数理経済学解説

成実清松・〔著〕

共立社

１

昭和１３

新輯教育數學講座

數理經濟學解說(1)

成實清松

合資會社 共立社

數理經濟學解說

1

名古屋高等商業學校教授・理學博士

成實清松

緒　言

數理經濟學ヲ系統的ニ完全ニ叙述スルコトハ容易ナ業デナイコトハ誰モ認メル所デアル．吾々ハココデ斯ル困難ナル業ヲ企テルモノデハナイ．數學ガ今日經濟學ニ如何ニ應用セラレツヽアルカヲ示スニ過ギナイ．コレヲ奇縁トシテ讀者ガ經濟學基礎理論ノ數學化ニ興味ヲ起サレルコトヲ筆者ハ願ツテ居ル譯デアル．從ツテ既ニ先人ノ研究セラレタ數學ヲ例示的ニ紹介シ解説スル豫定デアツテ決シテ新シキ研究ノ發表トハ考ヘテ居ナイカラ此ノ點ハ豫メ斷ツテオキタイ．序ニモ一ツ斷ラナケレバナラヌ事ハ經濟學的言葉ノ意味ヲ經濟學者ガイフ様ニ長々ト説明シテ居テハ面白クナイノデ極ク手短カニ説明シテオクコトニシタ．故ニ或ハ不明ナコトニナル所モ出ルカト思フガコレモ致シ方ナイコトデアル．

目　次

第1章 獨占ノ理論

1. 緒言

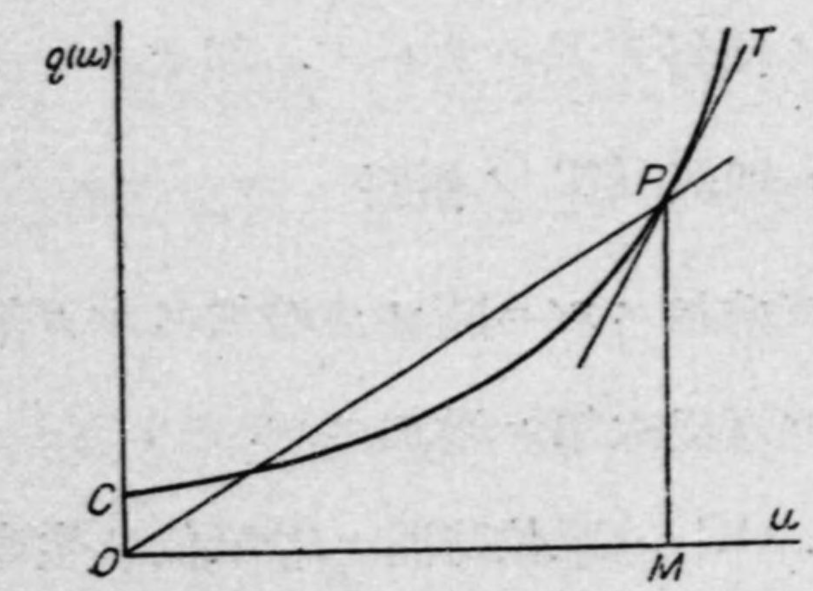
出來ルダケ多クノ例ヲ使ツテ數理經濟學ノ全體ヲ語リタイト考ヘルガ最初ニ最モ簡單ナ獨占ノ理論カラ始メル．獨占ニモ種々アリ，生產獨占，販賣獨占等考ヘラレルガココデハ簡單ノタメニ生產シタ者ガソレヲ直チニ市場ニ持チ出シ販賣スルト考ヘル．

コレカラ吾々ハ獨占，協同，競爭ノ三種ヲ說明スル．

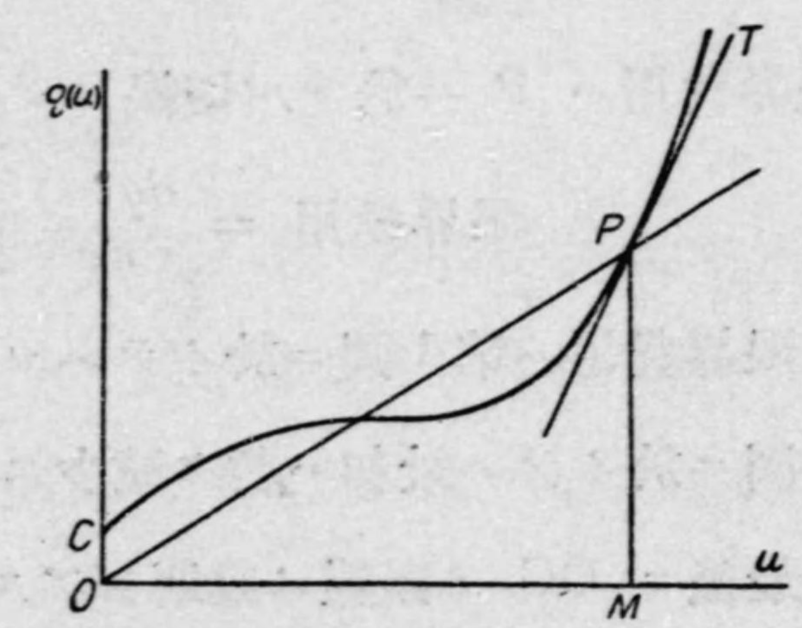
2. 生產費函數 (The Cost Function)

單位時間ニ或ル品物ヲ生產スル費用ハソノ生產セラレル分量ノミニ依ツテ決定セラレルト假定スル．而シテコノ品物ヲ單位時間ニ u 單位生產シテ市場ニ送リ出スマデニ要スル費用ヲ $q(u)$ デ表ハス．

生產費函數ノ特質ハ過度ノ生產量ハ不可能デアル．換言スレバ生產量ガ或ル特別ナ分量ヲ越ヘルトキハ費用ハ急激ナル增加ヲスル．正常ノ狀態ニ於イテハ卽チ u ガ適當ナ範圍內ニアルトキハ $q(u)$ ハ



第 1 圖



第 2 圖

最初ノウチ緩慢ナル增加函數デアルガ增加スルト共ニ次第ニソノ增加ノ割合ガ增シ遂ニハ非常ニ急激ナル增加函數トナル．生產費函數ノ模範的形狀ハ前頁ノ圖ニ表ハス如キモノデアル．

曲線上ノ任意ノ一點 P ノ座標ハ u, $q(u)$ デアル．直線 OP ノ傾斜ハ OM, MP ノ比卽チ $\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OM}}$ デアルカラマタ $\frac{q(u)}{u}$ トモナル．是ヲ u 單位生產スルトキノ平均費用トイフ．卽チ

$$\text{平均費用} = \frac{q(u)}{u} = \text{直線 OP ノ傾斜}$$

第1圖，第2圖何レノ圖ニ於イテモ u ガ增加スレバ平均費用ハ最初暫ク減少シ次イデ增加スル．

更ニ數學的ニモ興味アル經濟上ノ費用ガアル．ソレハ限界費用デアル．或ル品物ヲ u 單位生產シテ居ル時ニ更ニ Δu 單位ダケ生產量ヲ增加スル．ソレニ隨ツテ生產費用モ亦幾何カ增加スルカラソノ增加費用ヲ $\Delta q(u)$ デ表ハス．コノ增加生產量ニ對スル平均費用ハ明ラカニ $\frac{\Delta q(u)}{\Delta u}$ デアル．

若シ Δu ヲ無限小ニスルコトガデキルナラバコノ增加生產ニ對スル平均費ハ $\frac{dq(u)}{du}$ ニナルデセウ，$\frac{dq(u)}{du}$ ヲ以テ限界費用トイフ．限界費用ハ P ニ於ケル切線 PT ノ傾斜デ表ハサレル．卽チ

$$\text{限界費用} = \frac{dq(u)}{du} = \text{切線 PT ノ傾斜}$$

限界費用ハ第1圖ニ於イテハ u ガ增加スルニ隨ツテ增加スルガ第2圖ニ於イテハ最初ハ暫ク減少スルガ後次第ニ增加スル．

最後ニ OC ノ距離ノ說明デアル．OC ハ單位時間ニ零單位ノ生產ヲ行フトキニ要スル費用デアル．生產セラレル品物ノ性質ニ依ツテ

ハ OC=0 デアルガ常ニ零トハ限ラナイ．通常是ヲ固定費用トイフ．

上圖ニ於イテ若シ第1圖ノ如キ形ヲナスモノハ生產費函數ガ

$$q(u) = \mathrm{A}u^2 + \mathrm{B}u + \mathrm{C}$$

デ表ハサレルデアラウ．マタ第2圖ノ如ク限界費用ガ動搖スル形ハ

$$q(u) = \mathrm{R}u^3 + \mathrm{A}u^2 + \mathrm{B}u + \mathrm{C}$$

ノ如ク少クトモ三次式ナルコトヲ要スル．

生產費函數ガ二次式ナルトキ限界費用ハ一次式デアツテ

$$\frac{dq}{du} = 2\mathrm{A}u + \mathrm{B},$$

マタ平均費用ハ

$$\frac{q(u)}{u} = \mathrm{A}u + \mathrm{B} + \frac{\mathrm{C}}{u}$$

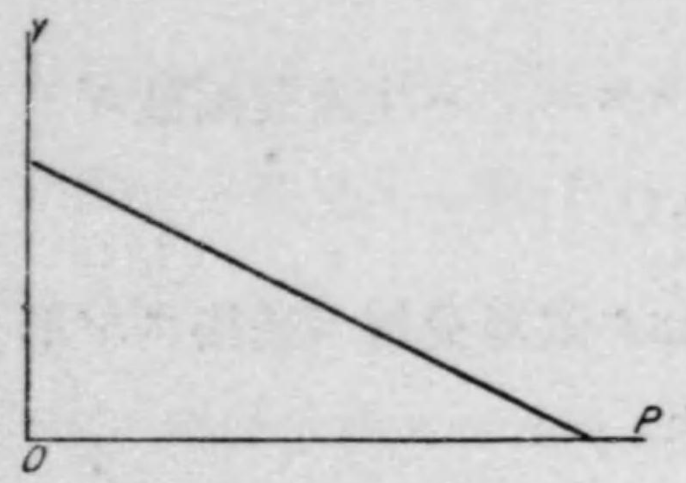
トナリ固定費用ハ C デアル．故ニ C ハ正ノ數デアル．B ハ $u=0$ ナルトキノ限界費用デアルカラ B モ亦正ノ數デアル．更ニ限界費用ハ u ガ非常ニ大キナトキ正ノ數デアルカラ A モ亦正ノ數デアル．卽チ第1圖ノ如ク u ノ正ナル値ニ對シテ遞增ニシテ且上方ニ凹 (Concave upward) デアル．

3. 需要函數 (The Demand Function)

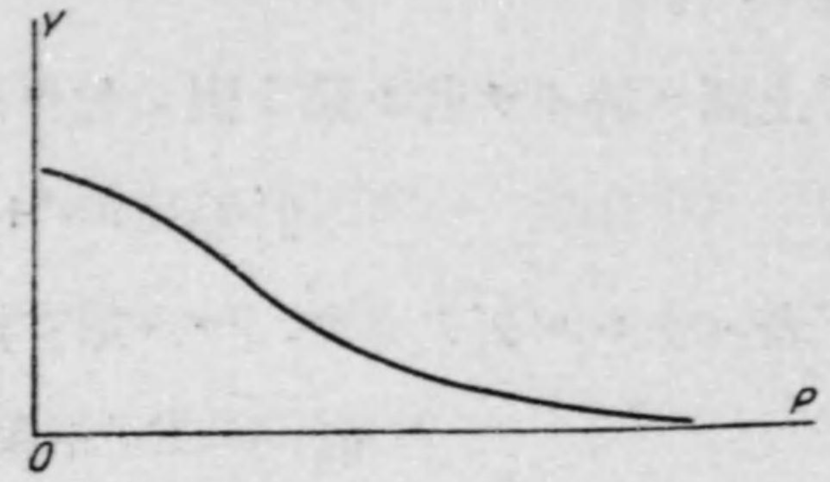
生產費函數ノトキニナシタト同樣ナ假定ノ下ニ需要ヲ定義スル．卽チ單位時間內ニ市場ニ於イテ買ハレル或ル品物ノ分量 y ハ唯ニソノ品物ノ價格 p ノミニ依ツテ決定セラレルモノト假定スル．吾々ノ假定ハ y ガ p ノミノ函數ナルコトヲ示スモノデアル．

y ノ特質ハ p ガ增加スレバ y ハ次第ニ減少スルトイフコトデア

ル．之ヲ微分學ノ言葉ヲ借リテ言フナラバ $\frac{dy}{dp}$ ハ p ノ如何ナル値



第 3 圖



第 4 圖

ノトキニモ常ニ負ノ數デアル．故ニ最モ簡單ナ場合ハ y ハ p ノ一次式デアルトキ即チ

$$y=-ap+b \quad 但シ \quad a,\ b>0$$

デアル．第 3 圖ニ示シタノガ夫デアル．一般ニハ第 4 圖ノ如ク唯 y ガ p ノ増加ニ反シテ減少スルコトヲ示スダケデアル．

4. 生產ノ獨占 (Monopoly of Production)

