

Grundkurs Mathematik II

Vorlesung 32

Verwandle große
Schwierigkeiten in kleine und
kleine in gar keine

Chinesische Weisheit

Das Lösen von linearen Gleichungssystemen

Lineare Gleichungssysteme werden mit dem *Eliminationsverfahren* gelöst, bei dem nach und nach Variablen eliminiert werden und schließlich ein besonders einfaches äquivalentes Gleichungssystem entsteht, das direkt gelöst werden kann (bzw. von dem gezeigt werden kann, dass es keine Lösung besitzt). Systeme mit zwei Gleichungen in zwei Variablen haben wir schon in der letzten Vorlesung behandelt. Wir fahren mit einem typischen Beispiel fort.

BEISPIEL 32.1. Wir wollen das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rccccrcr} 2x & +5y & +2z & & -v & = & 3 \\ 3x & -4y & & +u & +2v & = & 1 \\ 4x & & -2z & +2u & & = & 7 \end{array}$$

über \mathbb{R} (oder \mathbb{Q}) lösen. Wir eliminieren zuerst x , indem wir die erste Zeile I beibehalten, die zweite Zeile II durch $II - \frac{3}{2}I$ und die dritte Zeile III durch $III - 2I$ ersetzen. Das ergibt

$$\begin{array}{rccccrcr} 2x & +5y & +2z & & -v & = & 3 \\ & -\frac{23}{2}y & -3z & +u & +\frac{7}{2}v & = & \frac{-7}{2} \\ & -10y & -6z & +2u & +2v & = & 1. \end{array}$$

Wir könnten jetzt aus der (neuen) dritten Zeile mit Hilfe der zweiten Zeile y eliminieren. Wegen der Brüche eliminieren wir aber lieber z (dies eliminiert gleichzeitig u). Wir belassen also die erste und zweite Zeile und ersetzen die dritte Zeile III durch $III - 2II$. Dies ergibt, wobei wir das System in einer neuen Reihenfolge¹ aufschreiben, das System

$$\begin{array}{rccccrcr} 2x & +2z & & +5y & -v & = & 3 \\ & -3z & +u & -\frac{23}{2}y & +\frac{7}{2}v & = & \frac{-7}{2} \\ & & & 13y & -5v & = & 8. \end{array}$$

¹Eine solche Umstellung ist ungefährlich, wenn man den Namen der Variablen mit-schleppt. Wenn man dagegen das System in Matrixschreibweise aufführt, also die Variablennamen einfach weglässt, so muss man sich diese Spaltenvertauschungen merken.

Wir können uns nun v beliebig (oder „frei“) vorgeben. Die dritte Zeile legt dann y eindeutig fest, es muss nämlich

$$y = \frac{8}{13} + \frac{5}{13}v$$

gelten. In der zweiten Gleichung können wir wieder u beliebig vorgeben, was dann z eindeutig festlegt, nämlich

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{3} \left(-\frac{7}{2} - u - \frac{7}{2}v + \frac{23}{2} \left(\frac{8}{13} + \frac{5}{13}v \right) \right) \\ &= -\frac{1}{3} \left(-\frac{7}{2} - u - \frac{7}{2}v + \frac{92}{13} + \frac{115}{26}v \right) \\ &= -\frac{1}{3} \left(\frac{93}{26} - u + \frac{12}{13}v \right) \\ &= -\frac{31}{26} + \frac{1}{3}u - \frac{4}{13}v. \end{aligned}$$

Die erste Zeile legt dann x fest, nämlich

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(3 - 2z - 5y + v) \\ &= \frac{1}{2} \left(3 - 2 \left(-\frac{31}{26} + \frac{1}{3}u - \frac{4}{13}v \right) - 5 \left(\frac{8}{13} + \frac{5}{13}v \right) + v \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{30}{13} - \frac{2}{3}u - \frac{4}{13}v \right) \\ &= \frac{15}{13} - \frac{1}{3}u - \frac{2}{13}v. \end{aligned}$$

Daher kann man die Gesamtlösungsmenge als

$$\left\{ \left(\frac{15}{13} - \frac{1}{3}u - \frac{2}{13}v, \frac{8}{13} + \frac{5}{13}v, -\frac{31}{26} + \frac{1}{3}u - \frac{4}{13}v, u, v \right) \mid u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

schreiben. Eine besonders einfache Lösung ergibt sich, wenn man die freien Variablen u und v gleich 0 setzt. Dies führt auf die spezielle Lösung

$$(x, y, z, u, v) = \left(\frac{15}{13}, \frac{8}{13}, -\frac{31}{26}, 0, 0 \right).$$

