# 序

物理學者於天壤間搆成之物質而研究其相互之力利用之以成各種之功用者也英儒巴克爾謂進化之功藝學實居其大半誠以土給衣食金作器用水火以資生活風雷可供役使要不外假物力以充人用故國家圖富强之道鮮不以格物爲稱首吾人棲息宇宙間仰觀天象俯察地理日月何以有運行山川何以有崩竭江河胡爲而流動草木胡爲而生植以及夫山鳴谷應電閃雷鳴萬象森列感五官而觸百骸孰綱維是孰主宰是試一一悉心攷究靡不有至理焉綜貫乎其中特習焉而不之察耳泰西各國當上古時稱考物理者爲好智之士西紀前四百年希利尼有著名格物士巴里多者謂萬物祇歸二理物質與形狀是也二理交感成土氣水火以脫爲五行其弟子亞力斯多德究論物質始有通理但其攷究之法不過憑虛想像而已至西紀一千六百二

十年英人貝根始設考事物之眞法其言曰凡爲格物士者惟當考察各生物之眞狀合諸確事乃可由已成之事而推原來之總則所謂因流溯源也其後名儒輩出本舊理以闡新法撰箸日富故歐美之製造稱爲極盛中國自開海禁以來江南製造局始譯工藝製造等書率皆棄置不屑道間有一二究心之士且相與鄙夷而非棄之而斯學遂寥寂無聞庚子而後　朝廷銳意維新倡振興工藝製造之議而苦無善本非談理艱深即演算濶略學者卒莫能窮源竟委以爲先河之導未始非教育之缺點也是編爲日本理學士池田淸及近藤淸次郎二先生所合著說理最顯解題亦詳最足資學者之練習偶以課餘少暇譯成以資考證其得益良非淺鮮抑更有進焉者物理與算學本相輔而行學者欲讀此書必先通曉三角幾何代數諸學而後能確有心得則物理學者乃算學之應用也且物理學之智識雖貴於以實

物陳列當前以觀察與實驗研究眞相然一一購求頗非易事故必以練習問題爲別有會心之關鍵則演題較勝於空談無補也循是書而讀之雖其中缺略未備遺憾尙多然觸類引伸亦自可得其會歸他日以之作奇器製妙術而與列强爭勝是則區々之意也予是以書而質之於當世

光緒丙午嘉平月湖南湘陰彭觀圭自識於京師大學堂

# 物理算法解說目次

## 第三篇　力學應用之二（簡

## 附錄

日本理學士池田清 近藤清次郎共著
湖南湘陰幼沅氏彭觀圭筆譯

# 物理算法解說

## 第一編 力學(第一)

### 第一章 量 時間 長 面積 體積

第一款 計量 物理學上之測定必先測各種之量如長重量熱量電氣量等是也但凡測各種之量必取其同種之一定量以爲標準而求其所欲測定之量當此標準之幾何倍或幾何分此標準謂之單位例如棒長五尺即示此棒之長爲一尺之五倍此一尺即長之單位又重量之單位有貫目體積之單位有斗升其他各種之量亦各有一定之單位學者所當熟知也

又測各種之量有借用器具者例如測長有物尺測重量有天秤其他測熱量電流有熱量計電流計等

是也

第二款　時間之單位　現今世界所慣用者有時分秒日等而物理學亦襲用之特於其中用秒爲時間之單位

〔附記〕　日有恒星日太陽日之二種世人所慣用者爲太陽日卽太陽周轉地球所費之時間也(其實太陽不周地球特自人目視之不啻周轉地球然)從地球上之子午線今日與太陽正對至翌日又與太陽正對其經過之時間爲太陽日若自同一地球上之子午線任指定一個恒星今日與之正對至翌日又與之正對其經過之時間爲恒星日因地球每日自轉一次同時又繞太陽而行故一日之間地球對太陽略變其位置而恒星在非常之遠故地球之運行對於恒星殆與不變其位置同是地球有對於太陽一自轉之時間與對於恒星一自轉之時間之差所以太陽日比恒

星日稍長蓋恒星日者地球眞正自轉之時間其一日之長常同太陽日則因一年中之時季而其長畧有差異爲欲省此不便世上所用之一日卽時計所示之二十四時間爲平均太陽日謂於永年之間觀測太陽日而平均計算者也故時計之一日與實際之太陽日因時季必不一致今定一秒爲平均太陽日之 $\frac{1}{24\times60\times60}$

第三款　長之單位　日本國制恒以尺爲長之單位亦有用丈寸分厘等爲單位者又測路程及距離有用里町間等者而物理學所常用之單位則以糎爲主又有用米粁粨籵粉粍等者悉因佛國之制也

粁＝一〇〇〇米

粨＝一〇〇米

籵＝一〇米

米＝一

粉＝·〇一米

糎＝·〇〇一米

粍＝·〇〇〇一米

而一米正當日本之三尺三寸一粴正當日本之三分三厘‥(天)其他度量衡之比較表詳載卷末

第四款　面積及體積之單位　凡面積並體積之單位恒以長之單位推定之卽面積之單位以一定之長爲邊而求其平面之面積體積之單位以一定之長爲邊而求其立體之體積也例如一平方尺一立方尺等或坪升等是也物理學所常用面積之單位爲一平方粴體積之單位爲一立方粴或立卽一里得爲一粉立方之體積等於一千立方粴

而一立正當日本之五合五勺四三五……………(地

問題

一　英尺一呎當日本何尺

解　英尺一呎當日本一尺零五八通常言一呎等於一尺不過其畧數耳

二　一粁當日本何間試以米與尺之關係算出之

答　五百五十間

解　因一米爲三尺三寸故一粁（即一千米）爲 $1000 \times 3.3$ 尺又因六尺爲一間故可知一粁爲 $(1000 \times 3.3) \div 6 = 550$間

三　一千米平方當若干坪

答　三十萬二千五百坪

解　因一千米爲 $1000 \times 3.3$ 尺而一坪爲六尺平方故可知千米平方爲 $(1000 \times 3.3)^2 \div 6^2 = 302500$坪

四　一升桝當幾何立方寸

答　六十四立方寸八二七

解　因一升桝爲縱橫各四寸九分深二寸七分試依立體求積法以長廣高連乘則得 $4.9 \times 4.9 \times 2.7 = 64.827$立方寸

五　一立當幾何立方寸

答　三十五立方寸九三七

解　因一立爲一粉立方之體積而一粉爲三寸

三分故可知一立爲 $(3.3)^3 = 35.827$ 立方寸

六　一石當幾何立

答　一百八十立三九……

解　因一石(即一百升)爲 $100 \times 64.827$ 立方寸而一立爲三寸三分之立方即 $(3.3)^3 = 35.937$ 故一石爲 $(100 \times 64.827) \div 35.937 = 180.39$……

……立

## 第二章　靜止及運動　速度及加速度

第五款　靜止及運動　凡物體變其位置爲運動其不變其位置爲靜止如人立河岸見船隻航行河中時刻變其位置故謂之運動直立河干之樹恒有定處而不變其位置故謂之靜止然所謂物體之位置必有關係之觀念故可用比較位置以明靜止及運動之定義如甲物體對乙物體而變其位置則甲物體對乙物體而運動如不變其位置則甲物體對乙物體爲靜止若兩物體相並進行始終有同一之

間隔雖兩物體實際俱動而甲物體對乙物體其位置之關係不變不得不言靜止尋常吾人所言物體運動蓋對地球而變其位置也試立河岸而望船行則覺陸地爲靜止船隻爲進行又從船中之窗隙眺望河岸則却見陸地向船之後方而進又吾人通常認地球爲靜止其實對太陽及他恒星則地球之運行有非常之速設由太陽上而觀靜止之山嶽則方附地球而進行甚疾卽其證也

問題

七　物體能有無方向之運動否

答　無方向之運動不能有

解　因凡物體之運動其方向雖不一定然就其任意之時刻觀之則各有其時之方向但其向隨時而變耳

八　物體運動之速其比較若何

解　凡二物體運動之速之比謂於相等之時間

此物體所經過之距離若彼物體所經過之距離之比如甲乙兩物體同時進行其所需之時間相等而所經過之距離甲物體較多於乙物體之三倍則甲物體之速爲乙物體之三倍

第六款　速及速度　凡物體運動之速謂此物體之運動於單位時中所經過之距離也而速度則計算物體之速倂其運動之方向例如向西行之物體與向南行之物體一秒時俱進行三尺雖其速相等而方向變易卽速度不等

第七款　速度之單位　凡物速之速度（暫不論其方向）如上款所言爲運動體於單位時中所經過之距離試以秒爲時之單位糎爲長之單位則速度之單位卽於一秒時進行一糎然則一秒間進行五糎則有五單位之速可稱之爲每秒五糎之速

第八款　等速運動及不等速運動

吾人所目擊之運動體其進行或變其速或變其方

向謂之不等速運動如速與方向俱不變謂之等速運動故等速運動恒以相等之速進行於同一直線上但所見甚罕

問題

九　所謂速度者於物體運動之比有急速之意否

答　毫無急速之意

解　因凡物體運動之比無論如何遲滯然實際於甚長之時間有許多位置之變化卽其相當之速度也但其單位時中所經過之距離甚短故其速度甚小例如時計之時針及月球衛星等其運動極形緩慢卽其證也

十　有物體於一秒時進行十五尺問二十秒時能進行若干尺

答　進行三百尺

解　因物體於一秒時進行十五尺故二十秒時可進行二十倍卽 $15\times20=300$尺爲進行之尺

數

十一 有河水每分時流八十米問二時間可流若干粁

答 九粁六

解 因一分時水流八十米故二時間（即一百二十分）水流可進行$80\times 120=9600$米如以粁爲單位則得$9600\div 1000=9.6$粁

十二 有物體以等速運動於六秒時進行四千八百糎其速率幾何

答 八百糎

解 物體之運動旣爲等速則每秒所經過之距離相等因題言六秒時進行四千八百糎則可知每秒時所經過之距離爲$4800\div 6=800$糎即所求之速率

十三 有物體進行有每秒一糎之速問每分時能進行若干尺

答　每分時一尺九寸八分

解　因一秒時之進行爲一糎故一分時可行六十糎即每秒一糎之速率與每分六十糎之速率相等如以尺爲單位則一糎爲三分三厘故可知六十糎爲$60 \times 0.033 = 1.98$尺

十四　光線於一秒時進行十八萬六千哩太陽與地球間之距離計九千一百萬哩問太陽光線須歷若干秒始達地球

答　四百八十九秒餘(即八分九秒餘)

解　因光線一秒時可進行十八萬六千哩故得一比例式爲 $18600:1 :: 91000000:x$　即　$x = 91000000 \div 186000 = 489\cdots\cdots$

十五　於一秒之五萬分之一進行○·○○○○五五糎之等速運動與二分間進行三百三十糎之等速運動試求兩物體之速

答　速率相等

解　因五萬分之一秒可進行○·○○○○五五糎故二分時（即一百二十秒）之進行爲 $0.000055 \times 50000 \times 120 = 330$ 糎即速率相等

十六　於五秒間進行四十九米之等速運動與每秒三十尺之運動試求其速之比

答　兩速率之比如一·○七八與一之比

解　因題言五秒間進行四十九米而一米當三尺三寸故可知一秒時之進行爲 $(49 \div 5)\,3.3 = 32.34$ 尺　又因一秒時進行三十尺則得 $32.34 \div 30 = 1.078$　故可知兩速率之比如一·○七八與一之比

第九款　平均速度　凡物体之運動若其速本非一定於 $t$ 秒間經過 $s$ 尺之距離則於一秒時所經過之距離平均爲 $\frac{s}{t}$ 尺謂之平均速其意謂此平均速爲相等之速即等速運動故於 $t$ 秒間進行 $s$ 尺

也凡物体於 t 單位時間進行 s 單位長則其平均速之公式爲 $V=\frac{s}{t}$ 例如有人於初秒時進行三十尺第二秒時進行三十五尺第三秒時進行四十尺第四秒時進行十五尺則其初三秒時間之平均速爲 $\frac{30+35+45}{3}=35$ 尺即一秒時進行三十五尺而四秒時間之平均速爲 $(30+35+45+15)\div4=30$ 尺即一秒時進行三十尺也　又凡物體之運動其速率之外並可考其動路方向之變化謂之平均速度因凡於 t 秒時進行 s 路其方向之變化命爲 $\theta$ 則於一秒時其平均方向之變動爲 $\frac{\theta}{t}$ 故凡物體之平均速度其 $\frac{s}{t}$ 及 $\frac{\theta}{t}$ 俱可得知惟物體之不等速運動其方向之變化可置不論惟考其動路之距離而已故凡言平均速度即用平均速之意也

問題

十七　有汽車一輛於最初一秒時進行五米半第二秒時進行五米第三秒時進行三米半試求其

平均速度

答　四米又三分之二

解　因滊車進行之總距離爲 $5,5+5+35=14$ 米而所需之時間爲三秒故其平均速爲

$$14\div3=4\frac{2}{3}$$

十八　有旅人步行一日從午前八時至九時行一里半從九時至十一時半行三里半從十一時半至午後一時休憩從一時至三時行三里半從三時至六時行四里問從朝八時至夕六時此十時間之平均速

答　一里又四分之一

解　因旅人從朝八時至夕六時此十時間所經過之總距離爲 $1.5+3.5+3.5+4=12.5$ 里

故其平均速爲 $(12.5)\div10=1.25$ 里　其途中休憩可以不計

十九　新橋神戸間之急行列車費十六時半而兩

停車塲之距離爲三百七十六哩又八分之三試求每時之平均速

答　每時間二十二哩又一百三十二分之一百零七

解　因滊車進行之總距離爲三百七十六哩又八分之三其所需之時間爲一十六時又二分之一故其所求之平均速爲 $(376\frac{3}{8})\div16\frac{1}{2}=22\frac{107}{132}$ 哩

二十　有急行列車從新橋至品川費九分時而其距離爲三哩又四十分之九試求每時之平均速

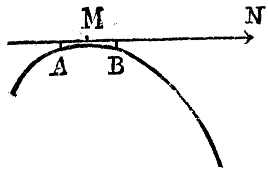
答　每時間二十一哩半

解　因滊車之進行其兩地之距離爲三哩又四十分之九而所需之時間爲九分時又因一時爲六十分故其所求之平均速爲 $3\frac{9}{40}\div9\times60=21\frac{1}{2}$ 哩

第十欵　不等速度運動任一點之速度　凡物體

之不等速運動其速度時時變易故不能如等速運動之易於了解試舉例以明之　如圖AB爲曲線M爲任一點設有一物體沿曲線進行欲知其經過M點時之速度則於曲線上之M點取其兩側之最近二點如AB命此二點間之距離爲s其經過此距離所需之時間爲t則$\frac{s}{t}$爲此二點間之平均速例如AB二點間之距離爲〇·〇〇〇〇〇二粴其經過之時間t爲〇·〇〇〇〇〇〇五秒則此二點間之平均速$\frac{s}{t}=\frac{0.000002}{0.0000005}\doteq 40$粴即一秒時有四十粴之速也蓋AB二點漸近於M點則A點與B點運動之速差至極微即AB二點之極小距離間可視爲等速運動而其時AB之距離爲s經過此二點所費之時間爲t則其等速運動之速$V=\frac{s}{t}$即經過M點之眞速也而經過M點之方向爲從M點引

第一圖



與曲線相接之MN線之方向

問題

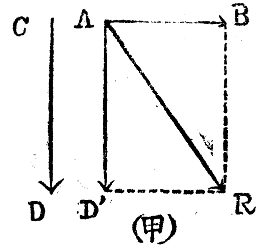
二十一　有滊車通過新橋品川間之一處測定其速每時三十二哩若滊車依此速率進行不間則通過新橋神戶間需若干時但新橋神戶間之線路長三百七十六哩又八分之三

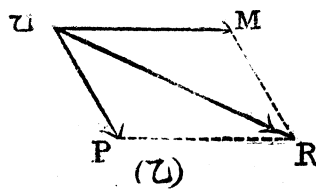
答　十一時二百五十六分之一百九十五

解　因滊車之速率爲每秒三十二哩而兩地之距離爲三百七十六哩又八分之三故得 $376\frac{3}{8}\div 32=11\frac{195}{256}$

第十一款　運動及速度之平行四邊形法　凡運動及速度之平行四邊形法謂一物體於同時受二個運動(或速度)而求其終結之速度也今有舟航行靜水向東方進發於一分時間所行之距離如AB(如甲圖)如此舟不爲靜水向南方順流而下於一分時間所行之距離如CD當最初出發時航行

第二圖




向東緣河流向南而下故從A發行之後而舟之位置不在B而在B之正南與 CD 相當之處試與 ABCD 同向引 D′RBR 二線作ABRD′平行四邊形則舟行之航路非 AB 亦非 CD 而在於四邊形之對角線如 AR 即舟行之速度也依此推之若物體在L(如乙圖)同時受LM線表示之運動與 L P 線表示之運動則物體終結之運動必爲LPMR′平行四邊形之對角線如LR′因LR′爲LM及LP 二運動(或二速度)所合成之終結故稱爲LM及LP之合運動(又合速度)反之而LM及LP可稱爲LR′之分運動(又分速度)故凡二個運動(或速度)所合成之單一運動可如上法求得

稱之爲運動(或速度)之平行四邊形法

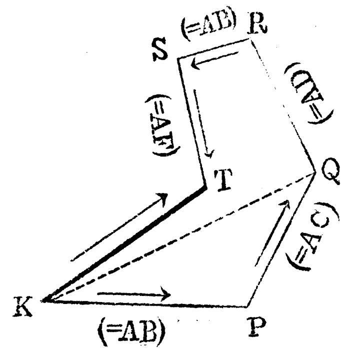
第十二款　求合運動法　如前圖欲求LM及LP二運動之合運動則以LM及LP爲二邊作LMRP平行四邊形而求得其自L點之對角線如LR即二運動之合運動也

又凡二運動之合運動雖不依平行四邊形法亦可求得如上例LM與LP之合運動先引LM線次從M點與LP平行引等長之MR線然後從L點至R點作LR相連線稱之爲運動及速度之三角形法····

又凡一物體於同時受二個以上之運動欲求其終結之運動先擇其中之合宜二運動依上法合成而得第一合運動次將第一合運動與其餘之一運動合成而得第二合運動再將第二合運動與其餘之一運動合成而得第三合運動順次推之最後所得之合運動即全體之合運動也試作圖明之

如圖ABACADAEAF爲五個分運動試從物體之

第三圖

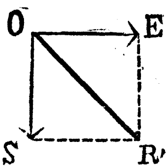



最初位置K與AB平行引等長之KP線次從P點與AC平行引等長之PQ線則KQ爲AB與AC二運動之合運動次從Q點與AD平行引等長之QR線則KR爲KQ及AD之合運動復準此從R點與AE平行引等長之RS線次從S點與AF平行引等長之ST線則KR爲五運動之合運動其方向則從發點K至終點T如ABAC等爲表單位時間運動之距離則KT爲合速度準此可知無論如何之多數可依此法求之稱之爲運動及速度之多角形法若最終點T與最初點K相合則合運動及合速度爲零而物體毫無作用故恆靜止

問題

二十二　有河水向正南而流以一時間行二海里今於河之上流航行向東有一時間進行二海里之速力問此船進行之方向并其速率幾何

第四圖




答　其方向在東南隅其速率爲 $2\sqrt{2}$

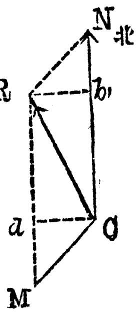
解　如圖OE爲正東向OS爲正南向因此船之速率一時間可進行二海里若河水靜止不流則一時間之後可至正東二海里如 OE 惟實際因河水之流動一時間流向正南二海里如 OS故取二者之合運動則此船進行之路在東南向如OR 即正方形之對角線故準三角法可求得OR $=\sqrt{OE^2+OS^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$即可知從河岸望此船之進行以$2\sqrt{2}$海里之速而向東南隅

二十三　有船向正北航行有一時間十海里之速力而潮流趨向西南一時間行三海里問此船之

速率幾何

答　八一六海里

第五圖

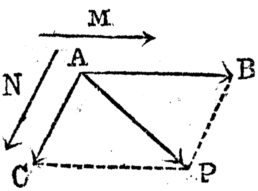



解　如圖舟首之方向及其速率一十海里如 ON 潮流之方向及其速率三海里如 OM 故此船實際進行之路爲 NRMO 平行四邊形之對角線 OR 今欲求航路之長則依幾何理 ONR 角等於 OMR 角即等於直角之半試引 $Oa$ 及 $Rb$ 二線與 ON 及 MR 成垂直則可知 OR 之長即 $OR=\sqrt{Rb^2+Ob^2}$ 惟因 $RN=\sqrt{Rb_2+Nb^2}$ 又 $Rb=Nb$ 故 $Rb=\sqrt{RN^2\div2}=\sqrt{19\div2}$ 又因 $Ob=ON-Ob$ $=ON-Rb=10-\sqrt{9\div2}$ 故 $OR=\sqrt{Rb^2+Ob^2}=\sqrt{9\div2+(10-\sqrt{9\div2})^2}=\sqrt{[9\div2+(10^2-2\times10\sqrt{9\div2}+9\div2)]}=\sqrt{66.57}=8.16$ 海里　又準三角法則角 $ONR=$ 直角 $\div2$ 故 $OR^2=ON^2+$

$RN^2-2\times ON\times RN\times$ ONR餘弦惟ONR餘弦爲四十五度餘弦即 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 而 $RN=3ON=1.0$ 故可求得 OR 爲船行之速率

第十三款　運動之分解　如上款所言爲合多數運動而求其合運動之法反之而分一運動爲無數運動亦必有法可求謂之運動之分解

如圖AB爲一個運動試以AB與AC二運動爲平行



第 六 圖

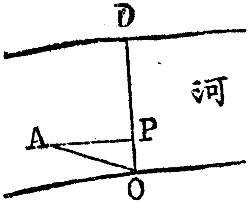
四邊形之二邊則 AB 對角線爲合成運動如以 AR 對角線欲求其平行四邊形之二邊可任作何數之二邊故一個運動 AR 之分運動可以分無數之方法今有 AR 一運動欲分解爲 M 與 N 二方向之分運動則以 AR 爲對角線與 M 及N平行作 ABAC二線成 ABRC 平行四邊形則 AB 與 AC 即所求之分運動也

問題

二十四　有河廣三百間水流速度每分時八十間欲令一短艇循直線橫截而渡歷五分時而達彼岸問艇首宜如何向幷漕力須若干速

解　如圖 OD 爲河廣與河流成直角其廣爲三百間今舟行依 OD 直線而達彼岸須費五分時間故可知$300\div5=60$間爲每分時所進行之路如 OB 而AB爲

第七圖

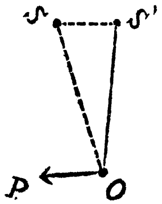



每分時河流之速即八十間試作 ABO 直角三角形則 OA 之方向爲舟首所向之方向其長爲 $OA=\sqrt{AB^2+OB^2}=\sqrt{80^2+60^2}100$ 間惟舟行因河流向下今欲令其不就下流則舟首於 OA 之方向其漕力須每分時有一百間之速度始能與河流相抵

二十五　有騎手乘馬疾驅以鎗射佇立之動物其

目的須在動物之後方其理如何

第八圖




解　如圖S爲佇立之動物OP爲騎手疾驅之方向當彈丸離砲口之際騎手有疾驅之速度故其目的須定在動物之後方如S′則彈丸之方向爲彈丸之眞速度OS′與騎手疾驅之速度OP之合速度OS

二十六　如前題之動物與騎手等速而平行競走則其目的當如何

解　如前題之動物若其初在S′處以騎手之等速與OP平行而疾走則目的直注在動物因動物從S′走至S其距離與OP相等恰如彈丸從OS之方向而進行至S與動物相會故也

第十四款　加速度　凡不等速運動之速度其變化或疾或遲此速度之變化率謂之加速度例如有物體進行初發時每秒十尺及五秒後每秒三十五

尺則五秒時之增速爲每秒二十五尺即一秒時爲平均五尺之增速率故此物體運動之加速度爲一秒每秒五尺也因物體有V之速度經t秒後而變爲V′之速度其加速度命爲A則其公式爲$a'=\frac{V'-V}{t}$如V′小於V則$a$值爲負即示此物體爲減速運動也又凡不等速運動已知其加速度并可考其方向之變化即於t秒間其方向之變化爲$\theta$則每秒方向之變化爲$\frac{\theta}{t}$但尋常所言之加速度初不論其方向之變化惟用以示速度之增減而已

第十五款　等加速度及不等加速度之運動　凡加速或減速之運動其速度之變化率每秒相等者謂之等加速度之運動若其變化率每秒不等者謂之不等加速度之運動

問題

二十七　有物體進行其初速每秒五尺其增速率一秒每秒二尺間六秒終之速幾何

答　每秒十七尺

解　因一秒每增每秒二尺之速故得 $2\times6=12$尺　爲六秒時所增之速即可知六秒終之速爲$5+12=17$尺

二十八　凡物體之加速度必稱每秒每秒若干糎其故如何

解　凡物體之加速度爲速度之變化率即於單位時間其速度增減之額也今以秒爲時之單位則加速度爲一秒時速度增減之量而物體之速度爲一秒時所經過之距離稱之爲每秒若干糎之速度依而所稱之加速度爲一秒時每秒若干糎之增減或略稱爲每秒每秒若干糎例如一秒每秒一糎之加速度與一秒每分六十糎或一分每秒六十糎之加速度其理相同若單云一秒若干糎則與通常所稱之速度不能區別

二十九　每秒每秒三尺之加速度如以分爲時之單位則每分每分當若干尺

答　每分每分一萬零八百尺

解　因題言每秒每秒三尺之加速度即一秒間可增每速三尺之速度而每秒三尺之速度即每分一百八十尺之速度故每秒每秒之加速度即每秒每分一百八十尺之加速度又凡一秒間每分增一百八十尺之速度故一分間其速度增爲六十倍而每分一萬零八百尺仍而每秒每秒三尺之加速度即每分每分一萬零八百尺之加速度

三十　每秒每秒六尺六寸之加速度則每分每分當若干米

答　每分每分七千二百米

解　因問題言每秒每秒六尺六寸之加速度依前題同理即每分每分二萬三千七百六十尺

即$6.6\times 60\times 60=23760$尺　惟一米爲三尺三寸故得$23760\div 3.3=7200$米

三十一　最初靜止之物體進行約四秒時其加速度爲一秒每秒九米八問速度幾何

答　每秒三十九米二

解　因題言最初靜止之物體則其初速V爲零準第十四款之公式$a'=\frac{V'-V}{t}$則得$9.8=\frac{V-0}{4}$因之可求得$V'=4\times q.8=39.2$米

三十二　有物體進行其速度一秒時二十七米經五秒之後其速度每秒四十二米問加速度幾何

答　每秒每秒三米

解　因題理可知五秒間速度之增爲$42-27=15$米　故一秒時之加速度爲$15\div 5=3$米

三十三　無加速度之物體其運動如何

解　凡所謂加速度者爲物體運動之方向及其速之變化率則可知無加速度之運動其方向與

速俱無變化故此運動謂之等速直線運動

三十四　有物體從初速 $V$ 起每秒時減 $\alpha$ 速則 秒之終速 $V'$ 如何

答　$V'=V-\alpha t$

解　因題言一秒時減 $\alpha$ 速則 $t$ 秒時減 $\nu t$ 速故所求之終速爲從初速中減去 $t$ 秒所減之速即 $V'=V-\alpha t$

二十五　有物體從初速 $V$ 起經 $t$ 秒而增速 $v'$ 問此間之平均加速 $\alpha$ 并其平均速度

答　$\alpha=\dfrac{V'-V}{t}$　$V=\dfrac{v'+v}{2}$

解　因 $t$ 秒間速度之增爲 $v'-v$ 故可知平均一秒時速度之增爲 $\alpha=\dfrac{u'-u}{t}$ 次可知其平均速度爲 $V=\dfrac{v'+v}{2}$

三十六　有滊車以每秒每秒十五尺之減速赴停車場經八秒而停止問八秒前之速幾何

答　每秒一百二十尺

解　因一秒減每秒一十五尺之速度故可知八秒時減一百二十尺之速即 $15\times8=120$尺 惟因八秒之速爲零故可知八秒前之速爲每秒一百二十尺

## 第三章　慣性　力　質量　密度

問題

三十七　凡物體因何種原因能變其靜止或運動之狀態

解　宇宙間無論何事必具有各種原因而生變化而物體之靜止及運動其狀態之變化皆起於外來之作用即所謂力也

第十六款　慣性(一名惰性)　凡使靜止之物體運動則著手而覺其反抗使運動之物體靜止亦觸手而覺其相抵由此可知靜止之物體非由外力動之則靜止者恒靜止運動之物體非由外力阻之亦運動者常運動且吾人通常目擊之物體或變其速

或變其運動之方向皆因於外物之作用如不受外力作用則其速與方向恒不變此理爲物體之慣性即萬物通有之性質也

第十七款　力　凡使靜止之物體運動或使運動之物體漸々增減其速是與物體之慣性有抵抗作用如問題三十七及上款所言凡物體之靜止及運動或變其速度之方向總名之爲力如蒸溂力之運轉機關彈丸之衝突堤堡是也

凡力藉物體而其作用始顯其名稱甚夥如水力風力地球之重力蒸溂之彈力磁氣電氣之引力及斥力皆其例也

問題

三十八　凡不等速運動之物體可斷言其有外力之作用否

解　凡不受外力作用之物體恒依慣性而靜止或又常保其等速運動故不等速運動之物體必

由於外力之作用可判然矣

第十八款　質量之觀念　凡物體所有物質之分量謂之質量而質量之多寡則生於二物體之比較今有大鉛塊與小鉛塊試以手動之則大鉛塊頗覺費力因大鉛塊所含物質之分量比小鉛塊所含物質之分量較多故也

凡同類之物質其大者則動之較難而異類之物質則其動之之難易不因其體積之大小例如鉛塊與木片其容積相等則鉛塊較覺難動試以小鉛塊與大鉛塊兩相比較則可知鉛塊比同容之木片其所含物質之分量較多由此可知不論物體之同異試以等力動之其難動者則所含物質之分量較多其易動者則所含物質之分量少

第十九款　兩物體質量相等之情形　凡物體被外力之作用而動恒視其力之强弱與時間之長短如以相等之力僅於相等之時間作用於二物體則

物體之質量多者較少者其動稍遲（前款）故凡二物體以相等之力作用於相等之時間其所得之速度相等則兩物體之質量相等

第二十款　質量之單位　物理學所常用質量之單位爲瓦（格蘭姆）瓩（啓羅格蘭姆）等與長之單位米糎等悉因法國之制定於學術上其用最廣其瓩與米之原器俱在法國阿器庫所藏之白金所製凡與米原器等長者謂之米凡與瓩原器等質量者謂之瓩而一瓦爲一瓩之千分之一與攝氏四度之水一立方糎有相等之質量

日本國制所用之貫單位與法國制所用之瓩單位其比例甚爲爲簡單因十五瓩正當日本之四貫故一貫正當四分之一十五瓩……………………（八）

第二十一款　密度　凡物質所含有單位立積之質量爲其物質之密度故以V容積除M質量即爲所求之密度

問題

三十九　一立內納若干量之空氣與一立方尺內納此十倍量之空氣試求其密度之比

解　因兩物質於單位立積內有等量之質量則密度相等故凡於相等立積內有相等之質量則密度相等今一立與一立方尺其立積之比因一立爲一粉立方而一粉爲三寸三分故一立爲$(.33)^3$立方尺命一立內所納空氣之量爲M則一立方尺內所納空氣之量爲10M因一立方尺爲立積之單位故可知兩者之密度爲$\frac{M}{(.33)^3}$及$\frac{10M}{1}$故其比爲$\frac{M}{(.33)^3}:\frac{10M}{1}=\frac{1}{0.035937}:\frac{10}{1}$即可知爲一〇〇〇〇〇與三五九三七之比

四十　通常謂鐵重綿輕試詳解其意義

解　通常所言鐵重綿輕謂以同容積之鐵與綿相比則鐵重綿輕物理學所言則因綿之密度(或比重)比鐵之密度(或比重)較小若不問容

積之大小則一抱之綿必比一粒之鐵較重

四十一　英之一听(磅都)當日本幾何匁

解　一听當日本一二〇・九六匁

四十二　求瓦之解釋

解　見前第二十款

四十三　一立方尺攝氏四度之水有若干瓦之質量

答　二萬七千八百二十七瓦許

解　因一瓦之水在攝氏四度時容積有一立方糎即三分三厘之立方而一立方尺改算爲立方糎則$\frac{(1000)^3}{(33)^3}=27827$立方糎　即爲所求之質量

四十四　世間所常用力之單位如何

解　通常所用力之單位爲單位之質量及重力例如日本一貫目質量之重稱之爲一貫目之力法制一瓦之重一瓩之重稱之爲一瓦之力

一㕺之力英制一听之重稱之爲一之听力是爲力之重力單位（定力之單位另有一法詳後三十款）

## 第四章　基本單位　CGS法

第二十二款　三個基本單位　物理學以長質量時間之三個單位爲各種量之單位因凡各種量之單位皆由此三者配合而成例如面積並體積之單位恒以長推定而得速度之單位即於單位時間進行單位之長此外又有定爲基本之單位雖不限於此三者如以力代質量以速度代長擇其適合者組成各種量之單位然長質量時間之三者於實地測定上最爲便利且甚精確故特以此三者爲基本

第二十三款　CGS法　如上款所言長質量時間之三種單位爲諸種量單位之基礎故各種量之單位胥由此三者配合而成而物理學上之理論特用長之單位爲糎質量之單位爲瓦時間之單位爲秒

其他各種量之單位皆由此三者配合故此種單位組織法稱爲 CGS 法即取三單位之英文第一字母而配列之也

第二十四款　定米突爲單位之便利　定米突爲單位之制非僅物理學而已其他各種科學亦多用法國之度量衡制有種種之便利蓋法國之單位制所謂米突制俱係十進法最便於計算一也又面積及體積之單位可定爲長單位之平方及立方於測定並測算上最爲簡便二也又質量之單位可視爲立積單位內所有純水之質量殆無差異(二十款)而水之在地面無往不在故無論何處可容易得質量單位精確之比較又水之性質於物理學上有種種之標準(如熱量及比熱等之單位)故瓦單位之制定極爲便利三也

第二十五款　互算法　物理學所常用之米突單位制與日本之度量衡單位其比較既於三款四款

及二十款述之矣茲再錄之於次

一米當日本三尺三寸……………………………(天)

一立當日本五合五勺四三五……………………(地)

十五瓩當日本四貫目……………………………(人)

此三項須熟記之因無論何種之量皆由長質量時間三者之配合(二十二款)既知此三項則不僅長面積體積並質量上彼此互算可容易求得即重量力運動其他諸量凡物理學所常用之米突制計算者可改用日本之度量衡制又可從日本之度量衡制改算法國之米突制極爲容易

附　一升桝縱橫各四寸九分深二寸七分則依求積法可得其容積爲六十四立方寸八二七

即$4.9\times4.9\times2.7=64.827$立方寸

此一項亦須熟記

## 第五章　牛董氏運動三則

第二十六款　三則總說　牛董氏曾考究物體之

運動及起動力之關係約言之爲三定律稱爲牛董氏運動三則殆可爲構成力學之全基礎第一則示慣性之定律第二則定力之單位並算力之法第三則示二物體相互力之關係

運動第一則　附運動量

問題

四十五　凡靜止之物體因何種原因而動

解　見第十六款

四十六　凡運動物體因何種原因而其動漸減

解　與前問同

第二十七款　運動第一則　牛董氏運動第一則爲慣性之法則曰物體非受外力作用則恒靜止不動或以相等之速率進行於一定之方向

第二十八款　運動量　凡物體之質量與其運動之速之相乘積謂之運動量例如以瓦與糎爲單位設物體有四瓦之質量其速率每秒十糎則所得之

運動量爲四十即$10\times4=40$

問題

四十七　有物體之質量爲五瓩其速率每秒六百糎則其運動量幾何

答　三千CGS單位

解　因題言質量爲五瓩速率爲六百糎故得所求之運動量爲$5\times600=3000$

四十八　如用CGS單位法其物體之質量爲十分之一瓩其速率每秒五米則其運動量幾何

答　五十CGS單位

解　因題言質量爲十分之一瓩速率爲五百糎故得所求之運動量爲$500\frac{1}{10}=50$

四十九　凡物體之慣性可以何法計之

解　凡物體之慣性可以運動量計之設如有重物體與輕物體其速率相等欲使其費相等之時間而靜止則重者須比輕者所加之外力較大又

設有質量相等之物體欲於相等之時間止之則其運動之速率大者比速率小者其抵抗力須大即運動量之大者比運動量之小者較難令其靜止故運動量者計慣性適當之法也

五十　有靜止物體其質爲二百貫目則其運動量如何

解　所謂運動量者因凡物體有些微之速度而後能生運動量故無論任何大之物體其靜止不動時即速度爲零則可知不生運動量

五十一　有五百CGS之運動量試以尺與匁爲單位計之

答　四·四尺匁單位

解　因一糎爲〇·〇三三尺而一瓦爲一匁之十五分之四故可知五百 CGS 單位爲 $500\times 0.33\times\frac{4}{15}=4{\cdot}4$