或ル品物ガ唯一人ノ生產者ノ爲ニ依リ生產セラレ且ツ其生產物ハ望ミ通リノ價格デ賣ルコトガ出來ル場合ヲ考ヘル．生產者ハ賣レルダケ生產スルデアラウカラ $u=y$ デアルコト勿論デアル．次ニ生產者ハ彼ノ收益ガ最大トナル樣ニソノ生產物ノ價格ヲ決定スル，別言スレバ彼ノ收益ガ最大トナル樣ニソノ生產物ノ生產量ヲ決定スルト假定スル．

單價 p デ y ダケ賣ルトソノ賣上金ハ py，マタ u ダケ生產スルニ要スル費用ハ $q(u)$ ナル故ニ $y=u$ トスルト純益 π ハ次ノ式デ與ヘラレル．

$$\pi=pu-q(u)$$

シカルニ

$$q(u)=\mathrm{A}u^2+\mathrm{B}u+\mathrm{C}, \quad y=-ap+b, \quad y=u$$

カラ

$$\pi=u\left(\frac{-u+b}{a}\right)-\mathrm{A}u^2-\mathrm{B}u-\mathrm{C}$$

$$=-\left(\frac{1}{a}+\mathrm{A}\right)u^2+\left(\frac{b}{a}-\mathrm{B}\right)u-\mathrm{C}$$

トナル．之ヲ最大ナラシメル u ノ値ハ $\frac{d\pi}{du}=0$ デアルカラ

$$-2\left(\frac{1}{a}+\mathrm{A}\right)u+\left(\frac{b}{a}-\mathrm{B}\right)=0,$$

或ハ
$$u=\frac{b-\mathrm{B}a}{2(1+\mathrm{A}a)}.$$

トシテ生產量 u ハ決定セラレ次イデ販賣價格 p ハ

$$\frac{b-\mathrm{B}a}{2(1+\mathrm{A}a)}=-ap+b$$

ヲ滿足セシムベキデアル．卽チ

$$p=\frac{\mathrm{B}a+2\mathrm{A}ab+b}{2a(1+\mathrm{A}a)}.$$

今得タ解ヲ少シク吟味シテ見ヨウ．先ヅ u ガ正ノ値ヲ與ヘナケレバナラヌ．卽チ次ノ不等式ガ成立シナケレバナラヌ．

$$b-\mathrm{B}a>0 \quad 或ハ \quad \frac{b}{a}>\mathrm{B}$$

此ノ不等式ノ左邊ノ $\frac{b}{a}$ ハ需要量 y ガ零トナツタトキノ價値デアル．卽チ若シ價格ガ $\frac{b}{a}$ トナレバ高クスギテ誰モソノ物ヲ買フ人ガナクナルトイフ價格ヲ表ハス．マタ右邊ノ B ハ生產量 u ガ零ナルトキノ限界費用デアル．卽チ最初ノ限界費用デアル．依ツテ u ガ

正ナルタメノ不等式ハ最初ノ限界費用ニ等シイ價格ナラバマダ需要量ガアルコトヲ意味スル.

更ニ π ノ右邊 u^2 ノ係數ハ $-\left(\frac{1}{a}+\mathrm{A}\right)$ デアルカラ確ニ正ノ數, 卽チ吾々ノ求メタ u ノ値ニ應ズル π ハ最大デアルガ π ノ全部ガ負數ナルトキハ純益ハ純損トナリ, 隨ツテ純損ガ最小トナル場合ヲ求メタコトニナル. シカシ π ガ眞實ノ純益金ナルタメニハ次ノ不等式ガ成立シナケレバナラヌ.

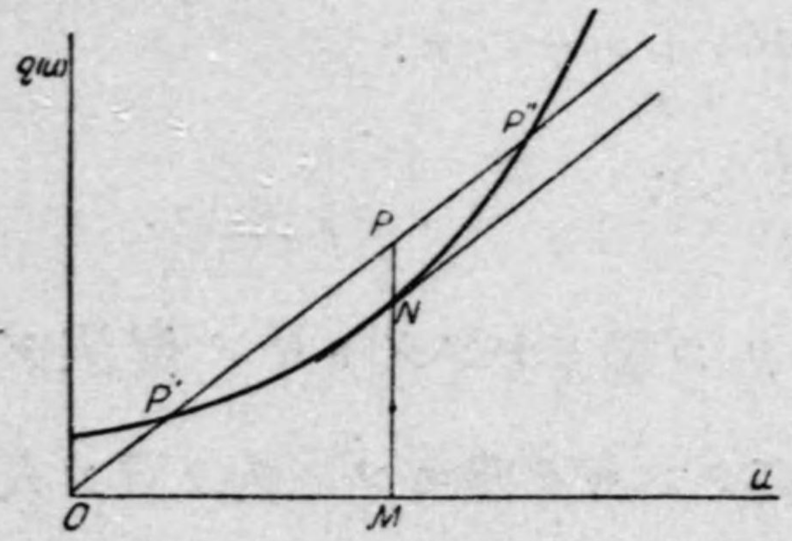
$$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}-\mathrm{B}\right)u-\mathrm{C}=\frac{(b-a\mathrm{B})^2}{4a(1+\mathrm{A}a)}-\mathrm{C}>0$$

$$\therefore\quad \mathrm{C}<\frac{(b-a\mathrm{B})^2}{4a(1+\mathrm{A}a)}$$

卽チ固定費 C ガ右邊ニ表ハサレタ樣ナ數値ヨリモ小ナルコトヲ要スル.

5. 固定價格 (Price Fixing)

今マデ得タ所ト根本的ニ異ナツタ見方ヲシテ價格ガ生產量 u ノ多少ニ異ラズ恒ニ一定ナル値ヲトルモノト考ヘ此ノ時生產者ハ如何ナル態度ヲトルカヲ考ヘテ見ル. 今コレヲ次ノ圖ヲ使ツテ說明スレバ



第 5 圖

$q(u)$ ノ曲線卽チ生產費曲線, 及ビ原點 O ヲ通過シテソノ傾斜ガ固定價格 p ニ等シキ直線卽チ價格直線ヲ描ク. 價格直線上ノ任意ノ一點 P ノ横座標ヲ OM, 縱座標ヲ MP トスレバ生產品ノ u 單位 $(\mathrm{OM}=u)$ ヲ賣却スルトキソノ賣却代金ハ $pu=\mathrm{MP}$ デ表ハサレル.

生產費曲線ト價格直線トノ交點 P′ 又ハ P″ ニ於イテハ費用ト賣却代金トガ等シクナルカラ利益金ハ少シモナイ. P ヲ P′P″ ノ間ニ採リ, PM ガ生產費曲線ト交ハル點ヲ N トスレバ $\mathrm{NP}=pu-q(u)$ デアルカラ NP ハ純益金ヲ表ハス.

p ガ一定ナルトキ純益金 $pu-q(u)$ ガ最大ナルタメノ u ハ

$$p-\frac{dq}{du}=0$$

ヲ滿足セシメル u デアル. 換言スレバ生產費曲線ノ切線ガ價格直線ト平行ナル位置デアル.

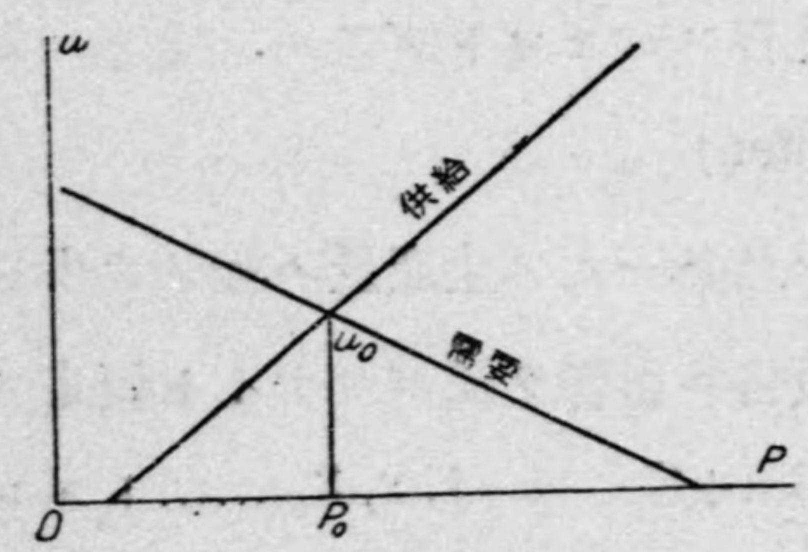
若シ $q(u)$ ガ二次式 $\mathrm{A}u^2+\mathrm{B}u+\mathrm{C}$ ナラバ $\frac{dq}{du}=2\mathrm{A}u+\mathrm{B}$ デアルカラ $\pi=pu-q(u)$ ハ

$$p-2\mathrm{A}u-\mathrm{B}=0$$

ナル如キ u ノ値ノトキ純益金ハ最大トナル. 卽チ生產者ハ生產量 u ヲ

$$u=\frac{p-\mathrm{B}}{2\mathrm{A}}$$

ニ依ツテ與ヘラレル程生產スルデアラウ. コノ量 u ヲ價格 p デ生產者ガ供給スル分量卽チ供給量トイフコトガデキル. 一般ニ供給量ハ價格 p ノ函數デアル. 現在與ヘタモノハソノ特別簡單ナ場合デアツテ價格軸ト B ニ於テ交ハリ, 傾斜係數ガ $\frac{1}{2\mathrm{A}}$ デアル樣ナ直線デアル.



第 6 圖

需要量 y ガ $-ap+b$ デ表ハ

サレ, 供給量 u ガ $\frac{p-\mathrm{B}}{2\mathrm{A}}$ デ表ハサレルトキハ $y=u$ ニ依ツテソノ市場ニ於ケル實現スル價格 p 及ビ販賣セラレル分量 u ハ前頁ノ第 6 圖デ與ヘラレル. 先ヅ p ハ

$$-ap+b=\frac{p-\mathrm{B}}{2\mathrm{A}}$$

即チ

$$p_0=\frac{\mathrm{B}+2\mathrm{A}b}{1+2\mathrm{A}a}.$$

マタコノ p ノ値ニ應スル u 即チ u_0 ハ

$$u_0=\frac{b-\mathrm{B}a}{1+2\mathrm{A}a}$$

茲ニ得タ u_0 ハ第 4 節デ得タ値ヨリモ大デアル. 即チ $\frac{b-\mathrm{B}a}{1+2\mathrm{A}a}$ ハ $\frac{b-\mathrm{B}a}{2(1+\mathrm{A}a)}$ ヨリモ大デアル. 隨ツテ現在得タ p_0 ハ第 4 節デ得タ p ヨリモ小デアル. 何トナレバ

$$\frac{\mathrm{B}a+2\mathrm{A}ab+b}{2a(1+\mathrm{A}a)}-\frac{\mathrm{B}+2\mathrm{A}b}{1+2\mathrm{A}a}=\frac{b-\mathrm{B}a}{2a(1+2\mathrm{A}a)(1+\mathrm{A}a)}=\frac{u_0}{2a(1+\mathrm{A}a)}>0.$$

是ヲ要スルニ生產獨占者ガ最大利益ヲ獲得センガタメノ價格ヨリモ低廉ニ價格ヲ固定シテモ市場デ捌ケル品物ノ分量ガ減少スル理由ニハナラナイコト現ニ茲ニ示シタルガ如ク生產者ガ市場ニ供給スル分量ガ增加スルモノデアルコトハ注目スベキコトデアル.

