科學通訊

黎照寰

第四期

中華民國二十四年十月　上海交通大學科學學院編輯

科學通訊

第四期　目　錄

談言:

頁數

教材:

書評:

專載:

談言

譯名難

(附 $f'(x)$ 之定議及公式不可瞎用之續)

顧澄

九月五日開數學名詞審查會於滬上,到者北平鄭君桐蓀熊君迪之,武昌曾君昭安,浙江陳君建功錢君卓如,廣東何君衍璿,本埠朱君公謹胡君敦復,皆一時碩彥,盡八日之力竟將數千譯名,多年懸案,完全解决告一段落,厥功不可謂不偉。不佞方抱西河之痛,雖與斯會,心緒未甯,不惟毫無建白,甚至各名如何通過,亦竟有茫然若無所聞至事後始知者。惟於諸君崇論宏議之間,精神間爲稍振之際,覺譯名之難雖不一端,而莫如同一英文原名而各書之用法不一,往往顧此失彼,無法兼通深恐從事迻譯者見此次所定之名與其所譯之書義有不符,遂致疑於本會同人,謂爲粗率不能不略有陳述以廣其意。惟貿然爲之,懼有掠美之嫌。爰先贅此數語,而後舉例如下

英美數學名詞,譯自德法,因各人譯法不一,致字異意同如

*本刊談言,立論不求十分嚴格,前已聲明,因此每篇之中統系亦不必十分嚴格,此期本應續前期之公式不可瞎用,但數學名詞審查會係九月集會,故先登此篇。但恐閱者望前期之續,故附一 $f'(x)$ 之定義及於4款說明此定義之要用,以爲防止誤用公式之一助,藉慰閱者之望。本編統系不嚴責由於此。以後各期當將與公式不可瞎用有關諸稿登完之後再易他篇。

every-where dense 及 Pantaxis,或字同意異如 Maximum 之類,無論矣。今取一最普通之 derivative 言之。此為微積中主要名詞,不但為初高等解析中所不能無,幷為其他數學物理涉及微積者所常用;且自牛頓發明微積至今,年已三百。似乎此字之用法必各書一律不至分歧矣,而孰知其不然。但就英文數學在吾國已極通行之五書而論, derivative 一名已有三種不同之意義。同是 $f'(x)$ 亦有三種不同之名稱。紛亂已極。在譯書上發生極大之困難*。幸政府力求統一名詞卽將公佈,有一標準於譯讀兩方裨益非淺*。

1. 欲明此字用法之不同,須先言數種記號之定義。蓋必記號之義先定再述各書,以同此一字或名此號或名彼號,其分歧情

*例如譯微積分等,其中有 derivative 之定義者,讀者尙能知 derivative 之譯名為何義。

凡譯「有 derivative 之名而無 derivative 之定義之書,」如必欲譯作紀數或導數,而 derivative 在書中適為函數 $f'(x)$ 而非數 $f'(a)$, 則困難立生, (其詳見 2,3 兩款)况此項譯名在吾國已有各種不同之主張如導函數,導來函數,導微函數,微導函數,導式,引函數,引數,紀數,導數,誘導函數。卽此已是十種。在譯者不妨隨手寫去,無如苦了讀者,買了一本譯本,還要買一本原本對一對方能明白。我們做事終要代別人想一想。尤其是中小學書中的名詞,學生已經習慣。你在高等數學中把他改了,誰曉得你肚裏的意思。例如嚴又陵想到四方,覺得方可代四,將 Quaternion 譯作「方維」。如再有一人覺得維是線,線是邊,且四維是四樣「主要東西」(原素),四邊形的邊亦是四邊形的主要東西(原素);於是忽發奇想又將四邊形改為「方維」,說可少一「形」字!這兩個「方維」不但中學畢業生做夢也相不到你所譯的是何名,所指的是何義;就是數學狠好的人恐怕也莫名其妙。如附原名,則此種名詞尙須附原名不如索性讀原書,如加定義(初等幾何以外之書),則此類名詞尙須加定義,譯書無異做字典。現在教部力求統一名詞,眞是救苦救難的觀世音,可使學生少出寃枉錢,不費白腦力。否則將來愈譯愈歧。眞不得了。

形始易淸楚也。

設 $f(x)$ 爲 x 之函數,其定義區域 (Domain of definitien) 爲 D, a 爲 D 之正義聚點 (proper limiting point), 名

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \qquad x \text{ 在 } D \text{ 中}$$

爲 a 上之差商。因 $x-a=\Delta x$ 則 $x=a+\Delta x$ 而差商爲

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

於是有下定義:

定義一. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ 存在時,以 $f'(a)$ 爲此極限之記號。

凡 D 中之正義聚點 a, $f(x)$ 在其上有 $f'(a)$ 者,謂之 $f(x)$ 之可微分點。D 中有可微分點時, D 中之一切可微分點另成一點集 Δ。於是有下定義:

定義二。 以 Δ 中之一切 $f'(a)$ 作一新函數,以 $f'(x)$ 爲其記號。

注意(1)　此 Δ 爲 $f'(x)$ 之定義區域。凡 D 中之可微分點皆在 Δ 中,凡 Δ 中之點皆爲可微分點。故 D 中任一可微分點 a 之 $f'(a)$ 皆爲 $f'(x)$ 之一值,可謂之「在 a 上之 $f'(x)$」。故單獨之記號 $f'(x)$ 爲函數,加「在 a 上之」四字之「在 a 上之 $f'(x)$」卽只指一數(極限值)。

注意(2)　D 爲任意點集,故 D 中之點未必盡爲正義聚點,其正義聚點又未必盡爲可微分點。故 Δ 亦許與 D 同,亦許爲 D 之一部分,亦許不存在。Δ 不存在時 $f'(x)$ 亦不存在。

注意(3)　定義一中,未假定 $f(x)$ 在 a 上連續者,因在 a 上連續仍不能保 $f'(a)$ 存在,只要 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ 存在, $f(x)$ 在 a 上當然連

續，至許多書上先假定 $f(x)$ 在 a 上連續者，實因其胸中有一「$f(x)$ 在 a 上連續為 $f'(a)$ 存在之必要件」之定理。覺得須先假定 $f(x)$ 在 a 上連續。實則此定理乃有此定義後之事。先行假定大可不必。（要之，此項假定已含在「$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 須存在」之中，不必重複也）。

注意(4)　尋常 $f'(a)$ 及 $f'(x)$ 之定義以區間 (intervale) 為 $f(x)$ 之定義區域者，已包括於此兩定義中。

注意(5)　定義二改為「以 D 中一切 $f'(a)$ 另作一函數，其記號為 $f'(x)$」。固無不可，惟 $f'(x)$ 之定義區域雖意在言外，但定一函數究應先明定其定義區域，不可草率。

又此定義一，二乃根據 Pierpont 氏實函數論第一冊 p.222 而稍改其形式者；此項更改，本屬無須，而所以改之者，因本刊為初學說法說得明白些，可令人易了解而少誤會。且就本談前數款之目的論，此二定義固應力求簡潔，但因須顧及末一款之 (b)〔與本刊第三期公式不可瞎用有關〕，使初學易知形式紀函數與真實紀函數之分別以防誤用公式，則此二定義實應不嫌冗長說得愈清楚愈有益於閱者。此五條注意亦由於此，蓋本刊之目的專在助中學教習、大中學學生及無師自修者之研究數學，而不在藏諸名山傳之其人也。（下兩定義因與末款無關，故但舉大意，力求簡略）。

照此兩定義則

(1)　$f'(a)$ 為一極限即是一數（而非一種函數）。

(2)　$f'(x)$ 為一函數（而非一數）Δ 為其定義區域。

定義三。 若上差商之極限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

不存在，但其右左極限

$$R\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

及

$$L\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

皆存在而各不相等,則依次以 $R\,f'(a)$ 及 $L\,f'(a)$ 表之,又照作 $f'(x)$ 之法作函數 $R\,f'(x)$, 及 $L\,f'(x)$。*

定義四。 若

$$R \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

亦不存在,則以 $\bar{R}\,f'(a)$ 表 $R \overline{\lim_{\Delta x \to 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, 以 $\underline{R}\,f'(a)$ 表 $R \underline{\lim_{\Delta x \to 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$。

又若

$$L \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

不存在,則以 $\bar{L}\,f'(a)$ 表 $L \overline{\lim_{\Delta x \to 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, 以 $\underline{L}\,f'(a)$ 表 $L \underline{\lim_{\Delta x \to 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$。

照上作成 $R\,f'(x)$ 之法,又可作成函數 $\bar{R}\,f'(x)$, $\underline{R}\,f'(x)$, $\bar{L}\,f'(x)$ 及 $\underline{L}\,f'(x)$。

照此兩定義則

(3)　$R\,f'(a)$,　$L\,f'(a)$,　$\bar{R}\,f'(a)$,　$R\,f'(a)$,　$\bar{L}\,f'(a)$ 及 $\underline{L}\,f'(a)$

各為一數(不是函數)

(4)　$R\,f'(x)$,　$L\,f'(a)$,　$\bar{R}\,f'(x)$,　$R\,f'(x)$,　$\bar{L}\,f'(x)$, 及 $\underline{L}\,f'(x)$

各為一函數(不各是一數)。

2.　今可說明各書中 derivative 一字用法不同矣。

今取在吾國最通行之兩種高等微積及三種實函數論以為標準如下。(以下所謂紀數為 derivative, 紀函數為 derived function,

---

*其定義區域閱者自可照作 $f'(a)$ 之法想得;例如凡 D 中正義聚點,差商之右極限 $R \lim_{\Delta a \to \Delta} \frac{\Delta y}{\Delta a}$ 在其中存在者,另成一點集,此點集即 $R_{\prime}'(a)$ 之定義區域餘推類、

微分係數爲 differential coefficent 皆照此次通過之名。紀數及紀函數爲熊君迪之所主張。以下均從之)。

(A) Goursat 數學解析第一冊。p 5 紀數 (derivative) 之定義中,說明 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 中之 x 爲確定之數,則其所謂紀數即 1 欵定義一之 $f'(a)$ [此書中雖未作 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 之形式,但爲引徵 1 欵定義便利計,故用 $f'(a)$,關於以下各書同此],是一數而非函數。但其 p.7, 6 欵言逐次紀數(successive derivative) 時,又言 $f(x)$ 之紀數 (derivative) 通例爲別一函數 $f'(x)$。是則函數 $f'(x)$ 亦謂之紀數而不稱紀函數矣*。一名兩用,似不甚宜。

(B) Wilson 高等微積。名 $f'(a)$ 爲「對於 $x=a$ 之紀數 (derivative of $f(x)$ for the value $x=a$)」,名 $f'(x)$ 爲紀數(derivative)。此雖與 Goursat 書相類,但於下定義時加「對於 $x=a$ 之」於紀數之前,以名 $f'(a)$,單用「紀數」以名 $f'(x)$、較有分別。

(C) Townsend 實函數論。p.149. 名 $f'(a)$ 爲紀數(derivative);名 $f'(x)$ 爲紀函數(derived function),雖兩名分清,但以 derivative 爲 derived function 之簡稱者他書有之**,以此兩字各表一意者,實不常見。(此次審查之數學名詞原稿,似根據此書,以後譯他種微積及函數論者宜注意此兩名之別,否則認定 derivative 爲 $f'(a)$ 即發生不便矣)。又此書名 (p.151)

$$D^{+}f(a) \text{ 即上之 } \bar{R}\, f'(a)$$

爲 upper right-hand derivative number。於 derivative 之下加一 number,

---

*既規定紀數及紀函數二名,則譯 Goursat 氏書應將 derivative 譯作兩名,遇其 derivative 指 $f'(a)$ 時應譯作紀數,指 $f'(x)$ 時應譯作紀函數。此處皆譯作紀數者,因照原文呆譯方可顯出各書 derivative 一名用法之不同,以見下 3 款末節之言,有注意之價值也。