運動第二則　附運動量之變化　力積　力

之組合及分解　力之鈎合

問題

五十二　吾人見物體之運動其速度變化可斷言有外力之作用否

解　凡物體非受外力作用決不能自變其速度(即運動第一則)故凡運動量之變化即示外力之作用可判然矣

五十三　有靜止物體於一瞬時間受外力作用則其終效如何

解　靜止之物體雖一瞬時間受外力作用必可起相當之運動惟所受之外力甚小物體之質量甚大或受力之時間極短則起動甚慢殆難識別又吾人常見之情形往往施外力驟然動之因其他有阻動力防其進行其果能起動與否殆難識別然總之受外力之作用雖極短之時間或所受之外力甚小毫不得言不能起物體之動

五十四　施小力於一物體於非常之長時間可能生任何大之速度否

解　因凡力無論如何小於非常之長時間施於一物體而其他無阻動力則其速度可生至任何大惟吾人尋常所目擊殆無有無阻動力者例如滊車進行因有車軸之摩擦空氣之抵抗等與蒸滊力相抗故滊車之速度終不能出一定制限以上

第二十九款　運動第二則　牛董氏運動二則曰凡物體受外力之作用其運動量之變化爲其力與時相乘積之正比例且生於所加力之方向而與他力之有無毫無關係

附　此法則從各種實驗與經驗而得試說明其意義並少論證其理

凡物體受外力之作用於一秒時間其速度爲 $a$ 則此物體於一秒時之終以 $a$ 速度進行故一秒時之

後雖外力之作用頓止然此物體恒依其慣性無論至何處亦以 $a$ 速度進行（其他之阻動力略去不計）設更以相等之力連續施之於一秒間之作用則不關物體之靜止與既動依舊可另加 $a$ 速度以既有 $a$ 速度更增 $a$ 速度則此力之作用其第二秒間之速度爲 $2\times a$ 依理可知物體受外力之作用於二秒之後以二 $a$ 速度進行設更以相等之力連續施之則第三秒間依舊可另加 $a$ 速度故第三秒時之終其速度爲 $3\times a$ 準此可知以相等之力於 t 秒間連續施之則物體之速度爲 $t\times a$

如物體之質量爲 M 則因受外力之作用於 t 秒間所生之速度爲 $t\times a$ 故可知運動量之變化爲 $M\times t\times a$ 恒與時爲正比例

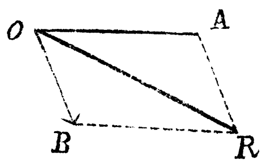
設如有一力施於一物體於一秒時有每秒 $a$ 糎之速度今更有相等之第二力以同一之方向施於

一物體則僅有第一力施於此物體旣於一秒間有每秒 $a$ 糎之速度更加第二力則不關此物體之靜止與旣動較之第一力依舊可於一秒間另有每秒 $a$ 糎之速度故二力同時之作用則同一秒間所生之速度爲一力之二倍即 $2a$糎 也依理可知更以相等之第三力於一秒間施於一物體則有 $3a$ 糎之速度準此可知有 N 個相等之力以同一方向同時施於一物體則所生之速度爲一力之 N 倍故可得言單力一之速度爲 $a$ 則 N 倍之力同時施於一物體其所生之速度爲 $N\times a$ 由此可知一物體受外力之作用其所生之速度與其力爲正比例因之運動量之變化亦與力爲正比例

如上所說可知運動量之變化爲其力與時相乘積之正比例是運動第二則之前半也玆更詳言運動量之變化生於所加力之方向毫不關他力之有無

如圖O爲物體AB爲二力同時之作用因各力之作用於一定時之後可有OA與OB之速度則二力同時之作用亦依舊有OA與OB之速度但此種實際物體進行之路不在OA與OB二線上而在其合速度OR線上故可知A與B二力之作用其所生之速度依舊無絲毫之差

第九圖




試以數學式表之

命物體之初速度爲$V_0$因受外力之作用於t秒時其速度爲V則其運動量之變化爲$MV-MV_0=M(V-V_0)$　惟因運動量之變化爲其力與時相乘積之正比例所受之外力爲F則$M(V-V_0)=F\times t$故單位時中其運動量之變化$\frac{M(V-V_0)}{t}=F$惟$V_0$之速度於t秒時其速度變爲V故單位時中其速度之變化爲$\frac{V-V_0}{t}$即加速度命爲$a$則得$M\times a=F$或

$M\times a=E\times F$ (E爲常數)即凡物體僅於單位時中受外力作用之速度(即加速度)恒與力爲正比例反言之凡物體所受之力爲物體之質量與加速度相乘積之正比例是即運動第二則也

又吾人既制定質量與加速度之單位故藉此法則如下欵所言可制定力之單位

第三十欵　力之絕對單位(達音及磅都)　藉運動第二則以制定力之單位既如前欵結尾所言即有單位質量之物體於單位時間之作用而生單位加速度之力定爲力之單位稱之爲力之絕對單位以示與力之重力單位不容混淆

達音者何即物體有一瓦之質量於一秒間受力之作用而生每秒每秒一糎之加速度此法國所制定力之單位謂之一達音

磅都者何即物體有一听之質量於一秒間受力之作用而生每秒每秒一呎之加速度此英國所制定

力之單位謂之一磅都

第三十一款　力之重力單位　凡單位質量之物體其所有之重力謂之重力單位即重力單位之力爲有單位質量之物體所有之重量也如日本國制重量一貫目之物體稱爲一貫目之力法國制重量一瓦之物體稱爲一瓦之力英國制重量一听之物體稱爲一听之力而一瓦之重力當達音之九百八十倍一听之重力當磅都之三十二倍因地球之重力牽引及於物體凡每秒有每秒九百八十糎之加速度或每秒有每秒三十二尺之加速度故也然因重力而生之加速度隨地不同故重力單位亦因之而稍有變更

第三十二款　運動第二則之數學式　如第二十九款既知凡物體運動量之變化 $M(V-V_0)$ 或 $M\times a$ 恒與其所受之力爲正比例即 $M(V-V_0)=F\times t$ 或 $M\times a=F$ 又 $M\times a=E\times F$ 今試用絕

對單位計力而以一瓦之物體所生每秒一糎之加速度定爲單位則得 $1瓦 \times 1糎 = E \times 1$達音 如令E等於一則用CGS單位法其運動第二則可以次之方程式表之 $M \times a = F$ $M \times (V - V_0) = F \times t$ 例如有九百八十達音之力於一秒時施於一物體則定爲一秒有九百八十糎之加速度則 $1瓦 \times 98糎 = 980$ 達音

第三十三款 力積 物體所受之外力爲F其作用之時間爲t則其相乘積爲 $F \times t$ 之數謂之力積故用 CGS 單位法則可知力積與起運動量之變化其數值相等即 $F \times t = M(V - V_0)$

問題

五十五 吾人立地上舉一斤之物體與在疾行滊車內舉一斤之物體則手中之感覺有差異否

解 因吾人所經驗凡在疾行車中或在地上支持一斤重之物體其手中之感覺無甚差異 (即

運動第二則之所以也因物體之重原因地球之重力而生而滊車之運動悉與重力方向成正交不受他等之影響故也）惟攜一斤之物體急登於高處則手中之感覺甚强能有一斤以上之重因及於物體之重力以外更有與物體之慣性相抗忽焉有上方運動之別力故也

五十六　施力於五瓦之物體有每秒十糎之速度如以相等之力於相等時間施於五十瓦之物體則其速度幾何

解　因運動第二則既知運動之變化爲其力與時相乘積之正比例故以相等之力施於相等之時間其受作用之物體雖質量有輕重之別然其運動量之變化可知其相等命 V 爲五十瓦物體之速度則　$5\times10=50\times V$　故

$V=\frac{5\times10}{50}1$糎　即五十瓦物體之速度爲每秒

一糎

五十七　二物體以相等之時間受相等力之作用則其速度之變化與質量為反比例試說明之

解　如前問題解所言設命甲物體之質量為M其速度之變化為V乙物體之質量為$M'$其速度之變化為$V'$則兩物體運動量之變化為$M\times V=M'\times V'$即$V:V'=M':M$又$M':M=V:V'$故可知速度之變化與質量為反比例又物體之質量與速度之變化為反比例

五十八　五瓦之物體於一秒間受外力之作用有每秒一十二糎之速度問其力幾何試以達音計之

解　因題言五瓦之物體於一秒間受外力之作用其速度每秒一十二糎命所受之外力為F則依運動第二則以達音計之故得$F=5\times12=60$達音即所受之外力有六十達音

五十九　假令地球之重力全行消滅而物體之重量至不能用天秤分銅等須如何而後可比較兩物體之質量

解　如此類可用運動第二則比較物體之質量蓋以相等之力於相等時間施於二物體其所得速度之比較可知與質量爲反比例而運動第二則重力之有無毫無關係爲通行之定律故力之重力單位(天秤用之)僅於地球之面上可能用之而力之絕對單位即重力全行消滅之處亦可利用者也

六十　有十五之物體受外力之作用有每秒每秒六十四糎之加速度問其力幾何試以達音計之

答　六百四十達音

解　準第三十二款之公式 $M\times a=F$ 今M爲十五 $a$ 爲六十四糎故得 $F=10\times64=640$ 達音

六十一　有四五之物體於六十秒間連續施外力

之作用使生每秒三百糎之速度問需若干速音之力

答　二十達音

解　命此力之强度爲 F 則依運動第二則 $F\times t=M\times V$　今 t 爲六十秒 M 爲四瓦 V爲三百糎 故 $F\times 60=4\times 300$　即 $F=\frac{4\times 300}{60}=$ 20達音

六十二　有一瓦之物體墜下因受地球之重力於一秒間所生之速度每秒九百八十糎問重力幾何

答　九百八十達音

解　凡一瓦之物體於一秒時受重力之作用則生每秒九百八十糎之速度故可知重力之强度爲九百八十達音

六十三　如前題有一瓦之物體墜下經二十秒時之速度幾何

答　每秒一百九十六米

解　因一秒時可生每秒九百八十糎之速度則二十秒時所生之速度爲 $980 \times 20 = 19600$ 糎即一百九十六米

六十四　五十達音力於一秒間施於一瓦之物體其速度幾何

答　每秒五十糎

解　依達音之定義則可知五十達音之力爲一瓦之物體於一秒時受此力之作用可生每秒五十糎之速度故其速度爲每秒五十糎

六十五　一百達音力施五瓦之物體其加速度幾何

答　每秒每秒二十糎

解　因題言五瓦之物體受一百達音力其所生之加速度命爲 $a$ 則準公式 $F = M \times a$ 故 $100 = 5 \times a$ 即 $a = 100 \div 5 = 20$ 糎

六十六　一達音力施於五十瓦之物體其加速度幾何

答　每秒每秒五十分之一糎

解　依前題之解法故得$1=50\times\bullet$　即$\bullet=1\div 50=0.02$糎

六十七　二達音力施於三瓦之物體其四秒間之速度幾何

答　每秒二糎又三分之二

解　因題言三瓦之物體於四秒時受二達音力之作用其所生之速度命爲V則準公式 $F\times t=M\times V$　今 F 爲二達音 t 爲四秒 M 爲三瓦故得 $2\times 4=3\times V$ 即 $V=8\div 3=2\frac{2}{3}$糎

六十八　一千達音力施於一物體有每秒每秒百糎之加速度問此物體之質量幾何

答　十五

解　命所求物體之質量爲M則準公式 $F=M$

$\times a$ 今F爲一千達音 $a$ 爲百糎則得 $1000=M\times 100$ 故 $M=\frac{1000}{100}=100$瓦

六十九 百萬達音力施於一物體於十秒間連續施之有每秒十米之速度問此物體之質量幾何

答 一萬瓦

解 準公式 $F\times t=M\times V$ 今 F 爲百萬達音 t 爲十秒 V 爲十米故得 $1000000\times 10=M\times 1000$ 即 $M=10000$瓦.

七十 一磅都當若干達音

答 當一萬三千八百二十五達音六…

解 因凡一磅都爲使一听之質量生每秒每秒一尺之加速度而一听當四五三·五九瓦 一呎當三〇·四八糎 故其所求爲 $453{\cdot}59\times 30.48=13825{\cdot}6$達音

七十一 九百八十達音之引力引一物體與其M倍之引力引M瓦之物體問二物體之加速度能

有差否

答　無差

解　因一瓦之物體受九百八十達音之力則其加速度爲每秒每秒九百八十糎而 M 瓦之物體受 M 倍九百八十達音之力則其加速度亦爲每秒每秒九百八十糎故可知二物體之加速度無差

七十二　有五瓦之物體欲令其受二達音之力有單位之速度問需時若干秒

答　二秒半

解　命所需之時間爲t則準公式 $F \times t = M \times V$ 今 F 爲二達音 M 爲五瓦 V 爲一糎故得 $2 \times t = 5 \times 1$　即 $t = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$秒

七十三　有二瓦之物體進行爲每秒二十四糎之等速運動於其反對之方向一秒間施外力則每減十三糎之速度問此力幾何

答　二十達音

解　因二瓦之物體從每秒二十四糎之速度減每秒一十三糎之速度則其運動量之變化爲 $2(24-13)$ 惟因 F 達音之力於一秒間生此變化故得 $F\times1=2\ (24-13)$ 即 $F=2$ 達音

七十四　如前題以相等之力施於一秒半間則此物體之速度減幾何

答　每秒減七糎半

解　如前題 F 達音之力於一秒時使減其速度爲 $2(24-13)$ 糎 則一秒半可使減爲 $2\ (24-13)\times1\frac{1}{2}$ 糎 命一秒半後之速度爲 V 則得 $V=24-(24-13)1\frac{1}{2}=7.5$ 糎

七十五　如前題以相等之力施於三秒間則此物體之速度減幾何

答　與原運動反向其速度每秒九糎

解　如前題解法之理則得 $V=24-(24-13)$

3＝－9糎爲三秒後之速度

七十六　四十八達音之力於六秒間施於一物體能生幾何運動量

答　運動量二百八十八

解　因凡運動量之變化與力積相等故得$48\times6=288$

七十七　何謂力積

解　見三十三款

七十八　以六達音之力於十二秒時施於某物體與以八達音之力於九秒時施於某物體其力積有異否又所生運動量之變化有差否

解　因題言可知其力積無異即所生運動量之變化亦無差即$6\times12=8\times9=72$

七十九　五十五之物體有每秒九百八十糎之加速度今欲增其運動量爲$980\times50\times25+980\times50$間需力積幾何若以九百八十達音之力則需

時若干秒若令於十秒間生此變化則需力幾何

解　因五十瓦之物體有每秒九百八十糎之速度則其運動量爲 $980\times50$ 今欲增爲 $980\times50\times25+980\times50$ 則可知所需之力積爲 $(980\times50\times25+980\times50)-980\times50=980\times50\times25$

又因此運動量之增加原因於九百八十達音之力則可知生此變化所需之時間爲 $(980\times50\times25)\div980=1250$ 秒　若此運動量之增加欲令生於十秒間則其所需力之強度爲 $(980\times50\times25)\div10=122500$ 達音

八十　七瓦之物體有每秒二十五糎之速度今欲使每秒有五十糎之速度則所需之力積幾何

答　力積一百七十五

解　因七瓦之物體有每秒二十五糎之速度則其運動量爲 $7\times25$ 今欲增爲 $7\times25+7\times25$ 則力積須爲 $(7\times25+7\times25)-7\times25=175$

八十一 百五十瓦之物體有每秒四十二糎之速度於其反對之方向施外力之作用令於五秒時減每秒一十二糎之速度問需若干達音力

答 九百達音

解 命所需之力爲F則其力積爲$F\times5$而所生運動量之變化爲 $M(V-V_0)$ 故 $F\times5=M\times(V-V_0)$ 今 M 爲一百五十瓦 V爲四十二糎 $V_0$ 爲一十二糎 故$F\times5=150(42-12)$ 即 $F=900$ 達音

八十二 百七十瓦之物體其速度從每秒八糎加至每秒五百二十四糎其力積如何

解 因運動量之增加爲$170(524-8)=87720$ 故其力積亦同

八十三 十貫目之物體其速度從每秒二十尺減至每秒六尺其力積如何

答 力積一百四十

解　因運動量之變化爲 $10(20-6)=140$ 故其力積亦同但此題爲貫尺秒單位

力之組成及分解

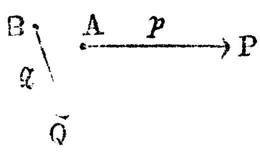
問題

八十四　有物體因重力而墜其落下時被東風之力吹動問此墜體之方向如何

解　凡落下物體爲風力所吹動不能垂直向下必傾於風進行之方向而斜向地面如爲東風所吹則必傾向東方而斜下此皆吾人所時常目擊者也

第三十四款　以直線表力

第十圖

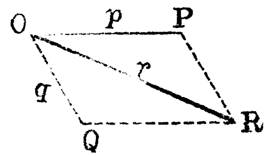



凡關於力之要項有三即強度方向着力點是也而此三要項可以直線表之其法從着力點沿力之方向引一直線而其線之長即如其力之強度如圖A及B爲着力點其二力之作用爲P及q而

AP及BQ兩線之長取其等於二力之比則此二線可代表兩力之強度兼可示其方向及着力點即以直線表力之意也

第三十五款　力之平行四邊形法　試以PQ二力同時施於着力點O則可知物體之終效依運動第二則而知各種之力各依其方向其運動量之變化各自孤立而不關他力之有無(二十九款)令P力施於物體其運動之方向爲OPq力施於物體其運動之方向爲OQ而各力所生之速度各與Pq爲正比例假令OP與OQ之長可視爲各物體所受之速度則二力同時之作用其終效可知物體進行之方向在於以OP及OQ二邊所作平行四邊形之對角線OR上恰如以r爲單一力而施於O點其所得之終效相同而r及P及q三力之比與其三距離OR及OP及OQ爲正

第十一圖



比例此r力爲pq二力之合力因pq二力同時施於O點與以r力單施於O點其終效相同故欲求pq二力之合力則引二直線代表pq二力（直線之方向取其力之方向直線之長與力之强度爲正比例）依此二直線作平行四邊形而連結其着力點與對角點之對角線即爲二力合作之代表此求合力之法謂之力之平行四邊形法

第三十六款　力之三角形及多角形　如上款言力之平行四邊形法旣已心知其理則pq二力之合力r不必作成OPRQ平行四邊形亦可容易求得其法先引OP線爲p力之代表次從P點引PR線與OQ平行令其長相等爲q力之代表復從初點O至終點R作相連OR線爲pq合力之代表即三角形之第三邊OR爲OP與OQ之合力謂之力之三角形法試更言力之多角形謂同一着力點而求其二力以上之合力與本編第十二款所言運動或速

度之多角形其理相同因凡二個以上之力於相等時間施於等質量之物體則其所生之速度恒與力爲正比例故各力施於同一物體(即同一着力點)各求其所生之速度次求其合速度則知爲原數力之合力故如第十二款所言速度之多角形其數多速度 AB ACADAEAF 等爲各力之代表則此等數力之合力可以KP表之故所作之 KPQRSP 形即爲力之多角形

第三十七款　力之組合法　何謂力之組合謂求二力或多力之合力也惟前言二力同時施於同一着力點則二力之合力可依力之平行四邊形或力之三角形求之多力同時施於同一着力點則多力之合力可依力之多角形求之若二力或多力非施於同一着力點則二力或多力之合力另有求法(見第三編異其着力點之數力及作用於剛體之力之部)

第三十八款　力之分解　如前款所言力之組合謂求二力或多力之合力茲所言則正相反謂分解一力爲二力或多力謂之原力之分力如欲分解一力爲任意方向之二力其特定一力以直線表之即依此直線爲對角線而作與任意方向平行之二邊成一平行四邊形則此平行四邊形之二邊即所求之二力也準此可分解此分力爲多力則可分爲數多之分力但以直線爲對角線可作無數之平行四邊形故分解一力之法亦爲無數

問題

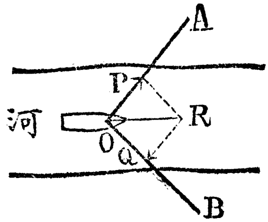
八十五　如下之諸件試求物體所受之力與受此等力而運動之方向

(甲)　有扁舟浮於小川而川之兩岸有人以繩繫小舟而曳之

(乙)　有短艇於河之上流向對岸橫截而進

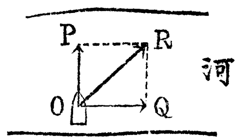
解（甲） 如圖沿河之兩岸以 OA 及 OB 二繩曳舟而 A 與 B 二人之曳力與 OP 及 OQ 爲正比例則舟行之方向在此二力之合力 OR 線即 OP 與 OQ 爲二邊所作平行四邊形之對角線但水流之力可視爲無亦無大差故舟行不斜倚河岸則合力 OR 之方向與河身之方向常相同而 AB 二人之力毫無增減

第十二圖




（乙） 如圖水流之力不能視爲無今舟首常與河身成直角而向 OP 之方向其漕力之速爲每秒 OP 但水流之方向 CQ 同時有每秒 OQ 之速舟亦隨水流而下則立河岸而觀實際舟行之動

第十三圖



路爲OR即OP與OQ爲二邊所作平行四邊形之對角線

八十六　有三與四之二力如下所舉之方向施於同一着力點則其合力之强度及方向如何試以圖明之

(甲)　兩力互爲直角之作

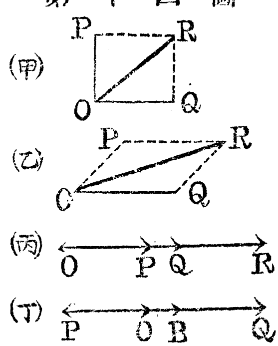
(乙)　兩力互爲四十五度角之作用

(丙)　兩力施於同一方向

(丁)　兩力互爲一百八十度角之作用(即反對方向)

解　如甲圖依OP爲三OQ爲四之比例作OPRQ平行四邊形則其對角線OR爲二力之合力

第十四圖




如乙圖與甲圖同但甲

圖之POQ角爲九十度此圖之POQ角爲四十五度如丙圖第一力OP作用於物體其着力點爲O有每秒三之速度第二力OQ作用於物體其着力點亦爲O有每秒四之速度故二力於同時同方向之作用則可有每秒七之速度即$OR=OP+OQ=3+4=7$

如丁圖OP及OQ二力其方向相反則可知所求二力之合力$OR=OQ-OP=4-3=1$

附　今設甲圖及乙圖之平行四邊形其二邊OP與OQ所夾之POQ角漸々變小至OP與OQ相合則OR亦相合而變如丙圖又反之而POQ角漸々變大而成二直角則OP與OQ成一直線而變如丁圖

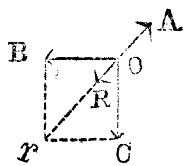
八十七　一小體同時受F之三力則運動之方向如何又三力之合力如何

（一）　向正南有八十貫目之力

(二)　向東北有五十貫目之力

(三)　向正西有八十貫目之力

第十五圖




解　如圖 OA 爲東北向其力爲五十貫目 OB 爲正西向其力爲八十貫目 OC 爲正南向其力爲八十貫目惟 OB 等於 OC 則此二力之合力 Or 爲西南向與 OA 成一直線而其方向相反故 Or 及 OA 二力之合力即 OB 與 OC 與 OA 三力之合力惟準直角三角形求斜邊法故 $Or=\sqrt{OB^2+OC^2}=\sqrt{80^2+80^2}=80\sqrt{2}$ 又因二力反向之作用其合力爲二力之較故 $Or-OA=OR=80\sqrt{2}-60=63.12$ 即可知運動之方向爲西南向而三力之合力爲六十三·一二達音

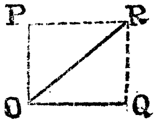
八十八　兩力互爲直角之作用其合力爲六十二磅都而此二力之內其一爲四十磅都問其餘一

力之强度幾何

答　四十七磅都三七

解　因題言二力之內其一力OQ爲四十磅都而其合力OR爲六十二磅都又POQ角爲直角則準直角三角形有斜邊及任一邊而求其餘一邊之理故 $OP=\sqrt{OR^2-OQ^2}=\sqrt{62^2-40^2}=47.37$磅都

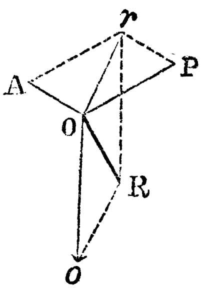
第十六圖




八十九　以三線懸一小球而三線之定點其間隔爲一百二十度試同時加力於三線則其終效若何試以圖明之但所加三線之力爲四與七與一十之比三

解　如圖試作OA OB OC三線其相互之角爲一百二十度而其 OA OB OC 之比如四與七與一十先求得 OA 及

第十七圖



OB 二力之合力Or次求得Or及OC二力之合力OR即所求三力之合力又先求得OA及OC二力之合力次求此合力與OB之合力亦可求得 OR

九十　以相等之力依反對方向施於同一着力點則其終效若何又其合力如何

解　與問題八十六之丁圖同理以二力 OP 及 OQ 其方向相反而同作用於一物體故其合力爲 OP－OQ 惟 OP 與 OQ 相等則其合力爲零即此物體不生變化

九十一　如八十九題若三力之强度相等則其終效若何

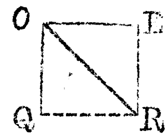
解　因題言三力之强度相等試於三力之內任取二力如 OA 及 OB 則其二力之合力 Or恰與第三力 OC 等而其方向相反故可知三力之合力爲零

九十二　向東南有五十之力爲向正東及向正南

二力之合成則二力之强度如何

解　如圖OR爲東南向其力爲五十OP爲正東向OQ爲正南向其東南向之OR力爲正東及正南二力之合力則POQ角必爲直角而OR爲角之二等分線即OP與OQ相等故得 $OP=OQ=\sqrt{\frac{OR^2}{2}}$ $=\sqrt{\frac{50^2}{2}}=35.3\cdots$ 即爲二力之强度

第十八圖

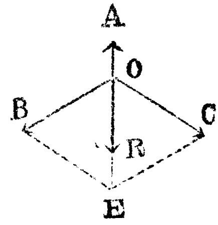



九十三　三力施於同一着力點一向正北二從正東少南三十度三從正西少南三十度而三力之合力向正南有七十磅都其向正北之力有二十磅都問其餘二力之强度幾何

答　二力各九十磅都

解　如圖OA及OB及OC之三力其相互間之角爲一百二十度而正北向之力O

第十九圖



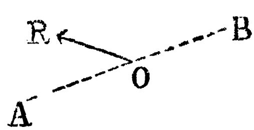
A爲二十磅都其正南向之OR爲七十磅都即三力之合力與 OA 成一直線而其方向相反故可知OC及OB之合力OE爲九十磅都即20+70=90 又COE角與BOE角各六十度則可知OB=OC=OE=90磅都

九十四 如前題其合力爲零則其原三力之關係如何

解 如前問題(九十三依法作圖令OB=OC=OE則原三力之合力即OE與OA之合力惟因題言三力之合力爲零則須令 OA=OE 即OA=OB=OC

九十五 一原力可分爲二力在反向之一直線上否

第二十圖




解 如圖 OR爲一力今欲變易其方向而分解爲任意直線AOB上之二力則終不能

九十六　分解一原力有無數法試言其理

解　見三十八款

力之鈞合

問題

九十七　以相等之二力依反對之方向施於同一着力點則其終效若何

解　因兩力之合力爲零則兩力均失其作用故此物體恰如不受此兩力然

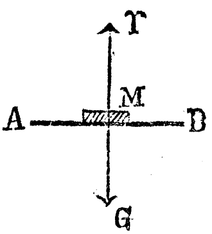
第三十九款　力之鈞合　凡二力及二力以上之數力施於同一着力點而其合力爲零謂之力之鈞合故可知互相鈞合之力則此等作用欲變其物體之運動量(靜止或運動之狀態)絕無功效例如人坐床上則身體之重與床之抵抗力相鈞合而靜止船之進行其速度在制限以上而蒸滊之力與水及空氣之抵抗力相鈞合則船行之速度依舊循其慣性而連續進行皆其證也

問題

九十八　吏置書籍於案上恒靜止其故處試明此力之作用

解　如圖 AB 爲水平案面 M 爲書籍則重力 MG 之方向恒垂直向下而與水平面 AB 成直角今欲令與此重力相鈞合而靜置書籍於 M 之位置則案面支持物體之力須與 MG 等量而成反對之方向如 TM 即案面與書籍之重之相抵力也

第二十一圖




九十九　二力之互相鈞合其要件如何

解　凡二力互相鈞合必二力之强度相等而方向相反

一百　三力之互相鈞合其要件如何

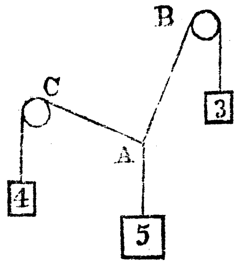
解　凡三力互相鈞合則三力之强度及其方向

雖有各種不同但必其中二力之合力與其餘之一力相等而方向相反則此三力之合力為零

一百零一　凡數力施於一點而互相鈞合必其中任意之一力與其餘各力之合力其強度相等而方向相反試言其理

解　凡數力互相鈞合則於數力之內任意之一力與其餘各力之合力求得此二者之合力為全數力之合力依第三十六款及第一十二款可知此二者之力之強度相等而方向相反故全數力之合力為零

第二十二圖

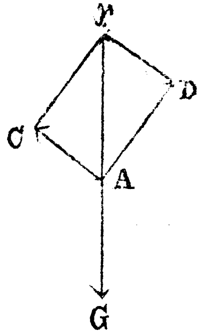



一百零二　有 BC 為極光滑之滑車置線於凹道內其兩端各懸一四斤及三斤之分銅復於其一點 A 結合之另懸一五斤之分銅使 CAB 角成直角則其力互相鈞合而穩定

試說明之

解　如圖當物體靜止時其三線之三力互相鈞合則 AC 及 AD 二線之合力 Ar 與第三線 AG 所懸五斤分銅之力其強度相反而方向相反惟 CAD 角爲直角而後 Ar = AG = 5

第二十三圖




因題言 AC 之力爲四斤 AD 之力爲三斤則當 CAD 角爲直角之時故得

$$AY = \sqrt{CA^2 + A^2D^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

一百零三　物體之等速運動毫不受外力之作用可能猝然靜止否試舉例以明之

解　不能猝然靜止因凡一物體雖同時被數力之作用然此等數力互相鈞合即此等之合力爲零而數力均失其効力故物體不生變化今物體以等速運動而進行全不受外力之作用

則其進行之力不能互相鈞合故不能猝然而靜止

運動第三則　附衝突

問題

一百零四　吾人在小舟以繩繫於大舟而互相接近不見大舟向小舟而動試依經驗以明之

解　命大舟之質量爲 M 其速度爲 V 小舟之質量爲 $M'$ 其速度爲 $V'$ 則其運動量之變化爲 $M\times V$ 及 $M'\times V'$ 今以小舟繫於大舟而互相接近則所受運動量之變化相等即 $MV=M'V'$ 故依吾人所經驗其小舟接近大舟而大舟亦微向小舟而動但大舟之質量 M 爲小舟之質量之 N 倍則大舟之速 V 不過小舟之之速 $V'$ 之 N 分之一則大舟之果動與否殆難識別若兩舟不甚懸殊則大舟亦向小舟而動若兩舟大小相等則兩舟互相接近其進行

之速亦相等吾人於地球上見物體之落下因地球與物體其質量懸殊故不見地球上昇胥此理也

一百零五　有人放小銃當彈丸發射之際必如何而後肩不感臺尻之反動

解　小銃之臺尻當於肩而發火則臺尻之强必有退於肩之後方之險因小銃雖無彈丸單發射雷管亦生有些微之反動力也

第四十款　運動第三則　牛董氏運動三則爲示力之作用於兩物體間之關係也曰甲體與乙體以力(即原動力)則乙體同時以相等之力依反對方向而還於甲體(即反動力)

問題

一百零六　試以手推動物體則手中忽生感覺其理如何又以手觸動同一物體而手中之感覺或强或弱其理若何

解　吾人以手推動物體其物體任何小必有些微之感覺因手之作用爲原動力而物體之觸手爲反動力也又設有等量物體試以猛力動之則手中之感覺愈强因原動力大則反動力亦大此皆吾人所常經驗也

一百零七　吾人以手支持一斤之物體則手中之感覺能有一斤以上之重否

解　凡以手支持一斤之物體必不能有一斤以上之重但携此物體猝然從低處上升則上升時覺有數斤之重因此一斤之重力除相抵之力以外更有向上方而生急速運動之他力也而升上愈急則物體之觸手愈强即凡物體恒欲靜止今欲破其慣性而猝令生多少之運動量故動之愈速則反動之抵抗愈大

一百零八　靜置二貫目之物體於案上則向上方而支持此物體之力幾何又靜置五貫目之物體

於案上則其支力幾何

解　凡物體之靜置案上有二貫目之重則下壓案面之力亦爲二貫目故案面亦以二貫目之力向上方而支持此物體令其穩定又靜置五貫目之物體於案上則案面亦以五貫目之力向上方而支持此物體令其穩定　如案面不載一物則案面向上方之作用全行消失若反之而物體靜置案上有二貫目之重其案面向上方之作用有二貫目以上之力則物體必向上方而動因此案面之全力不僅有二貫目之力恰與此物體之重相當令其穩定而其餘力更能使物體生運動也

一百零九　二物體互相作用其各物體所生之力其運動量之變化如何

解　甲體施力於乙體與乙體施力於甲體其力之强度相等故各體所生運動量之變化亦相等

但兩力之方向相反則兩運動量變化之方向亦相反故兩運動量變化之代數和爲零又此兩體分爲各體則運動量雖有變化而兩體合爲一團則運動量毫無變化故知此一團體別無團體外之力加之則團內各部分其各運動量之變化雖有消長而團體之全體其運動量則固毫無增減也

一百一十　大人與小兒以手相抵則大人抵小兒之手與小兒抵大人之手其力毫無輕重其故何與又此理果眞則大人打兒使之退却其故如何

解　因二物體互相作用則其所受之力相等今兩人互相抵而俱不動則可知對持之際其兩人之手之間所施之力相等而方向相反若大人勝小兒欲令小兒退却則大人之手力除與小兒之手力相抵之外更有餘力使小兒身體之質量生退後之運動量惟此時小兒之

手力除與大人之手力相抵之外更因身體質量之慣性而生反動力此所生之反動力即與大人使小兒生退後運動之力相等而方向相反故可知大人以手抵小兒之全力與小兒抵大人之全力常為等量而反向　又小兒身體之質量其所生運動量之力恆有一定與小兒之手力適乎不同（手力常不一定）且當大人打小兒之際小兒全無手力故恆令小兒身體退後幷非大人另加手力也

一百一十一　從大舟以繩繫小舟而曳之小舟之重為一噸大舟之重為二十五噸小舟以每秒一尺之速接近大舟問大舟須幾何之速向小舟而進但水之抵抗力空氣之抵抗力等俱附於舟重之內

答　大舟之動其速為每秒一尺之二十五分之一

解 因兩舟所受之運動量恒相等而反向故大舟之運動量爲 $25\times V$ 小舟之運動量爲 $1\times 1$ 即 $1\times 1=25\times V$ 故 $V=\frac{1}{25}$

一百一十二 物體落下之時地球亦向物體而微動其理眞否

解 因凡所謂重力者爲地球與物體間之引力但依運動第三則地球引物體而物體亦同時引地球其力相等而方向相反命物體之質量爲 M 其墜下之加速度爲 $g$ 地球之質體爲 $M'$ 其向物體而動之加速度爲 $d$ 則 $Mg=M'd$ 惟 $M'$ 爲非常大即 $d$ 爲非常小吾人殆難識別然於理論上地球亦有微速 $d$ 向落下物體而上行但其速甚小耳

第四十一款 動體之衝突 當牛董氏之先已知次之法則曰二物體相衝突則各物體之運動量於衝突後雖各有增減而兩物體運動量之和於衝突

之前後毫無變化即牛董氏運動第三則所示也因凡相衝突之物體假令合爲一團則兩體不相衝突而此兩物體以外絕無外力之作用故此團體之運動量不生他等之變化而此團體之運動量即組合二物體運動量之和故二物體相衝突各體之運動量雖有變化因而各體之速度亦生變化然兩物體運動量之總和前後常相等

附註　無彈性物體相衝突之後其速度之變化據上所言之法則可解釋之然如護謨等有彈性物體之衝突雖可據上所言之法則但欲推定其衝突後之速度另有關於彈性體反撥之法則須合而考之因其事稍複雜故彈性體之衝突姑從其略茲但言無彈性之物體

