Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Vorlesung 31

Vektorräume mit Skalarprodukt

Im $\mathbb{R}^n$ kann man nicht nur Vektoren addieren und skalieren, sondern ein Vektor hat auch eine Länge, und die Lagebeziehung von zwei Vektoren zueinander wird durch den Winkel zwischen ihnen ausgedrückt. Länge und Winkel werden beide durch den Begriff des *Skalarprodukts* präzisiert. Dafür muss ein reeller Vektorraum oder ein komplexer Vektorraum vorliegen. Wir diskutieren die beiden Fälle parallel und verwenden als gemeinsame Bezeichnung das Symbol $\mathbb{K}$. Zu $z \in \mathbb{C}$ bezeichnet $\overline{z}$ die konjungiert-komplexe Zahl, bei $z \in \mathbb{R}$ einfach die Zahl selbst.

Definition 31.1. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein *Skalarprodukt* auf V ist eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{K},\, (v,w) \longmapsto \langle v,w \rangle ,$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) Es ist

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle \,=\, \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle$$

für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $x_1, x_2, y \in V$ und

$$\langle x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle \,=\, \overline{\lambda_1} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle x, y_2 \rangle$$

für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $x, y_1, y_2 \in V$.

(2) Es ist

$$\langle v,w \rangle \,=\, \overline{\langle w,v \rangle}$$

für alle $v, w \in V$.

(3) Es ist $\langle v,v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\langle v,v \rangle = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.

Die dabei auftretenden Eigenschaften heißen im reellen Fall *Bilinearität* (das ist nur eine andere Bezeichnung für multilinear, wenn der Definitionsbereich das Produkt von zwei Vektorräumen ist), *Symmetrie* und *positive Definitheit.* Im komplexen Fall spricht man von *sesquilinear* und von *hermitesch.* Diese auf den ersten Blick unschöne Abweichung muss gemacht werden, um die positive Definitheit zu erhalten, was wiederum die Voraussetzung für einen sinnvollen Abstandsbegriff im Komplexen ist.

Beispiel 31.2. Auf dem $\mathbb{R}^n$ ist die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\, (v,w) = ((v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n)) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \,,$$

ein Skalarprodukt, das man das *Standardskalarprodukt* nennt. Eine einfache Rechnung zeigt, dass dies in der Tat ein Skalarprodukt ist.

Beispielsweise ist im $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \cdot (-1) - 5 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = -11.$$

Definition 31.3. Ein reeller, endlichdimensionaler Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt versehen ist, heißt *euklidischer Vektorraum*.

Zu einem Vektorraum V mit einem Skalarprodukt besitzt jeder Untervektorraum $U \subseteq V$ selbst wieder durch Einschränkung ein Skalarprodukt. Insbesondere ist zu einem euklidischen Vektorraum jeder Untervektorraum $U \subseteq V$ selbst wieder ein euklidischer Vektorraum. Jeder Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ trägt somit das eingeschränkte Standardskalarprodukt. Da es stets eine Isomorphie $U \cong \mathbb{R}^m$ gibt, kann man auch das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^m$ nach U übertragen, doch hängt dies von der gewählten Isomorphie ab und hat im Allgemeinen nichts mit dem eingeschränkten Standardskalarprodukt zu tun.

Definition 31.4. Das auf dem $\mathbb{C}^n$ durch

$$\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}$$

gegebene Skalarprodukt heißt *(komplexes) Standardskalarprodukt*.

Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} 4-3i \\ 2+7i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2+5i \\ 3-6i \end{pmatrix} \right\rangle &= (4-3i) \cdot \overline{-2+5i} + (2+7i) \cdot \overline{3-6i} \\ &= (4-3i) \cdot (-2-5i) + (2+7i) \cdot (3+6i) \\ &= -23 - 14i - 36 + 33i \\ &= -59 + 19i. \end{aligned}$$

Bemerkung 31.5. Wenn man einen komplexen Vektorraum V mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ als reellen Vektorraum auffasst, so ist durch den Realteil

$$\mathrm{Re}\,(\langle v, w \rangle)$$

ein reelles Skalarprodukt gegeben. Wegen

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \mathrm{Re}\,(\langle v, w \rangle) + i\,\mathrm{Im}\,(\langle v, w \rangle) \\ &= \mathrm{Re}\,(\langle v, w \rangle) - i\,\mathrm{Re}\,(i\,\langle v, w \rangle) \end{aligned}$$

$$= \operatorname{Re}(\langle v,w\rangle) - i\operatorname{Re}(\langle iv,w\rangle)$$

kann man aus dem Realteil das ursprüngliche Skalarprodukt rekonstruieren.

