathfrak{K}^n$ 的每一個頂點在 K^m 中的像頂點，頂點間的這組合的對應就已經完全確定了這單純變換。這種頂點間的對應只要滿足一個條件：$\mathfrak{K}^n$ 中的一個單純形的頂點的對應點也是 K^m 中的一個單純形的頂點。換 $\mathfrak{K}^n$ 中所有的頂點成 K^m 中同一頂點的變換也是一個單純變換，是單純變換的一個無關重要的例子。

我們要想證明的定理的主要意義如下：若是 $\mathfrak{K}^n$ 的單純剖分適當的細密，每一個給定的換 $\mathfrak{K}^n$ 到 K^m 的綿續變換都能變狀成一個單純變換。

設 g_0 是換 $\mathfrak{K}^n$ 到 K^m 的一個綿續變換。在 $\mathfrak{K}^n$ 經過適當的細密的

重分之後，$\mathfrak{K}^n$ 的每一個單純星形的像集完全屬于 K^m 的一個單純星形的內域。設 P_v 是 $\mathfrak{K}^n$ 的任一頂點。若 Π_v 是 K^m 的一個頂點，而且以 Π_v 爲中心的星形內域完全含有以 P_v 爲中心的星形的集像，我們就叫 Π_v 做 P_v 的對應點。設 $P_0, P_1, \cdots, P_i$ 是 $\mathfrak{K}^n$ 的一個 i 維單純形 $\mathfrak{E}^i$ 的頂點。K^m 上以 $\Pi_0, \Pi_1, \cdots, \Pi_i$ 爲中心的這些星形的內域都完全含有像集 $g_0(\mathfrak{E}^i)$；這裏的 Π_v 不一定都不相同。因此可知，$\Pi_0, \Pi_1, \cdots, \Pi_i$ 也是 K^m 的一個單純形的頂點。因爲，若 P 是 $\mathfrak{E}^i$ 中的任一點，Σ 是 K^m 中含有 $g_0(P)$ 的一個單純形，以 $\Pi_0, \Pi_1, \cdots, \Pi_i$ 爲中心的這些星形的內域就也都含有 $g_0(P)$。因此 $\Pi_0, \Pi_1, \cdots, \Pi_i$ 就是 Σ 的頂點，所以他們是 K^m 中一個單純形 Σ^j 的頂點。這 $\mathfrak{K}^n$ 的頂點 P_v 與 K^m 的頂點 Π_v 間的對應確定一個換 $\mathfrak{K}^n$ 到 K^m 的單純變換 g_1。

$\mathfrak{E}^i$ 中的點 P（前文中說的）的像點 $g_1(P)$ 屬于 Σ^j，所以也同 $g_0(P)$ 一樣的屬于 Σ。所以有一個直線段連接 $g_1(P)$ 與 $g_0(P)$。我們只要使點 $g_0(P)$ 在連接線段上移動到 $g_1(P)$ 爲止（有時並不移動地位），就證明了 g_0 能變狀成 g_1。更正確的說，我們能够界說換變狀的複合形 $\mathfrak{K}^n\times\mathrm{t}$ 到 K^m 的一個綿續變換 f 如下：使 $f(P\times 0)=g_0(P)$，$f(P\times 1)=g_1(P)$。而且當 t 從 0 變到 1 的時候，$P\times t$ 在 $\mathfrak{K}^n\times\mathrm{t}$ 上的軌跡是一條線段，我們又使這線段平直的變換成 $g_0(P)$ 與 $g_1(P)$ 的連接線段（有時這線段只是一點）。根據頁 79 上的預備定理，變換 f 綿續。

我們證明的就是下述定理：

定理 I（變狀定理）：設給定了任一個換有限的複合形 $\mathfrak{K}^n$ 到複合

形 K^m 的綿續變換。只要 $\mathfrak{R}^n$ 已有了適當細密的單純剖分，這變換就能(同倫的)變狀成一個單純變換。若是在變狀開始的時候，$\mathfrak{R}^n$ 上的一點 P 的像點屬于 K^m 的某一個單純形，他在變狀的歷程中，永不離開這單純形；所以他只在開始時所屬的最低維的單純形中移動。

根據 §27 中的定理 II，一個換 $\mathfrak{R}^n$ 到 K^m 的綿續變換引出換 $\mathfrak{R}^n$ 的第 k 個同調羣到 K^m 的第 k 個同調羣的一個同構變換。我們現在要研究綿續變換的變狀在同調羣的同構變換上產生什麼影響。

定理 II: **設** g_0 **與** g_1 **是換** $\mathfrak{R}^n$ **到** K^m **的兩個綿續變換，**A^k **是** $\mathfrak{R}^n$ **上一個廣義鍊，他的邊緣是** A^{k-1}**。設** K^m **上的廣義鍊** A^k **與邊緣** A^{k-1}，B^k **與邊緣** B^{k-1} **分別是** $g_0(A^k)$ **與** $g_0(A^{k-1})$，$g_1(A^k)$ **與** $g_1(A^{k-1})$**。若是** g_0 **能變狀成** g_1，K^m **上就有連接鍊** Γ^k **與** Γ^{k+1} **存在，適合下列連接公式：**

$$F[\Gamma^k]\ =\mathrm{A}^{k-1}-\mathrm{B}^{k-1},$$

$$F[\Gamma^{k+1}]=\mathrm{A}^k-\mathrm{B}^k-\Gamma^k。$$

在變狀歷程中 A^{k-1} (A^k) **的像集的軌跡含有** $\Gamma^k(\Gamma^{k+1})$**。若是特別** $A^{k-1}=0$ **(所以** $\mathrm{A}^{k-1}=\mathrm{B}^{k-1}=0$**)，就有** $\Gamma^k=0$**，而且** $\mathrm{A}^k\sim\mathrm{B}^k$ **(參看圖 52)。**

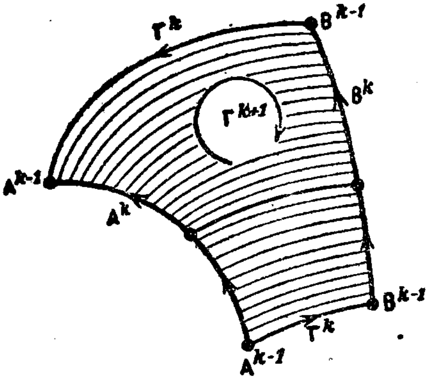


圖 52

證明：如同在頁 159 中，在實數空間 $\mathfrak{R}^{n+1}$ 中取一個變狀的複合形 $\mathfrak{R}^n\times t$。設鍊 A^k 由下式給定：

$$A^k = a\,X^k + 'a\,'X^k + \cdots。$$

設 x^k 是 X^k 的原底單純形；設 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 是 x^k 上的棱柱體，他的頂面是 $\mathfrak{y}^k$。在把 $\mathfrak{R}^n$ 直移（頁 159）成 $\mathfrak{R}^n\times\mathrm{t}$ 的時候，廣義的單純形 X^k 的點的軌跡是 $\mathfrak{R}^n\times\mathrm{t}$ 上的一個點集。我們規定一個綿續的變換，把 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 換成這點集如下：x^k 按照預先給定的情形換成 $\mathfrak{R}^n\times 0$ 上的 X^k；若是 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 的任一與軸平行的線段 l 的底點的像點在直移時產出 $\mathfrak{R}^n\times\mathrm{t}$ 的線段 L，就把 l 平直的變換成 L。若是與 §29 中一樣，單純的剖分 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 而且給定子單純形的定向，這換 $\mathfrak{z}^{k+1}$ 到 $\mathfrak{R}^n\times\mathrm{t}$ 的變換也把單純形或鍊

$$x^k,\ y^k,\ z^{k+1},\ x_\nu^{k-1},\ \ y_\nu^{k-1},\ \ z_\nu^k$$

分別換成 $\mathfrak{R}^n\times\mathrm{t}$ 上的廣義鍊

$$X^k, Y^k, Z^{k+1}, X_\nu^{k-1}, Y_\nu^{k-1}, Z_\nu^k。$$

對于 A^k 的其他廣義的單純形我們也用同樣的辦法；相加後就得着下列廣義鍊

$$B^k \quad = a\,Y^k + 'a\,'Y^k + \cdots,$$

$$C^{k+1} = a\,Z^{k+1} + 'a\,'Z^{k+1} + \cdots,$$

$$A^{k-1} = a\sum_\nu X_\nu^{k-1} + 'a\sum_\nu {}'X_\nu^{k-1} + \cdots,$$

$$B^{k-1} = a\sum_\nu Y_\nu^{k-1} + 'a\sum_\nu {}'Y_\nu^{k-1} + \cdots,$$

$$C^k \quad = a\sum_\nu Z_\nu^k + 'a\sum_\nu {}'Z_\nu^k + \cdots,$$

而且頁 145 上的連接公式成立。

A^k 與 A^{k-1} 二鍊的直移的軌跡在 $\mathfrak{R}^n\times t$ 上分别含有廣義鍊 C^{k+1} 與 C^k。 C^{k+1} 如此，是很顯明的。至于 C^k，我們要考慮到的，是 A^{k-1} 的軌跡通常不是個别的廣義的單純形 X_ν^{k-1}, $'X_\nu^{k-1}$, $\cdots$ 的軌跡的連集。因爲也許這樣的一個單純形降秩，或者與别個單純形相消去，所以他形式上雖在 A^{k-1} 的右端，實際上不屬于 A^{k-1}。其實我們只需要證明，若是

$$^{(\varkappa)}X_\mu^{k-1}=\pm\,^{(\lambda)}X_\nu^{k-1}\,, \tag{2}$$

下列等式

$$^{(\varkappa)}Y_\mu^{k-1}=\pm\,^{(\lambda)}Y_\nu^{k-1}\,,\quad ^{(\varkappa)}Z_\mu^{k}=\pm\,^{(\lambda)}Z_\nu^{k}$$

就也成立。但根據 $^{(\varkappa)}Y_\mu^{k-1}$, $^{(\lambda)}Y_\nu^{k-1}$, $^{(\varkappa)}Z_\mu^{k}$, $^{(\lambda)}Z_\nu^{k}$ 的作法與廣義鍊的相等的定義，這兩個等式顯然眞確。

這換 $\mathfrak{R}^n\times t$ 到 K^m 的變換，換廣義鍊 A^k, A^{k-1}, B^k, B^{k-1}, C^k, C^{k+1} 分别成定理中的鍊 A^k, A^{k-1}, B^k, B^{k-1}, Γ^k, Γ^{k+1}。根據頁 137 上的定理 I，他並不改變連接公式：

$$F[\mathsf{A}^k]\quad=\mathsf{A}^{k-1} \tag{I}$$

$$F[\mathsf{B}^k]\quad=\mathsf{B}^{k-1} \tag{II}$$

$$F[\Gamma^k]\quad=\mathsf{A}^{k-1}-\mathsf{B}^{k-1} \tag{III}$$

$$F[\Gamma^{k+1}]=\mathsf{A}^k-\mathsf{B}^k-\Gamma^k。 \tag{IV}$$

公式 (III) 與 (IV) 就是定理中要證明的連接公式。而且鍊 $\Gamma^k(\Gamma^{k+1})$

是在 A^{k-1} (A^k) 的直移的軌跡 ($\mathfrak{K}^n \times t$ 上的點集) 的像集上。定理 II 所以證明了。

根據定理 II, 若是變換 g_0 與 g_1 能互相變狀,他們就變換一個廣義的閉鍊成 K^m 上的兩個互相同調的鍊。所以有下述定理:

定理 III: 設有一個綿纘的變換,換 $\mathfrak{K}^n$ 到 K^m, 因而引出 §27 中的定理 II 所說的換 $\mathfrak{K}^n$ 的第 k 個同調羣到 K^m 的第 k 個同調羣的,一個同構變換。這個同構變換不因這綿纘變換的同倫變狀而改變;所以他是這變換類的不變性。

特別在 $\mathfrak{K}^n$ 與 K^m 相同, g_0 是么變換的時候,那就是說,在複合形的自身變狀的時候,這定理成立。因爲由 g_0 引出的, $\mathfrak{K}^n$ 的同調羣的自身變換是么變換,所以有下述定理:

定理 IV: 由一個複合形 $\mathfrak{K}^n$ 的一個自身的同倫變狀所引出的, $\mathfrak{K}^n$ 的同調羣的同構自身變換是么變換。

根據定理 III, 我們得着兩個換 $\mathfrak{K}^n$ 到 K^m 的綿續變換屬于同一變換類的一個必要條件,但他不是充足條件。設 $\mathfrak{K}^n = \mathrm{K}^m$ 是 n 維球 $\mathfrak{S}^n$,是一個 $n+1$ 維單純形 $\mathfrak{E}^{n+1} = (P_0 P_1 \cdots P_n P_{n+1})$ 的邊緣。設不變動頂點 $P_2, P_3, \cdots, P_{n+1}$, 只交換頂點 P_0 與 P_1 的 $\mathfrak{E}^{n+1}$ 的這平直變換,引出 $\mathfrak{S}^n$ 上的自身變換 g_1。我們要問: g_1 是否屬于么變換的變換類,那就是說, g_1 能否同倫變狀成么變換。$\mathfrak{S}^n$ 上的 $F[E^{n+1}]$*)這鍊組成 $\mathfrak{S}^n$ 的第 n 個同調羣的同調基,這同調羣是一個自由循環羣。這變

---

*) 如同通常一樣,用 E^{n+1} 表示有了確定的定向的單純形 $\mathfrak{E}^{n+1}$。

換換定向的單純形 $E^{n+1} = +(P_0 P_1 \cdots P_{n+1})$ 成 $-E^{n+1} = +(P_1 P_0 \cdots P_{n+1})$，所以換 $F[E^{n+1}]$ 成 $-F[E^{n+1}]$。所以由 g_1 引出的這第 n 個同調羣的同構變換不是么變換。根據定理 IV，g_1 不屬于么變換的變換類。

習題：在什麼 n 的時候，$n+1$ 維實數空間中的單位 n 維球的徑點的交換屬于么變換的變換類？[用反射的乘積表示徑點的交換。]

我們再應用定理 II，求投影空間 $\mathfrak{P}^n$ 的同調羣。

我們先要斷定，在什麼 n 的時候，$\mathfrak{P}^n$ 能定向。為達到這目的起見，我們要注意 $\mathfrak{P}^n$ 是由叠合 n 維球 $\mathfrak{S}^n$ 的徑點而成的空間。我們取定 n 維球的對于中心對稱的一個單純剖分，而且協合的給定這剖分的定向。因為徑點的交換是 $n+1$ 個反射的乘積，而且每一個反射改變 $\mathfrak{S}^n$ 的定向，所以徑點的交換改變 $\mathfrak{S}^n$ 的定向與否，視 n 是偶數或奇數而定。在 n 是奇數的時候，$\mathfrak{S}^n$ 上兩個對立的定向的 n 維單純形叠合成 $\mathfrak{P}^n$ 上同一個定向的 n 維單純形，所以 $\mathfrak{S}^n$ 的這個定向就給定 $\mathfrak{P}^n$ 的一個協合的定向。在 n 是偶數的時候，$\mathfrak{S}^n$ 上每兩個對立的 n 維單純形叠合成 $\mathfrak{P}^n$ 上一個單純形的時候，前者的兩個定向叠合成後者的兩個相反的定向，但是 $\mathfrak{P}^n$ 的一個協合的定向"印成" $\mathfrak{S}^n$ 的一個協合的定向，所以 $\mathfrak{P}^n$ 是不能定向的。[讀者可從 $n=2$ 與 $n=3$ 這二專款，得一明白的印像。] **所以在 n 是奇數的時候，$\mathfrak{P}^n$ 能定向，在 n 是偶數的時候，$\mathfrak{P}^n$ 不能定向。**

如同 §14 中，我們用 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 做 $\mathfrak{P}^n$ 中的投影坐標。方程式

$$x_{k+2}=0,\cdots,x_{n+1}=0 \qquad (\mathfrak{P}^k)$$

所確定的投影子空間我們用 $\mathfrak{P}^k$ 表示。在 $\mathfrak{P}^n,\mathfrak{P}^{n-1},\cdots,\mathfrak{P}^1,\mathfrak{P}^0$ 這一串的投影空間中，每一個是他的前一個的子空間。

要求得 $k\,(0<k<n)$ 維的同調基，我們從一廣義的 k 維閉鍊 U^k 着手。若是 U^k 含有 $(0,0,\cdots,0,1)$ 這點，我們取 $\mathfrak{P}^n$ 的一個單純剖分，使 $(0,0,\cdots,0,1)$ 這點是剖分中的一個 n 維單純形的中間點，然後把 U^k 改成他在這剖分中的單純逼近，以離開這點。 所以我們此後可以假設 U^k 不含有 $(0,0,\cdots,0,1)$。取一個小球體，用這點做球心，而且與 U^k 無共點。 $\mathfrak{P}^n$ 減去了這球體的內點，是一個有邊緣的假流形。當 t 從 1 變到 0 的時候，下列方程式

$$x_1'=x_1,\ x_2'=x_2,\cdots,x_n'=x_n,\ x_{n+1}'=t\,x_{n+1}\ ,$$

給定一束變換，把這假流形變狀到投影空間 $\mathfrak{P}^{n-1}$。 U^k 也變狀成了一個同調鍊 $'U^k$ (定理 II)。若是 $k<n-1$，還可以再用這方法，把 $'U^k$ 擠到 $\mathfrak{P}^{n-2}$ 中去。 繼續用這方法，最後得着 $\mathfrak{P}^k$ 中的一個鍊 $V^k\sim U^k$。若是 k 是偶數，$\mathfrak{P}^k$ 就不能定向，所以 $\mathfrak{P}^k$ 中所有的 k 維閉鍊都零調；那就是說，若是 k 是偶數，$\mathfrak{P}^n$ 的第 k 個同調羣只含有零元。若是 k 是奇數，$\mathfrak{P}^k$ 中有一個 k 維閉鍊 P^k，由 $\mathfrak{P}^k$ 的協合定向組成，$\mathfrak{P}^k$ 中每一個 k 維閉鍊 V^k 與 P^k 的一個倍數同調。所以 k 是奇數的時候，$\mathfrak{P}^n$ 的第 k 個同調羣是循環羣，P^k 是同調基。羣的級是 2。 因爲 $\mathfrak{P}^{k+1}$ 是一個不能定向的假流形，所以恰有一個等于 2 的 k 維撓係數 (§24)。 所以在 $\mathfrak{P}^{k+1}$ 中 $2P^k\sim 0$。P^k 自身在 $\mathfrak{P}^{k+1}$ 中不零調，在 $\mathfrak{P}^n$ 中也不零調。

因爲,若是 P^k 是 $\mathfrak{P}^n$ 中的鍊 U^{k+1} 的邊緣,我們可以用擠 U^k 的方法,把 U^{k+1} 擠到子空間 $\mathfrak{P}^{k+1}$ 中去,而且不移動 P^k 中的任一點。P^k 就也是 $\mathfrak{P}^{k+1}$ 的一個鍊 V^{k+1} 的邊緣,這是不可能的。我們證明了的是下述定理:

任何 n 維的投影空間 $\mathfrak{P}^n$ 的第 0 個同調羣,n 是奇數時的 $\mathfrak{P}^n$ 的第 n 個同調羣,都是自由循環羣;此外,奇維的同調羣的級都是 2,偶維的同調羣都只有零元。

協合定向的子投影空間 $P^1, P^3, P^5, \cdots$ 能用作奇維的同調基。[18]

第五章 在一點處的性質

同調羣是複合形的第一個證明了(前一章)的拓撲不變性。從同調羣只能得着複合形的一個粗淺的分類。同調羣相同的複合形,並不一定同胚。例如一條線段(一維單純形)與一個圓域(二維單純形),他們不同胚,我們在 §1 中已經說明了。但是他們的同調羣都相同:第零個同調羣是只有一個母元的自由循環羣,其餘的同調羣都只含有零元(頁 90 與頁 95)。

同調羣是一個"全局的"(*im Grossen*)不變性;要知道了全個的複合形,我們纔能求得他的同調羣。但是線段與圓域的差別,從他們的各一點的任一小鄰域都可以看出:這種的鄰域就已經不同胚。我們在本章中就是要表明"局部的"(*im Kleinen*)不變性。這種不變性也可以說是複合形在一點處的不變性;只要知道了所討論的這一點的任一小鄰域,這種性質就已經確定了。最重要的一個局部的不變性是"在一點處的同調羣"。有了他的幫助,我們就能證明維數,邊緣,假流形,能定向性等(從前只對於一個單純剖分有定義的)都是拓撲不變性。[19]

我們的討論,同時適用于有限的與無窮的複合形。

§32 複合形在一點處的同調羣

設 $\mathfrak{K}^n$ 是一個連通的單純的 $n\,(>0)$ 維複合形,P 是 $\mathfrak{K}^n$ 上的一點。在這單純剖分中的,含有 P 這點的一個 i 維單純形中,作從 P 點起始的射線。這射線在某一點 Q 處纔離開這單純形。作從 P 點起始的所有的射線。所有的線段 (PQ) 裝滿一個子複合形 Ω;Ω 的單純形恰是 $\mathfrak{K}^n$ 中所有的含有 P 的單純形。Ω 就叫做 P 在 $\mathfrak{K}^n$ 中的單純的鄰域。根據 §10 中條件 (k_4),Ω 也是 P 在 $\mathfrak{K}^n$ 中的一個鄰域。所有線段 $(P\,Q)$ 的終點 Q 組成一個集合,叫做 P 在 $\mathfrak{K}^n$ 中的鄰域複合形 (*Umgebungskomplex*) $\mathfrak{A}$;$\mathfrak{A}$ 不是 P 的鄰域,却由 Ω 中所有的不含有 P 點的單純形組成。若 P 特別是這單純剖分中的一個頂點,Ω 就

是以 P 爲中心的單純的星形，$\mathfrak{A}$ 就是他的外邊緣。若 P 不是頂點，複合形總有另一個用 P 做頂點的單純剖分；例如在 P 點處投影鄰域複合形 $\mathfrak{A}$，結果就是如此的一個單純剖分。

P 的鄰域複合形 $\mathfrak{A}$ 的第 k 個同調羣就叫做 $\mathfrak{K}^n$ **在 P 點處的第 k 個同調羣** (*die k-te Homologiegruppe von $\mathfrak{K}^n$ im Punkte P*)。我們現在界說 $\mathfrak{K}^n$ 在 P 點處的同調羣，也是利用 $\mathfrak{K}^n$ 的一個確定的單純剖分。但是我們就要證明，這些同調羣實際上與單純剖分無干，是 $\mathfrak{K}^n$ 中的拓撲不變性。[20]

例：1. 設 P 是 $\mathfrak{K}^n$ $(n>1)$ 的一個 n 維單純形 $\mathfrak{E}^n$ 的一個中間點。鄰域複合形 $\mathfrak{A}$ 由 $\mathfrak{E}^n$ 的邊緣組成，所以是一個 $n-1$ 維球面。根據頁 95，所以 $\mathfrak{K}^n$ 在 P 處的一維到 $n-2$ 維的同調羣只含有零元，零維與 $n-1$ 維的同調羣是自由循環羣。

2. 設 $\mathfrak{K}^n$ 的一個 $n-1$ 維單純形 $\mathfrak{E}^{n-1}$ 與 k 個 n 維單純形 $\mathfrak{E}_1^n, \mathfrak{E}_2^n, \cdots, \mathfrak{E}_k^n$ 關聯，P 是 $\mathfrak{E}^{n-1}$ 的一個中間點（圖 53）。若 $n>1$，

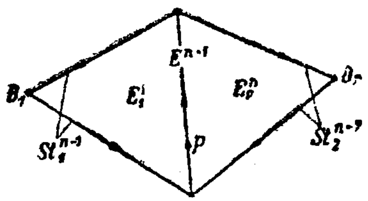


圖 53

而且 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 分別是 $\mathfrak{E}_1^n, \mathfrak{E}_2^n, \cdots, \mathfrak{E}_k^n$ 的，與 $\mathfrak{E}^{n-1}$ 對立的頂點，P 的鄰域複合形就是由以 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 爲中心的 k 個單純的星形 $\mathfrak{St}_1^{n-1}, \mathfrak{St}_2^{n-1}, \cdots, \mathfrak{St}_k^{n-1}$ 組成。$\mathfrak{E}^{n-1}$ 的邊緣 $\mathfrak{S}^{n-2}$ 就是這些星形的公共外邊緣。——我們要求得在 P 處的第 $n-1$ 個同調羣。爲達到這目的起見，協合的給定 $\mathfrak{St}_\mu^{n-1}$ 中的 $n-1$

維單純形的定向，使如此得着的 $n-1$ 維鍊 St_μ^{n-1} 與這固定的定向單純形 E^{n-1} 的和是一個閉鍊。*) 因爲 St_μ^{n-1} 與單純形 E^{n-1} 組成單純形 E_μ^n 的邊緣，如此定向是可能的。因此

$$F[St_\mu^{n-1}] = -F[E^{n-1}]。 \tag{1}$$

$$St_1^{n-1} - St_k^{n-1},\ St_2^{n-1} - St_k^{n-1},\ \cdots,\ St_{k-1}^{n-1} - St_k^{n-1} \tag{2}$$

這 $k-1$ 個 $n-1$ 維閉鍊在 $\mathfrak{A}^{n-1}$ 上同調無關。因爲從

$$\sum_{\nu=1}^{k-1} a_\nu (St_\nu^{n-1} - St_k^{n-1}) \sim 0,$$

卽有

$$\sum_{\nu=1}^{k-1} a_\nu\ St_\nu^{n-1} - \Big(\sum_{\nu=1}^{k-1} a_\nu\Big) St_k^{n-1} \sim 0。$$

這同調式旣是在 $\mathfrak{A}^{n-1}$ 上，而複合形 $\mathfrak{A}^{n-1}$ 上又無 n 維單純形，所以同調式能改作等式 (頁 91)。又因爲每兩個鍊 St_μ 與 St_ν ($\mu \neq \nu$) 無公共的 $n-1$ 維單純形，所以 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k-1} = 0$。