6. 需要ト供給 (Demand and Offer)

或ル品物ノ多數ノ生產者ガ存在シ且各一人ノ生產量ハ極メテ少量ナルタメ市場ニ於ケルソノ商品ノ價格ニ影響ヲ及ボサナイト假定スル. 更ニソノ生產費函數ヲ $\mathrm{A}_s u^2+\mathrm{B}_s u+\mathrm{C}_s \quad s=1, 2, 3, \ldots\ldots$ トスレバソノ供給量ハ

$$u_s=\frac{p}{2\mathrm{A}_s}-\frac{\mathrm{B}_s}{2\mathrm{A}_s} \quad s=1, 2, 3, \ldots\ldots$$

トナル, 隨ツテ市場ヘノ全供給量 u ハ

$$u=\Sigma u_s=p\Sigma\frac{1}{2\mathrm{A}_s}-\Sigma\frac{\mathrm{B}_s}{2\mathrm{A}_s}=\alpha p-\beta$$

デ表ハサレル. 市場ニ於イテ均衡ガ得タレルタメニハ生產者ガ市場ヘ供給スル量ト消費者ガ市場デ需要スル量トガ等シクナケレバナラヌ. 換言スレバ總供給量ハ總需要量ニ等シク, 隨ツテソノ價格及ビ生產量ハ第 6 圖ニヨツテ決定セラレル.

若シ總供給量ガ需要量ヨリモ少イトキハ即チ p ガ第 6 圖ノ p_0 ヨリ小サイトキニハ價格ハ騰貴シテ均衡スルデアラウ. 反對ニ總供給量ガ需要量ヨリモ多イトキハ即チ p_0 ヨリモ p ガ大ナルトキハ價格ハ下落シテ均衡スルデアラウ. 換言スレバ需要供給圖ノ示ス均衡價格ハ市場ガ均衡ヲ保ツテ居ナイトキニ價格ガ變動スル方向ヲ示スモノデアル.

7. n 人ノ生產者

前節デ假定シタ如ク n 人ノ生產者ガ各人ノ生產量ヲ極メテ少量ニシテ市場ニ於ケルソノ商品ノ價格ニ影響ヲ及ボシ得ナイ程度ナルトキハ市場ヘノ全供給量 u ハ

$$u=\alpha p-\beta, \text{但シ } \alpha=\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{\mathrm{A}_s}, \ \beta=\frac{1}{2}\Sigma\frac{\mathrm{B}_s}{\mathrm{A}_s}$$

デアル. 簡單ニ $\mathrm{A}_s=\mathrm{A}$, $\mathrm{B}_s=\mathrm{B}$ ナル場合ハ

$$\alpha=\frac{n}{2\mathrm{A}}, \ \beta=\frac{n\mathrm{B}}{2\mathrm{A}}$$

トナル. 故ニ供給量 u ハ

$$u=\frac{n(p-\mathrm{B})}{2\mathrm{A}}$$

デ表サレ之ガ需要量 y 卽チ $-ap+b$ ニ等シイトオケバ市場デ現實ニ取引キサレル p 及ビ u ヲ得. 卽チ

$$\frac{n(p-\mathrm{B})}{2\mathrm{A}}=-ap+b$$

ノ分母ヲ拂ツテ

$$np-n\mathrm{B}=-2\mathrm{A}ap+2\mathrm{A}b$$

移項シテ p ヲ求ムレバ

$$p=\frac{2\mathrm{A}b+n\mathrm{B}}{n+2\mathrm{A}a}$$

故ニ

$$u=y=-ap+b=b-\frac{2\mathrm{A}ab+n\mathrm{B}a}{n+2\mathrm{A}a}=\frac{nb-n\mathrm{B}a}{n+2\mathrm{A}a}$$

マタ

$$u_s=\frac{p-\mathrm{B}_s}{2\mathrm{A}_s}=\frac{p-\mathrm{B}}{2\mathrm{A}}=\frac{b-\mathrm{B}a}{n+2\mathrm{A}a}$$

是等ノ價ハ次節デ說明スル n 人ガ自由競爭ヲスル場合ニ於ケル價格及ビ生產量ト n 人ガ協同スル場合ニ於ケル價格及ビ生產量トハ全然異ナル價ナルコトハ注意スベキコトデアル.

而シテ價格及ビ各人ノ生產量ガ夫々

$$\frac{2\mathrm{A}b+n\mathrm{B}}{n+2\mathrm{A}a}\quad 及ビ\quad \frac{b-\mathrm{B}a}{n+2\mathrm{A}a}$$

ナルトキノ各生產者ノ純利益金 π_s ハ

$$\begin{aligned}\pi_s&=pu_s-\mathrm{A}u_s^2-\mathrm{B}u_s-\mathrm{C}\\&=\frac{(2\mathrm{A}b+n\mathrm{B})(b-\mathrm{B}a)}{(n+2\mathrm{A}a)^2}-\frac{\mathrm{A}(b-\mathrm{B}a)^2}{(n+2\mathrm{A}a)^2}-\frac{\mathrm{B}(b-\mathrm{B}a)}{n+2\mathrm{A}a}-\mathrm{C}\\&=\frac{\mathrm{A}(b-\mathrm{B}a)^2}{(n+2\mathrm{A}a)^2}-\mathrm{C}\end{aligned}$$

隨ツテ $\pi_s>0$ デナケレバ各生產者ノ利益金ガナクナル, 依ツテ

$$\mathrm{A}(b-\mathrm{B}a)^2-\mathrm{C}(n+2\mathrm{A}a)^2>0$$

又ハ人數 n ハ

$$\sqrt{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}}(b-\mathrm{B}a)-2\mathrm{A}a>n$$

ナル條件ヲ滿足シナケレバ利益金ガナクナル.

第 2 章　協同及ビ競爭ノ理論

1. 二生產者

或ル一種ノ品物ヲ生產スル者ガ唯二人居ツテ各人夫々單位時間ニ u_1, u_2 單位ヲ生產スルト考ヘル．更ニ計算ヲ容易ナラシメルタメニ同一ノ生產費函數ニ支配セラレルモノトス．卽チ

$$q(u_s)=Au_s^2+Bu_s+C, \quad s=1,\ 2, \qquad A,\ B,\ C>0$$

トスル．前章デ假定シタノト同樣ニ市場デ需要セラレル分量 y ト此等兩人ノ生產スル分量ノ和トハ相等シイトスル．卽チ $u_1+u_2=y$ 更ニ需要函數モ前章ノ通リ

$$y=-ap+b, \qquad a,\ b>0$$

トスル．各生產者ガ單位時間ニ得ル純益ヲ π_s $s=1,\ 2$ トスレバ

$$\pi_s=pu_s-q(u_s)=pu_s-Au_s^2-Bu_s-C \quad s=1,\ 2$$

トナル．玆ニ p, u_s $s=1,\ 2$ ヲ決定スルタメニハ更ニ別種ノ假定ヲ必要トスル．

2. 協同 (Cooperation)

協同トイフ言葉ハ總テノ生產者ガ一致シテソノ總體ノ利益ヲ最大ナラシメント協力スル組織ヲ意味スル．卽チ各生產者ハ單位時間內ニ生產スル分量 u_s ヲシテ單位時間ニ獲得スル利益ノ總計ヲ最大ナラシメル樣ニ決定スルノガ協同デアル．

利益ノ總計 π ハ二人ノ生產者ノ場合ニハ

$$\pi=\pi_1+\pi_2=p(u_1+u_2)-q(u_1)-q(u_2)$$
$$=p(u_1+u_2)-A(u_1^2+u_2^2)-B(u_1+u_2)-2C$$

デアルカラ $u_1+u_2=-ap+b$ ナル條件ノ下デ π ヲシテ最大ナラシメントス．卽チ

$$\pi=\frac{(u_1+u_2)(b-u_1-u_2)}{a}-A(u_1^2+u_2^2)-B(u_1+u_2)-2C$$

ヲ u_1 及ビ u_2 ニ關スル偏微係數ヲ求メ是等ヲ零ニ等シイトオク．

$$\frac{\partial\pi}{\partial u_1}=\frac{b}{a}-\frac{2(u_1+u_2)}{a}-2Au_1-B=0$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial u_2}=\frac{b}{a}-\frac{2(u_1+u_2)}{a}-2Au_2-B=0$$

是等二式ヲ邊々引キ算ヲ行ツテ $A>0$ ヲ利用スレバ明ラカニ $u_1=u_2$ ナルコトヲ知ル．故ニ一般ニ

$$\frac{b}{a}-\frac{4u_s}{a}-2Au_s-B=0 \qquad s=1,\ 2$$

カラ直チニ

$$u_1=u_2=\frac{b-Ba}{2(2+Aa)}$$

ヲ得．是等ノ値ガ π ノ最大値ヲ與ヘルコトハ π ノ式カラ容易ニ分ルコトデアルガ嚴密ニ證明スルナラバ

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial u_1^2}=\frac{\partial^2\pi}{\partial u_2^2}=-\frac{2}{a}-2A, \quad \frac{\partial^2\pi}{\partial u_1\partial u_2}=-\frac{2}{a}$$

ヲ利用シテ

$$\left(\frac{\partial^2\pi}{\partial u_1\partial u_2}\right)^2-\frac{\partial^2\pi}{\partial u_1^2}\frac{\partial^2\pi}{\partial u_2^2}=-4A\left(\frac{1}{a}+A\right)<0$$

カラ結論シ得ルコトハ諸子ノ既ニ知ル所デアラウ．

更ニコノ極値ニ對應スル u 及ビ p ノ値ヲ求メルナラバ

$$u=u_1+u_2=2u_s=\frac{b-\mathrm{B}a}{2+\mathrm{A}a}$$

$$p=\frac{b}{a}-\frac{2u_s}{a}=\frac{b}{a}-\frac{b-\mathrm{B}a}{a(2+\mathrm{A}a)}=\frac{b+\mathrm{A}ab+\mathrm{B}a}{a(2+\mathrm{A}a)}$$

3. 競爭 (Competition)

前節デ考ヘタ樣ナ狀態卽チ數人ノ生產者ガアツテ市場デ捌ケル品物ノ分量ト各生產者ノ生產スル分量ノ和トガ等シイ場合ヲ考ヘヨ. 而シテ此度ハ各生產者ハ各人別々ニ彼自身ノ利益ノミヲ念願シテ他人ノ損失ヲ考ヘナイ組織ヲ考ヘ之ヲ競爭トイフ. 卽チ競爭トハ各競爭者ハ各自ノ單位時間內ノ生產量 u_s ヲシテ互ニ獨立ニ, シカモ彼自身ノ單位時間內ノ利益 π_s ヲシテ最大値ヲトル樣ニ決定スルモノトスル. 今二人ノ生產者ノ競爭ヲ考ヘルト

$$\pi_s=pu_s-q(u_s)=pu_s-\mathrm{A}u_s^2-\mathrm{B}u_s-\mathrm{C},\quad s=1,\ 2$$

但シ

$$y=-ap+b,\quad u_1+u_2=u=y.$$

故ニ

$$\pi_s=u_s\left(\frac{b}{a}-\frac{u_1+u_2}{a}\right)-\mathrm{A}u_s^2-\mathrm{B}u_s-\mathrm{C}\quad s=1,\ 2$$

各自ガ自身ノ利益ヲ最大ナラシメンニハ

$$\frac{\partial\pi_1}{\partial u_1}=\frac{b}{a}-\frac{2u_1+u_2}{a}-2\mathrm{A}u_1-\mathrm{B}=0$$

$$\frac{\partial\pi_2}{\partial u_2}=\frac{b}{a}-\frac{u_1+2u_2}{a}-2\mathrm{A}u_2-\mathrm{B}=0$$

引キ算ヲ行ヒ $\left(\frac{1}{a}+2\mathrm{A}\right)>0$ ナルコトニ注意スレバ明ラカニ $u_1=u_2$ ヲ得. 依ツテ

$$\frac{b}{a}-\frac{3u_s}{a}-2\mathrm{A}u_s-\mathrm{B}=0$$

カラ

$$u_1=u_2=\frac{b-\mathrm{B}a}{3+2\mathrm{A}a}$$

$$\frac{\partial^2\pi_1}{\partial u_1^2}=\frac{\partial^2\pi_2}{\partial u_2^2}=-2\left(\frac{1}{a}+\mathrm{A}\right)<0$$

ナルガ故ニ π_s ハ何レモ最大ナルコトヲ知ル.