** C. H Hardy Pure Mathematics P 199.

似不甚宜。此爲一數，前之 derivative $f'(a)$ 何嘗不是數且其29欵(p.149)之標題爲 Definition of a derivative and of a derivative number。頗似 derivative $f'(a)$ 非數而 derivative number $\overline{R}f'(a)$ 等爲數者。終覺有些不妥。

(D) Hobson 實函數論第一册。此書中之紀數（derivative）一名，既非 $f'(a)$，又非 $f(x)$，乃指 $Rf'(a)$, $Lf'(a)$，及 $D^+f(a)$ 卽 $\overline{R}f'(a)$, $D^+f(x)$ 卽 $\overline{R}f'(x)$，　等，在分言時雖於紀數上（derivative）加左(on the left)右(on the right)及上極下極(upper and lower extreme)等區別字以明之(p.354，在總稱時則 $D^+f(x)$, $D_+f(x)$, $\bar{D}^-f(x)$, $\underline{D}f(x)$ (卽 $\overline{R}f(x)$, $\underline{R}f'(x)$, $\overline{L}f'(x)$, $\underline{L}f'(x)$) 但統謂之紀數(derivatives)，而不再加區別字，(p.384, 283欵，及 p. 386, 286欵等)。是則此書所謂紀數(derivative)與 $f(a)$ 相去甚遠，蓋必 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ~~存在~~，方稱之爲 $f'(a)$。而 $Rf'(a)$, $D^+f(a)$，等則此極限不必存在，且反注重其不存在時之 $Rf'(a)$, $D^+f(a)$，也。至於 $f'(a)$ 則謂之 a 上之微分係數(differential coefficent at a.p.352)，又 $f'(x)$ 亦謂之微分係數，如 p. 352, If $f(x)$ have a continuons differential coefficent $f'(x)$ at every point of an open interval (a, b)，及 p. 368 之末，the function $f'(x)$ may itself have a differential coefficent $f''(x)$，此前者雖 $f'(x)$ 後有 at every point 但從其前之 continuous 字著想可見其視 $f'(x)$ 爲函數；此後者更於 $f'(x)$ 之前加一 function，其必視 $f'(x)$ 爲函數無疑。惟於此後者之末亦稱 $f''(x)$ 爲二階紀數(second ~~derivative)，則未~~免自亂其例耳。

(E) Pierpont 氏實函數論第一册。

p.222. 名 $f'(a)$ 爲在 a 上之微分係數(differential coefficent at a)，名 $f(x)$ 爲 $f(x)$ 之紀數(derivative)，名 $Rf'(a)$ 及 $Lf'(a)$ 爲右及左微

分係數,名 $Rf'(x)$ 及 $Lf'(x)$ 爲右及左紀數 (right hand and left hand derivative), 又其第二冊 p.494 總稱 $\bar{R}f'(x)$, $\underline{R}f'(x)$, · 等爲 derivates。(Pierpont 爲 Weierstrass 之高足,平素注重理論嚴格,但以其 $f'(x)$ 之定義與他四書比較,自知其優點,故附此數語順便爲初學紹介。惟此書刋誤處頗多,閱時須留意耳。)

3. 但就上五書論, derivative 之用法已各不同 (Goursat 與 Wilson 似同而略異,見 2 中)。函數 $f'(x)$ 名之爲 derivative 者三書 (Goursat, Wilson, Pierpont) 名之爲differential coefficent者一書(Hobson), 名之爲 derived funetion 者一書 (Townsond 。數 (極限值) $f'(a)$ 名之爲 derivative 者三書(Goursat, Townsowd, Wilson),名之爲differential Coefficent 者二書 (Hobson, Pierpont)。

上以 $f'(x)$及 $f'(a)$爲主體言。若專就名詞 derivative 言,惟 Townsond 專以名數 $f'(a)$。Hobson 既不用以名 $f'(a)$ 亦不用以名 $f'(x)$, 竟用之於 $f'(a)$ 不存在時之 $Rf'(a)$, 等(詳見 2)。Pierpont 專以名 $f'(x)$, Goursat 有時用以名 $f'(a)$ 有時用以名 $f'(x)$。Wilson 則必於 derivative 後加 for the value $x=a$ 方以名 $f'(a)$,否則以之名 $f'(x)$ [惟於 derivative 之後加 for the value $x=a$ 或 at $x=a$ 或 at a 等方以名 $f'(a)$ 者,其 derivative 之本身實以名 $f'(x)$。此猶「function $f(x)$ at a」雖表數 $f'(a)$, 而function 之本身實名函數而非名數也。]

此五書之外如Hardy之純粹數學 P. 199, 不但名函數 $f(x)$ 爲derivative, 且於 derivative 之後, 加 or derived function, 則 derivative 爲 derived function 之簡名矣 (以function at a 例 derivative at a)。

既有此種種不同,而欲譯定一名.可爲譯各書時所通用决無是理。惟有規定二名(例如熊君主張之紀數及紀函數)以後譯書者遇 $f'(a)$ 則名之爲紀數,遇 $f'(x)$ 則名之爲紀函數,而不問原書中稱

之爲何名。(惟如此則於譯名之下須加定義,或加通用之記號如$f'(a)$, $f'(x)$等。若但於 derivative 之下附一譯名紀數,則仍恐人不知此 derivative 爲上述諸義中之何義。但此則無異作一辭典,頗費時日,不能於短時間成之,須視以後會中同人之努力矣)。至於導數紀數,何者爲妥,尙屬小事,此觀上舉五書名稱之不同,卽可知其大概。惟吾國譯名如能先行劃一以防分歧而便教讀。自屬更善耳。

$f'(a)$ 及 $f'(x)$ 必須各有定義

4. $f'(a)$, $f'(x)$, $R f'(a)$, $R f'(x)$, $\bar{R} f'(a)$, $\overline{R} f'(x)$,
等須各有定義,如 Goursat 書於下$f'(a)$之定義後,不再明白規定$f'(x)$之意義,讀者卽易生誤會。其詳如下。

a. $f'(x)$ 既無定義,則雖於 p.7 (Goursat 書,下同)聲明其所謂 a derivative 之意義,讀者仍易誤解爲分指各數 $f'(a)$ 而不總指一函數。且從 first derivative 求 second derivative 時,如 first derivative 爲分指各數,而非總指一函數,卽不可通,蓋常數之 derivative 皆爲 o 也。其再於 p.7, 6 欵加「函數 $f(x)$ 之 derivative 大抵爲 x 之他函數 $f(x)$」,亦卽此意,但讀者往往死記其 p.5, 5 欵 derivative 之定義,仍以爲此書中之 derivative 非指一數 $f'(a)$, 卽分指與 $f'(a)$ 同類之各數,而强謂 second derivative 可從

$$\lim_{h_1\to 0,h_2\to 0}\frac{f(a+h_1+h_2)-f(a+h_1)-f(a+h_2)+f(a)}{h_1 h_2}=l \qquad (1)$$

求之,l 如存在卽是 $f''(a)$, 故 first derivative 儘可爲一數 $f'(a)$ 而不必爲函數 $f'(x)$ 云云。此亦一知半解者之意見。蓋一則既用直接求 $f''(a)$ 之法,何必云從 first derivative 求 second derivative, 二則此種求法須先假定 derivative 爲連續 (Goursat 氏書 p17), 既非函數卽

說不到連續,三則當$f'(x)$及$f''(x)$在a之隣近存在時,此極限l固為$f''(a)$,但此逆則不確,卽l存在時未必卽為$f'(a)$ [Hobson實函數論第一冊p.370],也。要之Goursat書中$f'(a)$及$f'(x)$皆謂之derivative。致讀者之生此種誤解,實由於書中未明白規定$f'(x)$之意義耳。

b. 求函數$f(x)$之紀函數* $f'(x)$,若不如1欵中明白規定紀函數$f'(x)$之定義,則$f'(x)$之定義區域Δ不明,往往誤認形式紀函數為眞實紀函數[所謂形式紀函數卽但憑形式計算所得之$f'(x)$(卽但憑公式求得之$f'(x)$),凡初等微積專用形計算所得之$f'(x)$皆是形式紀函數。所謂眞實紀函數為形式紀函數經過審查除去其不合理各值後之結果]**。例如下(2),(3)兩例之$\Phi(x)$及$F(x)$,其形式紀函數皆為$-\frac{1}{1+x}$其眞實紀函數則為「$x\neq o$時之$-\frac{1}{1+x^2}$」。故$\Phi(x)$及$F(x)$之紀函數應寫作

$$
\left.\begin{aligned}
\Phi'(x)&=-\frac{1}{1+x^2},\ x\neq o,\\
F'(x)&=-\frac{1}{1+x^2},\ x\neq o.
\end{aligned}\right\}\qquad (I)
$$

不應但寫作.

---

*$f'(x)$以後謂之紀函數,$f'(a)$以後謂之紀數,因此係本會通過之名,熊君迪之所創者也。

**廣言之,凡專用公式之計算(尚未審定其是否合理者)謂之形式計算,由形式計算所得之結果,謂之形式結果。例如但顧馬氏展開式(Maclaurin's development)之形式,將一實函數展成級數而不問其在理論上可能與否,則此種計算卽是形式計算,其結果卽是形式結果。此種形式結果竟有全不合理,不僅如(II)比(I)所差僅一點上之值者。故形式計算雖為初學數學者所必經之階級,要不可以此為自足。不佞雖年屆伏櫪而仍望吾國數學之日進,遇但知形式計算者,嘗言之諄諄不憚觸忌,而無如聽者藐藐終固故習。特再附數語於此,倘只知形式計算者聞之能翻然自改不自誤誤人,則於數學前途或不無微益耳。

$$\Phi'(x)=-\frac{1}{1+x^2},$$
$$F'(x)=-\frac{1}{1+x^2}。\qquad (II)$$

故知 1 之定義後,於「防止瞎用公式(見本刊第三期談言)」可發生一部分之効力。玆設三例以明之如下

(1) 設

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x},\qquad x\neq o\text{ 時},$$
$$=o,\qquad x=o\text{ 時}。$$

知 1 之定義後立可知其眞實紀函數爲 ($f'(o)=o$ 之求法見本刊三期談言)。

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},\qquad x\neq o\text{ 時},$$
$$=o,\qquad x=o\text{ 時}。$$

而不至誤認 $2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ 爲眞實紀函數.蓋 $2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ 爲 $x\neq o$ 時之 $f'(x)$, 不能用之於 $x=o$ 時也[參觀本刊第三期談言 (III) 中之語(p.3 之末)]。本刊第三期談言,因限於程度,擬專對只學初等微積而尙未知 1 欵之定義者說法,故但就「$x=o$ 時 $2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ 不存在」以明不能憑此公式以斷 $f'(o)$ 爲不存在,及說明此公式之來源用過 $\frac{d}{dx}x^{-1}=-x^{-2}$, 故在 $x=o$ 時此公式不能用。凡所云云.其目的重在公式不可瞎用。若閱者已知 1 欵定義,則立可知 $f(x)$ 之眞實紀函數如上,而決不至瞎用公式 $2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$,認 $f'(o)$ 爲不存在矣。