$\mathfrak{A}^{n-1}$ 上的每一個 $n-1$ 維閉鍊 U^{n-1} 是鍊 St_μ^{n-1} 的一個平直組合。其實，若是 St_μ^{n-1} 的一個 $n-1$ 維單純形在 U^{n-1} 中出現，而且他的倍數是 b_μ，因爲 U^{n-1} 是閉鍊，U^{n-1} 中必含有 St_μ^{n-1} 的每一個 $n-1$ 維單純形的 b_μ 倍；所以

$$U^{n-1} = b_1\, St_1^{n-1} + b_2\, St_2^{n-1} + \cdots + b_k\, St_k^{n-1}。$$

*) 我們注意，從不定向的圖形改成定向的時候，表示這圖形的字母也從德文字體改成臘丁文字體。

根據 (1)，只有 $\sum_{\mu=1}^{k} b_\mu = 0$ 的時候，$F[U^{n-1}]$ 纔能 $=0$. 所以 U^{n-1} 能寫成

$$U^{n-1} = \sum_{\nu=1}^{k-1} b_\nu (St_\nu^{n-1} - St_k^{n-1})。$$

所以 (2) 中的 $n-1$ 維鍊組成 $n-1$ 維的同調基。所以，若是 $n>1$，$\mathfrak{A}^{n-1}$ 的第 $n-1$ 個同調羣是有 $k-1$ 個母元的自由 *Abel* 羣。

若是 $n=1$，P 是 k 個一維單純形的公共頂點，$\mathfrak{A}^0$ 由 k 個點組成，$\mathfrak{A}^0$ 的第 $n-1$ 個同調羣是有 k 個母元的自由 *Abel* 羣。

要證明在 P 處的同調羣不依賴于所選用的 $\mathfrak{K}^n$ 的單純剖分，我們在 $\mathfrak{K}^n$ 上取同以 P 爲中心的任意兩個單純的星形 Ω 與 Ω'。只需要他們都是 P 在 $\mathfrak{K}^n$ 上的鄰域，並不需要 $\mathfrak{K}^n$ 有一個單純剖分，使他們是這剖分中的 P 的兩個單純的鄰域。我們並不能證明 Ω 的外邊緣 $\mathfrak{A}$ 與 Ω' 的外邊緣 $\mathfrak{A}'$ 同胚 (假使他們同胚，顯然有一個綿續變換 φ 存在，換 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{A}'$，還有一個綿續變換 ψ 存在，換 $\mathfrak{A}'$ 到 $\mathfrak{A}$，使 $\mathfrak{A}$ 的自身變換 $\psi\varphi$ (先 φ 後 ψ) 與 $\mathfrak{A}'$ 的自身變換 $\varphi\psi$ 都是么變換)。我們要證明的是下述定理：

定理 I: 有一個換 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{A}'$ 的綿續變換 φ 與一個換 $\mathfrak{A}'$ 到 $\mathfrak{A}$ 的綿續變換 ψ 存在，使 $\mathfrak{A}$ 的自身變換 $\psi\varphi$ 與 $\mathfrak{A}'$ 的自身變換 $\varphi\psi$ 都能變狀成么變換。證明見頁 173。

因此我們得着

定理 II: **$\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{A}'$ 的同調羣相同。**

證明: 根據頁 137，這換 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{A}'$ 的變換 φ 引出換 $\mathfrak{A}$ 的第 k 個同調羣 $\mathfrak{H}^k$ 到 $\mathfrak{A}'$ 的第 k 個同調羣 $'\mathfrak{H}^k$ 的一個同構變換 Φ，同樣的，變換 ψ 引出換 $'\mathfrak{H}^k$ 到 $\mathfrak{H}^k$ 的一個同構變換 Ψ。因爲 $\mathfrak{A}$ 的自身變換 $\psi\varphi$ 能變狀成么變換，所以這引出的羣 $\mathfrak{H}^k$ 的同構自身變換 $\Psi\Phi$ 是么變換 (§31，定理 IV)。同理，同構自身變換 $\Phi\Psi$ 也是么變換。這就是說，同構變換 Φ 與 Ψ 都是一一的，而且 Φ 是 Ψ 的逆變換。所以 $\mathfrak{H}^k$ 與 $'\mathfrak{H}^k$ 一一的同構。

若 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{A}'$ 特別是 $\mathfrak{R}^n$ 的兩個不同的單純剖分中的 P 的鄰域複合形，從定理 II 我們有下述定理:

定理 III: **在 P 處的同調羣不依賴於所選用的單純剖分。**

我們從此知道，要求得在 P 處的同調羣，不必從全個 $\mathfrak{R}^n$ 的一個單純剖分着手；我們所要知道的只是一個以 P 爲中心的單純的星形 Ω，而且同時他是 P 的一個鄰域。在 P 處的同調羣就是 Ω 的外邊緣 $\mathfrak{A}$ 的同調羣，所以已經由一個任意小的鄰域確定了。

我們現在來證明定理 I。我們先要注意下述事實。Ω 由所有連接 P 與 $\mathfrak{A}$ 上的點 Q 的線段 (PQ) 組成。取這種線段 (PQ) 從 P 起的 k 分之一。所有的線段 $(PR)=\frac{1}{k}(PQ)$ 組成一個新的單純星形 Ω_1，他的外邊緣是 $\mathfrak{A}_1$。經過"相似的縮小變換 (*ähnliche Verkleinerung*)"，Ω 就換成 Ω_1，所以他們同胚。P **的任一鄰域** $\mathfrak{U}(P\,|\,\mathfrak{R}^n)$ **中含有 Ω 的相似的縮形**。因爲，$\mathfrak{U}(P\,|\,\mathfrak{R}^n)$ 與 Ω 的交集 (根據頁 30) 是一個鄰域

$\mathfrak{U}(P|\Omega)$,而後者中就含有 Ω 的一個相似的縮形。從另一方面說，Ω 的任一相似的縮形 Ω_1 是 P 在 Ω 中的一個鄰域，因此根據 §7 中的定理 VII，也就是 P 在 $\mathfrak{R}^n$ 中的一個鄰域。我們把所有的線段(RQ)組成的點集叫做一個球帶 (*Zone*)，用 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1)$ 表示 (圖 54)。我們需要換每一線段 (RQ) 成終點 $Q(R)$ 的變換。這變換簡單的叫做換這球帶成 $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{A}_1)$的投影。對于 Ω'，同樣的可以界說相似的縮形，球帶，與球帶的投影。不過我們要注意，Ω' 中的直線段通常不是 Ω 中的直線段。

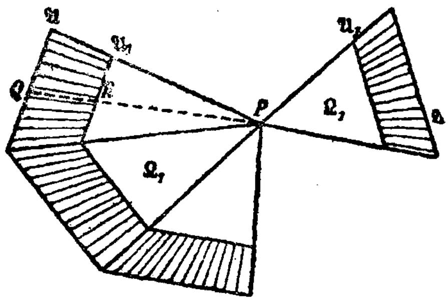


圖 54

設有一串六個互相間隔的單純的星形。

$$\Omega_1,\ \Omega_1',\ \Omega_2,\ \Omega_2',\ \Omega_3,\ \Omega_3'。\tag{3}$$

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 是 Ω 的相似的縮形，$\Omega_1', \Omega_2', \Omega_3'$ 是 Ω' 的相似的縮形，而且 (3) 中的每一個星形完全屬于前一個的內域。我們能依次求得這六個星形如下：先使 $\Omega_1=\Omega$，再取完全屬于 Ω_1 的內域的 Ω' 的一個相似的縮形當 Ω_1'，然後同樣的求 Ω_2 等等。(3) 中的星形的外邊緣可分別叫做

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_1',\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_2',\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_3'。\tag{4}$$

他們確定四個球帶

$$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2),\ (\mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}_2'),\ (\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3),\ (\mathfrak{A}_2', \mathfrak{A}_3'),$$

分別含有 $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_3$ 這四個外邊線。我們只證明 $\mathfrak{A}_1'$ 屬于球帶 $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ 做例子。因爲根據假設，$\mathfrak{A}_1'$ 屬于 Ω_1；而且另一方面，Ω_2 完全屬于 Ω_1' 的內域，所以與 $\mathfrak{A}_1'$ 沒有共點。所以 $\mathfrak{A}_1'$ 屬于 $\Omega_1-\Omega_2$ 這點集。

$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ 與 $\mathfrak{A}$ 同胚，$\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_3'$ 與 $\mathfrak{A}'$ 同胚。所以我們可以把定理中的變換 φ 與 ψ 分別看作換 $\mathfrak{A}_2$ 到 $\mathfrak{A}_2'$, 與換 $\mathfrak{A}_2'$ 到 $\mathfrak{A}_2$ 的變換。我們界說 φ 與 ψ 如下：把球帶 $(\mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}_2')$ 投影成 $\mathfrak{A}_2'$。因爲 $\mathfrak{A}_2$ 屬于這球帶，這投影就同時確定了一個換 $\mathfrak{A}_2$ 到 $\mathfrak{A}_2'$ 的綿續變換 φ。同樣的，換球帶 $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$ 成 $\mathfrak{A}_2$ 的投影確定一個換 $\mathfrak{A}_2'$ 到 $\mathfrak{A}_2$ 的綿續變換 ψ（圖 55）。

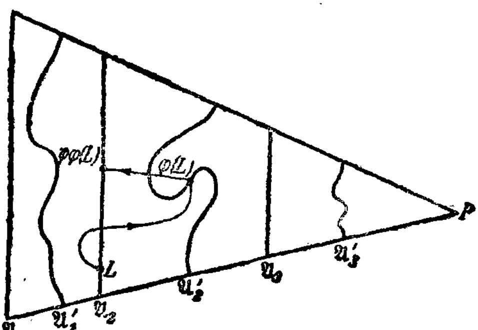


圖 55

用 g_0 表示 $\mathfrak{A}_2$ 的自身么變換，g_1 表示 $\psi\varphi$ 這自身變換。所謂 g_0 能變狀成 g_1，就是說：有一個綿續變換 f 存在，換 $\mathfrak{A}_2$ 與單位線段 $(0 \leqq t \leqq 1)$ 的拓撲積 $\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{t}$ 到 $\mathfrak{A}_2$，而且對于 $\mathfrak{A}_2$ 的任一點 L, $f(L\times 0) = g_0(L) = L$, $f(L\times 1) = g_1(L)$。——要求得 f，先把 $\mathfrak{A}_2\times\mathfrak{t}$ 分作 $\mathfrak{A}_2\times\mathfrak{r}$ 與 $\mathfrak{A}_2\times\mathfrak{s}$ 兩部份，這裏的 $\mathfrak{r}$ 與 $\mathfrak{s}$ 分別表示單位線段的兩半：$0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$。再變換這兩部份如下：設 L 是 $\mathfrak{A}_2$ 的任一點。把 $L\times\mathfrak{r}$ 這半線

段平直的換成 $L=g_0(L)$ 與 $\varphi(L)$ 的連接直線段，卽球帶 $(\mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}_2')$ 投影成 $\mathfrak{A}_2'$ 時通過點 L 的投影線段。把 $L\times\mathfrak{s}$ 平直的換成 $\varphi(L)$ 與 $\psi\varphi(L)=g_1(L)$ 的連接直線段，卽球帶 $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$ 投影成 $\mathfrak{A}_2$ 時通過 $\varphi(L)$ 的投影線段。這兩部分的變換就給定 $\mathfrak{A}_2\times\mathfrak{t}$ 全體的一個變換 $\bar{f}$。根據頁 79 上的預備定理，$\bar{f}$ 是綿續的。$\mathfrak{A}_2\times\mathfrak{r}$ 的像集屬于球帶 $(\mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}_2')$，$\mathfrak{A}_2\times\mathfrak{s}$ 的像集屬于球帶 $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$，所以 $\bar{f}(\mathfrak{A}_2\times\mathfrak{t})$ 這像集當然屬于 $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3)$。所以在 $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ 與 $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$ 同時投影成 $\mathfrak{A}_2$ 的時候，$\bar{f}(\mathfrak{A}_2\times\mathfrak{t})$ 這點集也擠到 $\mathfrak{A}_2$ 上去了。$f(L\times 0)=g_0(L)=L$ 與 $\bar{f}(L\times 1)=\psi\varphi(L)=g_1(L)$ 旣然在 $\mathfrak{A}_2$ 上，這投影並不改變他們的地位。變換 $\bar{f}$ 之後再加上這投影，所以（根據 §6 的定理 IV）是一個綿續變換 $f(\mathfrak{A}_2\times\mathfrak{t})$，卽是我們所要求得的變換。這就證明了 $\psi\varphi$ 能變狀成么變換，同樣的也知道 $\varphi\psi$ 能變狀成么變換。

下述定理是表明在一點處的同調羣的不變性的另一個方式：

定理 IV：設複合形 $\mathfrak{K}$ 在他的一點 P 處與複合形 $\mathfrak{K}'$ 在他的一點 P' 處同胚；那就是說，P 在 $\mathfrak{K}$ 中有一個鄰域 ω，P' 在 $\mathfrak{K}'$ 中有一個鄰域 ω'，而且這兩個鄰域同胚，P 與 P' 對應。$\mathfrak{K}$ 在 P 處的同調羣就與 $\mathfrak{K}'$ 在 P' 處的同調羣相同。

證明： 在 ω 中取一個以 P 做中心的單純的星形 Ω，而且 Ω 是 P 的一個鄰域。經過換 ω 成 ω' 的拓撲變換，Ω 換成一個以 P' 做中心的單純的星形 Ω'。因爲拓撲變換換鄰域成鄰域，所以 Ω' 也是 P' 的一個鄰域。在 P 處與在 P' 處的同調羣分別是 Ω 與 Ω' 的外邊緣的同

調羣，所以一一的同構。

習題：1. n 維實數空間在一點處的同調羣是什麼？

2. 任一個實數空間的開子集叫做開域（*Gebiet*）。試證一個實數空間的一個開域不能與一個較高維的實數空間的一個開域同胚。

3. 若 $\mathfrak{S}^k$ $(k<n)$ 是 $\mathfrak{R}^n$ 中的一個 k 維拓撲的單純形，$\mathfrak{S}^k$ 中的任一點的每一個鄰域含有 $\mathfrak{S}^k$ 外的點。

§33　維數的不變性

前此介紹的若干概念，例如維數，假流形，能定向性，他們的定義都是根據于複合形的一個給定的單純剖分。所以他們只是單純剖分的性質，還不能說是複合形的性質。同一個複合形的兩個單純剖分，也許一個是三維的，另一個是四維的；一個能定向，另一個不能定向；一個有邊緣，另一個無邊緣。——這都不是不能想像的情形。不過我們現在有方法能證明這些情形都不會發生：一個複合形的**所有**可能的單純剖分都是 n 維的，或者**都**能定向，或者**都**有邊緣。證明了一個概念與單純剖分無干，就確實表明了他的拓撲不變性，那就是說，表明了他是不因爲拓撲變換而毀滅的性質。例如兩個同胚的複合形 $\mathfrak{K}_1$ 與 $\mathfrak{K}_2$ 中的 $\mathfrak{K}_1$ 若是 n 維的，$\mathfrak{K}_2$ 也必是 n 維的。因爲經過拓撲變換，$\mathfrak{K}_1$ 的一個 n 維的單純剖分還換成 $\mathfrak{K}_2$ 的一個同是 n 維的單純剖分。

我們依次證明下列概念的不變性：維數，純粹的複合形，邊緣，閉的假流形，能定向性，有邊緣的假流形。我們下面的證法，總是表出每一個概念的與單純剖分無干的一個特徵。在我們的證明中，在一點處的同調羣負着顯著的任務；我們已經知道這種同調羣是拓撲不變性了。

我們先證明維數的不變性。——零維的複合形，我們早就不用單純剖分表出了他的不變性的特徵，說他完全由孤立的點組成。——一個 n 維的單純的複合形 $\mathfrak{K}^n$ $(n>0)$ 至少有一個 n 維單純形 $\mathfrak{E}^n$，但無更高維的單純形。根據 §32 的例 1，在 $\mathfrak{E}^n$ 的中間點處，第 $n-1$ 個同調羣不只含有零元（$n\neq 1$ 的時候，他是一個自由循環羣，$n=1$ 的時候，他是有兩個母元的自由 *Abel* 羣。）；因爲鄰域的複合形不含有比 $n-1$ 還高的維數的單純形，比 $n-1$ 還高的維數的同調羣都只含有零元。因此維數有下述的不變的特徵：

定理 *I*：設複合形 $\mathfrak{K}$ 非由孤立的點組成。$\mathfrak{K}$ 的維數 n 就是有如次性質的最小的數：在 $\mathfrak{K}$ 中每一點處的 $n, n+1, \cdots$ 維的同調羣都只含有零元。

特別是兩個不同維數的勻齊的複合形不同胚。這事實立刻可以用 §32 中的定理 *IV* 證明；其實，從這定理我們即有下述定理：

定理 *II*：一個勻齊的複合形 $\mathfrak{K}^n$ 的每一點處的同調羣都與 $n-1$ 維球的同調羣相同。 因爲 $\mathfrak{K}^n$ 的每一點 P 有一個鄰域是單純的星形，而且他的外邊緣就與 $n-1$ 維球同胚。

維數的不變性只是對于拓撲變換說的，並不是對于一一的而非綿續的變換說的，也並不是對于綿續的而非一一的變換說的。例如一條線段就能一一的變換成一個三邊形域；例如 *Peano* 曲線通過三邊形域的每一點，但有多重點 (*mehrfache Punkt*)。我們一注意到這種種可能，就知道爲什麼不把維數的不變性定理當作直覺的顯明的事實了。[21]

§34 複合形的純粹性的不變性

設 $\mathfrak{K}^n$ 是任一（不一定是純粹的）複合形，而且他有一個給定的單

純剖分。設 $\mathfrak{C}^i$ 是 $\mathfrak{K}^n$ 中所有的，不是 $i+1$ 維單純形的面的，i 維單純形所組成的集合；$\mathfrak{C}^i$ 也許是空集。我們能不用單純剖分，表出 $\mathfrak{C}^i$ 的特徵如下：$\mathfrak{C}^0$ 由 $\mathfrak{K}^n$ 中所有的孤立的點組成；在 $i>0$ 的時候，$\mathfrak{C}^i$ 就是 $\mathfrak{K}^n$ 中那些有下列二性質的點 P 的閉包 $'\mathfrak{C}^i$:

1. 在 $i=1$ 的時候，在 P 處的第 $i-1$ 個同調羣是有兩個母元的自由 *Abel* 羣；在 $i>1$ 的時候，他是自由循環羣。

2. P 有一個鄰域，其中的點都有 1. 這性質。

$\mathfrak{C}^i$ 顯然的屬於 $'\mathfrak{C}^i$。因爲 $\mathfrak{C}^i$ 中的 i 維單純形的所有的中間點都有 1. 與 2. 這二性質，所以屬于 $'\mathfrak{C}^i$。因爲 $'\mathfrak{C}^i$ 是閉集，$\mathfrak{C}^i$ 中的 i 維單純形的邊緣也屬于 $'\mathfrak{C}^i$ 。——反之，設一點 P 有 1. 與 2. 這二性質，設 $\mathfrak{G}^j$ 是含有 P 的最高維的一個單純形。因爲 1.，j 不能比 i 小。若是 $j>i$, P 的每一鄰域中就含有 $\mathfrak{G}^j$ 的中間點，在這些中間點處的第 $i-1$ 個同調羣，在 $i=1$ 的時候，是自由循環羣，在 $i>1$ 的時候，只含有零元。這與性質 2. 矛盾。所以這含有 P 的最高維的單純形 $\mathfrak{G}^j$ 是一個 i 維單純形，並且屬於 $\mathfrak{C}^i$。因爲 $\mathfrak{C}^i$ 是閉集，所以所有的這些點 P 的閉包 $'\mathfrak{C}^i$ 屬于 $\mathfrak{C}^i$，所以 $'\mathfrak{C}^i$ 也在 $\mathfrak{C}^i$ 內，$'\mathfrak{C}^i=\mathfrak{C}^i$。

設 $\mathfrak{K}_1^n$ 與 $\mathfrak{K}_2^n$ 是 $\mathfrak{K}^n$ 的兩個不同的單純剖分。若是 $\mathfrak{K}_1^n$ 與 $\mathfrak{K}_2^n$ 中所有的，不是 $i+1$ 維單純形的面的，i 維單純形分別組成子複合形 $\mathfrak{C}_1^i$ 與 $\mathfrak{C}_2^i$，$\mathfrak{C}_1^i$ 與 $\mathfrak{C}_2^i$ 就同是 $'\mathfrak{C}^i$ 。

若一個 n 維複合形的子集 $'\mathfrak{C}^0, '\mathfrak{C}^1, \cdots, '\mathfrak{C}^{n-1}$ 都是空集，這複合形就是一個純粹的 n 維複合形；這是純粹的 n 維複合形的不變的特徵。

§35　邊緣的不變性

設 $\mathfrak{K}^n$ $(n>1)$ 是一個純粹的複合形，有一個給定的單純剖分。設 $\mathfrak{L}^{n-1}_\nu$ $(\nu=1,3,4,5,\cdots)$ 是 $\mathfrak{K}^n$ 中的，那些恰與 ν 個 n 維單純形關聯的，$n-1$ 維單純形的集合。

我們要表出 $\mathfrak{L}^{n-1}_\nu$ 的拓撲不變的特徵。在 $\mathfrak{L}^{n-1}_\nu$ 的一個 $n-1$ 維單純形的一個中間點處，第 $n-1$ 個同調羣是有 $\nu-1$ 個母元的自由 *Abel* 羣 (§32,例 2)。設 P 是任一點，在 P 處的第 $n-1$ 個同調羣是有 $\nu-1$ 個母元的自由 *Abel* 羣。設 $\mathfrak{L}'_\nu$ 表示所有的這種點 P 的閉包。所以 $\mathfrak{L}^{n-1}_\nu$ 屬于 $\mathfrak{L}'_\nu$。$\mathfrak{L}^{n-1}_\nu$ 與 $\mathfrak{L}'_\nu$ 在普通情形下並不相同，不過我們能拓撲不變的用 $\mathfrak{L}'_\nu$ 確定 $\mathfrak{L}^{n-1}_\nu$。*) ——$\mathfrak{L}'_\nu$ **是 $\mathfrak{K}^n$ 的這單純剖分的一個子複合形**（**或空集**）。這事實可以證明如下：設在 P 處的第 $n-1$ 個同調羣是有 $\nu-1$ 個母元的自由 *Abel* 羣。設 $\mathfrak{E}$ 是含有 P 的最低維的單純形。$\mathfrak{E}$ 中的所有中間點的鄰域複合形與 P 的相同，所以在他們處的第 $n-1$ 個同調羣也相同。$\mathfrak{E}$ 的所有中間點所以屬於 $\mathfrak{L}'_\nu$；但是 $\mathfrak{L}'_\nu$ 是閉集，所以 $\mathfrak{E}$ 的邊緣點也屬於 $\mathfrak{L}'_\nu$。所以若是 P 屬于 $\mathfrak{L}'_\nu$，含有 P 的最低維的單純形也屬於 $\mathfrak{L}'_\nu$。——$\mathfrak{L}'_\nu$ 至高是一個 $n-1$ 維的子複合形。因爲 $\nu=2$ 除外了，在 $\mathfrak{K}^n$ 的一個 n 維單純形的中間點處，第 $n-1$ 個同調羣是有一個，而非有 $\nu-1$ 個母元的自由 *Abel* 羣。

---

*) 在普通的情形下，$\mathfrak{L}'_\nu$ 比 $\mathfrak{L}^{n-1}_\nu$ 大。例如有一個公共頂點的兩個四面形組成的 $\mathfrak{K}^n$，$\mathfrak{L}'_3$ 就是這公共頂點，而 $\mathfrak{L}^1_3$ 是空集。

若是 $\mathfrak{L}'_\nu$ 中有一個 $n-1$ 維單純形 $\mathfrak{E}^{n-1}$, $\mathfrak{K}^n$ 中恰有 ν 個 n 維單純形與他關聯。因爲只有在這種情形下，在 $\mathfrak{E}^{n-1}$ 的一個中間點處的第 $n-1$ 個同調羣總是有 $\nu-1$ 個母元的自由 *Abel* 羣（§32 的例 2)。所以 $\mathfrak{E}^{n-1}$ 屬于 $\mathfrak{L}^{n-1}_\nu$。$\mathfrak{L}^{n-1}_\nu$ 所以由 $\mathfrak{L}'_\nu$ 中所有的 $n-1$ 維單純形組成。根據 §34, $\mathfrak{L}'_\nu$ 的這子複合形拓撲不變的由 $\mathfrak{L}'_\nu$ 確定了。既然 $\mathfrak{L}'_\nu$ 拓撲不變的由給定的複合形 $\mathfrak{K}^n$ 確定了，所以 $\mathfrak{L}^{n-1}_\nu$ 與 $\mathfrak{K}^n$ 的關係也是拓撲不變的。——在 $n=1$ 的時候，$\mathfrak{K}^1$ 中所有的點，在他們處的第零個同調羣是有 ν 個母元的自由 *Abel* 羣的，組成 $\mathfrak{L}^{n-1}_\nu$。

一個純粹的 n 維複合形中的所有的 $n-1$ 維單純形，每個只與奇數個 n 維單純形關聯的，組成這複合形的邊緣。因此，我們能界說一個純粹的複合形的邊緣是子複合形 $\mathfrak{L}^{n-1}_1$, $\mathfrak{L}^{n-1}_3$, $\mathfrak{L}^{n-1}_5$, ··· 的連集。這定義是拓撲不變的。特別，一個單純形，一個 n 維元素，與一個凸形域的邊緣的拓撲不變性，也都因此確實的表明了。

習題：試證平環與 *Möbius* 帶不同胚。

§36 假流形與能定向性的不變性

閉的假流形的第一個性質 (PM_1) —— 是一個有限的純粹的複合形 —— 我們已經知道是拓撲不變性（頁 66 與 §35)。第二個性質 (PM_2) 能拓撲不變的表出如下：那些 $n-1$ 維單純形，恰與 $\nu\neq 2$ 個 n 維單純形關聯的，所組成的不變的子複合形 $\mathfrak{L}^{n-1}_\nu$ 都是空集。又在頁 124 中我們已經知道連接條件 (PM_3) 與第 n 個連通數 $q^n=1$ 的意

義相等，而連通數我們在頁 157 中已經證明了是不變性。

一個閉假流形有**能定向性**，就是等于說他的第 n 個 *Betti* 數 $=1$ (頁 124)。*Betti* 數的不變性已經在頁 157 中證明了。

設一個能定向的閉假流形 $\mathfrak{K}^n$ 上給定了兩個不同的單純剖分，而且剖分中的單純形都協合的定向了。這兩個定向的剖分就能看作是兩個廣義的 n 維閉鍊 B_1^n 與 B_2^n。既然第 n 個同調羣是自由循環羣，而且 B_1^n 與 B_2^n 的這兩個同調類的每一個都是第 n 個同調羣的母元，所以 $B_1^n \sim \pm B_2^n$。若是這同調式中當用 $+$ 號，我們就說這兩個剖分的定向**相等**。