In der allgemeinen Lösung kann man u und v als Koeffizienten rausziehen und dann die Lösungsmenge auch als

$$\left\{ \left(\frac{15}{13}, \frac{8}{13}, -\frac{31}{26}, 0, 0 \right) + u \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0 \right) + v \left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{4}{13}, 0, 1 \right) \mid u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

schreiben. Dabei ist

$$\left\{ u \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0 \right) + v \left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{4}{13}, 0, 1 \right) \mid u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

eine Beschreibung der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems.

DEFINITION 32.2. Es sei K ein Körper und seien zwei (inhomogene) lineare Gleichungssysteme zur gleichen Variablenmenge gegeben. Die Systeme heißen *äquivalent*, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.

LEMMA 32.3. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über K . Dann führen die folgenden Manipulationen an diesem Gleichungssystem zu einem äquivalenten Gleichungssystem.

- (1) *Das Vertauschen von zwei Gleichungen.*
- (2) *Die Multiplikation einer Gleichung mit einem Skalar $s \neq 0$.*
- (3) *Das einfache Weglassen einer Gleichung, die doppelt vorkommt.*
- (4) *Das Verdoppeln einer Gleichung (im Sinne von eine Gleichung zweimal hinschreiben).*
- (5) *Das Weglassen oder Hinzufügen einer Nullzeile (einer Nullgleichung).*
- (6) *Das Ersetzen einer Gleichung H durch diejenige Gleichung, die entsteht, wenn man zu H eine andere Gleichung G des Systems addiert.*

Beweis. Die meisten Aussagen sind direkt klar. (2) ergibt sich einfach daraus, dass wenn

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = c$$

gilt, dass dann auch

$$\sum_{i=1}^n (sa_i)x_i = sc$$

für jedes $s \in K$ gilt. Bei $s \neq 0$ kann man diesen Übergang durch Multiplikation mit s^{-1} rückgängig machen.

(6). Es sei G die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = c$$

und H die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n b_i x_i = d.$$

Wenn ein Tupel $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in K^n$ die beiden Gleichungen erfüllt, so erfüllt es auch die Gleichung $H' = G + H$. Und wenn das Tupel die beiden Gleichungen G und H' erfüllt, so auch die Gleichung G und $H = H' - G$. \square

Für die praktische Lösung eines linearen Gleichungssystems sind die beiden Manipulationen (2) und (6) am wichtigsten, wobei man in aller Regel diese beiden Schritte kombiniert und eine Gleichung H durch eine Gleichung der Form $H + \lambda G$ (mit $G \neq H$) ersetzt. Dabei wird $\lambda \in K$ so gewählt, dass die neue Gleichung eine Variable weniger besitzt als die alte. Man spricht von *Elimination einer Variablen*. Diese Elimination wird nicht nur für eine Zeile durchgeführt, sondern für alle Zeilen mit Ausnahme von einer (geeignet gewählten) „Arbeitszeile“ G und mit einer fixierten „Arbeitsvariablen“. Das folgende *Eliminationslemma* beschreibt diesen Rechenschritt.

LEMMA 32.4. *Es sei K ein Körper und S ein (inhomogenes) lineares Gleichungssystem über K in den Variablen x_1, \dots, x_n . Es sei x eine Variable, die in mindestens einer Gleichung G mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten a vorkommt. Dann lässt sich jede von G verschiedene² Gleichung H durch eine Gleichung H' ersetzen, in der x nicht mehr vorkommt, und zwar so, dass das neue Gleichungssystem S' , das aus G und den Gleichungen H' besteht, äquivalent zum Ausgangssystem S ist.*

Beweis. Durch Umm Nummerieren kann man $x = x_1$ erreichen. Es sei G die Gleichung

$$ax_1 + \sum_{i=2}^n a_i x_i = b$$

(mit $a \neq 0$) und H die Gleichung

$$cx_1 + \sum_{i=2}^n c_i x_i = d.$$

Dann hat die Gleichung $H' = H - \frac{c}{a}G$ die Gestalt

$$\sum_{i=2}^n \left(c_i - \frac{c}{a} a_i \right) x_i = d - \frac{c}{a} b,$$

in der x_1 nicht mehr vorkommt. Wegen $H = H' + \frac{c}{a}G$ sind die Gleichungssysteme äquivalent. \square

Das praktische Verfahren, bei dem man sukzessive das Verfahren im Beweis des vorstehenden Lemmas anwendet, um auf Dreiecksgestalt bzw. Stufengestalt zu kommen, nennt man *Gaußsches Eliminationsverfahren* (oder *Additionsverfahren*). Es werden also Variablen eliminiert, indem man geeignete Vielfache von Gleichungen zu anderen Gleichungen hinzuaddiert.