凡無彈性之物體雖互相衝突然不互相反撥直可合爲一體例如濕粘土塊是也

問題

一百一十三　有甲乙二濕粘土球甲重八瓦以每秒七糎之速進行於一直線乙重四瓦以每秒十糎之速從甲之後方同向進行此兩體相衝突而合爲一體問合成一體後之速如何

解　因衝突之前後兩物體運動量之和毫無變化(本款)而衝突前之運動量甲球爲 $8\times7=56$ 乙球爲 $4\times10=40$ 故二球運動量之總和爲 $56+40=96$ 命衝突後之速度爲 V 則二球合體之質量爲 $8+4=12$ 瓦 故其運動量爲 $12\times V$　惟因衝突前後運動量之總和恒相等故　$12\times V=96$　即 $V=\frac{96}{12}=8$ 糎 即二體合爲一團體之速每秒八糎也

註　合體之速爲每秒八糎較甲球衝突前之速稍急較乙球衝突前之速稍遲因乙球與甲球相衝突時稍失其運動量其所失之運動量已及甲球故乙球之速較前秒減而甲球之速較

前稍增即爲合體之共同速度　又兩體運動量之變化因乙球所失之運動量即甲球所得之運動量故 $4(10-8)=8(8-7)$

一百一十四　有二個無彈性之物體其質量爲 M 及 M′ 其速率爲 V 及 V′ 同方向而進行間衝擊後合體之速度如何

解　因衝突前甲物體所有之運動量爲 $M\times V$ 乙物體所有之運動量爲 $M'\times V'$ 故合體之運動量爲 $MV+M'V'$ 惟衝突合體之質量爲 $M+M'$ 衝突後合體之速度爲 V 故衝突後合體之運動量爲 $(M+M')V$ 惟因本款所言衝突前後運動量之總和常相等故

$MV+M'V'=(M+M')V$　即 $V=\dfrac{MV+M'V'}{M+M'}$ 若 V 大於 V′ 則其合體之速度 V 必小於 V 而大於 U′ 且因其相衝突時 M 體所失之運動量爲 $M(V-V')$ 必等於 M′ 體所得之運動量爲

$M'(V-V')$即$M(V-V')=M'(V-V')$即$M(V-V')$

$-M'(V-V')=0$故得$MV+M'V'=V(M+M')$

一百一十五　有二等質量之無彈性體以相等之速進行於相反之方向間衝擊後合體之速度如何

解　依吾人實地測驗凡相等質量之無彈性體以相等之速於其反向相衝突則兩體同止於一處蓋物體運動量之增減與其變化之方向悉因其力之作用今設有靜止物體依反對之方向同時受相等之力則二力之作用全行消失恰與當初毫不受外力作用者無異是即以相等之兩力同施於一物體而其方向相反則所生之運動量互相抵消此物體毫不變其位置依而有等量之二物體(無彈性體)其運動量相等而進行之方向相反衝擊後兩物體之運動量(即衝突力)互相抵消而兩體同止於一處由此可知力有正負

即運動量亦有正負即等量之二體以等速相向衝擊而合爲一體則其速全行消失即其運動量爲零

一百一十六　如一百一十三題兩物體從反對方向互相衝擊問衝擊後合體之速度幾何

解　甲體之運動量爲 $8\times7=56$ 乙體之運動量爲 $4\times10=40$ 惟因兩物體運動之方向相反則運動量之方向亦相反如甲體之方向爲正則乙體之方向爲負故兩物體合體之運動量爲 $56-40=16$ 而衝突後兩體合爲一體其質量爲 $8+4=12$瓦 而全體之運動量毫無變化命衝擊後之速度爲 $V$ 則 $12\times V=16$ 即 $V=\frac{16}{12}=1\frac{1}{3}$粴 即合體向甲體進行之方向（即正方向）有每秒 $1\frac{1}{3}$粴 之速也

一百一十七　有兩個無彈性之物體其質量爲 $M$ 及 $M'$ 其速率爲 $V$及 $V'$ 依同一方向或反對方

向進行於同一直線間衝擊後合體之速度如何

解　兩物體之運動其方向相同則 $v$ 及 $v'$ 同號其方向相反則 $v$ 及 $v'$ 異號而兩者之內任取一方爲正則其餘一方爲負惟因兩物體之合體其運動量之代數和爲 $Mv-M'v'$ 而衝突後合體之質量爲 $M+M'$ 命合體之速度爲 $V$ 則 $(M+M')V=MV+M'V'$ 即 $V=\frac{MV+M'V'}{M+M'}$ 如欲考求合體動路之方向則觀此式中所得 $V$ 之符號如與 $V$ 同符號則合體向 $M$ 體進行之方向如與 $V'$ 同符號則合體向 $M'$ 體進行之方向

一百一十八　從西向東而進之物體有每秒十五尺之速從東向西而進之物體有每秒二十尺之速衝突後向東進行有每秒二尺之速今從西向東之物體其質量爲八貫目問從東向西之物體其質量有若干貫目

答　從東向西物體之質量爲四貫目十一分之八

解　命從西向東之方向爲正從東向西物體之質量爲 M 則衝突前兩物體運動量之和爲 $8\times15-M\times20$ 衝突後合體之運動量爲 $(8+M)2$ 故 $8\times15-M\times20=2(8+M)$

$M=4\frac{8}{11}$貫

一百一十九　於平滑之水平面上有一千六百斤之大砲而五斤重砲丸之發射依水平方向有每秒九百尺之速問大砲退却之速幾何

答　大砲退却之速每秒二尺又一十六分之一十三

解　因砲丸進行之運動量與砲身退却之運動量恆相等而反向故得　$5\times900=1600\times V$

即　$V=2\frac{13}{16}$尺

一百二十　有兩個等重之粘土球其甲球靜止不動而乙球以等速度 v 進行而衝擊之問合併後

之速度幾何

答　速度爲$\frac{v}{2}$

解　命二球之重各爲 M 而一球靜止故其運動量爲零因而衝突前二球運動量之和爲 $M\times O+Mv$ 衝突後合體之運動量爲 $2MV$ 故 $M\times O+M\times V=2MV$ 即 $V=\frac{v}{2}$ 爲合併後之速度

一百二十一　如上題靜球之質量爲 M 動球之質量爲 7M 其速度爲 V 問合併體之速度如何

答　速度爲$\frac{7v}{8}$

解　衝突前二球運動量之和爲 $M\times O+7Mv$ 衝突後合體之運動量爲 $(M+7M)V=8MV$ 故 $7Mv=8MV$ 即 $V=\frac{7v}{8}$

## 第六章　重力及萬有引力

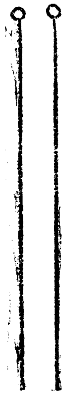
第四十二款　間隔作用力　吾人以手按棹上則手與棹面相接其力始傳及於棹面又以繩繫小舟

而曳之則以手引繩以次傳其力於繩而引舟故手與繩相接繩與舟相接其力始傳及於舟此等力必須物體相接而其作用始顯謂之觸接作用力例如手力風力水力空氣之壓力蒸流力等是也

然如地球引其表面上諸物體而使其墜下之力(即重力)磁石吸引鐵片之力又蓄電氣之物體互相反撥或互相吸引之力爲相隔絕物體間之作用幷無有目能視手可觸之物體居其間爲之媒介此等力於懸絕間可能顯其作用謂之間隔作用力以示其別於觸接作用力也

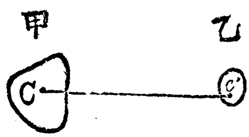
第四十三款　萬有引力及重力　宇宙間所有之物體不論其距離之遠近皆具有互相吸引之力(即間隔作用力之一種)謂之萬有引力凡天體間之引力依天文學上之觀察最爲著明然地面上之諸物體比較甚小其引力亦甚微弱頗難識別須如之實驗可得證明如圖有二條細絲其長各數十尺

第二十四圖



固定上端其下端各懸一鉛丸使其下垂而兩絲之相距極近測得其靜止之上端與下端兩絲間之距離其下端較上端稍爲接近是即鉛丸相互之引力也至牛董氏始詳細考察而確定萬有引力之法則曰兩物體間之引力（萬有引力）與兩物體之質量相乘積爲正比例與其間之距離自乘爲反比例試以數學式明之

第二十五圖



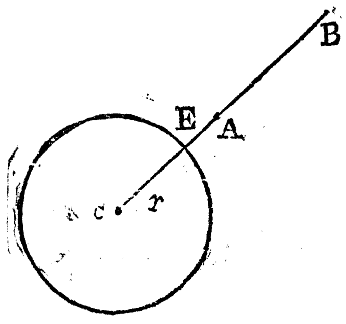

命二物體之質量爲 M 及 M' 其距離爲 r 其引力爲 F　則 $F=\frac{M+M'}{}$ 即 $F=K\times\frac{M\times M}{r^2}$

K爲常數）但兩物體間之距離 r 爲自兩物體質量之中心點（如 C 及 C'）所測之距離也因任何物體必有其質量之中心不啻其質量悉集合於一點而有對於他物之關係（即物體之重心）例如金以

次屬物質所製之球體其中心之一點即其質量之中心如圖甲體引乙體之力為甲體引乙體之無數部分所集合故其所得之終效恰如乙體之無數部分悉縮聚於一點 C′ 而引甲體相等

何謂地球之引力通常吾人所目擊者物體恒向地面而墜即物體與地球間之引力也此物體與地球間所具之萬有引力特稱之曰重力因其在地面上而生物體之重量也

第二十六圖




第四十四款　重力之強度　設地球之質量為 M 於地球外遠方之二處如 A 及 B 有質量 M′ 之物體其 C 點為地球質量之中心(即尋常所言地球之中心)則地球引物體之重力依萬有引力之法可知為$F=K\frac{M\times M'}{CA^2}$及$F'=\frac{M\times M'}{CB^2}$

依精細之測定可知近地面之處因重力而墜下之物體其重爲一瓦於一秒間有九百八十糎之速度故地球表面重力之强度爲九百八十達音由此可知重力及於 M瓦 之物體必爲 M 倍之九百八十達音但地球之重力隨處不同如以等量之物體躋於高山之頂則重力稍殺且地球非眞球體赤道較廣而南北扁平因而赤道與極地其離地球之中心不等故重力之强度亦不等舉例如次其落下之加速度俱以秒糎計算

| 地名 | 落下之加速度(以$g$表之) |
|---|---|
| 赤道 | 九七八·一 |
| 東京 | 九七九。八 |
| 富士山頂高一二三七〇尺 | 九七八·九 |
| 札幌 | 九八〇·五 |
| 南北極 | 九八三·一 |

另表詳載卷末

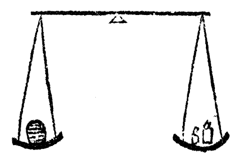
第四十五款　重量與質量之區別　凡物體之重量與質量雖因兩者之定義不難區別特以一言申明之即凡物體之質量爲其所含有物質之分量無論携至何處但不毁損其物體則其質量毫無變異若重量則因地球與物體間之引力而生兩體間引力之變化與其距離自乘爲反比例故在平地之上與在高山之項其引力之强度稍異因而物體之重量亦變例如有一物體在東京之海面有百匁之重在富士山之項有九十九匁八之重至札幌有百匁七之重要之質量者物體本身之量而重量者則物體與地球相引之力故無地球即無重量也

第四十六款　重量與質量爲正比例　如前第四十四款所言物體之重量因地面上距離之遠近而異設同在地球上之一處其地球中心之距離恒爲一定有 M M′ M″ 等之質量則物體之重量與 $\frac{Mm}{2}$ 及 $\frac{Mm'}{r^2}$ 及 $\frac{Mm''}{r^2}$ 爲正比例即與 $m$ 及 $m'$ 及 $m''$ 爲正比

例故同一處之物體其重量直與質量爲正比例

第四十七款　天秤示物體之質量非示其重量　如圖天秤之左端載重物右端載分銅使之平準其物體之重量與分銅之重量相等故天秤歸於平準即物體之質量與其分銅之質量相等(四十六款)然物體之重量果欲知其爲若干達音則必須識別權物體之處所重力之强度故可知天秤祇能示物體之重量與分銅之重量相等而已

第二十七圖



第四十八款　物體落下之加速度　凡地面上之物體不問其爲靜止或運動恒受重力之作用但物體從初墜下於一秒時因重力而生之速度如第四十四款所言雖隨地而有小差然總之略近於每秒九百八十糎以 $g$ 表之即物體墜下之加速度也故從初墜時至二秒時其速度爲九百八十糎之二倍

即 $2g$ 準此可知 t 秒時之速度爲九百八十糎之 t 倍即 $t\times g$

凡落下物體之速不因質量而異　蓋凡物體同在一處其質量爲 $m$ 及 $m'$ 及 $m''$ 等依萬有引力之法則各物體之重力 爲 $F=K\frac{Mm}{r^2}$ 及 $F=K\frac{Mm}{r^2}$ 及 $E=F\frac{Mm''}{r^2}$ 等 恒與質量爲正比例惟此等受重力而動之質量爲 $m$ 及 $m'$ 及 $m''$ 等故可知此等物體所受之加速度爲 $K\frac{Mm'}{r^2}\div m$ 及 $K\frac{Mm'}{r^2}\div m$ 及 $K\frac{Mm''}{r^2}\div m$ 等 俱等於 $K\frac{M}{\ }$ 即凡物體落下之速恒相等更詳言之凡物體所受之重力與質量爲正比例而增而因重量而動之速度與質量爲反比例而減故兩者互相抵消而仍由重量而生之加速度恒與質量無關係

然通例空氣中紙片之落下較石塊遲以空氣有抵抗力防其落下之運動也假令紙片與石塊其質量相等則紙片之容積較大其落下時與空氣相衝突

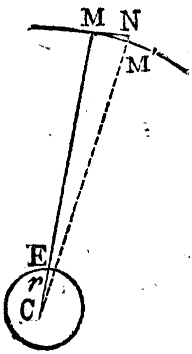
之面較石塊廣故空氣之抵抗較大惟眞空中則無此防害故因重力而墜下其速相等

重力單位　力之重力單位既如本篇問題四十四所言爲施及於一瓩一听一貫等單位質量之重力惟重力之强度隨地而有變更故重力單位不能一定如東京與札幌一瓩或一貫之質量不能有差而一瓩或一貫之重(即重力)略有差異即一瓩之重在東京爲九七九·八達音在札幌爲九八〇·五達音是其例也

第四十九款　重力之强度與距離自乘爲反比例

凡重力之强度與距離自乘爲反比例試以地球吸月球引力之强度與地面上重力之强度相比可得證明因地面上落下之加速度每秒有八百八十糎於前款屬言及之而月球被地球所引之加速度則更詳述於下蓋月恒以地球爲中心每二十七日七時四十三分環繞一周若月球周回至一處如 M

第二十八圖




而地球之引力忽然中斷則月球必離其軌道如 M M′ 而飛行與 CM 成直角之方向如 MN 一秒之後可至 N 惟實際被地球之引力所吸不能離其軌道一秒之後必 M′ 然則此月球被地球所引一秒間爲 NM′ 而其被引之加速度則可由次之計算而知(參照第二篇圖運動部)命被地球所引之加速度爲 A 月球周回之速度爲 $v$ 軌道之半徑爲 $r$ (即 C M) 依圓運之理 $d=\frac{U^2}{R}$ 惟月球之軌道一周之長爲 $2\pi r$ 其一周之時間命爲 T 則 $v=\frac{2\pi R}{T}$ 故得 $A=\frac{(2\pi R)^2}{T^2}\div r=\frac{4\pi^2 R}{T^2}$ 惟因月球之軌道其半徑 $r$ 依天文學上之考察爲地球半徑 R 之六十倍故 $A=\frac{4\pi^2R^2}{T^2}=\frac{4\pi^2(60\times R)}{T^2}=\frac{2\pi R\times 2\times 60\times\pi}{T^2}$ 因 $2\pi R$ 爲地球周圍之長而地球之周圍爲四千萬米即十 $2\pi R=40000000$ 米 又月球一周之時間 T 爲二十

七日七時四十三分即 T＝39343×60秒 代入前式則 $A=\frac{40000000\times2\times60\times3.1416}{(39343+60)}=\frac{40000000\times3.1416}{39343\times30}$

因之而 A ＝0·002706米即$_d$＝0.2706糎而地球表面加速度$g$已知爲九百八十糎因引力之强度與離自乘爲反比例則因重力而生之加速度亦必之距離自乘爲反比例故九百八十糎與〇·二七距零六糎之比必如地球半徑自乘 $R^2$ 與月與地球間距離自乘 $(20R)^2$ 之比爲反比例即 980:0.2706:: $\frac{1}{R^2}\cdot\frac{1}{(60R)^2}=\frac{1}{(60)^2}$ 因之可知地球重力之强度恒與距離自乘爲反比例

問題

一百二十二　二物體間之距離爲一其質量各爲一測得其引力爲五十如二物體之質量爲八與十其距離爲二十則其引力幾何

解　命二物體之質量爲M及 M′其距離爲R其引力之强度爲 F 則依理 $F=K\frac{MM'}{r}$今 M＝

$M'=1$　$r=1$　其 $F=50$　則 $50=K\frac{1\times1}{1^2}$　即 $K=50$　又 $M=8$ $M=10$ $r=20$　則　$F=K\frac{8\times10}{(20)^2}=50\frac{8\times10}{(20)^2}=10$ 即所求之引力爲一十

一百二十三　二物體之質量爲二與三其距離爲四十測得其引力爲六十如二物體之質量爲二與五其距離爲二十則其引力幾何

答　引力四百

解　命所求之引力爲 F 則準引力之公式而求得其比例爲 $F:60=\frac{2\times5}{(20)^2}:\frac{2\times3}{(40)^2}$ 故 $F=400$

一百二十四　如前題之比例二物體之質量爲三與四其距離爲四十則其引力幾何

答　引力一百二十

解　命所求之引力爲 F 則準前題之同法而求得其比例爲 $F:60=\frac{3\times4}{(40)^2}:\frac{2\times3}{(40)^2}$ 故得 $F=120$

一百二十五　如一百二十三題之比例二物體之質量爲三與四欲令其間之引力爲一百二十則

其距離須若干遠

答　距離四十

解　命所求之距離爲$r$則得$120:60=\frac{3\times4}{r^2}:\frac{2\times3}{(40)^2}$

故$r=40$

一百二十六　東京之落下加速度每秒九百七十九·八糎　問東京一貫目之重當幾何達音

答　東京一貫之力凡三千六百七十四萬二千五百達音

解　命所求之達音力爲$x$因一貫之質量爲四分之十五瓩即四分之一萬五千瓦故得比例式

1瓦 : 979.8達音 :: $\frac{15000}{4}$瓦:$x$達音　故得　$x=\frac{15000\times979.8}{4}=36742500$達音

一百二十七　一百五十磅之壓力當幾何磅都

解　凡一瓩之重爲一竏質量之重力即可使物體落下有每秒每秒三十二呎有餘之加速度之力也而一磅都爲一竏之質量可使有每秒每秒

一呎之加速度之力則一听之重（或壓力）當磅都之三十二·一…倍

一百二十八　有一鐵塊於東京以天秤權之重一貫二百匁於富士山項以同一天秤權之其重有若干貫又於此兩處其鐵塊重量之比若何但兩處落下之加速度已詳前表

解　因於兩處地方此鐵塊重量之比可知即重力之比即　東京:富士山項＝989.8:978.9

而此鐵塊於東京權之有一貫二百匁如用同一天秤於富士山項權之亦依舊爲一貫二百匁也（四十七款）

# 第二篇　力學應用之一 (加速運動及落體　阿梯吾特器　彈道及拋物線　圓運動　懸擺運動)

## 加速運動及落體

凡物體落下之運動可視爲等加速運動蓋重力之强度雖平地與高山不能無差然通例離平地之高處不甚間隔其重力之强度略等則物體因重力之作用其所生之加速度亦可視爲相等故凡物體落下之運動可視爲每秒每秒有九百八十糎相等之加速度亦無差誤吾人通常所目擊之等加速運動其落下運動之事實最多故如下所言落體之運動即等加速運動之應用也

### 第一款　落下之公式

(一)　物體由靜止落下於 t 秒之終其速度爲 V 則 $V=gt$

(二)　物體由靜止落下於 t 秒間所經過之距離

爲S則 $S=\frac{1}{2}gt^2$

(三)　t 秒終之速度爲V其間所經過之距離爲S則 $V^2=2gs$ 試證明此三式

(一)　此式旣於前編第一十五款及以下之問題曾說明之玆不贅

(二)　凡不等速運動之物體其所經過之距離爲其所經過之時間與其平均速度之相乘積今物體由靜止落下其初速爲零因物體之速度與時間爲正比例而逐次增大至t秒之終則其速度爲 $gt$ 故其平均速度爲 $\frac{0+gt}{2}=\frac{1}{2}gt$ 由此可知 $t$ 秒間所經過之距離爲 $s=\frac{1}{2}gt\times t=\frac{1}{2}gt^2$

(三)　由一式 $V=gt$ 由二式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 今用代數學上之演算消去t則從一式而得 $t=\frac{V}{g}$ 代入二式則 $s=\frac{g}{2}\times\left(\frac{V}{g}\right)^2=\frac{g}{2}\times\frac{V^2}{g^2}=\frac{1}{2}\times\frac{V^2}{g}$ 故得 $V^2=2gs$

附記　此三式中之 $V^2$ 不過表明單速度之二乘數不能如長 L 之二乘羃 $L^2$ 爲表明面積

又 $V=\sqrt{26s}$ 以其有平方根號於演算不便故通例去其根號爲二乘式之形

因重力而生之加速度 $g$ 其值隨地而有變更然通例可用九百八十糎試以日本尺計之則得 $g$ 爲三十二尺三有餘以英呎計之則得 $g$ 爲三十二呎一有餘故凡求 $g$ 之數值可常用上之三數

問題

一　有物體落下於七秒時之終其速度幾何

解　命七秒終之速度爲 $V$ 如以糎爲長之單位則 $g=980$ 糎故得 $V=980\times7=6860$ 糎　如以米爲長之單位則 $g=9,8$ 米　故得 $V=9.8\times7=68.6$ 米　如以尺爲長之單位則 $g=32.3$ 尺　故得 $V=32.3\times7=225.1$……如以呎爲長之單位則 $g=32.1$ 呎　故得 $V=32.\times7=224.$ 呎……

二　有物體落下其速度每秒八十三·三米問從

靜止落下有若干秒

答　八秒半

解　因落下之加速度$g$爲每砂每秒九米八則從初落時至每秒有八十三米三之速度V其所需之時間命爲t則準公式一$V=gt$　故得$83.3=9.8\times t$　即$t=\frac{83.3}{9.8}8.5$秒

三　從橋上墜石經五秒半而至水面問橋離水面之高幾何

答　一百四十八米二有餘

解　命從橋至水面之高爲S則準公式二$S=\frac{1}{2}gt^2$故得所求之距離爲$S=\frac{1}{2}9.8(5.5)^2=148.2$·

四　有物體從靜止落下其速度至每秒一十九·六米間落下有若干秒

答　二秒

解　因物體從靜止落下至t秒時始能有一十九米六之速度則準公式一故$19.6=9.8\times t$即

$t=\frac{19.6}{9.8}=2$秒

五　有滊車從停車場初發時平均每秒每秒有二尺之加速度間需若干秒始能有每秒二十五尺之速

答　一十二秒半

解　依前題同法準公式一故得$25=2\times t$　即$t=\frac{25}{2}=12\frac{1}{2}$秒

六　有物體從靜止落下於五十分之一秒所得之速度幾何

答　〇・一九六米

解　因物體落下於一秒時有九米八之加速度故準公式一$V=g\times t$　則得$V=9.8\times\frac{1}{50}=0.196$米

## 第二款　物體有初速而落下之公式

(一)　凡物體非由靜止落下則其原有之速度命爲$V_0$ $t$秒終之速度命爲$V$則得公式$V_0=V_0+gt$

(二)　物體非由靜止落下於 t 秒間所經過之距離爲 S 則得公式 $S=V_0t+\frac{1}{2}gt^2$

(三)　物體之初速爲 $V_0$ 其末速爲 V 其經過之距離爲 S 則得公式 $V^2=V_0^2+2gs$

試證明此三式

(一)　此式於前編第十五款曾說明之玆不贅及

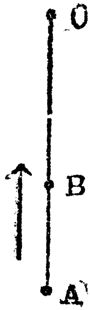
(二)　因凡物體之墜下其初速爲 $V_0$ 其末速爲 $V_0+gt$ 故 t 秒間之平均速度爲 $\frac{V_0+V_0+gt}{}=V_0+\frac{1}{2}gt$ 惟 t 秒間所經過之距離爲所經過之時間與其平均速度之相乘積即 $S=(V_0+\frac{1}{2}gt)t=V_0t+\frac{1}{2}gt^2$

(三)　由一式與二式試依代數學上之演算而消去其 t 則得 $V^2=(V_0+gt)^2=V_0^2+2V_0gt+g^2t$ $=V_0^2+2g(V_0+gt^2\frac{1}{2})=V^2=V_0^2+2gs$

## 第三款　物體有初速而擲上之公式

(一)　凡物體向上拋擲其最初之速度爲 $V_0$ 因重

第一圖




力引之使下每秒減九百八十糎之速度其 t 秒終之速度命爲 V 則得公式

$$V = V_0 - gt$$

因物體漸昇而速度漸減經 t 秒時而所減之速度爲 $gt$ 若昇至極高而所減之速度與初速 $V_0$ 等則其速度 V 爲零即物體之達最高點也由此而物體復由上墜下而所減之速度必大於 $V_0$ 故其所生之速度 V 爲負

（二） 從最初拋擲之處至 t 秒時物體所達之處其間之距離命爲 S 則得公式 $S = V_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

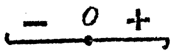
因 t 秒間之平均速度爲 $\frac{V_0 + V_0 - gt}{2}$ 故 $S = \left(\frac{V_0 + V_0 - gt}{2}\right) t = V_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

（三） 物體之初速爲 $V_0$ 其末速爲 V 其所經過之距離爲 S 則得公式 $V^2 = V^2 - 2gs$

由一式與二式試依代數學上之演算而消去其t則得$V^2 = (V_0 - gt)^2 = V_0 - 2V_0 gt + g^2t^2 = V_0{}^2 - 2g(o\,t - \frac{1}{2}gt^2) = V_0{}^2 - 2gS$

第四款　等加速運動之公式　今先論正負號之方向如圖從O點之右方而測其距離爲正號即於相反之方向而測其距離爲負號凡物體之運動不論其爲何種之形但取其初速 $V_0$ 之方向爲正則其相反之方向爲負依此法作一公式則凡一切之加速運動或減速運動俱可適用

第　二　圖




(一)　物體之初速爲 $V_0$ 其加速度(有減速意)爲 $a$ 其 t 秒終之速度(即末速)爲 V 則得公式爲

$$V_0 = V_0 + at$$

$g$ 之方向與$V_0$同方向故 $V=V_0+gt$ 而 V 之方向亦同與第二款之一式相合若初速 $V_0$ 之物體向上拋擲則 $V_0$ 爲正號而加速度 $g$ 爲負號故 $V=V_0-gt$ 與第三欵之一式相合

(二)　物體從最初之起點至 t 秒終之位置其間所經過之距離爲 S 則得公式$S=V_0t+\frac{1}{2}At^2$

(三)　物體之初速爲 $V_0$ 其末速爲 V 其所經過之距離爲 S 則得公式 $V^2=V_0^2+2As$

附記　學者熟知此三式之意義則凡等變加速度運動之問題悉可解之試演習次之諸問

問題

七　有石塊從高處落下有每秒十二尺之速度問經八秒之終有若干速度

答　二百七十尺四有餘

解　因物體之初速 $V_0$ 爲一十二尺而 $g$ 爲三

十二尺三故八秒終之速度準公式 $V=V_0+gt$

故 $V=12+32.3\times 8=270.4$……………尺

八　如上題之石塊間八秒時所經過之距離若干

答　一千一百三十尺許

解　如上題之石塊其八秒時所經過之距離爲 S 則準公式 $S=V_0t+\frac{1}{2}gt^2$ 故得 $S=12\times 8+\frac{1}{2}32.3\times 8^2=1129.6$……………尺

九　如上題之石塊經十秒時而至地問最初突落處至地上有若干尺

答　一千七百三十五尺餘

解　如上之題之石塊從突落處至地上之距離爲 S 則準公式 $S=V_0t+\frac{1}{2}gt^2$ 故得 $S=12\times 10+\frac{1}{2}32.3\times(10)^2=1735$……………尺

十　有瀛車從靜止起行以若干之加速度而進及進至一百二十米時有每秒五米之速度試求其加速度

答　一米之四十八分之五

解　命所求之加速度爲 $A$ 則準公式 $V^2=2AS$ 故 $5^2=2A120$ 即 $A=\frac{25}{5\times120}=\frac{5}{48}$ 米

十一　有滊船一艘每秒有十五米之速度今欲入港停泊因水流之阻力一秒減每秒半米之速問幾秒後始全停止

答　三十秒

解　因此船全行停止則其速度爲零命所需之時間爲 $t$ 則準公式 $V=V_0-At$ 故 $O=15-0\cdot5\times t$ 即 $t=\frac{15}{0.5}=30$ 秒

十二　有物體向上拋擲每秒有二百四十米之速度問經八秒半之後其速度幾何

答　一百五十六米七

解　命八秒半之終之速度爲 V 則準公式 $V=V_0-gt$ 故得 $V=240-9\cdot8\times8\cdot5=156\cdot7$ 米

十三　有彈丸向上發射有每秒五十米之速問能

昇高至若干米

答 一百二十七米五有餘

解 準公式 $V^2=V_0^2-2gs$ 今初速 $V_0$ 爲五十米終速 V 爲零加速度 $g$ 爲九·八米故 $O^2=5^2-2\times9{\cdot}8\times S$ 即 $S=127{\cdot}5$……………米

十四 有彈丸向上發射有每秒一百一十二米之速問昇高至一一百一十二米時需若干秒又其時之速度如何

答 終速一百零一米七時間一秒零五

解 因初速 $V_0$ 爲一百一十二米距離 S 爲一百一十二米加速度 $g$ 爲九·米八命達於一百一十二秒之高其時之速度爲 V 則準公式 $V^2=V_0^2-2gS$ 而得 $V=\sqrt{(112)^2-2\times9{\cdot}8\times112}=101{\cdot}7$……米 又命達於一百一十二米之高其所需之時間爲 t 準公式而得 $101{\cdot}7=112-9{\cdot}8\times t$ 故 $t=1{\cdot}05$……………秒

十五　以石塊向上拋擲有每秒五十米之速問幾秒之後能昇至最高之位置

答　五秒一有餘

解　因石塊向上拋擲其初速 $V_0$ 爲五十米至達最高位置之時則其速度爲零故得 $O=50-9{\cdot}8\times t$　即 $t=5.1$……………秒

十六　物體從地面上投至最高點之時間與從最高點下墜復達地面之時間相等且再達地面時之速與最初上投時之速相等試言其理

解　凡物體向上拋擲其初速爲 $V_0$ 至 t 秒之終則其速度爲 $V=V_0-gt$, 若上昇至最高點則其速度爲零故其所求之時間爲 $t_1=\frac{V_0}{g}$ 依而此時所求最高之距離爲 $S=V_0t_1-\frac{1}{2}gt_1^2$ 以 $t_1$ 之等式代入式內則得 $S=V_0\frac{V_0}{g}-\frac{1}{2}g\left(\frac{V_0}{g}\right)^2=\frac{V_0^2}{2g}$

次求物體從 S 高處轉而落下其下隊所需之時間命爲 $t_2$ 則得 $S=\frac{1}{2}bt_2^2$ 即 $\frac{V_0}{2g}=\frac{1}{2}gt_2^2$　故得 $t_2=$

$\frac{V}{g}=t$

準此可知拋上至 S 高所需之時間與從 S 高復墜地面所需之時間相等

又物體於 $t_1$ 秒後所得之速度為與 $gt_1$ 與原上拋時所得之速度 $gt_1$ 相等故可知從地面向上拋擲所得之速度與復歸地面時所得之速度全相等但其方向相反耳

十七　物體從靜止落下試求其第四秒之一秒間(即從三秒末至四秒末)所經過之距離

答　三十四米三

解　凡物體從初墜時經三秒間所經過之距離為$\frac{1}{2}9{\cdot}8\times3^2$又四秒間所經過之距離為$\frac{1}{2}9{\cdot}8\times4^2$故從四秒初至四秒終此一秒間所經過之距離為 S 則得 $S=\frac{1}{2}9.8(4^2+3^2)=34{\cdot}3$米

十八　物體從靜止落下試求其從第三秒之初至第七秒時之終所經過之距離

答　二百二十米五

解　依前題同理可知從第三秒時之初至第七秒時之終所經過之距離爲S故得 $S=\frac{1}{2}9\cdot8(7^2-2^2)=220\cdot5$ 米

十九　有滊船一艘自其五間二尺三寸之檣頭投石而下而石至甲板之時間船之前進爲四十一尺間船之速每時有若干里

答　船速一時間有八里强

解　因檣高爲五間二尺三寸即三十二尺三寸命石塊落下所需之時間爲t則得 $32.3=\frac{1}{2}32\cdot3\times t^2$ 故 $t=\sqrt{2}$ 秒惟此船經 $\sqrt{2}$ 秒間可進行四十一尺依而求其速度 V 則得每秒 $\frac{41}{\sqrt{2}_{秒}}$ 尺因此可求其每時之速度故得 $\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{41\times\overset{分}{60}\times\overset{秒}{50}}{\times36\times60\times\underset{間}{60}\times\underset{尺}{6}}=$ $8\cdot05$……………

二十　於深井墜石正五秒時始聞石打水面問井深若干但傳聲所費之時間極短略去不算其加速度 $g$ 之値爲三十二尺

答　井深二百五十六尺

解　命井深爲S則準公式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 故得 $S=\frac{1}{2}32\times4^2=256$尺

二十一　從地面以石塊上拋經六秒時復達地面試求其上昇之高

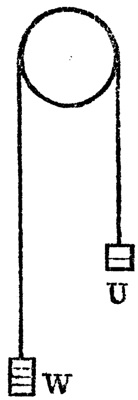
答　四十四米一

解　依問題第十六之理可知石塊向上拋擲至達最高點之時間與從最高點復歸地面之時間相等故依題言而知昇上或墜下計費三秒時命其上昇之高爲 S 則得 $S=\frac{1}{2}9.8\times3^2=44.1$米

## 阿梯吾特器

第五欵　阿梯吾特器　如圖以絲懸於極光滑之滑輪上此端之錘銅爲 W 彼端之銅錘爲 U(但W大於U)其兩錘之上行或下行之加速度爲 A 兩錘受絲之張力爲 T 則其關係式如次

第　三　圖




$$a=\frac{W-U}{W+U}g \qquad T=\frac{2WU}{W+U}g$$

因W重於U則W下行之時必引U上行故其所受之加速度 $a$ 必小於從空中墜下之加速度 $g$ 惟兩物體間之作用其力互相牽引則依運動第三則可知U引W而限制其下行之速令其稍減之力恒與W引U之力相等命此力爲T則據實驗所測可知W向下方而動之力爲 $Wg-T$ U向上方而動之力爲 $T-Ug$ 　惟因兩錘之下行或上行之加速度爲 $a$ 而各錘之重力爲其各質量與加速度之相乘積故W下行與U上行之力恒與W$a$及U$a$相等即 $Wg-T=W\ a$　$T-Ug=UV$ 兩式相加則 $(Wg-T)+(T-Ug)=Wa+Ua=(W+U)a$ 故得

$a=\frac{W-U}{W+U}g$ 又因 $a=\frac{Wg-T}{W}=\frac{T-Ug}{U}$ 即 $U(Wg-T)=W(T-Ug)$ 故 $2WUg=(W+U)T$ 即 $T=\frac{2WU}{W+U}g$

問題

二十二　阿梯吾特器之錘重爲十二瓦半及十二瓦則各錘上行或下行之加速度 $a$ 幾何

解　依本欵之理 W 爲一十二瓦五 U 爲一十二瓦則準公式而得 $a=\frac{12.5-12}{12.5+12}\times 980=\frac{0.5}{24.5}980=20$ 糎即所求之加速度

二十三　阿梯吾特器之錘銅其 W 重二十五瓦其 U 重二十四瓦則 W 所受之加速度幾何又從其靜止落下四秒間之距離幾何又絲之張力 T 幾何

解　依本欵之理則 $a=\frac{25-24}{25+24}980=20$ 糎即所求之加速度爲每秒每秒二十糎又 $T=\frac{2\times 25\times 24}{25+24}980=24000$ 達音　即絲之張力又以每秒每秒

二十糎之加速經四秒間落下之距離命爲 S 則得 $S=\frac{1}{2}20\times 4^2=160$糎

二十四　如前題若 W 重爲 U 重之三倍則其所受之加速度幾何

答　加速度四米九

解　因題言 W 重爲 U 重之三倍則依本款之理而求得其加速度 $a$ 即 $a=\frac{3U-U}{3U+U}g=\frac{1}{2}9\cdot 8=4\cdot 9$ 米