設 B_1^n 是 $\mathfrak{K}^n$ 上的完全任意的一個廣義的 n 維閉鍊，而且 $\mathfrak{K}^n$ 上的每一個 n 維閉鍊與 B_1^n 的一個倍數同調。這種的一個鍊就叫做 $\mathfrak{K}^n$ 上的一個**規定定向的** n **維鍊**。我們只用這種的一個鍊，不用一個特殊的單純剖分，也能界說 $\mathfrak{K}^n$ 的定向。若 B_2^n 是另一個規定定向的 n 維鍊，按照 $B_1^n \sim B_2^n$ 還是 $\sim -B_2^n$，B_1^n 與 B_2^n 就確定 $\mathfrak{K}^n$ 的相同或相反的定向。

設有兩個能定向的假流形 $\mathfrak{K}^n$ 與 K^n，他們的定向分別由 B^n 與 B^n 給定了。若是拓撲的變換 $\mathfrak{K}^n$ 成 K^n (K^n 與 $\mathfrak{K}^n$ 可以是同一點集)，B^n 也就變換成 K^n 上的一個定向鍊 $'B^n$。所以 $'B^n \sim \pm \mathrm{B}^n$。按照同調式中是加號還是減號，我們就說這變換是**同向的或反向的變換**。例如頁 165 上的 n 維球的反射就是反向的變換。

我們先說明**雙層** (*Verdoppelung*) 這概念；我們有了這概念，就容

易用閉假流形的結果來討論**有邊緣的假流形**。 設複合形 $\mathfrak{K}^n$ $(n>0)$ 是一個有邊緣的純粹的複合形。 取一個與 $\mathfrak{K}^n$ 同胚的 $'\mathfrak{K}^n$, 在這兩個複合形的邊緣上建立一個拓撲對應, 然後叠合拓撲對應的邊緣點。 如此得着的一個複合形就叫做 $\mathfrak{K}^n$ 的雙層。例如 $\mathfrak{K}^n$ 是一個圓域,把這圓域的圓周與第二個圓域的圓周叠合而成的球面就是圓域的雙層。

因此我們能表出有邊緣的假流形的拓撲不變的特徵如下: **若是一個有邊緣的複合形是純粹的複合形,而且他的雙層是一個閉假流形,他就是一個有邊緣的假流形。 這有邊緣的假流形與他的雙層或同能定向,或同不能定向。** 證明可以完全用組合的方法,我們留給讀者補充。

第六章 曲面的拓撲學

二維空間的拓撲學的基本問題—— 同胚問題 ——已能解決，但所用的方法不能推廣到高維空間。所以在研究曲面 (*Fläche*) 的拓撲學時，前此所得着的結果（在任何維的空間都真確的）的大部分都不需要。我們現在不從單純的複合形着手，却用多邊形；疊合多邊形的邊而成多面形 (*Polyederfläche*)。

§37 閉曲面

實數平面中的一個圓域，他的圓周由 r ($\geqq 2$) 個點分成 r 條線段的，叫做一個拓撲多邊形。這 r 個點叫做這多邊形的頂點，這 r 條線段叫做這多邊形的邊 (*Seite*)。這圓域的每一拓撲像也叫做多邊形，頂點與邊的拓撲像還分別叫做頂點與邊。

在 $r \geqq 3$ 的時候，每一個 r 邊形可以用平直多邊形代表。

設實數平面中給定了 α^2 ($\geqq 1$) 個無共點的多邊形。設他們某若干邊間互相有拓撲的對應。（根據 § 6 的例 1，一邊的頂點必定與另一邊的頂點對應。）這種的多邊形的集合就叫做一個多邊形組 (*Polygon-system*)。

我們只討論一種特殊多邊形組 $\overline{\mathfrak{M}}$: $\overline{\mathfrak{M}}$ 中的邊數是偶數；而且 $\overline{\mathfrak{M}}$ 的邊分成若干對，每一對中的一邊恰與這對中的另一邊拓撲的對應。

$\overline{\mathfrak{M}}$ 中相對應的點叫做相抵點。相抵點的意義與在鄰域空間中界說的相同 (§ 8)。$\overline{\mathfrak{M}}$ 中所以有下列幾種相抵點組：一個多邊形的中區

點只與他自身相抵；一條邊的一個中間點恰與另一個點相抵；一個頂點可以與另一點相抵，或與另數點相抵，或不與別個點相抵。

多邊形的邊的分對只需要滿足下述條件：多邊形不能分成兩組，使每一組中的邊只在這一組中互相成對（**連通的條件**）。

既然 $\overline{\mathfrak{M}}$ 是一個鄰域空間，由疊合 $\overline{\mathfrak{M}}$ 中的相抵點而成的點集 $\mathfrak{M}$ 所以也是一個鄰域空間。$\mathfrak{M}$ 叫做一個**閉曲面**或**二維閉流形**。閉這個字有兩個意義：第一個意義是說這曲面由**有限個**多邊形組成，因此無無窮遠點；第二個意義是說**無未疊合的邊**，所以無邊緣。

給定了多邊形的邊間的對應，我們就知道多邊形的那些頂點相抵。相抵的頂點相當于**曲面的同一個點**。若是多邊形組中有 α^0 個不同的相抵的頂點組，多邊形的頂點就變換成曲面上的 α^0 個不同的點。——曲面上的這 α^0 個點叫做**多面形的頂點**；他們由疊合多邊形的頂點而成，但他們與多邊形的頂點顯然不同。多邊形的邊的像叫做（多面形的）**棱**，多邊形的像叫做（多面形的）**面片**。設他們的個數分別是 α^1 與 α^2，多面形的棱（面片）是多邊形的邊（多邊形）的綿續像，但不必是拓樸像，因爲多邊形的邊間的對應，一邊的二頂點也許相抵，所以也許變換成多面形的同一頂點，在這種情形下，多面形的這一條棱的兩端互相啣接，所以是曲面上的一個拓樸圜。同樣的，一個面片能在多面形的一棱或數棱處，或在一頂點或數頂點處自相啣接。多面形若是由一個多邊形組成，他的面片必自相啣接，例如疊合一個四邊形的對立邊而成的環面（§ 1）。

此後我們討論一個曲面的時候，若是我們假定他的點已經確定的分成面片，棱，與頂點，我們就說他是一個多面形，或是一個剖分成多邊形的曲面；反之，若不注意如此一個特殊的剖分，只把曲面看作是一個鄰域空間，我們就簡單的說他是一個曲面。 多面形與曲面的關係就如同單純的複合形與複合形的關係一樣 (§ 10)。例如立方形與十二面形是兩個不同的多面形，但却與球面這一個曲面同胚。

總之，我們必須分別三種概念：多邊形組 $\overline{\mathfrak{M}}$，由個別的無共點的多邊形組成，其中規定了若干組相抵點；多面形 $\mathfrak{M}$，由疊合 $\overline{\mathfrak{M}}$ 中的相抵點而成，但主要的是他有一個分割成的面片，棱與頂點的剖分；閉曲面，由多邊形組給定，無這種的一個剖分。

我們現在舉一個不常見的多面形的例。這多邊形組由兩個四邊形 Π_1 與 Π_2 組成；相抵的邊在圖 56 中用同一個字母表示；相抵邊的疊合確定相抵的頂點，每組相抵頂點也用同一字母表示。 每兩個相抵邊上的箭頭確定邊間的對應：箭頭應當與箭頭疊合。所以 $\alpha^0 = 2, \alpha^1 = 4, \alpha^2 = 2$。這多邊形組所確定的曲面就是不能定向的環面 (頁 198 與頁 16)。他與立方形或十二面形不同，我們不能把他的多邊形的剖分安置在歐幾里得空間中，用平直多邊形表出。

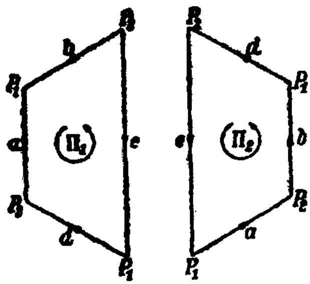


圖 56

此後我們所注意的並不是單個的多邊形組，却是他所確定的曲面。所以發生下述的問題：在什麼情形下兩組多邊形確定同一個曲面？那

就是說，由疊合多邊形組的相抵點而成的若干多面形，在什麼情形下，是同一個曲面的不同的多邊形剖分？

兩組多邊形間若是有一個拓撲對應，而且一組多邊形中的相抵點與另一組多邊形中的相抵點對應，這兩組多邊形當然確定同一個曲面，這種的多邊形組就看作相等，沒有區別。

因此還可以知道，由多邊形組確定曲面的時候，主要的是要知道多邊形的邊 a' 的邊緣點 A' 與 B' 如何變換成那對應的邊 a'' 的邊緣點 A'' 與 B''; 至於 a' 與 a'' 間的拓撲變換的其他性質都無關係。**所以兩個對應邊間只有兩個主要的不同的變換**。一個變換換 A' 成 A'', 另一個換 A' 成 B''。

證明：若是換 a' 成 a'' 的兩個拓撲變換 T 與 T^* 都換 A' 成 A'', 換 B' 成 B'',這 a' 的自身變換 $S=T^{*-1}T$ (先 T 後 T^{*-1}) 就是拓撲變換，而且不變動 a' 的邊緣點 A' 與 B'。

若 a' 是多邊形 Π 的一邊，Π 就有一個拓撲的自身變換，換 a' 的情形與 a' 的自身變換 S 相同，而且不變動 Π 的其他邊上的任一點(§6 中的習題 2)。若是用 Π 的像替代 Π，我們就得着一個相等的多邊形組。Π 的像仍舊是 Π, 不過新的多邊形組中的 a' 與 a'' 上的相抵點却是變換 T^* 所界說的對應點。所以只要任一拓撲變換 T^* 換邊緣點的情形與 T 相同，他就能替代 T; 那就是說，由疊合 T^* 所界說的相抵點而得着的曲面，與由疊合 T 所界說的相抵點而得着的曲面相同。

例如，在所有的多邊形都用實數平面中的平直多邊形表出的時候，

我們就能假設相當的邊間的變換都是平直變換。

我們現在規定多邊形的邊的定向——把邊的兩個邊緣點的一個叫做起點,另一個叫做終點——,而且使每兩個對應邊的定向符合,那就是說,他們間的變換換起點成起點,換終點成終點。最後,我們規定多邊形的定向。一個多邊形的所有的邊的一個協合定向(那就是說,一個多邊形的每一個頂點規定作一個關聯的邊的起點,與另一個關聯的邊的終點。)就當作這多邊形的一個定向。若是多邊形的一個邊的定向在多邊形的邊緣的這協合定向中出現,這邊的定向就說是由多邊形的定向所引出的定向。如同邊一樣,一個多邊形也有兩個不同的定向。——在圖中,邊的定向在邊上用一個箭頭表明,多邊形的定向在多邊形中用一個帶有箭頭的圓表明。

多邊形的一個定向也確定了一個週向,即邊的一個循環次序。設想邊與多邊形都定了向,而且對應邊用同一字母表示。這多邊形組就能用一個純粹的組合的表格表出:我們把每一個多邊形的邊,按照他們在邊緣的週向中的次序,寫成一橫列;而且按照邊的定向是否與多邊形的定向所引出的符合,我們把代表邊的一個字母加上一個上指標+1(上指標 +1 也可以省去)或 −1。這表格完全確定了多邊形組,所以也完全確定了曲面。每一橫列表明一個多邊形的邊的次序,代表邊的字母告訴我們邊如何成對的對應,上指標表明兩對應邊間的變換是兩種主要的不同的拓撲變換中的那一種。

若是循環的改變一橫列中的邊的次序,或者改變每一邊的定向(在

表格中相當于改變這邊的上指標的正負號),或者改變一個多邊形的定向(在表格中相當于倒轉相當的一橫列中的字母的循環次序,而且同時改變這一橫列中所有的上指標的正負號),這多邊形組都無改變。

例如上文中說過的多邊形組,他的表格就是

多邊形 Π_1: $b\,a\,d^{-1}\,e^{-1}$

多邊形 Π_2: $a\,b\,d\,e$。

我們現在可以更進一步,研究在什麼情形下,兩多邊形組給定同一個曲面。給定了一組多邊形,我們可以用下列的**元變換**,得着不同的,但是給定同一個曲面的多邊形組。

一維的重分是在兩條對應邊上取兩個對應點,把每一條邊分成兩條邊,而不改所有點的對應關係。相反的運算,從重分了的多邊形組回到原來的多邊形組,叫做**一維的合併**(圖 57)

二維的合併是把兩個不同的多邊形,沿着一對相抵邊疊合成一個多邊形。反之,把一個多邊形剖分成兩個,就叫做**二維的重分**(圖 58)。

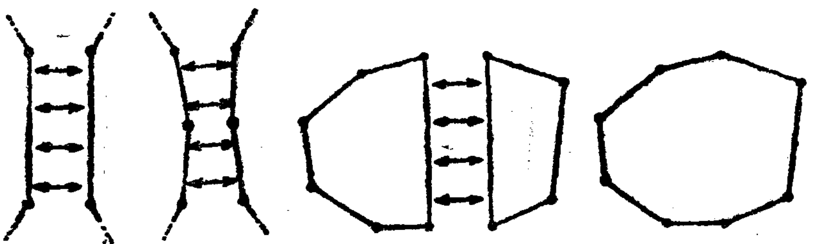


圖 57 圖 58

若是能用有限次這種運算,把一組多邊形改變成另一組多邊形,這兩組多邊形就說是**能互相元變換**,由他們拼成的多面形也同樣的說是

能互相元變換。旣然一維與二維的元變換並不改變多邊形組所確定的曲面——因爲根據§8,疊合可以分成階段——,所以：**能互相元變換的多邊形組確定同胚的曲面。**

凡能互相元變換的多面形有兩個共同的重要性質：(*Euler*) 示性數與能定向性。在討論複合形 (頁 121) 與假流形 (頁 123) 的時候,我們已經界說過這兩個概念，並且已經說明過如何從單純的剖分求得示性數與推斷能否定向。旣然我們沒有把曲面看作是單純的複合形，一個多面形的示性數與能定向性就需要從新界說，而且要從他的多邊形組的表格推斷。我們在 §39 中再說明新舊兩界說的關係。

設 α^0, α^1, α^2 分別是一個多面形的頂點,棱與面片的個數；

$$N = -\alpha^0 + \alpha^1 - \alpha^2$$

這數就叫做這多面形的示性數。 例如代表環面的四邊形 (頁 5) 的示性數就是

$$N = -1 + 2 - 1 = 0;$$

立方面的示性數就是

$$N = -8 + 12 - 6 = -2。$$

兩個能互相元變換的多面形的示性數相等。因爲一維的元變換使 α^0 與 α^1 同時加一或同時減一,而不改變 α^2; 二維的元變換使 α^1 與 α^2 同時加一或同時減一,而不改變 α^0 。

若是能給定一組多邊形中的多邊形的定向，使這些定向的多邊形在每個對應邊上引出相反的定向，這多邊形組所確定的曲面就說是能

定向的。若是利用多邊形組的表格，這就等於說：若是能給定多邊形的定向，使每邊的上指標一次是 $+1$，一次是 -1，這曲面就說是能定向的。我們很容易看出，重分與合併都不改變多面形的能否定向性。例如頁 186 上所給的多面形就是不能定向的曲面。

因此，我們證明了：**兩個多面形有相等的示性數，同能定向或不能定向，是他們能互相元變換的必要條件。**

這條件也充足：要證明這句話，我們要用重分與合併的變換，把示性數相等的，同能定向或不能定向的，所有的多面形化成同一個法式。

§38 化成法式

多面形的法式的作法共分六個步驟。

第一步：若是給定的多邊形組中有 α^2 (>1) 個多邊形，我們用 α^2-1 次二維的合併，把他們化成一個多邊形，這個多邊形的邊成對的對應。這種只有一個多邊形的多邊形組的表格只有一橫列，每一字母在橫列中出現兩次。若是一字母的上指標一次是 $+1$，一次是 -1，這二邊間的對應就說是屬于第一種；否則說是屬于第二種。我們已經說過，這多邊形能定向的充要條件，就是所有的邊間的對應都屬于第一種。

若是所討論的是 *Euler* 的多面形（與球面同胚的多面形），我們就可以先把他張開成平面的網目 (*Netz*)。（例如立體幾何中教我們做的正多面形的紙模型，都是先用一張硬紙板切成若干連接的正多邊形，然後彎摺這些多邊形，黏貼成這正多面形。這些正多邊形就是這裏所說

的平面的網目。）只要再把網目中的內棱消去，這第一步就完成了。

第二步：減縮 (*Beiziehen*) **多邊形的邊。** 若是這多邊形的邊的循環次序中有 $a\,a^{-1}$ 出現，而且這多邊形還另有邊，所以至少有四條邊，我們就疊合，或者說，減縮，這兩條相鄰的邊 a 與 a^{-1}。結果還是一個多邊形；舊多邊形的表格中消去 $a\,a^{-1}$ 就成爲新多邊形的表格。

我們可以把這種變換化爲重分與合併如下：設

$$\sim\!\sim\!\sim\; a\,a^{-1}\; \sim\!\sim\!\sim \qquad (\text{圖 } 59)$$

是這多邊形的表格——鋸齒形線表示未寫出的邊——。我們能假設

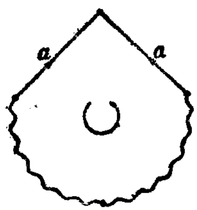


圖 59

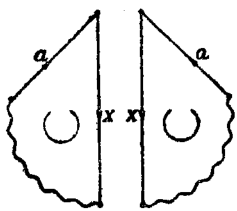


圖 60

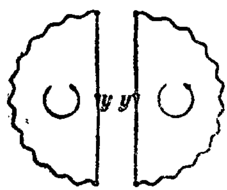


圖 61

$a\,a^{-1}$ 前後都至少有一條邊。二維的重分增加一新邊 x，把原來的多邊形分成兩個多邊形

$$\sim\!\sim\!\sim\; ax \text{ 與 } x^{-1}a^{-1}\; \sim\!\sim\!\sim \qquad (\text{圖 } 60)$$

再用合併，把 a, x 與 x^{-1}, a^{-1} 分別合成邊 y 與 y^{-1}。這兩個多邊形變成

$$\sim\!\sim\!\sim\; y \text{ 與 } y^{-1}\; \sim\!\sim\!\sim。 \qquad (\text{圖 } 61)$$

最後用二維的合併，再把這兩個多邊形合成一個多邊形。

我們繼續如此減縮多邊形的邊，最後得着一個二邊形，或一個至少有四條邊的多邊形，但無 $a\,a^{-1}$ 這種鄰接邊出現。二邊形只有下列兩

個可能的表格：

$$a\,a^{-1} \qquad (0)$$

與

$$a\,a。$$

這兩個二邊形都屬于我們所要求的法式。所以我們假設此後所討論的多邊形至少有四條邊，而且無 $a\,a^{-1}$ 這種鄰接邊出現。

第三步：**化成只有一個頂點的多面形。** 設如此得着的多邊形有 r ($\geqq 4$) 個頂點。相抵的頂點用同一字母表示。這 r 個頂點或都相抵，或者除一組相抵的頂點 P 之外，還有另一組。在後者的情形下，我們能把這多邊形化成一個新多邊形，這新多邊形的頂點 P 的個數減少一個。因為，多邊形的邊緣中必有一條棱 m，他的兩個邊緣點是兩個不相抵的頂點 P 與 Q。所以 QmP（或 PmQ）在邊緣上出現。設與 P 關聯的另一邊是 a, a 的第二個邊緣點或是一點 Q，或是一點 P，或屬于另一個相抵點組。用對角線 d 連接這第二個邊緣點與第一個頂點 Q，然後把這 r 邊形分成（用二維的重分）一個三邊形 Δ 與一個 $r-1$ 邊形 Π（圖 62）。與 a 對應的邊 a' 必屬於 Π。因為，否則 a 必與 m 或 m^{-1} 相同，在 a 與 m 相同的情形下，Δ 上就有 $m\,m$ 出現，即 P 與 Q 相抵，

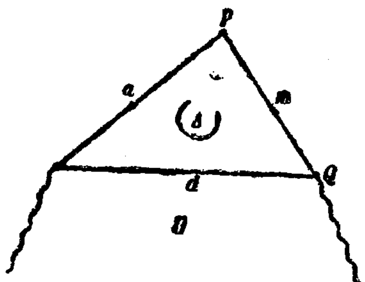


圖 62

與假設矛盾。在 a 與 m^{-1} 相同的情形下，m 與 m^{-1} 可以減縮，仍舊與關于 r 邊形的性質的假設矛盾。用二維的合併，把 a 與 a' 疊合成一個

新 r 邊形；他的邊緣上頂點 P 的個數減少了一個。

這新 r 邊形或者有能減縮的邊，或者與舊 r 邊形有相同的性質。在第二種情形下，我們繼續應用上文所說的方法，一個一個的減少頂點 P 的個數，到有能減縮的邊出現為止。在邊緣上只有一個頂點 P 的時候，這種能減縮的邊必出現。減縮了邊之後，我們得着的或者是一個二邊形，是我們已經得着的一個法式；或者是頂點都相抵的一個多邊形，也就是我們所想求得的；或者是少於 r 邊的，頂點不相抵的一個多邊形。在最後的這種情形出現時，我們可以重新應用上述的方法。

第四步：求交叉帽的法式。若是如此求得的多面形不能定向，至少有二邊的對應屬于第二種，如同圖 63 中的邊 c。這多邊形的表格所以是

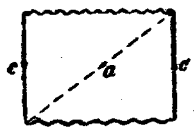


圖 63

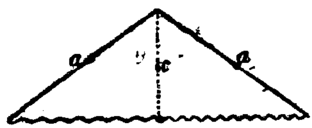


圖 64

$$\sim\sim\sim\; c \sim\sim\sim\; c \text{。} \tag{1}$$

設 a 是多邊形的對角線，連接多邊形的這二邊 c 的終點。我們把這多邊形沿着 a 分成兩個多邊形。他們的表格是：

$$\sim\sim\sim\; c\, a, \tag{2}$$

$$a^{-1} \sim\sim\sim\; c \text{。}$$

然後沿着邊 c 把這兩個多邊形合併成一個多邊形

$$\sim\sim\sim\; a\, a \sim\sim\sim,$$

他的邊緣的循環次序中有二鄰接邊 $a\,a$ 出現。這種的二鄰接邊 $a\,a$ 叫

做一個**交叉帽**（參看 §2）。圖 63 與圖 64 表明變換的步驟。若是這新多邊形還有一對邊的對應屬于第二種，我們能同樣的把他們化成一個交叉帽，而且不因此毀壞了已經得着的交叉帽。繼續施用這種方法，把所有的屬于第二類的對應邊化成交叉帽。若是無他邊存在，我們就得着一個不能定向的曲面的法式（交叉帽式）：

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_k a_k \text{。} \tag{k}$$

在 $k=1$ 的時候，這法式就是從前得着的二邊形。

第五步：求環柄的法式。 若是這曲面能定向，或是在求完交叉帽的法式之後，有屬于第一種的對應邊出現，這種對應邊就必有兩對存在，而且他們在邊緣上互相間隔；那就是說，適當的給定了邊緣的定向之後，他們在邊緣上的次序如下：

$$\sim\sim\sim c \sim\sim\sim d^{-1} \sim\sim\sim c^{-1} \sim\sim\sim d \sim\sim\sim \text{。} \qquad \text{(圖 65)}$$

因爲若是 c 這一對邊不被另一對邊間隔，旣然我們假設交叉帽法式已經求完了，$c\sim\sim\sim c^{-1}$ 這一組中的每一邊必與這一組中的另一邊對應；

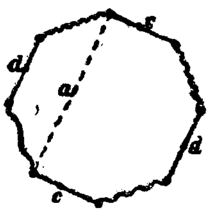


圖 65

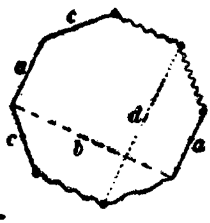


圖 66

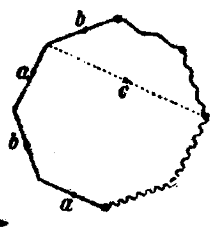


圖 67

因此 c 與 c^{-1} 中間的所有的邊的頂點與 c 這一對邊的終點都相抵，而且

根據邊的對應，他們不與邊 c 的起點相抵。但是這與化爲法式的第三步的結果矛盾，因爲在那時候我們的這一個多邊形的頂點都已是相抵的頂點了。——經過元變換，這兩對互相間隔的邊可以變成鄰接的四邊 $a\,b\,a^{-1}\,b^{-1}$。圖 65 至 67 表明這種變換的步驟。根據 §2 中說明的理由，如此鄰接的四邊就叫做一個環柄。若是還有互相間隔的兩對邊，我們又把他們變成一個環柄。每次求環柄的時候，我們只把鋸齒形線所表示的邊組全個的移動，並不把組中的邊分開，所以不會毀壞已經得着的交叉帽與環柄。所以若是給定的曲面是能定向的曲面，我們就得着法式(環柄式)：

$$a_1\,b_1\,a_1^{-1}\,b_1^{-1}\,a_2\,b_2\,a_2^{-1}\,b_2^{-1}\cdots a_h\,b_h\,a_h^{-1}\,b_h^{-1}。\qquad (h)$$

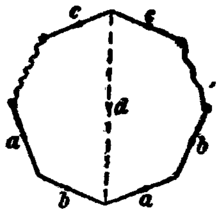


圖 68

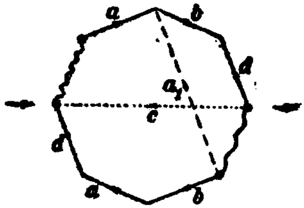


圖 69

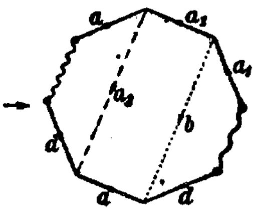


圖 70

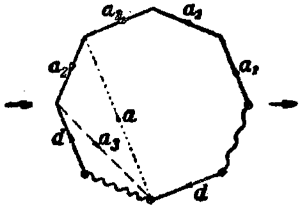


圖 71

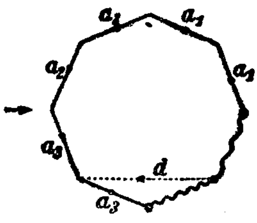


圖 72

第六步：環柄改成交叉帽。 現在剩下要討論的情形，就是交叉帽

與環柄的同時出現。在這種情形下，經過二維的重分與合併，每一個環柄可以用兩個交叉帽替代。變換的步驟是：先適當的割開這給定的多邊形(圖 68)，再適當的連接起來，使我們所注意的六邊有第二種的對應(圖 69)，然後繼續應用第四步求交叉帽法式的方法三次(圖 70 至 72)。

