Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 57

Übungsaufgaben

AUFGABE 57.1. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass das charakteristische Polynom zu φ mit dem charakteristischen Polynom der Tensorierung φ_L übereinstimmt.

Allerdings können beim Übergang von K nach L neue Nullstellen des charakteristischen Polynoms und damit neue Eigenwerte und Eigenvektoren auftreten.

AUFGABE 57.2. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und seien V und W Vektorräume über K.

a) Definiere eine L-lineare Abbildung

$$L \otimes_K \operatorname{Hom}_K(V,W) \longrightarrow \operatorname{Hom}_L(V_L, W_L),$$

die $c \otimes \varphi$ auf $c\,(\operatorname{Id}_L \otimes \varphi)$ abbildet.

b) Seien die beiden Vektorräume nun endlichdimensional. Zeige, dass die Abbildung aus Teil (a) ein Isomorphismus ist.

AUFGABE 57.3. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, V ein K-Vektorraum und W ein L-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine K-lineare Abbildung. Zeige, dass es eine L-lineare Abbildung

$$\tilde{\varphi}\colon V_L \longrightarrow W$$

gibt, die φ fortsetzt (also auf $V \subseteq V_L$ mit φ übereinstimmt).

AUFGABE 57.4. Vereinfache in $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ den Ausdruck

$$e_1 \wedge (e_2 - 4e_3) - e_2 \wedge (5e_1 + 3e_2 - 4e_3) + (7e_3) \wedge e_1 - 4\,(5e_1 \wedge 2e_3) + (2e_1 - 8e_2) \wedge (2e_1 - 8e_2).$$

Aufgabe 57.5. Vereinfache in $\bigwedge^3 \mathbb{R}^3$ den Ausdruck

$$(e_1 - e_2) \wedge (e_2 - 4e_3) \wedge (3e_1 - 5e_2 + 4e_3) + (7e_3) \wedge (e_1 - 4e_3) \wedge (5e_3 - e_1) - (4e_3 - 2e_2) \wedge e_2 \wedge (4e_1 + 3e_2 - 4e_3).$$

Aufgabe 57.6. Vereinfache in $\bigwedge^3 \mathbb{R}^3$ den Ausdruck

$$-7e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + 6e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 + 4e_3 \wedge e_2 \wedge e_1 + 3e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 + 5e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 - 11e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 .$$

Aufgabe 57.7. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige die Gleichheit $V = \bigwedge^1 V$.

Aufgabe 57.8. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Zeige, dass $\bigwedge^n V$ nicht der Nullraum ist.

Aufgabe 57.9. Sei K ein Körper und V ein m-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei $n > m$. Zeige $\bigwedge^n V = 0$.

Aufgabe 57.10. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es seien $f_1, \ldots, f_k \in V^*$. Zeige, dass die Abbildung

$$V \times \cdots \times V \longrightarrow K,\ (v_1, \ldots, v_k) \longmapsto \det\left(f_i(v_j)\right)_{1 \leq i,j \leq k},$$

multilinear und alternierend ist.

Aufgabe 57.11. Zeige folgende Aussage über das Dachprodukt: Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Es seien $v_1, \ldots, v_r$ und $w_1, \ldots, w_r$ Vektoren in V, die miteinander in der Beziehung

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}$$

stehen, wobei M eine $r \times r$-Matrix bezeichnet. Dann gilt in $\bigwedge^r V$ die Beziehung

$$w_1 \wedge \ldots \wedge w_r = (\det M) v_1 \wedge \ldots \wedge v_r .$$

Aufgabe 57.12. Beweise Satz 57.9 direkt aus der Konstruktion für das Tensorprodukt und der Konstruktion für das Dachprodukt.

Aufgabe 57.13. Es sei V ein K-Vektorraum und sei $n \in \mathbb{N}$.

(1) Kann man durch die Zuordnung

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$$

eine (lineare) Abbildung von $\bigwedge^n V$ nach $V \otimes \cdots \otimes V$ festlegen?

(2) Kann man auf die kanonische Abbildung

$$\pi\colon\ V \times \cdots \times V \longrightarrow V \otimes \cdots \otimes V$$

die universelle Eigenschaft für das Dachprodukt anwenden, um eine lineare Abbildung von $\bigwedge^n V$ nach $V \otimes \cdots \otimes V$ zu erhalten?

Aufgabe 57.14. Es sei V ein K-Vektorraum und sei

$$\pi\colon\ V \times \cdots \times V \longrightarrow V \otimes \cdots \otimes V$$

(mit n Faktoren) die kanonische multilineare Abbildung.

(1) Es sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation. Zeige, dass es eine multilineare Abbildung

$$\pi \circ \sigma\colon\ V \times \cdots \times V \longrightarrow V \otimes \cdots \otimes V$$

mit

$$(\pi \circ \sigma)(v_1, \ldots, v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$$

gibt.

(2) Zeige, dass $\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \pi \circ \sigma$ multilinear und alternierend ist.

(3) Zeige, dass es eine lineare Abbildung

$$\Psi\colon\ \bigwedge^n V \longrightarrow V \otimes \cdots \otimes V$$

mit

$$\Psi(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$$

gibt.

Aufgabe 57.15. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, V ein K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es eine kanonische Isomorphie der L-Vektorräume

$$\bigwedge^n V_L \text{ und } (\bigwedge^n V)_L$$

(wobei links das Dachprodukt über L steht) gibt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 57.16. (2 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige

$$\det \varphi = \det \varphi_L .$$

Aufgabe 57.17. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V und

$$\varphi_{\mathbb{C}} \colon V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$$

die zugehörige Komplexifizierung. Zeige, dass φ genau dann (asymptotisch) stabil ist, wenn dies für $\varphi_{\mathbb{C}}$ gilt.