再假定閱者已明白函數之定義區域及 1 欵定義,而嚴格言之,以明上節末數語如下。

點 o 在 $f(x)$ 之定義區域 D 中,而不在 $x^2\sin\frac{1}{x}$ 之定義區域中。故 $2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, $x\neq o$, 僅爲 $x^2\sin\frac{1}{x}$ 之眞實紀函數,姑無論其在 $x=o$ 時不存在及其來源用過 $\frac{d}{dx}x^{-1}=-x^{-2}$ 之公式,即使其在 $x=o$ 時存在及其來源中未用過此公式,亦决不能運用以求 $f'(o)$。簡言之, $2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ 爲 $x\neq o$ 時之 $f'(x)$,而非 $x=o$ 時之 $f'(x)$ 也。至於他種函數亦有在「$x\neq o$ 時之眞實紀函數」中令 $x=o$ 卽得 $x=o$ 時之眞實紀數者,此只可視爲偶然之事,而决不能視爲常例作爲定法。此猶函數之極限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 與函數之值 $f(a)$, 雖凡 a 爲 $f(x)$ 之連續點時,此二者必相等,但究非同物一遇 a 爲 $f(x)$ 之不連續點,此二者卽不相等矣;故其等爲偶然,其不等爲常例,惟習於初等函數(縱有不連續點亦皆爲孤點)而未深究不連續函數(不連續點多至無窮,且非皆爲孤點)者,往往反視偶爲常,視常爲偶,觀念顚倒,雖誤而不能自覺耳。明乎此而推廣之,細味數學中各項定義之眞相而不使稍有誤解,則公式之誤用自能不至大犯矣。

(2)　設

$$\Phi(x)=\arctan\frac{1}{x},$$

則其定義區域 D 中無點 o, D 既無 o, 則 o 自非 D 之正義聚點從 1 欵定義,自知 $\Phi(x)$ 之定義區域 Δ 中當然無點 o, 而 $\Phi'(o)$ 當然不存在。若但照形式計算,則得

$$\Phi'(x)=-\frac{1}{1+x^2},$$

此在 $x=o$ 時,並非不存在,而其值爲 -1。若不知 1 欵定義必誤以爲 $\Phi'(o)=-1$ 矣。既知此定義,自知此形式紀函數必須審查其是否爲眞實紀函數,且知審查之法不能但憑此形式紀函數 $-\frac{1}{1+x^2}$ 察其在何點上存在,在何點上不存在,以決定

真實紀函數;幷須於$-\frac{1}{1+x^2}$之外,從此定義着想,以察$-\frac{1}{1-x}$之定義區域是否為此定義中之Δ,方能决定真實紀函數。此從[$\Phi(x)$之真實紀函數為

$$x \neq o \text{ 時之 } -\frac{1}{1+x^2}$$

而非無限制之$-\frac{1}{1+x^2}$,以及此$x\neq o$之限制决不能單憑$-\frac{1}{1+x^2}$看出]即可知此1欵定義之重要矣

(3)　設另定一函數

$$F(x)=\arctan\frac{1}{x} \qquad x\neq o \text{ 時,}$$

$$=\frac{\pi}{2} \qquad x=o \text{ 時,}$$

[o雖非$\arctan\frac{1}{x}$之可去不連續點,但照函數之定義儘可定一如此之$F(x)$。此$\frac{\pi}{2}$乃隨意所定,改為他數亦無不可。初學以為必如(1)例,o為可去不連續點,方能另定一函數,如(1)例之定$f(x)$。誤也]。則$F(x)$之定義區域D中已有點o,且o為D之正義聚點矣。然$F'(x)$仍為$x\neq o$時之$-\frac{1}{1+x^2}$,而非無限制之$-\frac{1}{1+x^2}$。何則,$F'(o)$雖已存在,而$F(x)$在o上仍不連續,故$F'(x)$之定義區域Δ中仍無點o。若但照形式計算得

$$\frac{d}{dx}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{1}{1+x^2},$$

及不知其在$x=o$時不可用,則將覺$x=o$時此式之左明明存在,誤以為$F'(o)=-1$,而忘却函數在不連續點上無紀數矣。若不忘却此理,又必胡思亂想,想出許多不正當之解釋,而自以為是矣。

由此可知審查形式紀函數以求真實紀函數,更須於形式紀

函數外根據各種定理(在此例,卽「某點上有紀數之必要條件爲原函數在此點上連續」之定理)以爲審査之具矣。

從上三例,可知 $f'(x)$ 之定義若不明白規定如1欵中云云,而但如尋常書中糊塗過去,讀者極易發生誤解,以爲形式計算,已能盡微分之能事,則誤人不淺矣。故初學於經過注重形式計算之初高等微積之後,必須再經理論上之陶冶,方能目光深遠不至誤用公式而不自知。此理論研究之所以尤貴於形式計算也。(此所謂注重形式計算之高等微積,指大學課程中之第二步微積卽美國式之 Advanced Calculus)。

再 Goursat 氏書雖亦偏重形式計算,理論較略。但究是高等微積中之好書。例如其中雖未明白規定 $f'(x)$ 之定義但其 p.7, 6 欵前之數語,讀者苟能細玩,自能察知其所謂 a derivative 卽是一種函數。6 欵中再言「$f(x)$ 之 derivative 通例爲別一函數 $f'(x)$」亦不覺突兀,所患讀者於此類地方不求甚解糊塗過去而但死記其中公式耳。本欵所言,意在說明 1 款定義之重要,使但學初高等微積只知形式計算者,注意及此,爲防誤用公式之一助而已。非對 Goursat 氏書加以攻擊也。

三期談言正誤

P.5 「又 7) 之不存在 義」應改爲「又 $a=0$ 時(7) 之不存在固因其無意義」.「8) 不可用」應改「7」非 $f(a)$ 之 $f'(a)$」. 參觀本談 P. 11, 12.

教 材

展開三角函數爲無窮乘積之一法

范會國

三角函數之展開爲無窮乘積,大抵數理解析中,多有述及,惟所須之預備智識,往往頗多,閱讀稍覺費事,難免望洋興歎.本篇所述之一法,只基於關於冪級數之一定理,及初步微分方程式之少許智識,於初學者,或非無補也。

1. **預備定理.** 設當 $-1<x<+1$ 時,係數爲正之二冪級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\quad+a_nx^n+$$

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\quad+b_nx^n+$$

爲收斂及表二函數 $A(x)$ 及 $B(x)$. 若級數

$$a_0+a_1+a_2+\quad+a_n+$$

爲發散及比率 $\dfrac{b_n}{a_n}$ 於 $n\longrightarrow\infty$ 時有一有限且異於零之極限 λ 則比率 $\dfrac{B(x)}{A(x)}$ 于 x 由小於1而趨近於1時亦有同樣之極限 λ.

證 設 x 爲正及 $\leqq 1$ 所取之二級數之同次序之二項之比爲 $\dfrac{b_n}{a_n}$, 其極限爲 λ, 故此二級數之本性相同,換言之,卽其收發性爲相同,因而依假設于 $x=1$ 時,同爲發散。

試先證于 x 趨近于1時,二函數 $A(x)$ 及 $B(x)$ 俱有其極限爲 $(+\infty)$. 爲此,設 P 爲任一正數。由假設,級數

$$a_0+a_1+a_2+\quad\cdot\quad+a_n+$$

爲發散,所以可選n相當大而使

$$a_0+a_1+a_2+\cdot\qquad+a_n>P+1。$$

當x由小於1而趨近於1時,多項式

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdot\qquad+a_nx^n$$

有其極限爲

$$a_0+a_1+a_2+\qquad+a_n,$$

是以可選小於1之一正數r以使不等式$r<x<1$引出不等式

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\qquad+a_nx^n>P,$$

因之,更得

$$A(x)>P,$$

卽 $\lim\limits_{x=1}A(x)=+\infty$. 同理 $\lim\limits_{x=1}B(x)=+\infty$.

至此,可進而證比率$\dfrac{B(x)}{A(x)}$在上述之條件中有其極限爲λ. 爲此,設ε爲已知之任一正數。因比率$\dfrac{b_n}{a_n}$於$n\longrightarrow+\infty$時有其極限爲λ, 吾人可找得一正整數q以使不等式$n>q$引出不等式

$$\lambda-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{b_n}{a_n}<\lambda+\frac{\varepsilon}{2},$$

今因a_n及x俱爲正,故由是得

$$\left(\lambda\quad\frac{\varepsilon}{2}\right)a_nx^n<b_nx^n<\left(\lambda+\frac{\varepsilon}{2}\right)a_nx^n,$$

因而

$$\left(\lambda-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sum_{n=q+}^{+\infty}a_nx^n<\sum_{n=q-1}^{+\infty}b_nx^n<\left(\lambda+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sum_{n=q+1}^{+\infty}a_nx^n,$$

若以$A_q(x)$及$B_q(x)$表所取之二級數之起頭$q+1$項之和,則得

$$\left(\lambda-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Big[A(x)-A_q(x)\Big]<B(x)-B_q(x)<\left(\lambda+\frac{\varepsilon}{2}\right)\Big[A(x)-A_q(x)\Big],$$

若乘各邊以正數 $\frac{B(x)}{A(x)\left[B(x)-B_q(x)\right]}$,則得

$$\left(\lambda-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{1-\frac{A_q(x)}{A(x)}}{1-\frac{B_q(x)}{B(x)}}<\frac{B(x)}{A(x)}<\left(\lambda+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{1-\frac{A_q(x)}{A(x)}}{1-\frac{B_q(x)}{B(x)}}$$

因 q 爲已決定,故於令 x 趨近於 1 時,以 $A(x)$ 及 $B(x)$ 俱無窮增大,$A_q(x)$ 及 $B_q(x)$ 各趨近於其有限之極限第一邊及第三邊乃有其極限爲 $\lambda-\frac{\varepsilon}{2}$ 及 $\lambda+\frac{\varepsilon}{2}$.

是故吾人可找得小於 1 之一數 r' 以使不等式 $r'<x<1$ 引出不等式

$$\left(\lambda-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{1-\frac{A_q(x)}{A(x)}}{1-\frac{B_q(x)}{B(x)}}>\lambda-\varepsilon,$$

及

$$\left(\lambda+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{1-\frac{A_q(x)}{A(x)}}{1-\frac{B_q(x)}{B(x)}}<\lambda+\varepsilon,$$

因之於 $r'<x<1$ 時,乃有

$$\lambda-\varepsilon<\frac{B(x)}{A(x)}<\lambda+\varepsilon.$$

是以

$$\lim_{x=1}\frac{B(x)}{A(x)}=\lambda,$$

2. 應用。 玆應用上之預備定理於下二冪級數

$$A(x)=1+\frac{2^2}{3!}x+\frac{2^24^2}{5!}x^2+\quad+\frac{2^24^2\quad(2n)^2}{(2n+1)!}x^n+$$

$$B(x)=1+\frac{(2^2-\alpha^2)}{3!}x+\frac{(2^2-\alpha^2)(4^2-\alpha^2)}{5!}x^2+$$

$$+\frac{(2^2-\alpha^2)(4^2-\alpha^2)\cdots(4n^2-\alpha^2)}{(2n+1)!}x^n+\cdots,$$

x 爲含在 o 及 1 中。

茲設 α 爲含在 (-2) 及 $(+2)$ 中之一實數,於是第二級數之一切係數俱爲正數。

依 D'Alembert 法則,當 $o<x<1$ 時,第一級數爲收斂。惟於 $x=1$ 時,此級數爲發散,蓋其後一項與前一項之比

$$\frac{4n^2}{2n(2n+1)}=\frac{n}{n+\frac{1}{2}}$$

大於調和級數之後一項與前一項之比 $\frac{n}{n+1}$ 也。

至於第二級數,於 $o<x<1$ 時,亦爲收斂,則甚顯然者也。

在此之比率 $\frac{b_n}{a_n}$ 爲

$$\frac{b_n}{a_n}=\frac{(2^2-\alpha^2)(4^2-\alpha^2)\cdots(4n^2-\alpha^2)}{2^2\cdot4^2\cdots4n^2}$$

$$=\left(1-\frac{\alpha^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha^2}{4n^2}\right).$$

此比率於 $n\to+\infty$ 時,有一有限且異於零之極限,是卽斂性無窮乘積

$$\left(1-\frac{\alpha^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha^2}{4n}\right)\cdots$$

之值 λ 也,此無窮乘積之所以爲收斂者,蓋以級數

$$\alpha^2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots\right)$$

爲收斂也。

是以依預備定理得

$$\lim_{x=1} \frac{B(x)}{A(x)} = \lambda.$$

3. 當 $o<x<1$ 時,試求 $B(x)$ 及 $A(x)$.