所以每一組多邊形可以化成下列法式之一：

$$a\,a^{-1} \tag{0}$$

$$a_1\,b_1\,a_1^{-1}\,b_1^{-1}\,a_2\,b_2\,a_2^{-1}\,b_2^{-1}\cdots a_h\,b_h\,a_h^{-1}\,b_h^{-1} \tag{h}$$

$$a_1\,a_1\,a_2\,a_2\cdots a_k\,a_k \tag{k}$$

每一個法式只由一個多邊形組成，這個多邊形叫做**基本多邊形**。*)

這三種基本多邊形中的前兩種 (0) 與 (h) 與後一種 (k) 有能定向與不能定向的區別，而且每一種基本多邊形的示性數的值又不同。用這些基本多邊形我們求出示性數如下：

$$N=-2+1-1=-2 \tag{0'}$$

$$N=-1+2h-1=2(h-1) \tag{h'}$$

$$N=-1+k-1=k-2 \tag{k'}$$

這些公式同時表明曲面的示性數 N 與環柄的個數 h 或交叉帽的個數 k 的關係；能定向的曲面的示性數總是偶數。既然我們知道示性數 N 與能否定向的性質不因為元變換而有改變，下述的定理所以證明了：

定理：兩個多面形能互相元變換的充要條件，是他們的示性數與

*) 基本多邊形的圖可彙列如下：頁 9 上的圖 11 是 (0)；頁 5 上的圖 5 ($h=1$) 與頁 8 上的圖 10 ($h=2$) 是 (h)；頁 15 上的圖 18 ($k=1$) 與頁 17 上的圖 19 ($k=2$) 是 (k)。

能否定向的性質相同。[22]

對於我們要達到的目的——所有的閉曲面的分類——說，這定理已經是一個很大的進步。根據這定理，我們知道曲面的個數就不比 (0),(h),(k) 三組中的多。現在我們確實知道每兩個基本多邊形不能互相元變換；但還不能斷定他們不會確定同一個曲面。在下節中，我們再應用前章的不變性定理，證明他們所確定的曲面不會相同。

習題：1. 試證示性數等于 N 的一個閉曲面，能化成有下列邊緣的循環次序的一個多邊形（對稱的法式）：

$$c_1\ c_2 \cdots c_{N+2}\ c_1^{-1}\ c_2^{-1} \cdots c_{N+2}^{\mp 1}。$$

曲面若是能定向，N 就是偶數，而且最後的這個上指標只能是 -1。若是最後的上指標還是 -1，但 N 是奇數，這曲面的示性數是什麼？

2. 試把頁 186 上所舉的多邊形組化成法式。

§39 法式的不同，基本定理

給定了一組多邊形，我們能應用二維的重分若干次，把他變成一個只有三邊形的能元變換的多邊形組。由疊合後者的相抵點而成的一個單純的複合形，顯然的有閉假流形 (§ 24) 的三個性質 (PM_1),(PM_2),(PM_3)。

經過上述的重分，多面形的示性數與能定向性都不改變。在現在多面形是一個單純的複合形的特殊情形下，頁 190 上與頁 191 上的示性數與能定向性的定義與頁 121 上與頁 123 上的定義完全一致。既然我們在頁 182 上與頁 157 上證明假流形的能定向性與單純的複合形的示性數都是拓撲不變性，所以也就證明了只有在能定向性相同與示性數

相等的時候,兩個閉多面形纔能同胚。特別是基本多邊形 (0),(h),(k) 所確定的多面形都互相不同胚。反之,若是兩個多面形的能定向性相同而且示性數相等,根據 §38 中的定理,他們就能互相元變換,所以同胚。

綜合所得的結果成下述定理:

曲面拓撲學的基本定理: 兩個閉曲面同胚的充要條件,是他的示性數相等,能定向性相同。最普遍的能定向的閉曲面是有 $h(\geqq 0)$ 個環柄的球面,最普遍的不能定向的閉曲面是有 $k\ (\geqq 1)$ 個交叉帽的球面。

環柄的個數 h 與交叉帽的個數 k 有時候分別叫做能定向的曲面與不能定向的曲面的虧格 (*Geschlecht*)。公式 ($0'$), (h'), (k') 表明示性數與虧格的關係。

我們前此是把曲面界說作多邊形組所疊合成的鄰域空間。我們也可以用下述的等值的定義,表明曲面在複合形中的地位: **一個閉曲面是一個有限的,連通的,二維的,勻齊的複合形。**

證明: 我們已經知道一個閉曲面是一個假流形,所以是一個有限的連通的二維複合形。勻齊的條件是說每一點有一與圓域(不含邊緣點)同胚的鄰域。基本多邊形的中間點顯然如此;一邊的中間點也如此,因爲這邊恰還有一條相抵邊。再看基本多邊形的頂點。我們在每一頂點處截去一小三邊形; 疊合這些三邊形的相抵點而成的鄰域就與圓域同胚 (若是基本多邊形代表球面這特殊曲面,我們顯然得着兩個圓域)。

反之,設 $\mathfrak{K}^2$ 是任一有限的,連通的,勻齊的複合形。根據 §33 的

定理 II, 在 $\mathfrak{K}^2$ 的每一點 P 處的同調羣就是圓周的同調羣。根據 §32 的例 2, $\mathfrak{K}^2$ 的單純剖分中的每一條棱恰與兩個三邊形關聯, 而且 $\mathfrak{K}^2$ 的每一個頂點的鄰域複合形是一個圓周。所以我們能把 $\mathfrak{K}^2$ 的三邊形看作是一組多邊形, 把 $\mathfrak{K}^2$ 看作是由一組三邊形確定的曲面。因爲我們假設 $\mathfrak{K}^2$ 有連通性 (§12), 這一組三邊形也滿足連通的條件 (頁 185)。所以 $\mathfrak{K}^2$ 是 §37 中所界說的曲面。

習題: 1. 若是一個二維閉假流形 $\mathfrak{K}^2$ 的示性數 $N = -2$, $\mathfrak{K}^2$ 就與球面同胚。

2. $\mathfrak{K}^1$ 是 $\mathfrak{R}^3$ 中一個有限的, 平直的, 連通的, 一維複合形, 而且他的示性數是 N。用 $\mathfrak{K}^1$ 的所有點作中心, 作等半徑的小球面。試證這些球面的包絡是一個閉曲面, 而且示性數是 2N。

§40 有邊緣的曲面*)

一個有邊緣的曲面是由疊合一組多邊形的相抵點而成的鄰域空間, 或者說, 是把多邊形沿着邊連接起來而成的鄰域空間, 所謂二相抵點, 就是拓撲對應的二邊上二對應點。在確定閉曲面的多邊形組中, 每一邊恰有一相抵邊。但是在確定有邊緣的多邊形組中, 至少有一邊無相抵邊。這種邊叫做邊緣邊。如同界說閉曲面一樣, 確定有邊緣的曲面的多邊形組, 也需要滿足連通的條件 (§ 37)。

有邊緣的曲面的邊與多邊形, 也如同閉曲面的一樣, 可以定向; 有邊緣的曲面也可以由組合的表格給定。

設 $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2$ 分別是多邊形組中的不相抵的頂點, 邊與多邊形的個數,

$$N = -\alpha^0 + \alpha^1 - \alpha^2$$

這數也界說作有邊緣的曲面的示性數。

若是能給定多邊形的定向, 使他們在每二相抵邊上引出相反的定向, 這曲面就說是能定向的曲面。

我們能像討論閉曲面時一樣, 界說元重分與合併。這種元變換不改變示性數與能否定向性。因爲一個有邊緣的曲面能繼續的重分成一個單純的複合形, 而且這單純的複合形是一個有邊緣的假流形, 示性數與能否定向性也是有邊緣的曲面的拓撲不變性。

有邊緣的曲面的分類也如同閉曲面的一樣: 我們先說明所有的有邊緣的曲面能用元變換化成某種法式, 然後表明這些法式不同胚。這些法式都只有一個多邊形: 能定向的有邊緣的曲面的法式表格是

*) {譯者按, 本節中所界說的有邊緣的閉曲面, 必須再加以限制, 使邊緣由若干無共點的拓撲圓組成, 本節的最後一句話與習題纔能成立。}

$$q_1\, l_1\, q_1^{-1}\cdot q_2\, l_2\, q_2^{-1}\cdots q_r\, l_r\, q_r^{-1}\cdot a_1\, b_1\, a_1^{-1}\, b_1^{-1}\cdots a_h\, b_h\, a_h^{-1}\, b_h^{-1}$$
$$(r>0,\ h\geqq 0),$$

不能定向的是

$$q_1\, l_1\, q_1^{-1}\cdot q_2\, l_2\, q_2^{-1}\cdots q_r\, l_r\, q_r^{-1}\cdot a_1\, a_1\cdots a_k\, a_k,$$
$$(r>0,\ k>0)。$$

這裏的 $l_1, l_2, \cdots, l_r$ 是邊緣邊；所以有邊緣的曲面的法式的表格比閉曲面的法式的表格多出 $q_1l_1q_1^{-1}\cdot q_2l_2q_2^{-1}\cdots q_rl_rq_r^{-1}$ 這一組邊。若是叠合這些法式多邊形的每二邊 q_i 與 q_i^{-1}，結果是一個閉曲面的基本多邊形，切去了 r 個圓洞（圖 73）

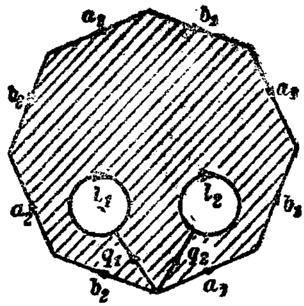


圖 73

要把任一組多邊形所給定的有邊緣的曲面化成法式，我們從他的一個單純剖分着手。這單純剖分是一個有邊緣的假流形，他的邊緣是一個確定的一維子複合形 $\mathfrak{R}$。

我們假設單純剖分中的每一個三邊形只有一頂點在邊緣 $\mathfrak{R}$ 上，或只有一邊在 $\mathfrak{R}$ 上，或無頂點又無邊在 $\mathfrak{R}$ 上。我們能如此假設，因爲原來的剖分若是無這性質，他的法重分就有了。

一個三邊形 Δ 若只有一頂點或一邊在 $\mathfrak{R}$ 上，這三邊形就說是與 $\mathfrak{R}$ 銜接。一邊若不屬于 $\mathfrak{R}$，但有一頂點在 $\mathfrak{R}$ 上，這邊也就說是與 $\mathfrak{R}$ 銜接。若是三邊形 Δ 與邊緣 $\mathfrak{R}$ 銜接，就恰有與邊緣銜接的二邊與 Δ 關聯。反之，每一條與 $\mathfrak{R}$ 銜接的邊恰與兩個與 $\mathfrak{R}$ 銜接的三邊形關聯。所以凡與 $\mathfrak{R}$ 銜接的三邊形與邊必定分成有限個循環叙列，循環叙列中的項是互相間隔的三邊形與邊，每一項與鄰近的兩項關聯。

設

$$\Delta_1\, a_1\, \Delta_2\, a_2\cdots \Delta_s\, a_s$$

是這種的一個循環叙列。沿着 a_1 聯接 Δ_1 與 Δ_2，沿着 a_2 聯接 Δ_2 與 Δ_3，$\cdots$，最後沿着 a_{s-1} 聯接 Δ_{s-1} 與 Δ_s；$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_s$ 因此聯接成一個多邊形 Π。棱 a_s 所以在 Π 上出現兩次，一次是 Δ_1 的邊，我們用 a_s' 表示，一次是 Δ_s 的邊，還叫做 a_s。同樣的，我們把其餘的每一個循環叙列中的三邊形聯接成一個多邊形。$\mathfrak{R}$ 的任一條棱必在這些多邊形中的某一個多邊形 Π 的邊緣上。$\mathfrak{R}$ 的所有的棱，在 Π 上的，

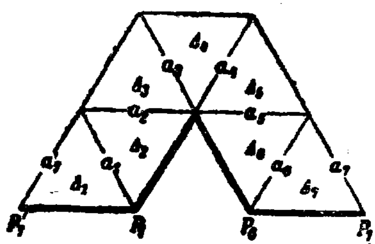


圖 74

組成一個連通的棱道(*Kantenzug*)。這句話可以證明如下：設 P_i 是 a_i 的在 $\mathfrak{R}$ 上的這一個頂點。在 $i>1$ 的時候，若是 P_{i-1} 與 P_i 不同，Δ_i 與 $\mathfrak{R}$ 的共點組成棱 $P_{i-1}P_i$；若 P_{i-1} 就是 P_i，Δ_i 與 $\mathfrak{R}$ 的共點就是 $P_{i-1}=P_i$ 這個點。在 $i=1$ 的時候，我們用 P'_s 替代 P_{i-1}，P'_s 是 a'_s 的在 $\mathfrak{R}$ 上的這一個頂點。所以 Π 中的棱道 $P'_s P_1 P_2 \cdots P_s$ 的棱都屬於 $\mathfrak{R}$，而且只有這些棱屬于 $\mathfrak{R}$。這些點也許有相同的，例如圖 74 中的 $P_2=P_3=P_4=P_5$。然後把這些棱合併成 Π 的一邊 l。我們現在把 a'_s 改寫成 a_s，使對應邊仍舊有相同的表示法，Π 的邊緣上的邊的次序就如下：

$$\sim\sim\sim\sim\ a_s\ l\ a_s^{-1}\ \sim\sim\sim\sim。$$

如此得着若干多邊形之外，還可以有不與 $\mathfrak{R}$ 啣接的三邊形。我們把他們都合併起來成一個多邊形，這多邊形的表格如下：

$$\sim\sim\sim\sim\ b_1\ l_1\ b_1^{-1}\ \sim\sim\sim\sim\ b_2\ l_2\ b_2^{-1}\ \sim\sim\sim\sim\ b_r\, l_r\ b_r^{-1}\ \sim\sim\sim\sim。$$

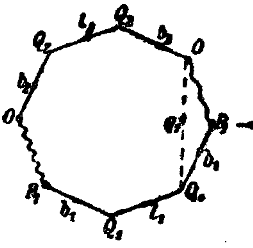


圖 75

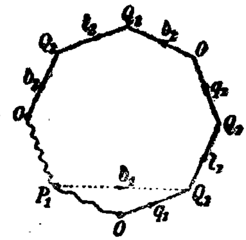


圖 76

這裏的 l_i 表示所有的邊緣邊，鋸齒形線表示其他未寫出的邊；後一類的邊成對的對應(圖 75)。

我們能應用這多邊形的重分與合併，使這 r 組邊 $b_i l_i b_i^{-1}$ 連成一串，不被別種邊隔開。圖 76 表明如何聯接前兩組邊。聯接的時[illegible]，其餘的[illegible]組 $b_i l_i b_i^{-1}$ 中的三邊仍舊互相鄰接，沒有分開；多邊形的表格中的鋸齒形線代表的邊也是如此。繼續應用這種方法，最後我們得着一個多邊形；在 $q_1\ l_1\ q_1^{-1}\cdot q_2\ l_2\ q_2^{-1}\cdots q_r\ l_r\ q_r^{-1}$ 這一串邊之外，這多邊形所含有的邊都成對的對應。這一串邊的起點 (q_1 的起點) 與終點 (q_r^{-1} 的終點) 是曲面上的同一點 O；因爲根據邊的對應，q_1 的起點與 q_1^{-1} 的終點相抵，所以也與 q_2 的起點相抵，所以最後也與 q_r^{-1} 的終點相抵。設 $\bar{l}$ 是連接這兩個點 O 的對角線，用 $\bar{l}$ 把這個多邊形剖分成兩個多邊形。這兩個多邊形的一個，Π_1，只有一條邊緣邊 $\bar{l}$。我們應用閉曲面法式的作法到 Π_1 上去；留着 O，凡不與 O 相抵的頂點都逐次的消去，求得頂點都與 O 相抵的一個多邊形，然後再把如此求得的多邊形與原來的另一個沿着 $\bar{l}$ 聯接起來，結果就是我們所想求得的有邊緣的曲面的法式。每一法式的邊緣數，示性數與定向性，與另一法式的不同；這三種性質都是不變性，所以這些多邊形代表不同胚的曲面。

習題：有 r 個圓洞的，虧格 h [k] 的，能定向的 [不能定向的] 曲面的變層 (頁 182)，是虧格 $\bar{h}=2h+r-1$ [$\bar{k}=2k+2r-2$] 的一個閉曲面。

§41 曲面的同調羣

一個複合形的同調羣能由不變數（*Betti* 數與撓係數）斷定，所以一個閉曲面的同調羣很容易求出。根據推廣的 *Euler* 的多面形公式（§23），示性數

$$N = -p^0 + p^1 - p^2。$$

這曲面既然是一個連通的複合形，根據 §18，$p^0 = 1$。根據 §24，這曲面若能定向，$p^2 = 1$；若不能定向，$p^2 = 0$。所以

$$\text{能定向的閉曲面的}\quad N = p^1 - 2,$$

$$\text{不能定向的閉曲面的}\ N = p^1 - 1。$$

所以第一個 *Betti* 數可以從示性數求出；根據 §38，也可以從這曲面的虧格 h 或 k 求出：

$$\text{能定向的閉曲面的}\quad p^1 = N + 2 = 2h,$$

$$\text{不能定向的閉曲面的}\ p^1 = N + 1 = k - 1,$$

只有不能定向的曲面有一個一維的撓係數，等于 2（§24）。

若是一個閉曲面能定向，而且虧格等於 h，他的一維同調羣是一個有 $2h$ 個母元的自由 *Abel* 羣。若是一個閉曲面不能定向，而且虧格等於 k，他的一維同調羣是一個有 $k-1$ 個母元的自由 *Abel* 羣與一個級 2 的羣的直接和

零維的與二維的同調羣沒有特殊的興趣。因爲每一個連通的複合形的零維同調羣都是一個自由循環羣（§18），而二維的同調羣也已經

由曲面是一個能定向的或不能定向的假流形的這種性質決定了。根據§ 24，能定向的閉曲面的二維同調羣是一個自由循環羣，不能定向的閉曲面的只含有零元。

要想求得一維的同調基，我們利用下述的預備定理：

預備定理：多面形的頂點，棱與面片組成一組塊形。—— 一組塊形的定義，應該根據於複合形的一個單純的剖分 (§22)。我們現在把這給定的多面形任意的重分成一個單純的剖分 $\mathfrak{K}^2$。因爲塊形是單純鍊，所以我們如果要說得確切一些，預備定理中所說的頂點，應該說是一個定向的頂點所組成的鍊；預備定理中所說的棱(面片)應該說是 $\mathfrak{K}^2$ 中在這棱 (面片) 上的協合定向的一 (二) 維單純形所組成的鍊。

證明：條件 (Bl_1) 與 (Bl_2)，維數 $k=0$ 與 2 的時候的 (Bl_3)，與維數 $k=1$ 的時候的 (Bl_4) 都滿足了；證明都很容易，可以省去 (參看頁 112)。維數 $k=1$ 的時候的 (Bl_3) 與 $k=0$ 的時候的 (Bl_4)，我們能同時證明如下：若 U^1 是 $\mathfrak{K}^2$ 的一個一維的單純鍊，而且 U^1 的邊緣是一個零維的塊形鍊(所以由多面形的頂點組成)，就有一個與 U^1 同調的一維塊形鍊 V^1 存在。*) 這句話包含 $k=0$ 的時候的 (Bl_4)；在 U^1 特別是閉鍊的時候，也就包含 $k=1$ 的時候的 (Bl_3)。要求得 V^1，只要把 U^1 從面片上擠到多面形的棱上去。設 U^1 中有一個鍊 U^1_m 在多面形的某一個確定的面片 Π 的一個中間單純形上。(不在多面形的棱上的一維單純形，就叫做 $\mathfrak{K}^2$ 的中間單純形。) 組成這多面形的多邊形組中

*) (參看單純逼近定理。)

有一個多邊形$'\Pi$相當于Π;U_m^1相當於$'\Pi$上的一個鍊$'U_m^1$。$F['U_m^1]$是$'\Pi$的邊緣上的一個零維鍊,而且他的代數值等於零。因爲一個連通的複合形上的每一個代數值等于零的零維鍊總是~ 0(§18),$F['U_m^1]$是$'\Pi$的邊緣上的一個鍊$'U_r^1$的邊緣。如同圓域上的每一個閉一維鍊一樣,閉鍊$'U_m^1 - 'U_r^1$在$'\Pi$上零調。$\mathfrak{R}^2$上的相當于$'U_m^1$與$'U_r^1$的兩個鍊U_m^1與U_r^1所以互相同調。若是用U_r^1替換U_m^1,而且同樣處置U^1在別個面片上的中間的一維單純形,我們就得着一個鍊V^1,他與U^1同調,而且他的單純形都在多面形的棱上。根據假設,$F[V^1] = F[U^1]$是一個零維塊形鍊,所以多面形的一條棱上的所有的協合定向的一維單純形在V^1中的倍數都相等;那就說,V^1是一個一維塊形鍊,正是我們想求得的。

證明了這預備定理,我們就有一個簡便的方法,計算由多邊形組規定的多面形的同調羣,而且同時得着一組同調基。我們只要寫下塊形的關聯矩陣(§22),然後同時把他們化成法式。我們用頁197上的基本多邊形(0),(h),(k)計算(更參看圖11,10與19)。他們的矩陣是

E^0	a
P	1
O	-1

E^1	Π
a	0

(0)

E^0	$a_1\ b_1 \cdots a_h\ b_h$
O	$0\ 0 \cdots 0\ 0$

E^1	Π
a_1	0
b_1	0
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
a_h	0
b_h	0

(h)

E^0	$a_1\ a_2 \cdots a_k$
O	$0\ 0 \cdots 0$

E^1	Π
a_1	2
a_2	2
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
a_k	2

(k)

我們把 (0) 的關聯矩陣 E^0 中的第一橫列加到第二橫列上去，求得法式 H^0：

H^0	a
$P-O$	1
O	0

點 O 組成一組零維的同調基。(0) 的關聯矩陣 E^1 與 (h) 的都已經是法式。所以 $a_1, b_1, \cdots, a_h, b_h$ 這 $2h$ 個一維鍊組成虧格 h 的閉曲面的

一維同調基，而且同時也是一組 *Betti* 基。要把 (k) 的關聯矩陣化成法式，我們把 E^1 中的第一橫列從其他橫列減去；結果是

$$
\begin{array}{c|cccc}
\mathsf{H}^0 & \sum_{i=1}^{k} a_i & a_2 & \cdots & a_k \\
\hline
O & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|c}
\mathsf{H}^1 & \Pi \\
\hline
\sum_{i=1}^{k} a_i & 2 \\
a_2 & 0 \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
a_k & 0
\end{array}
$$

在這裏 $\sum_{i=1}^{k} a_i, a_2, \cdots, a_k$ 組成一組同調基，$a_2, \cdots, a_k$ 組成一組 *Betti* 基；因此 *Betti* 數是 $p^1 = k-1$，與已經得着的結果一致。

雖然能定向的與不能定向的閉曲面的一維 *Betti* 數 p^1 分別等于 $N+2$ 與 $N+1$，所有的曲面的**連通數**却都是 $q^1 = N+2$。因爲 $N = -q^0+q^1-q^2$（頁 122），$q^0 = q^2 = 1$（頁 121）。

要求得**連通基**，只要寫下模 2 關聯矩陣 $\breve{\mathsf{E}}^0$ 與 $\breve{\mathsf{E}}^1$。把 E^0 與 E^1 中的偶數都改成餘數類 $\breve{0}$，奇數都改成餘數類 $\breve{1}$，他們就分別變成 $\breve{\mathsf{E}}^0$ 與 $\breve{\mathsf{E}}^1$。曲面 (h) 與 (k) 的 $\breve{\mathsf{E}}^0$ 與 $\breve{\mathsf{E}}^1$ 都已經是法式。所以把基本多邊形的棱當作是模 2 鍊，他們就組成一維的連通基。球面 $(h = 0)$ 是一個顯而易明的例外。下述定理表明一維的連通數 q^1 的幾何意義：

定理：不分開 (*zerstückeln*) **曲面的紐形剖線** (*Rückkehrschnitte*) **的最多個數，等於這曲面的一維連通數** $q^1 = N+2$。

所謂紐形剖線，就是曲面的一個單純剖分上的一條沒有重點的閉棱道，也就是一個一維的子複合形（§23），其中每一個頂點恰與兩條棱關聯。若是在曲面上有了 r 條紐形剖線，其中每兩條無共棱，而且這單純的剖分中有兩個三邊形，不能用互相間隔的一串關聯的三邊形與棱（不屬于紐形剖線的）連接起來，我們就說這 r 個紐形剖線"分開"這曲面。基本多邊形的棱複合形（頁 197）就表明了至少有 $N+2$ 個不分開曲面的紐形剖線（有了適當的單純剖分之後）。設有 r（$> N+2$）條紐形剖線 $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \cdots, \mathfrak{k}_r$。如果我們把他們當作模 2 鍊，他們就同調，因為 $N+2$ 是同調無關的模 2 鍊的最多的個數（§23）。所以有一個模 2 鍊，或一個二維的子複合形 $\mathfrak{U}^2$ 存在，他的邊線是這些剖線的一個平直組合：

$$F[\mathfrak{U}^2] = \breve{\varepsilon}_1 \mathfrak{k}_1 + \breve{\varepsilon}_2 \mathfrak{k}_2 + \cdots + \breve{\varepsilon}_r \mathfrak{k}_r,$$

而且 $\breve{\varepsilon}$ 不都等于 $\breve{O}$。因為我們假設每兩條紐形剖線無共棱，所以右端 $\neq 0$。因此 $\mathfrak{U}^2$ 既非 0 又非全個的曲面。設 $\mathfrak{B}^2$ 是 $\mathfrak{U}^2$ 的剩餘複合形。我們從 $\mathfrak{U}^2$ 與 $\mathfrak{B}^2$ 中各取一個三邊形，這兩個三邊形就不能用互相間隔的一串三邊形與棱（不屬于紐形剖線的）連接起來。所以任意 q^1+1 條紐形剖線都分開這曲面。[23]

按語：不能定向的曲面上的，含有一條紐形剖線的狹長條，是一個平環或一條 *Möbius* 帶。在這兩種情形下，這紐形剖線分別說是雙岸

的 (*zweiufrig*) 或單岸的 (*einufrig*)。(例如把給定的單純剖分法重分兩次，然後所有的與這紐形剖線的頂點或棱關聯的三邊形就組成這麼一條狹長條。) 若是一個不能定向的曲面沿着一條紐形剖線剖開之後，就變成一個能定向的曲面，這紐形剖線就叫做**定向化的** (*orientierbarmachend*) 紐形剖線。