²Mit verschieden ist hier gemeint, dass die beiden Gleichungen einen unterschiedlichen Index im System haben. Es ist also sogar der Fall erlaubt, dass G und H dieselbe, aber doppelt aufgeführte Gleichung ist.

SATZ 32.5. Jedes (inhomogene) lineare Gleichungssystem über einem Körper K lässt sich durch die in Lemma 32.3 beschriebenen elementaren Umformungen und durch das Weglassen von überflüssigen Gleichungen in ein äquivalentes lineares Gleichungssystem der Stufenform

$$\begin{array}{cccccccccc}
 b_{1s_1}x_{s_1} & +b_{1s_1+1}x_{s_1+1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & +b_{1n}x_n & = & d_1 \\
 0 & \cdots & 0 & b_{2s_2}x_{s_2} & \cdots & \cdots & \cdots & +b_{2n}x_n & = & d_2 \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\
 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_{ms_m}x_{s_m} & \cdots & +b_{mn}x_n & = & d_m \\
 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & = & d_{m+1}
 \end{array}$$

überführen, bei dem alle Startkoeffizienten $b_{1s_1}, b_{2s_2}, \dots, b_{ms_m}$ von 0 verschieden sind. Dabei ist bei $d_{m+1} = 0$ die letzte Zeile überflüssig und bei $d_{m+1} \neq 0$ besitzt das System keine Lösung.

Durch Variablenumbenennungen erhält man ein äquivalentes System der Form

$$\begin{array}{cccccccccc}
 c_{11}y_1 & +c_{12}y_2 & \cdots & +c_{1m}y_m & +c_{1m+1}y_{m+1} & \cdots & +c_{1n}y_n & = & d_1 \\
 0 & c_{22}y_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & +c_{2n}y_n & = & d_2 \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\
 0 & \cdots & 0 & c_{mm}y_m & +c_{mm+1}y_{m+1} & \cdots & +c_{mn}y_n & = & d_m \\
 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & = & d_{m+1}
 \end{array}$$

mit Diagonalelementen $c_{ii} \neq 0$.

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Eliminationslemma, mit dem man sukzessive Variablen eliminiert. Man wendet es auf die erste (in der gegebenen Reihenfolge) Variable (diese sei x_{s_1}) an, die in mindestens einer Gleichung mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten auftaucht. Diese Eliminationsschritte wendet man solange an, solange das im Eliminationsschritt entstehende variablenreduzierte Gleichungssystem (also ohne die vorhergehenden Arbeitsgleichungen) noch mindestens zwei Gleichungen mit von 0 verschiedenen Koeffizienten erhält. Wenn dabei Gleichungen in der Form der letzten Gleichung übrig bleiben, und diese nicht alle die Nullgleichung sind, so besitzt das System keine Lösung. Wenn wir $y_1 = x_{s_1}, y_2 = x_{s_2}, \dots, y_m = x_{s_m}$ setzen und die anderen Variablen mit y_{m+1}, \dots, y_n benennen, so erhält man das angegebene System in Dreiecksform. \square

Es kann sein, dass die Variable x_1 gar nicht in dem System mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten vorkommt, und, dass in einer Variablenelimination gleichzeitig mehrere Variablen eliminiert werden. Dann erhält man wie beschrieben ein Gleichungssystem in Stufenform, das erst durch Variablenvertauschungen in die Dreiecksform gebracht werden kann.