在此可命

$$x=\sin^2 t, \qquad o<t<\frac{\pi}{2}.$$

試以 β_{2n} 表係數

$$\frac{(2^2-\alpha^2)(4^2-\alpha^2)\cdots(4n^2-\alpha^2)}{(2n+1)!},$$

及命 $\beta_0=1$.

無論 n 爲一正整數或零,都有

$$\frac{\beta_{2n+2}}{\beta_{2n}} = \frac{(2n+2)^2-\alpha^2}{(2n+2)(2n+3)},$$

由是

$$(1) \qquad (2n+3)\beta_{2n+2}-(2n+2)\beta_{2n} = -\frac{\alpha^2\beta_{2n}}{(2n+1)}.$$

依微分一冪級數及一函數之函數定理,乘積

$$\sin t \cos t\, B(\sin^2 t) = \sum_0^{+\infty} \beta_{2n} \sin^{2n+1} t \cos t$$

爲斂性級數

$$F(t) = \sum_0^{+\infty} \beta_{2n} \frac{\sin^{2n+2} t}{2n+2} + C$$

之導函數,其中 C 表一任意常數,容後始決定之,

如是,得

$$(2) \qquad B(\sin^2 t) = \frac{F'(t)}{\sin t \cos t}.$$

今試求 $F''(t)$ 函數 $\sin^{2n+1}t\cos t$ 之導函數為 $(2n+1)\sin^{2n}t\cos^2 t-\sin^{2n+2}t$，或於代 $\cos^2 t$ 以 $1-\sin^2 t$ 後，為 $(2n+1)\sin^{2n}t-(2n+2)\sin^{2n+2}t$。因而得 $F''(t)$ 為二斂性級數之差·

$$F''(t)=\sum_0^{+\infty}(2n+1)\beta_{2n}\sin^{2n}t-\sum_0^{+\infty}(2n+2)\beta_{2n}\sin^{2n+2}t.$$

其中第一級數可書為

$$1+\sum_0^{\infty}(2n+3)\beta_{2n+2}\sin^{2n+2}t,$$

由是

$$F''(t)=1+\sum_0^{+\infty}\Big[(2n+3)\beta_{2n+2}-(2n+2)\beta_{2n}\Big]\sin^{2n+2}t,$$

再依關係 (1)，得

$$F''(t)=1-\alpha^2\sum_0^{+\infty}\beta_{2n}\frac{\sin^{2n+2}t}{2n+2}=1-\alpha^2\Big[F(t)-C\Big].$$

是故於 $o<t<\frac{\pi}{2}$ 時，函數 $F(t)$ 滿足於微分方程式

$$(3)\qquad F''(t)+\alpha^2F(t)=1+\alpha^2C.$$

試先設 $\alpha\neq o$，而求 $B(\sin^2t)$。為此，試取 $C=-\frac{1}{\alpha^2}$，於是微分方程式 (3) 變為

$$F''(t)+\alpha^2F(t)=o,$$

因之，得

$$F(t)=C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t.$$

其中 C_1 及 C_2 表二任意常數。

由 $F(t)$ 之式，即表 $F(t)$ 之級數，可見

$$F(o)=C=-\frac{1}{\alpha^2},$$

$$F'(o)=o,$$

因而得　$C_1=-\frac{1}{2^2}$,　$C_2=o$, 及

$$F(t)=-\frac{1'}{\alpha^2}\cos\alpha t,$$

$$F'(t)=\frac{1}{\alpha}\sin t,$$

由是,依關係(2),得

$$(4)\qquad B(\sin^2 t)=\frac{\sin\alpha t}{\alpha\sin t\cos t}$$

玆再求 $A(\sin t)$, 換言之,卽 $\alpha=o$ 時之 $B(\sin^2\alpha)$. 在此,微分方程式(3)變爲

$$F''(t)=1.$$

在此,試取 $C=o$, 於是 $F(o)=F'(o)=o$, 因而得 $F(t)=\frac{t^2}{2}$, $F'(t)=t$, 及

$$(5)\qquad A(\sin^2\alpha)=\frac{t}{\sin t\cos t}.$$

4. 結果.　在上已見

$$\lambda=\lim_{x\to 1}\frac{B(x)}{A(x)},$$

卽

$$\lambda=\lim_{t=\frac{\pi}{2}}\frac{B(\sin^2 t)}{A(\sin^2 t)}.$$

依(4)及(5),得

$$\gamma=\lim_{t=\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\alpha t}{\alpha t}=\frac{\sin\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha\frac{\pi}{2}}$$

是以

$$(6)\qquad \sin\alpha\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha^2}{4n^2}\right)$$

在上之證明中,曾假設$\alpha\neq o$,但此結果(6)於$\alpha=o$時,仍然存在。同樣,在上之推理中,亦假設α爲含在(-2)及$(+2)$中,惟若(6)之兩邊爲以4爲週期之α之週期函數,則無論α爲若何,此結果仍爲眞確。今者,(6)之兩邊恰爲α之週期函數,其週期爲4.何則蓋一方面,第一邊$\sin\alpha\frac{\pi}{2}$顯爲以4爲週期,他方面,爲欲證明第二邊亦爲以4爲週期,試以$P(\alpha)$表此第二邊,及取比率$\frac{P(\alpha+4)}{P(\alpha)}$,則得

$$\frac{P(\alpha+4)}{P(\alpha)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha+4)[2^2-(\alpha+4)^2][4^2-(\alpha+4)^2]\cdots[4n^2-(\alpha+4)^2]}{\alpha[2-\alpha^2][4^2-\alpha^2]\cdots[4n^2-\alpha^2]},$$

於將各括弧[ ]中之平方之差分解及簡約之,則得

$$\frac{P(\alpha+4)}{P(\alpha)}=\lim_{n=\infty}\frac{(2n+2+n)(2n+2+\alpha)}{(2n-2-\alpha)(2n-\alpha)}=1,$$

是知$P(\alpha)$爲以4爲週期。

今若代$\frac{\alpha\pi}{2}$以z,則無論z爲任何實數,都有

$$(7)\qquad \sin z=\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

是卽所欲得之$\sin z$之無窮乘積也。

若再代z以πx,則上式可書爲

$$\frac{\sin\pi x}{\pi}=x(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\ 。$$

玆有可察出者因(6)之第二邊爲α之週期函數,其週期爲4,故(7)之第二邊乃爲z之週期函數,其週期爲2π.如是之結果,許多數理解析中往往直接證明之。復次,如是之結果,於展開$\sin z$爲冪級數時,不能發現,蓋由表$\sin z$之冪級數

$$\frac{z}{1}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+$$

不能發見此函數有一週期 2π 也。

最後,若察出 $\cos z=\dfrac{\sin 2z}{2\sin z}$,則易得 $\cos z$ 之無窮乘積為

$$\cos z=\left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\cdots\left[1-\frac{4z^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right]\text{。}$$

不　等　式（一續）

武崇林

§2. 一基本不等式。

設 x, y 各為正而不相等,則

(2,1a)　$$mx^{m-1}(x-y)>x^m-y^m>my^{m-1}(x-y),\qquad m<o \text{ 或 } m>1,$$

(2,1b)　$$mx^{m-1}(x-y)<x^m-y^m<my^{m-1}(x-y),\qquad o<m<1.$$

如 $m=o$ 或 $m=1$,則 (2·1a) 及 (2·1b) 兩式均成等式,故可以略去不談。在證明之前,吾人先示上之二式可以化為其特例之一。

(i) 吾人可設 $m>o$。 此因若設 (2·2a) 在 $m>1$ 時已經證明之後,如取 $m<o$,則可命 $m=-n$, $n>o$ 且 $1+n>1$,因而

$$\begin{aligned}x^m-y^m=x^{-n}-y^{-n}&=x^{-n}y^{-n-1}(y^{n+1}-x^ny)=x^{-n}y^{-n-1}\{y^{n+1}-x^{n+1}-x^n(y-x)\}\\&>x^{-n}y^{-n-1}\{(n+1)x^n(y-x)-x^n(y-x)\}\\&=x^{-n}y^{-n-1}n.x^n(y-x)=my^{m-1}(x-y),\end{aligned}$$

故 (2·1a) 之後半,在 m 為負時,可以自其在 m 為正時推得 同樣其前半在 m 為負時亦可自其在 m 為正時推得。

(ii) 若 x, y 互換,則 (2·1a) 及 (2·1b) 之後半均變為其前半,故

吾人僅證明(2·1a)(2·1b)之各後半卽爲已足。

(iii) 因(2·1a),(2·1b)兩式對x,y皆係齊次,而x,y又均設爲正,故可以命其中之一者爲1而其普遍性亦不致少損. 是以若命$y=1$,則吾人所需證明者當爲以下之二式也·

若x爲正且不等於1,則

(2·2a) $$x^m-1>m(x-1),\qquad m>1,$$

(2·2b) $$x^m-1<m(x-1),\qquad o<m<1.$$

若於(2·2a)內書$m=1/k$,則$o<k<1$,且設$x=y^{1/m}=y^k$. 因得

$$y-1>\frac{1}{k}(y^k-1),$$

或卽 $$y^k-1<k(y-1),$$

是卽(2·2b),故見所有需證明者,僅(2·2a)而已

今證(2·2a)如次,此係 Hardy. 所發現曾載于 Jour. Lon. Math, Soc, IV, (1929) 68頁。

若q爲大於1之整數,則依$y\gtrless 1$而

$$qy^q\gtrless 1+y+y^2+\cdots+y^{q-1}=\frac{y^q-1}{y-1}\gtrless q,$$

如以x代y^q,則

$$qx\gtrless\frac{x-1}{x^{1/q}-1}\gtrless q,\qquad x\gtrless 1$$

因而勿論$x\gtrless 1$,

(2·3) $$\frac{x-1}{x}<q(x^{1/q}-1)<x-1.$$

其次

$$\frac{y^{q+1}-1}{q+1}-\frac{y^q-1}{q}=\frac{y-1}{q(q+1)}(qy^q-y^{q-1}-y^{q-2}-\cdots-y-1)$$

$$=\frac{(y-1)^2}{q(q+1)}\{y^{q-1}+(y^{q-1}+y^{q-2})+$$

$$+(y^{q-1}+y^{q-2}+\quad+y+1)\}$$

~~其右端折括~~弧內共有$\frac{1}{2}q(q+1)$項,各項均在y^q及1之間,是以依$y\gtrless 1$而得

$$(2\cdot4)\qquad \tfrac{1}{2}(y-1)^2\gtrless\frac{y^{q+1}-1}{q+1}-\frac{y^q-1}{q}\gtrless\tfrac{1}{2}y^q(y-)^2.$$

若p爲大於q之整數,則繼續施用(2·4)式$p-q$次,且加其結果,則得

$$(2\cdot5)\qquad \tfrac{1}{2}(p-q)(y-1)^2\gtrless\frac{y^p-1}{p}-\frac{y^q-1}{q}\gtrless\tfrac{1}{2}(p-q)y^q(y-1)^2,\quad y\gtrless 1$$

然自(2·3)可得

$$(2\cdot6)\qquad \left(\frac{x-1}{x}\right)^2\gtrless q^2(x^{1/q}-1)^2\gtrless(x-1)^2,\qquad x\gtrless 1$$

故於(2·5)內以x代y^q,且應用(2·6),則得

$$(2\cdot7a)\qquad \frac{q^{p/q}-1}{p/q}-(x-1)>\tfrac{1}{2}(p-q)\cdot q\cdot(x^{1/q}-1)^2>\tfrac{1}{2}\cdot\frac{p-q}{q}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2,\qquad x>1.$$

$$(2\cdot7b)\qquad \frac{x^{p/q}-1}{p/q}-(x-1)>\tfrac{1}{2}(p-q)x^{p/q}q(x^{1/q}-1)^2>\tfrac{1}{2}\frac{p-q}{q}x^{p/q}(x-1),\quad x<1,$$

若m爲有理而等於p/q,則(2·7)卽(2·2a)之證明。若m爲無理數則命p_i/q_i, $i=1, 2, 3, \cdots$爲一有理數序,其極限爲m,則見(2·7)式對i爲大於一定數之分數p_i/q_i,統爲眞實,故命$i\longrightarrow\infty$則得

$$(2\cdot8)\qquad \begin{aligned}&\frac{x^m-1}{m}-(x-1)\geq\tfrac{1}{2}(m-1)\left(\frac{x-1}{x}\right)^2>o,\qquad x>1,\\ &\frac{x^m-1}{m}-(x-1)\geq\tfrac{1}{2}(m-)x^m(x-1)^2>o,\qquad x<1.\end{aligned}$$

是亦(2·2a)之證.