習題：根據 § 38 中的習題 1，試證：每一個不能定向的曲面上有一條定向化的紐形剖線。每一條定向化的紐形剖線是雙岸或單岸，要看虧格 k 是偶數或奇數而定。[剖開曲面並不改變示性數。用下述的事實：一個能定向的閉曲面的示性數是偶數。]

第七章 基本羣

同調羣只够做二維流形的完全分類的標準。高維的複合形或流形卽使有相同的同調羣，我們還不能斷定他們是否同胚。在這種情形下，最重要的一個不變性，常能用來區別不同胚的複合形或流形的，是基本羣。基本羣通常不是 *Abel* 羣。一個複合形只有一個基本羣。基本羣所表出的，只是關於複合形上的一維道路（*Weg*）的性質。要想與同調羣一樣，每一個維數都界說一個基本羣，這種努力至今還無重要的結果。——如同同調羣，複合形的基本羣是一個全局的不變性，而且他也有一個相當的局部的不變性，卽是在一點處的基本羣。

§42 基本羣

設 $\bar{w}$ 是一條定向的線段，$\mathfrak{K}^n$ 是一個有限的或無窮的複合形。若是有一個綿續變換，換 $\bar{w}$ 到 $\mathfrak{K}^n$，我們就說這 $\bar{w}$ 與這變換確定了 $\mathfrak{K}^n$ 上的一條道路 w。$\bar{w}$ 的像點叫做這道路的點。若 $\bar{P}$ 與 $\bar{Q}$ 分別是 $\bar{w}$ 的起點與終點，而且他們的像點是 P 與 Q，P 與 Q 就分別叫做 w 的**起點**與**終點**，w 就說是從 P 到 Q 的道路。一點沿着 $\bar{w}$ 綿續的從 $\bar{P}$ 走到 $\bar{Q}$ 的時候，他的像點也沿着 w 綿續的從 P"走到" Q。像點並不一定移動；因爲按照道路的定義，$\bar{w}$ 可以換成 $\mathfrak{K}^n$ 上的一點，所以 w 可能只是一個點。

設原底 $\bar{w}$ 拓撲的變換成另一定向的線段 $\bar{w}'$，起點換成起點，終點換成終點。因爲換 $\bar{w}$ 到 $\mathfrak{K}^n$ 的變換，我們就也有一個單值的綿續的變換，換 $\bar{w}'$ 到 $\mathfrak{K}^n$，因此也確定了一條道路 w'。我們把 w 與 w' 看作相等，沒有區別。[24] w 的點與 w' 的點顯然相同。

若是用實數直線上的單位線段 $0 \leqq s \leqq 1$ 作原底 $\bar{w}$，他的起點是 $s=0$，終點是 $s=1$。這參數 s 在 0 與 1 之間的每一個值，恰確定 w 上的一個點。w 上的點有無窮多用這種參數表示的方法。若是 s' 是另一個參數，s 與 s' 間就有一個拓撲的對應；這對應實際是一個單調的坐標變換。我們能把 s 看作是時間；一個點沿着道路走，需要 s 個單位時間，才能從起點走到相當于 s 的這點。

若 u 是從 P 到 Q 的一條道路，v 是從 Q 到 R 的一條道路，這兩條道路能聯接成一條道路 w。我們只需要把原底 $\bar{u}$ 與 $\bar{v}$ 聯接成一個原底 $\bar{w}$，然後把 $\bar{w}$ 換成 $\mathfrak{K}^n$ 上的一條道路 w。我們把 w 叫做 u 與 v 的乘積，用下式

$$w = uv$$

表示。點在 w 上走的時候，他先走完 u，然後 v。

若是改變了原底 $\bar{w}$ 的定向，我們就得着 w 的逆道 w^{-1}。

起點與終點相同的道路叫做**閉道**。

設 $\mathfrak{K}^n$ 的一個單純剖分中有一串有限個定向的棱，每一棱的終點是後一棱的起點，而且第一棱的起點是 P，最後一棱的終點是 Q。這一串棱就組成一條由 P 到 Q 的**棱道**。每一定向棱是一個一維單純形，所以是定向的線段的綿續（其實是拓撲）像，所以按照定義是一條道路。因此，棱道是個別的棱的乘積。

設 $\mathfrak{K}^n$ 上的道路 w_0 的原底是 $\bar{w}$。若是這換 $\bar{w}$ 成 w_0 的變換經過一個同倫變狀，而且 w_0 的起點 P 與終點 Q 都不改變，w_0 就說是也經

過一個(同倫)**變狀**。設相當于每一個値 $t\,(0 \leqq t \leqq 1)$, g_t 是一個變換,換 $\bar{w}$ 到 $\mathfrak{R}^n$; 特別在 $t=0$ 的時候 g_0 換 $\bar{w}$ 到 w_0, 在 $t=1$ 的時候 g_1 換 $\bar{w}$ 成某一道路 w_1; 像點 $g_t(\bar{R})$ 是 $\bar{w}$ 上的點 $\bar{R}$ 與 t 的綿續函數;而且,不問 t 的値如何, $g_t(\bar{P})=P$, $g_t(\bar{Q})=Q$。所以,若是有這種的 g_t 存在, w_0 就說是**能同倫的變狀**成 w_1, w_0 與 w_1 就說是**在複合形 $\mathfrak{R}^n$ 上互相同倫**。 w_1 也顯然的能變狀成 w_0。同倫的道路的起點相同,終點也相同。

如同一個變換的變狀一樣,我們也能用**變狀複合形** $\bar{w}\times t$ 的一個變換 f 替代 $\bar{w}$ 的所有的變換 g_t。這裏的 $\bar{w}\times t$ 是 $\bar{w}$ 與單位線段 $t\,(0 \leqq t \leqq 1)$ 的拓樸積,所以能特別用實數平面中的一個矩形(**變狀矩形**)代表。所以我們能把變狀的定義說成下式:若是有一個綿續的變換 f 換變狀矩形 $\bar{w}\times t$ 到 $\mathfrak{R}^n$, 使 $\bar{w}\times 0=\bar{w}_0$ ($\bar{w}\times 0$ 表示原底線段 $\bar{w}$ 與線段 t 的點 0 的拓樸積)與 $\bar{w}\times 1=\bar{w}_1$ 這二邊分別換成 w_0 與 w_1, 其他二邊 $\bar{P}\times t$ 與 $\bar{Q}\times t$ 分別換成 P 點與 Q 點,我們就說 w_0 能變狀成 w_1。如同變換的變狀一樣, f 與 g_t 的關係可以用

圖 77

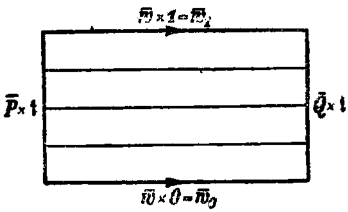


圖 78

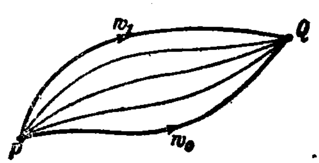


圖 79

$$f(\bar{R}\times t)=g_t(\bar{R})$$

表出。所不同的，就是現在的 f 還需要把邊 $\overline{P}\times t$ 與 $\overline{Q}\times t$ 分別換成 P 與 Q（圖 77 至 79）。

在歐幾里得空間中固定一條有彈性的線的端點，這條線的彈動只是我們所討論的變狀的一個特例。因爲彈動線的時候，他不會有重點，不會有結；而道路的變狀却允許這種情形出現。彈性的線的這種可能的變狀，也可以用算學的方式討論：由空間的等倫變狀實現。

若是 w_0 能變狀成 w_1，w_1 能變狀成 w_2，w_0 就也能變狀成 w_2。證明如下：w_0 變狀成 w_1 的這變狀距形與 w_1 變狀成 w_2 的這變狀矩形各有一邊變換成 w_1。因爲這二邊是同一道路 w_1 的原底，他們中間有一個拓撲對應，而且對應的點換成 w_1 上的同一點。因此我們能疊合這二邊上的每二對應點，使這兩個矩形聯接成一個新矩形，而且有一個換這新矩形到 $\mathfrak{R}^n$ 的綿續變換，換二平行邊分別成 w_0 與 w_2，換其他二邊分別成 P 與 Q；那就是說，w_0 能變狀成 w_2。這就證明了能變狀這性質有協換性（*Transitivität*）。因此兩個點的所有的連接道路可以分成能互相變狀的道路類。

若

$$w_0 = a \cdots b\, c_0\, d \cdots e$$

是 $\mathfrak{R}^n$ 上的道路 $a, \cdots, b, c_0, d, \cdots, e$ 的乘積，而且 c_0 能變狀成 c_1，w_0 就能變狀成

$$w_1 = a \cdots b\, c_1\, d \cdots e。{}^{*)}$$

根據假設，圖 80 的“中間的”矩形上有一個綿續的變換，換 $\bar{c}_0$ 成 c_0，換 $\bar{c}_1$ 成 c_1，換其他二垂直邊分別成 c_0 與 c_1 的公共起點與終點（圖 81）。然後把這矩形上的綿續變換推廣成所有的矩形上的一個綿續變換 f：

*) c_1 也能是乘積中第一個或末一個因子。

f 換 $\bar{a}\times 0, \cdots, \bar{b}\times 0, \bar{d}\times 0, \cdots, \bar{e}\times 0$ 分別成 $a, \cdots, b, d, \cdots, e$, 而且換不在"中間的"矩形中的每一垂直線段成同一點。

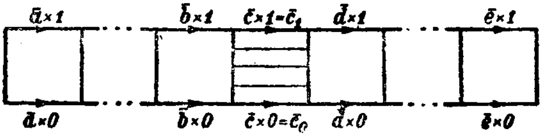


圖 80

若是道路乘積 ab 中的第一(二)個因子只是一個點, ab 就能變狀成 $b(a)$.

圖 81

證明: 圖 82 中的矩形的底邊分成 $\bar{a}_0$ 與 $\bar{b}_0$ 兩部分。設頂邊 $\bar{b}_1$ 與 $\bar{b}_0$ 間有一個平直對應,每二對應點在圖中有一線段連接;同樣的, $\bar{a}_0$ 的每一點與 $\bar{b}_1$ 的起點有一線段連接。先綿續的變換矩形成 $\bar{b}_1$; 換每一連接線段成他在 $\bar{b}_1$ 上的端點。若是再變換 $\bar{b}_1$ 成道路 b, 我們就得着了一個換矩形到 $\mathfrak{R}^n$ 的變換,他換 $\bar{a}_0\bar{b}_0$ 成 $a\,b$, 換矩形的二垂直邊成 b 的起點與終點。這就證明了 ab 能變狀成 b。

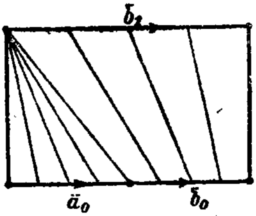


圖 82

若是能互相變狀的兩條道路 w_0 與 w 中的 w_0 只是一個點, w 就說是**能變狀成一點或零倫**。所以若是能綿續的變換一個矩形到 $\mathfrak{R}^n$, 使一邊 $\bar{w}$ 換成 $\mathfrak{R}^n$ 上的一條閉道 w, 其他三邊換成 w 的起點,這閉道 w 就零倫。

例: 設 $\mathfrak{R}^n$ 是 n 維的實數空間 $\mathfrak{N}^n$。 $\mathfrak{N}^n$ 中的每一閉道 w 零倫。

要證明這句話，只要設想 w 上的每一點以一常速度在一直線上運動，一秒鐘後恰走到 w 的起點 P，再給定變狀矩形的一個相當的變換。——若 $\mathfrak{K}^n$ 是一個 n 維單純形 $\mathfrak{S}^n$ (例如 $\mathfrak{R}^n$ 中的平直單純形)，這結論仍舊成立；特別是線段 a $(n=1)$ 上的 aa^{-1} 這往返走過的道路在 a 上零倫。—— 因此，任一複合形上的任一**往返走過的道路** w，即一個如下式的道路： $w = uu^{-1}$ 零倫。因爲我們只要把定向的線段 a 綿續的變換成道路 u，就得着一個換變狀矩形到這複合形的綿續變換，他換一邊成 w，其他三邊成 w 的起點。

零倫的特徵可以表明如下： **閉道 w 零倫的充要條件，是他中間能張開一個廣義的元面片。** $\mathfrak{K}^n$ 上的一圓域的綿續像叫做一個廣義的元面片。

假設 χ 是一個綿續變換，換矩形到 $\mathfrak{K}^n$，換 $\bar{w}$ 成 w，換其他三邊成 w 的起點。我們能把這變換 χ 分成兩步。我們不直接用 χ，先用一個綿續變換 φ，換矩形成圓域 $\mathfrak{K}^2$，換一邊 $\bar{w}_1$ 成圓週，換其他三邊成圓周上同一點 O (圖 83)，而且平直的換矩形的垂直線成圓的相當弦。我們還能求着一個變換 ψ，換圓域到 $\mathfrak{K}^n$，而且適合

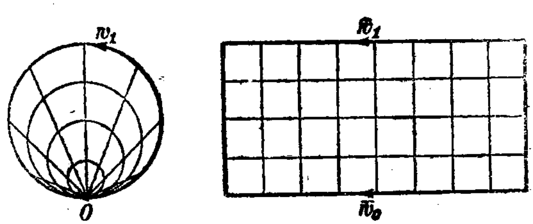


圖 83

$\chi = \psi\varphi$。根據 §8 的定理 IV，ψ 是綿續的。所以若是 w 零倫，w 中間能張開一個廣義的元面片。反之，若是圓域 $\mathfrak{K}^2$ 的這綿續變換 ψ 給

定了，矩形的這變換 $\psi\varphi = \chi$ 也就確定了。

我們現在再假設 $\mathfrak{K}^n$ 是連通的複合形。每二點都能用一條道路連接。在 $\mathfrak{K}^n$ 上任意選定一點 O，我們只討論用 O 做起點的所有可能的閉道。這種閉道分成能互相變狀的道路類。含有閉道 w 的道路類就用

$$\{w\}$$

表示。

用下述的聯合運算，這些道路類組成一羣，叫做這連通的複合形 $\mathfrak{K}^n$ 的**基本羣**[25] **或道路羣** (*Wegegruppe*) $\mathfrak{F}$：兩個道路類 $\{w_1\}$ 與 $\{w_2\}$ 的乘積就是道路類 $\{w_1 w_2\}$。不管從因子類中選出什麼代表道路 w_1 與 w_2，我們得着的乘積相同。因爲若是用能變狀成 w_i 的道路 w_i' 替代 w_i，根據頁 213，$w_1'w_2'$ 也能變狀成 w_1w_2。

聯合運算的這種規定滿足羣的公設：

1. 締合律顯然滿足；

2. 有一個么元；零倫的道路所成的道路類即是么元，因爲根據頁 214，任一道路 w 前面或後面接上一零倫的道路，並不改變 w 所屬的道路類。

3. 任一元有一個逆元。因爲一個往返走過的道路零倫，$\{w^{-1}\}$ 就是 $\{w\}$ 的逆元。

但是對易律不一定滿足，$\{w_1\}\{w_2\}$ 通常不等于 $\{w_2\}\{w_1\}$。所以基本羣與同調羣不同；基本羣通常不是 *Abel* 羣。將來我們還要討論基本羣與同調羣的關係 (§48)。

道路類 $\langle w_1\rangle\langle w_2\rangle$ 中含有道路 w_1w_2，也含有由 w_1w_2 變狀而成的道路（在 O 處的起點與終點不改變），所以特別含有由改變 w_1w_2 的中間的這一點 O 的地位而成的一條道路 w（圖 84）。$\langle w_1\rangle$ 與 $\langle w_2\rangle$ 可以相同。

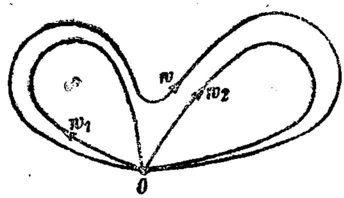


圖 84

若是把基本羣看作是抽象的羣，他就不依賴於起點 O 的選擇，所以由這連通的複合形 $\mathfrak{K}^n$ 自己完全確定了。假設不用 O，用另一點 O' 做閉道的起點，我們就取定一條從 O到 O' 的輔助道路 v，而且對於任意一條從 O' 點起始的閉道的道路類 $\{w'\}$，我們使道路類

$$\{w\}=\{v\,w'\,v^{-1}\}$$

與他對應。這種對應不依賴于如何選擇代表 $\{w'\}$ 的 w'。反之，給定了一條從 O 點起始的閉道的道路類 $\{w\}$，使從 O' 點起始的這道路類 $\{v^{-1}wv\}$ 與他對應；這個對應恰是前一個對應的逆對應。因爲第一個對應規定從 $\{w'\}$ 到 $\{w\}=\{v\,w'\,v^{-1}\}$，而第二個規定從 $\{w\}$ 到

$$\{v^{-1}\,w\,v\}=\{v^{-1}(v\,w'\,v^{-1})v\}=\{w'\},$$

所以從 O 點起始的與從 O' 點起始的道路類間的這對應是一一的。不但如此，與乘積

$$\{w_1'\}\{w_2'\}\;=\;\{w_1'w_2'\}$$

對應的道路類是

$$\{v\,w_1'\,w_2'\,v^{-1}\}\;=\;\{v\,w_1'\,v^{-1}\cdot v\,w_2'\,v^{-1}\}\;=\;\{v\,w_1'\,v^{-1}\}\{v\,w_2'\,v^{-1}\},$$

即與因子對應的道路類的乘積；所以這對應也一一的同構。——在上

面的證明中，我們有時接上或消去一條道路 $v^{-1}v$；因爲我們知道 $v^{-1}v$ 零倫，而且代表一道路類的一道路接上或消去一零倫的道路，結果還代表這道路類。

基本羣 $\mathfrak{F}(O)$（用 O 做起點的）與基本羣 $\mathfrak{F}(O')$（用 O' 做起點的）間的一一的同構對應，依賴于輔助的道路 v 的選擇。若是用 u 做輔助道路，替代 v，

$$\{w\} \to \{v^{-1}\, w\, v\} \tag{1}$$

這對應也就換成

$$\{w\} \to \{u^{-1}\, w\, u\} = \{u^{-1}\, v\, v^{-1}\, w\, v\, v^{-1}\, u\} = \{(u^{-1}\, v) v^{-1}\, w\, v (u^{-1}\, v)^{-1}\}。 \tag{2}$$

所以要想從一一的同構對應 (1) 得着一一的同構對應 (2)，就必須用 $\mathfrak{F}(O')$ 的一個固定的元 $\{u^{-1}v\}$ 去變換 $\mathfrak{F}(O')$，即換 $\mathfrak{F}(O')$ 的每一元成他的用 $\{u^{-1}v\}$ 作成的變形元*) 對應。那就是說，$\mathfrak{F}(O)$ 與 $\mathfrak{F}(O')$ 間**的一一的同構變換，除去 $\mathfrak{F}(O')$ 的一個內在的，自身的，一一的同構變換之外，完全確定了。**

在 § 27（定理 *II*）中我們知道一個換複合形 $\mathfrak{K}^n$ 到複合形 K^m 的綿續變換 φ 引出一個換 $\mathfrak{K}^n$ 的第 k 個同調羣到 K^m 的第 k 個同調羣的同構變換。關於基本羣也有一個相當的定理：

φ 變換 $\mathfrak{K}^n$ 上的任一道路 w 成 K^m 上的一條道路 w'。因爲先有

*) $\mathfrak{F}(O')$ 中的一元左邊乘以 $\{u^{-1}\, v\}$，右邊乘以 $\{u^{-1}\, v\}^{-1}$ 的乘積，就叫做這元的用 $\{u^{-1}\, v\}$ 作成的變形元。這種變換實現基本羣的一個內在的 (*inner*)，自身的，一一的同構變換。參考 *A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung,* 頁 121（*Berlin* 1927）。

一個綿續變換 f 把 w 的原底 $\bar{w}$ 換成 w，然後又有 φ 綿續的變換 w。變換 φf 也綿續，所以確定 K^m 上的一條道路 w'。——若是 w_0 與 w_1 是 $\mathfrak{K}^n$ **上的能互相變狀的道路，他們的像道路也能互相變狀。** 根據假設，有一個綿續變換換變狀矩形 $0 \leqq s \leqq 1, 0 \leqq t \leqq 1$ 到 $\mathfrak{K}^n$，換 $t=0$ 與 $t=1$ 這二平行邊成 w_0 與 w_1，換其他二平行邊成 w_0 與 w_1 的公共起點 A 與公共終點 B。現在又有 φ 這變換綿續的換這變狀矩形到 K^m，換 $t=0$ 與 $t=1$ 成 w_0' 與 w_1'，換 $s=0$ 與 $s=1$ 成 w_0' 與 w_1' 的公共起點 A' 與公共終點 B'，這就證明了 w_0' 與 w_1' 能在 K^m 上互相變狀。——最後，兩條道路的乘積顯然換成他們的像道路的乘積。

若是 O 是 $\mathfrak{K}^n$ 的基本羣 $\mathfrak{F}$ 的閉道的起點，我們就取像點 O' 做 K^m 的基本羣 $\mathfrak{F}'$ 的閉道的起點。因爲同倫的道路換成同倫的道路，所以相當于 $\mathfrak{F}$ 中的每一道路類，$\mathfrak{F}'$ 中有一確定的道路類；因爲兩條道路的乘積的像等於這兩條道路的像的乘積，所以這換 $\mathfrak{F}$ 到 $\mathfrak{F}'$ 的變換是同構變換。卽使用 K^m 上的另一點 Ω 替代 O' 做起點，我們還能說 $\mathfrak{F}$ 有了一個同構變換。因此我們知道 $\mathfrak{F}'(O')$ 與 $\mathfrak{F}'(\Omega)$ 間有一個一一的同構對應；只要取定一條從 O' 到 Ω 的輔助道路，這對應就確定了。先同構的變換 $\mathfrak{F}$ 到 $\mathfrak{F}'(O')$，再一一的同構的變換 $\mathfrak{F}'(O')$ 成 $\mathfrak{F}'(\Omega)$，結果還是一個換 $\mathfrak{F}$ 到 $\mathfrak{F}'(\Omega)$ 的同構變換 Φ。根據頁 218，若是輔助道路改變了，Φ 之後還有 $\mathfrak{F}'(\Omega)$ 的一個內在的，自身的，一一的同構變換。所以證明了下述定理：

定理：一個換複合形 $\mathfrak{K}^n$ 到複合形 K^m 的綿續變換，引出一個換 $\mathfrak{K}^n$

的基本羣 $\mathfrak{F}$ 到 K^m 的基本羣 $\mathfrak{F}'$ 的同構變換 Φ。除去 $\mathfrak{F}'$ 的一個內在的，自身的，一一的同構變換之外，Φ 完全確定了。若是 $\mathfrak{K}^n$ 與 K^m 同胚，而且 φ 是換 $\mathfrak{K}^n$ 成 K^m 的拓撲變換，Φ 就是一個一一的同構變換；那就是說，同胚的複合形的基本羣一一的同構。

要證明定理的後一部分，只要注意在拓撲變換之下，$\mathfrak{K}^n$ 上的道路與 K^m 上的道路間的對應是一一的對應。

§43　例

1. **兩個複合形 $\mathfrak{K}_1$ 與 $\mathfrak{K}_2$ 的拓撲積的基本群，等於這兩個因子的基本群的直接乘積。**

證明： 根據頁 78，拓撲積 $\mathfrak{K}_1\times\mathfrak{K}_2$ 的每一點 P 恰可以用下列方式

$$P = P_1\times P_2 \tag{P}$$

表出。

設 $\bar{\mathfrak{K}}$ 是任一複合形，g 綿續的變換 $\bar{\mathfrak{K}}$ 到 $\mathfrak{K}_1\times\mathfrak{K}_2$，換 $\bar{\mathfrak{K}}$ 上的點 $\bar{P}$ 成 $\mathfrak{K}_1\times\mathfrak{K}_2$ 的點 P:

$$\bar{P}\longrightarrow P。\tag{g}$$

因爲方程式 (P)，g 同時也確定了一個換 $\bar{\mathfrak{K}}$ 到 $\mathfrak{K}_1$ 的綿續變換 g_1：

$$\bar{P}\longrightarrow P_1, \tag{g_1}$$

與一個換 $\bar{\mathfrak{K}}$ 到 $\mathfrak{K}_2$ 的綿續變換 g_2:

$$\bar{P}\longrightarrow P_2。\tag{g_2}$$

反之，若是綿續變換 g_1 與 g_2 先給定了，因爲 (P)，他們也確定了 g 這綿續變換。設 $\bar{\mathfrak{K}}$ 特別是一條定向的線段，變換 g, g_1, g_2 把他分別換成 $\mathfrak{K}_1\times\mathfrak{K}_2$，$\mathfrak{K}_1$，$\mathfrak{K}_2$ 上的道路 w, w_1, w_2。**所以給定了 $\mathfrak{K}_1\times\mathfrak{K}_2$ 上的一條道路 w，就有一對道路 w_1, w_2 與他對應，反之亦然。***) —— 現在再設 $\bar{\mathfrak{K}}$ 是一個矩形，設 g 把他換到 $\mathfrak{K}_1\times\mathfrak{K}_2$，換他的三邊成一個點 $O = O_1\times O_2$，換第四邊成道路 w。設相當于 w 的一對道路是 w_1 與 w_2。g_i 就也變換這矩形的這三邊成 O_i，換第四邊成 w_i $(i = 1, 2)$。所以若是 w 在 $\mathfrak{K}_1\times\mathfrak{K}_2$ 上零倫，w_i 在 $\mathfrak{K}_i$ 上也零倫。反之，若是 w_1 與 w_2 零倫，就有一個變換 g_i 存在，換矩形 $\bar{\mathfrak{K}}$ 到 $\mathfrak{K}_i$，換三邊成 O_i，換第四邊成 w_i。由 g_1 與 g_2 確定的變換 g 也換這三邊成 $O_1\times O_2$，換第四邊成 w。—— 所以若是在 $\mathfrak{K}_i$ 上取一點 O_i 做閉道的起點，而且在 $\mathfrak{K}_1\times\mathfrak{K}_2$ 上取 $O_1\times O_2$ 做閉道的起點，$\mathfrak{K}_i$ 上的道路類

*)〈設 w 相當于給定的 w_1 與 w_2，w' 相當于給定的 w_1' 與 w_2'，我們很容易看出，若 w_i' 與 w_i $(i=1,2)$ 相等，w 與 w' 雖不一定確定同一點集，但必能互相變狀。〉

