Razonamiento Combinatorio (Combinaciones Sin Repetición Condicionadas)

José Acevedo J.

En un conjunto dado de elementos finitos, el estudio de las diferentes maneras en que se pueden arreglar dichos elementos siguiendo reglas establecidas, es lo que se conoce como combinatoria.

La forma de arreglar los elementos de un conjunto dado puede variar dependiendo de las normas establecidas para agrupar los elementos, dependiendo del tipo de combinación los elementos pueden repetirse o no, aquí sólo tomaremos en cuenta aquellas combinaciones donde los elementos no se repiten.

Para continuar nuestro análisis debemos prestar mucha atención a la oración: siguiendo reglas establecidas, ya que podemos tener una gran variedad de combinaciones dependiendo de las reglas que se establezcan. Así por ejemplo, la fórmula:

$$\boldsymbol{C^k(m,n) = \frac{(m-kn+k)!}{(m-k(n-1)-n)!\,n!}}$$

Donde:

k, m y n son números enteros ≥ 0 y m ≥ n.

Sólo es aplicable o genérica para las normas que han sido previamente establecidas para la misma, sin embargo dicha fórmula no tendría ninguna aplicación si modificamos las reglas para la cual fue concebida, es por esta razón que nos vemos forzados a hablar de **combinaciones condicionadas**, es decir aquella combinaciones no ordinarias donde los elementos son agrupados siguiendo reglas que varían de acuerdo a la situación que se planteé.

Intervalo en las combinaciones: un intervalo lo podemos definir como el número de elementos que quedan comprendidos entre dos componentes que han sido tomados para ser combinados.

Ejemplo de intervalos en las combinaciones:

S_n = {a, b, c, d, e, f, g}

El intervalo entre la combinación: [a, c]; [c, e]; [e, g], es el mismo, un elemento entre cada intervalo.

El intervalo entre la combinación: [a, d]; [b, e]; [d, g], es el mismo, dos elementos entre cada intervalo.

El intervalo entre la combinación: [a,d,g] es el mismo, dos elementos entre: a y d; dos elementos entre: d y g.

Combinación condicionada, ejemplos:

Dada la sucesión S_n = a, b, c, d, e, f. Combinar sus elementos de forma tal que siempre quede un número impar de letras entre dos de sus elementos.

La solución exhaustiva sería:

ac bd ce df

ae bf

Es decir que para la condición establecida, sólo podemos tener 6 posibles combinaciones.

(6 – 2) + (6 – 4) = 4 + 2 = 2

Para resolver combinación condicionada de este tipo, haremos uso de la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{\gamma(m,n) = \sum_{k=1}^{i \leq m/n} [m - (2n-2)k]}$$

Donde:

k, m y n son números enteros ≥ 0 y m ≥ n. $\forall i \in \mathbb{N}$

Ejemplos:

Dada la sucesión S_n = a, b, c, d. Combinar sus elementos de forma tal que siempre quede un número impar de letras entre dos de sus elementos.

Solución exhaustiva:

ac bd

Es decir que sólo podemos tener 2 combinaciones.

(4 – 2) + (4 – 4) = 2 + 0 = 2

Aplicando la fórmula para resolver este tipo de combinaciones condicionadas tenemos:

$$\boldsymbol{\gamma(m,n) = \sum_{k=1}^{i \leq m/n} [m - (2n-2)k]}$$

$$\gamma(4,2) = \sum_{k=1}^{i \leq 2} [4 - 2] + [4 - 4] = 2$$

Dada la sucesión S_n = a, b, c, d, e, f, g. Combinar sus elementos de forma tal que siempre quede un número impar de letras entre dos de sus elementos.

La solución exhaustiva sería:

ac   bd   ce   df   eg

ae   bf   cg

ag

Es decir:

(7 – 2) + (7 – 4) + (7 – 6) = 5 + 3 + 1 = 9

Aplicando la fórmula tenemos:

$$\gamma(7,2) = \sum_{k=1}^{i \leq 3} [7 - 2] + [7 - 4] + [7 - 6] = 9$$

Dada la sucesión S_n = a, b, c, d, e, f. Combinar sus elementos de forma tal que siempre quede un número impar de letras entre tres de sus componentes. Tomar en cuenta que la cantidad de elementos debe ser el mismo para dos o más intervalos diferentes.

Solución exhaustiva:

ace   bdf

Es decir que sólo podemos tener 2 posibles combinaciones.

(6 – 4) = 2

Usando la fórmula tenemos:

$$\gamma(m,n) = \sum_{k=1}^{i \leq m/n} [m - (2n - 2)k]$$

$$\gamma(6,3) = \sum_{k=1}^{i \leq 2} [6 - 4] = 2$$

La fórmula mostrada se cumplirá siempre que exista una cantidad de elementos impares entre dos o más componentes, dicha cantidad debe ser la misma para dos o más intervalos diferentes, estas son las son las condiciones necesarias para que se cumpla la fórmula mostrada.

Fórmula para los intervalos pares:

$$\boldsymbol{\rho(m,n) = \sum_{k=1}^{i \leq m/n} [(m-1)-(2n-2)k]}$$

Ejemplo:

Dada la sucesión S_n = a, b, c, d, e, f. Combinar sus elementos de forma tal que siempre quede un número par de letras entre tres de sus componentes. Tomar en cuenta que la cantidad de elementos debe ser el mismo para dos o más intervalos diferentes.

Solución exhaustiva:

ac be cf

af

Existen 4 posibles combinaciones.

[(6 – 1) – 2] + [(6 – 1) – 4] = 3 + 1 = 4

Aplicando la fórmula tenemos:

$$\boldsymbol{\rho(m,n) = \sum_{k=1}^{i \leq m/n} [(m-1)-(2n-2)k]}$$

$$\boldsymbol{\rho(6,2) = \sum_{k=1}^{i \leq m/n} [(5)-(2)]+[(5)-(4)] = 4}$$

Como se puede ver las combinaciones condicionadas sólo están limitadas por nuestra imaginación, ya que podemos elegir infinitas maneras de agrupar los elementos de un conjunto dado, el verdadero problema reside en encontrar una fórmula o método que nos permita encontrar las diferentes combinaciones.

Un claro ejemplo de lo expuesto es el siguiente:

Dado el conjunto S{a, b, c, d, e, f, g, h}, combinar dos de sus elementos de tal forma que siempre quede una cantidad prima de elementos entre ellos.

Solución exhaustiva:

ad be cf dg eh

ae bf cg dh

ag bh

Es decir que podemos hacer 11 posibles combinaciones condicionadas.

Aunque hemos podido dar con el número de combinaciones posibles, el ejemplo presenta un gran problema ya que no conocemos una fórmula que nos permita conocer las diferentes combinaciones para cualquier cantidad de elementos finitos.