二十五　依阿梯吾特器而證下之法則則兩錘之重如何

(甲)　二物體質量不同而受等力之作用則所生之加速度與質量爲反比例

(乙)　二物體質量相等而受異力之作用則所生之加速度與力爲正比例

解　如甲如動其二錘 W 及 U 則其力爲(W－U)$g$ 如不令其動則其質量爲 $W+U$依而 $W-$

$U$之變形各增減其 W 與 U 之任一錘即得

如乙 $W+U$ 不變則須擇其 $W-U$ 之變形

二十六　阿梯吾特器兩錘之質量和爲五百瓦其差爲十瓦測得錘之加速度有每秒每秒十九糎五八試求其重力之加速度

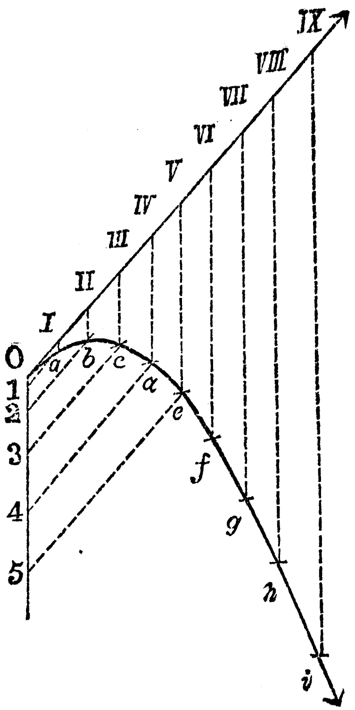
答　重力九百七十九糎

解　依本欵之理則得 $19{\cdot}58=\frac{10}{500}g$ 故 $g=50\times19{\cdot}58=979$糎

抛物線彈道

第六欵　抛物線之畧圖　凡物體之斜抛如圖中 O A 之方向若無地球之重力則物體之動路恒循 O A 直線而成等速運動惟實際重力之作用不能中止則物體進行之路不能成一直線而爲曲線今物體從 O 點以每秒若干糎之速 V 向空中斜上抛擲若無重力牽引之則一秒之終物體必行至一 ($O$至一$=V$) 惟實際受重力之牽引依垂直而落

第　四　圖




下爲$\frac{1}{2}g$　故物體不在一而依運動之平行四邊形法必下至　$a$(一至$q=\frac{1}{2}g^2$) 又二秒之後物體必行至二因受重力之牽引依垂直而下行爲$\frac{1}{2}g2^2$故物體不在二而下至　$b$(2至$b=\frac{1}{2}g2^2$)　依同理而三秒之後物體不在三而在 c(三至$c=\frac{1}{2}g3^2$) 以下準之則物體所經之路必爲 A B C D 等曲線是即所謂拋物線也然物體之斜拋除重力牽引之外恒

受空氣之抵抗則物體實際所經之路如上圖所示之抛物線不過爲極相近似之形而已然則欲精密測定抛物之動路須併考空氣之抵抗此爲極高深之數學故以下之諸問凡空氣之抵抗姑畧去不論

問題

二十七　依水平方向發射其彈丸之經路(即彈道)試作圖明之

解　如前圖之○一二三等線取爲○水平方向即彈丸發射之方向復自○一二三等點各下直線與重力方向 1 2 3 等所引之直線成正交線則其相遇之各點即可知爲彈丸之經路

二十八　從百二十二米半之高處以每秒四十米之速水平方向投一物體問需幾秒時始達地面又落於水平距離若干米之處

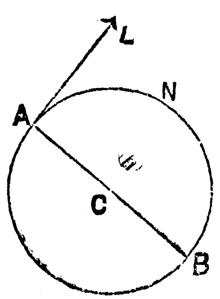
答　到地面之時間需五秒　可達水平距離二百米之處

解　因物體抛擲之速度成水平方向故因重力而落下之速度全無作用仍而物體落下之高為一百二十二米半命所需之時間為 t 則準公式而得 $122.5=\frac{1}{2}9.28\times t^2$ 故 $t=5$ 秒

因之可求得五秒間物體所進行之水平距離則準 $s=Vt$ 式故得 $40\times5=200$ 米

二十九　依與水平線成三十度之角以砲丸斜上發射其速度每秒百米問可昇至若干高

第五圖




答　彈丸之昇一百二十七米強

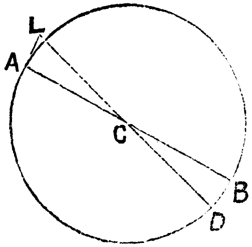
解　如圖 $oB$ 為彈丸發射之方向其速度為一百米試分之為二其一與水平垂直如 $oA$ 其一與水平平行如 $oB$ 則彈丸以 $o$ A 之速與重力相抗而上行惟 $OA=OR\times$

3）正弦$=100\frac{1}{2}=50$米依而彈丸所昇之高命爲$S$則得$50^2=2\times9.8\times s$故$s=127$米

三十　如上題砲丸所至之處離砲身之水平距離幾何

答　水平距離八百八十三米强

第六圖




解　如圖彈丸從O點發射時其動路如$OKH$復至地面則從$O$至H所需之時間爲從O至最高點K之二倍依前問題已知彈丸上昇之速度爲五十米故可知從O至K之時間爲$\frac{50}{9.8}$惟水平之速度$oB=oR\times30^\circ$餘弦$=100\times\frac{\sqrt{3}}{2}$即$oB=50\times\sqrt{3}$準此可知經過$2\frac{50}{9.8}$之時間其水平距離$oH=50\sqrt{3}$

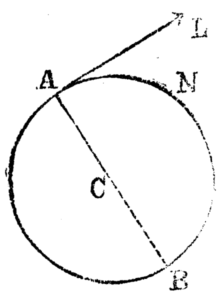
$\frac{50}{9.8}\times 2=883$ 米

圓運動

問題

三十一　以絲懸一石塊而持其他端旋轉之若此絲猝斷則石塊飛行之方向如何

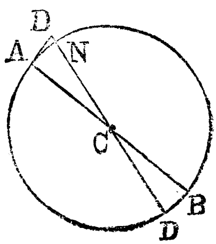
第七圖




解　如圖 CA 爲絲長其一端懸石塊 A 另以絲之又一端爲中心而旋轉之若此絲旋至 CA 之位置則石塊必從 A 點依與圓周相切直線 AL 之方向而成等速運動因石塊A 其速度之方向恒依切線 A L進行惟受此絲之引力則動路必在圖周上今此絲忽然切斷則石塊依其慣性而進行之方向必在 AL 直線上可判然矣

第七款　圓運動之引心加速度及引心力　如問題三十一所言以絲懸石塊而旋轉之又地球以太陽爲中心而旋轉於其周圍即可悟圓運動之理蓋石魂與地球恒於圓之切線 A L 上成直線運動故欲使其進行於曲線(即圓周)上則須有外力之作用即石魂旋轉之形恒受絲牽之引力無時不向中心 C 地球周轉之形因受太陽之引力使地球不至逸出軌道此等力謂之引心力即可知圓運動者爲其外力之作用恒引向其圓之中心也

第八圖




欲知引心力之强度及受引力之物體引向圓心之加速度如圖設物體進行至 A 其速度爲 V 若此時引心力忽焉中斷則進行於切線上於 t 秒時所

行之距離爲 AL($AL = VT$)惟實際被引心力之牽引而進行於圓周上則 t 秒時之後必行至 N 即物體受引心力之作用於 t 秒時其引向圓心之距離爲 LN 試命其加速度爲 $a$ 如 t 爲極短之時間則 AN 曲線可視爲 AL 直線即 $AL = AN = A$ t 而從 O 點所引之 OL 及 ON 二線可視爲相等之一直線惟 t 秒間所經過之距離爲 LN 則準公式 $S = \frac{1}{2}at^2$ 故得 $LN = \frac{1}{2}Lt^2$ 次求得 LN 之長而依上式求 $a$ 之值則準幾何學之理 $AL^2 = LN \times ND$ 又因圓之半徑命爲 $R$ 則 $ND = 2R$ 故得 $LN = \frac{AL^2}{2R}$ 惟 $AL = Vt$ $LN = \frac{1}{2}at^2$ 故得 $\frac{1}{2}at = \frac{V^2T}{2R}$ 即 $a = \frac{V^2}{R}$ 爲圓運動加速度之公式

次已知物體之加速度 $a$ 而求其引力之强度命物體之質量爲 $M$ 所受之引力爲 $F$ 則準物體之重力爲質量與加速度之相乘積故得 $F = Ma =$

$\frac{NV^2}{R}$ 爲引心力之公式由此可知物體有一定之速而成圓運動則物體所受之引心力與質量爲正比例與速率自乘爲正比例與圓軌道之半徑爲反比例

問題

三十二　長一米之絲於其端懸十二瓦之分銅以每米八米之速旋轉之間分銅受絲之牽力如何

答　絲牽力爲七萬六千八百達音

解　因旋轉之速度 V 爲八百糎半徑 R 爲一百糎分銅之質量 M 爲一十二瓦其絲之張力(即引力)命爲 $F$ 則準本欵公式 $F=\frac{MV^2}{R}$ 故得 $F=12\frac{500^2}{100}=76800$ 達音

三十三　有半徑三尺每秒二周之圓運動試求其加速度

答　加速度每秒每秒四百七十三尺八有餘

解　因圓運動之速一秒時有 $2\pi R\times 2=2$

$\times 3.1416 \times 3 \times 2 = 37.7$....尺故其向心之加速度 $a = \frac{(37.7^2)}{3} = 473.8$....尺

三十四　長六尺之絲能勝二貫之重於其端懸六十匁之分銅依水平線而旋轉之令其速漸增至此絲中斷問中斷時之速如何但加速度爲三十二尺

答　一秒時有二回一二之速

解　命絲之正欲切斷時之速爲 V 此時之引力爲 $F$ 則得 $F = 60\frac{v^2}{6} = 10 \times V^2$ 惟題言 F 爲二貫(即二千匁)而 $10 \times V^2$ 爲絕對單位試改爲重力單位則得 $2000 = \frac{10v^2}{32}$ 故得 $V=$ 80 尺即每秒可有八十尺之速由此可知每秒時旋轉之回數爲以一周旋轉之速除八十尺即得 $\frac{80}{2\pi R} = \frac{80}{2 \times 31416 \times 6} = 2.12$

三十五　有機關車一具其重量二萬一百六十斤於一時間有十五萬八千四百尺之速而進行於

半徑一千八百尺之曲線路上問機關車之遠心力如何但加速度爲三十二尺

答　遠心力與六百七十六斤六之重相等

解　因旋轉之速度 V 爲每一時有一十五萬八千四百尺即每秒時有 $\frac{158400}{60\times60}$ 尺而圓軌道之半徑 R 爲一千二百尺滊關車之質量 M 爲二萬零一百六十斤故滊關車之遠心力 $f$(與引心力等强而反向)試以重加單位計之則依上題之同理而得 $f=\frac{20160\times158400^2}{1800\times(60\times60)^2\times32}=677.6$ 斤

三十六　有長一米之線於其端懸五瓦之重而旋轉之令其一秒時至周回三轉之速而此絲始斷問絲牽力之强度如何

答　絲牽力强爲一十七萬七千六百五十五達音

解　質量之重 M 爲五瓦圓軌道之半徑 R 爲一百糎其旋轉之速度 V 一秒時有 $(2\times3.1416\times$

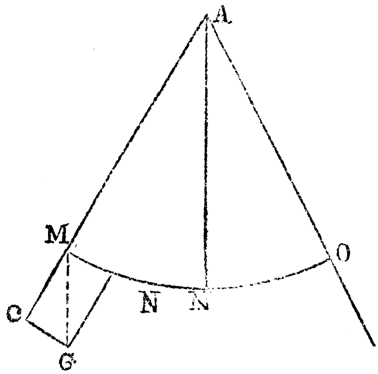
10") ×3 糎故可求得絲之張力(即引心力)チ

$$= \frac{5(2\times3.1416\times100\times3)}{100} = 177655 \text{ 達音}$$

懸擺運動

第八欵　擺動　於線或棒之一端懸一垂錘因重力之作用而動搖不絕謂之擺(一稱振子)如圖A爲懸點N爲重心當擺靜止時則下垂之

第九圖




方向常循AM直線其重錘之重量全繫A點自能穩定試引錘至M點則錘之重力MG分爲二力其一爲MH與AM成正交線又其一爲MC與

AM 成一直線惟 MC 分力為 A M 所牽引歸於消滅錘不能向 C 方而動而 MH 分力因重錘下引以加速運動向 N 方而動至 N 點復歸平均位置但此時循其慣性而成減速運動得昇於反對之方向至 O 點而速度全失復由故道而運動如次如是往復運動而成 MNO 圓弧形茍無空氣之抵抗及他物體之摩擦則終連續不絕即所謂擺動也凡自懸點至錘之距離謂之擺長其兩端上昇與垂線所成之角如 MAN 角及 OAN 角謂之擺離兩擺離合成之角如 MAO 角謂之振動角其 AB 弧謂之擺幅從弧之一端 M 至他端 O 而復歸於 M 謂之一擺動一擺動所需之時間謂之周期一秒內所擺動之次數謂之擺動數

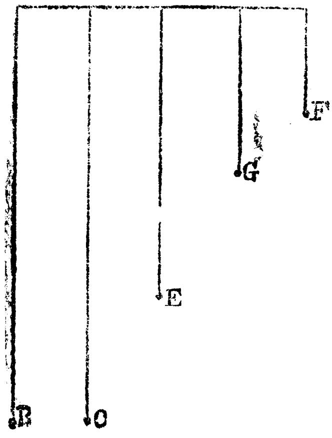
第九欵　單懸擺及復懸擺　單懸擺者謂因一點而成之實體懸於無重量無伸縮之線端此等擺實際不覯不過以微小之重體懸於極細之絹絲可視

第　十　圖


爲單懸擺而已其他人類所製重大之棒且所懸之重錘較重悉屬於復懸擺鐘錶特其一例也如圖 AC 爲無重量之線繫以 B 及 C 二錘恰與有重量之懸擺同依理言之則 B 錘之振動須速 C 錘之振動須緩惟因二重錘相連一線則近懸點之 B 錘欲令 C 動加速遠懸點之 C 錘反使 B 動加緩此二者互相作用遂生一定之速率恰如單擺之運動蓋懸擺而具有重量之棒者莫不具有一定之擺動點(即擺動之中心)其自懸點至擺動點之距離謂之擺長故欲使二種懸擺有同數之振動則必縮短單懸擺之線至與複懸擺同數運動則複懸擺之振動點與單懸擺之重錘有同一之位置即此爲相當單擺之長

第十款　懸擺振動之定律　如圖以等長之二擺如B及C懸於一處而令其動搖其一擺成較大弧形又其一擺成較小弧形則此二懸擺於相等之時間同數振動故得一之定律曰振動角不過大則懸擺振動之時間不關於弧形之大小即擺之等時性次以BCD以下各懸擺悉使動搖則見其振動時間僅B及C二懸擺相等而其餘各不相等假令B長爲一米E長爲四分之一米G長爲九分之一米則B擺一秒時振動一次E擺之振動爲B擺之二倍(即二次)G擺之振動爲B

第十一圖



擺之三倍(即三次)故得二之定律曰懸擺一振之時間與其長之平方根爲正比例即懸擺之長與其振動之時間自乘爲反比例

又設令 B 爲鉛球 C 爲木球則其振動之時間相等故得三之定律曰懸擺之振動時間但其長相等不關於錘重之實質

終以懸擺之振動原基於重力之作用設令携一擺至赤道地方其振動稍遲從此漸近南北極則振動較速故欲製一秒一振之懸擺其擺長不能相同故得四之定律曰於地面上各處地方其同一懸擺之振動時間與該地重力之平方根爲反比例

第十一款　測重力法　由懸擺之振動而測定重力之値命振動之時間爲 T 擺長爲 T 重力之加速度爲 $g$ 圓周率爲 $\pi$ 則從第二及第四之定律而得關係式爲$T=\pi\sqrt{\frac{T}{g}}$故$g=\frac{\pi^2T}{T^2}$故已知懸擺之長 T 而精測其振動之時間即可得 $g$ 之値

問題

三十七 於日本東京有長〇·九九米之擺其周期爲二秒然則長四米之擺間一振動須若干時

答 一振動須四秒時

解 命所求之時間爲 $x$ 則準公式而得 $2=\pi\sqrt{\frac{\cdot 99}{g}}$ 及 $x=\pi\sqrt{\frac{4}{g}}$ 以此二式相除故得 $2:x=\sqrt{\cdot 99}:\sqrt{4}$ 即 $x=1\times 4=4$ 秒

三十八 有一日遲二分之時錶今欲補正其擺長間須縮短幾何

解 因題言一日遲二分則一時間必遲五秒命已知之擺長爲 T 所求之擺動爲 $x$ 則 T 長之懸擺於一時又五秒間之振動數與 $T-x$ 長之懸擺於一時間之振動數必相等惟準公式而得 $T=\pi\sqrt{\frac{T}{g}}$ 及 $T'=\pi\sqrt{\frac{T-\pi}{g}}$ 故得 $(3600+5)\div\pi\sqrt{\frac{T}{g}}=3600\div\pi\sqrt{\frac{T-\pi}{g}}$ 或 $\left(\frac{721}{720}\right)^2=\frac{T}{T-x}$ 即 $x=\frac{1441}{53281}\times T=0.027\times t$ 即可知懸擺之長殆縮短一千

分之二十七

三十九　有長二粉之擺問其一振動所需之時間幾何但重力之加速度 $g$ 爲九米八

答　一秒四二

解　準公式而得 $T=\pi\sqrt{\frac{0.2}{9.8}}$ 故得 $T=1{\cdot}42$ 秒

四十　有單擺於二秒時間振動五次試求其擺長幾何但重力之加速度 $g$ 爲九米八

答　擺長〇·一五八米

解　準公式而得 $\frac{2}{5}=\pi\sqrt{\frac{T}{9.8}}$ 即 $\frac{2}{5\times 514}=\sqrt{\frac{T}{9.8}}$ 故得 $T=0{\cdot}158$ 米

四十一　於東京有長〇·九九二米之擺於二秒時間振動一次今欲另作一擺於二秒時間振動三次則其長須幾何

答　擺長須〇·一一二有餘

解　準公式而得 $2=3{\cdot}14\sqrt{\frac{0.992}{g}}$ 及 $\frac{2}{3}=3{\cdot}14\sqrt{\frac{T}{g}}$ 以此二式相除則得 $2:\frac{2}{3}=\sqrt{0.992}:\sqrt{T}$ 即 $36:4=0{\cdot}992:T$ 由此可求得懸擺之長 $T=\frac{4}{36}\times$

$0.992=\frac{0.992}{9}=.11022\cdots\cdots$

四十二　有鐘擺其長爲T尺每T秒時擺動A次若擺加長$K$尺則每T秒時少擺A次若$K$爲此小之數試求其A次之數

解　準公式而得$\frac{T}{A}=\pi\sqrt{\frac{T}{g}}$及$\frac{T}{AA'}=\pi\sqrt{\frac{T+K}{g}}$

卽 $A:(A-A')=\sqrt{T+K}:\sqrt{T}$ 卽$\frac{A-A'}{A}=\left(\frac{T+K}{T}\right)^{-2}$

$1-\frac{A'}{A}=\left(1+\frac{K}{T}\right)^{-2}=1-\frac{K}{2T}$ 其微數姑從省畧故

得 $\frac{A'}{A}=\frac{K}{2T}$　$A'=\frac{K}{2T}A$

四十三　今有一鐘擺其長三十九寸一四每一秒時擺動一次其後漸次增長至每日遲二十二秒問此擺須縮短若干

答　擺長須縮短〇·〇二寸

解　因題言每一秒時擺動一次則一日所擺動之次數爲八萬六千四百次卽　$24\times60\times60=86400$ 命爲$a$每日所遲之二十二秒命爲$a'$其擺長爲$\frac{39.14}{12}$尺命爲t則依上題之解法而得$h$

$=\frac{a'}{a}2t=\frac{2\times22\times39.14}{86400\times12}=\frac{.02}{12}=0\cdot02$寸　即可知所求之擺長須縮短〇·〇二寸

四十四　今有一擺自甲地移至乙地其兩地重力之加速度不同試求 t 秒時所增之擺動數

解　命兩地重力之加速度爲 $h$ 設在甲地地心重力之加速度爲 $g$ 及移至乙地則地心重力之加速度爲$g+h$其甲地 t 秒時之擺動數爲$a$乙地 t 秒時所增之擺動數爲 $a'$ 則準公式而得 $\frac{t}{a}=\pi\sqrt{\frac{t}{g}}$　$\frac{t}{a+a'}=\pi\sqrt{\frac{t}{g+h}}$　故得 $\frac{a+a'}{a}=\sqrt{\frac{g+h}{g}}=\left(1+\frac{h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{h}{2g}$其微數姑從省畧即 $\frac{a}{a}=\frac{h}{2g}$ 即 $a'=\frac{h}{2g}a$

四十五　有秒擺自英京移至法京其英京之重力加速度爲三十二尺一九法京之重力加速度爲三十二尺一八問每日遲若干秒

解　依上問題之解法已知 $a$ 爲八萬六千四百

次 $g$ 爲三十二尺一九 $h$ 爲〇·〇一故得 $a'=\frac{1}{2}\times\frac{0.01}{32.19}\times 86400=13$ 秒即可知每日必遲一十三秒

四十六 設有一擺於甲地每分時振動五十次於乙地每分時振動五十三次試求兩地重力加速度之比

解 準公式而得 $\frac{1}{50}=\pi\sqrt{\frac{t}{g}}$ 及 $\frac{1}{53}=\pi\sqrt{\frac{t}{g'}}$ 以此二式相除則得 $\frac{1}{50}:\frac{1}{53}=\sqrt{\frac{1}{g}}:\sqrt{\frac{1}{g'}}$ $\left(\frac{1}{50}\right)^2:\left(\frac{1}{53}\right)^2=\frac{1}{g}:\frac{1}{g'}$ 即 $g:g'=(50)^2:(53)^2$ 由此可知兩地重力之比如其振動次數之正比

# 第三篇　力學應用之二

簡單器械（摩擦
斜面　槓桿　天
秤　滑車　輪軸）

## 第一章　摩擦

問一　靜止摩擦及運動摩擦如何

問二　試以手持鐵棒輕握之則易落重握之則難落其故如何

問三　地面與靴底無摩擦則人能穿靴而步行否

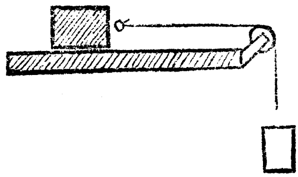
問四　試說明摩擦之効用其障害之例

問五　液體亦有摩擦否

第一款　靜止摩擦力之測法　試於鐵材與木材之間欲測其靜止摩擦力則基於次之原理即以平板安置極平於其上載以鐵材以繩繫之而貫於滑車之陷道內復於繩之彼端懸一分銅若兩體相接

之面眞係平滑而絕無摩擦力則鐵材之水平運動毫無妨碍故所懸之分銅無論其如何輕

第一圖




而鐵材亦隨繩而滑下惟實際因摩擦力之反抗非用稍重之分銅則鐵材不動今漸次令分銅增重至若干度而鐵材始動因此時分銅之重力恰勝於摩擦力故可知分銅之重即此摩擦力之最大極度也

第二款　摩擦力之定律　毛霖及苦賴禡發明摩擦力之定律曰二固體間之靜止摩擦力（即靜止摩擦力之最大極度）與兩體間之壓力爲正比而接觸面之廣狹毫無關係運動摩擦力亦如之但常小於靜止摩擦力且不因運動之遲速而生差

異

第三款　摩擦係數（一名摩擦率）　依上款所言毛霖之定律爲二固體之摩擦與兩體間之壓力爲正比故摩擦力與壓力之比不關於壓力之大小恒有一定之數設有一初動之物體其摩擦力爲 $F$ 直壓力爲 N 則 $F=K\times N$ 即 $K=\frac{F}{N}$ 但 K 爲常數謂之摩擦係數由此可知摩擦係數即單位壓力之摩擦力也但 K 之數小則物體甚滑故可知必小於一

問題

一　如第一款之法鐵材之重爲六貫而分銅之重漸增至一貫二百貫而鐵材始動問兩體間之摩擦係數如何又此鐵材上更加十八貫目之物體問須增若干分銅而鐵材始動

解　於水平板上載六貫目之物體則其板面所受之直壓力爲六貫目而此時之摩擦力爲一貫

二百目故依毛霖之定律求得一貫目壓力之摩擦力爲 $K=\frac{1.200}{6}=0.2$貫 即可知摩擦係數爲〇·二也

又於鐵材上更加十八貫目之物體則鐵材壓於板面之力計共爲二十四貫目故此時之摩擦力依毛霖之定律則可得 $24\times0.2=4.8$ 即可知分銅之重爲四貫八百匁也

二 鍛鐵與鍛鐵間其靜止摩擦係數爲〇·一四設於水平之鍛鐵板上載七貫之鐵箱今欲以繩牽動之至少須用若干力

答 須九百八十匁之力

解 因靜止摩擦係數爲〇·一四 即一貫目之壓力時欲引鐵箱而令之動至少須〇·一四貫目之力準此而鐵箱七貫目之壓力壓於鐵板今欲引之使動則依毛霖之定律雖至少亦必需 $7\times0.14=0.98$貫目 之力

三　青銅與鑄鐵間其運動摩擦係數爲〇·二五試於其表面塗以滑油則摩擦係數爲〇·一一今於青銅所製之輪臺上有鑄鐵所製之車軸試塗以滑油則可以一貫目之力旋轉之如不塗滑油問須用若干力

答　二貫二七有餘之力

解　因車軸壓輪臺之力有 W 貫目如以油塗之則準公式而得　$W \times 0.11 = 1$貫　故 $W = \frac{1}{0.11}$

如不以油塗之則旋轉須 チ 貫目之力故準公式而得 $チ = W \times 0.25 = \frac{1}{0.11} \times 0.25 = 2.27 \cdots$貫

四　於平板上安置鐵箱其重爲三十貫目試以繩曳之正需一人之力今於箱內裝置一百五十貫目之金塊問須幾人之力始能曳之

答　需六人之力

解　命此時之摩擦係數爲 $r$ 一人之力與 F 貫目相當則準公式 $F = r \times 30$ 即 $r = \frac{F}{30}(30 + 150)$

又因於箱內裝置一百五十貫目之金塊今欲曳之命所需之人數爲 $x$ 則 $xF=r\times(30+150)$ 故

$$x=\frac{r(30+150)}{F}=\frac{r(30+150)}{r\times 30}=\frac{180}{30}=6\text{人}$$

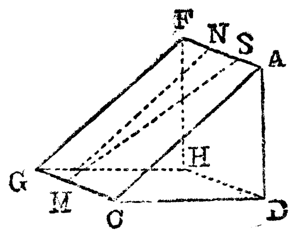
## 第二章　斜面

問　凡物體依垂直引之上行與沿斜面引之上行依五人之經驗何者需力較多

### 第四款　斜面之長及高及底

如圖 CH 面爲水平面 AG 面爲斜面則從其最下端至其頂部如 MN 卽爲斜面之長因 MN 直線與CG 直線 (卽斜面與水平面相交線) 成直角如不成直角如 MS 線則不能測斜面之長復自斜面之下端向水平面上如斜面之投射影作

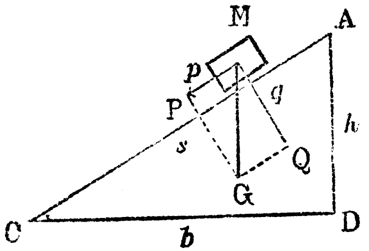
第　二　圖



一 DG 平面即爲斜面之底面又自斜面之項部 AF 向底面下等長之二垂線如 AD 及 HF 即爲斜面之高

第五款　斜面上之物體　如圖 AC 爲斜面CD 爲水平面其斜面與水平面所成之角以 $\theta$ 表之如 ACD 角而斜

第三圖




面之長爲 AC 命爲 S 底爲 CD 高爲 AD 命爲 $h$ 斜面上所載之物體其質量爲 M 凡物體沿斜面而下行悉原於物體之重力惟重力之全部非全屬斜降之作用因重力之方向常爲垂直如 MG 命爲 W 今試分之爲二力其一與斜面平行如 MP

其一與斜面垂直如 MQ 即 pq 二分力也而 q 力即物體 M 下壓斜面之力與斜面之抵抗力相反不關於物體之運動 p 力則無相反之抵抗力故物體受 p 力之作用沿斜面之方向而下行即可知令物體下行之力爲 p 力之作用

欲測定 P 力之强度則準幾何學之理其 MGP 三角形與 ACD 三角形爲相似直角三角形而 MP $=MG\frac{AD}{AC}$　$P=W\frac{h}{\ }$

依同理而測定 q 力之强度則得 $q=W\frac{b}{S}$

若準三角法之公式則 $\frac{h}{s}=\theta$正弦 $\frac{b}{S}=\theta$餘弦

$P=W\times\theta$正弦　$Q=W\times\theta$餘弦

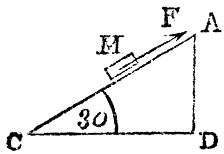
問題

五　有平滑而無摩擦之斜面與地面成三十度之角如欲引三瓩之物體沿斜面而上行問需力幾何

答　至少須一瓩半之力

解　如圖 ACD 角爲與水平面成三十度之角今於 AC 斜面上置三瓩重之物體如 M 命其沿斜面而下落之力（即重力之分力）爲 F 則準三角形之法 $F=M\times 30$正弦$=3\times\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$弦 準此可知 M 物體欲令其沿斜面而上行至少必須一瓩有半之力

第四圖

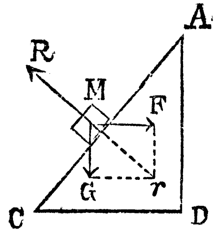



六　有平滑而無摩擦之斜面底一十二尺高五尺於其上載六貫目之重物今欲令物體穩定則水平方向需力幾何

答　水平方向之力需二貫五百目

解　如圖 AC 爲斜面 CD 爲底一十二尺 AD 爲高五尺今於斜面上置六貫目之物體如 M 欲令其不沿斜面而下落須用一與物體成水平

第五圖

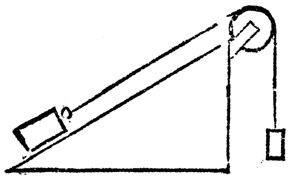



之力如 MF 則於此處三力互相鈞合而成穩定即第一爲重力如 MG 爲六貫目第二爲水平力如 MF 第三爲斜面支物體之力如 MR 與斜面成正交惟此三力互相鈞合故此三力之中其一力 MR 與其餘二力 MF 及 MG 之合力其強度相等而方向相反故 MF 與 MG 之合力 M$r$ 亦與斜面成直角而成 MF$r$G 四邊形之對角線則 GM$r$ 角與 M$r$F 角相等即與 ACD 角相等故得 $MF = MG \times \frac{AD}{CD} = 6 \times \frac{5}{12} =$ 2.5貫目

七　有平滑而無摩擦之斜面於其上置八貫目之鐵箱而斜面之項裝置滑車另以索繫鐵箱而貫

於滑車之陷道內他一端懸五貫目之分銅恰令此鐵箱支置於斜面上問斜面之長與高之比

第六圖



答　斜面八尺高五尺之比

解　因衹需五貫目之力可以曳動鐵箱則鐵箱因重力而欲斜降之力正與五貫目相等準此而定斜面之勾配則得　$8貫\frac{斜面之高}{斜面之長}=5貫$　故斜面之長：斜面之高∷8：5　即斜面八尺高五尺之比例也

八　有平滑而無摩擦之斜面與水平面成 $\theta$ 角於其上載一球體試求其轉下之加速度

答　轉下之加速度爲　$g\frac{高}{長}=g\times\theta$正弦

解　命球之質量爲 M 則其重力爲 $M\times g$ 其

沿斜面而欲墜下之力（即重力之分力）爲 P 則得　$P=Mg\frac{高}{長}$　故其轉下之加速度　$\alpha=\frac{P}{M}$ $=Mg\frac{高}{長}\div M=g\frac{高}{長}=g\theta$正弦

九　有斜面之底五尺高二尺於其上有自然轉下之球體問其最初運動四秒時間所經過之距離但 $g$ 爲三十二尺三

答　斜降九十六尺許

解　球轉下之加速度爲 $\alpha$ 則 t 秒間下行之距離　$S=\frac{1}{2}gt^2$　今此斜面之底五尺高爲二尺故底：高：長 $=5:2:\sqrt{5^2+2^2}$　依前問題之解法可知轉下之加速度　$\alpha=g\frac{高}{長}=32.3\times\frac{2}{\sqrt{29}}$

依此可求四秒間下行之距離　$S=32.3\times\frac{1}{\sqrt{29}}4^2=96\cdots\cdots$尺

十　有物體垂直落下經 t 秒而達地面今此物體沿斜面而下行而斜面與地平成 $\theta$ 角問需幾秒時始達地面

答　物體斜降之時間爲 $t\times\frac{長}{高}=t\times\frac{1}{正弦\theta}$

解　命斜面爲 S 底爲 $b$ 高爲 $h$ 重力之加速度爲 $g$ 沿斜面而下行之加速度爲 a 則 $\alpha=g\frac{h}{s}=g$ 正弦　今依垂直從 $h$ 高處而下落其所需之時間爲 $t$ 則 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 沿斜面 S 而下落其所需之時間爲 $t_,$ 則 $S=\frac{1}{2}\alpha t_,^2$ 故 $t:t_,=\sqrt{\frac{2h}{g}}:\sqrt{\frac{2S}{a}}$ 以 A 之等式代入則得 $t:t_,=\sqrt{\frac{2h}{g}}:\sqrt{\frac{2s}{g\frac{h}{s}}}=\sqrt{\frac{s^2}{h^2}}=\frac{s}{h}=\frac{1}{\theta正絃}$ 故 $t_,=t\times\frac{1}{\theta正絃}$

十一　沿斜面而下行與依垂直而下行但其高相等則其速亦相等試論證之

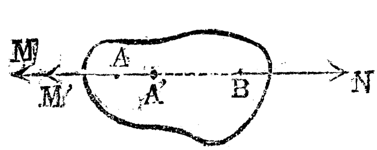
解　依前問題之同理沿斜面而下降之加速度爲 $a=g\frac{h}{s}$ 今從高處依垂直而落下之速度命爲 V 沿斜面而下降之速度命爲 $V_,$ 則依第二篇第一欵之公式而得 $V^2=2gs=2gh$ 及 $V_,^2=2as=2\left(g\frac{h}{s}\right)S=2gh$ 故 $V=V$

## 第三章　作用於剛體之力（剛體　着力點不同數力之組合　平行力之組合　重心　平行力之中心

第六欵　剛體　凡物體無論受如何之強力而毫不變動謂之剛體但此類之物體實不多覯吾人所目擊者惟略具剛性之物體而已如鐵與石等皆硬度極高之物體也若護謨等之軟物體卽受些小力之作用亦能令其變動且其變化甚複雜頗難窺其眞相剛體則不然故可知受外力之作用其變化之比例極少

第七欵　作用於剛體二力之合力

第七圖



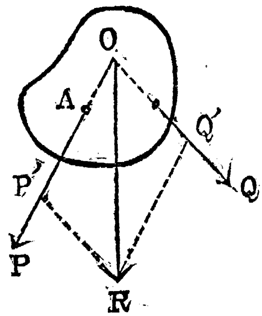

凡作用於剛體之二力若其兩力同在

一平面內而不平行且異其着力今欲求其二力如圖有任意之剛體 AB 於 A 點有 AM 力之作用則 AM 之着力點於 MAN. 直線內任移至何點而此力之及於 AB 體其終效無異假令於 AM 直線上與 AM 相等之力而其方向相反於 B 點有 BN 之作用則 BN 與 AM 二力互相鈞合而物體毫無變動今 AM 之着力點如令移於同一直線上之 A′ 點亦依舊與 BN 力互相鈞合故可知 AM 之着力點在 A 點與在 A′ 點其終效全相等依同理可知 AM 之着力點但在同一直線上無論移至何點其終效全無差異

次設有任意之剛體 AB 如圖於 A 點有 AP 力之作用於 B 點有 BQ 力之作用但同在一平面內而不平行今欲求其合力試取 O 點爲 PA 及 QB 二力線或延長線之交點則 AP 與 BQ 二力之着力點俱移至 O 點其終效全無差異惟 OP′ 與

AP 相等 OQ′ 與 BQ 相等則 OP′. 及 OQ′ 二力之合力與 AP 及 BQ 二力之合力其終效無異而 OP′ 及 OQ′ 二力之合力依平行四邊形法爲 OP′RQ′ 平行四邊形之對角線 OR 由此可知 OR 卽原力 AP 及 BQ 二力之合力而 OR 之着力點於 OR 直線或延長線上無論移至何點亦無差異