$\{w_i\}$ 所成的一對 $(\{w_1\},\{w_2\})$ 恰與 $\mathfrak{K}_1\times\mathfrak{K}_2$ 上的道路類 $\{w\}$ 成一一對應。既然我們在求 $\mathfrak{K}_1\times\mathfrak{K}_2$ 上的兩個道路類 $\{w\}$ 與 $\{w'\}$ 的乘積的時候，可以先求 $\mathfrak{K}_i$ 上的對應的一對道路類 $\{w_i\}$, $\{w_i'\}$ 的乘積，所以 $\mathfrak{K}_1\times\mathfrak{K}_2$ 的基本羣是 $\mathfrak{K}_1$ 與 $\mathfrak{K}_2$ 的基本羣的直接乘積。

2. n 維的單純形與實數空間的基本羣都只含有么元，因為每一閉道零倫。

3. 同樣的，n 維球 $\mathfrak{S}^n(n>1)$ 的基本羣只含有么元。若是 $\mathfrak{S}^n$ 上的一條閉道 w 不通過他的起點 O 的徑點 O'，我們把 w 變狀成 O 如下：使 w 上的每一點 P 沿着通過 P, O, O' 的大圓 (*Hauptkreis*) 運動，一秒鐘後恰走到 O。若是 w 通過這徑點，我們只要取 $\mathfrak{S}^n$ 的一個單純剖分，使 O' 是一個 n 維單純形的一個中間點，O 是一個頂點，然後在這單純剖分中用換原底 $\bar{w}$ 成 w 的變換的單純逼近 (§ 31)，w 因此變狀成一條避開 O' 的，而且起點也是 O 的道路。這就把現在討論的情形化成已經討論過的情形。因為一條道路可能通過 $\mathfrak{S}^n$ 的每一點，所以證明中的單純逼近無法避免。

4. 一個複合形的基本羣若是只含有么元，這複合形就叫做單連通的 (*einfach zusammenhängend*) 複合形。這種複合形的特徵，就是他的每一閉道都能變狀成一點，或他的每一閉道中都能張開一個在他上面的元面片。因為這些面片必須在這複合形上，自然不必是拓撲的面片，而且，有時還必須是廣義的面片，如同有支點 (*Verzweigungspunkt*), 叠綫 (*Faltungslinie*), 交叉 (*Selbstdurchdringen*) 等情形出現。我們要問單連通這條件對于複合形究竟加上了如何嚴格的限制。若是我們現在只限于討論勻齊的複合形，這問題與拓撲學中的許多重要而未解決的問題有關係。對于一維的複合形，這問題很容易解答。因為勻齊的連通的一維複合形只有兩個：一個是有限的，是圓周(一維球)；一個是無限的，是實數直線。將來在 §47 中我們要求出所有的二維的有限的勻齊的複合形 (所有的閉曲面) 的基本羣，因而知道球面(二維球)是唯一的一個單連通的有限的勻齊的複合形。同樣的，實數平面是唯一的一個單連通的無窮的勻齊的複合形。[26] 三維的複合形中，三維球也許是唯一的一個單連通的有限的勻齊的複合形 (*Poincaré* 的猜想)。兩個球面的拓撲積是一個四維的勻齊的，有限的複合形；而且根據例 1，他是單連通的複合形。但是他的二維的 *Betti* 數 $p^2=2$,*) 而四維球面的 $p^2=0$, 所以這拓撲積與四維球不同胚。

§44 單純的複合形的棱道羣

連通的複合形的基本羣已經有了拓撲不變的定義。現在要計算基本羣，我們還同以前計算同調羣一樣，先取定複合形的一個單純剖分，

*) 我們可以證明兩個球面 $\mathfrak{K}_1$ 與 $\mathfrak{K}_2$ 的拓撲積的 *Betti* 數 $p^2\neq 0$ 如下：頁 220 上所說的變換 g_1 拓撲的換球面 $\mathfrak{K}_1\times P_2$ (P_2 是 $\mathfrak{K}_2$ 上的一個點) 成球面 $\mathfrak{K}_2$。若是單純的剖分了 $\mathfrak{K}_1\times P_2$，而且協合的給定了定向，這些單純形就組成 $\mathfrak{K}_1\times\mathfrak{K}_2$ 上的一個不零調的二維鍊 U^2。因為，若是 U^2 在 $\mathfrak{K}_1\times\mathfrak{K}_2$ 上零調，根據 §27 中的定理 *I*，他的像鍊 $'U^2=g_1(U^2)$ 也必定零調。但 $'U^2$ 是協合的定向的球面 $\mathfrak{K}_1$，斷然不能是 $\mathfrak{K}_1$ 上的零調鍊。

用這剖分來界說一個新羣，**棱道羣**（*Kantenwegegruppe*）。這棱道羣開初並沒有拓樸不變的下定義，但是容易計算。然後再用單純的逼近的方法，證明棱道羣與基本羣相同，因而證明棱道羣的拓樸不變性。

設 $\mathfrak{K}^n$ 是一個有限的或無窮的複合形，而且有了一個固定的單純剖分。設他的棱都有了定向，用 $a_1, a_2, \cdots$ 表示。我們現在只注意 $\mathfrak{K}^n$ 上的棱道，那就是說，只注意如下式的乘積

$$w = a_l^{\varepsilon_l}\ a_m^{\varepsilon_m} \cdots\ a_z^{\varepsilon_z} \qquad (\varepsilon_l = \pm 1, \varepsilon_m = \pm 1, \cdots, \varepsilon_z = \pm 1),$$

這裏的 $a_l^{\varepsilon_l}$ 的終點與 $a_m^{\varepsilon_m}$ 的起點相同，餘者類推。含有 0 個棱，因而只含有一個頂點的，也算作一條棱道。

我們就要界說棱道的組合的變狀。爲區別起見，現在把 §42 中所討論的道路與變狀，分別叫做綿續道路與綿續變狀。

若是從 $\mathfrak{K}^n$ 上的一個二維單純形 $\mathfrak{E}^2$ 的頂點起始，沿着 $\mathfrak{E}^2$ 的邊緣的一個確定的週向走，後來回到這頂點，我們就得着一條閉棱道，如同

$$a_1^{\varepsilon_1}\ a_2^{\varepsilon_2}\ a_3^{\varepsilon_3}。$$

這就叫做三邊形 $\mathfrak{E}^2$ 的一條**邊緣道**（*Randweg*）。因爲三邊形的任一頂點都可以取做起點，又因爲沿着邊緣走有兩個相反的週向，所以每一個三邊形有六條不同的邊緣道。

用下列組合的**元變狀**（α）與（β），可以把一條棱道變成新的棱道：

（α）接上或消去一條往返走過的棱。設棱道

$$a_l^{\varepsilon_l} \cdots a_p^{\varepsilon_p}\ a_Q^{\varepsilon_Q}\ a_Q^{-\varepsilon_Q}\ a_q^{\varepsilon_q} \cdots a_z^{\varepsilon_z}$$

中的 $a_Q^{\varepsilon_Q}$ 的起點與 $a_p^{\varepsilon_p}$ 的終點相同，因而也與 $a_q^{\varepsilon_q}$ 的起點相同。(α) 這變狀就是把這棱道與下列棱道

$$a_l^{\varepsilon_l}\cdots a_p^{\varepsilon_p}\ a_q^{\varepsilon_q}\cdots a_s^{\varepsilon_s}$$

互相替代。*) 繼續的應用 (α)，我們能在一棱道 $w=w_1\,w_2$ 中接上任一往返走過的棱道 u，只要 u 的起點與 w_1 的終點相同。所以我們可以從 w 得着棱道 $w'=w_1\,u\,u^{-1}\,w_2$。

(β) 接上或消去一個二維單純形的邊緣道。設 w 是給定的棱道。沿着 w 走到某一頂點，再從這頂點起始沿着一個二維單維形的邊緣道走，回到這頂點，然後再沿着 w 走完他的其餘部分。

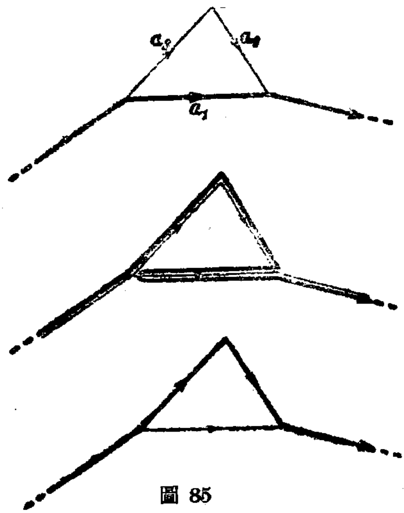


圖 85

我們能從這兩種組合的元變狀，得着第三種變狀：

(γ) 若是棱道 w 中的一條棱 $a_1^{\varepsilon_1}$ 屬于一個二維單純形的邊緣道 $a_1^{\varepsilon_1}a_2^{\varepsilon_2}a_3^{\varepsilon_3}$，就用 $(a_2^{\varepsilon_2}a_3^{\varepsilon_3})^{-1}$ 替代 $a_1^{\varepsilon_1}$，或用 $a_1^{\varepsilon_1}$ 替代 $a_3^{-\varepsilon_3}a_2^{-\varepsilon_2}$。變狀 ($\gamma$) 顯然可以由 ($\alpha$) 與 ($\beta$) 聯合而成（圖 85；其中 $\varepsilon_1=1,\ \varepsilon_2=-1,\ \varepsilon_3$

*) 若 w 是閉棱道，而且第一棱是末一棱的逆棱，如同

$$w=a_l^{\varepsilon_l}\cdots a_l^{-\varepsilon_l},$$

我們就不能消去 $a_l^{\varepsilon_l}$ 與 $a_l^{-\varepsilon_l}$。因爲組合的變狀不改變棱道的起點與終點。

$=-1)$。

若是能用有限次組合的元變狀，把一棱道 w 變狀成另一棱道 w'，這二棱道就說是能互相組合的變狀，或組合的同倫。他們的起點相同，終點也相同。

現在假設 $\mathfrak{K}^n$ 是連通的複合形。從一個固定的點 O 起始的閉棱道因此分成棱道類 (*Kantenwegeklass*)：同類的棱道組合的同倫，不同類的棱道不組合的同倫。棱道 w 所屬的類用 $[w]$ 表示。如同從前一樣，用 $[w_1\,w_2]$ 當作 $[w_1]$ 與 $[w_2]$ 的乘積。乘積不依賴于選取的代表 w_1 與 w_2。這種棱道類組成一羣 $\mathfrak{F}_k$，叫做 $\mathfrak{K}^n$ 的這單純剖分的棱道羣，因爲我們能證明羣的公設都滿足。若是不用 O，用另一頂點 O'，做閉道的起點，這棱道羣並不改變。

複合形 $\mathfrak{K}^n$ 的棱道羣 $\mathfrak{F}_k$ 與 $\mathfrak{K}^n$ 的基本羣 $\mathfrak{F}$ 相同。要證明這句話，我們先要注意每一個組合的變狀能由一個綿續的變狀實現；因爲三邊形的邊緣，或往返走過的棱道，都綿續的零倫，所以縮成一點之後就可以消去（頁 214）（變狀之後可以只是一個點，不剩下棱）。所以若是選定 $\mathfrak{K}^n$ 的單純剖分中同一個頂點 O 做 $\mathfrak{F}$ 中的綿續道與 $\mathfrak{F}_k$ 中的棱道的起點，每一個棱道類 $[w]$ 完全屬於 $\{w\}$ 這一個道路類。以下的證明與同調羣的不變性的證明相似。我們要證明的是下列兩點：

(*I*) 每一條從 O 起始的綿續道能綿續的變狀成一條棱道；每一個綿續道路類 $\{w\}$ 中，至少有一個棱道類 $[w]$。

(*II*) 若是一條從 O 起始的棱道在 $\mathfrak{K}^n$ 上綿續的零倫，他也就能組

合的變狀成 O;[27] 每一個綿續道路類 $\{w\}$ 中至多有一個棱道類 $[w]$。

證明了這兩點之後,我們就知道 $\mathfrak{F}$ 與 $\mathfrak{F}_k$ 間的這種對應是一一對應;而且,因爲 $\mathfrak{F}$ 的元的乘積能特別用棱道的乘積代表,這種對應也是同構對應。

我們將用 §31 中的變狀定理來證明 (I) 與 (II)。

(I) 設 w 是任一從 O 起始的閉道,他的原底是 $\bar{w}$,換 $\bar{w}$ 成 w 的變換是 g_0。根據變狀定理,g_0 能變狀成 $\bar{w}$ 的一個適當細密的剖分的一個單純變換 g_1。因爲若是每一像點起始屬於 $\mathfrak{K}^n$ 的某一個單純形,在變換變狀的時候,他始終不離開這單純形,所以 $\bar{w}$ 的起點與終點都變狀成同一個點 O。所以由 $w=g_0(\bar{w})$ 變狀而成的道路 $g_1(\bar{w})$ 或者是 O 這個點,或者是 $\mathfrak{K}^n$ 上的一條棱道,但其中可以夾有某些點道 (*Punktweg* {不含有棱;只是一個點})。點道旣可以消去 (頁 214),w 也就能變狀成一條棱道。

(II) 設一閉棱道 w 能綿續的變狀成起點 O 這一個點;那就是說,有一個綿續變換存在,換變狀矩形 $\bar{P}\bar{P}_0\bar{Q}_0\bar{Q}$ 到 $\mathfrak{K}^n$,換邊 $\bar{P}\bar{Q}=\bar{w}$ 成 w,換其餘的邊成 O (圖 86)。我們用 w 的子線段的頂點的原底把 $\bar{w}$ 分成子線段,再經過這些分點 (*Teilpunkt*) 作垂直線,把矩形分成小矩形。因爲勻綿續的定理 (頁 41),我們能再作垂直線與水平線,把小矩形分開成更小的矩形,使每一個頂點處的四個更小的矩形的像集完全屬于 $\mathfrak{K}^n$ 的一個單純的

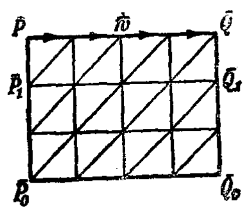


圖 86

星形的內域。然後用對角線剖分這些更小的矩形，成一個單純的複合形 $\overline{\mathfrak{K}}^2$。根據變狀定理，這換 $\overline{\mathfrak{K}}^2$ 到 $\mathfrak{K}^n$ 的變換 g_0 能變狀成一個單純的變換 g_1。設 $\dot{\bar{w}}$ 表示重分了的矩形的邊 $\overline{w}$。$g_0(\dot{\bar{w}})$ 就是重分了的棱道 w。g_0 把 $\overline{P}\overline{P}_0$, $\overline{P}_0\overline{Q}_0$, $\overline{Q}_0\overline{Q}$ 這三邊都換成 O 這個零維單純形。因爲若是每一像點起始屬於 $\mathfrak{K}^n$ 的某一個單純形，在變換變狀的時候，他始終不離開這個單純形，所以在 g_0 變狀成 g_1 的時候，$\overline{P}\overline{P}_0\overline{Q}_0\overline{Q}$ 這道路的每一子線段的像總是 O 這一個點。因爲同樣的理由，$g_0(\dot{\bar{w}})$ 的一個分點若是在 $\mathfrak{K}^n$ 的一個頂點上，他在變換變狀的時候並不移動。若是一個分點是 w 的棱 a 的中間點，他就變狀成 a 的一個頂點，所以由 $g_0(\dot{\bar{w}})$ 變狀而成的道路 $g_1(\dot{\bar{w}})$ 的棱與 w 的棱完全相同（除去若干能消去的夾在棱道中間的點道）。不過在通常的情形下，有些棱在 $g_1(\dot{\bar{w}})$ 中往返出現的次數更多，所以經過若干次組合的變狀 (α) 之後，w 就變狀成 $g_1(\dot{\bar{w}})$。

我們現在能在 $\overline{\mathfrak{K}}^2$ 上把 $\dot{\bar{w}}$ 組合的變狀成 $\overline{P}\overline{P}_0\overline{Q}_0\overline{Q}$ 如下：先把 $\dot{\bar{w}}$ 中的每一個子線段用與他關聯的這三邊形的另二邊替代，我們就得着一條由 $\overline{P}$ 到 $\overline{Q}$ 的折線道 (*Streckenzug*)，由垂直線段與對角線段互相間隔的組成。把這折線道中的每一條對角線段，用與他關聯的，在他下面的這三邊形的另二邊替代，而且把往返走過的垂直線段消去。這樣我們就得着一條折線道 $\overline{P}\overline{P}_1\overline{Q}_1\overline{Q}$。我們再用同樣的方法變狀 $\overline{P}_1\overline{Q}_1$，最後得着 $\overline{P}\overline{P}_0\overline{Q}_0\overline{Q}$。因爲單純的變換 g_1，$\dot{\bar{w}}$ 的一個組合的變狀確定 $g_1(\dot{\bar{w}})$ 的一個組合的變狀，而且後者可以是么變狀。其實，若 $\dot{\bar{w}}$ 的一個

組合的變狀 (β) 是對於 $\overline{\mathfrak{K}}^2$ 上的一個三邊形 $\mathfrak{E}^2$ 說的,按照 $\mathfrak{E}^2$ 變換成 $\mathfrak{K}^n$ 上的一個三邊形,一條棱,或一個頂點,$g_1(\dot{w})$ 的這組合的變狀就是 (β), (α),或么變狀。若 $\dot{w}$ 的一個組合的變狀 (α) 是對於 $\overline{\mathfrak{K}}^2$ 的一條線段 $\mathfrak{E}^1$ 說的,按照 $\mathfrak{E}^1$ 變換成 $\mathfrak{K}^n$ 上的一條棱或一個頂點,$g_1(\dot{w})$ 的這組合的變狀就是 (α) 或么變狀。

既然 w 能够組合的變狀成 $g_1(\dot{w})$,而且 $\dot{w}$ 又能够組合的變狀成道路 $\bar{P}\bar{P}_0\bar{Q}_0\bar{Q}$,所以 w 能組合的變狀成 $\bar{P}\bar{P}_0\bar{Q}_0\bar{Q}$ 的像道。這像道就是 O 這一個點,所以 w 是組合的零倫。

這就證明了不變的界說了的基本羣 $\mathfrak{F}$ 與組合的界說了的棱道羣 $\mathfrak{F}_k$ 相同。此後這兩個羣都用同一個字母表示。

因此,**若是把一個複合形 $\mathfrak{K}^n$ 的所有的比二維還高的單純形的中間點都消去,$\mathfrak{K}^n$ 的基本羣並不改變。** 因為棱道羣能只由零維的,一維的,與二維的單純形所組成的子複合形確定。這子複合形叫做 $\mathfrak{K}^n$ 的這單純剖分的二維的"間架複合形 (*Gerüstkomplex*)"。

§45 面複合形的棱道羣

我們現在的問題是要用母元與關係,表出一個給定的複合形 $\mathfrak{K}^n$ 的基本羣。因為 § 44 中的結果,我們只要討論二維的單純複合形,只要能用母元與關係表出他們的棱道羣。下一節中我們就要說明一個方法,應用這方法我們總能解決我們的問題。若是應用這方法到單純的複合形,我們得着的棱道羣中的關係通常總是過多,而且不顯明。所以我

們用此法求得棱道羣的時候，還須要消去額外的母元，使所得關係變簡單。但是我們能直接用由多邊形組成的**面複合形**（*Flächenkomplex*），不用單純的複合形，就能得着比較簡單的關係。—— 以前討論的是任意複合形。爲簡單起見，我們此後只討論**有限的複合形**。

有限條線段，他們的某些邊緣點疊合之後，組成一個**棱複合形**。根據這定義，同一線段的兩個邊緣點也可以疊合。一線段在棱複合形中的像，還叫做棱。例如閉曲面的法式的棱，或立方形的棱，都組成棱複合形。

按照 §10 的定義，棱複合形也是一個複合形。因爲棱複合形能剖分成一個一維的單純的複合形。

原底的定向確定棱的定向。任意的定了向的棱用 a_ν 表示，相反定向的棱用 a_ν^{-1} 表示。他們都可以看作是棱複合形上的特殊道路。

道路 a_ν 與他們的逆道路 a_ν^{-1} 組成如下式的"棱道"：

$$a_l^{\varepsilon_l}\ a_m^{\varepsilon_m}\cdots a_z^{\varepsilon_z} \qquad (\varepsilon_\nu=\pm 1),$$

其中每一棱的終點必須與後一棱的起點相同。

在一個棱複合形的某些閉棱道中"張開"面片，我們就得着一個**面複合形**。設

$$w=a_l^{\varepsilon_l}\ a_m^{\varepsilon_m}\cdots a_s^{\varepsilon_s}$$

是一條閉棱道，而且至少含有一條棱。取一個半徑等於 1 的圓域，他的邊緣圓周上的點用一個參數表示，例如弧長 s: $0\leqq s<2\pi$。閉道 w

上的點也同樣的用這個綫節 (*Intervall*) 中的參數 s 表示。疊合邊緣圓周上與閉道上的參數等值的點。如此得着的鄰域空間，我們就說是在這棱複合形的閉道 w 中**張開了一個面片**（圓域的像）而成的面複合形。w，或 w^{-1}，或他們的棱的別個循環次序都是這面片的**邊緣道**。我們要注意的是，w 不一定無重點。例如 w 可以是 aa^{-1}。面複合形是由在一個棱複合形中張開有限個面片而成的。一個棱複合形，也可以看作是張開了零個面片的面複合形。

如同單純複合形的棱道羣一樣，我們也能界說一個面複合形的**棱道羣**。取定一點 O 做閉棱道的起點。從 O 起始的閉棱道分成棱道類；這種的兩條閉棱道若是能互相組合的變狀，就說是屬於同一類。組合的變狀的定義也與單純複合形上的 (§44) 相似。因爲我們現在用多邊形替代三邊形，我們只要修改(β)。

(α) 接上或消去一個往返走過的棱；

(β) 接上或消去一個面片的邊緣道。設單獨一條棱 a 是一個面片的邊緣道。若是這種的棱 a 在一條道路中出現，就能消去（圖 87）。

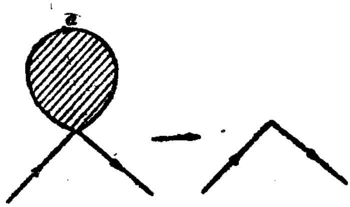


圖 87

任意兩個棱道類的乘積的界說如同從前一樣。棱道類就是面複合形 $\mathfrak{K}$ 的棱道羣 $\mathfrak{F}_k$ 的元。

我們現在要證明 $\mathfrak{K}$ 的棱道羣 $\mathfrak{F}_k$ 與基本羣 $\mathfrak{F}$ 相同。若是面複合形 $\mathfrak{K}$ 已經單純的剖分了，他就是一個單純複合形 $\mathfrak{K}^2$ 或 $\mathfrak{K}^1$。我們在

§44 中已經證明了這專款的 $\mathfrak{F}_k$ 與 $\mathfrak{F}$ 相同。我們現在要利用這專款去證明通款（$\mathfrak{K}$ 是任意一個面複合形）。我們用若干次重分，把 $\mathfrak{K}$ 剖分成一個單純的複合形，再證明每一次重分都不改變棱道羣。

重分可區分爲兩種：

(U^1) 一條棱的重分：用面複合形 $\mathfrak{K}$ 的一條棱的一個中間點作新頂點，把一條棱分成兩條子棱。

(U^2) 一個面片的重分：用一條弦把這面片的原底（歐幾里得的圓域）分成兩個弓形；這弦的頂點必須是棱複合形上的頂點，這弦的像是一條新棱，這兩個弓形的像是兩個新面片。

面複合形重分一次之後，還是一個面複合形。我們能繼續重分，把每一個面複合形剖分成一個單純複合形。例如先把面片都分成三邊形，然後再作兩次法重分。

設 $\mathfrak{K}$ 經過一次重分 (U^1) 或 (U^2) 之後，我們得着的面複合形是 $\dot{\mathfrak{K}}$。我們要想證明 $\mathfrak{K}$ 與 $\dot{\mathfrak{K}}$ 的基本羣相同，就只要證明下列兩點：

1. $\dot{\mathfrak{K}}$ 的一條從 O 起始的閉棱道 $\dot{w}$ 能在 $\dot{\mathfrak{K}}$ 上組合的變狀成 $\mathfrak{K}$ 上的一條棱道。

2. 若是 $\mathfrak{K}$ 的一條從 O 起始的閉棱道 w 在 $\dot{\mathfrak{K}}$ 上組合的零倫，他在 $\mathfrak{K}$ 上也組合的零倫。

證明 1. 設用一個點 T 把 $\mathfrak{K}$ 的一條棱 a 分成兩條子棱 b 與 c，因而 $\mathfrak{K}$ 變成 $\dot{\mathfrak{K}}$。若把乘積 bc 當作道路，他就與 a 相等（圖 88）。a 的終點 Q 與起點 P 也可以相同。若是 $\dot{\mathfrak{K}}$ 的一條棱道 $\dot{w}$ 中有 $bb^{-1}, cc^{-1}, b^{-1}b$

或 $c^{-1}c$ 出現，我們都可以用組合的變狀 (α) 把他消去，我們繼續的應用 (α) 使 w 中無 $b^{\pm 1}$, $c^{\pm 1}$，或至多只有 $bc\ (=a)$, $c^{-1}b^{-1}\ (=a^{-1})$ 出現。因此 $\dot{w}$ 能組合的變狀成 $\mathfrak{K}$ 的一條道路。——設用一新棱 d，把一個面片 Π 分成兩個新面片 P 與 Σ，因而 $\mathfrak{K}$ 變成 $\dot{\mathfrak{K}}$ (圖 89)。設 P 與 Σ 的邊緣道分別是 $d\,u^{-1}$ 與 $d\,v^{-1}$。若是 $\dot{\mathfrak{K}}$ 的棱道 $\dot{w}$ 中有 $d^{\pm 1}$ 出現，我們能應用組合的變狀 (α) 與 (β)，用 $v^{\pm 1}$ 替代 $d^{\pm 1}$，因此 $\dot{w}$ 能組合的變狀成 $\mathfrak{K}$ 的一條道路 w。

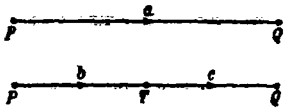


圖 88

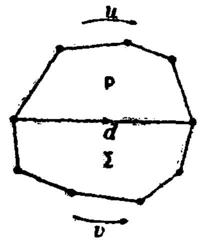


圖 89

證明 2. 設 $\mathfrak{K}$ 上的棱道 w 在 $\dot{\mathfrak{K}}$ 上經過 $i\ (1 \leqq i \leqq r)$ 次組合的變狀，變狀成下列棱道的第 i 條

$$\dot{w}_1,\quad \dot{w}_2, \cdots,\quad \dot{w}_r = O。$$

這都是 $\dot{\mathfrak{K}}$ 上的棱道，但不必同時也是 $\mathfrak{K}$ 上的棱道。我們現在要確定一個規律，按照這規律取定 $\mathfrak{K}$ 上的一條棱道 w_i 與 $\dot{w}_i$ 對應，使

$$w = w_0,\ w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_r$$

這一列棱道中的每一棱道能在 $\mathfrak{K}$ 上組合的變狀成下一棱道，並且 $w_r = O$。若能如此，我們就證明了 w 在 $\mathfrak{K}$ 上能組合的變狀成 O。