BEISPIEL 31.6. Es sei $[a,b]$ ein abgeschlossenes reelles Intervall mit $a < b$ und sei

$$V = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} | \, f \text{ stetig}\},$$

versehen mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation. Wir setzen

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

und erhalten damit ein Skalarprodukt. Die Additivität folgt beispielsweise aus

$$\begin{aligned} \langle f_1+f_2,g\rangle &= \int_a^b (f_1(t)+f_2(t))\overline{g(t)}dt \\ &= \int_a^b f_1(t)\overline{g(t)}dt + \int_a^b f_2(t)\overline{g(t)}dt \\ &= \langle f_1,g\rangle + \langle f_2,g\rangle . \end{aligned}$$

Die positive Definitheit folgt so: Wenn f nicht die Nullfunktion ist, so sei $s \in [a,b]$ ein Punkt mit $f(s) \neq 0$. Dann ist $|f(s)| > 0$ und wegen der Stetigkeit von f gibt es dann auch eine Umgebung $[s-\epsilon, s+\epsilon] \cap [a,b]$ der Länge $\geq \epsilon$, auf der überall

$$|f(t)| \geq c > 0$$

ist. Somit ist

$$\langle f,f\rangle = \int_a^b |f(t)|^2 \, dt \geq \int_{\max(a,s-\epsilon)}^{\min(b,s+\epsilon)} |f(t)|^2 \, dt \geq \epsilon c^2 > 0$$

positiv.

Norm

Mit einem Skalarprodukt kann man die Länge eines Vektors und damit auch den Abstand zwischen zwei Vektoren erklären.

DEFINITION 31.7. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -,-\rangle$. Dann nennt man zu einem Vektor $v \in V$ die reelle Zahl

$$|| \, v \, || = \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

die *Norm* von v.

Das Skalarprodukt $\langle v,v\rangle$ ist stets reell und nicht negativ und somit ist die Quadratwurzel eine eindeutig bestimmte reelle Zahl. Für einen komplexen Vektorraum mit einem Skalarprodukt ist es gleichgültig, ob man die Norm direkt oder über den zugrunde liegenden reellen Vektorraum bestimmt.

Satz 31.8. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -,-\rangle$ und der zugehörigen Norm $\|-\|$. Dann gilt die* Cauchy-Schwarzsche Abschätzung*, nämlich*

$$|\langle v,w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

für alle $v,w \in V$.

Beweis. Bei $w=0$ ist die Aussage richtig. Sei also $w \neq 0$ und damit auch $\|w\| \neq 0$. Damit hat man die Abschätzungen

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle v - \frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2} w, v - \frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2} w \right\rangle \\ &= \langle v,v\rangle - \frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2} \langle w,v\rangle - \frac{\overline{\langle v,w\rangle}}{\|w\|^2} \langle v,w\rangle + \frac{\langle v,w\rangle \overline{\langle v,w\rangle}}{\|w\|^4} \langle w,w\rangle \\ &= \langle v,v\rangle - \frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2} \overline{\langle v,w\rangle} - \frac{\overline{\langle v,w\rangle}}{\|w\|^2} \langle v,w\rangle + \frac{\langle v,w\rangle \overline{\langle v,w\rangle}}{\|w\|^2} \\ &= \langle v,v\rangle - \frac{\langle v,w\rangle \overline{\langle v,w\rangle}}{\|w\|^2} \\ &= \langle v,v\rangle - \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|w\|^2}. \end{aligned}$$

Multiplikation mit $\|w\|^2$ und Wurzelziehen ergibt das Resultat. □

Lemma 31.9. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -,-\rangle$. Dann gelten für die zugehörige Norm folgende Eigenschaften.*

(1) $\|v\| \geq 0$,
(2) $\|v\| = 0$ *genau dann, wenn $v=0$ ist.*
(3) *Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ gilt*

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \ .$$

(4) *Für $v,w \in V$ gilt*

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \ .$$

Beweis. Die ersten beiden Eigenschaften folgen direkt aus der Definition des Skalarprodukts. Die Multiplikativität folgt aus

$$\|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda \langle v, \lambda v\rangle = \lambda\overline{\lambda} \langle v,v\rangle = |\lambda|^2 \|v\|^2 \ .$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung schreiben wir

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + \langle v,w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle} \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\langle v,w\rangle) \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\,|\langle v,w\rangle| \end{aligned}$$

Aufgrund von Satz 31.8 ist dies $\leq (\|v\| + \|w\|)^2$. Diese Abschätzung überträgt sich auf die Quadratwurzeln. □

Mit der folgenden Aussage, der *Polarisationsformel*, kann man ein Skalarprodukt aus der Norm rekonstruieren.