更ニ是等ノ値ニ對應スル u 及ビ p ハ

$$u=u_1+u_2=\frac{2(b-\mathrm{B}a)}{3+2\mathrm{A}a}$$

$$p=\frac{b}{a}-\frac{u}{a}=\frac{b}{a}-\frac{2(b-\mathrm{B}a)}{a(3+2\mathrm{A}a)}=\frac{b+2\mathrm{A}ab+2\mathrm{B}a}{a(3+2\mathrm{A}a)}$$

トナル.

4. n 人ノ生產者ノ場合

生產者ガ一般ニ n 人アツテシカラ各人ノ生產費函數ハ何レモ

$$q(u_s)=\mathrm{A}u_s^2+\mathrm{B}u_s+\mathrm{C},\qquad s=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n$$

トスル. n 人ノ生產者ガ協同スルトキ市場デ需要スル分量ダケ n 人デ生產スルモノトスル. コノトキノ價格 p 及ビ各人ノ生產量(單位時間內ノ) u_s ヲ夫々 $p_n^{(a)}$, $u_{s,n}^{(a)}$ ト表ハセバ

$$p_n^{(a)}=\frac{nb+2\mathrm{A}ab+n\mathrm{B}a}{2a(n+\mathrm{A}a)},\quad u_{s,n}^{(a)}=\frac{b-\mathrm{B}a}{2(n+\mathrm{A}a)}$$

トナル. マタ n 人ノ生產人ガ競爭スルトキノ價格 p 及ビ生產量 u_s ヲ夫々 $p_n^{(b)}$, $u_{s,n}^{(b)}$ トスレバ

$$p_n^{(b)}=\frac{b+2\mathrm{A}ab+n\mathrm{B}a}{a(n+1+2\mathrm{A}a)},\quad u_{s,n}^{(b)}=\frac{b-\mathrm{B}a}{n+1+2\mathrm{A}a}$$

トナル.

若シ n ガ次第ニ大キクナルトキハ $u_{s,n}^{(a)}$ モ $u_{s,n}^{(b)}$ モ共ニ n ガ分母ニノミ存在スル故ニ次第ニ小サクナリ n ガ非常ニ大キクナレバ遂ニハ

$$u_{s,n}^{(a)} \sim \frac{b-\mathrm{B}a}{2n}, \quad u_{s,n}^{(b)} \sim \frac{b-\mathrm{B}a}{n}$$

トナル故ニ n ガ非常ニ大ナルトキハ協同スル場合ノ各自生產量ハ競爭スル場合ノ各自ノ生產量ノ約半分デアル.

コノ事ハマタ一般ナル n ニ對シテ常ニ

$$u_{s,n}^{(a)} = u_{s,2n-1}^{(b)}$$

ガ成立スル故ニ分ルコトデモアル.

次ニ n ガ次第ニ大キクナルトキ $p_n^{(a)}$, $p_n^{(b)}$ モ亦次第ニ小サクナル. 何トナレバ

$$p_n^{(a)} = \frac{b+\mathrm{B}a}{2a} + \frac{\mathrm{A}(b-\mathrm{B}a)}{2(n+\mathrm{A}a)}$$

$$p_n^{(b)} = \mathrm{B} + \frac{(1+2\mathrm{A}a)(b-\mathrm{B}a)}{a(n+1+2\mathrm{A}a)}$$

ト書キ直シテ考ヘレバ直チニ分ル. 更ニ n ヲ非常ニ大キクシテユケバ遂ニハ

$$p_\infty^{(a)} \sim \frac{b+\mathrm{B}a}{2a} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\mathrm{B}\right), \qquad p_\infty^{(b)} \sim \mathrm{B}$$

ナルガ故ニ非常ニ多數ノ生產爭ガ競走スルトキハソノ價格ハ限界費用ニ接近シテ來ル. シカシ協同スルトキハソノ價格ハ限界費用ト需要零ナル價格トヲ折半シタモノニ接近スル.

次ニ A ガ非常ニ小サクナルトキハ協同スルトキハ n ガ非常ニ大キクナル場合ト同樣ナ事ニナル卽チ $\dfrac{\mathrm{A}}{n}$ ガ一定ナラバ $p_n^{(a)}$, $u_{s,n}^{(a)}$ ノ

値ハ不變デアル. 反シテ競爭スルトキハ A ガ小サクナレバ

$$p_n^{(b)} \sim \frac{b+n\mathrm{B}a}{a(n+1)}, \quad u_n^{(b)} \sim \frac{b-\mathrm{B}a}{n+1}$$

トナツテ n ガ非常ニ大キクナル場合トハ異ナツタ結果ニ到達スル.

是等ノ諸點カラ觀察シテモ協同ト競爭トハソノ本質ニ於イテ全然異ナツタ性質ヲ有スルコトガ分ルデアラウ.

5. 人數ノ制限

無暗ニ多人數ノ生產者ガ自由競爭ヲ行フトキハ各生產者ノ利益金ガナクナル心配ガアル. 故ニ自由競爭ヲ行フトモ尙各生產者ガ利益金ヲ獲得シ得ルニハ人數ニ如何ナル制限ガ存在スルコトヲ要スルカヲ少シク吟味シテ見ヨウ.

第 s 番目ノ生產者ガ獲得スル利益金 π_s ハ明ラカニ

$$\pi_s^{(b)} = p_n^{(b)} u_{s,n}^{(b)} - \mathrm{A} u_{s,n}^{(b)2} - \mathrm{B} u_{s,n}^{(b)} - \mathrm{C}$$

シカルニ自由競爭ノトキノ p 及ビ u_s ハ夫々

$$p_n^{(b)} = \frac{b+2\mathrm{A}ab+n\mathrm{B}a}{a(n+1+2\mathrm{A}a)} \qquad u_{s,n}^{(b)} = \frac{b-\mathrm{B}a}{n+1+2\mathrm{A}a}$$

デアルカラ是等ノ値ヲ代入スルト

$$\pi_s^{(b)} = \frac{b+2\mathrm{A}ab+n\mathrm{B}a}{a(n+1+2\mathrm{A}a)} \cdot \frac{b-\mathrm{B}a}{n+1+2\mathrm{A}a} - \frac{\mathrm{A}(b-\mathrm{B}a)^2}{(n+1+2\mathrm{A}a)^2}$$
$$- \frac{\mathrm{B}(b-\mathrm{B}a)}{n+1+2\mathrm{A}a} - \mathrm{C}$$
$$= \frac{(b-\mathrm{B}a)^2(1+\mathrm{A}a)}{a(n+1+2\mathrm{A})^2} - \mathrm{C}$$

トナル, 故ニ $\pi_s^{(b)} > 0$ ナル條件ハ卽チ n ガ滿足セシムベキ條件ハ

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{A}a}{a\mathrm{C}}}\{b-\mathrm{B}a-2\sqrt{a\mathrm{C}(1+\mathrm{A}a)}\} > n-1$$

トナル.

次ニ同樣ナ考ヘデ協同ノ場合ヲモ吟味シテ見ルト利益金 π_s ハ

$$\pi_s^{(a)}=p_n^{(a)}u_{s,n}^{(a)}-\mathrm{A}u_{s,n}^{(a)2}-\mathrm{B}u_{s,n}^{(a)}-\mathrm{C}$$

デアリ且

$$p_n^{(a)}=\frac{nb+2\mathrm{A}ab+n\mathrm{B}a}{2a(n+\mathrm{A}a)},\quad u_{s,n}^{(a)}=\frac{b-\mathrm{B}a}{2(n+\mathrm{A}a)}$$

デアルカラ是等ヲ代入シテ

$$\pi_s^{(a)}=\frac{nb+2\mathrm{A}ab+n\mathrm{B}a}{2a(n+\mathrm{A}a)}\cdot\frac{b-\mathrm{B}a}{2(n+\mathrm{A}a)}-\frac{\mathrm{A}(b-\mathrm{B}a)^2}{4(n+\mathrm{A}a)^2}-\frac{\mathrm{B}(b-\mathrm{B}a)}{2(n+\mathrm{A}a)}-\mathrm{C}$$
$$=\frac{(b-\mathrm{B}a)^2}{4a(n+\mathrm{A}a)}-\mathrm{C}$$

ヲ得ル. 依ツテ n 人協同シテ生産スルトキニ各人共純利益金ガ得ラレルタメニハ

$$\frac{(b-\mathrm{B}a)^2}{4a\mathrm{C}}>n+\mathrm{A}a$$

又ハ

$$\frac{(b-\mathrm{B}a)^2}{4a\mathrm{C}}-\mathrm{A}a>n$$

ナルコトヲ要ス.

第 3 章　需要供給ノ動態理論

1. 新シキ需要及ビ供給函數

現實ノ社會ニ於イテハ價格ハ時々刻々變化スルモノデアツテ決シテ一定値ニ固定シテ居ルモノデナイ. 隨ツテ既ニ得タ樣ナ簡單ナ方程式ヲ以テハ現實ノ問題ヲ解クニハ程遠イ所デアル. 隨ツテ價格ハ時ト共ニ變化シ卽チ時刻 t ノ適當ナ函數ト考ヘル樣ニシナケレバナラヌ. 換言スレバ吾々ハ時々刻々ノ價格ノ函數ヲ定メナケレバナラヌ.

ソレニハ既ニ用ヒタ常數 A, B, C, a, b 等ヲ總テ t ノ函數 $\mathrm{A}(t)$ $\mathrm{B}(t)$, $\mathrm{C}(t)$, $a(t)$, $b(t)$ トスレバヨイデアラウガ數學的取扱ヒニ困難ヲ感ズル.

玆ニ於イテ價格ハ一般ニハ時 t ノ函數デアツテソノ特別ナ極限ノ場合ガ既ニ得タ樣ナ解ニ到達スル樣ニ定メル. 先ヅ着目スルノガ p ノ t ニ對スル微係數デアル. 卽チ價格ガ騰貴シツヽアルカ下落シツヽアルカトイフコトガ現在價格ガ高イカ安イカトイフコトト同樣需要量ヲ變化セシメル重要ナ要素ヲナスト考ヘル. 物價ガ騰貴シツヽアルトキハ商業界ハ活氣ガアリ物價ガ下落シツヽアルトキハ業界ハ沈滯スル. サレバ吾々ハ既ニ研究シタ y ハ函數 $-ap+b$ デアツタガコノ外ニ今一項添加シテ $h\frac{dp}{dt}$ ヲ用ヒテ

$$y=-ap+b+h\frac{dp}{dt},\qquad a,\ b>0$$

トスル. 勿論 h ハ正負何レノ場合モ考ヘ得ラレルケレド假リニ $h>0$ トスル. 卽チ價格ガ騰貴シツヽアルトキハ需要量ガ增加スルト見ルノデアル.