在重分一棱 a，把 $\mathfrak{K}$ 變成 $\dot{\mathfrak{K}}$ 的時候，這對應規律可以規定如下：除 b 與 c 之外，$\dot{\mathfrak{K}}$ 上的每一棱與把他看作在 $\mathfrak{K}$ 上的時候的棱對應；棱 $b^{\pm 1}$ 與棱 $a^{\pm 1}$ 對應，棱 $c^{\pm 1}$ 與點 Q 對應。所以與棱道 $\dot{w}_i$ 對應的棱道 w_i 顯然的是 $\mathfrak{K}$ 上的從 O 起始的閉道。——若是應用到非 b 與 c 的棱

上的一個組合的變狀 (α) 或 (β)，把 $\dot{w}_i$ 變成 $\dot{w}_{i+1}$，同一個變狀也就把 w_i 變成 w_{i+1}。若是應用到 b 或 c 上的一個變狀 (α)，把 $\dot{w}_i$ 變成 $\dot{w}_{i+1}$，應用到 a 上的一個變狀 (α) 也就把 w_i 變形成 w_{i+1}，或者 $w_i = w_{i+1}$。——若是重分一個面片把 $\mathfrak{K}$ 變成 $\dot{\mathfrak{K}}$，我們就用下述的對應：除 d 之外，$\dot{\mathfrak{K}}$ 上的每一棱與把他看作在 $\mathfrak{K}$ 上的時候的棱對應，棱 d 與道路 v 對應。所以在 $\dot{\mathfrak{K}}$ 上接上或消去 $d\,d^{-1}$ 相當于在 $\mathfrak{K}$ 上接上或消去 $v\,v^{-1}$，而後者可以由變狀(α)實現；而且應用到多邊形 P 與 Σ 上的變狀(β)，相當于由 $\mathfrak{K}$ 上變狀 (β) 與 (α) 實現的一個組合的變狀。這就證明了重分不改變棱道羣 $\mathfrak{F}_k$，也就證明了 $\mathfrak{F}_k$ 與基本羣相同。

§46 母元與關係

我們還用 $a_1, a_2, \cdots, a_{\alpha^1}$ 表示面複合形 $\mathfrak{K}$ 上的定向棱，用 O 表示閉棱道的起點。要想求得一組母元，我們由 O 到 $\mathfrak{K}$ 的每一個頂點連接一條固定的棱道，叫做**輔助道路** (*Hilfsweg*)。屬于 O 的輔助道路就只是 O 這一個點。然後相當于每一定向棱 a_i，恰有一條從 O 點起始的閉道 A_i：A_i 從 O 起始，沿着輔助道路到 a_i 的起點，再沿着 a_i 到 a_i 的終點，然後沿着這終點的逆輔助道路回到 O。A_i 是一條確定的棱道

$$A_i = \varphi_i(a_\nu), \tag{A}$$

屬於一個確定的棱道類。這棱道類此後還用 A_i 表示，**不加方括弧**。所有的棱道類 $A_1, A_2, \cdots, A_{\alpha_1}$ 不必都不相同。

這些棱道類恰組成面複合形 $\mathfrak{K}$ 的棱道羣的一組母元；每一條從 O

起始的閉棱道 w 能組合的變狀成棱道 A_i 的乘積。若

$$w = F(a_i) = a_l^{\varepsilon_l}\, a_m^{\varepsilon_m} \cdots a_z^{\varepsilon_z}$$

是這種的一條棱道，我們只要用 (α) 這一種變狀，就能把 w 組合的變狀成棱道

$$W = F(A_i) = A_l^{\varepsilon_l}\, A_m^{\varepsilon_m} \cdots A_z^{\varepsilon_z}。$$

因為在 w 的鄰接的每二棱中間，接上一條往返走過的輔助道路，w 就變成 W。

現在再討論關係。 $R(A_i)=1$ 是一個關係的意義，就是說棱道類 $R(A_i)$ 在棱道羣中是么元，也就是說棱道 $R(A_i)$ 能組合的變狀成頂點 O。

我們總能求得有限個關係，使所有的關係都能從他們推出。 他們可分為兩種：—

(I) 若是方程式 (A) 中的棱 a_ν 用他的閉棱道 A_ν 替代，即有

$$A_i = \varphi_i(A_\nu)。 \tag{I}$$

這確是一個關係；因為右端消去往返走過的棱道，就變成左端。所以 (有限的) 複合形上有多少棱，就有多少 (I) 這一種的關係。

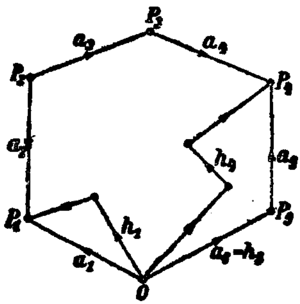


圖 90

圖 90 表明一個例子。圖中的棱可以看作在任一複合形上。設棱道 $h_2 = a_1\, a_2^{-1}$ 選作從 O 到 P_2 的輔助道路，棱道 $h_3 = a_6\, a_5\, a_4^{-1}$ 選作到 P_3 的輔助道路；屬於 O 的輔助道路只是 O 這一點，叫做 h_0；屬於 $P_1, P_4,$

P_5 的輔助道路圖中都表明了。例如棱道

$$A_3 = h_2 a_3 h_3^{-1} = a_1 a_2^{-1} \cdot a_3 \cdot a_4 a_5^{-1} a_6^{-1} = \varphi_3(a_\gamma);$$

棱道

$$\varphi_3(A_\gamma) = (h_0 a_1 h_1^{-1})(h_1 a_2^{-1} h_2^{-1}) \cdot h_2 a_3 h_3^{-1} \cdot (h_3 a_4 h_4^{-1})(h_4 a_5^{-1} h_5^{-1})(h_5 a_6^{-1} h_0)。$$

這裏的棱道 h_γ 代表其中個別的棱的乘積。只要用變狀(α)，我們就能把這二棱道中的一條，組合的變狀成另一條，所以棱道類 $\varphi_3(A_\gamma)$ 與 A_3 相同。

(*II*) 若是 $a_l^{\varepsilon_l} a_m^{\varepsilon_m} \cdots a_z^{\varepsilon_z}$ 是一個面片 Π 的邊緣道，$A_l^{\varepsilon_l} A_m^{\varepsilon_m} \cdots A_z^{\varepsilon_z}$ 這棱道就能組合的變狀成 O，所以

$$A_l^{\varepsilon_l} A_m^{\varepsilon_m} \cdots A_z^{\varepsilon_z} = 1 \qquad (II)$$

確是一個關係。因爲這棱道能先變狀成下述的棱道：從 O 沿着輔助道路 h 到 $a_l^{\varepsilon_l}$ 的起點，再沿着 Π 的邊緣道，最後沿着這輔助道路的逆道路回到 O。這變狀只是用若干次變狀 (α)，把 Π 的其餘的頂點處往返走過的輔助道路消去。再應用變狀 (β) 到面片 Π 上就得着道路 hh^{-1}；再經過若干次變狀 (α)，這道路就組合的變狀成 O。

在 Π 是一個三邊形的時候，圖 91 表明這變狀的步驟。這裏的 $\varepsilon_l = \varepsilon_z = 1, \varepsilon_m = -1$，道路 $A_l A_m^{-1} A_z$ 變狀成點 O。

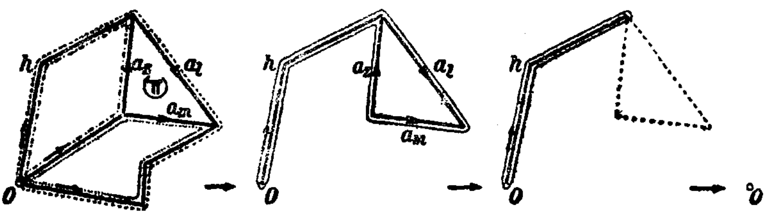


圖 91

所以 $\Re$ 上有多少個多邊形，就有多少 (*II*) 這一種的關係。

關係 (I) 與 (II) 組成面複合形 $\mathfrak{K}$ 的棱道羣的一組界說關係；那就是說，應用關係 (I), (II) 與顯明的關係 $A_iA_i^{-1} = A_i^{-1}A_i = 1$，任一關係 $R(A_i) = 1$ 的左端都能化成 1。

證明： $R(A_i) = 1$ 的意義就是說棱道 $R(\varphi_i(a_\nu))$ 組合的零倫。把 $R(\varphi_i(a_\nu))$ 叫做 $w_0(a_\nu)$。所以有一列有如次性質的棱道

$$w_0(a_\nu),\ w_1(a_\nu),\ \cdots,\ w_m(a_\nu)$$

存在：其中 $w_{j-1}(a_\nu)$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$ 經過一個變狀 (α) 或 (β) 化成 $w_j(a_\nu)$, $w_m(a_\nu)$ 不含有因子。現在應用關係 (I)，把給定的關係的左端 $R(A_i)$ 化成 $R(\varphi_i(A_\nu)) = w_0(A_\nu)$。我們也寫下

$$w_0(A_\nu),\ w_1(A_\nu),\ \cdots,\ w_m(A_\nu) \equiv 1。$$

若是變狀(α)把 $w_{j-1}(a_\nu)$ 化成 $w_j(a_\nu)$，顯明的關係 $A_\nu A_\nu^{-1}=1$ 或 $A_\nu^{-1}A_\nu = 1$ 就也把 $w_{j-1}(A_\nu)$ 化成 $w_j(A_\nu)$。若是 $\mathfrak{K}$ 的一個多邊形 Π 上的變狀 (β) 把 $w_{j-1}(a_\nu)$ 化成 $w_j(a_\nu)$，屬于 Π 的關係 (II) 也把 $w_{j-1}(A_\nu)$化成 $w_j(A_\nu)$。所以應用關係 (I), (II) 與顯明的關係，我們能把 $R(A_i)$ 依次化成 $w_0(A_\nu)$, $w_1(A_\nu)$, $\cdots$, $w_m(A_\nu)$，而末一個是不含有因子的乘積。

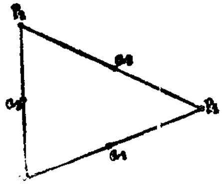


圖 92

圖 92 中的一維單純複合形是由三邊形的三邊組成，也就是一維球或圓周的一個單純剖分。起點 O 是三邊形的一個頂點，屬于頂點 P_1 與 P_2 的輔助道路分別是 $h_1 = a_1$, $h_2 = a_3^{-1}$。h_0 只是 O 這個點。

棱道是：

$$A_1 = h_0\, a_1\, h_1^{-1} = a_1\, a_1^{-1} = \varphi_1(a_\nu),$$

$$A_2 = h_1 a_2 h_2^{-1} = a_1 a_2 a_3 = \varphi_2(a_\nu),$$

$$A_3 = h_2 a_3 h_0^{-1} = a_3^{-1} a_3 = \varphi_3(a_\nu)。$$

關係是:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A_1 \ A_1^{-1} = 1 \\ A_2 &= A_1 \ A_2 \ A_3 \\ A_3 &= A_3^{-1} \ A_3 = 1 \end{aligned}\right\} \text{(I)；無關係 (II)。}$$

所以只有一個母元 A_2，而且所有的關係都是顯明的關係。所以圓周的基本群是一個自由循環群。道路類的代表閉道就是圓周的一個定向的整數倍。

同樣的，平環，環體 (*Vollring*)，或更普遍的說，圓周與 n 維元體的拓撲積的基本群都是自由循環群。因爲他是圓周的基本羣與 n 維元體的基本羣的直接乘積 (§ 43,1.)，而後者只是一個么元(§ 43,2.)。

若是在這三邊形中張開一個面片，我們就有一個屬於 (*II*) 種的關係

$$A_1 \ A_2 \ A_3 = 1, \tag{II}$$

因此 $A_2 = 1$。這與上文說的 n 維元體的基本羣只是一個么元的事實相符合。

習題：設 r 是 $\mathfrak{R}^3$ 中的旋轉環面。試證 $\mathfrak{R}^3$ 中沒有一個拓撲的自身變換，換 r 成 r，而且交換 r 的經緯圓。[把經緯圓看作是以 r 做邊緣的環體的基本羣的元]

§47 棱複合形與閉曲面

我們現在應用前節中的方法，求棱複合形與閉曲面的基本羣。

設 $a_1, a_2, \cdots, a_{\alpha^1}$ 是一個棱複合形 $\mathfrak{K}^1$ 的棱。我們先討論下列最簡單的專款：$\mathfrak{K}^1$ 只有一個頂點。因爲所有的 a_i 都是閉道，輔助道路都沒有了，所以代表基本羣的母元 A_i (道路類的閉道) 與 a_i 相同。(*I*) 種的關係就是顯明的關係 $A_i = A_i$，而 (*II*) 種的關係都不存在。所以這基本羣是有

$$\alpha^1 = N + 1 = -\alpha^0 + \alpha^1 + 1$$

個母元的自由羣。這裏的 α^0 與 α^1 分別是棱複合形的頂點的個數與棱的個數，$N=-\alpha^0+\alpha^1$ 是 *Euler* 示性數。我們也能用下述的看法得着這些結果：因爲每一棱道是閉道 $a_i=A_i$ 的乘積，道路類 A_i 就是基本羣的母元；而且只在道路 $\prod_i A_i^{\varepsilon_i}$ 能應用變狀 (α) 變成 O 的時候，那就是說，只在羣元 $\prod_i A_i^{\varepsilon_i}$ 能應用顯明的關係 $A_i A_i^{-1}=1$ 與 $A_i^{-1}A_i=1$ 化成 1 的時候，$\prod_i A_i^{\varepsilon_i}$ 這乘積纔等於基本羣的么元。

若是棱複合形 $\mathfrak{K}^1$ 的頂點不只一個，基本羣的求法還能化成前述的簡單專款的求法。現在 $\mathfrak{K}^1$ 上有一棱 a_1，他的起點 P 與終點 Q 不同。若 h 是到 P 的輔助道路，我們就取定 ha_1 做到 Q 的輔助道路。屬于 a_1 的閉道 A_1 所以是 $h\cdot a_1\cdot(ha_1)^{-1}$，所以屬於 a_1 的關係是 $A_1=1$。若是其餘的

$$A_i=\varphi_i(a_\nu),\qquad (i=2,3,\cdots,\alpha^1;\ \nu=1,2,\cdots,\alpha^1),$$

他們的相當的關係就是

$$A_i=\varphi_i(A_\nu)。$$

根據關係 $A_1=1$，我們得着

$$A_i=\psi_i(A_\mu)\qquad (i,\mu=2,3,\cdots,\alpha^1)\quad (I)$$

這一組關係，其中 $\psi_i(a_\mu)$ 是從 $\varphi_i(a_\nu)$ 中消去所有的 a_1 而成的道路乘積。設把 $\mathfrak{K}^1$ 中的棱 a_1 消去，再疊合頂點 P 與 Q 之後，或者換個說法，把 $\mathfrak{K}^1$ 中的 a_1 縮成一個點之後，我們得着的棱複合形是 $\mathfrak{K}_1^1$。(I) 也就是 $\mathfrak{K}_1^1$ 上的一組輔助道路，而且屬於 $\mathfrak{K}_1^1$ 的棱的閉道 A_i' 恰是閉道

$A'_i = \psi_i(a_\mu)$。所以 $\mathfrak{K}^1_1$ 的基本羣的關係是

$$A'_i = \psi_i(A'_\mu),$$

也就是 (I)。所以 $\mathfrak{K}^1$ 與 $\mathfrak{K}^1_1$ 有相同的基本羣。

若是 $\mathfrak{K}^1_1$ 的頂點還不只一個,我們再應用這方法。假設這方法應用了 s 次之後,我們得着的複合形 $\mathfrak{K}^1_s$ 只有一個頂點。所有的複合形 $\mathfrak{K}^1, \mathfrak{K}^1_1, \cdots, \mathfrak{K}^1_s$ 的示性數 $N = -\alpha^0 + \alpha^1$ 都相等,而且 $\mathfrak{K}^1_s$ 的基本羣已經證明過是有 $N+1$ 個母元的自由羣。所以我們得着下述的結果:**若是 N 是棱複合形 $\mathfrak{K}^1$ 的 *Euler* 示性數 $-\alpha^0+\alpha^1$, $\mathfrak{K}^1$ 的基本羣就是 $N+1$ 個母元的自由羣**。

疊合基本多邊形的相抵邊而成的閉曲面(§38),是面複合形的特例。例如能定向的環面,由一頂點 O, 兩條棱 a 與 b (經緯圓),與在棱道 $aba^{-1}b^{-1}$ 中張開的一個面片而成。基本羣的母元相當于棱 a 與 b; 設用 A 與 B 表示。因爲只有一個頂點,因此無輔助道路,所以 (I) 種的關係是 $A = A$ 與 $B = B$ 這種關係。現在只有一個面片,所以只有一個 (II) 種的關係:

$$A B A^{-1} B^{-1} = 1,$$

表明這面片的邊緣道在這面複合形上零倫。這關係說母元 A 與 B 能對易。**能定向的環面的基本羣所以是有兩個母元的自由 *Abel* 羣**。

我們能同樣的討論其餘的基本多邊形,得着下述定理:

定理: 虧格 h 的能定向的閉曲面(有 h 個環柄的球面, $h = 0, 1, 2, \cdots$) 的基本羣有一組 $N+2 = 2h$ 個母元 A_i, B_i $(i = 1, 2, \cdots, h)$

與一個界說關係

$$A_1\,B_1\,A_1^{-1}\,B_1^{-1}\cdots A_h\,B_h\,A_h^{-1}\,B_h^{-1}=1。$$

虧格 k **的不能定向的閉曲面的基本羣（有** k **個交叉帽的球面，**$k=1,2,\cdots$**）有一組** $N+2=k$ **個母元** $A_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ **與一個界說關係**

$$A_1^2\,A_2^2\cdots A_k^2=1。$$

球面 $(h=0)$ 的基本羣只含有么元，投影平面 $(k=1)$ 的基本羣的級等於 2。 除去這兩種曲面的基本羣之外，能定向的閉曲面的基本羣的 *Betti* 數（頁 435）是 $N+2=2h>0$，不能定向的閉曲面的基本羣的 *Betti* 數是 $N+1=k-1>0$，所以他們都是無窮羣。

習題 1. 試求有邊緣的曲面的基本羣。

2. 根據 §38 中的習題 1，證明有下列一個關係

$$A_1\,B_1\,A_1^{-1}\,B_1^{-1}\cdots A_h\,B_h\,A_h^{-1}\,B_h^{-1}=1$$

的羣與有下列一個關係

$$C_1C_2\cdots C_{2h}C_1^{-1}\,C_2^{-1}\cdots C_{2h}^{-1}=1$$

的羣一一同構。

§48 基 本 羣 與 同 調 羣

複合形 $\mathfrak{K}^n$ 上的一條道路 w 是原底平直一維單純形 $\bar{w}$ 的綿續像。所以 w 同時也是一個定向的廣義的單純形，因此也代表一個廣義的一維鍊。若是我們用 w 的另一個原底 $\bar{w}'$ 替代 $\bar{w}$，我們同樣的得着一個廣義的單純形 w'。w 與 w' 這二道路雖然相等，w 與 w' 這二廣義的單純形通常却不相等。因爲根據道路相等的定義，原底可以互相拓撲的

變換，而根據廣義的單純形相等的定義，原底只可以互相平直的變換。但是我們能證明，這兩個可以不相等的單純形却代表兩個同調鍊如下：因爲道路的相等，$\bar{w}$ 與 $\bar{w}'$ 間有一個同向的拓樸變換，換 $\bar{w}$ 成 $\bar{w}'$，使拓樸對應的點在 $\mathfrak{R}^n$ 上有同一像點。因此 $\bar{w}$ 換成 $\bar{w}'$ 上的一個定向的廣義的單純形 $\bar{w}_1$，而且 $\bar{w}_1$ 的邊緣與 $\bar{w}'$ 的相同。因爲一線段上的每一個閉一維鍊零調，所以在 $\bar{w}'$ 上 $\bar{w}' - \bar{w}_1 \sim 0$。因爲這換線段 $\bar{w}'$ 成 w 的變換，換 $\bar{w}_1$ 成 w，換 $\bar{w}'$ 成 w'，而且不改變同調式（頁 137），所以在 w 上有 $w \sim w'$。**所以給定了一條道路 w，就有一個確定的廣義鍊 w' 與他對應；雖然因爲 w 的原底選取的不同，對應的一維廣義鍊可以不同，但是都屬於同一個確定的同調類。** 因此我們此後說若干道路互相同調，也有確定的意義。屬於一條閉道的廣義鍊也是閉的。

定理 I：與兩條道路的乘積 $w = w_1w_2$ 對應的鍊，是這兩條道路的對應鍊的和即 $w \sim w_1 + w_2$。

證明： w_1w_2 的原底是由兩條子線段 $\bar{w}_1$ 與 $\bar{w}_2$ 聯接成的線段 $\bar{w}$。所以在 $\bar{w}$ 上，$\bar{w}_1 + \bar{w}_2 \sim \bar{w}$。這些線段在 $\mathfrak{R}^n$ 上的像依舊適合這同調式。

定理 II：兩個同倫的道路 w_0 與 w_1 也同調（但反定理不成立）。

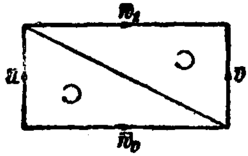


圖 93

證明： 設在 w_0 變狀成 w_1 的時候，所用的變狀矩形的四邊是 $\bar{w}_0$, $\bar{w}_1$, $\bar{u}$, $\bar{v}$（圖 93）。在這矩形上，同調式

$$\bar{w}_1 - \bar{w}_0 + \bar{u} - \bar{v} \sim 0$$

成立。經過變換後就有

$$w_1 - w_0 + u - v \sim 0。$$

因爲 $\bar{u}$ 與 $\bar{v}$ 變狀成點，u 與 v 都是降秩的廣義的單純形（頁131），所以 $w_1 - w_0 \sim 0$。——雙環面的腰線（*Taillenschnitt*）l 只零調，但不零倫（頁244）；這就表明同調的道路不一定也同倫。

在一個連通的複合形 $\mathfrak{K}^n$ 上，每一道路類恰有一個同調類與他對應，而且與兩個道路類的乘積對應的，是與他們對應的同調類的和。所以有一個換 $\mathfrak{F}$ 到 $\mathfrak{H}^1$ 的同構變換 χ。要想進一步研究這同構變換的性質，我們只需要考慮 $\mathfrak{K}^n$ 的一個單純剖分中的棱道與單純鍊。取一個頂點 O 做閉道的起點。因爲任一閉的一維單純鍊能接上一條往返走過的棱道，做成一條從 O 起始的棱道，所以每一個同調類至少與一道路類對應，那就是說 χ 是一個換 $\mathfrak{F}$ 成 $\mathfrak{H}^1$ 的同構變換。這同構變換必定把 $\mathfrak{F}$ 的一個法子羣（*Normalteiler*）$\mathfrak{N}$ 換成 $\mathfrak{H}^1$ 的零元。若是我們知道了 $\mathfrak{N}$，這同構變換就確定了。我們說：$\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{F}$ 的換位羣（*Kommutatorgruppe*）。

證明： 因爲 $\mathfrak{H}^1$ 是 *Abel* 羣，$\mathfrak{F}$ 的每一個換位元 $F_1 F_2 F_1^{-1} F_2^{-1}$ 當然變換成 $\mathfrak{H}^1$ 的零元。現在還要證明的，就是 $\mathfrak{N}$ 的每一個元（任一零調道路 w 的道路類$\{w\}$）都屬於換位羣。設

$$U^2 = \sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i E_i^2$$

這一個二維鍊的邊緣是 w。相當于每一個 E_i^2，我們取定一條輔助棱

道 u_i，從 O 起到 E_i^2 的一個頂點止。設 v_i 是 E_i^2 的從他的這頂點起始的邊緣道；而且在 v_i 看作是鍊的時候，他恰就是 E_i^2 的邊緣鍊。我們用 r_i 表示 $u_i\,v_i\,u_i^{-1}$。因爲每一棱道 r_i 零倫，所以棱道 w 能變狀成

$$w' = w(r_1^{\lambda_1}\cdots r_\alpha^{\lambda_\alpha})^{-1}。$$

在 w 與

$$r_1^{\lambda_1}\cdots r_\alpha^{\lambda_\alpha}$$

看作是鍊的時候，他們都是 U^2 的邊緣鍊，所以是相等的鍊。所以鍊 w' 是 0 這個鍊，棱道 w' 經過每一個一維單純形的往返次數相等。設

$$w' = f(a_j),$$

A_j 是屬於棱 a_j 的閉道。w' 還能組合的變狀成（§ 46）

$$W' = f(A_j)。$$

因爲 W' 中的每一個 A_j 的指數的和等於零，所以在 *Abel* 化（*abelsch-machen*）基本羣的時候，W' 就化成零元。那就是說，W' 的道路類也就是 w' 與 w 的道路類，屬于 $\mathfrak{F}$ 的換位羣。

所以我們證明了下述定理：

定理 *III*：一個連通的複合形 $\mathfrak{K}^n$ 的一維同調羣 $\mathfrak{H}^1$ 就是基本羣的 *Abel* 化羣（基本羣被他的換位羣除的商羣）。

比較 § 41 與 § 47 中的結果，我們很容易證明這定理對于閉曲面成立。

我們已經說過，一個零倫的道路的特徵，是他中間可以張開一個廣

義的元面片，現在我們也能表明零調的閉道的一個相似的特徵。

定理 IV：一條閉道 w 零調的充要條件，是他中間可以張開一個能定向的，以 w 做邊緣的，而且有時候必須是廣義的曲面。

證明：根據剛纔證明的定理，在零調的道路 w 當作基本羣的一元的時候，w 必定屬於換位羣，所以能變狀成換位元的一個乘積

$$u_1 v_1 u_1^{-1} v_1^{-1} \cdots u_h v_h u_h^{-1} v_h^{-1}。$$

所以

$$w^{-1} u_1 v_1 u_1^{-1} v_1^{-1} \cdots u_h v_h u_h^{-1} v_h^{-1}$$

這閉道零倫，而且他中間可以張開一個廣義的元面片。設這個面片的原底是用

$$\bar{w}^{-1} \bar{u}_1 \bar{v}_1 \bar{u}_1^{-1} \bar{v}_1^{-1} \cdots \bar{u}_h \bar{v}_h \bar{u}_h^{-1} \bar{v}_h^{-1}$$