第八圖

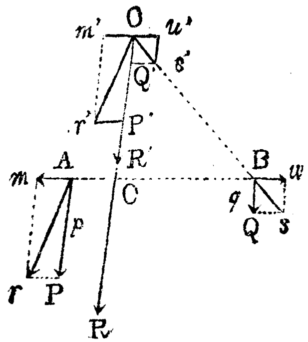



第八款　作用於剛體數力之合力　凡作用於剛體之數力其數力同在一平面內而不平行且異其着力點今欲求其合力於此等數力之內任意組合其二力依前款求其合力復於此合力之內任意組

合其二個合力依前欵更求其合力依此遞求則無論如何數多之力直可求其最後之一合力卽爲所得之合力

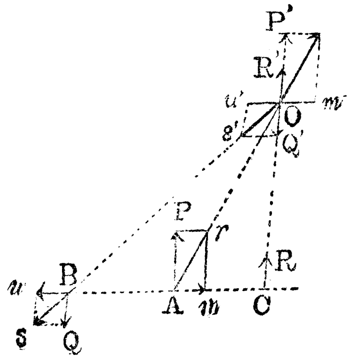
第九欵　平行力之組合　凡求二個平行力之組合設有任意之剛體於 AB 二點有二個平行力之作用爲 P 與 Q 今欲求其終效相等之合力則先分爲二力同方向或異方向如甲圖及乙圖如甲圖 AB 直線上其反對之方向有相等之二力如 AM 及 BN 此二力互相鈞合故剛體所受之作用雖有 P 與 Q 及 AM 與 BN 之

第九圖甲



四力然其終效與僅受 P 與 Q 二力之作用無異由此可知此四力之合力先求得 AP (卽 P 力) 及 AM 之合力爲 A$r$BQ(卽 Q 力) 及 BN 之合力爲 BS 次求得 A$r$ 及 BS 之

第九圖乙




合力卽此四力之合力又卽 P 與 Q 二力之合力而 A$r$ 及 BS 之合力依第七欵之法先求二力引長線之交點 O 將 A$r$ 及 BS 二力移於 O$r'$ 及 OS$'$ 復將此二力依原來之四力分解爲 O$m'$ OP$'$ OM$'$ OQ$'$ 之四力惟因 OM$'$ 及 O$n'$ 之二力其强

度相等而方向相反此二力互相鈞合僅餘 $Or'$ 及 $OS'$ 之二力此二力之合力爲 $OR'$ 卽 $OP'$ 與 $OQ'$ 二單力之和卽原力 P 及 Q 二力之合力也

次欲求此二平行力其合力之着力點如 OR 線或延長線與 AB 線相交點 C 之位置則準相似三角形之理 $\frac{AC}{OC}=\frac{Am}{AE}$　$\frac{BC}{OC}=\frac{Bn}{BQ}$ 惟因 $Am=Bn$　故 $\frac{AC}{BC}=\frac{BQ}{BP}=\frac{q}{p}$ 卽 $P\times AC=Q\times BC$　由此可知 C 點之位置爲 BC 與 AC 之比若 P 與 Q 之比而 OR 力之及於剛體於 O 點之作用與 C 點之作用其終效全無差異故凡剛體之 AB 二點有同一方向之二平行力 P 及 Q 則二力之合力卽 P 及 Q 二力之和而其着力點之位置與 AB 二點之距離恒與 PQ 二力爲反比例

如乙圖 PQ 二力在反對之方向依前法求得其合力 OR 爲 P 及 Q 二力之較（但 P 大於 Q）而着力 C 之位置在 AB 之延長線上其與 AB 二點

之距離依舊與 PQ 二力爲反比例

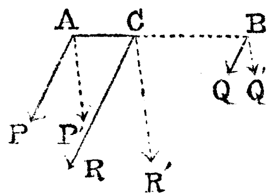
若 PQ 二力相等則 BS 與 Ar 平行而不能相交

若此二平行力相等而其方向相反則此二力爲偶力之作用（第十三款）

凡求無數平行力之組合於此等數力之內任意取其二力而各求其合力次於所得之合力內任意取其二合力而各求其二合力之合力依此遞求則無論如何之多數平行力可求其最後之一合力卽爲所得平行力之合力

平行力之中點　凡作用於剛體之 AB 二點其二平行 AP 及 BQ (卽 P 與 Q) 之合力其着力點在 C 點之位置而與 A B 二點之距離恒與

第十圖

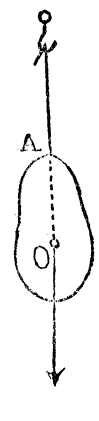


PQ爲反比例則此C點爲平行力之中點今試於C點依PQ二力之合力CR於相反之方向受相等力之作用則與CR互相鈞合卽與PQ二力互相鈞合恰如不受此二力之作用則剛體毫無變化如欲求與PQ二力相等但異其方向之二平行力如AP′與BQ′則其合力依舊爲PQ二力之和而其着力點仍在於C點之位置而與AB二點之距離恒與PQ二力爲反比例依理推之可知凡二平行力之强度與其着力點不變雖其方向無論如何變化而其合力之强度恒相等且其中點之位置常不變

凡欲求無數平行力之中點先於此數等力之力任意求其二力之中點及其合力復於所得合力之內任意求其二合力之中點及其合力依次遞求則可得最後之中點及其最後之合力卽爲無數平行力之中點及無數平行力之合力

第十款　重心　凡物體之重悉因物體之構成各質點爲地球所引之力所集合而此等力之方向常垂直而互爲平行故可知物體之重力爲數多平行力之一例惟此等數多平行力其合力之着力點恒有一定此物體無論其或爲竪立或爲倒置或爲橫臥其着力點之位置不變卽此重力之中點謂之重心例如同一金屬所製之球體其重心卽幾何學所言球之中心故凡物體之重心卽第一篇第四十三款所言質量之中心也

第十一圖



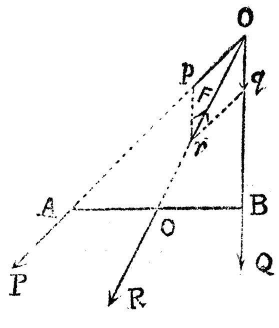

凡地球之吸引物體其終效悉如各質點集其重心而受引力之作用如圖有物體自其 A 點以絲懸之則其重心 C 必在 A 點之垂直線上因重力之及於物體恰如引其中心 C 之一點也若以絲懸其中點 C 則物體無論如何

變易恒穩定而不傾側

問題

十二　有細長槓杆長十糎其一端有十五之力與槓杆成直角其一端有 $10\sqrt{2}$ 之力與槓杆成一百三十五度角今欲於槓杆之一處懸一絲恰與此二力相當其絲懸處當在何點幷懸絲有幾何之力試作圖明之

第十二圖



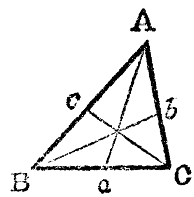

解　如圖 AB 爲杆槓其一力 BQ 爲一十又其一力 AP 爲 $10\sqrt{2}$ 試引長 BQ 及 AP 二線相會於O點作 OP$r$Q 平行四邊形令

OQ＝BQ　OP＝AP

次從O點引OrR線則Or爲OP及OQ二力之合力卽AP及BQ二力之合力試從OR與AB相會之點C令與OR相等而取CF線則CF爲所求之力與AP及BQ二力之合力互相釣合

十三　有等厚鐵質三角形之平板試求其中心之位置

第十三圖




解　凡物質一樣而等厚之三角板其重心在三中線之交點今先取三中線中之任一線Aa視之因此線分BC邊爲二等分因而三角形之面積亦平分爲二等分故可知其重心在Aa線上依同理而推

則重心又在其餘之 $Bb$ 線及 $Cc$ 線上故可知三角板之重心必在其交點

十四　凡物體幾何學之中心即其重心否

解　凡物體爲同樣物質則其形之幾何學之中心即其重心例如三角形之中心球或圓之中心是也若物體非同樣之物質即其密度不等則重心不能與形之中心相合

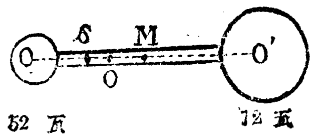
十五　有半徑一糎重五十二瓦之金屬球與半徑三糎重十二瓦之木球附於圓柱形棒之兩端長十糎直徑半糎重十二瓦試求鈴狀物中心之位置

答　重心在離棒之中央點僅 $2\frac{11}{19}$ 糎　而近金屬球之處

解　先求得二球與棒之各重心次求作用此三重心之重力合成之中心即得(見本篇第九款)因金屬球之重心在其中心其所受之重力爲五

十二瓦木球之重心即其中心其所受之重力爲一十二瓦而兩中心之距離 $CC'$ 爲金屬球

第十四圖




之半徑與木球之半徑及棒長之和即 $1+12+3=16$ 糎 惟因 C 點之五十二瓦與 C′ 點之十二瓦此二平行力之中心在 $CC'$ 線上與二力成反比例之 S 點即 $CS : C'S = 12 : 52$ $CS = 16 \times \frac{12}{12+52} = 3$ 糎

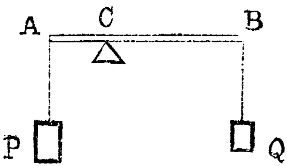
次求棒之中心在其中央點 M 其所受之重力爲一十二瓦又 MS 之距離爲 $CM - CS = \left(1 + \frac{10}{2}\right) - 3 = 3$ 糎 而 M 點之重力爲一十二瓦 S 點之重力爲六十四瓦 即 $12+52=64$ 此二力之中心在 SM 線上與二力爲反比例之 O 點即全力之重心由

此可得 $MO=SM\frac{64}{64+12}=3\frac{64}{76}=2\frac{10}{19}$糎 故可知全力之重心離棒之中點 M 僅 $2\frac{10}{19}$糎 而近金屬球之處

## 第四章 力之能率（回轉偶力 槓杆 天秤 斤量 滑車 軸車 轆轤）

第十一款 力之能率 如圖有 A B 槓杆於支點 C 之左端 A 懸一分銅 P 則槓杆之左端下重於支點之右端 B 懸一分銅 Q 則槓杆之右端下垂若任擇分銅 P 及 Q 之重與從支點 C 至兩端之距離 AC 及 BC 爲反比例而懸於槓杆之兩端則槓杆平準此吾人經驗所已知也而 P 與 AC 之相乘積又 Q 與 BC 之相乘積稱爲 P 與 Q 對 C 點之

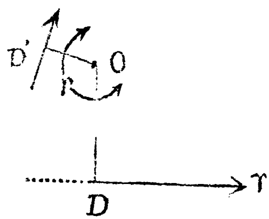
第 十 五 圖



能率

凡對於一定點之作用可以能率表之如圖 O 爲定點 F 爲力試從定點 O 向力線 DF 下一垂線則 F 力對於 O 點之能率爲 F 力與其垂線之長之相乘積此垂線謂之能率柄

第十六圖



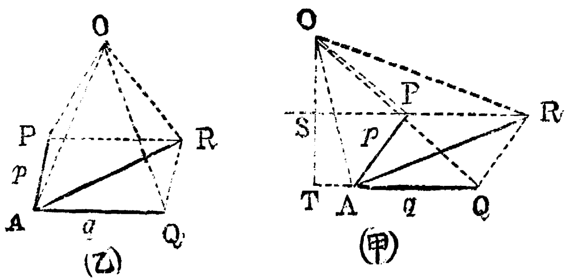

今試對於同一點有多數之能率則以能力柄向他方而旋轉之但其能率因方向之不同而分正負符號其關於能率必要之定律略舉於下

凡數力施於一物體其各力對於任意點之能率之代數和必等於此等數力之合力對於同一點之能率但此數力須在同一平面內

今先證 PQ 二力其作用施於物體有同一之着力

第十七圖

甲　　　乙




點如甲及乙圖 P 力爲 APQ 力爲 AQ 二力之合力爲 AR 因前言力之能率爲力與垂線之相乘積卽 AP 之能率爲 AP 與 OD 之相乘積但 OD 爲從 O 點向 AP 線之垂線故可以 OAP 三角形面積之二倍顯之依同理而 AQ 之能率可以 OAQ 三角形面積之二倍顯之 AR 之能率可以 OAR 三角形面積之二倍顯之惟 OAP 三角形面積及 O

AQ 三角形面積之代數和已知其等於 OAR 三角形之面積故可知 AP 及 AQ 二能率之和必等於 AR 之能率又因 OAQ 三角形之高 OT 必等於 OPR 三角形之高 OS 與 APR 三角形之高 ST 之和故 OAQ 三角形之面積必等於 OPR 三角形面積與 APR 三角形面積之和由此可知 OAQ 三角形面積與 OAP三角形面積之和必等於 OPR 三角形喈 APR 三角形與 CAP 三角形三面積之和 (如甲圖) 卽等於 OAR 三角形之面積 又 OAQ 三角形面積與 OAP 三角形面積之較必等於 OPR 三角形喈 APR 三角形之面積與 OAP 三角形面積之較(如乙圖)卽等於 OAR 三角形之面積

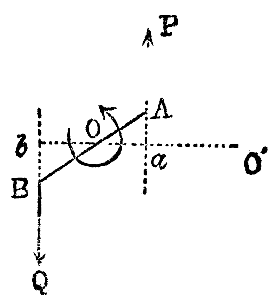
如 PQ 二力其作用及於物體非同一之着力點欲證明上之定理先求其二力線 (或延長線) 之交點將其二力之着力點移於交點可依前論證之

凡求數多力之能率先於此等數力之內任意求其二力之能率和等於各合力之能率復於此等數合力之力任意求其二合力之能率和等於此二合力之合力之能率依此遞求則得最後一合力之能率即爲數多力之能力

第十二款　物體之回旋如　第十一款之圖 AB俱爲槓杆以支點C 爲中心而分銅 P 向槓杆之左方而轉分銅 Q 向槓杆之右方而轉今兩分銅俱懸於槓杆則依吾人之實驗不關分銅之大小如何恒向能率較大之方而轉如兩能率相等則各分銅與各能率柄之相乘積相等而槓杆平準不生迴旋即此可知能率對於剛體之關係即所以測物體迴旋力之大小也故力無論如何小而能率柄甚長則其能率却大於力大而能率柄甚短之能率由此可知物體之迴旋恒向能率較大之方而轉如數力之能率之代數和爲零則能率互相鈞合而物體不生迴旋

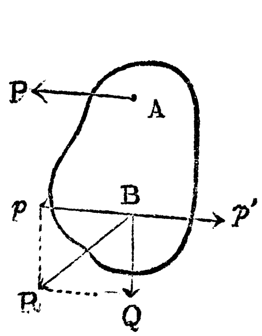
第十三款　偶力　凡强度相等而互相平行之二力但其方面相反不能歸於合力(第九款)此二力稱爲偶力例如以鑰匙捲時錶之法條則兩手指之力爲偶力以轆轤取船上之錨則轆轤兩側持柄之人爲偶力二指或兩掌之間搓轉獨樂之軸其二指及兩掌之搓力爲偶力凡物體受偶力之作用必生回旋因偶力之二力其對於任意點之能率和決不能等於零故也如圖AP與BQ爲偶力其對於任一點O′之能率爲AP及O′a之相乘積與BQ及O′b之相乘積惟因AP與BQ相等而O′a與O′b不等故二力之能率不等卽能率之

第十八圖



代數和決不能等於零若取 AB 之中點 O 則 $Oa$ 與 $Ob$ 相等故 AP 及 $Oa$ 之相乘積必等於 BQ 及 $Ob$ 之相乘積即二力之能率相等但此二力之能率對於 O 點其能率柄相等而能率之代數和爲各能率之二倍即此爲偶力最大之回旋故可偶力之能率和決不能等於零也但所稱偶力之能率爲偶力二力間之距離(如 $ab$)與能力之强度之相乘積即 AP 及 $ab$ 之相乘積或 BQ 及 $ab$ 之相乘積俱謂之偶力之能率

第十九圖




第十四款　不同在平面上二力之組合

凡二力之及於剛體其着力點不同而二力之作用不同在一平面上如圖有任意 AB 剛體於 A

點有 AP 之作用於 B 點有BQ 之作用則此二力之合力終不能求今試從 B 點引與 AP 相等而互爲平行之二力如 BP 及 B P′則此物體雖可視爲有 AP BQ BP BP′ 四力之作用然其終效與僅有 AP 及 BQ 二力之作用無異因 AP 與 BP′ 可作爲一對之偶力 BQ 與 BP 可作爲單一之合力 BR 故 AP 與 BQ 之二力但能作爲一對之偶力與單一之合力組合而成

問題

十六　二個平行力對於一定點試求其能率之和

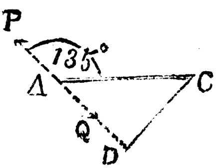
解　凡數力對於一點其能力之和等於此數力之合力對於同點之能率(第十一款)今欲知二平行力之能率和先依第九款求二力之合率次求其合率之能率即得

十七　凡數力互相鈞合則各力對於一定點其能率之和爲零試證之

解　凡數力對於任意之一定點其能率之和常等於其合力之對於同點之能率今數力互相鈞合則合力爲零故能率之和亦爲零

十八　有長五尺之槓桿以其一端爲支點而於他端繫之以繩與槓桿成一百三十五度之角今欲以八貫目之力引繩而起槓桿則此力對於支點之能率幾何

第 二 十 圖




解　如圖 AC 爲槓桿其長爲五尺支點 C 在其一端而於其他端 A 引繩有八貫目之力如 AP 其 CAP 角爲一百三十五度今欲求其能率先從支點 C 向 PA 延長線上下一垂線 CD　則 $AP \times CD$　爲此力對於支點 C 之能率惟　$AP=8$貫目　$CD=$

$AC \times 45$正弦$=5\frac{1}{\sqrt{2}}$尺 故得 $AP \times CD = 8\frac{5}{\sqrt{2}}$ $=28.28\cdots\cdots$

十九　如上題繩與槓桿成四十五度角則其力之對於支點之能率幾何

解　如上圖依前問題之同法　$AQ=8$貫目角$QAC=45$則可知對於C點之能率$AQ \times CD$ $=8\frac{5}{\sqrt{2}}=28.28\cdots\cdots$與前題同

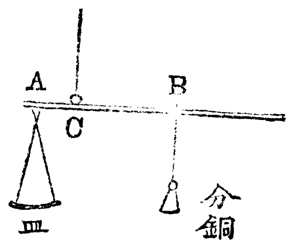
第十五款　槓桿　槓桿爲最堅牢之棒常以木與鐵等爲之槓桿必有一支點即可以定此點爲中心而左右旋轉者也又別有重點與力點即凡載重物或懸重物之一點謂之重點用力而使槓桿揚起或舉其重物謂之力點而重物與力之關係爲重點與力點對於支點之關係

第十六款　天秤亦槓桿之一種特其支點在天秤之正中其兩端一爲載重物之器一爲載分銅之器而物體(幷器)及分銅(幷器)之重力對於支點如

能率相等則天秤平準因二能率柄相等故天秤平準之時可知分銅與物體之重量相等即分銅與物體之質量相等

第十七款 斤量及日本秤 斤量及日本秤亦爲槓杆之一種特其支點與懸重物之重點其距離常爲一定如 AC 而分銅則於槓杆上時常移動或近或遠須令其歸於平準 斤量則分銅常爲一定故欲求物體之重可視分銅在槓杆上所移動之距離如CB

第二十一圖




問題

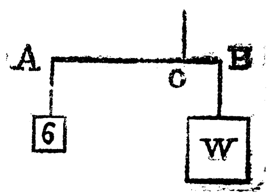
二十 有長五尺之眞直槓杆於其一端懸六貫目

之分銅復於相離四尺之處以繩繫槓桿如欲令槓桿平準則彼端須懸幾貫目之物體（但槓桿身重略去不計）

答 二十四貫

解 如圖 AB 爲槓桿其長五尺而 AC 爲四尺則 BC 爲一尺命 B 端所懸之重物體爲 W....

第二十二圖




惟題言欲令槓桿平準則兩者之能率須等故得 $W \times 1 = 6 \times 4 = 24$ 貫

二十一 有長六尺之天秤棒其兩端懸四貫目與六貫目之重物今欲以肩承之令其平準則棒當肩之處須在何點

答　離懸四貫目之端三尺六寸之處

解　因棒當肩之處亦如天秤其兩端之力以肩爲支點欲令兩端平準則須擇其兩能率相等之處命離四貫目之端之尺數爲 $x$ 則離六貫目之端之尺數爲 $6-x$ 故得 $4\times x=6\times(6-x)$

卽 $x=3.6$尺

二十二　如上題則肩所受之重幾何

答　十貫

解　因肩所受之重爲兩重物之重量之和卽 $4+6=10$貫

二十三　有天秤棒懸二十四貫之重物令二人以肩承之其二人之肩相距五尺而重物離後人之肩爲三尺問二人之肩所受之重

答　前人所受之重一十四貫四百刄　後人所受之重九貫六百刄

解　因兩人之肩所受之重與其從各人之肩

至懸重物之距離為反比例故得 $24\times\frac{3}{5}=14.4$
貫 為前人之肩所受之重

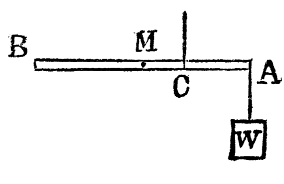
$24\times\frac{2}{5}=9.6$貫 為後人之肩所受之重

二十四 有長三尺之棒其棒身通體均匀計重五百匁復於相距一尺之處以繩繫棒如欲令此棒平準則此端須懸若干重之分銅

答 須懸二百五十匁之分銅

解 如圖 AB 為棒長其棒身之大通體均匀則其重心在其中央點 M 其所受之重力為五百匁今其支點C在離 A 端一尺之處則 MC 為五寸故於A端懸一W之分銅欲令此棒平準則可知 $500\times0.5=W\times1$ 故得 $W=250$匁

第二十三圖

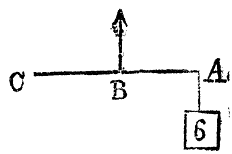


二十五　有長六尺之棒以一端爲支點於他端懸六貫之重物試以手持棒之中央而揚起之問需力幾何

答　須十二貫目之力

解　如圖 AE 爲棒其長爲六尺試於棒之中點 B 持之則 CB 爲三尺命所需之力爲 F 則準能率相等之理故得

第二十四圖




$F \times 3 = 6 \times 6$ 卽 $F = 12$貫

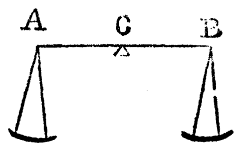
二十六　天秤之搆造稍不正而兩臂之長少異試以物體載左皿而權之其重爲一百二十五次移物體於右皿而權之其重爲一百二十一瓦問此物體之眞重幾何又兩臂之長之比若何

答　物體之眞重爲一百二十五五其兩臂之比

如一與一·〇〇四一

解　如圖　命物體之眞質量爲 M 試置於A端之皿而權之其重爲一百二十五故於 B端之皿置一百二十五之分銅而天秤平準 則

第二十五圖




$M\times AC=120\times BC\cdots\cdots$(一)　如移置於 B 端之皿而權之則其重爲一百二十一瓦故得

$121\times AC=M\times BC\cdots\cdots$(二)　準(一)(二)　兩式可知　$121:M=M:120$　郎　$M^2=121\times120$　即

$M=\sqrt{121\times120}=120.5$瓦　但凡$\sqrt{A\times B}$　式中如 A 與 B 之差甚小則可視爲　$\sqrt{A\times B}=\frac{A+B}{2}$

亦無大差　又準　(一)(二)兩式$\frac{BC\times120}{AC\times121}=\frac{M\times AC}{M\times BC}$

故得　$\left(\frac{BC}{AC}\right)^2=\frac{121}{120}$ 即 $\frac{BC}{AC}=\sqrt{\frac{121}{120}}=1.0041$　又凡

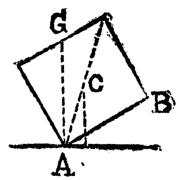
$\sqrt{\frac{B}{A}}$ 式中如 A 與 B 之差甚小則可視 $\sqrt{\frac{B}{A}}=$

$\frac{A+B}{2A}$ 亦無大差例如 $\frac{121+120}{2\times 120}=1\cdot 0041$ 是也

二十七　有木製立方體置於平板上徐徐將板傾側令立方體傾倒問板面須與水平面成若干度

解　如圖有物質一樣之立方體其重心在立方形之幾何學中心C今試以 A 緣爲軸從右向左傾側之則 AC 線出於垂直 AG 線之左而立體向左方而倒故可知從靜止之位置而傾側之至四十五度則立體倒於左方

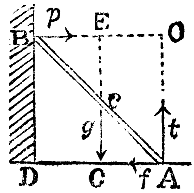
第二十六圖




二十八　倚垂直之屋壁置一梯子與水平面成四十五度角而床與梯子之下端其間之摩擦力等於梯重之半試證之

解　如圖 AD 爲梯子其 BAD 角爲四十五度今就其作用於梯子之力而觀之第一爲梯子之

第二十七圖



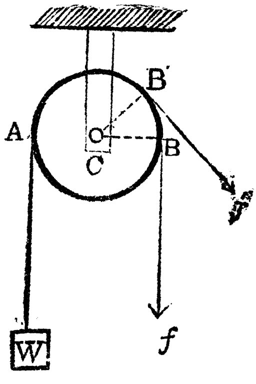

重量作用於重心C(即梯子之中央)在垂直$g$之方向又床之摩擦力$f$在床之方向AB(即水平線)又床之支持梯子之力爲t其方向垂直向上又壁以P之力與梯子之例於左方相抵抗惟$gftp$之四力互相鈞合則梯子靜止不動故此四力之對於任意點其能率之和爲零今欲求$g$與$f$之二力則因$t$與$p$之對於O點須其能率柄爲零故t與$p$之能率必知爲零即$t\times O=O$　$P\times O=O$　而$g$與$f$之對於O點其能率爲

$g\times OE$及$f\times OA$惟梯子靜止不動則其能率之和須爲零即可知$g\times OE+f\times OA=O$惟$OA=2OE$故$g\times OE=-f\times 2OE$即$f=\frac{g}{2}$故可

知床與梯子下端之摩擦力必等於梯子重量之半

第十八款　滑車　滑車有動滑車及定滑車之二種亦不過槓桿之變形

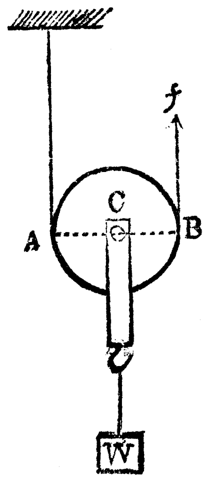
第二十八圖




今設有定軸 C 之定滑車 W 爲重物 $f$ 爲力以繩貫滑車之陷道內而曳之而繩與車輪相離之處爲 A 點及 B 點則所懸重物之能率爲重量 W 與 AC 之相乘積向車之左方而生運動所用力之能率爲 $f$ 力與 BC 之相乘積向車之右方而生運動惟 AC 與 BC 相等如 $f$ 力與 W 重物相等則互相鈞合而穩定故欲以定滑車而舉重物必所用之力較

大於所懸之重物因所用之力內其與重物相等之力互相鈞合必須有餘力加之而後能舉重物使之上升若滑車絕無摩擦則所加之餘力雖小亦能起重但餘力較小則重物之速度亦小而所需之時間較長故可知定滑車不能省力

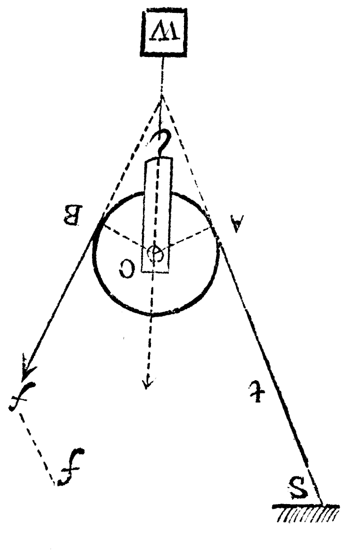
第二十九圖




今設有動滑車其重點移於車軸而支點在輪周如上圖其繩與重力之方向 CW 平行則所懸重物之能率爲重量 W 與 AC 之相乘積所用力之能率爲 $f$ 力與 AB 之相乘積惟 AB 爲 AB 之二倍.則所用之 $f$ 力僅需所懸物體重量之半即可

互相鈞合即 $f=\frac{W}{2}$ 故可知動物車較能省力

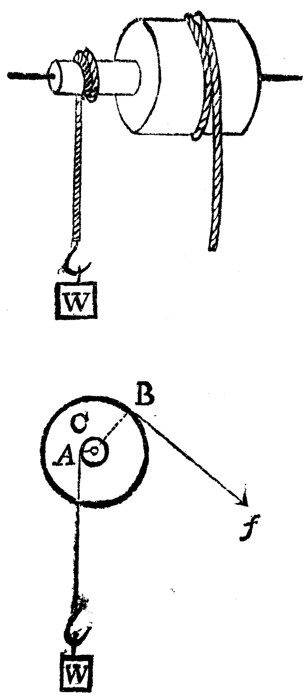
第 三 十 圖




如繩與重力之方向不平行而成 $\theta$ 角如上圖欲求其重量與力之關係則繩之 SA 部之張力以 t 顯之其繩之 B $f$ 部之張力爲 $f$ 此二力恒相等今欲此三力互相鈞合則 $f$ 與 t 之合力必等於 W 力之反向試先於 WC 上求 $f$ 與 t 之合力則 $f\times{}^{\theta}$ 餘弦 $+t^{\theta}$ 餘弦 $=2f^{\theta}$ 餘弦 故 $W=2f^{\theta}$ 餘弦 即 $f=\frac{W}{2\theta\text{餘弦}}$ 若以滑車之重量 $w$

併入算之 則 $f=\frac{W+w}{2\theta\text{餘弦}}$ 即可知此 $f$ 力恰與物體之重量相鈞合故欲以繩曳起重物須更加少許之力即得

第三十一圖

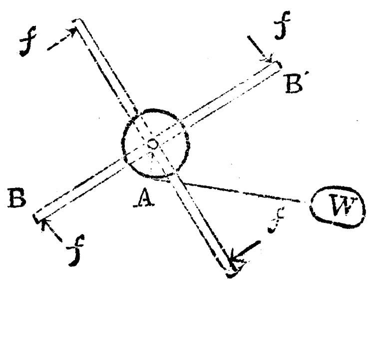



第十九款 軸車 軸車有同一之車軸而以大小二車輪緊相接觸而旋轉之也如圖小輪之周爲縣重物之索大輪之周爲手曳之索欲知重量與力之關係則如 AC

及 BC 爲大小二車輪之半徑故所懸重物之能率爲重量 W 與 AC 之相乘積所用力之能率爲 $f$ 力與 BC 之相乘積如兩能率相等則 $f$ 力與重量 W 即可互相鈞合故可知 $f$ 力與重量 W 之比若小輪半徑 AC 與大輪半徑 BC 之比

第二十款　轆轤　轆轤即用數本之槓杆以代軸車之大輪也

第三十二圖




如圖以數人持槓杆柄而旋轉之其用力處常不止一個欲知重量與力之關係其各人之力爲 $f$ 則重物之能率爲重量 W 與 AC 之相乘積各人所用

之力爲 $f$ 力與 BC 之相乘積若其人數爲 N 則可知重物之能率爲各人所用之能率之N 倍

問題

二十九　有一個定滑車引五貫目之物體至少必需六貫五百匁問引繩時滑車之摩擦力幾何

答　滑車軸之摩擦力一貫五百匁

解　因凡定滑車之引物體上行雖滑車絕無摩擦亦必需與重物相等之力惟題言引五貫之物體上行至少須六貫五百匁之力則可知因滑車摩擦所費之力爲 $6.5-5=1.5$貫

三十　有一個動滑車懸十二貫目之重物試以繩依垂直方向而引之而滑車之重爲六百目其摩擦力爲一貫有百匁之比問引繩之力須幾何

答　引繩之力至少須七貫五百六十匁

解　因重物之重量爲一十二貫目動滑車之重量爲〇·六貫目則其全重量爲一十二·六貫目

依本篇十八款可知支此全重量之力爲 $\frac{12.6}{2}=$ 6.3貫 此外因車軸之摩擦每一貫之重須費一百匁之力故一十二貫六之重須費 $12.6\times0.1=1.26$貫 之力故可知引繩之力至少必須七貫五百六十匁即 $6.3+1.26=7.56$ 之力

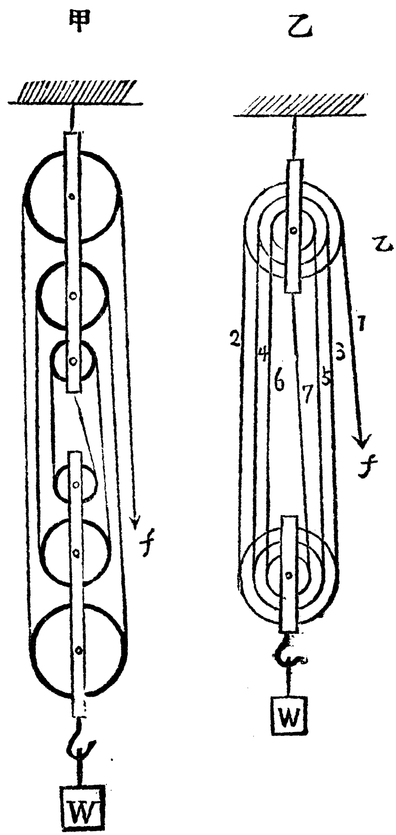
三十一 如左圖甲與乙一組定滑車與一組動滑車欲舉重物 W 問引繩之力須幾何(但動滑車之重量略去不算) 又動滑車之全重量爲 $w$ 則引繩之力須幾何

答 命引繩之力爲 $f$ 如不計滑車之重量 則 $f=\frac{W}{6}$ 如動滑車之重量爲 $w$ 則 $f=\frac{W+w}{6}$

解 如前圖其繩之 1 部分向下方而引則此部分繩之張力等於 2 部分之張力而 2 部分張之力等於 3 部分之張力 3 部分之張力等於 4 部分之張力以下倣此惟各部分之張力相等故以 2 3 4 5 6 7 之六部分即能支持重物W故得 $6f$

$=W$ 即 $f=\frac{W}{6}$ 又動滑車之重量爲 $w$ 則 $6f=W+w$ 故 $f=\frac{W+w}{6}$ 準此可知動滑車之數有 N 個其全重爲 $w$ 則可知引繩之力爲 $f=\frac{W+w}{2N}$

第三十三圖

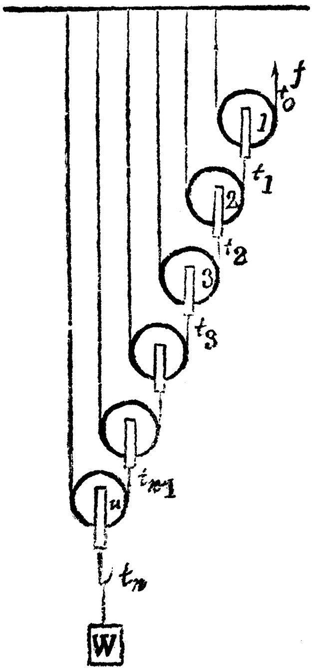



三十二　如左圖之裝置連絡一二三四....N 之 N

個動滑車而引重物 W 問引繩之 $f$ 力須幾何

解 命滑車一二三四⋯⋯N 之全重各爲 $w_1$ $w_2$ $w_3$ $w_4$⋯⋯$w_W$ 其繩之張力爲 t $t_1$ $t_2$ $t_3$ $t_4$⋯ $t_{m-1}$ 然則 $t_n$ 之張力必必等於 W 重物之重力 $t_{m-1}$ 之張力必等於 $t_n$ 之張力與 $w_n$ 滑車之重量之半依此遞推故得

第 三 十 四 圖




$t = W$

$$t_{n-1} = \frac{t_n + w_n}{2} = \frac{W + w_n}{2}$$

$$t_{n-2} = \frac{t_{n-1} + w_{n-1}}{2} = \frac{W + w_m}{2^2} + \frac{w_{m-1}}{2}$$

$$t_{n-3} = \frac{t_{n-2} + w_{p-2}}{2} = \frac{W + w_p}{2^3} + \frac{w_{p-1}}{2^2} + \frac{w_{m-2}}{2}$$

…………………………………………………………

$$t_1 = \frac{t_2 + w_2}{2} = \frac{W + w_n}{2^{p-1}} + \frac{w_{n-1}}{2^{p-2}} + \frac{w_{n-2}}{2^{p-3}} + \cdots + \frac{w_3}{2^2} + \frac{w_2}{2}$$

$$t_0 = \frac{t_1 + w_1}{2} = \frac{W + w_n}{2^n} + \frac{w_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{w_{n-2}}{2^{n-2}} + \cdots + \frac{w_3}{2^3} + \frac{w_2}{2^2} + \frac{w^1}{2} = f$$

以 $2^n$ 乘最後式之各項則得

$2^n f = W + w_n + 2w_{n-1} + 2^2 w_{n-2} + 2^3 w_{n-3} + \cdots + 2^{n-2} w_2 + 2_{n-1} w_1 \cdots$(甲)

如各動滑車之重量 $w$ 全相等則 $w_n = w_{y-1} = w_{y-2} = \cdots w_2 = w_1$ 故得 $2^n f = W + w(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) = W + w(2^n - 1) \cdots\cdots\cdots\cdots$(乙)