簡單ナ取扱ガデキル樣ニト考ヘテ供給函數モ亦同ジ形デ表ハサレルトスル. 卽チ供給量 u ハ

$$u=\alpha p-\beta+\gamma\frac{dp}{dt}\qquad \alpha,\ \beta>0$$

トスル. 最後ニ $y=u$ 卽チ需要量ト供給量トガ相等シクナル樣ナ價格 p ヲ決定シヨウ. 卽チ

$$-ap+b+h\frac{dp}{dt}=\alpha p-\beta+\gamma\frac{dp}{dt}$$

トナルカラ移項シテ

$$(h-\gamma)\frac{dp}{dt}=(a+\alpha)p-(b+\beta)$$

$\gamma-h=0$ ナラバ結局 $\frac{dp}{dt}$ ハ消去セラレ前章デ得タ結果ニナルカラ本章デハ $\gamma-h\neq0$ ナル場合ノミヲ論ズル. 故ニ $h-\gamma$ デ兩邊ヲ割ツテ

$$\frac{dp}{dt}=-m(p-p_1),\ 但シ\ m=\frac{a+\alpha}{\gamma-h},\ p_1=\frac{b+\beta}{a+\alpha}>0$$

トナル. 此ノ微分方程式ハ容易ニ解クコトガ出來テ

$$p-p_1=Ce^{-mt},$$

C ハ積分常數トスル. C ノ値ハ $t=0$ ナルトキノ p ノ値ヲ p_0 トシテ

$$p_0-p_1=C$$

ヲ用ヒテ

$$p=p_1-(p_1-p_0)e^{-mt}$$

トスル. 是卽チ所要ノ價格 p ノ函數デアツテコノ p ニ對應スル需要量 y 又ハ供給量 u ハ

$$\begin{aligned}y=u&=\alpha p-\beta+\gamma\frac{dp}{dt}\\&=\alpha[p_1-(p_1-p_0)e^{-mt}]-\beta+\gamma(p_1-p_0)me^{-mt}\\&=(\alpha p_1-\beta)-(\alpha-m\gamma)(p_1-p_0)e^{-mt}\end{aligned}$$

トナル.

今先ヅ $p_1-p_0\neq0$ ナリト假定シテ此ノ性質ヲ吟味センニ

$$m=\frac{a+\alpha}{\gamma-h}$$

ナルガ故ニ $a>0, \alpha>0$ 卽チ分子ハ正ノ數デアル. 若シ $\gamma-h>0$ ナラバコノ解 p ハ $t=\infty$ ナルトキ p_1 ニ近ヅク. 卽チ p ハ p_0 ト p_1 ノ間ニ常ニ存在スル. 最初 p ハ p_0 デアルカラ時ト共ニ次第ニ p_1 ニ近ヅキ遂ニ $t=\infty$ ナルトキ p_1 ニ到達スル.

若シ $\gamma-h<0$ ナラバ $t=\infty$ トスレバ p_0 ガ p_1 ヨリ大ナルトキ p ハ ∞ ニナリ, p_0 ガ p_1 ヨリ小ナルトキ p ハ $-\infty$ ニナル. 詳言スレバ $p_0>p_1$ ナルトキハ常ニ $p\geqq p_0>p_1$ ニシテ $t=\infty$ ナルトキ $p=\infty$ トナル. 之ニ反シテ $p_0<p_1$ ナルトキハ常ニ $p\leqq p_0<p_1$ ニシテ $t=\infty$ ナルトキ $p=-\infty$ トナル. 何レニシテモ p ハ決シテ p_1 ニ近ヅクコトナシ.

斯クノ如キハ前章ニ於イテ得タ結果ガ近似的ニモ解ノ性質ヲ有セザルコトヲ示スモノニシテ本章ニ於ケル解ガ初メテ有效ナルコトヲ示スコトニナル. 吾々ハカヽル態度ヲトルコトハ出來ヌ. 故ニ不等式

$$\gamma<h$$

ガ成立スルト考ヘナケレバナラヌ.

最後ニ p_0 ガ p_1 ニ等シキトキハ γ ト h ノ關係如何ニ拘ラズ常ニ $p=p_0$ ナル解ノミトナリ是卽チ前章ニ於イテ得タル結果ニ外ナラヌ.

2. 需要供給ノ別ノ函數

前節デ得タ需要ノ法則ハ $\dfrac{dp}{dt}$ ノ値ガ大キクナイトキニハ, 換言スレバ價格ノ變動ガ急激デナイトキニハ適用シ得ルデアラウガ若シ價格ノ變動ガ急激デ隨ツテ $\dfrac{dp}{dt}$ ガ無限大ニモナルトイフ樣ナ場合ニハ別ナ形ニシナケレバナラナイデアラウ. コノ目的ノタメニ $h\dfrac{dp}{dt}$ ガ簡單ナ積分可能ナ然カモ $\dfrac{dp}{dt}$ ガ無限大ニモナリ得ル形ニ變更シヨウ. ソコデ前同樣ナ記號ヲ用フルコトニシテ

$$y=-ap+b+h\tan^{-1}\frac{dp}{dt},\qquad a,\ b\ >0,$$

$$u=\alpha p-\beta+\gamma\tan^{-1}\frac{dp}{dt},\qquad \alpha, \beta\ >0$$

トスル.

$$y=u$$

トナル樣ナ p ヲ求メル. 卽チ

$$-ap+b+h\tan^{-1}\frac{dp}{dt}=\alpha p-\beta+\gamma\tan^{-1}\frac{dp}{dt}$$

ヲ移項シテ

$$(h-\gamma)\tan^{-1}\frac{dp}{dt}=(a+\alpha)\left(p-\frac{b+\beta}{a+\alpha}\right).$$

トナシ $\dfrac{b+\beta}{a+\alpha}=p_1,\ \dfrac{a+\alpha}{\gamma-h}=m$ トオクコト前節ト同樣デアル. シカルトキハ

$$\frac{dp}{dt}=-\tan m(p-p_1)=-\frac{\sin m(p-p_1)}{\cos m(p-p_1)}$$

又ハ變數分離ヲ行ヒ

$$\cot m(p-p_1)dp=-mdt$$

之ヲ積分シテ

$$\sin m(p-p_1)=\mathrm{C}e^{-mt},$$

C ハ積分常數デアルカラ, $t=0$ ナルトキハ $p=p_0$ ナリトノ條件ヲ入レテ C ヲ消去スレバ

$$\sin m(p-p_1)=-\sin m(p_1-p_0)\cdot e^{-mt}.$$

依ツテ

$$p=p_1-\frac{1}{m}\sin^{-1}\{\sin m(p_1-p_0)\cdot e^{-mt}\}$$

若シ $m>0$ ナラバ卽チ $h<\gamma$ ナラバ $t=\infty$ ナルトキ $p=p_1$ 卽チ前章デ得タ結果ニ到達スルガ若シ $m<0$ ナラバ $t=\infty$ ノトキ p ノ値ハ不定デアル. 故ニ現實ノ社會ヲ見ヨウトスルニハ $m>0$ ナル場合ヲ採ルコトニナル.

3. 積分デ表ハシタ需要法則

若シ或ル商品ノ需要量 y ガ現在ノ價格 p ニ關係スルノミナラズ更ニ過去ニ於ケル同ジ商品ノ價格ニモ關係ヲ有スルト假定シタナラバマタ別ナ法則ガ生ズル. 今利力 (the force of interest) ヲ δ デ表ハセバ $t=\tau$ ノ時ニ價格 $p(\tau)$ ヲ $t=t$ ニ於ケル現價ニ換算スレバ

$$p(\tau)e^{-\delta(t-\tau)}$$

トナル. 故ニ $t=-\infty$ カラ $t=t$ マデ總テノ價格ノ合計ハ

$$\int_{-\infty}^{t}e^{-\delta(t-\tau)}p(\tau)d\tau$$

デアル. 故ニ需要量 y ヲシテ, $a, b>0$ トシテ

$$y=-ap(t)+b+h\int_{-\infty}^{t}e^{-\delta(t-\tau)}p(\tau)d\tau \quad 但シ\ a,\ b,\ h>0$$

デ以テ表ハサレルト假定スル.

他方ニ於イテ供給量 u ハ最モ簡單ナル形式

$$u=\alpha p(t)-\beta \quad 但\ \alpha,\ \beta>0$$

ナリトスレバ例ノ通リ

$$y=u$$

ト置イテ

$$-ap(t)+b+h\int_{-\infty}^{t}e^{-\delta(t-\tau)}p(\tau)d\tau=\alpha p(t)-\beta$$

或ハ移項シテ

$$h\int_{-\infty}^{t}e^{-\delta(t-\tau)}p(\tau)d\tau=(a+\alpha)p(t)-(b+\beta)$$

兩邊ヲ $a+\alpha$ デ割リ且 $\dfrac{h}{a+\alpha}=m,\ \dfrac{b+\beta}{a+\alpha}=p_1$ トオケバ

$$m\int_{-\infty}^{t}e^{-\delta(t-\tau)}p(\tau)d\tau=p(t)-p_1$$

トナル. 此ノ積分方程式ヲ解クニハ兩邊ヲ t ニ關シテ微分スル. 然ルトキハ

$$m\left\{p(t)-\delta\int_{-\infty}^{t}e^{-\delta(t-\tau)}p(\tau)\,d\tau\right\}=p'(t)$$

トナリ定積分ヲ消去スレバ

$$mp(t)-\delta(p(t)-p_1)=p'(t)$$

或ハ

$$(m-\delta)p(t)+\delta p_1=p'(t)$$

トナル.

若シ $m-\delta=0$ ナルトキハ

$$p'(t)=\delta p_1$$

トナルカラ積分シテ

$$p(t)=\delta p_1 t+\mathrm{C}$$

玆ニ於イテ $t=0$ トオイテ

$$p(0)=\mathrm{C}$$

上ノ式カラ下ノ式ヲ引ク, 又ハ置キカヘテ

$$p(t)=p(0)+\delta p_1 t$$

此ノ式ニ於イテ $\delta,\ p_1$ 何レモ正ノ數デアルカラ $p(t)$ ハ $p(0)$ カラ t ト共ニ直線的ニ上昇スルノミデアル.

次ニ $m-\delta\neq0$ ナルトキハ

$$(m-\delta)p(t)+\delta p_1=p'(t)$$

ノ積分ハ C ヲ積分常數ト考ヘテ

$$(m-\delta)p(t)+\delta p_1=\mathrm{C}e^{(m-\delta)t}$$

デ表ハサレル. 如何トナレバ最後ノ式ノ兩邊ヲ t ニ關シテ微分スレバ

$$(m-\delta)p'(t)=\mathrm{C}(m-\delta)e^{(m-\delta)t}$$

$m-\delta\neq0$ デアルカラ

$$p'(t)=\mathrm{C}e^{(m-\delta)t}$$

トナリ與ヘラレタル微分方程式ヲ滿足セシメタルコト明ラカデアル.