在流行之教科中,證明率及於m爲有理數而止,(譬如Chrystal代數學,卷二,第43頁)若m爲無理數時,則必須引用無理數之現代定義,如以上所用卽Cantor之極限定義也。(參閱上期及本期談言欄"無理數論究竟要不要?")證明不等式之一最大困難,在於施

行極限之後，>及<記號，各『退化』而為≥及≤，(參閱以上自 (2·7) 式至 (2;8) 式之過程) 因而不復能嚴格保持>或<之記號；若 Hairdy 之所證，吾人確見其能保持>及<記號於施行極限運算之後也。

最後吾人可以略述上不等式之一應用。尋常在初等微積分中，求乘冪 x^m 之導來函數亦每及於有理指數而止。然若設無理指數定義為已知之後，則應用上之不等式，其導來函數之求法亦殊易。如今 δx 為 x 之增加，(設為正；如為負，則調換下式之 $(x+\delta x)^m-x^m$ 為 $x^m-(x-\delta x)^m$) 則由 (2·1a) 及 (2·1b)，

$$mx^{m-1}\delta x>(x+\delta x)^m-x^m>m\delta x(x+\delta x)^{m-1},\qquad m>1 \text{ 或 } m<o.$$

$$mx^{m-1}\delta x<(x+\delta x)^m-x^m<m\delta x(x+\delta x)^{m-1},\qquad o<m<1.$$

由是

$$mx^{m-1}\gtrless\frac{(x+\delta x)^m-x^m}{\delta x}\gtrless m(x+\delta x)^{m-1}.$$

$$\lim_{\delta x\to 0} m(x+\delta x)^{m-1}=mx^{m-1},$$

故

$$\frac{dx^m}{dx}\equiv\lim_{\delta x\to 0}\frac{(x+\delta x)^m-x^m}{\delta x}=mx^{m-1}$$

在稍精審之作，或則變 x^m 為 $e^{m\log x}$，(例如 Gibson, Advanced Calculus, p.46) 或則應用定積分，(例如 R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, I,SS. 103－105 及125－126) 然究不如用上式之直接了當，即或不用 m 在無理時之理，而僅用 m 在有理時亦可以求得也。何以舍近圖遠？抑未暇思及此乎？ (待續)

初等幾何學 切圓一題之討論（一續）

陳懷書

第九題　切一線及二圓作圓

- 相離
  - 直線不會二圓
    - 直線在二圓之同側……八解
      - —直線又平行於一個公切線……六解
    - 直線在二圓之間……無解
  - 直線爲外公切線……五解
  - 直線爲內公切線……三解
  - 直線交一圓切第二圓……四解
    - —直線又平行於一個公切線……四解
  - 直線交一圓不會第二圓……四解
    - —直線又平行於一個公切線……三解
  - 直線交二圓……四解
    - —直 又平行於一個公切線……四解
  - 直線切一圓不會第二圓
    - 二圓在直線之異側……二解
    - 二圓在直線之同側……五解
      - —直線又平行於一個公切線……五解
- 外切
  - 直線爲外公切線……五解
  - 直線爲內公切線……不定
  - 直線不會二圓……六解
    - —直線又平行於一個公切線……五解
  - 直線切一圓
    - 不會第二圓……五解
      - —直線又平行於一個公切線……四解
    - 交第二圓……五解
      - —直線又平行於一個公切線……五解
  - 直線交一圓不會第二圓……四解
    - —直線又平行於一個公切線……四解

- 二圓不等
  - 直線交二圓
    - 直線不過二圓之切點……六解
      - 直線又平行於一個公切線……六解
    - 直線過二圓之切點……三解
      - 直線又平行於一個公切線……三解
  - 內切
    - 直線不會二圓……二解
      - 直線垂直於二圓之聯心線……二解
    - 直線切一圓不會第二圓……二解
      - 直線垂直於二圓之聯心線……二解
    - 直線切一圓交第二圓……五解
      - 直線垂直於二圓之聯心線……五解
    - 直線爲公切線……不定
    - 直線交一圓不會第二圓……四解
      - 直線垂直於二圓之聯心線……四解
    - 直線交二圓
      - 直線過切點……三解
      - 直線不過切點……六解
        - 直線垂直於二圓之聯心線……五解
  - 相交
    - 直線不會二圓……三解
      - 直線又平行於一個公切線……三解
    - 直線切一圓
      - 不交第二圓……四解
        - 直線又平行於一個公切線……四解
      - 交第二圓……六解
        - 直線過交點又平行於一個公切線……三解
        - 直線不過交點平行於一個公切線……五解
    - 直線外切二圓……五解
    - 直線切一圓於二圓之交點且交第二圓……三解
    - 直線交一圓不會第二圓……四解
      - 直線平行於一個公切線……三解
    - 直線交二圓
      - 直線過二圓之二交點……二解
      - 直線過二圓之一交點……五解
        - 直線又平行於一個公切線……五解
      - 直線不過二圓之交點……八解
        - 直線又平行於一個公切線……八解

- 相容
  - 直線不會二圓……無解
  - 直線切一圓
    - 交第二圓……四解
    - 不會第二圓……二解
  - 直線交一圓不會第二圓……四解
  - 直線交二圓……四解
- 二圓相等
  - 相離
    - 二圓在直線之同側不會直線而直線平行於二個公切線…六解
    - 直線爲外公切線……五解
    - 直線交二圓且平行於其二個公切線……四解
  - 外切
    - 直線不交二圓而平行於其二個公切線……六解
    - 直線爲外公切線……五解
    - 直線交二圓且平行於其二個公切線……五解
    - 直線過二圓心且過切點……三解
  - 相交
    - 直線不交二圓而平行於其二個公切線……四解
    - 直線爲外公切線……三解
    - 直線交二圓
      - 直線過二圓之交點且平行於二個公切線…五解
      - 直線不過二圓之交點而平行於二個公切線…六解

化學實驗補充材料（續第一期）

陳同素選譯

9. 泡沫之經久

泡沫救火器與焙粉有相似之處。焙粉放入麵麸內所發生之二氧化碳氣泡爲蛋白質化合物所成之膜包圍。故較之焙粉僅加水所生之氣泡經久多多。

取一不含蛋白之焙粉樣品。將乾蛋白研細，於 100 克焙粉加用 1 克。乃取此二種焙粉（一含蛋白，一不含蛋白）同時行兩個實驗

以資比較。每種各取10克盛高脚瓶內各加 5 毫升 (*c.c.*) 水。如此可觀察加蛋白之焙粉所生泡沫歷久不散,卽倒持之亦不見水滴流出,另外一種則幾乎隨生隨滅。此實驗足以示膠質化學之如何可以應用於商品上甚明(在製麵包時因本身已有蛋白質故無須添加蛋白質也)。

10. 液體之過冷却

液體之過冷却以冰醋酸實驗之最為佳妙。醋酸冰點為 16°C 用 2～½ 升 (liter) 之瓶內盛冰醋酸浸於一桶之冰水內,自課前到課後約一小時。

只要搖動此液體,摩擦其瓶塞,或用玻棒輕輕擦動卽有結晶形成。如失敗則可置醋酸一試驗管於冰鹽合成之冷却劑內,俟其結晶以玻管取一微粒,投入此過冷却液體內卽可結晶。

在戶外冷却則各種條件不同,故成績不及上述之佳。

11. 過飽和溶液

最適宜於試驗過飽和溶液之材料當推醋酸鈉。放 576 克純粹醋酸鈉之結晶於略大於 1 升之瓶內,瓶之內壁須選其光滑者,瓶蓋用木塞加入 600 毫升蒸餾水。放此瓶於冷水桶內加熱至沸。煮十分鐘,結晶盡溶。熱瓶時瓶塞亦須煮於水內以溶解殘留塞上之結晶。待結晶溶解後置於靜處,瓶塞輕輕塞上,蓋瓶冷後收縮所生之眞空能吸住此瓶塞甚牢也。冷却約需二時不可促進並冷至室內溫度時輕將瓶塞旋出。有時此空氣之突入卽能使之結晶。或取一長25厘米 (*cm*) 之玻棒插入液中,結晶卽開始進行,若不然則取出玻棒用手指摩擦棒端使生結晶。復插入此飽和液內則棒

端凝成一球而繼續生長以至滿瓶硬結,提玻棒而瓶亦隨起矣瓶內結晶加熱卽溶可以反覆應用。

12. 鐵之腐蝕

塗錫之鐵較之塗鋅之鐵容易侵蝕。可以下述試驗證之

取同樣大小之鋅條及錫條各一,於一端繞細鐵絲十週用橡皮圈縛住之取 250 毫升量筒兩只各盛水及加濃硫酸 2 滴再加赤血鹽數滴混和後溶液帶黃色,爲欲使兩瓶內之溶液濃度平均起見,可先在另一較大容器內配就後裝兩筒分用之。若分置鋅條及錫條於筒內,繞鐵絲之端向上,則見附錫之鐵卽成硫酸低鐵而發生藍色 (Turnbull's Blue 而附鋅之鐵絲則不溶入液中,故無藍色發生。

試查電位表即知鐵在鋅錫之間鋅最高。故附鋅之鐵卽使溶入液內亦當立卽澱出,但錫在下位無此能力也。

13. 硫酸銨之加水分解

將硫酸銨煮沸卽變爲酸,緣該鹽加水分解而生成氫氧化銨及硫酸之故也。前者極易分解成爲揮發性之氨及水,故溶液中所留剩者乃係硫酸。

取 5 克純粹硫酸銨及 200 毫升水盛燒瓶內煮之瓶塞上裝一彎曲玻管導入另一玻杯,中盛 200 毫升水及數滴 phenolphthalein, 管端離開液面約 0.5 厘米,煮硫酸銨時此收汽杯內之水變紅。

用下列方法試驗結果更爲明顯加數滴 phenolphthalein 於硫酸銨溶液內,再加碳酸納溶液使呈紅色。煮之,紅色卽褪,而收汽杯

內之液體立即變紅。硫酸銨溶液冷却後則紅色又現,殆因加熱時 NH_4 及 OH 兩離子併合成不離解之氫氧化銨也。此項解釋是否正確,作一實驗證明如下:

取一250毫升燒瓶裝水半滿加2滴氫氧化銨,加phenolphthalein數滴使呈紅色。熱此溶液則紅色褪,冷之則復顯。

14. 保護膠質

阿拉伯膠可以阻制氯化銀之沈澱,試驗如後:先做溶液三種(*a*)溶解1克硝酸銀於200毫升蒸餾水,(*b*)溶5毫升之純粹鹽酸於40毫升蒸餾水,(*c*)溶解5克阿拉伯膠於100毫升蒸餾水。