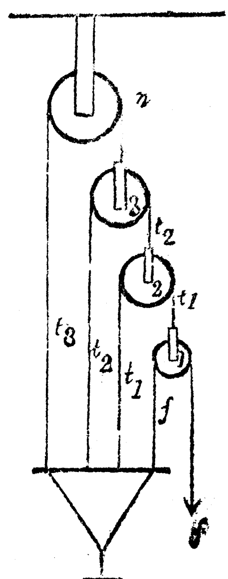
準甲乙二式俱可求得 $f$

三十三　依前問如動滑車之數有三個其重各五百匁今欲舉三十貫目之重物問引繩之 $f$ 力至少必需若干

解　依前問題乙之解式　$2^n f = W + w(2^n - 1)$

令滑車之數 $n$ 爲三其各滑車之重量 $w$ 爲〇.五貫目其所舉之重物W爲三十貫目則得　$f = \frac{30+0.5(2^3-1)}{2^3} = \frac{33.5}{8} =$
$= 4.1875$貫

第三十五圖




三十四　如左圖之裝置 $n$ 爲定滑車一二三爲動滑車而動滑車之重爲 $w_1\ w_2\ w_3$ 今欲懸重物 W 而

舉之間引繩之 $f$ 力須幾何

解　如此圖恰與前圖之裝置相反其動滑車之重爲 $w_1$ $w_2$ $w_3$ 其繩之張力爲 $t_1$ $t_2$ $t_3$ 及 $f$ 故得

$W=f+t_1+t_2+t_3$　惟因

$t_1=2f+w_1$

$t_2=2t_1+w_2=2^2f+2w_1+w_2$

$t_3=2t_2+w_3=2^3f+2^2w_1+2w_2+w_3$

故得 $W=f(1+2^2+3^2)+w_1(1+2+2^2)+w_2(1\times 2)+w_3$……………………(丙)

因之可求得 $f$

三十五. 以軸車捲錨軸之直徑爲八寸車之直徑爲四尺而錨重爲八十貫問貫車之繩須用幾人引之但水夫一人之力爲十五貫目又軸車之摩擦略去不算

解　因題言錨重爲八十貫而軸之半徑爲○·四寸車之半徑爲二尺命人力爲F故得

$80\times0.4=F\times2$ 即 $F=16$貫目　因貫車之繩至少須一十六貫之力今一人之力限制爲一十五貫故須二人之力

## 第五章　器械之利率

第二十一款　器械之利率　用器械時所費之力與所欲舉之重之力常不相等此二力之比謂之器械之利率例如有槓杆一具離支點四尺之處須費十貫目之力則離支點一尺處之重點其所生之力爲四十貫目故可知此槓杆之利率爲$\frac{40}{10}=4$

### 問題

三十六．一個動滑車之利率幾何

解　動滑車之重爲 $w$ 物體之重爲 W 其加於繩之力爲 $f$ 則 $f=\frac{W+w}{2}$ (第十八款)故可知動滑車之利率爲$\frac{W}{f}=\frac{2W}{W+w}$如滑車無重則 $w=0$ 故其利率爲$\frac{W}{f}=\frac{2W}{W}=2$

三十七　有重量 $w$ 動滑車之利率如何

解　與前題同法

三十八　與水平成 $\theta$ 角之斜面其利率如何

答　斜面之利率爲 $\frac{1}{\theta\text{正弦}}$ 但斜面與重物之間其摩擦不計

解　因與地平成 $\theta$ 角之斜面今有重物 W 欲沿斜面而上行其所需之力爲 $W\times\theta$正弦　故斜面之利率爲 $\frac{W}{W\times\theta\text{正弦}}=\frac{1}{\theta\text{正弦}}$

三十九　如問題三十二一組之動滑車其利率如何

解　依前問題三十二之解法則得 $f=\frac{W+w(2^n-1)}{2^n}$ 故所求之利率爲 $\frac{W}{f}=\frac{2^nW}{W+w(2^n-1)}$

# 第四篇　力學（第二）功用及能力

## 功用（功用　功用之單位　工程　馬力）

第一款　功用　凡施力於物體而使其運動若干之距離物理學通謂之功用例如人之曳車爲一功用以手持重物而舉於高處亦爲一功用但所成之功用非僅人能爲之即器械亦有之例如蒸滊機關有種々之工作則蒸滊機關所成之功用火藥發火而放射彈丸則火藥所成之功用在高處之物體受重力而下落則地球所成之功用也

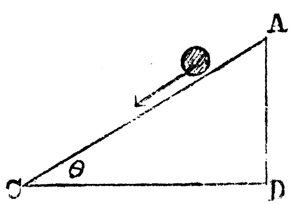
凡功用有難易亦有大小例如有五貫目之物體升高一尺之功用爲一貫目之物體升高一尺之功用之五倍即與五個一貫目之物體各升高一尺相等也又一貫目之物體升高十尺之功用爲一貫目之物體升高一尺之功用之十倍即一貫目之物體先升一尺次升一尺連續升至十回也因一貫目之物

體受地球重力之作用今欲用相反之力令其上升則所需之力爲一貫凡施一貫目之力於物體而使其動路之距離爲一尺此功用之量謂之一貫尺之功用故凡一貫目之物體與重力相反升高一尺之功用恰爲一貫尺即 W 貫目之物體升高 S 尺之功用恰爲 W×S 貫尺也

凡計功用之全量爲物體生運動所費之力 F 與受此力之作用而經過距離 S 之相乘積………即

功用＝F×S

第一圖




故凡力無論如何大其與物體之運動無直接相關之部分則其功用亦不相關涉例如有斜面與水平成 $\theta$ 角於其上置一物

體因受重力之作用欲沿斜面而滑下如上圖其物體斜降之力非物體重力 W 之全部僅有其 W×θ正弦 之部分而所餘之 W×θ餘弦 之部分爲物體壓斜面之力(見第三篇第五款)而與物體之斜降運動全不相關如此類 F =W×θ正弦其沿斜面而下降之距離爲 S 則可知功用之量 即功用=F×S=W×θ正弦 ×S 故凡計功用之量但就其全力之內與其能直接而生運動之分力計之而不能直接而生運動之分力全不相關凡施力於物體無論如何之强而物體不生運動即不能有功用例如以非常之强力抵於鐵壁而鐵壁不少動亦不少歪則可知此間無功用但力無論如何小其施於物體如歷時甚久而其作用可能有甚長之動路則其功用甚大

凡計功用之全量不關於時間之長短例如一貫目之物體一秒時可能昇高一尺或遲至數十年漸々

昇高亦至一尺則所成之功用相同

第二欵　功用之單位　尋常所用功用之單位有四種（一）舉一瓩之物體依重力相反之方向昇高至一米此功用之單位謂之一瓩米（二）舉一瓦之物體依重力相反之方向升高至一糎此功用之單位謂之一瓦糎（三）舉一磅之物體依重力相反之方向昇高至一呎此功用之單位謂之一呎磅（此單位爲英國制工學上所慣用）以上三種單位俱爲重力單位（四）以一達音之力施於物體而經一過糎之動路此功用之單位謂之一愛格此種單爲位絕對單位

附　一瓩米當一〇〇〇〇〇瓦糎一瓦糎當幾何愛格

因一瓦之力爲九百八十達音故一瓦糎當九百八十愛格

一呎磅當幾何瓩米

見問題四

第三款　工程　凡人或器械所成之功用其相等功用之成就有遲有速即凡動作者(人馬器械等)於單位時間所成功用之全量謂之工程例如蒸滊喞筒於一秒間可升百瓩之水量達五米之高處則其工程爲一秒有五百瓩米也而馬力則每秒有五百五十呎磅之功用所成之工程特稱之爲一馬力即一馬於一秒時所成功用之全量也一馬力殆當七十六瓩米(見問題一十四)

問題

一　有五瓩之重物升高至二百三十米其功用之全量如何

答　一千一百五十瓩米

解　因功用之單位爲 1瓩×1米＝1瓩米　故 $5\times230=1150$瓩米

二　有五瓩之重物從二百三十米之高處因受重

力而下墜問此物體受重力之功用幾何

答　與前題同

解　因重力常以五瓩之力作用於物體而重物受此重力之作用可下墜二百三十米則可知重力作用於重物之功用爲　$5\times230=1150$瓩米

三　一瓩米當若干爱格

答　一瓩米當九千八百萬爱格

解　因一瓩爲一千瓦一米爲一百糎故　1瓩米$=1000\times100=10^5$瓦糎　惟一瓦之力當九百八十達音　故$10^5$瓦糎$=10^5\times980=10^7\times9.8$爱格

四　一呎磅當若干瓩米

答　〇·一三八二五四瓩米

解　因一呎爲　〇·三零四八米一磅當〇·四五三九九瓩故得　1呎磅$=0{\cdot}3048\times0{\cdot}45359=$0.138254瓩米

五　一呎磅當幾何爱格

答　一呎磅約當一百三十五萬四千八百九十愛格

解　依問題四之解法知一呎磅當　〇·一三八二五四瓩米又依問題三之解法知一瓩米當九百八十萬愛格故可知

1呎磅$=0.138254\times9800000=1354890$愛格

六　彈丸離砲口而進行一千二百米其功用如何但空氣之抵抗畧去不算

答　無功用

解　彈丸離砲口之後惟循其砲身中所得速度之慣性而飛行故其飛行時除壓排空氣之外別無功用若空氣視爲毫無抵抗則彈丸之飛行無論若干遠之距離全無功用

七　火藥爆發而壓彈丸之力最初最强因彈丸漸次走銃身內而近銃口其壓力漸減今彈丸在銃身內所受之壓力平均爲六十磅都間火藥向彈

丸所成之功用幾何但銃身之長爲三呎

答　一百八十呎磅

解　因彈丸在銃身中所受之壓力平均爲六十磅都而銃身之長爲三呎故其功用之全量爲

$3 \times 60 = 180$呎磅

八　於水平臺上有物體滑下此物體之運動雖與重力無關然因物體之重量則物體與臺面間之摩擦力與物體欲滑下之力相抗今物體與臺面間之摩擦係數爲〇・三五而物體之重爲一十二貫此物體滑下二十尺則其功用之量幾何

答　八十二貫尺

解　因全摩擦力爲$0.35 \times 12 = 4.2$貫目　惟物體與此力相抗而動二十尺故其功用之量爲

$4.2 \times 20 = 82$貫尺

九　如第一款之圖有W瓦之物體沿斜面AC而引之上行則其功用之量幾何但斜面與物體

問之摩擦力略去不算

解 因重力及於 W 重量之物體而令其沿斜面而下行其力爲 $W\times\frac{AD}{AC}$ 今沿此斜面而與此力相抗從 C 處引之使上行至 A 則其功用之量準公式 功用 $=F\times S$ 故得 功用 $=W\frac{AD}{AC}\times AC=W\times AD$ 準此可知沿斜面而引重物上行之功用(視爲無摩擦)正與斜面之高依垂直而上行之功用相等

十 如上問沿斜面而上行之功用與斜面之高 AD 依垂直而上行之功用相等試證之

解 如前題之解法

十一 一馬力當一分時有若干呎磅之工程

答 一馬力當每分時有三萬三千呎磅

解 因一馬力於一秒間有五百五十呎磅之功用(第三款)準此故得一分時(即六十秒)有 $550\times60=33000$ 呎磅 之功用

十二　以轆轤捲錨而上需時三分此錨在水中之重爲六十貫目問工程若何（貫尺分爲單位）但繫錨之索高八十尺

答　一分時一千六百貫尺

解　因功用之全量爲 $60\times80=4800$貫尺 惟此功用之全量需三分時可成故每分時之功用爲 $4800\div3=1600$貫尺

十三　從六十呎之深井費蒸滊機關之全力吸水而上十時間可吸上一千八百噸之水問此機關之有功馬力幾何但一噸爲二千二百四十磅

答　有功馬力當十二馬力又五十五分之十二

解　因此機關於十時間而成之全功用爲 $1800\times2240\times60$呎磅　故得 $(1800\times2240\times60)\div(10\times60\times60)$　爲一秒時之功用惟因一馬力爲五百五十呎磅故得 $(1800\times2240\times60)\div(550\times10\times60\times60)=12\frac{12}{55}$馬力

十四　一馬力當每秒幾貫尺又當每秒幾瓩米

答　一馬力一秒時當六十六貫尺九一四　又當七十六瓩米零四

解　因一馬力一秒時爲五百五十呎磅而一呎當一·〇〇五八尺一磅當〇·一二零九六貫故得　$1馬力=550\times1.0058\times0.12096$　即可知 $1馬力=66.914$貫尺　又一呎當〇·三零四八米一磅當〇·四五三五九瓩故得　$1馬力=550\times0.3048\times0.45359=76.04$瓩米

十五　農夫以鍬掘土一分時有四千七百呎磅之功用問一馬力當此工作之幾倍

答　凡七八力

解　因農夫掘土之工作於一分時有四千七百呎磅之功用惟一馬力於一秒時（即六十分）有五百五十呎磅之功用故可知兩功用之比 $(60\times550)\div4700=7.02\cdots\cdots$

十六　有 M 及 M′ 二質量之物體於相等時間受等力之作用試求二質量之運動量之比幷求二質量功用之量之比

(一)　兩質量所生之運動量相等

解　依牛董氏運動第二則凡運動量之變化爲其力與其作用之時間之相乘積爲正比例故可知以相等之力於同一時間之作用則其所生之運動量相等(見第一篇二十九款)

二　兩質量功用之比如其兩質量之反比

解　先求 M 及 M′ 二質量於 t 秒間受相等力 F 之作用其所經過之距離命爲 S 及 S′ 因 M 質量之加速度爲 $a=\frac{F}{M}$ M' 質量之加速度爲 $a=\frac{F}{M'}$ 故可知於 t 秒時受相等力 F 之作用其所經過之距離爲$S=\frac{1}{2}at^2$及$S'=\frac{1}{2}v't^2$ 命二質量功用之全量爲 W 及 W′ 故得 $W=F\times S=F\times\frac{1}{2}at^2=F\times\frac{1}{2}\times\frac{F}{M}t^2=\frac{F^2\times t^2}{2M}$ 及

$$W' = F \times S' = F \times \frac{1}{2}a't^2 = F \times \frac{1}{2} \times \frac{F}{M'}t^2 = \frac{F^2 \times t^2}{2M'}$$

故得 $W : W' = \frac{1}{M} : \frac{1}{M'}$ 即 $W : W' = M' : M$

即可知二質量功用之比如其二質量之反比

十七 彈丸穿堡壁三十糎而此時壁之抵抗力平均爲五百瓩則此彈丸所成功用之量幾何

答 一百五十瓩米

解 準功用之單位故得 $500 \times 0{\cdot}3 = 150$瓩米

十八 長八糎之護謨絲延長至十糎而護謨之抵抗力(張力)平均爲五十五達音問手所成功用之量幾何

答 一百一十愛格

解 因手之延長護謨絲於二糎(即$10-8=2$)之間有五十五達音力之作用故其功用之量爲$55 \times 2 = 110$愛格

## 能力 (運動能力 還原能力)

第四欵 能成功用之能力 凡動作者所成之功

用其所以成功用之本量謂之能力例如熱有運轉機關之能力飛行之彈丸有轟城堡碎鐵艦之能力流水有旋轉水車之能力故凡能力之量悉與功用相因應即可以物體所能成之功用計之

第五款　運動能力　凡運動能力如彈丸之轟城堡爲其有此猛烈之性質而生此急激之運動即其能成此功用之能力也今欲求物體之運動與其能成此功用之能力之關係試以若干質量之物體依垂直之方向向上拋擲其物體之初速命爲$V_0$因受重力之作用僅能達於一定之高命爲 S 如欲計此時物體所成之功用其質量爲 M 重力爲 $Mg$ 則舉此M質量之物體必需與 $Mg$ 相抗之達音力因此而知物體所成功用之量爲昇上之距離與所經過之距離之相乘積即　功用$=MgS$　如欲計物體所達之高 S 則依第二篇第三款物體上擲之公式即可求得　$V_0^2=2gS$　即　$S=\frac{V_0^2}{2g}$　故得

$MgS=Mg\frac{V_0^2}{2g}=\frac{MV_0^2}{2}$ 由此可知 M 質量之物體其進行之速度為 $V_0$ 則其能成此功用之能力為 $\frac{1}{2}MV_0^2$ 即此為運動能力之量

還原能力　凡還原能力即物體之靜止者皆具有能成功用之能力也例如在高處之水今雖蓄於池內一旦任其洩出則可迴轉水車此可知高處之靜水亦具有能成功用之能力也發射者當彎弓不發時亦具有此種能力放之則箭飛去矣又水之位置愈高則其洩出之功用愈大弓之張愈緊則箭之飛去愈疾蓋水之能力因水與地球間位置之關係弓之能力因弦與弓身間位置之關係故亦謂之位置能力今欲計此種能力之量試以 M 瓦之物體在 S 米之高處垂直落下因受重力之作用則物體之下落必有 $Mg$ 達音之力其所經過之距離命為 S 因此可知功用之量為墜下之力與所經過之距離之相乘積即 功用 $=MgS$ 由此可知物體在高處

其質量爲 M 而受地球之重力其離地球表面之高爲 S 則其能成功用之能力爲 $MgS$ 愛格 即此爲還原能力之量

第六欵 能力不滅 如前欵所言物體在 S 高處其質量爲 M 瓦可能有 $MgS$ 愛格之還原能力然此物體之還原能力果從何處而來因凡物體之在高處常與重力相反抗而此處之物體不能無因而上所以使之上升者悉由於人力或器械以及天然之作用故欲以 M 瓦之物體僅昇至 S 之高則必需其與 $Mg$ 達音相抗之力而後能昇於此處故其功用之量爲 $MgS$ 愛格即凡外力施於物體之功用爲此物體所受之能力故此物體離地球表面而上昇至 S 高處其所以靜置於 S 高處即此物體具有還原能力也次凡物體落下而復至地上果能常有此 $MgS$ 之能力或此能力全行消滅其理可證明之即凡物體從 S 高處落下其所有之還原能力

可知其變爲相等之運動能力因此物體從 S 高處落下則其所生之速度 $V=\sqrt{2gS}$ 故其運動能力爲 $\frac{1}{2}MV^2$ 與原來之還原能力 $MgS$ 相等因 $\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}M(\sqrt{2gS})^2=MgS$ 故也惟此所得之運動能力當物體直達地面則變爲穿地之功用故物體全行靜止若依槓杆之裝置可能有再使 M 瓦之物體上昇至 S 高之功用要之物體當在 S 高處時其所有之還原能力 $MgS$ 恒因外物而得（即人力器械力以及天然作用）決非此物體所自有而生此能力之外物亦非其自能爲之其本原恒取給於他物又力體之還原能力 $MgS$ 當物體至地面時變爲運動能力及與地相衝突而此之運動能力變爲他種功用如熱及音響以及他種物質可使其他 M 瓦之物體令其上昇至 S 高此等種種之現象雖不一而足然能力之量毫不消滅且非獨還原及運動之能力如斯而已凡熱光電氣等之能力其

間亦互有變遷例如熱變爲電氣與光與物體之運動等皆此能力之現象有變遷然此能力所作之功用毫末不能創造亦不能消滅故宇宙間能力之總量恒爲一定不變

問題

十九　試舉以下物體所有能力之名（一）受壓迫之空氣（二）延長之護謨（三）旋轉於水平板上之球體（四）落下之物體（五）井底之石

解　（一）被壓迫之空氣有還原能力因緩壓之則猝然膨脹而無待他物而動之功用也

（二）引伸之護謨亦有還原能力

（三）於水平板上施轉之物體有運動能力

（四）凡落下物體有運動能力亦有還原能力因物體之質量爲 M 其在地表上 H 高處則其還原能力爲 $Mgh$ 至物體漸次落下而其還原能力漸々減少盖墜下之速度漸增而運動能力

$\frac{1}{2}MV^2$ 亦漸增至還原能力之減量與運動能力之增量相等因而兩者之和常等於 $Mgh$ 即能力不滅之證也令物體在 $h$ 高處墜下其初僅落過距離 S 時則其速度 $V=\sqrt{2gS}$ 命此 M 物體所有之運動能力爲 Q 則 $Q=\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}M(2gS)=MgS$ 惟此物體在 $h-S$ 之高處其還原能力命爲 P 則得 $P=Mg(h-S)$ 因此可知兩者之和 $Q+P=MgS+Mg(h-S)=Mgh$

(五) 因物體之質量爲 M 其在地面下 $h$ 深之井底比其在地表僅減其關於地表之 $Mgh$ 之還原能力此物體如欲再引之昇至地表則須用 $Mg$ 之力而後能昇至 $h$ 高即須加 $Mgh$ 之能力也若此在井底之物體更比在井底低下之點有距離 S 則可知物體對於此點必有 $MgS$ 之還原能力自不待言

二十 離地上十二米之高有二十五之物體其

對於地面之還原能力幾何試以愛格計之

答　二千三百五十二萬愛格

解　因二十五之物體在十二米之高處則其對於地面之還原能力有 $20\times1200=24000$瓦糎試以愛格改算則　$g=980$ 故得 $20\times1200\times980=2.352\times10''=23520000$愛格

二十一　離地上十二米之高有一瓩之物體其對於地面之還原能力幾何又對於二十米深坑之底其還原能力幾何

答　對於地面之還原能力爲十二瓩米　對於深坑之還原能力爲三十二瓩米

解　因一瓩之物體升上離地面一十二米之高其功用爲一十二瓩米即 $1\times12=12$瓩米　若從地面下二十米之深處升至離地面一十二米之高即 $20+12=32$ 故可知其功用爲三十二瓩米即 $1\times32=32$瓩米

二十二　於護謨絲之兩端有二物體而絲之長爲十糎今以手持二物體延長至五糎間之遠其間之手力平均爲六十達音則手所成之功用之量及二物體之還原能力幾何

解　依問題十八之解法可知手所成之功用爲三百愛格即 $5\times60=300$ 而物體及護謨所成之裝置其及於手而相感觸者僅有還原能力

二十三　六瓩之彈丸有每秒飛行五十米之速試算出其運動能力

答　七百五十億愛格(即七百六十五瓩米餘)

解　因六瓩爲六千瓦五十米爲五千糎則此彈丸之運動能力爲 $\frac{6000\times(5000)^2}{2}=\frac{6\times10^3(5\times10^3)^2}{2}=$ $7.5\times10^{10}$愛格　試以瓩米計之則因　1瓩米$=$ $9.8\times10^7$愛格　故得 $(7.5\times10^{10})\div(9.8\times10^7)=765$瓩米

二十四　如上題之彈丸穿土壁有一米半之深試

算出土壁對此彈丸之抵抗力平均幾何

答　五億達音(即五百一十瓩餘)之力

解　設土壁對此彈丸之平均抵抗力爲F達音則 $7.5\times10^7$ 愛格之運動能力可變爲 $F\times150$ 之功用故 $F\times150=7.5\times10^7$ 即 $F=5\times10^5$ 達音　試以瓩計之則得 $(5\times10^8)\div980000=$ $=510.2$瓩

二十五　有三瓩之砲丸以每秒二百米之速向上發射於十秒之終其運動能力幾何還原能力幾何并能力之總量幾何

答　運動能力爲六千億愛格（即六千一百二十二瓩米）還原能力爲一千五百六十億六愛格(即一千五百九十二瓩米)能力之總量爲四千四百三十九億四愛格（即四千五百三十瓩米)

解　因此砲丸所有能力之總量其發射時恒有

一定試以運動能力計之則因 $200米=200\times 100糎=2\times10^4$ $3瓩=3\times1000瓦=3\times10^3$ 故其運動能力爲$\frac{3\times10^3\times(2\times10^4)^2}{2}=60000\times10^7=600000000000$愛格 又從發射時至十秒終之速度爲 $200-9.8\times10=102米$（見第二篇第三款）故此時砲丸所有之運動能力爲 $\frac{3\times10^3\times(102\times10^2)^2}{2}=15606\times10''=156060000000$ 愛格 次合前後兩運動能力之差依能力不滅之原則可知其變爲還原能力則可求得其還原能力之量爲 $(60000-15606)\times10^7=44394\times10^7=443940000000$愛格 試改算爲瓩米故 $(60000\times10^7)\div(9.8\times10^7)=6122瓩米$, $(15606\times10^7)\div(9.8\times10^7)=1592瓩米$ $(44394\times10^7)\div(9.8\times10^7)=4530瓩米$

二十六　有彈丸飛行以每秒二百米之速恰可穿貫四糎厚之板若欲令此彈丸穿貫十六糎之板

須幾何之速度

答 穿入十六糎板之功用視爲穿入四糎板之功用之四倍則需四百米之速度

解 穿命入十六糎板時之速度爲 $V$ 則依上所言之假定命砲丸之質量爲 $M$ 故得其運動能力爲 $\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}M(200)^2\times4$ 即可知 $V=400$米

二十七 有質量 $M$ 之物體以某速度進行其運動能力爲 $E$ 則其運動量爲 $\sqrt{2ME}$ 試證之

解 此物體之速度爲 $V$ 則其運動量爲 $M\times V$ (見第一篇二十八欵) 惟此物體之運動能力 $E=\frac{1}{2}MV^2$ 故 $V=\sqrt{\frac{2E}{M}}$ 即 $M\times V=\sqrt{2ME}$

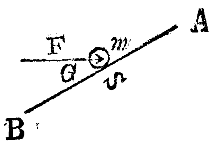
二十八 九十瓦之銃丸離銃口時有每秒二百米之速度而銃身之長爲一百二十糎則銃丸受火藥之平均壓力幾何

答　一億五千萬達音(即一百五十三瓩餘)

解　因砲丸之運動能力爲$\frac{1}{2}90\times(20000)^2$愛格其原於火藥爆發之平均壓力命爲 $P$ 惟火藥所成之功用爲 $P\times120$愛格 故可知 $P\times120=\frac{1}{2}90(20000)^2$ 即$P=15\times10^7$達音 試以瓩改算之則因 1瓩$=9.8\times10^5$達音 故得$(15\times10)^7\div(9.8\times10^5)=153$瓩

二十九　有質量 $M$ 之物體受 $F$ 力之作用而進行於一直線上但此進行之徑路與力之方向成 $\theta$ 角今此物體進 $S$ 距離之後有 $V$ 之速度則其運動能力$\frac{1}{2}MV^2=F\times S\times\theta$正弦　試證之

第　二　圖




解　如圖 AB 爲斜面設物體 $M$ 沿斜面而上行其

力之方向如 FM 與斜面成傾度 $\theta$ 則物體 M 運動所費之力不在 F 力之全部僅有 F×$\theta$餘弦 之一部分而物體 M 受此力之作用而進行 S 距離可能有 V 之速度（第一欵）即因 F×$\theta$餘弦×S 之功用而所得之運動能力爲 $\frac{1}{2}MV^2$ 故可知 F×S×$\theta$餘弦$=\frac{1}{2}MV^2$

三十　有兩個無彈性質之球相向進行其一球質量十瓦速度五十糎其一球質量五十瓦速度十糎問衝突前後兩球運動能力之總量如何

答　運動能力衝突前一萬五千愛格衝突後爲零

解　凡物體之運動量爲質量 M 與速度 V 之性相乘積則此二球之運動量 10×50 與 50×10 相等而其運動之方向相反又二球爲無彈性體則相衝突時其運動俱停止（見第一篇四十一欵）依而其運動能力全行消失故可知衝突

前運動能力之總和爲 $\frac{1}{2}\times10\times(50)^2+\frac{1}{2}\times50(10)^2=15000$ 愛格　而此衝突前之運動能力當互相衝突時變爲構成物體之分子振動其運動能力之變態或變爲熱而使二球之溫度上升或變爲音而傳於空氣中皆吾人目所不能見也

# 第五篇 流體及比重

## 第一章 流體靜力學（壓力 液體之壓力 氣體之壓力 液體及氣體之浮力）

### 壓力

第一款 全壓力及壓力之强度 如有重十二瓩之鐵方柱置於案上則鐵柱壓案面之全壓力爲一十二瓩今此鐵柱之底面與案面相接觸之面積爲四平方糎則十二瓩之全壓力被托於四平方糎上故可知一平方糎有三瓩重量之比例即可知鐵柱壓於案面其壓力之强度爲三瓩也故凡壓力之强度即示其單位面積上壓力之量設如有 A 單位面積其所受之全壓力爲 P 則此時壓力之强度爲$\frac{P}{A}$準此欲考其任一點壓力之强度則於一點之處取其極小之面積測得其上之壓力之量即可計

其一點上壓力之强度例如百萬分之一平方糎上測得其壓力之量爲○.五瓦則此處壓力之强度爲 $0.5\div\frac{1}{1000000}=500000$瓦 即五百瓩也

問題

一 圓柱形之蓄水筒深一十五糎底面積六平方糎問水壓底面之全壓力及壓力之强度幾何但大氣之壓力略去不算

答 全壓力九十瓦 壓力之强度一十五瓦

解 因此筒內水之全體積爲 $15\times6$ 立方糎而水之密度一立方糎爲一瓦故此水之全重量爲$15\times6\times1=90$瓦 惟準全壓力之定義爲此水之全重壓於圓筒之底面故其全壓力爲九十瓦而底面一平方糎所受之壓力爲其壓力之强度故以六除九十 $90\div6=15$瓦 即所求壓力之强度

二 有板浮水面於其上載以石塊板之廣爲五

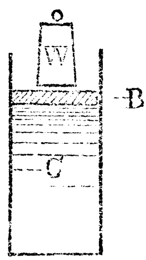
尺之平方重爲二貫目石塊之重爲一貫目問板壓水面之全壓力及壓力之强度幾何

答　全壓力三貫目　壓力之强度一平方尺有一百二十匁

解　因板及石塊之總重量爲三貫目即 $2+1=3$ 即板之下面壓於與板面相接之水面之全壓力也惟因板之壓於水面之面積爲 $5^2=25$ 平方尺　故可知 $3\div25=0.12$ 貫 $=120$ 匁　爲一平方尺壓力之强度

三　於圓筒 C 上裝緊接之活塞 B 於其上載五斤之分銅 W 爲筒內空氣之壓迫至若干度而止問此時 C 筒內空氣上壓活塞之全壓力幾何但活塞之重爲半斤又其

第一圖



半徑爲二糎問壓力之强度如何

答　全壓力五·五瓩　壓力之强度四百三十七瓦許

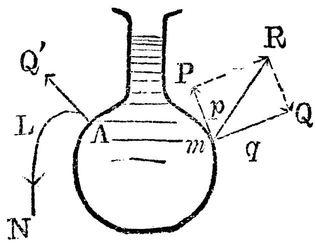
解　因活塞下壓空氣之壓力與空氣上壓活塞之力相等故空氣及於活塞壓力之全量爲 $5+0.5=5.5$瓩　惟活塞之面積爲　$2^2\pi=2^2\times 3.1416$　故可知　$(5.5)\div(2^2\times 3.1416)=0.4370$ 爲一平方糎壓力之强度

液體之壓力

第二欵　液體壓容器之方向　凡液體之傳達非僅壓容器之底面而已即其側壁亦受壓蓋容器中液體之壓力基於本來之重量而其壓容器之方向則靜止之液體恒與其相接觸之面成垂直如圖試於盛液體之容器其側面開一小孔 A 則液體射出之路如 ALN 之拋物線其初離容器之小孔時如AQ之方向與壁面爲垂直

又凡液體靜止時如液體接容器之小部分 M 其壓壁面之方向假令不爲垂直如 MR 之斜向則試分解之爲二力其一爲與器壁成垂直之

第二圖

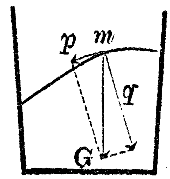



Q 力其一爲與器壁成切線之 P 力然則 Q 力雖爲器壁所阻而 P 力全無支持故液體 M 不得不流動於 MP 之方向惟實際液體恒靜止則可知無 P 力之作用必不能有如 MP 與器壁成斜角之方向故可知液體壓於器壁之力其方向恒與器壁成垂直

第三款　靜止液體之表面　凡靜水之表面(即水平面)恒與重力之方向成直角故凡靜止液體之

表面恒與其所受力之方向成直角如圖試以玻璃器盛水猝然傾側之則水之表面成曲面如徐俟其靜止即仍歸於水平面今試於液體之最高處如 M 之部分將其所受之重力分解爲二力其一爲與 M 處曲面成切線之 P 力其一爲與 M 處曲面成直角之 Q 力則 Q 力雖見阻於內部之液體而 P 力無阻故 M 部分之液體必依 MP 之方向斜流而下惟依吾人之經驗凡靜止液體之表面恒與重力之方向成垂直而 P 之分力全行消滅即凡液體之所以成水平面恒與地球之重力成直角也

第 三 圖




又凡液體接容器之部分其表面不爲水平而成彎曲形狀如大洋之水環繞地球其形狀成一大球面則又基於液體之表面與所受力之方向成直角之

理其說明見次之問題四及五

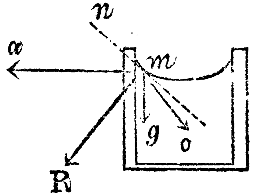
第四款　液體之被壓性　凡液體之性强壓之則其體積有些小之收縮弛之則其體積仍復原形故液體爲有完全體積之彈性但液體之被壓性極小尋常不能考之如依的兒其被壓性爲液體中之較大者當受一氣壓之强（一平方糎上當一瓩零三三見第九欵）不過收縮一萬分之二容水則不過減縮十萬分之五容耳

問題

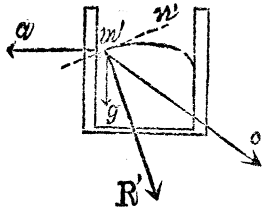
四　液體接容器之部分其表面常不爲水平而少彎曲試言其理

解　如圖液面與容器之側壁相近如 M 則其相作用之力有三一爲重力之作用如 $Mg$ 垂直之方向一爲液體之凝集力即液體接近於 M 之部分引向內部如 MC 之方向一爲容器之壁質及於 M 之附着力與壁面成垂直如 $Ma$

第　四　圖




第　五　圖



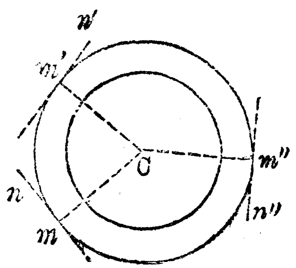

之方向但第四圖如水等之液體沾潤器壁則凝集力 MC 常小於附着力 Ma 則三力 Mg MC Ma 之合力取 MR 之方向因而 M 處之液面與液體表面成直角如 MN (第三款)而液體沿器壁而隆起若第五圖如水銀等之液體則凝集力 M'C 常大於附着力 M'a 而不沾潤器壁則三力之合力取 M'R' 之方向因而 M' 處之液面與液體表面成直角如 M'N' 而液體接近器壁之部分常屈曲向下

五. 大洋之水環繞地球其形爲一大球面其理如何

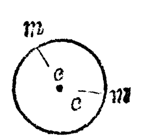
解 如圖地球之重力恒向地球之中心 C 如 MC M′C M″C 之方向故在地表之水平面與其處之重力成直角如 M N M′ N′ M″ N″ 等故可知海洋之表面因地球之形而周圍其表面遂成一大球面 M M′ M″

六 雨滴成球狀水銀滴於板面亦成球狀其理如何

第 六 圖




第 七 圖

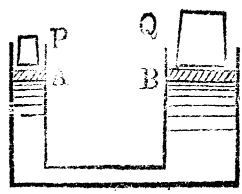



解 如圖凡在液體表面之分子如 M M′ 等恒

因液體之凝集力如 MC M′C 等之力引向內部之作用故液體之表面恒非正平面而其傾向常欲生較小之表面積惟一定質量之物質其所成之各種形狀惟球形面積最小故雨滴水銀滴等恒呈球狀

第五款 液體中壓力之傳達 凡施力於固體僅能使物體受力之方向生壓力若液體則其性流動與固體異趣即貯液體於密閉之器內於其一局部施以壓力而其壓力之強度不增不減而傳達於器之各方向此爲貝慈考之原理如圖有大小二個圓筒連續裝置使其器底相通即所謂連通器也中注以水於各筒內裝以活塞如 A 及 B

第 八 圖



而密閉之復於 A 活塞上載以分銅 P 而下壓水面則此處所生壓力之强度可傳達於水之各部分而令 B 活塞上行令設 A 面積爲二平方寸分銅 P 之重爲十貫目則 A 活塞壓於水面其壓力之强度爲一平方寸有五貫目而此處所生之壓力由水之各部分而傳播於活塞 B 令其上行之壓力其强度亦爲一平方寸有五貫目也故 B 活塞之面積若爲十平方寸則欲壓之使下令與 A 活塞之十貫目互相釣合須於 B 活塞上置五十貫之分銅準此則凡大小兩圓筒之連通器其兩活塞之面積爲 A 及 B 其兩活塞所受之壓力爲 P 及 Q 則 A 筒壓力之强度爲 $\frac{P}{A}$ B 筒壓力之强度爲 $\frac{Q}{B}$ 如兩力互相釣合則 $A \times Q = B \times P$ 即可知壓力之大小與面積爲正比例故 A 之面積小而 B 之面積甚大則 A 加小力 P 而 B 可得大力 Q 白賴禡之水壓器即此理之應用也