積分常數 C ハ $t=0$ トオイテ

$$(m-\delta)p(0)+\delta p_1=\mathrm{C}$$

カラ C ガ得ラレル故ニ

$$(m-\delta)p(t)+\delta p_1=[(m-\delta)p(0)+\delta p_1]e^{(m-\delta)t},$$

$$p(t)=\frac{\delta}{\delta-m}p_1+\left(\frac{\delta p_1}{\delta-m}-p(0)\right)e^{-(\delta-m)t}.$$

是卽チ所要ノ價格函數ニシテ需要量 y 又ハ供給量 u ハ

$$y=u=\alpha p(t)-\beta=\frac{\delta\alpha}{\partial-m}p_1-\beta+\left(\frac{\delta\alpha}{\delta-m}p_1-\alpha p(0)\right)e^{-(\delta-m)t}$$

トナル．最後ニ $t=\infty$ ナラシメルトキ $p(t)$ ガ如何ニ變化スルカヲ見ルニ若シ $m-\delta>0$ ナルトキハ $p(0), p_1$ 何レモ正ノ數デアルカラ $t=\infty$ ナルトキ p モ亦正ノ無限大ニナル．若シ $m-\delta<0$ ナルトキハ $t=\infty$ ナルトキ p ハ $\frac{\delta}{\delta-m}p_1$ ニ近ヅクガ p_1 ニ近ツカナイコトハ前二節ト結果トハ異ナル．勿論 $m\to 0$ 又ハ $h\to 0$ ナラバ $p(\infty)$ ハ明カニ p_1 ニ近ヅク．

第４章　課稅ノ問題

1. 獨占ヘノ課稅（從量稅）

生產費函數或ハ需要函數ノ係數ヲ變更セシメルガ如キ事情ガ起ツタトキ均衡點ガ如何ニ變更セラレルカヲ吟味シテ見ル．

先ヅ最初ニ生產費函數及ビ需要函數ハ從前通リニシテオイテ從量稅率 ξ ガ一定ナル場合ヲ考ヘル．獨占者ノ利益ハ $pu-q(u)$ カラ $qu-\xi u-q(u)$ ニ變更スル．故ニ之ガ最大トナルニハ $u=-ap+b$ ヲ考慮ニ入レテ

$$-\left(\mathrm{A}+\frac{1}{a}\right)u^2+\left(\frac{b}{a}-\mathrm{B}-\xi\right)u-\mathrm{C}$$

ヲ最大ナラシメル u デアルカラ之ヲ $u_0+\Delta_1 u$ トスレバ

$$u_0+\Delta_1 u=\frac{b-a(\mathrm{B}+\xi)}{2(1+\mathrm{A}a)}=\frac{b-a\mathrm{B}}{2(1+\mathrm{A}a)}-\frac{a\xi}{2(1+\mathrm{A}a)}=u_0-\frac{a\xi}{2(1+\mathrm{A}a)}$$

ニシテ之ニ對應スル p ノ値ヲ $p_0+\Delta_1 p$ トスレバ

$$p_0+\Delta_1 p=\frac{b+2\mathrm{A}ab+a(\mathrm{B}+\xi)}{2a(1+\mathrm{A}a)}=\frac{b+2\mathrm{A}ab+a\mathrm{B}}{2a(1+\mathrm{A}a)}$$

$$+\frac{\xi}{2(1+\mathrm{A}a)}=p_0+\frac{\xi}{2(1+\mathrm{A}a)}$$

デアル．卽チ p ハ從前ヨリ $\Delta_1 p=\frac{\xi}{2(1+\mathrm{A}a)}$ ダケ增加シ，隨ツテ取引量ハ $\Delta_1 u=\frac{-a\xi}{2(1+\mathrm{A}a)}$ ダケ減少スル．更ニ純利益 π ハコノトキ如何ニ變化スルカヲ見ルニ

$$\pi_0+\Delta_1\pi=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}-\mathrm{B}-\xi\right)u-\mathrm{C}=\frac{(b-a\mathrm{B}-a\xi)^2}{4a(1+\mathrm{A}a)}-\mathrm{C}$$

$$=\frac{(b-a\mathrm{B})^2}{4a(1+\mathrm{A}a)}-\mathrm{C}-\frac{(b-a\mathrm{B})\xi}{2(1+\mathrm{A}a)}+\frac{a\xi^2}{4(1+\mathrm{A}a)}$$

故ニ π ノ變化 $\Delta_1\pi$ ハ

$$\Delta_1\pi=-\frac{(b-a\mathrm{B}-a\xi)}{2(1+\mathrm{A}a)}\xi-\frac{a\xi\cdot\xi}{4(1+\mathrm{A}a)}=-(u+\Delta u)\xi+\frac{\xi}{2}\Delta_1 u$$

$\xi(u_0+\Delta_1 u)$ ハ稅收入ノ總額デアルカラ之ヲ r トスレバ

$$\Delta_1\pi+r=\frac{\xi\Delta_1 u}{2}=(1+\mathrm{A}a)\Delta_1 u\Delta_1 p=-a(1+\mathrm{A}a)[\Delta_1 p]^2$$

コノ値ハ負ノ値デアル. コノ事ハ卽チ稅收入ハ純利益ノ減少ヲ償フコトガ出來ナイ事ヲ示ス.

2. 獨占ヘノ課稅（從價稅）

稅率ハ前節ノ通リ ξ ヲ一定トシ但シ從價稅トスル. 然ルトキハ獨占者ノ利益金 π ハ

$$pu(1-\xi)-q(u)=(1-\xi)u\left(\frac{b}{a}-\frac{u}{a}\right)-\mathrm{A}u^2-\mathrm{B}u-\mathrm{C}$$

$$=-\left(\mathrm{A}+\frac{1-\xi}{a}\right)u^2+\left[(1-\xi)\frac{b}{a}-\mathrm{B}\right]u-\mathrm{C}$$

デアルカラ之ヲ最大ナラシメル u ノ値ハ

$$u=\frac{(1-\xi)\frac{b}{a}-\mathrm{B}}{2\left(\mathrm{A}+\frac{1-\xi}{a}\right)}=\frac{b-b\xi-\mathrm{B}a}{2(1-\xi+\mathrm{A}a)}=\frac{b-\mathrm{B}a}{2(1+\mathrm{A}a)}-\frac{a(\mathrm{B}+\mathrm{A}b)\xi}{2(1+\mathrm{A}a)(1-\xi+\mathrm{A}a)}$$

$$=u_0+\Delta_2 u$$

トオケバ

$$\Delta_2 u=-\frac{a(\mathrm{B}+\mathrm{A}b)\xi}{2(1+\mathrm{A}a)(1-\xi+\mathrm{A}a)}$$

トナル. 次ニ之ニ應ズル p ノ値ハ

$$p=\frac{b}{a}-\frac{u}{a}=\frac{b}{a}-\frac{(b-\mathrm{B}a)}{2a(1+\mathrm{A}a)}+\frac{(\mathrm{B}+\mathrm{A}b)\xi}{2(1+\mathrm{A}a)(1-\xi+\mathrm{A}a)}$$

$$=\frac{b+2\mathrm{A}ab+\mathrm{B}a}{2a(1+\mathrm{A}a)}+\frac{(\mathrm{B}+\mathrm{A}b)\xi}{2(1+\mathrm{A}a)(1-\xi+\mathrm{A}a)}=p_0+\Delta_2 p$$

トオケバ

$$\Delta_2 p=\frac{(\mathrm{B}+\mathrm{A}b)\xi}{2(1+\mathrm{A}a)(1-\xi+\mathrm{A}a)}$$

他方是等ノ p 及ビ u ニ對スル π ノ値ハ

$$\pi_0+\Delta_2\pi=pu(1-\xi)-\mathrm{A}u^2-\mathrm{B}u-\mathrm{C}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{b}{a}(1-\xi)-\mathrm{B}\right]u-\mathrm{C}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}-\mathrm{B}\right)u_0-\mathrm{C}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{b}{a}-\mathrm{B}-\frac{b}{a}\xi\right)u_0-\left(\frac{b}{a}-\mathrm{B}\right)u\right\}$$

隨ツテ

$$\Delta_2\pi=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{b}{a}-\mathrm{B}\right)\Delta_2 u-\frac{b}{a}u_0\xi\right\}$$

$$=\frac{\xi}{2}\left\{\frac{-(b-\mathrm{B}a)(\mathrm{B}+\mathrm{A}b)}{2(1+\mathrm{A}a)(1-\xi+\mathrm{A}a)}-\frac{b(b-\mathrm{B}a-b\xi)}{2a(1-\xi+\mathrm{A}a)}\right\}$$

$$=\frac{-(b-\mathrm{B}a)(b+2\mathrm{A}ab+\mathrm{B}a)\xi+b^2(1+\mathrm{A}a)\xi^2}{4a(1+\mathrm{A}a)(1-\xi+\mathrm{A}a)}$$

$$=\frac{-b^2(1+\mathrm{A}a)^2\xi+a^2(\mathrm{B}+\mathrm{A}b)^2\xi+b^2(1+\mathrm{A}a)\xi^2}{4a(1+\mathrm{A}a)(1-\xi+\mathrm{A}a)}$$

$$=\frac{-b^2(1+\mathrm{A}a)(1-\xi+\mathrm{A}a)\xi+a^2(\mathrm{B}+\mathrm{A}b)^2\xi}{4a(1+\mathrm{A}a)(1-\xi+\mathrm{A}a)}$$

$$=-\frac{b^2}{4a}\xi+\frac{a(\mathrm{B}+\mathrm{A}b)^2\xi}{4(1+\mathrm{A}a)(1-\xi+\mathrm{A}a)}$$

依ツテ

$$\Delta_2\pi+pu\xi=\Delta_2\pi+(p_0+\Delta_2 p)(u_0+\Delta_2 u)\xi$$

$$= -\frac{b^2}{4a}\xi + \frac{a(\mathrm{B}+\mathrm{A}b)^2\xi}{4(1+\mathrm{A}a)(1-\xi+\mathrm{A}a)}$$

$$+ \frac{(b-b\xi+2\mathrm{A}ab+\mathrm{B}a)(b-b\xi-\mathrm{B}a)\xi}{4a(1-\xi+\mathrm{A}a)^2}$$

$$= -\frac{b^2}{4a}\xi + \frac{a(\mathrm{B}+\mathrm{A}b)^2\xi}{4(1-\xi+\mathrm{A}a)^2} - \frac{a(\mathrm{B}+\mathrm{A}b)^2\xi^2}{4(1+\mathrm{A}a)(1-\xi+\mathrm{A}a)^2}$$

$$+ \frac{[b^2(1-\xi+\mathrm{A}a)^2-a^2(\mathrm{B}+\mathrm{A}a)^2]\xi}{4a(1-\xi+\mathrm{A}a)^2}$$

$$= -a(1+\mathrm{A}a)\left[\frac{(\mathrm{B}+\mathrm{A}b)\xi}{2(1+\mathrm{A}a)(1-\xi+\mathrm{A}a)}\right]^2 = (1+\mathrm{A}a)\Delta_2 u \Delta_2 p$$

$$= -a(1+\mathrm{A}a)[\Delta_2 p]^2$$

卽チ

$$\Delta_2\pi + pu\xi = -a(1+\mathrm{A}a)[\Delta_2 p]^2$$

ニ於イテ $pu\xi$ ハ稅收入ヲ示シ $\Delta_2\pi$ ハ純益金ノ增加ヲ示ス．卽チ純益金ノ減少ハ稅收入ヨリ多額デアルコトヲ示スモノデアル．

最後ニ考ヘル課稅方法ハ純益金 π ニ對スルモノデアル．コノ場合ニハ稅率 ξ トスレバ $\pi(1-\xi)$ ヲ最大ナラシメル p 及ビ u ノ値ヲ求メルコトニナリソノ所要ノ値ハ卽チ π 自身ヲ最大ナラシメル p 及ビ u ノ値ニ外ナラヌ．依ツテ純收益課稅法ヲ採用スルトキニハ獨占者ガ要求スル價格及ビ生產量ニ何等ノ變化ヲ生ジナイコトニナル．

3. 協同ヘノ課稅

n 人ノ生產者ガ協同シテ居ルトキノ各人ノ生產量 $u_{s,n}^{(a)}$ 及ビ價格 $p_n^{(a)}$ ハ夫々

$$u_{s,n}^{(a)} = \frac{b-\mathrm{B}a}{2(n+\mathrm{A}a)} \quad 及ビ \quad p_n^{(a)} = \frac{nb+2\mathrm{A}ab+n\mathrm{B}a}{2a(n+\mathrm{A}a)}$$

デアツテ總生產量 u ハ

$$u = \Sigma u_{s,n}^{(a)} = \frac{n(b-\mathrm{B}a)}{2(n+\mathrm{A}a)}.$$

マタコノトキ總純利益金 π ハ

$$\pi = \Sigma\pi_s = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}-\mathrm{B}\right)\Sigma u_s - n\mathrm{C} = \frac{n(b-\mathrm{B}a)^2}{4a(1+\mathrm{A}a)} - n\mathrm{C}$$