用500毫升玻筒兩只各盛400毫升蒸餾水。加(*c*)液10毫升於其中之一筒內。混和之,乃於每筒內加10毫升之(*a*)液與(*b*)液混和之。

阿拉伯膠隔離此二種化合物質,故只有少量可以互相化合,而所生之澱粒乃至細至微懸浮於液內,至於未加保護膠質之一筒則其澱粒至粗且大,故少頃即全沈降焉。

將此二筒爆日光下,則細澱一筒容易還原不久色即變藍,粗澱則僅稍稍變色耳。設靜置一日,則澱粗者全降而上面得一清澄之液體。澱細者,其液爲深藍色。

此種加用保護膠質之細澱。照相底片即應用之,而其感光速度則依其澱粒之粗細而定也。

15. 懸濁液之沈降速度

懸濁液吸收某種電荷後可以使其沈降速度減至極慢,舉例如下:——

取玻筒兩只容量約 100 毫升,各盛蒸餾水幾滿。於每筒內加 0.1 克之白泥細粉。一則加濃鹽酸 5 滴,一則加濃苛性鈉 5 滴。

此粘土即吸收 OH 離子於表面,故其微粒為同性電荷互相排斥而使沈降速度減小。加酸之一筒經過一天後即完全沈降,而加苛性鈉者則須經過數星期方始下降。倘粒子極細則竟可常持其懸浮液之狀態也。

倘用浸過石蠟之木塞全部塞入瓶口,再以石蠟封固,可供數年之用。

16. 乾粉與濕粉之分離

取玻璃粉 5 份與煙煤粉 1 份相混。放入一小篩內,於其下面立一盛水玻筒篩距水面約五厘米。輕拍小篩則見玻璃粉沈入筒底而煙煤粉則浮於水面。但勿拍之過久,使此混合粉末積存過多,或致二種粉末均行沈降。倘僅積起稍厚之一層於水面時,即輕拍此玻筒則僅有玻璃粉可以沈下而煙煤粉則不然。

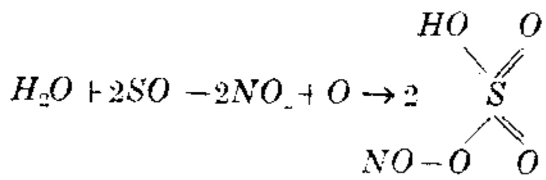
許多之礦之淘洗即利用此原理而使雜質分離也。

17. 鉛室製硫酸法

製造硫酸之鉛室法中之化學作用可以下述之實驗示明之。

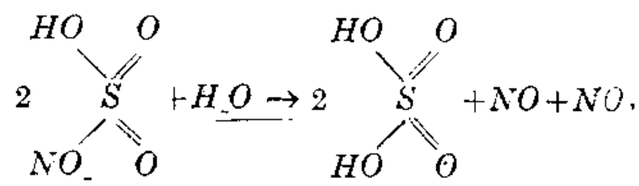
注入 5 毫升之發煙硝酸於50厘米長之玻璃圓筒內。然後傾斜此筒使平臥而旋轉之,則筒內之酸沿邊旋流而至筒口。復將圓筒立直,用玻管導入二氧化硫氣體。如此筒邊即生成所謂「鉛室晶」。其作用如下:

$$2HNO_3+SO_2\rightarrow H_2SO_4+2NO$$



(鉛室晶)

水由酸中而來,氧從空氣而來待鉛室晶成功後,二氧化硫即停止導入而通入水汽結晶乃溶解而氧化氮復發生(有櫻色烟表示)



$$2NO+O_2\rightarrow 2NO_2$$

空氣　櫻色

及櫻色烟消失後,乃停止水汽,而加水於圓筒至筒高二分之一,搖和後,傾其一半於他瓶。一則加氯化鋇溶液及純粹鹽酸以試驗其硫酸根。一則加入藍色石蕊液試驗其酸性,

18. 銨汞膏

先製鈉汞膏如下,注10毫升汞於厚實之磁缽中。取出數塊圓形鈉塊(直徑約5毫米(*mm*))置濾紙上。用缽杵擊研一塊,鈉即粘附杵端。乃將杵浸入汞內至作用發生。此時汞發微熱,故第二塊鈉放下後作用較速。繼續加鈉至成一稠厚似乳酪狀之物體,冷後變硬。

另製一氯化銨之飽和溶液如下。盛50毫升於玻璃結晶皿內,擊碎鈉汞膏成四五塊後,加入此氯化銨溶液中其作用如下

$$NaHg+NH_4Cl=NaCl+NH_4Hg$$

所成之物曰錏汞膏而其中之錏根暫時可認爲金屬。但此膏即行分解成氨,氫及汞。欲證明此節可用一大試驗管放入少許此海綿狀之錏汞膏,而覆一小玻皿於管口。待錏汞膏分解片刻後,取火持近管口即有氣體自燃可以證明氫之發生。再以紅試紙持向管口則變爲藍,或以鹽酸瓶之蓋近管口,則有白霧發生,均足表示氨之生成。　(完)

水滴下墜速度之測量

蔡其清

物體下墜速度之測量,不惟能示初學者以加速運動之可以直接測量,(不必如 *Atwood* 氏機或斜面運動之須籍解析而後冊一者且其數據常足爲流體阻力研究之資料。蓋物體普通在空氣中墜落而空氣爲流質,常施阻力於物體以尼其行,由其速度之與自由墜落不同則阻力定律可得而計也。故對於速度測量之裝置,學者頗多設計,而其中尤感興味者,殆爲水滴下墜速度之測量乎。

最初測定水滴下墜速度者爲 *Lenard*(1), 其法先以向上氣流支持落至某處時之水滴,再測量向上氣流之速度,同時*Mache*( ) 更向雨滴攝影因攝影機之曝光時間爲已知,則自雨滴在照片所劃之長線可以計算其速度。依此法所計算之雨滴之終端速度大致頗能與 *Lenard* 所得者相符。

稍後 *S hmidt*(3) 用二圓板各刻去扇形之長條,安置於軸上而以電動機相對旋轉之,使水滴適能通過二空隙間,如是由圓板旋轉之速度,及二板間之距離,可以計算其下墜之速度。

其後英人 *Flower*[4] 更創二法。其一爲彈動扭力天平。用定量之水滴,落於天平之一盤上,則見天平之彈動偏轉常依水滴之速度而增(卽依運動量而增,蓋此處質量爲定值)惟據其本人謂速度與偏轉間不能有線性關係,故不久卽行放棄。其另一法則用高速電影攝影機,使一串量水滴落於發光刻度毛玻璃前,其旁更置一發光時間指示器,二者同時攝成片。如是則水滴之位置可於刻度毛玻璃上讀出,而時間則由時間指示器上讀出。由前後二影片間水滴之位置及時間之差,則在此處之平均速度,可以求得,又因時間甚短,故幾近於瞬時速度。

由上所述,得見諸家設計漸次進步。此中自以 *Flower* 之法最爲精密,因彼之刻度可讀至0.1厘米而時間可讀至0.002秒。*Lenard* 之法祇能用於終端速度,(即無加速速度)蓋終端速度祇有賴於氣體與水滴之相對速度.氣動而水靜與水動而氣靜,其阻力固無異也。故必俟氣體阻力等於水滴重力,然後得以平衡,其不能用以測量任何中間速度也明矣。其餘他法雖可以測量下墜時任何一處之速度,惜當時各家皆注重於終端速度,對於中間速度,未有數據以遺吾人,以致使探討加速運動阻力者無所依據,不爲無遺憾耳。

著者前與班樂夫博士研究水滴當落下而振盪時,得見可藉水滴之振盪以推知其在空中之速度。其法以定量水滴自高處落於一毛玻璃板上,再量其在板上擴展之直徑,則其結果不但此直徑依落下之高而增,且爲週期的張縮,此張縮卽由於水滴之振盪也。其週期則有公式可以算出,而一週期所行之距離,卽爲二高之差,故在此一週期中之平均速度可以求得。又因其週期甚短故亦幾近於瞬時速度。惜此水滴因空氣之阻力,振盪漸趨微弱,故不適

於落下長距離後之測量。

日人 *Miyagi*[5] 嘗以迴旋鼓攝影術記載氣泡在水內之上升。著者曾擬增加其旋轉速度,以用之於水滴下墜之測量。其法如圖一,卽在一迴旋鼓上裹一溴紙,旋轉於固定之圓筒內,圓筒上開一狹長之窗,置於滴落裝置之前。對方則更自一匣內發出强光,置於一旋轉圓板之後,圓板上開若干扇形之長窗,使燈光時曝時掩,於是遂攝得一串水滴之影於溴紙上。至時間之記錄則另用一燈,以透鏡集光於音叉上之小鏡,再反射於旋轉鼓上。當音叉振動時紙上卽現一波形之曲線,因音叉之頻率爲已知,故時間亦不難由此讀出此法惜以所攝距離過短,且裝置調節費事,故尙未舉行。

嗣著者嘗讀 *Lunnon*[6] 氏"動球流體阻力"之篇,並略師 *Flower* 氏"彈動扭力天平"之製,參以己意,擬有一法,其法如圖二,在水滴滴落處裝一附件上有一輪,其軸安置於鑽石之上,故轉動時阻力極微。輪緣一邊附一金屬片,爲聯絡二電極而通電之用,他一邊置一細針,此針藉水之表面張力,可黏着於水滴之上,當水滴落下時,則細針亦因之下墜,而他端之金屬片卽上升以通電路,此電路亦通過天平而至「時間記錄器」(*Chronograph*)卽在器上作一記號。及至水滴落至天平之盤上時,天平卽失其平衡而偏轉,故電路復開,於是在器上再作一記號。此二記號之距離所表之時間,可比較器上他一針所記之電動音叉之頻率而知之。如是二高間落下所需之時間爲已知,則在此二高間之平均速度卽可得矣。本實驗之用"時間記錄器"乃採自 *Lunnon* 氏者,其記載可望準確。設天平上之接觸點不佳,則可改用水銀接觸法。至細針之製,須用不易起化學變化之金屬,更須時時淸潔,則水滴落下後留在針上之水可望定量,不致應響於水滴之均勻。又此針須極細,而與對方之小金屬片

保持平衡,則可望不施引力於水滴而造成水滴之初速度。故各物如能精密製造,實驗時可無困難。

水滴大小之勻均,爲本實驗一重要條件。依實驗,水滴大小常依滴落速度而增,故欲得均勻之水滴,須有均勻之滴落速度,而欲速度均勻,尤須壓力均一,因此化學上用之滴管不能適用。現在所用者爲等水準瓶,如圖三瓶中貯水以塞密封之,故瓦中空氣,不與外界相通。另自水中導出二管,一通大氣,一通滴管。其通大氣之管一端在水內者,其壓力爲大氣之壓力。自此端至滴管之端,爲水準之高。蓋瓶水自滴管中滴去,則瓶中之氣壓減而通大氣之管自能上升氣泡以補足之。故水準之高與瓶內水面無關,所以謂之「等水準瓶」。惟氣泡上升時因表面張力關係,須俟水滴滴落數滴後,始得一氣泡上升以致滴落速度稍有週期變化,不能爲絕對的均一矣。

參考書

(1) *Lenard, P , Met. Zeit., 39, p 249 (1904)*

(2) *Mache, H., Met Zeit , 39, p. 378 (1904)*

(3) *Schmidt, W., Akad. Wiss. Wien. Sitz. Ber., 118, 2a, p. 71 (1909)*

(4) *Flower, W. D., Proc. Phys. Soc. 40 p. 167 (1927-28)*

(5) *Miyagi, O., Phil. Mag (6), 50 p. 112 (1925)*

(6) *Lunnon, R. G., Proc Roy. Soc 118 p. 680 (1928)*

書　評

化學參攷書籍選輯（續第二期）

陳同素選譯

化學教授法

25. 高中化學教案。 *Teaching of High School Chemistry. Frank, J. O. J. O. Frank and Sons, Oshkosh, Wis., 5th. ed., 1932,285pp., $3.00.*