問題

七　如第八圖之連通器 A 活塞之面積爲五平方寸 B 活塞之面積爲五百平方寸 A 活塞上之分銅重二十貫今欲令其互相釣合則 B 活塞之分銅須重若干

答　二千貫目

解　於五平方寸上載重二十貫目之重物則其壓力之强度爲 $\frac{20}{5}=4$貫 惟因其壓力傳達水中而於五百平方寸上生 $\frac{20}{5}\times 500=2000$貫目之全壓力故可知 B 活塞上須載二千貫目之分銅

八　如前題所記之連通器 A 活塞下壓二寸則 B 活塞上行若干寸又此時從外向器內之水(如 P 分銅之重)所成之功用與器內之水向外(如 Q 分銅壓之使水上行)所成之功用試算出其得失

答 B 活塞上〇·〇二寸 功用無得失

解 (一)令 A 活塞有五平方方寸之面積因 A 活塞下壓二寸則其送入 B 筒內之水有 $5\times2=10$立方寸 而此水令 B 筒之 B 活塞上行之高爲 $\frac{10}{500}=0.02$寸

(二)凡以 P 力使 A 活塞下行至 $h$ 高因之而 B 活塞載 Q 之重物亦可升至 $h$ 高然則 P 力向器中之水其所成功用之量爲 $P\times h$ 而 B 活塞受此功用使 Q 重物上行其所成功用之量爲 $Q\times h$ 故知兩功用之間毫無得失

令 A 活塞之面積爲 A B 活塞之面積爲 B 則其壓力之強度 $A:P=B:Q$ 故 $Q:P=B:A$ 即 $Q=P\times\frac{B}{A}$

次 A 活塞之下行爲 $h$ 則 B 活塞之上行爲 $\frac{A}{B}\times h$ 故 B 活塞所成功用之量爲 $Q\times h=P\times\frac{B}{A}\times h\times\frac{A}{B}=P\times h$ 與 P 力所成功用之

量相等故可知水壓器(即連通器)所成之功用毫無得失但其力則 P 之全力而 Q 所得於 P 之全力則有 $\frac{B}{A}$ 倍之利率因無論如何之器械其力雖有得失而功用及能力却毫無得失

九 如前題所記之連通器其利率若何

答 利率一百倍

解 因凡利率者即從外施於器械之力與器械受此力而生之力之比(第三篇二十一款)故凡連通器之利率爲 $\frac{Q}{P}=\frac{B}{A}$ 今 A 爲五平方寸 B 爲五百平方寸則可求得此連通器之利率爲 $\frac{B}{A}=\frac{Q}{P}=\frac{500}{5}=100$

十 白賴禡之水壓機小活塞之直徑一寸大活塞之直徑二尺小活塞以一人力(十五貫目)壓之則大活塞能生力幾何幷此水壓機之利率如何

答 大活塞之力六千貫目(四百人力)利率四百倍

解　因大活塞與小活塞面積之比爲$\frac{(20)^2}{1^2}=400$故此連通器之利率爲四百倍（見前問題之解）而大活塞所生之力準壓力之大小與面積爲正比例故得$\frac{(20)^2}{1^2}=\frac{400}{1}$　即可知爲四百人力　即$15\times400=6000$貫目

十一　試驗水道所用鐵管之耐壓力其管長一十二呎內徑一呎其中滿注以水於水壓機上加每平方寸有一百五十磅之壓力問此時鐵管內所受之全壓力如何

答　約八十一萬四千三百磅

解　因一呎爲一十二吋故管內之總面積爲$3.1416\times1\times12\times12^2$平方吋　故可知全壓力爲　$3.1416\times12^3\times150=814100$磅約

第六欵　液體之壓力與其深之關係　試以空瓶用軟塞密閉之令沈於淺水中仍屬原形若沈之於深水之底則立時破裂因水淺則水之壓力弱

水深則水之壓力強故也即可知凡液體不因外力之壓迫但液體愈深則壓力愈大其關係則有次之定律

(一) 同液體中之各處其壓力之強度與其深爲正比例但表面空氣之壓力畧去不算又凡液體之壓力與其密度爲正比例設如液體之密度爲 $d$ 其深爲 $h$ 則其壓力之強度爲 $d\times h$ (重力單位)

(二) 液體中同一之深處其各點之壓力無論如何方向強度皆等

(三) 凡液體壓力之強度惟與其密度及深有關係而與其液量之多少并容器之形狀無關係

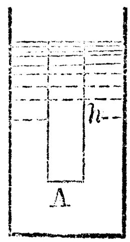
凡測液體之深爲從其表面垂直至底之距離今證上之三定律

(一) 今欲知深 h 處之壓力則於此處假設爲有 A 面積之水平面如圖而容器中之液體分爲 A 面之上下二部分則 A 面下部液體所支之重

爲以 A 面爲底 $h$ 爲高之柱形所容之液體即 A 面積上之全壓力也其液體之密度命爲 $d$ 則 A 面上所受之全壓力爲 $A \times h \times d$（重力單位）故此處壓力之強度爲 $\dfrac{A \times h \times d}{A} = h \times d$

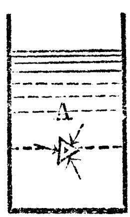
此爲第一定律之證

第九圖




（二）於液體中之一點 A 無論如何方向其壓力之強度皆等如圖假設於 A 點爲極小正三角柱形之部分惟此柱甚小而柱形液體之重量爲此處所受之壓力可置不論而周圍之部分壓於此柱之三角柱面可知其強度相等如云不然則三

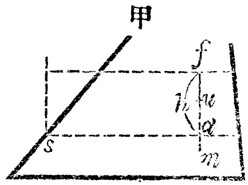
第十圖



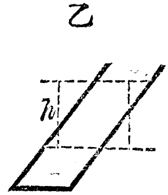
力不能互相鈞合而液體不能靜止故可知正三角柱形之液體無論其方向如何其理恒同即可知於一點 A 之液體無論如何方向其壓力之强度恒相等此爲第二定律之證

（三）凡液體之壓力僅關於密度及深毫不因其

第十一圖




第十一圖

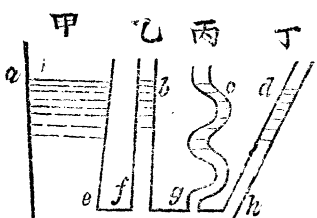



液量之多寡及容器之形狀此液體與固體大異其趣蓋因液體流動其一部分所受之壓力有傳播八方之性也如圖有甲乙二器甲器之液量較多乙器之液量較少此二器垂直之深相等其所受之壓力亦等試於甲器 $a$ 點直上有 $h$ 液體

之處亦如 S 點直上無液體與器壁相接之處其深同爲 $h$ 欲求其壓力之强度則從第一定律可知 $a$ 處壓力之强爲 $h \times d$ 而依貝慈考之原理其壓力之强度不增不减而傳達於各方故可知 S 處所受之壓力與 $a$ 處所受之壓力其强度相等　又設如有 M 點之深處則 $a$ 壓力傳達之外更加深 $a$M 柱形液體之重故 M 處壓力之强度應有 $f$M 之深　又設如有 N 點之深處則 N 處所受之壓力比 $a$ 處所受之壓力須减 $a$N 形柱液體之重故 N 處壓力之强度只能有 $f$N 之深

又設如有甲乙丙丁各器之連通器其底部相通而其各器之形狀與其所容

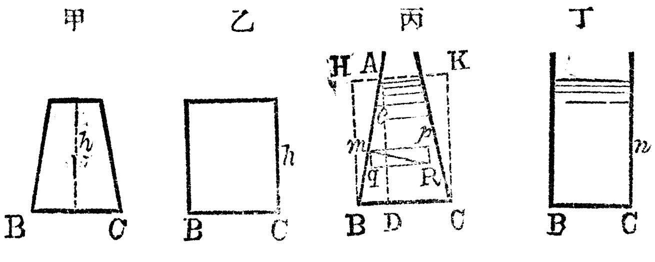
第十二圖



液量之多寡全不一致如第十二圖試注水於器內其各器水面之高如 $a\ b\ c\ d$ 恒同而各器之液柱俱能平準則其各器之底部如 $e f g h$ 所受壓力之强度亦相等故可知液體壓力之强度惟與其深有關係而與其量無關係并與其容器之形狀無關係

又設如有二個同質之固體如甲及乙其底面及

第十三圖




高俱等但其形狀不同則其重量亦異即底面所受壓力之强度亦因之而不一試注液體於與甲

乙二固體相似形之二容器如丙及丁則雖兩器之底面及水深俱等其各器所蓄之液量不同即兩液體之重量亦異然其各器之底面所受之壓力依上言之定律可知其強度相等即底面所受之全壓力毫無差異然則固體(如甲及乙)之底壓力與液體(如丙及丁)之底壓力各基於等重之質量而甲與乙兩底面所受之壓力不同丙與丁兩底面所受之壓力恒等其故因液體爲流動性而固體非流動性也

如上圖之丙爲有斜壁之容器試觀其中所蓄之液體恒壓於與容器之斜壁成直角之方向而兩側之壁又生相反之等力而壓於液體如圖中之 MR 力試分解之爲二力其一爲與底面 BC 平行之 MP 其一爲與底面 BC 成直角之 MQ 則 MP 力之方向爲液體之橫壓力故其力不達於底面而 MQ 力之方向爲液體之直壓力

故其力爲壓於底面之力　惟因 $MQ=MR\frac{MQ}{MR}=MR\frac{BD}{AB}$ 今欲求從A至B所受壓力之總和因 MR 壓力之强度與深爲正比例故 MQ 亦與深爲正比例於 A 點 $MR=O$ 故 $MQ=O$ 於 B 點 $MR=h\times d$ 故 $MQ=h\times d\frac{BD}{AB}$ 故求得 AB 間平均所受之壓力爲 $\frac{O+h\times d\frac{BD}{AB}}{2}=\frac{h\times d\times BD}{2AB}$ 因此可知從 A 至 B 所受壓力之總和爲 $AB\times\frac{h\times d\times BD}{2AB}=\frac{h\times d\times BD}{2}=\frac{(h\times BD)d}{2}$ 惟因 $\frac{h\times BD}{2}$ 爲 ABD 三角形或 ABH 三角形之面積故斜面 AB 所加於底面 BD 之力爲 $\frac{h\times BD}{2}d$ 恰與 ABD 三角形內液體之重相等由此可知 BD 底面所受之壓力必等於 ABD 三角形內液體之重與 ABH 三角形內液體之重之和卽等於 AD 與 BD 相乘之長方形內所有液體之重也據此則丙器與丁器底面所

受液體之壓力不關於容器之側壁形可判然矣而固體則無 MR 力之作用故與液體不同又設加丙器其上端不狹小而廣開則底面所受之壓力依舊不異依上理可證明之

問題

十二　各邊十米之大箱注水令滿問水之壓底面及各側面之全壓力幾何但空氣之壓力略去不算

答　底面上之全壓力爲一百萬瓩　一側面上之全壓力爲五十萬瓩

解　因壓力以瓩計則水之深十米爲一百粉而底面積爲一萬立方粉又水之密度一立方粉爲一瓩故可知底面上之全壓力爲 $100 \times 10000 = 1000000$瓩　又側面之面積雖爲一萬平方粉但其上部與下部之壓力恒與深爲正比例故其強度不同即上部表面之處其壓力爲零（空

氣之壓力不算）而下部底面之處其壓力爲一平方粉有一百瓩故可知從側面之上部至其下部其平均壓力之强度爲一平方粉有 $\frac{0+100}{2}=50$瓩 故可知一側面上之全壓力爲 $10000\times 50=500000$瓩

十三 一側面與底面成角四十五度之水箱計深二米而斜面之幅爲一米注水令滿問斜面上所受之全壓力如何但空氣之壓力畧去不算

答 二千八百二十八瓩四二有餘

解 因壓力以瓩計則水之深爲二十粉而斜側面之傾度爲四十五度故沿其斜面之長爲 $20\sqrt{2}$粉因而斜面之全面積爲 $20\sqrt{2}\times 10$平方粉惟側面上部表面之處其壓力爲零（空氣之壓力不算）而下部底面之處其壓力爲二十瓩故從上部至下部其平均壓力之强度爲其一平方粉有 $\frac{0+20}{2}=10$瓩 故斜面上之全壓力爲

$20\sqrt{2}\times 10\times 10=2828.42\cdots$瓩

十四　海水之密度爲一·二五如有一千米之深則其壓力之强度如何

答　一平方糎有一百零二·五瓩

解　因一千米爲十萬糎故壓力之强度依第一定律可知爲密度與深之相乘積故　$1.025\times 100000=102500$瓦$=102{\cdot}5$瓩

氣體之壓力

第七款　氣體與液體之異同　凡氣體較液體更易流動其性多與液體相似試列舉其相同之點(一)凡氣體壓於容器其方向亦與其面爲垂直(二)凡氣體亦依貝慈考之原理其一局部所受壓力之强度無增無減而傳達於各方又試列舉其相異之點(一)凡氣體極稀薄而其密度甚小通例不出固體或液體之密度之數百分之一(二)氣體之分子間殆無數凝集力非密閉於一定之器內則異

常擴散故開放之器不能集甚多之氣體幷難驗其顯判之表面

第八欵　大氣之壓力　試以極薄之玻璃瓶排盡其內之空氣則瓶必碎裂因大氣環其周圍而施壓力其內部不能抵抗故也凡大氣之壓力生於其本體之重亦猶水中之壓力生於水之重也（第六欵）其強度可以氣壓計（即晴雨計）測定之

禿里賽離之實驗　如上圖以長一米許之玻璃管密閉其一端於其中注滿水銀以拇指緊閉其開端而倒立於水銀槽中徐將拇指抽出則管內之水銀漸漸低下至水銀槽中之水銀面與水銀管內之水銀面相距約七十六糎許如AB之高即

第十四圖


停止不復低下蓋因大氣壓於水銀槽之水銀面其

壓力之强度依貝慈考之原理由水銀傳達於管內與管中 AB 水銀柱壓力之强度於 B 點互相釣合(即與水銀槽中之水銀面同一平面)而 AB 水銀柱遂靜止不動故可知大氣壓水銀槽中之水銀面其壓力之强度必等於 AB 爲高 B 爲底面之水銀柱所受壓力之强度欲求此力之强度因水銀之密度爲一三·五九五 而水銀柱之高爲七十六糎橫斷面爲一平方糎則其重爲 $13.59\times76=1033$瓦許 即此爲大氣壓力之强度

第九款 標準壓力 如上所測定之大氣但時常有變動故氣壓亦因時稍有高低依積久之經驗而定爲平均水銀柱七十六糎壓力之强稱之爲標準氣壓即一氣壓也凡計各種之壓力多以氣壓爲單位如蒸氣機關之蒸汽壓力謂之若干氣壓是也

問題

十五 禿里賽離之氣壓計其管隙之大與水銀柱

之高無關係試言其理

解　如第八款之圖 B 爲一平方糎即管之橫斷面積於 B 點與大氣壓力之强度相釣合之處其水銀柱之高爲七十六糎當一〇三三瓦之重今管隙之大令於B點之橫斷面積爲A平方糎則大氣壓力傳達於 B 之全壓力爲 A 倍即相釣合之水銀柱之全壓力亦爲 A 倍即 A×1033瓦　也因之而水銀柱之高依第六款所言之理仍舊爲七十六糎即可知禿里賽離之實驗其管隙之大與水銀柱之高無關係

十六　禿里賽離之氣壓計試將管傾側之則水銀之高如何

解　因水銀管從垂直之位置而忽然傾側則水銀柱上升管內從其項至水銀槽之水銀面其垂直之高常爲七十六糎因管底 B 所受水銀柱之壓力依第六款所言不關於容積之形狀恒依

其垂直之高而測定之

第十欵　以氣壓測山高　凡氣壓生於空氣之重則上升愈高空氣漸次稀薄其氣壓漸次減少故山頂比山麓氣壓計之水銀柱必低即可依水銀柱之高而測定山之高命 H 爲山高（米爲單位）$a$ 爲山頂水銀柱之高 P 爲山麓水銀柱之高 $t$ 爲山麓與山頂之平均溫度則得 $H=18432(對_{10}b-對_{10}a)(1+0.004\times t)$ 爲測山高之公式但氣體易被壓縮故其高與壓力之關係如上所記之算式甚爲複雜不能如液體之壓力與深爲正比例較爲簡易

第十一欵　氣體之體積與壓力之關係　如前第七欵所言氣體之性異常擴散故貯之於一定之容器則容器之周圍必受多少之壓力此氣體與固體液體之異趣可占任意之體積也但其與外界壓力相抵抗之力甚弱即被縮性甚大當西歷一千六百六十八年間英人薄以耳及法人馬麑太發明定律

以明氣體之體積與壓力之關係曰同温度之氣體其壓力與體積爲反比例即凡氣體在同温度時其質量面壓恒爲一定則此氣體之體積與氣體受外力之强度(或氣體壓器壁之强度)爲反比例今試於P壓力之下有占V容積之氣體於$P'$壓力之下有占$V'$容積之氣體於$P''$壓力之下有占$V''$容積之氣體其質量恒爲一成不變則得$P:P'=V':V$及$P:P''=V'':V$故$P\times V=P'\times V'=P''\times V''$

即凡壓力之强度與其相當容積之相乘積恒爲常數命爲K則可知薄以耳之定律其式爲$P\times V=K$

今舉一實例證之設水銀柱壓力之强爲七十六糎其氣體有一百立方糎之體積或其壓力爲五十糎或三十八糎等則其體積之變易如下

| P(壓力之强度) | V(容積) | V×P(相乘積) |
|---|---|---|
| 七六 | 一〇〇 | 七六〇〇 |

| | | |
|---|---|---|
| 五十 | 一五二 | 七六〇〇 |
| 三八 | 二〇〇 | 七六〇〇 |
| 一〇 | 七六〇 | 七六〇〇 |

據此則可知K之值爲七六·〇〇糎 但因氣體之質量則K之值不無差異而在同一之氣體則與質量爲正比例

又依後人之精細實驗而知薄以耳之定律不免有差例如壓力之强度P如至極大則其P×V之相乘積亦不一定而有多少之變更然通常氣壓不甚相遠之時則薄以耳之定律可視爲眞確亦無差違

問題

十七　一氣壓之下有二十二立四之空氣問水銀柱十糎時則空氣有若干之體積但溫度不變

答　一百七十立二四

解　準公式 $V':V=P:P'$ 故得　$V':22.4=76:10$　即　$V'=\frac{22.4\times76}{10}=170.24$立

十八　氣壓計水銀柱之高爲七十六糎問氣壓之強度一平方糎有幾何達音

答　一平方糎凡一百零一萬二千三百達音

解　因水銀之密度 $d$ 爲一三·五九重力 $g$ 爲九百八十糎則高七十六糎橫斷面一平方之水銀柱其重爲 $76\times1\times13.59$ 瓦　試以達音計之則 $76\times1\times13.59\times980=1012300$ 達音

十九　禿里賽離之水銀氣壓計如用偑里設林代水銀而作一氣壓計水銀柱之高爲七十六糎偑里設林柱之高爲八百一十糎試求偑里設林之密度但水銀之密度爲一三·六

答　比重一·二七有餘

解　命偑里設林之密度爲 $d$ 則偑里設林液柱之下端其壓力之強爲 $810\times d$ 瓦　水銀柱之下端其壓力之強爲 $76\times13.6$ 瓦　故得 $810\times d=76\times13.6$　即 $d=1.27\cdots\cdots$

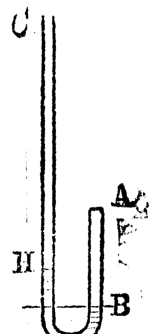
二十　水銀氣壓計之水銀柱高七十五糎如用油代水銀而作一氣壓計其密度一平方糎有○·八六五問氣壓計油柱之高幾何

答　約一千一百八十六糎

解　命氣壓計油柱之高爲 $h$ 則　$h\times 0.86=75\times 13.6$ 故 $h=1186\cdots$糎

二十一　如上圖之竪立曲管閉其一端 A 而 A 端少餘空氣從 C 端注入水銀其兩端之水銀柱達 H 及 B 而靜止此時大氣之氣壓爲七六·一五糎而 H 與 B 之差爲二·三五糎問 A 端空氣所受壓力之强度幾何

第十五圖




答　當水銀柱之七十八糎五

解　因 A 端空氣所受壓力之强度爲大氣之氣壓與 B 及 H 之高之差之和故得　76.15 +2.35=78.5糎

二十二　如上題 A 端空氣之體積欲令壓縮三分之一則 C 端水銀須增至幾何之高

答　一百五十九糎三五

解　依薄以耳之定律 A 端空氣之體積欲令縮小三分之一則壓力之强須增三倍惟最初 A 端空氣所受壓力之强度依前問題之解法已知爲七十八糎五則其三倍爲二百三十五糎五故於 C 端更注水銀而 A 端中水銀柱之上端與 C 端中水銀柱之上端其差爲　235.5−76.15 =159.35糎

二十三　氣體之密度與壓力爲正比例試證之

解　依薄以耳之定律則質量M瓦之氣體在 P 壓力時有V立方糎之體積在P′壓力時其體積

爲 V′ 立方糎故 $V':V=P:P'$ 如命兩氣體之密度爲 $d$ 及 $d'$ 則得 $d=\frac{M}{V}$ 及 $d'=\frac{M}{V'}$ 故得兩密度之比爲 $d:d'=\frac{M}{V}:\frac{M}{V'}=\frac{1}{V}:\frac{1}{V'}=P:P'$ 準此可知氣體之密度恒與壓力爲正比例

二十四　當攝氏零度標準氣壓時酸素氣一立之質量爲 一·四二九瓦 於同温度時其壓力之强爲七十三糎問酸素氣一立之質量如何

答　一五三七二

解　依前問題之解法已知氣體之密度與壓力爲正比例故可知壓力爲七十三糎其酸素一立之重量命爲 $x$ 則得比例式 $76:73=1.429:x$ 故得 $x=\frac{1.429\times73}{76}\doteqdot1.372\cdots$瓦

二十五　有二球之半徑爲 $r$ 及 $r'$ 蓄等質量之空氣其兩球內壓力强度之比爲 $P:P'=r'^3:r^3$ 而全壓力之比爲 $P:P'=r';r$ 試證之

解　今兩球之容積爲 V 及 V′ 則依薄以耳

之定律 $V':V=P:P'$ 惟 $V':V=r'^3:r^3$ 故兩球內壓力之强之比爲 $P':P=r^3:r'^3$ 又兩球之全內面之比爲 $r^2:r'^2$ 故可知球內面之全壓力之比爲 $P':P=r'^2\times P':r^2\times P=r'^2\times r^3:r^2\times r'^3=r:r'$

二十六 傾手桶於水中僅及桶之半欲使水侵入之須沈幾何之深

答 十米三三

解 因手桶中之空氣在水之表面則受一氣壓今欲令其體積減半則須入於水中使受二氣壓惟水中之壓力爲因水之重量而生之壓力復加大氣壓於水面之壓力因之二氣壓之中因水之重量而生之壓力必爲一氣壓命所求之深爲 $h$ 其水銀之密度爲 一·三六 水之密度爲一則得 $h\times 1=76\times 1.36$ 故得 $h=1033$糎

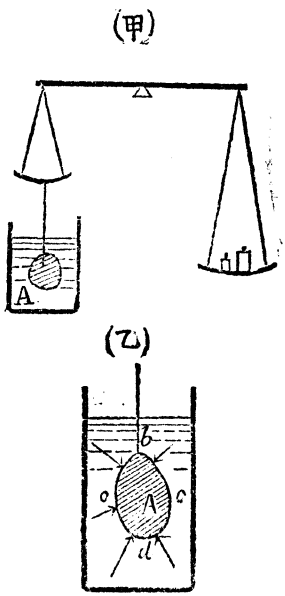
液體及氣體之浮力

第十二欵 液體之浮力 試以質較水輕之物體

如木材等投於水中則忽然浮於水面又吾人以身試水中覺其體甚輕又凡於水中轉動石塊比陸上覺少費力此皆液體減却固體之重稱之爲液體之浮力殆西歷二千百年前希臘人亞基美德所發明之原理曰凡固體入液體中則減其重量其所減之重量等於其所排斥液體之重量

如第十六圖甲以石塊於空氣中權之則其重爲 W 試將石塊沈於水中則其所排斥水之重量爲 $w$ 蓋石塊所排斥之水量即與石塊同體積之水之量復令於水中權之則其重爲

第十六圖



W－$w$ 因固體沈於液體中則如乙圖所示液體之壓於固體悉與其表面爲垂直惟液體之壓力恒與深爲正比例則深處較大於淺處故液體從固體之下方而上壓之力(如 $ade$)必大於從固體之上方而下壓之力(如 $abe$) 即固體因此力之差稍令上升而減其重量也

欲證明此力之差必等於與石塊同體積之水之證今試取出固體 A 而假設代以與 A 體同形同大液體之部分則其周圍液體之部分從上下四方而壓於此部分恰如固體之沈於液體中全然相等自不待言且此液體之部分其所以靜止於此處因周圍所加之諸壓力之合力恰與此部分之重互相釣合即可知諸壓力之合力必等於與固體等體積液量之重而其方向相反故可知固體沉於液體中則其所減之重量恰等於與固體等體積液量之重

第十三欵 氣體之浮力 氣體之浮力亦亞基美

德所發明之原理但氣體之密度甚小則固體所排斥氣體之重亦甚小即可知氣體之浮力亦甚小尋常於空氣中秤量物體因受空氣之浮力必比其眞重（即眞空中之重）稍輕但其所失之重量大約不過眞重之千分之一故尋常空氣中之重量即視爲眞重亦無差違

問題

二十七　有鐵塊一方其體積一百立方糎其重量爲七百八十瓦試於水中權之其重幾何

答　六百八十瓦

解　因鐵塊沈入水中其所排斥之水量爲一百立方糎（即重一百瓦）故可知鐵塊於水中之重量依亞基美德之原理則得 $780-100=680$瓦

二十八　滿盛水於器中以木塊浮爲水上則所溢出水之重量必等於木塊之重試證之

解　依亞基美德之原理可知溢出之水量即木

塊所排斥之水量惟與此重量相當之浮力互相鈞合故能使木塊浮於水面而成穩定

二十九　有冰山浮於海上問其顯出海面上之部分與沈入海面下之部分之比但冰之密度爲○·九一七海水之密度爲一·○二五

解　命冰山之全體積爲V則其重爲$V\times0.917$而與之同重量之海水其體積爲$\frac{V\times0.917}{1.025}$即冰山沈於海面下一部分之體積也因而冰山現出海面上之部分其體積爲全體積內減去沈於海面下一部分之體積即$V-\frac{V\times0.917}{1.025}$故可知兩部分之比爲$\frac{\text{海面上之部分}}{\text{海面下之部分}}=\frac{V\times0.917}{1.025}:V-\frac{V\times0.917}{1.025}$

$=0.917:1.025-0.917=0.917:0.108=8.5:1$

又或 $1:0.118$

三十　天秤之一端之皿載有水之科鋪與鉛塊而置分銅於他端之皿復將鉛塊投入科鋪水中則天秤失其平準否

解　因盛於水中之料鋪及鉛塊俱在天秤之皿上可知鉛塊在水中與在水外而此皿上之全重量無有差失故無失其平準之理

三十一　有二十匁之物體於其下懸一鉛塊俱令沈水中而權之則其重爲十匁若僅以鉛塊沈水中而權之則其重有四十匁問物體之密度幾何

答　比重〇·四

解　因物體在空氣中其重爲二十匁物體在水中之重與鉛塊在水中之重計共十匁僅有鉛塊在水中其重爲四十匁故可知物體附鉛塊俱浸水中較輕於僅有鉛塊在水中則此物體之密度較小於水之密度又物體在空氣中之重與鉛塊在水中之重計共六十匁而物體在水中之重與鉛塊在水中之重計共有十匁故可知物體所排斥之水量其重爲五十匁即 $60-10=50$ 因之可求得其比重爲 $20\div50=0.4$

三十二　有船一艘其入海面下部分之容積爲七十二立方米問船體及貨物之總重如何但海水之密度一立方粉有一·〇三瓩

答　七萬四千一百六十瓩

解　用瓩及立爲單位則船所排斥海水之體積爲七十二立方米即七萬二千立惟海水一立之重量爲一瓩零三因而所排斥海水之總量爲

$72000 \times 1.03 = 74160$瓩　即船體及貨物之總重量

## 第二章　比重（比重　固體之比重　液體之比重　氣體之比重）

第十四款　比重　凡各種物體以其同容積之重量相比較則顯著其差異如棉輕鐵重是也即凡各種之物質比較其同體積之重量謂之比重但其比較之標準常用攝氏四度之蒸溜水如一物體之重

爲 W 則與此物體等體積之水之重爲 $w$ 此物體之比重爲 S 則 $S=\frac{W}{w}$ (1) 因此可求得桐之比重爲〇·二鐵之比重爲七·〇八銅之比重爲 八·八阿蘇密紐烏謨之比重爲 二二·五 爲物質中比重之最大者也(諸物質之比重表詳於卷末)

夫攝氏四度之蒸溜水其一立方糎之重殆爲一瓦(其精細爲一·〇〇〇〇一三瓦) 則 V 立方糎之重殆爲 V 瓦如命 V 立方糎固體之重爲 W瓦其固體之比重爲 S 則 $S=\frac{W}{V}$ 故又可云物體之比重爲其一立方糎之重亦無大差 (其精細則有〇·〇〇〇〇一三倍之差)

第十五款　比重與密度之差別　比重與密度之異同因定義可知即凡一物體之密度爲單位體積所含物質之分量一物體之比重爲物體之重與其等體積攝氏四度水之重之比例如銅一立方寸之質量有 六六·二匁而一立方糎當 八·八瓦之重故

銅之密度以立方寸爲體積之單位以匁爲質量之單位則爲 六六·二匁 以立方糎爲體積之單位以瓦爲質量之單位則爲 八·八瓦 又攝氏四度之蒸溜水其一立方糎之質量爲 一·〇〇〇〇一三瓦故水之密度爲一·〇〇〇〇一三瓦（見第一篇二十一款）惟此數略近於一瓦故尋常稱水之密度爲一瓦若水之比重則吾人可任意命之爲一非一〇〇〇〇一三鐵之比重常爲七·八銅之比重常爲 八·八 而 體積與質量及重量之單位無論如何變化其比重毫無變異因比重爲水與他物體等容積之重相比較之數而此數即因體積及質量與重量之單位而變也

問題（以下俱以純水一立方糎之重視爲一瓦）

三十三　有立方形之金塊各邊爲二糎其重爲一五四·四瓦問金塊之比重如何

答　金之比重一九·三

解　準第十四款可知凡物體之比重等於以同體積之水之重除物體之重惟一立方糎水之重量爲一瓦而立方形之金塊爲八立方糎故得$154.4\div2^3=154.4\div8=19.3$ 爲金之比重

三十四　有直徑二糎之木球其重爲一·九六瓦問木球之比重如何

答　木之比重○·四六八

解　命球體之半徑爲 $r$ 則其體積爲 $\frac{4}{2}\pi r^3=\frac{4}{3}\times3.1416\times1^3$ 依公式 $S=\frac{W}{v}$ 故得 $(1.96)\div(\frac{4}{3}3.1416\times13)=0.468\cdots\cdots$ 爲木之比重

三十五　容積百立方糎之小瓶充入亞爾科兒(酒精)共重爲一○四·七瓦其空瓶之重爲二五·三四五問亞爾科兒之比重

答　亞爾科兒之比重○·七九三六有餘

解　因僅有亞爾科兒之重爲 $104.7-25.34=$

79.36瓦 準公式故得 $(79.36)\div100=0.7936\cdots\cdots$

三十六 當標準溫度及標準氣壓時玻璃球之容積爲六百二十立方糎充入窒素而權之共重三三·一二一瓦試將此玻球於眞空中權之則重三二·三四三瓦問窒素一立之重如何

答 一立之重爲一瓦二五四

解 因僅有窒素之重爲 $33.121-32.343=0.778$瓦 惟一立爲一千立方糎故得一立之重爲 $(0.778)\div0.62=1.254$瓦

三十七 有瓶充入水銀須其重量爲 一·四二六瓩問此瓶之容積如何

答 一百零四立方糎九有餘

解 因水銀之密度一立方糎有一三·五九 故水銀之體積爲以密度除重量即 $(1.426)\div13.59$ $=104.9$立方糎

三十八 水五高倫之重爲五十磅用高倫及磅爲

體積及重之單位則水之密度及比重如何

解　因五高倫之水其重量爲五十磅試以高倫與磅爲單位則水之密度爲一十即一高倫有十磅又以水爲比重之標準故水之比重常爲一(見第十五款)

三十九　鐵十立方糎之重爲七十八瓦今以水爲比重之單位其質量與體積之單位用瓦及立方糎與用匁及立方糎問鐵之密度及比重如何

解　以瓦及立方糎爲單位則一十立方糎之鐵其重爲七十八瓦故可知鐵之密度一立方糎有 $\frac{78}{10}=7.8$ 瓦　又同體積之水其重量爲十瓦故可知鐵之比重爲 $\frac{78}{10}=7.8$　試以匁及立方糎爲單位則因一瓦爲十五分之四匁故可知七十八瓦之鐵當 $\frac{4\times78}{15}=20.8$ 匁　因此可知鐵之密度每一立方糎有 $\frac{20.8}{10}=2.08$ 匁　惟十瓦之水當 $\frac{10\times4}{15}=2\frac{2}{3}$ 匁　故可知鐵之比重 $(2.08)\div(2\frac{2}{3})=$

7.8匁　由此可知凡表物體密度之數恒因單位之組織而變而表物體比重之數則恒不變

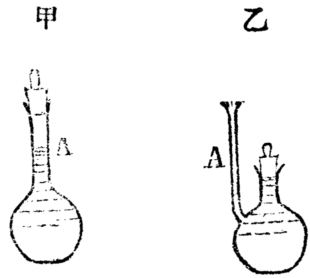
第十六款　固體比重之測定　凡測定固體比重之法本亞基美德之原理試舉其法如下

(一) 先以所欲測定比重之固體於空氣中權其重量命爲 W 次以極細之絲懸於天秤之皿下而垂之於水中復權其重量命爲 $w'$ (第十二款)即可知 $W-w$ 爲與此固體同體積之水之重命固體之比重爲 S 則 $S=\frac{W}{W-w}$ 又如砂糖食鹽等物最易溶解於水則如上所記水權之法不便適用故欲測定此等物體之比重則用石油的列並油依的兒亞爾科兒等之液體代水使其固體不溶解又不起化學作用今命 W 爲固體之重 $w$ 爲固體浸入液體中之重 $d$ 爲液體之比重則 $S=\frac{W}{W-w}d$ 此爲第一法

(二) 又如粉狀之固體不能以絲懸之而垂於水中

故欲測定此種物體之比重則須用比重瓶如圖所示之玻璃小瓶通例有從十立方糎至百立方糎之容積於其頸劃一標線

第十七圖

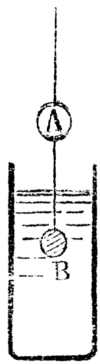



而所注之液體常達於此線之高則其容積爲比重瓶之容積先以粉狀固體於空氣中權之其重爲 W 次以任何液體其比重爲 $d$ 入於比重瓶中使達標線而權之其重爲 $w$ 又以粉狀固體入此瓶中而取其溢出之溢體使液體之高仍達於原標線復將此瓶權之其重爲 $w'$ 然則 W 爲固體之重 $w$ 爲瓶重與瓶容積液體之重之和 $w'$ 爲瓶重與從瓶容積內僅減去與固體等容積之液體重與固體之重之和故可知 $W+w-w'$ 爲從瓶容積

液體之重減去容積內僅減去固體等容積所餘之液體重必等於與固體等容積之液體重命固體之比重爲 S 則可得 $S=\frac{W}{W+w-w'}\times d$ 此爲第二法

(三) 又有一種物體其比重小於水及他種液體而全體不沈於液體中故用上之第一法不能知與物體同體積之液體重則另有第第三法如圖所示之A 體爲比重極小之固體今欲測定其比重則先於空氣中權之其重量爲W次於此固體之下別懸一與 A 體有適宜之重之固體 B 先令B體沈入水中而權之其重量爲 $a$ 復以 A 體及 B 體俱令沈水中而權之其重量爲 $b$ 命 A 體之比重爲 S 液體之比重爲 $d$

第十八圖



則得 $S=\frac{W}{a-b}\times d$ 因 W 爲 A 體在空氣中之重 $a$ 爲 A 體在空氣中之重與 B 體在水中之重之和 $b$ 爲 A 體在水中之重與 B 體在水中之重之和故 $a-b$ 爲 A 體在空氣中之重減去 A 體在水中之重即可知 $a-b$ 爲與 A 體同體積之液體重也