デアツタ．

今コノ協同ニ對シテ從量稅ヲ課スル場合ニ各生產者ノ生產量及ビソノ價格ガ如何ニ變化スルカヲ吟味センニ各人ノ純益金ハ

$$pu_s - \xi u_s - q(u_s),$$

トナル．從ツテソノ總計ハ

$$p\Sigma u_s - \xi\Sigma u_s - \Sigma q(u_s)$$

$$= pu - \mathrm{A}\Sigma u_s^2 - (\mathrm{B}+\xi)\Sigma u_s - n\mathrm{C}.$$

コレヲ最大ナラシメル u ヲ求メ，次イデソノ値ニ應ズル p 及ビ π ヲ求メナケレバナラヌ．シカルニソノ結果ハ明ラカニ無稅ノトキノ $u, p, \pi,$ ノ式ニ於イテ B ノ代リニ $\mathrm{B}+\xi$ ヲ置キ換ヘレバヨイ．今夫等ノ値ヲ夫々 $u_{s,n}^{(a)}+\Delta_1 u_{s,n}^{(a)}$, $p_n^{(a)}+\Delta_1 p_n^{(a)}$ 及ビ $\pi+\Delta_1\pi$ デ表ハセバ

$$u_{s,n}^{(a)}+\Delta_1 u_{s,n}^{(a)} = \frac{b-(\mathrm{B}+\xi)a}{2(n+\mathrm{A}a)} = \frac{b-\mathrm{B}a}{2(n+\mathrm{A}a)} - \frac{a\xi}{2(n+\mathrm{A}a)},$$

$$p_n^{(a)}+\Delta_1 p_n^{(a)} = \frac{nb+2\mathrm{A}ab+n(\mathrm{B}+\xi)a}{2a(n+\mathrm{A}a)}$$

$$= \frac{nb+2\mathrm{A}ab+n\mathrm{B}a}{2a(n+\mathrm{A}a)} + \frac{n\xi}{2(n+\mathrm{A}a)},$$

$$\pi+\Delta_1\pi = \frac{n[b-(\mathrm{B}+\xi)a]^2}{4a(1+\mathrm{A}a)} - n\mathrm{C}$$

$$= \frac{n(b-\mathrm{B}a)^2-2(b-\mathrm{B}a)a\xi+na^2\xi^2}{4a(1+\mathrm{A}a)} - n\mathrm{C}$$

$$=\frac{n(b-\mathrm{B}a)^2}{4a(1+\mathrm{A}a)}-n\mathrm{C}-\frac{n(b-\mathrm{B}a)}{2(1+\mathrm{A}a)}\xi+\frac{na\xi^2}{4(1+\mathrm{A}a)}.$$

依ツテ之等ノ値カラ $\Delta_1 u^{(a)}_{s,n}$, $\Delta_1 p^{(a)}_n$ 及ビ $\Delta_1\pi+n(u^{(a)}_{s,n}+\Delta_1 u^{(a)}_{s,n})\xi$ ヲ出セバ

$$\Delta_1 u^{(a)}_{s,n}=-\frac{a\xi}{2(n+\mathrm{A}a)} \quad 及ビ \quad \Delta_1 p^{(a)}_n=\frac{n\xi}{2(n+\mathrm{A}a)}$$

トナリ，マタ

$$\Delta_1\pi+u(u^{(a)}_{s,n}+\Delta_1 u^{(a)}_{s,n})\xi=-\frac{n(b-\mathrm{B}a)\xi}{2(1+\mathrm{A}a)}$$

$$+\frac{na\xi^2}{4(1+\mathrm{A}a)}+\frac{n(b-\mathrm{B}a-a\xi)}{2(n+\mathrm{A}a)}\xi$$

$$=-\frac{na\xi^2}{4(1+\mathrm{A}a)}$$

トナルカラ

$$\Delta_1\pi+n(u^{(a)}_{s,n}+\Delta_1 u^{(a)}_{s,n})\xi=(1+\mathrm{A}a)\Delta_1 u^{(a)}_{s,n}\Delta_1 p^{(a)}_n$$

$$=-\frac{a(1+\mathrm{A}a)}{n}[\Delta_1 p^{(a)}_n]^2$$

4. 協同ヘノ從價稅

次ニコノ協同ニ對シテ從價稅ヲ課スルトキニハ總純利益金ハ

$$pu(1-\xi)-\Sigma q(u_s)=(1-\xi)\left(\frac{b}{a}-\frac{1}{a}\Sigma u_s\right)\Sigma u_s-\mathrm{A}\Sigma_s{}^2-\mathrm{B}\Sigma u_s-n\mathrm{C}$$

トナル．故ニ之ヲ最大ナラシメル u_s ノ値ハ明ラカニ

$$-2\mathrm{A}u_s-2\frac{1-\xi}{a}\Sigma u_s+\frac{b}{a}(1-\xi)-\mathrm{B}=0,\ s=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots n$$

コノ式カラ u_s ヲ求メ得タモノヲ $u^{(a)}_{s,n}+\Delta_2 u^{(a)}_{s,n}$ ト書ケバ

$$u^{(a)}_{s,n}+\Delta_2 u^{(a)}_{s,n}=\frac{b(1-\xi)-\mathrm{B}a}{2\{n(1-\xi)+\mathrm{A}a\}}$$

$$=\frac{b-\mathrm{B}a}{2(n+\mathrm{A}a)}-\frac{a(n\mathrm{B}+\mathrm{A}b)\xi}{2(n+\mathrm{A}a)(n-n\xi+\mathrm{A}a)}$$

トナリ．之ニ應ズル價格ヲ $p^{(a)}_n+\Delta_2 p^{(a)}_n$ ト書ケバ

$$p^{(a)}_n+\Delta_2 p^{(a)}_n=\frac{b}{a}-\frac{u}{a}=\frac{b}{a}-\frac{n(b-\mathrm{B}a)}{2a(n+\mathrm{A}a)}+\frac{n(n\mathrm{B}+\mathrm{A}b)\xi}{2(n+\mathrm{A}a)(n-n\xi+\mathrm{A}a)}$$

$$=\frac{nb+2\mathrm{A}ab+n\mathrm{B}a}{2a(n+\mathrm{A}a)}+\frac{n(n\mathrm{B}+\mathrm{A}b)\xi}{2(n+\mathrm{A}a)(n-n\xi+\mathrm{A}a)}$$

トナル．故ニ

$$\Delta_2 u^{(a)}_{s,n}=-\frac{a(n\mathrm{B}+\mathrm{A}b)\xi}{2(n+\mathrm{A}a)(n-n\xi+\mathrm{A}a)},\quad \Delta_2 p^{(a)}_n=\frac{n(n\mathrm{B}+\mathrm{A}b)\xi}{2(n+\mathrm{A}a)(n-n\xi+\mathrm{A}a)}$$

トナル．更ニ總純益金ノ最大値 $\pi+\Delta_2\pi$ ヲ求ムレバ

$$\pi+\Delta_2\pi=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}-\frac{b}{a}\xi-\mathrm{B}\right)\Sigma u_s-n\mathrm{C}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}-\frac{b}{a}\xi-\mathrm{B}\right)\times\frac{n(b-b\xi-\mathrm{B}a)}{2(n-n\xi+\mathrm{A}a)}-n\mathrm{C}$$

$$=\frac{n(b-b\xi-\mathrm{B}a)^2}{4a(n-n\xi+\mathrm{A}a)}-n\mathrm{C}$$

$$\Delta_2\pi=\frac{n(b-b\xi-\mathrm{B}a)^2}{4a(n-n\xi+\mathrm{A}a)}-\frac{n(b-\mathrm{B}a)^2}{4a(n+\mathrm{A}a)}$$

$$=\frac{n(2b-b\xi-2\mathrm{B}a)(-b)\xi(n+\mathrm{A}a)+n^2(b-\mathrm{B}a)^2\xi}{4a(n+\mathrm{A}a)(n-n\xi+\mathrm{A}a)}$$

$$=\frac{-(nb+\mathrm{A}ab)(2nb-nb\xi-2n\mathrm{B}a)\xi+\{(nb-n\mathrm{B}a)^2-(n\mathrm{B}a+\mathrm{A}ab)^2\}\xi}{4a(n+\mathrm{A}a)(n-n\xi+\mathrm{A}a)}$$

$$+\frac{a(n\mathrm{B}+\mathrm{A}b)^2\xi}{4(n+\mathrm{A}a)(n-n\xi+\mathrm{A}a)}$$

$$=\frac{-(nb+\mathrm{A}ab)(2nb-nb\xi-2n\mathrm{B}a)\xi+(nb+\mathrm{A}ab)(nb-2n\mathrm{B}a-\mathrm{A}ab)\xi}{4a(n+\mathrm{A}a)(n-n\xi+\mathrm{A}a)}$$

$$+\frac{a(n\mathrm{B}+\mathrm{A}b)^2\xi}{4(n+\mathrm{A}a)(n-n\xi+\mathrm{A}a)}$$

$$=\frac{-(nb+\mathrm{A}ab)(nb-nb\xi+\mathrm{A}ab)\xi}{4a(n+\mathrm{A}a)(n-n\xi+\mathrm{A}a)}+\frac{a(n\mathrm{B}+\mathrm{A}b)^2\xi}{4(n+\mathrm{A}a)(n-n\xi+\mathrm{A}a)}$$

$$=\frac{-b^2\xi}{4a}+\frac{a(n\mathrm{B}+\mathrm{A}b)^2\xi}{4(n+\mathrm{A}a)(n-n\xi+\mathrm{A}a)}$$

他方ニ於イテ

$$n(p_n^{(a)}+\Delta_2 p_n^{(a)})(u_{s,n}^{(a)}+\Delta_2 u_{s,n}^{(a)})$$

$$=\frac{n(b-b\xi-\mathrm{B}a)}{2(n-n\xi+\mathrm{A}a)}\cdot\frac{nb-nb\xi+2\mathrm{A}ab+n\mathrm{B}a}{2a(n-n\xi+\mathrm{A}a)}$$

$$=\frac{(nb-nb\xi+\mathrm{A}ab)^2-(\mathrm{A}ab+n\mathrm{B}a)^2}{4a(n-n\xi+\mathrm{A}a)^2}$$

$$=\frac{b^2(n-n\xi+\mathrm{A}a)^2-a^2(n\mathrm{B}+\mathrm{A}b)^2}{4a(n-n\xi+\mathrm{A}a)^2}$$

$$=\frac{b^2}{4a}-\frac{a(n\mathrm{B}+\mathrm{A}a)^2}{4(n-n\xi+\mathrm{A}a)^2}$$

デアルカラ

$$\Delta_2\pi+n(p_n^{(a)}+\Delta_2 p_n^{(a)})(u_{s,n}^{(a)}+\Delta_2 u_{s,n}^{(a)})\xi$$

$$=\frac{a(n\mathrm{B}+\mathrm{A}a)^2\xi}{4(n+\mathrm{A}a)(n-n\xi+\mathrm{A}a)}-\frac{a(n\mathrm{B}+\mathrm{A}a)^2\xi}{4(n-n\xi+\mathrm{A}a)^2}$$

$$=-\frac{na(n\mathrm{B}+\mathrm{A}a)^2\xi^2}{4(n+\mathrm{A}a)(n-n\xi+\mathrm{A}a)^2}$$

$$=(n+\mathrm{A}a)\Delta_2 u_{s,n}^{(a)}\Delta_2 p_n^{(a)}$$

ガ成立スル.

5. 競爭ヘノ從量課税

n 人ノ生産者ガ自由ニ競爭シ各自ガ自己ノ純益金ヲ最大ナラシメントスルトキハ價格及ビ生産量ハ夫々

$$p_n^{(b)}=\frac{b+2\mathrm{A}ab+n\mathrm{B}a}{a(n+1+2\mathrm{A}a)},\quad u_{s,n}^{(b)}=\frac{b-\mathrm{B}a}{n+1+2\mathrm{A}a}$$

デアツタ.