凡教授高中化學所需用之教材均搜羅而敍明之。可供參閱之各種材料如試驗,教本,小冊,展覽品,工業品等等均列表敍明。其餘如關於化學教授上之新近研究亦有解釋。

26. 理科教本. *How to Teach Secondary Chemistry and Allied Sciences. Haub, H D.F. Harr Wagner Pub, Co.,San Francisco, 1929,299pp, $2.50.*

首論實驗室教室貯藏室之計畫,布置,設備等問題。教員與學生之目的申述詳明,所述教材綱要,適用於各種學生及教本。

化　學　史

27. 近世著名化學家. *Eminent Chemists of Our Time. Harrow, Benjamine. D. Van Nostrand Co., New Yock City, 2nd ed., 1927,471pp, $3.00*

潘金（*Perkin*）與煤膠染料,孟岱理（*Mendelejeff*）與週期律,冷

賽(*Ramsay*)與大氣中之氣體,黎查德(*Richards*)與原子量,樊哈夫(*Van't Hoff*)與物理化學,阿侖內(*Arrhenius*)與離解理論,毛森(*Moissan*)與電爐,居利夫人(*Madame Curie*)與鐳,冷森(*Remsen*)與美國化學之勃興等。

28. **二十世紀化學新發明。** *Chemical Invention and Discovery in the Twentieth Century. Tilden, W A. George Routhedge & Sons, London, or E P. Dutton & Co., New York City, 5th ed., 1926,487pp.,$4.00*

世界上幾個大實驗室之描寫及化學儀器之說明三章,近代發見及發明十章,近代應用化學十四章,有機化學之最近進展五章,插圖甚多。

29. **包士德傳.** *Li e of Pasteur Vallery-Radot, D. (translated by Mrs. R.L Devonshire) Garden City Pub Co, Garden City, N Y 1913,484 pp.,$1.00*

此書不論是否科學家均宜閱讀,書中講述包氏對細菌,種苗等之研究工作,並描寫包氏之人格及其科學精神。

30. **化學簡史。** *A Short History of Chemistry. Venable. F.P.D C. Heath & Co, Boston, 2nd ed., 1922,175pp,,$1 60.*

為教員與學生有價值之參考書,化學各部份及各學理之進展歷史用簡明文字敍述之。

手册字典

31. **二十世紀製方新編.** *Henley's Twentieth Century Book of Formulas, Recipes, and Processes Hiscox, C.D. The Norman Henley Publishing Co,2W 45th St., New York City, rev.ed ,1933.,809pp ,$4.00.*

書內包含家庭與工廠所需用之公式及製方甚多,並包含檢

驗食物內攙雜物,防腐劑,及顏料等方法,照相之材料及方法,化學遊戲等等。

32. **化學字典.** *Chemical Dictionary Hackh, I.W D.P. Blackiston's Son & Co., Philadelphia, 790pp.,$10.00.*

化學用字之注音,釋義及其用法設例。實驗儀器之圖形以及其他許多之圖表,曲綫公式。釋義簡潔明瞭而正確。

論理學化

33. **理論化學概要.** *Outlines of Theoretical Chemistry. Getman, F.H. and Daniels, F John Wiley & Sons, Inc., New York City, 5thed.,1931, 643pp., $3.75.*

本書每逢討論一題祗舉其重要之點而詳明講述不涉繁瑣。須用數學解釋之教材比前版加多。文字優美,凡程度較高之中學生均可閱讀。

34. **膠體化學實驗.** *Laboratory Manual of Colloid Chemistry. Holmes. H.N John Wiley & Sons, Inc, New York City, 2nd ed ,1927,288 pp.,$3.00*

書內多理論方面之參插故可兼供教科書之用。有許多實驗極合表演之用,或供高材生之應用。

普通及無機化學

35. **日用化學.** *Chemistry Applied to Home and Community. Berry, Pauline G.J.B. Lippincott Co, Philadelphia, 1926, 534pp ,$3.50.*

教科實驗並有。爲女子深求實用科目之基礎 —— 例如營養,烹飪,織物等 —— 兼及直接應用於家庭問題之化學教材,每章有完全之書目參考。

36. **大學化學入門.** *Introductory College Chemistry. Holmes, H.N. The Macmillan Co., rev. ed. 1931,550pp,$3.25*

敎材注意工業上之新近進展。例如石油之氫化及裂化,醇之合成新法,貝基氏煤質提油法等,氮氣固定法敍述尤詳。膠體化學,有機化學,營養化學及光化學等亦多論述。工業上之方法較理論爲注重。

34. **大學無機化學.** *Inorganic Chemistry for Colleges Foster, Wm.D Van Nostrand Co, New York City, 1929,837pp.,$3.00.*

此書包涵甚廣。化學理論闡明無遺,事實之記載亦甚豐富,元素則分族討論,史料甚多爲敎員及學生之適用參攷書。

38. **普通化學。** *General Chemistry Deming, H.G John Wiley & Sons, Inc, New York City, 4th ed., 1935,715pp,$3.50.*

注重基本原理之工業應用,其主要題材,及其敍述方法均極有裨益於師生之參考。索引詳備,檢查亦便。

39. **史氏大學化學.** *Smith's College Chemistry, Kendall, James. The Century Co, New York City, rev ed., 1929,759pp,$3.75*

本書內容透澈新穎,深合於高級中學之參考。原子學說提出甚早。晶體結構亦有講述,電離解新說討論甚詳。全書四分之一係專論金屬部分。

40. **吹玻璃法.** *Laboratory Glass Blowing Frary, Taylor, and Edwards McGraw-Hill Book Co New York City, 1928,116pp,$1 50*

本書所有練習,均順序漸進,表明普通化學實驗室有用之吹玻璃各方法。應用手術各詳加解釋。務使學生不依賴敎員而自行操作。該書爲敎員製備或修理上課時應用儀器之最有用之書籍。

(待續)

專　載

近代幾何學之導引（三續）

Graustein氏原著　　顧澄達指

第　二　編

幾何學上之引論

例題。以上所言之Desargues氏定理乃屬於廣義範圍者。試就有窮範圍內詳細說明之,並詳舉其一切除外例。在此類除外例中,擇出其一而證明其確已包括於書中所言之內。

5 完全四角形及完全四邊形

定義 四點(其中無三點爲共線者)及其六連線所成之圖形謂之完全四角形(Complete quadrangle)

此四點謂之完四角形之頂(vertices),此六聯線謂之完全四角形之邊。[每點爲一頂,每一連線爲一邊,完全四角形共四頂六邊]。

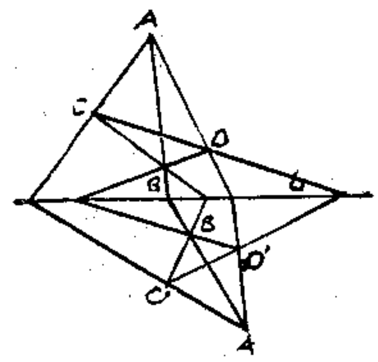
定義 四線(其中無三線爲共點者)及其六交點所成之圖形,謂之完全四邊形(Complete quadrilaterals)

此四線謂之完全四邊形之邊,此六交點謂之完全四邊形之頂[每線爲一邊,每交點爲一頂,完全四邊形共四邊六頂]。

由Desargues氏定理可推得關於完全四角形及完全四邊形之若干射影定理如下。

定理 1 若兩完全四角形之五對相應邊*之五交點同在一直線上,則其第六對相應邊之交點亦必在此直線上,且其相應頂之四連線必為共點。

設兩完全四角形為 $ABCD$, $A'B'C'D'$,及 CD, $C'D'$ 為其第六對相應邊,如八圖。因兩三角形 ABC, $A'B'C'$ 之三對相應邊之三交點同在直線 L 上,則三直線 AA', BB', CC' 必為共點。同理, AA', BB', DD' 亦為共點。由是, AA', BB', CC', DD' 必為共點,此所共之點即 AA',BB' 之交點**。又既知「兩三角形 ACD, $A'C'D'$ 之三對相應頂之三連線」為共點,則 CD 及 $C'D'$ 自必交於 L 之上。



八 圖

此定理之逆不眞確,可以下定理代之。

定理 2 若兩完全四角形之四對相應頂之四連線為共點,則其六對相應邊之六交點(其中每三點在一直線上)在四直線上,此六交點大抵適為一完全四邊形之六頂。

---

*原註. 此假定兩完全四角形之相應法與 Desargues 氏定理中兩三角形之相應法同樣。

**原註. 若 AA' 及 BB' 為相同之一直線,則此推理即無效。但凡 AA' 及 BB 為不同之直線時,此種推理既皆有效,則按諸連續原理,於 AA' 及 BB' 合一時,此論斷仍為眞確。蓋兩確定之完全四角形,其所居之位置適使 AA' 及 BB 為同線者,可作為兩變動完全四角形(其 AA' 及 BB' 為不同兩線者)之極限,又若對此兩變動完全四邊形,此問題之論斷常為眞確,則對於其極限(即此兩確定之完全四角形)亦為眞確。

此定理之證明,讀者可自爲之。[應用 Desargues 定理]。

6. **對立原理** (Principle of Duality)。此原理在射影幾何中最爲重要。

定義1 點與線謂之**對立原素**.(Dual elements)

定義2 「在一點上作一線」與「在一線上作一點」謂之**對立運算**(Dual Operation)*。

由是,在一點上作兩線與在一線上作兩點,或令兩線交於一點與以一線連兩點,亦皆可謂之對立運算。

如此得到之兩圖形(卽「在一點上之兩線」之圖形,及「在一線上之兩點」之圖形),謂之**對立圖形** (Dual Figure)

定義3 凡點線所組成之兩圖形可以對立法互得者(卽此圖形中之各原素改爲其對立原素,各運算改爲其對立運算時,其結果卽成彼圖形者)謂之**對立圖形**。或謂之兩此圖形爲對立。或謂之此圖形爲彼圖形之對立。

---

*「在一點上作一線」卽「作通過一點之線」之意。「在一點上作兩線」卽「作通過一點之兩線」之意。又「線在點上」卽「線過點」之意。就通俗及意義顯明而論,只能云「點在線上」不能云「線在點上」。但爲明點線對立計,以「點在線上」與「線在點上」成對立,習慣之後,自覺其對立關係,更爲顯明。又如下文「令兩線交於一點」與「以一線連兩點」,文雖通俗易明而點線對立之次序則顚倒而反晦。若改爲「以兩線交於一點」與「以兩點連爲一線」,或「交兩線於一點」與「連兩點爲一線」甚或「以一點連兩線」與「以一線連兩點」,則文雖不順(「以一點連兩線」更似不通),而點線對立之次序則反順而顯。文字不過爲表示意思之符號,苟於數理有益,不妨改作,自我開始。故於下文先留其原狀,以求通俗,入後則漸用此改法。以求理顯。特先註明於此。

完全四角形之對立圖形爲完全四邊形,完全四邊形之對立圖形爲完全四角形。一完全四角形爲「先取四點(其中無三點共線)再以其兩兩相連作連線」所成之圖形,其對立圖形爲「先取四線(其中無三線共點)再令其兩兩相交作交點」所成之圖形,此圖形即完全四邊形。

從定義二,易知「一線及其上一點」之圖形與其本身爲對立,如此者謂之**本身對立**(Self-dual)或**自對立**。

若一三角形作爲「三點(不共線者)及其連線」所成,則其對立圖形爲「三線(不共點者)及其交點」所成。故三角形爲自對立。

今可作「Desargues氏定理中所有圖形之對立圖形,及說明此定理中所有事實」之對立關係如下。兩三角形之對立圖形爲兩新三角形。以一雙三角形之相應邊交於一點,其對立之法爲以他雙三角形之相應頂連以直線故「一雙三角形相應邊之交點爲共線」與「他雙三角形相應頂之連線爲共點」爲對立。由是Desargues氏直接定理之假設及終結,依次與其逆定理之假設及終結爲對立。爲表明此種事實計,可云此直接定理及其逆定理爲對立定理(Dual theorem),或云Desargues氏定理(就其全體言)爲自對立。