LEMMA 31.10. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$ und der zugehörigen Norm $\|-\|$. Dann gilt bei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die Beziehung*

$$\langle v,w \rangle = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)$$

und bei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die Beziehung

$$\langle v,w \rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + i\,\|v+iw\|^2 - i\,\|v-iw\|^2\right).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 31.8. □

Normierte Vektorräume

Aufgrund von Lemma 31.9 ist die Norm zu einem Skalarprodukt eine Norm im Sinne der folgenden Definition und ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt ist insbesondere ein normierter Vektorraum.

DEFINITION 31.11. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung

$$\|-\| \colon V \longrightarrow \mathbb{R},\ v \longmapsto \|v\|,$$

heißt *Norm*, wenn die folgenden Eigenschaften für alle $v, w \in V$ gelten.

(1) $\|v\| \geq 0$,
(2) $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.
(3) Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ gilt

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|.$$

(4) Für $v, w \in V$ gilt

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

DEFINITION 31.12. Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum heißt *normierter Vektorraum*, wenn auf ihm eine Norm $\|-\|$ definiert ist.

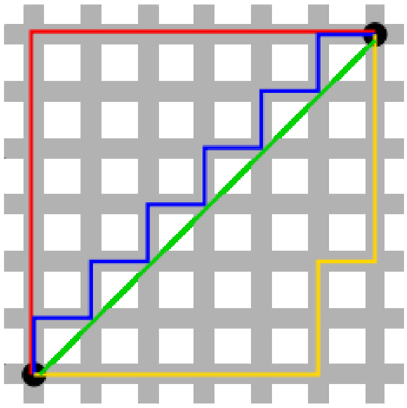
Auf einem euklidischen Vektorraum nennt man die über das Skalarprodukt gegebene Norm auch die *euklidische Norm*. Bei $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt ist

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}.$$

BEISPIEL 31.13. Im $\mathbb{K}^n$ ist durch

$$\|x\|_{\max} := \max\left(|x_i|, i = 1, \ldots, n\right)$$

eine Norm definiert, die die *Maximumsnorm* heißt.



Die Summenmetrik heißt auch *Taxi-Metrik*. Die grüne Linie repräsentiert den euklidischen Abstand, die anderen repräsentieren den Summenabstand.

Beispiel 31.14. Im $\mathbb{K}^n$ ist durch

$$||x||_{\text{sum}} := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

eine Norm definiert, die die *Summennorm* heißt.

Zu einem Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, in einem normierten Vektorraum V nennt man den Vektor $\frac{v}{||v||}$ den zugehörigen *normierten Vektor*. Ein solcher normierter Vektor besitzt die Norm 1. Der Übergang zum normierten Vektor heißt *Normierung*.

Normierte Räume als metrische Räume

Definition 31.15. Sei M eine Menge. Eine Abbildung $d \colon M \times M \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik* (oder *Distanzfunktion*), wenn für alle $x, y, z \in M$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ (Definitheit),
(2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie), und
(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung).

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (M, d), wobei M eine Menge und $d \colon M \times M \to \mathbb{R}$ eine Metrik ist.

Definition 31.16. Auf einem normierten Vektorraum V mit Norm $|| - ||$ definiert man die *zugehörige Metrik* durch

$$d(v, w) := ||v - w|| \,.$$

Dies ist in der Tat eine Metrik.

Lemma 31.17. *Ein normierter Vektorraum V ist durch die zugehörige Metrik ein metrischer Raum.*

Beweis. Siehe Aufgabe 31.12. □

Damit ist ein euklidischer Raum insbesondere ein *metrischer Raum*.

Bemerkung 31.18. Ein affiner Raum über einem normierten Vektorraum V wird zu einem metrischen Raum, indem man

$$d(P,Q) = || P - Q ||$$

setzt. Diese Metrik ist invariant unter Translationen.

Abbildungsverzeichnis