做邊緣的一個 $4h+1$ 邊形。這裏的綿續變換把這原底換成 $\mathfrak{R}^n$ 上的一個有邊緣的虧格 h 的曲面：他的邊緣是 w，他有時候必須是廣義的曲面 (在 $h=1$ 的時候，參看頁 7 上的圖 6 至圖 8)。反之，設一條閉道 w 中間能張開這麼一個曲面；那就是說，有一個綿續變換，把一個有邊緣的曲面換到 $\mathfrak{R}^n$，把這曲面的唯一的洞邊緣換成 w。因爲這張開的曲面能定向，他上面有一個廣義的二維鍊，而且 w 看作是一維鍊的時

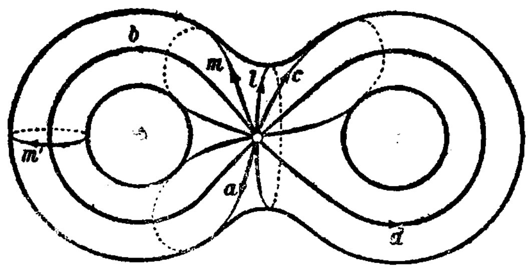


圖 94

候，恰是這二維鍊的邊緣。所以 w 零調。

例：雙環面上的腰線 l 把雙環面分開成兩個環(圖 94)，若是沿着 l 切開這雙環面，就可以知道 l 是一個環面的邊緣。因此 l 所代表的基本羣中的元 $L=(ABA^{-1}B^{-1})^{-1}$ 是一個換位元。從另一方面看，因爲 L 在基本羣中不等于么元，所以 l 中不能張開一個元面片。

我們可以證明 $L\neq 1$ 如下：基本羣 $\mathfrak{F}$ 只有一個界說關係

$$A\,B\,A^{-1}\,B^{-1}\,C\,D\,C^{-1}\,D^{-1}=1。\tag{1}$$

若再加以輔助關係

$$A=D,\ B=C,\tag{2}$$

我們就得着 $\mathfrak{F}$ 的一個商羣 $\overline{\mathfrak{F}}$ (§83)。消去了母元 D 與 C 之後，我們知道 $\overline{\mathfrak{F}}$ 只是有兩個母元 A 與 B 的自由羣。$ABA^{-1}B^{-1}=1$ 在商羣 $\overline{\mathfrak{F}}$ 中已不成立，在 $\mathfrak{F}$ 中當然更不會成立。

所以雙環面上的腰線在雙環面上零調，但不零倫。

§49 閉道的自由變狀

我們前此所說的閉道的變狀都不變動閉道的起點。但有時我們也必須討論變動起點的變狀。爲區別起見，後者叫做**自由變狀**，前者叫做**限制變狀** (*gebundene Deformation*)。此後我們只說一個閉道的變狀的時候，我們所指的都是限制變狀。

自由變狀的定義如下：

若是能綿續的把一個變狀矩形 $\overline{w}\times t$ 換到一個複合形 $\mathfrak{R}^n$，使邊 $\overline{w}\times 0=\overline{w}_0$ 換成閉道 w_0，邊 $\overline{w}\times 1=\overline{w}_1$ 換成閉道 w_1，而且使其餘二邊上的每兩個對應點 $\overline{P}\times t$ 與 $\overline{Q}\times t$ 換成同一點，w_0 與 w_1 這二閉道就說是能互相**自由變狀**，或**自由同倫**。

所以 $\overline{P}\times t$ 與 $\overline{Q}\times t$ 這二定向邊都換成連接 w_0 的起點 P_0 與 w_1 的起點 P_1 的同一道路 v。所以若是把 $\overline{w}\times 0$ 這邊平行的移到他的對立邊，他的像道路恰表出這自由變狀，而且 w_0 的起點 P_0 的軌跡是 v

這道路。

下述的定理表明自由變狀與限制變狀間的關係。

預備定理：若在一閉道 w_0 自由的變狀成一道路 w_1 的時候，w_0 的起點 P_0 的軌跡是道路 v，w_0 就能限制的變狀成 $vw_1\,v^{-1}$。——反之，若是 w_0 能限制的變狀成 $vw_1\,v^{-1}$，w_0 就能自由的變狀成 w_1。

證明： 設 $\mathfrak{R}$ 與 $\mathfrak{T}$ 是兩個矩形，圖 95 表明他們的邊緣如何重分，如何用字母表示。我們能設想 $\mathfrak{T}$ 是由 $\mathfrak{R}$ 的二邊 $\bar{u}'$ 與 $\bar{u}''$ 各縮成一點而

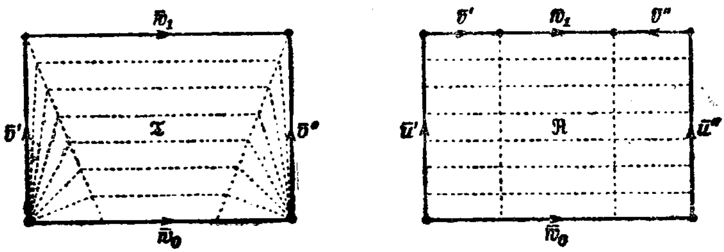


圖 95

成的。其實，圖中的虛線所表明的就是如此換 $\mathfrak{R}$ 成 $\mathfrak{T}$ 的一個綿續變換 φ，他分別換 $\bar{w}_0$, $\bar{w}_1$, $\bar{v}'$, $\bar{v}''$ 成 $\mathfrak{T}$ 上的用相同字母表示的邊。若 w_0 能自由的變狀成 w_1，而且 w_0 的起點的軌跡是道路 v，就有一個換 $\mathfrak{T}$ 到 $\mathfrak{K}''$ 的綿續變換 ψ 存在，換 $\overline{w}_0$ 成 w_0，換 $\overline{w}_1$ 成 w_1，而且換其餘二邊 $\bar{v}'$ 與 $\bar{v}''$ 成 v。$\psi\varphi=\chi$ 這變換就換 $\mathfrak{R}$ 的 $\bar{u}'$ 與 $\bar{u}''$ 這二邊成二點，換其餘二邊成道路 w_0 與 $v\,w_1\,v^{-1}$。這就證明了後二邊能限制的變狀。——反之，若是 w_0 與 $v\,w_1\,v^{-1}$ 能限制的變狀，這換 $\mathfrak{R}$ 到 $\mathfrak{K}''$ 的變換 χ 就預先給定了，而且根據 §8 中的定理 IV，我們能從 $\chi=\psi\varphi$ 這方程式確定

$\mathfrak{T}$ 的一個綿續變換 ψ，換 $\bar{w}_0$ 與 $\bar{w}_1$ 分別成 w_0 與 w_1，而且換其餘二邊成 v。這就是要證明的。

若是有公共起點的兩條道路能限制的變狀，他們當然也能自由的變狀。反之則不然，例如圖 94 中的道路 m 與 a。m 能經過 m'，自由的變狀成 a。但就另一方面看，m 與 $b\,a\,b^{-1}$ 同倫，m 與 a 所屬的道路類分別是 BAB^{-1} 與 A。根據 §48 末段（頁 244）的證明，

$$A(B\,A\,B^{-1})^{-1} = A\,B\,A^{-1}\,B^{-1} \neq 1。$$

所以這兩個道路類不同，即 m 與 a 不同倫。

其實我們有下述的普遍定理：

定理：從 O 起始的兩條閉道 w_0 與 w_1 自由同倫的充要條件，是他們代表基本羣的兩個相配元 (*konjugierte Elemente*) W_0 與 W_1，**即有一元 V 存在，使 $W_0 = V\,W_1\,V^{-1}$。所以屬於基本羣的一組相配元的所有道路，組成一類能互相自由變狀的道路。**[28]

這定理是預備定理的直接推論。

從定點 O 起始的閉道的可能的分類，共有下列三種：

1. 最窄的分類，是把他們分成**道路類**。若是二道路在不變動點 O 的時候，互相同倫，他們就屬於同一道路類。道路類是基本羣的元。

2. 基本羣的一類**相配元**的所有道路，是一類能互相自由的變狀的道路。這種道路類通常不能組成一羣。

3. 基本羣按照換位羣分成的一個剩餘類中的所有道路，是一類同調的道路。這種同調類組成同調羣 $\mathfrak{H}^1$。[29]

§50 基本羣與變換的變狀

設 φ 是換連通的複合形 $\mathfrak{K}^n$ 到連通的複合形 K^m 的一個綿續變換。這變換產生出換 $\mathfrak{K}^n$ 的基本羣 $\mathfrak{F}$ 到 K^m 的基本羣 $\mathfrak{F}'$ 的一個同構變換 Φ。除了 $\mathfrak{F}'$ 的內在的自身的同構變換之外，Φ 完全確定了 (§42)。我們現在證明**這同構變換不因 φ 的變狀而改變**。設 φ 換 $\mathfrak{F}$ 的起點 O 成 $\mathfrak{F}'$ 的起點 Ω；在變 φ 成 φ_1 的變狀下，Ω 的軌跡是以 Ω_1 爲終點的一條道路 v；而且 φ 與 φ_1 分別換一條從 O 起始的閉道 w 成 w' 與 w'_1。所以 w' 在變 φ 成 φ_1 的變狀下能自由的變狀成 w'_1。根據 § 49 中的預備定理，w' 與 vw'_1v^{-1} 同倫，所以，在 $\mathfrak{F}'$ 的一個內在的自身的同構變換下，w' 與 w'_1 的道路類對應。這已證明的定理的一個專款是：

一個複合形 $\mathfrak{K}^n$ 的自身的變狀，產生出 $\mathfrak{K}^n$ 的基本羣的一個內在的自身的同構變換。

§51 在一點處的基本羣

我們已經知道 (§32，定理 *III*)，不管我們用 $\mathfrak{K}^n$ 的什麼單純剖分，一個點 P 的鄰域複合形的同調羣總相同，關於基本羣我們也有相同的定理。

定理：設 $\mathfrak{A}_1$ 與 $\mathfrak{A}_2$ 是一個複合形 $\mathfrak{K}^n$ 上的，以一點 P 爲中心的兩個單純星形的外邊緣，若是這兩個單純星形是 P 在 $\mathfrak{K}^n$ 上的鄰域，而且 $\mathfrak{A}_1$ (因此 $\mathfrak{A}_2$ 也) 是一個連通的複合形，$\mathfrak{A}_1$ 與 $\mathfrak{A}_2$ 的基本羣就相同。這

基本羣叫做 $\mathfrak{K}^n$ 在 P 點處的基本羣。

證明：根據 §32 中的定理 I，有一個換 $\mathfrak{A}_1$ 到 $\mathfrak{A}_2$ 的綿續變換 φ 與一個換 $\mathfrak{A}_2$ 到 $\mathfrak{A}_1$ 的綿續變換 ψ 存在，使 $\mathfrak{A}_1$ 與 $\mathfrak{A}_2$ 的自身變換 $\psi\varphi$ 與 $\varphi\psi$ 都能變狀成么變換。所以，根據 §50，由 φ 與 ψ 產生出的 $\mathfrak{A}_1$ 與 $\mathfrak{A}_2$ 的基本羣 $\mathfrak{F}_1$ 與 $\mathfrak{F}_2$ 的同構變換 Φ 與 Ψ 有如次性質：$\mathfrak{F}_1$ 與 $\mathfrak{F}_2$ 的自身的同構變換 $\Psi\Phi$ 與 $\Phi\Psi$ 都是內在的自身的同構變換。但是我們能證明 Φ 是一個換 $\mathfrak{F}_1$ 成 $\mathfrak{F}_2$ 的一一的同構變換如下：若 F_1' 與 F_1'' 是 $\mathfrak{F}_1$ 的兩個不同的元，而 $\Phi(F_1')=\Phi(F_1'')$，我們就得着 $\Psi\Phi(F_1')=\Psi\Phi(F_1'')$。這不是 $\mathfrak{F}_1$ 的一個內在的自身的變換所能適合的。若 F_2' 是 $\mathfrak{F}_2$ 的一個給定的元，而且 $\Phi\Psi$ 把 F_2 換成 F_2'，同構變換 Φ 就把 $\mathfrak{F}_1$ 的 $\Psi(F_2)$ 這元換成 F_2'；那就是說，$\mathfrak{F}_2$ 的每一元都是 $\mathfrak{F}_1$ 的一元的像元。Φ 既然是一個一一的變換，所以是一個一一的同構變換。

§52 拚聯的複合形(*zusammengesetzte Komplex*)的基本羣

我們常常把一個複合形 $\mathfrak{K}$ 剖分成兩個有已知的基本羣的子複合形，$\mathfrak{K}'$ 與 $\mathfrak{K}''$，使 $\mathfrak{K}$ 的基本羣容易斷定。設 $\mathfrak{K}'$ 與 $\mathfrak{K}''$ 是一個連通的 n 維的單純複合形 $\mathfrak{K}$ 的兩個連通的子複合形，而且 $\mathfrak{K}$ 的每一個單純形至少屬於這兩個子複合形中的一個。因為 $\mathfrak{K}$ 的連通性，$\mathfrak{K}'$ 與 $\mathfrak{K}''$ 的交複合形 $\mathfrak{D}$ 並非空無所有。假設 $\mathfrak{D}$ 也是連通的複合形。

設 $\mathfrak{F}$，$\mathfrak{F}'$，$\mathfrak{F}''$ 與 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{D}}$ 分別是 $\mathfrak{K}$，$\mathfrak{K}'$，$\mathfrak{K}''$ 與 $\mathfrak{D}$ 的基本羣。我們取 $\mathfrak{D}$ 的一點 O 做閉道的起點。$\mathfrak{D}$ 上的每一閉道所以同時是 $\mathfrak{K}'$ 與 $\mathfrak{K}''$

上的閉道。所以 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{D}}$ 的每一元相當于 $\mathfrak{F}'$ 的一元與 $\mathfrak{F}''$ 的一元。我們有下述的定理:

定理 I: $\mathfrak{F}$ 是 $\mathfrak{F}' \circ \mathfrak{F}''$ 這自由乘積的一個商羣。要從 $\mathfrak{F}' \circ \mathfrak{F}''$ 得着 $\mathfrak{F}$, 只要命 $\mathfrak{F}'$ 與 $\mathfrak{F}''$ 的, 相當於 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{D}}$ 的同一元的, 兩元相等, 所以也就是增加 $\mathfrak{F}'$ 與 $\mathfrak{F}''$ 間的母元間的新關係。

證明: 我們按照計算基本羣的普遍方法, 把 $\mathfrak{K}$ 的每一個頂點用輔助道路連接到 O。若是頂點屬於 $\mathfrak{D}$, 根據 $\mathfrak{D}$ 的連通性的假設, 我們能在 $\mathfrak{D}$ 上取這頂點的輔助道路。若是頂點屬於 $\mathfrak{K}'$ 或 $\mathfrak{K}''$, 我們也能完全在 $\mathfrak{K}'$ 或 $\mathfrak{K}''$ 上取這頂點的輔助道路。

$\mathfrak{K}$ 的任一單純形或屬於 $\mathfrak{K}'$ (但不屬於 $\mathfrak{K}''$), 或屬於 $\mathfrak{K}''$ (但不屬於 $\mathfrak{K}'$), 或屬於 $\mathfrak{K}'$ 與 $\mathfrak{K}''$, 也就是屬於 $\mathfrak{D}$。因此 $\mathfrak{K}$ 的所有的單純形分成三個無共元的子集 $\overline{\mathfrak{K}}'$, $\overline{\mathfrak{K}}''$, $\mathfrak{D}$。

$\mathfrak{F}$ 的母元 A_j 與 $\mathfrak{K}$ 的棱 a_j 成一一對應 (頁 232)。按照 a_j 屬於 $\overline{\mathfrak{K}}'$, $\overline{\mathfrak{K}}''$ 或 $\mathfrak{D}$, 我們把 A_j 分別改叫做

$$\overline{K}'_j,\ \overline{K}''_j \text{ 或 } D_j。$$

$\mathfrak{F}$ 的(I)種與(II)種的關係, 分別與 $\mathfrak{K}$ 的棱與三邊形成一一對應。按照與這關係對應的棱或三邊形在 $\overline{\mathfrak{K}}'$, $\overline{\mathfrak{K}}''$ 或 $\mathfrak{D}$ 上, 也把關係分成三組。這三組的關係是

$$R'_i\,(D_j, \overline{K}'_j) = 1, \qquad (i = 1, 2, \cdots, \varkappa') \qquad (\overline{\mathfrak{K}}')$$

$$R''_i\,(D_j, \overline{K}''_j) = 1, \qquad (i = 1, 2, \cdots, \varkappa'') \qquad (\overline{\mathfrak{K}}'')$$

$$R_i^{(\mathfrak{D})}(D_j) = 1。 \qquad (i = 1, 2, \cdots, \delta) \qquad (\mathfrak{D})$$

由於我們輔助道路的特別選取法，R'_i 中無 $\bar{K}''_j$，R''_i 中無 $\bar{K}'_j$，而且 $R_i^{(\mathfrak{D})}$ 中無 $\bar{K}'_j$ 與 $\bar{K}''_j$。

關係 $(\mathfrak{D})$ 就是 $\mathfrak{D}$ 的基本羣 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{D}}$ 的一組界說關係。同樣的，$(\mathfrak{D})+(\bar{\mathfrak{K}}')$ 與 $(\mathfrak{D})+(\bar{\mathfrak{K}}'')$ 分別是 $\mathfrak{K}'$ 的基本羣 $\mathfrak{F}'$ 與 $\mathfrak{K}''$ 的基本羣 $\mathfrak{F}''$ 的一組界說關係。最後，$(\mathfrak{D})+(\bar{\mathfrak{K}}')+(\bar{\mathfrak{K}}'')$ 是 $\mathfrak{K}$ 的基本羣的一組界說關係，而且顯然能用下列的關係替代：

$$\left.\begin{aligned} R'_i(D'_j, \bar{K}'_j) &= 1 \\ R_i^{(\mathfrak{D})}(D'_j) &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (\mathfrak{F}')$$

$$\left.\begin{aligned} R''_i(D''_j, \bar{K}''_j) &= 1 \\ R_i^{(\mathfrak{D})}(D''_j) &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (\mathfrak{F}'')$$

$$D'_j = D''_j，經過所有的\ j。 \qquad (\mathfrak{d})$$

關係 $(\mathfrak{F}')$ 與 $(\mathfrak{F}'')$ 是 $\mathfrak{F}'$ 與 $\mathfrak{F}''$ 的自由乘積的關係（§ 85）。增加關係 $(\mathfrak{d})$，就是命 $\mathfrak{F}'$ 中的 D'_j 與 $\mathfrak{F}''$ 中的 D''_j，相當于 $\mathfrak{D}$ 中的同一個元 D_j 的，相等。

若是 $\mathfrak{D}$ 的基本羣只含有么元，這定理特別簡單：**此時 $\mathfrak{K}$ 的基本羣是 $\mathfrak{K}'$ 與 $\mathfrak{K}''$ 的基本羣的自由乘積。**

把定理 *I* 的基本羣都 *Abel* 化，然後應用 § 48 中的定理 *III*，就得着下述的定理：

定理 *II*：$\mathfrak{K}$ 的同羣調 $\mathfrak{H}^1$ 是 $\mathfrak{K}'$ 的同調羣 $'\mathfrak{H}^1$ 與 $\mathfrak{K}''$ 的同調羣 $''\mathfrak{H}^1$ 的直接乘積的一個商羣。只要命 $'\mathfrak{H}^1$ 與 $''\mathfrak{H}^1$ 的元，相當於 $\mathfrak{D}$ 的同調羣 $\mathfrak{H}^1_{\mathfrak{D}}$ 的同一元的，相等，就得着 $\mathfrak{H}^1$。

關于更高維的同調羣的相當的定理不如是簡單，我們不推證。[80]

我們應用定理 I 來確定一個環面扭結 (*Torusknoten*) 的羣。環面扭結可說明如下：在實數空間 $\mathfrak{R}^3$ 中取一個有限高的圓柱面，再在圓柱面上取 m 條弧度距離等于 $\frac{2\pi}{m}$ 的母線 (*Mantellinie*)。我們先把頂面與底面相對的扭轉 $\frac{2\pi n}{m}$ 弧度，然後把圓柱面彎曲成環面（圖 96 中的 $m=3, n=5$），也就是疊合頂面與底面上的扭轉後同在一垂直線上的點。若是 m 與 n 是兩個互質的整數，這 m 條母線在環面上就聯接成一條閉曲線，叫做關於 m, n 的環面扭結。*）我們現在再把扭結從空間 $\mathfrak{R}^3$ 中挖去；那就是說，使一個小球的球心沿着扭結運動，把球的內點的軌跡從 $\mathfrak{R}^3$ 中減去。用一個假點把 $\mathfrak{R}^3$ 封閉成三維球 $\mathfrak{S}^3$ (§14)。$\mathfrak{S}^3$ 中挖去扭結所剩下的部分是一個有邊緣的三維流形 $\mathfrak{K}$，他的邊緣是圍繞扭結的一個細管子的表面（一個環面）。這裏我們雖是用直覺的描寫，但也容易改用算學的方法處置。$\mathfrak{K}$ 這複合形叫做這扭結的外空間 (*Aussenraum*)，他的基本羣叫做扭結群 (*Knotengruppe*)。要斷定這扭結羣，我們用這界說扭結的環面，把 $\mathfrak{K}$ 剖分成兩部分；這個細管子所以沿着他的全長剖開成兩個半圓形的槽。根據 §14 中的習題 4，$\mathfrak{K}$ 是由兩個環體組成的，其中的每一個挖去了圍繞着他的半圓形的槽。

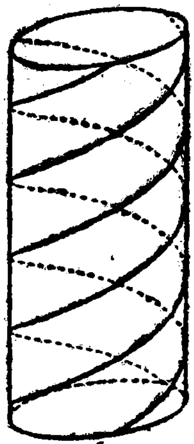


圖 96

我們把這在空間的有限部分中的環體叫做子複合形 $\mathfrak{K}'$，那含有這假點的環體叫做子複合形 $\mathfrak{K}''$。這兩個環體的交複合形 $\mathfrak{D}$ 是一個扭着的平環，是環面的未挖去的部分（圖 97）。根據 §46，$\mathfrak{K}'$ 的基本羣 $\mathfrak{F}'$ 是含有一個母元 A 的自由羣（我們在定理 I 的證明中，曾用 $\overline{\mathfrak{K}}'$ 表示），$\mathfrak{K}''$ 的基本羣 $\mathfrak{F}''$ 是含有一個母元 B 的自由羣。在平環 $\mathfrak{D}$ 的一條母線 D 上取一個點 O 做閉道的起點。彎曲環體 $\mathfrak{K}'$ 的心線與環體 $\mathfrak{K}''$ 的心線（即環面的旋轉軸），使他們通過 O；他們就分別代表 A 與 B。$\mathfrak{D}$ 的基本羣也是含有一個母元的自由羣（頁 236）；這母元可用平環的母線 D 代表。$\mathfrak{F}' \circ \mathfrak{F}''$ 這羣是有兩個母元 A 與 B 的自由羣。我們給定 A 與 B 適當的定向之後，D 看作 $\mathfrak{F}'$ 的元的時候等于 A^m，看作 $\mathfrak{F}''$ 的元的時候等于 B^n。所以在兩個母元的自由群中增加一個關係

*）環面扭結 2,3 就是頁 3 上圖 2 中的三叉扭結，這是次于圓週的最簡單的扭結。

$$A^m = B^n,$$

我們就得着扭結 m,n 的扭結羣。因爲 $m > 1$, $n > 1$ 的扭結(例如三叉扭結)的扭結羣不是含一個母元的自由羣,所以我們知道空間無同痕變狀,能使這扭結變狀成一個圓周。[31]

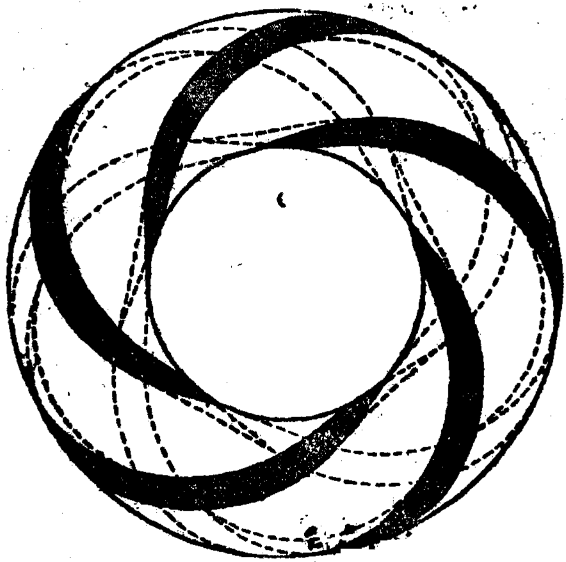


圖 97

習題:1. 若是從 $\mathfrak{R}^4$ 中挖去一條由若干直線段所組成的無重點的閉稜道,再用一個無窮遠點把 $\mathfrak{R}^4$ 封閉成四維球 $\mathfrak{S}^4$,這外空間的基本羣就只含有一個么元。[把 $\mathfrak{S}^4$ 剖分成兩個子複合形:外空間 $\mathfrak{A}$ 與挖去的部分 $\mathfrak{B}$。然後應用定理 I, $\mathfrak{B}$ 是圓周與三維球體的拓撲積。$\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 的交複合形是圓周與球面的拓撲積。$\mathfrak{A}$ 的基本羣並不因爲加入 $\mathfrak{B}$ 而改變。試想這結果爲什麼在三維空間中不能成立?]

2. 試求一個四維的勻齊的複合形,他的基本羣是一個有 r 個母元的自由羣。[圓周與三維球的拓撲積取 r 個,每一個中挖去一個四維的小球體,再用一個有 r 個洞的四維球,把這些複合形拚聯成一個我們所需要的複合形。]

3. 給定了一個有有限個母元的羣,試求一個四維的勻齊的複合形,使他的基本羣就是這給定的羣。[若是從一個勻齊的複合形 $\mathfrak{K}^4$ 中挖去一條無重點的道路 w,就得着一個有邊緣的複合形。再用球面與元面片的拓撲積封閉這複合形,我們就得着一個勻齊的複合形 $'\mathfrak{K}^4$,他的基本羣就是 $\mathfrak{K}^4$ 的基本羣增加了一個關係 $w = 1$。]