以上已對立Desargues氏定理,許多其他定理亦可照此對立之。[此中對立二字作動字用]。例如5款定理1之對立定理爲

定理1 若兩完全四邊形之五雙相應頂之連線同過一點,則其第六雙相應頂之連線亦過此點,且其相應邊之交點必爲共線。

此定理之爲眞確,自然仍須證明。

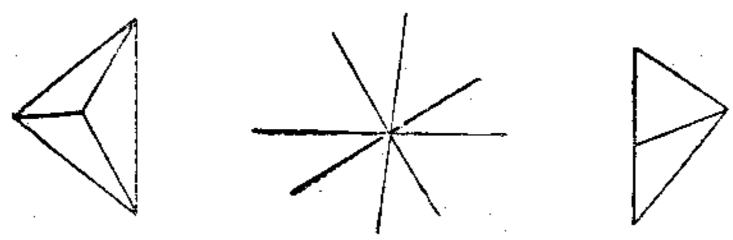
注意 就以上定義之基礎而論,凡圖形及性質,吾人可將其對立者,皆屬於射影方面。故對立原理乃專屬於射影幾何者。在度

量幾何中無類此之情形。例如一圓,長度為 2 之一段線,30°之角等,皆無可以對立之基礎*。

例　題

1. 說明完全五點形(Complete five-points)之對立圖形。並將其畫出,完全五點形為五點其中無三點共線)及其諸連線所成之圖形。

2. 作與以下各圖形互相對立之圖形



3. 證定理 1。

4. 說出 5 款定理 2 之對立定理,並證明之。

5. 完全四邊形之兩頂不在其一邊之上者謂之對頂 Opposite vertiecs), 對頂之連線謂之對頂線 (diagonal)。就完全四角形言,對邊 (Opposite sides) 及對邊點 (diagonel points) 之對立定義應如何?[對邊點卽兩對邊之交點]。畫出其圖形。

6. 若一完全四角形之諸頂在一完全四邊形之諸邊上,而「此完全四角形之兩對邊」與「此完全四邊形之兩對頂線」為共點,則「此完全四邊形之兩對頂」與「此全四角形之兩對邊點」為共線。證明此定理及說明其對立定理、此對立定理與原定理之關係如何?

*原註。 對立之觀念 Poncelet 氏於其極及極線論之統系的用途中,曾加探討,此極與極線論卽對立圖形彼此相應之理論也。至對立原理之首作獨立陳述者則為 Gergonne 氏,時 1286 年也。

第三編

齊次卡氏坐標　點及線之一次相倚

1. **齊次卡氏坐標**　欲得無窮遠點之十分利益,必須先有其坐標。但在尋常卡氏坐標 (Cartesian Coordinates) 中,無從得此種坐標,蓋一切雙數組 (x,y) 均已用作有窮遠點之坐標也。所以必須規定有無窮遠點坐標之新坐標系。

此諸新坐標謂之**齊次卡氏坐標** (Homogeneous Cartesian Coordinates) 或略稱**齊次坐標**有窮遠點之舊卡氏坐標因此可謂之**非齊次卡氏坐標** (Non homgeneous Cartesian Coordinates), 或略稱**非齊次坐標**。今先言「將有窮遠點之非齊次坐標改為齊次坐標」之定義。

定義　有窮遠點$(x\ y)$之齊次坐標為凡三數組 (x_1, x_2, x_3) 之合於

$$\frac{x_1}{x_3}=x, \qquad \frac{x_2}{x_3}=y$$

二式者。

例如 $x, y)$ 之一組齊次坐標為 $(x,y,1)$, $(-3x,-3y,-3)$ 及 $(\gamma x, \gamma y, \gamma)$, 此 γ 可為任意數但不能為 o

由是,一有窮遠點之齊次坐標有無窮多其每兩個坐標中之三數組成比例,每坐標中之第三標不為 o。其逆,任意三數組(其第三數不為 o) 皆可為一有窮遠點之齊次坐標,即 $(x_1, x_2\ x_3)$ 為有窮遠點 $x=\frac{x_1}{x_3}$, $y=\frac{x_2}{x_3}$ 之齊次坐標 $(x_3\neq o)$。例如 $(3,-2,4)$ 為 $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ 點之齊次坐標。

故一切有窮遠點有一切三數組 (x_1,x_2,x_3) 與之互相應 $(x_3\neq o)$。

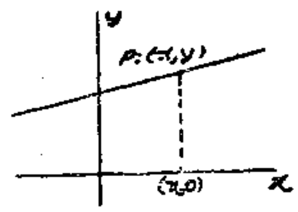
此外尚有合於(x_1,x_2,o)之一切三數組,今欲令其爲一切無窮遠點之坐標。

爲意義有定,便於說明計,就無窮遠點其方向之斜率(Slope)爲λ者,言之。經過此無窮遠點之任意直線L即是斜率爲λ之任意直線L,其方程式爲

$$y=\lambda x+b.$$

設變點(Variable point)$P(xy)$在線L上向兩方無窮後退,由此而得之「P之齊次坐標」之極限若能無關於b(即與斜率爲λ之特別一線無關),則以此極限作爲此無窮遠點之齊次坐標,實有理由。

P之非齊次坐標爲$(x,\lambda x+b)$。當x趨於正無窮時,P在L上向一方無窮後退,又當x趨於負無窮時,P在L上向他一方無窮後退。



一 圖

P之齊次坐標爲$(x,\lambda x+b,1)$。此中第一第二兩標皆隨x趨於無窮,而亦趨於無窮。但就$(1,\lambda+(b/x),1/x)$考之則無論x趨於正無窮或負無窮,此坐標之極限爲$(1,\lambda,o)$,此與b無關。

故無窮遠點其方向之斜率爲λ者,照此理由,可以$(\gamma,\gamma\lambda,o)$作爲其一組齊次坐標。**(γ爲不等於o之任意數)

定義 凡三數組(x_1,x_2o)之合於

$$\frac{x_2}{x_1}=\lambda$$

者組成無窮遠點(其方向之斜率爲λ者)之一組齊次坐標(同類之齊次坐標均在其中)。*

凡廣義平面上之點,今已皆與以齊次坐標[†],而所有三數組,除一個 (0,0,0) 之外,已皆有其所表之點。至此 (0,0,0) 則不用之,[††]此公約也。

直線之齊次坐標方程式。 設直線L之方程式爲

(1) $$a_1x+a_2y+a_3=o,$$

以

** 原文以(x_1,x_2,x_3)爲x_1,x_2,x_3三數所成,名之曰一組坐標,而x_1,x_2,x_3依次謂之第一,第二,第三坐標。又表(x,y)之$(x,y,1),(-3x,-3y-3)$及$(\gamma x,\gamma y,\gamma)$,總稱之曰$(x,y)$之諸組齊次坐標。因此凡言$(x_1,x_2,x_3)$之極限時,亦稱諸極限,意在$x_1,x,x_3$三數之三極限也。(此組字卽原文之Set,諸極限爲原文之lim ts)。

今爲行文簡便計,(x_1,x_2,x_3)謂之一個坐標,在意義顯明處,更略去「一個」二字,或略去「個」字,必表(x,y)之$(x,y,1),(-3x,-3y,-3)$及$(\gamma x,\gamma y,\gamma)$,方謂之$(x,y)$之一組坐標,$(\gamma,\gamma\lambda,o)$亦謂之一組齊次坐標者,因$\gamma$爲不等於$o$之任意數,其形式雖爲一個坐標,而其所代表者實一組坐標也。「一組坐標」四字,有時代表同類坐標之全體,有時代表同類坐標中之若干個,不再嚴爲分別,因讀者自可意會也,遇須注意其全體時,則改「一組坐標」爲「一切坐標」,又$(x_1,x_2\ x_3)$之極限,因此亦但稱極限而不曰諸極限,要之此種地方讀者自能意會,文句不必十分細別也。又(x_1,x_2,x_3)之x_1謂之第一坐標,x_2謂之第二坐標,x_3謂之第三坐標頗不妥。因設同時論及$(x_1x_2x_3),(y_1,y_2,y_3),(z_1,z_2\ z_3)$ 等若干坐標,則所謂第一坐標,指(x_1,x_2,x_3)乎,抑但指x_1乎,將不易辨別矣。故譯文不稱x_1爲第一坐標,而稱之爲第一標,x_2稱爲第二標,x_3稱爲第三標,以示分別。

*原註 此定義及以前之討論,y軸方向之無窮遠點未能包括在內,讀者可自考之。

† 原註 齊次卡氏坐標,係1835年德國幾何家兼物理家 Pluecker 氏(1801—68)所作。至無窮遠線及無窮遠點則 Poncelet 氏已先用之,且其用法頗有統系矣。

†† 任意一點a之坐標(a_1,a_2,a_3)以γ除其中各數,所得之$\left(\frac{a_1}{\gamma},\frac{a_2}{\gamma},\frac{a_3}{\gamma}\right)$仍爲$a$之坐標。當$\gamma\to\infty$時,$\left(\frac{a_1}{\gamma},\frac{a_2}{\gamma},\frac{a_3}{\gamma}\right)\to(o,o,o)$。無論$a_1,a_2,a_3$爲何種定數,其結果皆是如此,故$(o,o,o)$不能以之代表一確定之點。

本刊廣告價目表

等級	地位	全頁價目	半頁價目
甲	底封面外頁	伍拾元	
乙	底面裏頁及封面裏頁	三十五元	二十元
丙	封面裏頁底面裏頁之對面	二十五元	十五元
丁	普通	二十元	十二元

一、乙丙丁四分之一頁按照半頁價目六折計算
二、廣告概用白紙黑字如用彩印色紙價目另議
三、廣告如用銅鋅版由本刊代辦照收製版費
四、連登多期價目從廉請逕函本校出版處經理組接洽

科學學院科學通訊投稿簡章

一、投稿不拘文言白話凡中英德法文均所歡迎
二、談言教材叢錄書評消息均以科學為範圍
三、投寄之稿如係翻譯請附寄原本否則須將原文題目著者姓名出版日期及地點詳細開示
四、投寄之稿務望繕寫清楚並加新式標點凡外國文稿件並請打印之如有插圖附表必須製版者請用墨色
五、來稿請註明姓名住址以便通訊并加蓋印章俾於發給稿費時核對之
六、投寄之稿無論登載與否概不退還但預有聲明並備足回寄郵資者不在此限
七、投寄之稿經本刊揭載後每篇酌致酬金若本刊尚未揭載已先在他處發表者恕不致酬
八、投寄之稿經本刊揭載後版權即為本校出版委員會所有但有另行約定者不在此限
九、投寄之稿本院委員會有酌量增删之權如投稿人不願有何增删則應於投稿時聲明
十、投寄之稿應逕寄上海徐家滙交通大學科學學院科學通訊編輯委員會

中華民國二十四年十月出版

科學學院科學通訊

第四期

編輯者 交通大學科學學院

發行者 交通大學出版委員會 上海徐家滙

印刷者 上海中國科學公司

代售處 上海 世界出版社 上海雜誌公司 作者書社 現代書局 黎明書局 蘇新書社

南京 正中書局 大公報社代辦部

天津 志恆書店

漢口 光華書局

安慶 世界書局

武昌 學生書店 新光書店

廣州 廣州圖書消費合作社

雲南 雲南文化書店

本刊價目

每册大洋二角 全年八册(三、四、五、六月各一册 十、十一、十二、一月各一册)

預訂壹元四角 國外另加郵費