若シ從量課税ヲスルトキハ B ノ代リニ B+ξ ト置イタモノガ卽チ所要ノ値ニシテ

$$p_n^{(b)}+\Delta_1 p_n^{(b)}=\frac{b+2\mathrm{A}ab+n(\mathrm{B}+\xi)a}{a(n+1+2\mathrm{A}a)}$$

$$=\frac{b+2\mathrm{A}ab+n\mathrm{B}a}{a(n+1+2\mathrm{A}a)}+\frac{n\xi}{n+1+2\mathrm{A}a}$$

$$u_{s,n}^{(b)}+\Delta_1 u_{s,n}^{(b)}=\frac{b-(\mathrm{B}+\xi)a}{n+1+2\mathrm{A}a}=\frac{b-\mathrm{B}a}{n+1+2\mathrm{A}a}-\frac{a\xi}{n+1+2\mathrm{A}a}$$

是等ノ式カラ直チニ

$$\Delta_1 p_n^{(b)}=\frac{n\xi}{n+1+2\mathrm{A}a}>0 \quad 及ビ \quad \Delta_1 u_{s,n}^{(b)}=-\frac{a\xi}{n+1+2\mathrm{A}a}<0$$

ナルコトヲ知ル.

次ニ $\pi_s^{(b)}$ ハ B ヲ B+ξ デオキカヘレバ

$$\pi_s^{(b)}+\Delta_1\pi_s^{(b)}=\frac{(1+\mathrm{A}a)(b-\mathrm{B}a-a\xi)^2}{a(n+1+2\mathrm{A}a)^2}-\mathrm{C}$$

カラ直チニ

$$\Delta_1\pi_s^{(b)}=\frac{(1+\mathrm{A}a)(b-\mathrm{B}a-a\xi)^2}{a(n+1+2\mathrm{A}a)^2}-\frac{(1+\mathrm{A}a)(b-\mathrm{B}a)^2}{a(n+1+2\mathrm{A}a)^2}$$

$$=\frac{-(1+\mathrm{A}a)(2b-2\mathrm{B}a-a\xi)\xi}{(n+1+2\mathrm{A}a)^2}$$

ヲ得, 從ツテ

$$\Delta_1\pi_s^{(b)}+(u_{s,n}^{(b)}+\Delta_1 u_{s,n}^{(b)})\xi$$

$$=\frac{-(1+\mathrm{A}a)(2b-2\mathrm{B}b-a\xi)\xi}{(n+1+2\mathrm{A}a)^2}+\frac{(b-\mathrm{B}a-a\xi)\xi}{(n+1+2\mathrm{A}a)}$$

$$=\frac{-2(1+\mathrm{A}a)(b-\mathrm{B}a-a\xi)\xi}{(n+1+2\mathrm{A}a)^2}+\frac{(b-\mathrm{B}a-a\xi)\xi}{(n+1+2\mathrm{A}a)}-\frac{a(1+\mathrm{A}a)\xi^2}{(n+1+2\mathrm{A}a)^2}$$

$$=\frac{(n-1)(b-\mathrm{B}a-a\xi)\xi}{(n+1+2\mathrm{A}a)^2}-\frac{a(1+\mathrm{A}a)\xi^2}{(n+1+2\mathrm{A}a)^2}$$

$$=\frac{n-1}{n}(u^{(b)}_{s,n}+\Delta_1 u^{(b)}_{s,n})\Delta_1 p^{(b)}_n+\frac{1+\mathrm{A}a}{n}\Delta_1 u^{(b)}_{s,n}\Delta_1 p^{(b)}_n$$

トナル. 依ツテ純益金ノ減少ハ税收入ニヨツテ償ハレル. ソノ額ハ凡ソ代金ノ増加額ノ $\dfrac{n-1}{n}$ ニ等シイコトガ分ル.

6. 競爭ヘノ從價課税

競爭ヘ從價課税ヲ行フトキ各生產者ノ生產量及ビ價格ノ變化, 隨ツテ生ズル純益金ノ變化ハ次ノ樣ニナル.

第 s 生產者ノ純益金 π_s ハ一定税率ヲ ξ トシテ

$$\pi_s=pu_s(1-\xi)-\mathrm{A}u_s^2-\mathrm{B}u_s-\mathrm{C},\quad \Sigma u_s=-ap+b$$

トナルコト明ラカデアル. π_s ノ最大ナラシメル u_s ヲ求メルベキデアルガ ξ ガ一定ナルコトヲ利用シテ

$$\frac{\pi_s}{1-\xi}=pu_s-\frac{\mathrm{A}}{1-\xi}u_s^2-\frac{\mathrm{B}}{1-\xi}u_s-\frac{\mathrm{C}}{1-\xi}$$

トスレバ π_s ノ最大ハ卽チ $\dfrac{\pi_s}{1-\xi}$ ノ最大デアルカラコレニ應ズル生產量及ビ價格ハ既ニ知ル通リデアルカラ

$$u^{(b)}_{s,n}+\Delta_2 u^{(b)}_{s,n}=\frac{b-\dfrac{\mathrm{B}a}{1-\xi}}{n+1+\dfrac{2\mathrm{A}a}{1-\xi}}=\frac{b-\mathrm{B}a-b\xi}{n+1+2\mathrm{A}a-(n+1)\xi},$$

$$p^{(b)}_n+\Delta_2 p^{(b)}_n=\frac{b+\dfrac{2\mathrm{A}ab}{1-\xi}+\dfrac{n\mathrm{B}a}{1-\xi}}{a\left(n+1+\dfrac{2\mathrm{A}a}{1-\xi}\right)}=\frac{b+2\mathrm{A}ab+n\mathrm{B}a-l\xi}{a\{n+1+2\mathrm{A}a-(n+1)\xi\}}$$

依ツテ直チニ

$$\Delta_2 u^{(b)}_{s,n}=\frac{b-\mathrm{B}a-b\xi}{n+1+2\mathrm{A}a-(n+1)\xi}-\frac{b-\mathrm{B}a}{n+1+2\mathrm{A}a}$$

$$=\frac{-a(2\mathrm{A}b+n\mathrm{B}+\mathrm{B})\xi}{(n+1+2\mathrm{A}a)\{n+1+2\mathrm{A}a-(n+1)\xi\}},$$

$$\Delta_2 p^{(\,)}_n=\frac{b+2\mathrm{A}ab+n\mathrm{B}a-l\xi}{a\{n+1+2\mathrm{A}a-(n+1)\xi\}}-\frac{b+2\mathrm{A}ab+n\mathrm{B}a}{a(n+1+2\mathrm{A}a)}$$

$$=\frac{n(2\mathrm{A}b+n\mathrm{B}+\mathrm{B})\xi}{(n+1+2\mathrm{A}a)\{n+1+2\mathrm{A}a-(n+1)\xi\}}$$

ヲ得. 次ニ $\dfrac{\pi_s}{1-\xi}$ ノ最大値ハ

$$\frac{\pi_s+\Delta_2\pi_s}{1-\xi}=\frac{\left(1+\dfrac{\mathrm{A}a}{1-\xi}\right)\left(b-\dfrac{\mathrm{B}a}{1-\xi}\right)^2}{a\left(n+1+\dfrac{2\mathrm{A}a}{1-\xi}\right)^2}-\frac{\mathrm{C}}{1-\xi}$$

$$\pi_s+\Delta_2\pi_s=\frac{(1+\mathrm{A}a-\xi)(b-\mathrm{B}a-b\xi)^2}{a\{n+1+2\mathrm{A}a-(n+1)\xi\}^2}-\mathrm{C}$$

トナリ, 從ツテ

$$\Delta_2\pi_s=\frac{(1+\mathrm{A}a-\xi)(b-\mathrm{B}a-b\xi)^2}{a\{(n+1+2\mathrm{A}a-(n+1)\xi\}^2}-\frac{(1+\mathrm{A}a)(b-\mathrm{B}a)^2}{a(n+1+2\mathrm{A}a)^2}$$

$$=\frac{1+\mathrm{A}a}{a}\left[\frac{(b-\mathrm{B}a-b\xi)^2}{\{n+1+2\mathrm{A}a-(n+1)\xi\}^2}-\frac{(b-\mathrm{B}a)^2}{(n+1+2\mathrm{A}a)^2}\right]$$

$$-\frac{(b-\mathrm{B}a-b\xi)^2\xi}{a\{n+1+2\mathrm{A}a-(n+1)\xi\}^2}$$

$$=\frac{1+\mathrm{A}a}{a}\left[\frac{-a(2\mathrm{A}b+n\mathrm{B}+\mathrm{B})\xi}{(n+1+2\mathrm{A}a)\{n+1+2\mathrm{A}a-(n+1)\xi\}}\right]\times$$

$$\left[\frac{(b-\mathrm{B}a-b\xi)(n+1+2\mathrm{A}a)+(b-\mathrm{B}a)\{n+1+2\mathrm{A}a-(n+1)\xi\}}{(n+1+2\mathrm{A}a)\{n+1+2\mathrm{A}a-(n+1)\xi\}}\right]$$

$$-\frac{(b-\mathrm{B}a-b\xi)(b+2\mathrm{A}ab+n\mathrm{B}a-b\xi)\xi}{a\{n+1+2\mathrm{A}a-(n+1)\xi\}^2}$$

$$+\frac{(b-\mathrm{B}a-b\xi)(2\mathrm{A}b+n\mathrm{B}+\mathrm{B})\xi}{\{n+1+2\mathrm{A}a-(n+1)\xi\}^2}\cdot\frac{n-1+2(1+\mathrm{A}a)}{n+1+2\mathrm{A}a}$$

$$
= -\frac{a(1+\mathrm{A}a)(2\mathrm{A}b+n\mathrm{B}+\mathrm{B})^2\xi^2}{(n+1+2\mathrm{A}a)^2\{n+1+2\mathrm{A}a-(n+1)\xi\}^2}
$$

$$
-\frac{(b-\mathrm{B}a-b\xi)(b+2\mathrm{A}ab+n\mathrm{B}a-b\xi)\xi}{a\{n+1+2\mathrm{A}a-(n+1)\xi\}^2}
$$

$$
+\frac{(n-1)(b-\mathrm{B}a-b\xi)(2\mathrm{A}b+n\mathrm{B}+\mathrm{B})\xi}{(n+1+2\mathrm{A}a)\{n+1+2\mathrm{A}a-(n+1)\xi\}^2}
$$

$$
=\frac{(1+\mathrm{A}a)}{n}\Delta_2 u_{s,n}^{(b)}\Delta_2 p_n^{(b)}-\{n_{s,n}^{(b)}+\Delta_2 u_{s,n}^{(b)}\}\{p_n^{(b)}+\Delta_2 p_n^{(b)}\}\xi
$$

$$
+\frac{n-1}{n}\{u_{s,n}^{(b)}+\Delta_2 u_{s,n}^{(b)}\}\Delta_2 p_n^{(b)}
$$

或ハ移項シテ最後ノ式

$$
\Delta_2\pi_s+\{u_{s,n}^{(b)}+\Delta_2 u_{s,n}^{(b)}\}\{p_n^{(b)}+\Delta_2 p_n^{(b)}\}\xi
$$

$$
=\frac{n-1}{n}\{u_{s,n}^{(b)}+\Delta_2 u_{s,n}^{(b)}\}\Delta_2 p_n^{(b)}+\frac{1+\mathrm{A}a}{n}\Delta_2 u_{s,n}^{(b)}\Delta_2 p_n^{(b)}
$$

ニ到達スル. 而シテ結論ハ從量課税ノトキト少シモ變ラナイノデアルカラ省略スル.

昭和13年8月18日印刷
昭和13年8月24日發行

新輯教育數學講座
第4回配本

豫約頒價
￥2.00

編輯兼發行者　南條初五郎
東京市神田區駿河台3ノ9

印刷者　石村勳
東京市牛込區市ケ谷加賀町1ノ12

印刷所　大日本印刷株式會社
東京市牛込區市ケ谷加賀町1ノ12

發行所　合資會社　共立社
東京市神田區駿河台3ノ9
振替東京46074電話神田1518・2624

新輯教育數學講座　第4回配本