BEMERKUNG 32.6. Gelegentlich möchte man ein *simultanes lineares Gleichungssystem* der Form

$$\begin{array}{rcll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 & (= d_1, = e_1, \dots) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 & (= d_2, = e_2, \dots) \\ & & \vdots & \\ & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m & (= d_m, = e_m, \dots) \end{array}$$

lösen. Es sollen also für verschiedene Störvektoren Lösungen des zugehörigen inhomogenen Gleichungssystems berechnet werden. Grundsätzlich könnte man dies als voneinander unabhängige Gleichungssysteme betrachten, es ist aber geschickter, die Umwandlungen, die man auf der linken Seite macht, um Dreiecksgestalt zu erreichen, simultan auf der rechten Seiten mit allen Störvektoren durchzuführen. Ein wichtiger Spezialfall bei $n = m$ liegt vor, wenn die Störvektoren die Standardvektoren durchlaufen, siehe Verfahren 36.11.

BEMERKUNG 32.7. Ein weiteres Verfahren, ein lineares Gleichungssystem zu lösen, ist das *Einsetzungsverfahren*. Dabei werden ebenfalls Variablen sukzessive eliminiert, allerdings in einer anderen Weise. Wenn man mit diesem Verfahren die Variable x_1 eliminieren möchte, so löst man eine Gleichung, sagen wir G_1 , in der x_1 mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten vorkommt, nach x_1 auf, und erhält eine neue Gleichung der Form

$$G'_1 : x_1 = F_1,$$

wobei in F_1 die Variable x_1 nicht vorkommt. In allen weiteren Gleichungen G_2, \dots, G_m ersetzt man die Variable x_1 durch F_1 und erhält (nach Umformungen) ein Gleichungssystem G'_2, \dots, G'_m ohne die Variable x_1 , das zusammen mit G'_1 äquivalent zum Ausgangssystem ist.

BEMERKUNG 32.8. Ein anderes Verfahren, ein lineares Gleichungssystem zu lösen, ist das *Gleichsetzungsverfahren*. Dabei werden ebenfalls Variablen sukzessive eliminiert, allerdings in anderer Weise. Bei diesem Verfahren löst man die Gleichungen G_i , $i = 1, \dots, m$, nach einer festen Variablen, sagen wir x_1 auf. Es seien (nach Umordnung) G_1, \dots, G_k die Gleichungen, in denen die Variable x_1 mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten vorkommt. Diese Gleichungen bringt man in die Form

$$G'_i : x_1 = F_i,$$

wobei in F_i die Variable x_1 nicht vorkommt. Das Gleichungssystem bestehend aus

$$G'_1, F_1 = F_2, F_1 = F_3, \dots, F_1 = F_k, G_{k+1}, \dots, G_m$$

ist zum gegebenen System äquivalent. Mit diesem System ohne G'_1 fährt man fort.

BEMERKUNG 32.9. Unter einem *linearen Ungleichungssystem* über den rationalen Zahlen oder den reellen Zahlen versteht man ein System der Form

$$\begin{array}{rcccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \star & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \star & c_2 \\ & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \star & c_m, \end{array}$$

wobei \star gleich \leq oder \geq ist. Die Lösungsmenge ist deutlich schwieriger zu beschreiben als im Gleichungsfall. Eine Eliminierung von Variablen ist im Allgemeinen nicht möglich.

Lineare Gleichungssysteme in Dreiecksgestalt

SATZ 32.10. *Es sei ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über einem Körper K in Dreiecksgestalt*

$$\begin{array}{rcccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1m}x_m & \cdots & +a_{1n}x_n & = & c_1 \\ 0 & a_{22}x_2 & \cdots & \cdots & \cdots & +a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mm}x_m & \cdots & +a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

gegeben, wobei vorne die Diagonalelemente alle ungleich 0 seien. Dann stehen die Lösungen $(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ in Bijektion zu den Tupeln $(x_{m+1}, \dots, x_n) \in K^{n-m}$. D.h. die hinteren $n - m$ Einträge sind frei wählbar und legen eine eindeutige Lösung fest, und jede Lösung wird dabei erfasst.

Beweis. Dies ist klar, da bei gegebenem (x_{m+1}, \dots, x_n) die Zeilen von unten nach oben sukzessive die anderen Variablen eindeutig festlegen. \square

Bei $m = n$ gibt es keine freien Variablen und es ist $K^0 = 0$ und das Gleichungssystem besitzt genau eine Lösung. Ein beliebiges lineares Gleichungssystem formt man mit Hilfe des Eliminationslemmas in ein äquivalentes lineares Gleichungssystem in Stufengestalt um. Dann stellt man fest, dass es entweder keine Lösung besitzt oder aber man kann aus der Stufengestalt eine Beschreibung der Lösungsmenge erhalten.

Abbildungsverzeichnis