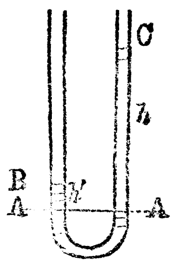
第十七款　液體比重之測定　凡測定液體之比重亦有三法今列舉之如下

(一) 依前欵用比重瓶之法先以欲測定其比重之液體充入比重瓶中使達於標線於天秤權之其重量爲 W 次傾出此液體而以蒸溜水仍充入比重瓶中使達於標線於天秤權之其重量爲 V 復將水傾出以空瓶於天秤權之其重量爲 $b$ 命液體之比重爲 S 則得 $S=\frac{W-b}{V-b}$ 因 $W-b$ 與 $V-b$ 爲同體積之液體及水之重故也此爲第一法

(二) 依亞基美德原理之應用先擇一任意之固形

物體須不溶解於欲測其比重之液體及水中又不與是等液體生化學作用將此固體於空氣中權之其重量爲 $b$ 次將此固體於液體中權之其重量爲 W 復將此固體於水中權之其重量爲 V 命液體之比重爲 S 則得 $S=\frac{b-W}{b-V}$ 因 $b-W$ 爲固形物體排斥液體之重 $b-V$ 爲固形物體排斥水之重故也此爲第二法

第十九圖




(三) 依用連通器之法如圖所示 U 字形之連通器試測定水銀之比重則於連通器之一端充入水銀若干量而於他端注水俟其靜止從其兩液體之界面 A 至兩液體之上端測得其高爲 $h$ 及 $h'$ 今水之密度爲 $d$ 水銀之密度爲 $d'$ 則依第六款所言液體壓力之強

度惟與其密度及深有關係今兩液體靜止不動則其壓力之强度恒相等故可知 $d\times h=d'\times h'$ 即 $d:d_{\prime}=h':h$ 故測定其兩端液柱之高而其 $h'$ 與 $h$ 之比即可得兩液體密度之比如既知一種液體之密度 $d$ 則他種液體之密度 $d'$ 可依 $d'=\frac{h}{h'}d$ 式求得既知兩液體之密度則其比重 S 容易求得此爲第三法

第十八款　氣體比重之測定　凡測定氣體之比重與液體比重測定之第一法同須用比重球但氣體甚輕比重球須稍大爲要其容積可從五百立方糎至三十立方糎今試以抽氣筒排去球內空氣於天秤權之其重量爲 $b$ 次將所欲測定其比重之氣體充入球內於天秤權之其重量爲 W 復將水傾入球內於天秤權之其重量爲 V 命氣體之比重爲 S 則得 $S=\frac{W-b}{V-b}$ 但其法有須注意者因氣體與溫度及壓力之關係而其體積之漲大收縮最甚故

雖同此氣體而溫度與壓力不同則其比重之變化甚顯故凡言氣體之比重須明示若干溫度若干壓力時之比重又凡氣體之比重與溫度及壓力之關係須知第六篇第一十三欵薄以耳及格魯殺庫之定律

問題

四十　有水晶塊於空氣中權之其重爲　一五·六瓦試垂於水中而權之其重爲　九·六二瓦問水晶塊之比重若何

答　水晶之比重　二·六〇有餘

解　因水晶塊在空氣中之重爲　一五·六瓦在水中之重爲　九·六二瓦故可知所失之重量爲與水晶塊同體積之水之重即　$15.6-9.62=5.98$　故得　$\frac{15.6}{5.98}=2.60\cdots\cdots$爲水晶之比重

四十一　有物體於空氣中權之其重爲二百七十六匁於水中權之其重爲二百四十四匁問此物體之比重若何

答　比重八·六

解　依前問題之解法故得　$276\div(279-244)=8.6$

四十二　有食鹽塊重 二六·四六瓦懸於比重〇·八七之添比油中而權之其重爲 一八·一六瓦問食鹽塊之比重若何

答　比重二·七七有餘

解　試以添比油之比重定爲標準（命爲一）則此食鹽之比重依問題四十之解法可得 $26.46\div(26.46-18.16)=3.18$　惟因題言已知添比油對於水之比重爲〇八·七 則可知食鹽對於水之比重爲　$3.18\times0.87=2.77\cdots\cdots$

四十三　鐵之比重爲七·五如有長十糎厚及幅各二糎之鐵塊其重若何又懸之於水中其重若何

答　鐵塊之眞重三百瓦　在水中之重二百六十五

解　因鐵塊之比重爲七·五則一立方糎之重爲七·五瓦故此鐵塊之總重爲　$7.5\times10\times2\times2=300$瓦　又試將鐵塊入於水中則其所排斥之水量爲與鐵塊同體積之水之量即此鐵塊入於水中所失之重量即　$10\times2\times2=40$立方糎　即四十瓦故可知鐵塊入水中之重量爲$300-40=260$瓦

四十四　銀之比重爲一〇·五如有一貫六百匁之銀塊其所占之體積有幾何立方寸

答　二十立方寸五三有餘

解　因銀之比重爲一〇·五故其一立方糎之重爲一〇·五惟因　1600匁$=\frac{1600\times15}{4}=6000$瓦　故可知銀塊之體積爲$\frac{6000}{10.5}$立方糎　試改算爲立方寸則得　$\frac{6000}{10.5}\times(.33)^3=20.53\cdots\cdots$立方寸

四十五　砂金狀之微細鑛物其重爲一·五六八

匁先注蒸溜水於比重瓶而權其重爲 二三・六二五匁次將鑛物入其中如法拭其溢出之水而權之其重爲 二五・一一二匁問此鑛物果爲純金與否但純金之比重爲一九・三

答 砂金之比重可能有一九・三則可視爲純金

解 命砂金之重 W 爲一・五六八匁瓶重與充入蒸溜水之容積之重 $w$ 爲二三・六二五瓶重幷砂金重與從瓶容積内僅減去與砂金等體積之水之重$w'$爲二五・一一二依而可知與砂金等體積之水之重爲 $W+w-w'-0.081$ 故得砂金之比重爲 $1.568\div0.081=19.3\cdots\cdots$ 卽可視爲純金

四十六 欲測定松木之比重取其一片先於空氣中權之其重爲三十三瓦次附鉛塊俱令沈水中而權之其重爲八十七瓦復僅將鉛塊沈水中而權之其重爲一百零四瓦問松木之比重若何

答　木片之比重〇·六六

解　令松木在空氣中之重 W 爲三十三瓦木片及鉛塊俱浸水中之重 $w$ 爲八十七瓦 僅鉛塊浸入水中之重 W′ 爲一百零四瓦依而木片所排斥水之重量爲 $W+w-W'=50$ 瓦故可知木片之比重 $33\div50=0.66$

四十七　欲測定純亞爾科兒之比重試充入比重瓶而權之(瓶重爲一三·四二五)當亞爾科兒溫度一十五度時其總量爲三三·二六八瓦次將十四度之蒸溜水仍充入比重瓶權之其重爲三八·四〇八瓦問攝氏十五度之純亞爾科兒與攝氏四度之水其比重若何

答　比重〇·七九三七

解　命僅有比重瓶之容積在攝氏十五度亞爾科兒之重 W 爲 $33.268-13.425=19.843$ 瓦同容積在攝氏十四度之水之重 $b$ 爲 38.408

$-13.425=24.983$瓦 故攝氏十五度之亞爾科兒其對於攝氏十四度之水之比重爲 $\frac{W}{b}=\frac{19.843}{24.983}$ 惟因攝氏十四度之水對於攝氏四度之水其比重爲 〇·九九九三 故由此可求得攝氏十五度之亞爾科兒其對於攝氏四度之水之比重………爲$\frac{19.843}{24.983}\times 0.9993=0.7937$

四十八 用連通器測定的列並油之比重其一端注水而他端注的列並油從兩液體之界面測得油柱之高六·七五寸 水柱之高五·八七寸 問的列並油之比重如何

答 的列並油之比重〇·八七

解 準十七款第三法 $d'=\frac{h}{h'}d$ 故可知油之比重(或密度)爲 $1\times\frac{5.87}{6.75}=0.87$

四十九 玻璃球之重三三·五六瓦 於海水中權之其重二二·八五瓦 於蒸溜水中權之其重爲二三·一三瓦試求海水之比重

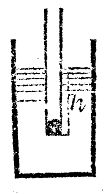
答　海水之比重一·〇二六有餘

解　因玻璃球排斥海水之重量爲　$33.56-22.85=10.71$瓦　玻璃球排斥蒸溜水之重量爲 $33.56-23.13=10.43$瓦　故可知海水之比重爲　$10.71 \div 10.43=1.026\cdots\cdots$

五十　有圓徑勻細之試驗管入以少許之水銀浮於水面立即入水中有五寸四分之深今浮之於依的兒中而入其中有七寸四分之深問依的兒之比重若何

答　依的兒之比重　〇·七三有餘

第二十圖




解　命試驗管并水銀之重爲 W 管之橫斷面積爲 A 沈於密度 $d$ 之液體中其深爲 $h$ 則其所排斥之液量爲 $A\times h\times d$　與管重　W　相等故命依的兒之密

度爲 P 水之密度爲 $d$ 則 $W=A\times 54\times d=A\times 74\times P$ 故 $d:P=74;54=0\text{-}73$ 爲依的兒對於水之比重

五十一　有二物體其質量爲 M 及 M′ 於水中權之其重相等如 M 之比重爲 S 則 M′ 之比重 S′ 如何

解　因 M 及 M′ 之二物體於水中權之其重相等命爲 $b$ 則得 $S=\frac{M}{M'-b}$ 因M爲在空氣中之重而 $M-b$ 爲與 M 物體同體積之水之重故也因之可求得 $b=\frac{SM-M}{S}$ 又依同理而得 $S'=\frac{M'}{M'-b}$ 以 $b$ 之同數代之則得 $S'=\frac{M'}{M'-\frac{MS-M}{S}}$

$$=\frac{M'\times S}{M'\times S-M\times S+M}$$

五十二　有石塊其比重爲 二.八試沈之於水中其加速度若何並達四米九深之底需時若干秒

答　沈降之加速度每秒每秒六百三十糎　達四米九之深需時一秒二五

解 (一)因石塊之比重爲二·八則其一立方糎之重量爲二·八瓦故地球之重力雖僅以二·八瓦之力可以引之然石塊沈於水中則水有一瓦之浮力使之上浮故一立方糎之石塊在水中欲沈而下僅有一瓦八之力試改算爲達音力則得$1.8\times980$達音 惟受此力作用之石塊其質量爲二·八瓦則其所受之加速度$a$爲$(1.8\times980)\div2.8=630$糎 但石塊初落水中雖有此之加速度然因水與石塊間之摩擦其實際下沈之加速度較此爲小其變化甚爲複雜 又假令石塊沈下之加速度恒爲每秒每秒六百三十糎則達四米九之深處依第二篇第一款之公式 $S=\frac{1}{2}at^2$ 即$4.8=\frac{1}{2}6.3\times t^2$因之可求得 $t=1.25$秒爲所需之時間

五十三 有科枯片其密度爲一立方糎有〇·二五瓦試將其全量三百瓦浮於盛水令滿之器中

則其溢出之水量幾何

答　三百立方糎

解　因科枯片之比重爲〇·二五較水爲輕故浮於水面惟其全重量爲三百瓦故其所排斥之水量爲三百立方糎卽其溢出器外之水量也

五十四　有比重 $S$ 體積 $V$ 之固體浮於比重 $S'$ 之液面其沈於液面下部分之體積爲$\frac{SV}{S'}$ 試證之

解　因固體之體積爲 $V$ 比重爲 $S$ 則固體之全量卽可知爲 $V\times S$ 又液體之比重爲 $S'$ 故可知固體浮於液面之時則其所排斥液體之體積爲$\frac{V\times S}{S'}$ 卽固體沈於液面下部分之體積也

# 第六篇 熱學

## 第一章 溫度及寒暖計

問一 何謂溫度

問二 溫度與熱之差別

問三 二個物體其溫度相等則其情形如何

問四 試略述水銀寒暖之作法

問五 常用寒暖計（水銀或酒精）之原理如何

問六 寒暖計之標準點通常用何溫度

第一款 寒暖計之標準點 凡在標準氣壓（卽水銀柱七十六糎之氣壓或謂之常氣壓）時其水之凝固點（卽氷之融解點）及沸點恒有一定不變之溫度寒暖計之標準溫度恒利用之

三種寒暖計之分度法 如上所言之凝固點及沸點於此兩溫度間任分爲若干度謂之分度法試舉三種於下

(一) 攝氏之寒暖計恒以融解點爲零度沸點爲一百度而於此沸點與融解點之間分之爲一百等分故攝氏之分度法爲百分度法學術上恒用之

(二) 列氏之寒暖計恒以氷點爲零度沸點爲八十度而於此沸點與氷點之間分之爲八十等分歐洲大陸多用之

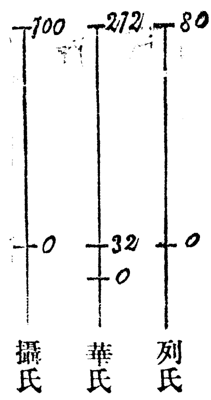
(三) 華氏之暖寒計恒以氷點爲三十二度沸點爲二百一十二度而於此沸點與氷點之間分之爲一百八十等分故華氏之零度在氷點以下三十二度日本及英吉利諸國用之

第二款　溫度之稱法及書法　凡零點以上之溫度稱爲某氏若干度例如華氏十五度列氏三度攝氏一千五百度是也零點以下之溫度從零點順次數其一度二度例如攝氏零下十度華氏零下九十度是也零下爲十一度即比零下十度較低一度又凡記度之法於度數之右肩附一小圈例如四十五

度則以 45° 記之又零點下之溫度附以負號例如零下十度則以 −10° 記之又區別三氏之稱法則附以三氏名之首字 CRF 於數字之終例如攝氏百度則以 100°C 記之華氏零度則以 0°F 記之列氏零下十度則以 −10°R 記之

第三款 寒暖計之換算法 攝華列之三種寒暖計其溫度數目之改算可從三種之分度法容易推得即凡同溫度之氷點與沸點之間分爲若干等分攝氏爲一百分列氏爲八十分華氏爲一百八十分故

第 一 圖




攝氏一度當列氏一度之一百分之八十當華氏一度之一百分之一百八十故以 C° R° F° 表三氏之

度數則攝氏C度如以列氏表之則爲 $(C\times\frac{80}{180})$度以華氏表之則爲 $(C\times\frac{180}{100}+32)$度 又$\frac{180}{100}=\frac{9}{5}$ $\frac{180}{80}=\frac{5}{4}$故得攝氏與列氏或華氏度數改算之公式爲

$$C^{\circ}=\frac{5}{4}R^{\circ}=\frac{5}{9}(F^{\circ}-23)\cdots\cdots(一)$$

依同理而得列氏與攝氏或華氏度數改算之公式爲

$$R^{\circ}=\frac{4}{5}C^{\circ}=\frac{4}{9}(F^{\circ}-32)\cdots\cdots(二)$$

依同理而得華氏與攝氏或列氏度數改算之公式爲

$$F^{\circ}=\frac{9}{5}C^{\circ}+32=\frac{9}{4}R^{\circ}+23\cdots\cdots(三)$$

問題

一　人體之常温爲攝氏三十七度當華氏何度

答　當華氏九十八度六

解　準公式 $F^{\circ}=C^{\circ}\frac{5}{9}+32^{\circ}=37^{\circ}\frac{5}{9}+32^{\circ}=98^{\circ}.6$

二　通常室內之溫度爲華氏六十五度試改算爲

答　當攝氏十八度三分之一　當列氏十四度三分之二

解　因華氏六十五度之溫度爲位於氷點上之三十三度即 $65^\circ-32^\circ=33^\circ$ 試改爲攝氏之度數則得　$C^\circ=33^\circ\times\frac{5}{9}=18^\circ\frac{1}{3}$　試改爲列氏之度數則得　$R^\circ=33^\circ\times\frac{4}{9}=14^\circ\frac{2}{3}$

三　攝氏之負一十一度叉七分之三當華氏何度

答　當華氏一十一度叉七分之三

解　準公式 $F^\circ=C^\circ\frac{5}{9}+32^\circ=11^\circ\frac{3}{7}\times\frac{5}{9}+32=11^\circ\frac{3}{7}$

四　攝氏與華氏同數之溫度如何

答　負四十度

解　命相等溫度之數爲 $x$ 因華氏之 $x$ 度準公式可知當攝氏之度數爲　$(x^\circ-32^\circ)\frac{5}{9}$　故 $xC^\circ=(xF^\circ-32)\frac{5}{9}$ 即 $x\times\frac{9}{5}=x-32$ 即 $x(\frac{9}{5}-1)=-32^\circ$ 因之可求得 $x=-40^\circ$ 爲相等溫度之數

五　如次所記之溫度悉以他二氏之寒暖計改算之

| | | |
|---|---|---|
| $-31^{\circ}F$ | $-40^{\circ}C$ | $-40^{\circ}R$ |
| $+50^{\circ}F$ | $+19^{\circ}.25C$ | $+6^{\circ}R$ |
| $+117^{\circ}.5F$ | $+22^{\circ}.5C$ | $+77^{\circ}R$ |

解　準公式可求得

$-31^{\circ}F=35^{\circ}C=28^{\circ}R$　$+5^{\circ}F=-15^{\circ}C=12R$

$+117^{\circ}5F=47^{\circ}5C=38^{\circ}R$

又準公式可求得

$-40^{\circ}C=-40^{\circ}F=-32^{\circ}R$

$+19^{\circ}.25C=66^{\circ}.65F=15^{\circ}.4R$

$+22^{\circ}.5C=72^{\circ}.5F=18^{\circ}R$

又準公式可求得

$-40^{\circ}R=-58^{\circ}F=-50^{\circ}C$

$+6^{\circ}R=45^{\circ}.5F=7^{\circ}.5C$

$+77^{\circ}R=205^{\circ}.25F=96^{\circ}.25C$

攝氏及列氏之度數

第二章　熱膨脹（長面積體積之膨脹）用連通器測液體之膨脹係數　薄以耳及寫兒之定律

絕對溫度

問一　固體之長及立積之膨脹試略舉其簡單實驗

問二　液體及氣體之膨脹試詳其簡明方法

問三　液體之視脹及眞脹試說明之

第四款　長之膨脹係數（一名線脹率）設如有棒長爲 L「熱之使其溫度昇高爲 $t^{0}$ 其延長後之棒長爲」L′ 則此棒延長之變化平均一度爲 $\frac{L'-L}{t}$ 更以原長除之則其所得之商即 $\frac{L'-L}{t\times L}$ 爲此棒長之膨脹係數通例以 $\beta$ 字表之則其關係式爲

$$\beta=\frac{L'-L}{t\times L}$$

準此式而得次之意義

一）溫度高一度所生之延長 L′－L 以原長 L 除

之之分數

(二)溫度高一度所生之延長 $L'-L$ 與原長相比之數(以小數表之)

(三)表示單位長之棒於溫度昇高一度時所生延長量之數

如以上式變之則得 $L'-L=\beta\times L\times t$ 及 $L'=\beta\times L\times t+L=L(1+\beta t)$ 利用此等式則棒之全原長為 $L$ 全延長之量為 $L'-L$ 溫度僅昇 $t$ 度後之總長為 $L'$ 其膨脹係數為 $\beta$ 此五項之中任意知其三項則其餘二項可以求得

凡尋常固體之最大膨脹率不過十萬分之五其各種物質之膨脹係數表詳載卷末

問題

六　當攝氏十五度時有銅棒長三尺五寸問七十度時棒長幾何但銅之膨脹係數為 〇.〇〇〇〇一七

答　三尺五〇三三弱

解　因膨脹係數 $\beta$ 爲 〇·〇〇〇〇一七故原長一尺之銅棒如溫度上昇一度則其長爲 $1+0.000017$ 如溫度上昇五十五度即 $70^\circ-15^\circ=55^\circ$ 則其長爲 $1+0.0\ 0017\times55$ 惟因銅棒之原長爲三尺五寸故可知 $3.5(1+0.000017\times55)=3.50327\cdots\cdots\cdots$

七　有眞鍮之物尺當攝氏零度時恰當一尺如當十八度時則其比一尺當稍長幾何但眞鍮之膨脹係數爲〇·〇〇〇〇一八八

答　增長〇·〇〇〇三三八尺

解　準公式 $L'-L=\beta\times L\times t$ 故得 $0.000188\times1\times18=0.000338\cdots\cdots$

問四　固體長膨脹之應用試舉其實例

問五　補正振子之理試說明之

第五款　面積之膨脹係數(一名面脹率) 設如有

A 爲原面積之板熱之使其温度昇高爲 $t^0$ 其板面積增大後之總面積爲 $A'$ 則此板面積增大之變化平均一度爲 $\frac{A'-A}{t}$ 更以原面積除之則其所得之商爲 $\frac{A'-A}{t\times A}$ 爲此板面積之膨脹係數即可知面積之膨脹係數爲單位面積於温度高一度時所生變化之比也

第六欵　立積之膨脹係數(一名体脹率) 設如有立積 V 之物體熱之使其温度昇高爲 $t^0$ 其立積增大後之全立積爲 $V'$ 則此立積增大之變化平均一度爲 $\frac{V'-V}{t}$ 更以原立積除之則其所得之商爲 $\frac{V'-V}{t\times V}$ 爲此物體之膨脹係數通例以 $a$ 字表之則其關係式爲 $a=\frac{V'-V}{t\times V}$ 又 $V'-V=a\times t\times V$ 即 $V'=a\times tV+V$ 即 $V'=V(1+at)$ 即可知立積之膨脹係數爲單位立積於温度昇高一度時所生立積之變化量也但凡温度不上昇則其體積不增大雖爲通例然又有稍形收縮者如水之近氷點

是也

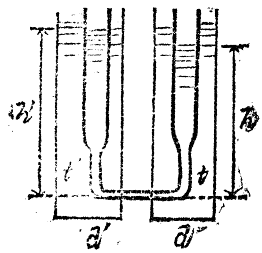
第七欵　體脹率殆三倍於線脹率　今試就一物體而觀其體積之膨脹則於其長幅厚之三方向各基於長之膨脹如有各邊之長爲 L 之立方體其長之膨脹係數爲 $\beta$ 則此物體當溫度上昇一度時其各邊之延長爲 $L+\beta L$ 依此可知物體之立積必爲 $(L+\beta L)^3$ 即立積變化之量爲 $(L+\beta L)^3-L^3$ 惟因立積之膨脹係數爲 $\alpha$ 則 $\alpha=\frac{(L+\beta L)^3-L^3}{L^3}=3\beta+3\beta^2+\beta^3$　依第四欵所言之理可知此式中之 $\beta$ 不得過於〇·〇〇〇〇五則其自乘數 $\beta^2$ 及三乘數 $\beta^3$ 俱爲甚小之數可棄去之而僅取其第一項即此爲立積之膨脹係數例如　$\beta=0.00005$

$3\beta=0.00015$　　　$3\beta^2=0.0000000075$

$\beta^3=0.000000000000125$　則可知 $3\beta^2$ 及 $\beta^3$ 比 $3\beta$ 其數甚小故可知 $\alpha=3\beta$ 即立積之膨脹率可視爲長之膨脹率之三倍

第八款　用連通器測定液體之眞張率法　設如有液體當 t 溫度時其立積爲 V 熱之使其温度昇高爲 $t'$ 其立積爲 V 則此二時液體之密度與其立積爲反比例即 $d' : d = V : V'$ 如圖所示之連通器依第

第二圖




五篇第十七款之理已知其兩端液體之高恒與其密度爲反比例其式爲 $h : h' = d' : d$ 今欲測定其膨脹率以液體盛於連通器之兩端而異其兩端之溫度爲 t 及 $t'$（如一端以氷圍之而他端以湯澆之）次精測兩端液柱之高爲 $h$ 及 $h'$ 然則 $h : h' = d' ; d = V : V'$ 其眞膨脹係數命爲 $a$ 則得 $V' = V\{1 + a(t' - t)\}$ 　即 $\frac{V'}{V} = 1 + a(t' - t)$ 即 $\frac{h'}{h} =$

$1+a(t'-t)$ 因此可求得 $a=\frac{h'-h}{h(t'-t)}$ 即可知用連通器以測定兩端之液體已知其密度及高即可求得其眞膨脹係數此爲舅羅及灘依契之法

問題

八 有金塊當攝氏十五度時有五百六十立方糎之體積如温度增至百度時則體積須增幾何但金體積之膨脹係數爲○·○○○○四五

答 體積之增加爲二·一四····立方糎

解 因温度之增加爲八十五度即 $100^\circ-15=85^\circ$ 故準體脹之公式 $V'-V=a\times t\times V$ 可得 $0.000045\times85\times560=2.14\cdots\cdots$

九 有玻璃瓶當攝氏零度時有一立方之容積如温度增至八十度時則其容積如何但玻璃之體脹率爲○·○○○○二五

答 一立○○二

解 準體脹之公式 $V'=V(1+at)$ 故得

$1(1+0.000025\times 80)=1.02\cdots\cdots$

十　面積之膨脹係數殆當長之膨脹係數之二倍試言其理

解　凡物體面積之膨脹爲其幅及長二方向之線膨脹今設有物體其表面爲以 L 長爲各邊之平方形此物體之線膨脹係數爲 $\beta$ 則此物體於溫度上昇一度時其各邊之延長可知爲 $L(1+\beta)$ 即可知此物體之面積爲 $[L(1+\beta)]^2$ 因而其面積之增大爲 $L^2(1+\beta)^2-L^2$ 故其面積之膨脹係數以 P 表之則可知其式爲 $P=\frac{L^2(1+\beta)^2-L^2}{L^2}=2\beta+\beta^2$ 惟依第四款所言之理各物體之線膨脹係數不得過十萬分之五則 $\beta^2$ 爲極小之數可省去之而僅取其第一項即 $P=2\beta$ 即可知面積之膨脹係數殆等於線膨脹係數之二倍

十一　銅之膨脹係數爲 〇·〇〇〇〇一七 問其

面之膨脹係數如何並其體之膨脹係數如何

答 面膨脹係數爲〇·〇〇〇〇三四 體膨脹係數爲〇·〇〇〇〇五一

解 依前問題之解法可知面積之膨脹係數殆等於線膨脹係數之二倍故得 $0.000017\times 2=0.000034$ 又依第七欵所言之理可知體積之膨脹係數殆等於線膨脹係數之三倍故得 $0.000017\times 3=0.000051$

十二 有玻璃弗蘭斯哥當攝氏零度時其容積爲一千二百五十立方糎當百度時其容積爲一千二百五十三立方糎問玻璃之長之膨脹係數

答 玻璃之長膨脹係數爲〇·〇〇〇〇〇九

解 先求得玻璃之體膨脹係數 $\alpha=\dfrac{1253.4-1250}{1250\times 100}=0.000027$ 惟依第七欵所言之理可知線膨脹係數殆等於體膨脹係數之三分之一故得 $\beta=\dfrac{0.000027}{3}=0.000009$

十三　用連通器盛入水銀其一端圍之以氷則水銀柱之高爲五十糎一而其他端圍之以百度之水蒸流則水銀柱之高爲五十一糎問水銀之眞膨脹率幾何

答　體積之膨脹係數約爲〇·〇〇〇一八

解　依第八欵之理已知連通器在攝氏零度之一端其水銀柱之高爲 $h_0$ 五十糎一在攝氏一百度之一端其水銀柱之高 $h_{100}$ 爲五十一糎其水銀之眞膨脹係數以 $a$ 表之故準公式而得

$$a=\frac{h_{100}-h_0}{h_0(100-0)}=\frac{51-50.1}{50.1\times100}=0.00018$$

十四　酒精之眞膨脹率爲〇·〇〇一一一用連通器盛之其一端圍之以氷則酒精柱之高爲二尺而其他端圍之以五十度之溫水問酒精柱之高幾何

答　二尺一一一

解　凡連通器之兩端其液柱之高與其各相當

溫度時之密度爲反比例今酒精之膨脹係數 $a$ 爲 ○·○○一一一則當攝氏零度時有 $V^0$ 之體積如酒精之溫度昇至攝氏五十度則可知其體積爲 $V=V^0(1+a\times 50)$ 命攝氏零度時之密度爲 $d_0$ 攝氏五十度時之密度爲 $d_{50}$ 則可知兩密度之比如其兩體積之反比故得 $d_{50}:d_0=V_0:V_0(1+a\times 50)=1+a\times 50$ 惟連通器之兩端酒精柱之高爲 $h_0$ 及 $h_{50}$ 已知兩高柱之比如其兩密度之反比故可知 $h_0:h_{50}=d_{50}:d_0=1+a\times 50$ 即 $h_{50}=(1+a\times 50)h_0$ 今已知 $h_0$ 爲二尺故得 $h_{50}=(1+0.00111\times 50)2=2.111$尺

十五 攝氏四度之水其密度爲一而五十度之水其密度爲 ○·九八八一九問四度與五十度之間其平均膨脹率如何

答 平均膨脹率約爲○·○○○二六

解 依前問題之同理命四度與五十度之間

其平均膨脹係數爲 $a$ 則攝氏四度時之水有 V 之體積至攝氏五十度時則其體積之增大爲 $V[1+a\times(50-4)]$ 今攝氏四度時之密度爲 $d_4$ 攝氏五十度時之密度爲 $d_{50}$ 則可知兩密度之比如其兩體積之反比故得 $d_{50}:d_4=V:V[1+a(50-4)]=1+(50-4)d=1+46\times a$ 惟依題言已知 $d_{50}:d_4=0.98819:1=1.01195$ 即 $1.01195=1+46\times a$ 故 $46\times a=0.01195$ 因之可求得 $a=0.01195\div46=0.00026$

十六 攝氏四度之水其密度爲一而百度之水其密度爲 〇·九五八六六問四度與百度之間其平均膨脹率如何

答 平均膨脹係數約爲〇·〇〇〇四五

解 依前問題之同理可知兩密度之比爲 $d_{100}:d_4=1+96\times a$ 惟依題言已知兩密度之比爲 $d_{100}:d_4=0.95866:1=1.04312$ 即 1.04312

$=1+96\alpha$　因之可求得　$\alpha=0.04312\div96=0.000449$

第九欵　氣體之膨脹　凡固體與液體及氣體之膨脹有最著之異點即凡固體之膨脹率最小就其中之最大者亦不得過十萬分之五且其膨脹後之形狀悉與原形相似液體則因温度之高下而其膨脹之比例亦異故温度愈高則其膨脹係數較大(如前問題十五及十六)氣體則於三體中其膨脹係數爲最大又其膨脹後之形狀最無規律且各種氣體之膨脹係數大略相等

法人寫兒由實驗發明次之定則曰凡各種氣體之膨脹率殆有同一之數值爲二百七十三分之一即〇.〇〇三六七也準此定律而作一公式則氣體當攝氏零度時其立積爲$V_0$當$t°$度時其立積爲V則得 $V=V_0+0.00367\times t\times V_0=V_0(1+0.00367\times t)=V_0(1+\frac{t}{273})$但炭酸氣水蒸汽等爲容易液化

之氣體則其膨脹係數常稍大於〇·〇〇三六七

第十款　絕對溫度　依寫兒之定律則攝氏零度時其立積爲 $V^0$ 之氣體若當攝氏 $t^0$ 度時則其立積 $V=V^0(1+\frac{t}{273})$ 若氣體在氷點以下之溫度亦可依此規律而知其膨脹係數之收縮亦爲二百七十三分之一故氷點下溫度每下一度則其立積之減縮爲二百七十三分之一然則溫度在氷點下二百七十三度即 $-273^0C$ 則其立積 $V=V^0(1-\frac{1}{273}\times 273)$ 即可知氣體之立積爲零故此時之溫度稱爲溫度之絕對零度或稱爲絕對溫度通例以 T 表之例如 $-273^0C=0^0T$　$0^0C=273^0T$　$15^0C=288T$ 即凡攝氏 $t^0$ 度時等於二百七十三度又加 $t^0$ 度之和爲絕對溫度 T 也惟因各種氣體實際不達於攝氏零下二百七十三度之低溫度即化爲液體或固體不能適用寫兒之定律但凡不至於距氷點甚遠之溫度則其間氣體之膨脹係數依舊爲二百七

十三分之一可適合於寫兒之定律與冰點上之高溫度相同故用絕對溫度法則計算上及理論上較爲便益

因凡攝氏溫度法依寫兒之定律而得 $V=V_0(1+\frac{1}{273}\times t)$ 惟攝氏零度等於絕對溫度 T 之二百七十三度攝氏 $t^0$ 度等於絕對溫度 T 之二百七十三度又加 $t^0$ 度之和 故 $V_t=V_0(1+\frac{t}{273})=V_0(\frac{273+t}{273})=V_0\frac{T^0}{273}$ 即 $V_0:V_t=273^0:T^0$ 即可知一定質量之立積恆與絕對溫度爲正比例

問題

十七 水之沸騰點當絕對溫度之何度

答 水之沸騰點在攝氏一百度當絕對溫度三百七十三度

解 準公式 $T^0=273^0+t^0=273^0+100^0=373^0$

十八 華氏一百一十二度試改算爲絕對溫度

答 當絕對溫度三百一十七又九分之四

解　先以華氏温度改算爲攝氏溫度則得 $(112-32)\frac{5}{9}=44^{\circ}\frac{4}{9}$C 次加入二百七十三度即得 $273+44\frac{4}{9}=317\frac{4}{9}$ 爲絕對温度

十九　當攝氏零度時有十五立之空氣當三十度時則空氣須占幾何立之立積

答　約一十六立六五二

解　因空氣之膨脹係數爲〇·〇〇三六七 即二百七十三分之一故在攝氏零度時有十五立之空氣如在攝氏三十度時則空氣之容積準公式故得 $V=15(1+0.000367\times30)=16.652$

二十　如上記之空氣令其立積倍爲三十立則其温度須達何度

答　攝氏二百七十三度

解　因十五立之空氣如溫度昇至 $x$ 度則其體積增爲三十立故可知　$30=15(1+\frac{x}{273})$　因之可求得 $x=273^{\circ}$C

二十一　攝氏二十七度時有十五立之空氣如冷至攝氏七度則立積之收縮幾何

答　體積收縮爲一立

解　設令此空氣在攝氏零度時有 $V_0$ 立之體積則當攝氏二十七度時其體積爲 $V_{27}=V_0\left(1+\frac{27}{273}\right)$ 當攝氏七度時其體積爲 $V_7=V_0\left(1+\frac{7}{273}\right)$ 因之可求得兩體積之比如其相當之絕對溫度之比即 $V_{27}:V_7=300:280$ 惟 $V_{27}=15$ 立　故 $V_7=15\frac{280}{300}=14$ 立　故可知體積之收縮爲 $V_{27}-V$ $=15-14=1$ 立

二十二　一定量之氣體當攝氏十七度時之立積欲令其脹大二倍則其溫度如何但此氣體之膨脹係數爲〇·〇〇三六七

答　攝氏三百零七度

解　凡一定質量之氣體當攝氏零度時有 $V_0$ 之立積如在攝氏十七度時則其體積爲

$V_{17}=V_0\left(1+\frac{17}{273}\right)$ 如所求之溫度爲 $x$ 則其體積爲 $V_x=V_0\left(1+\frac{x}{273}\right)$ 惟題言溫度 $x$ 度時之體積 $V_x$ 爲十七度時體積 $V_{17}$ 之二倍故得 $V_{17}:V_x=(273+17):(273+x)=1:2$ 故可知 $273+x=2(273+17)$ 即 $x=307C$

二十三　攝氏每一度其膨脹係數爲 〇·〇〇三六七試以華氏一度改算其膨脹係數

答　華氏一度之膨脹係數約爲 〇·〇〇二〇四

答　因華氏一度當攝氏一度之九分之五故溫度上昇一度則氣體之膨脹係數僅爲 〇·〇〇三六七如上昇九分度之五則可知其膨脹係數爲 $0.00367\times\frac{5}{9}=0.00204$

第十一欵　二定律組合之公式　如上欵所言寫兒之定律氣體之壓力常不變惟示溫度與立積之關係如第五篇第十一欵所言薄以耳之定律溫度

常不變惟示壓力與立積之關係今若温度及壓力俱變欲求其體積之變化又或於一定之温度時令氣體占任意之體積須加幾何之壓力是則温度及壓力及體積之三者俱變欲求此三者之關係可從薄以耳及寫兒之二定律容易求得

玆設令温度爲 $0^\circ$ 壓力爲 $P_0$ 有占體積 $V_0$ 之氣體今若温度變爲 $t^\circ$ 壓力變爲 $P$ 則此氣體之立積變爲 $V$ 欲求此 $P_0\ V_0\ P\ V\ t$ 數者之關係先就其溫度 $0^\circ$ 壓力 $P_0$ 占立積 $V_0$ 之氣體如其溫度毫無變化而壓力從 $P_0$ 變爲 $P$ 則其立積從 $V_0$ 變爲 $V'$ 此變化之關係依薄以耳之定律可知 $PV'=P_0V_0$ 即 $V'=\frac{P_0V_0}{P}$ 惟此溫度 $0^\circ$ 壓力 $P$ 占 $V'$ 立積之氣體熱之使其昇至 $t^\circ$ 度則於此間氣體之膨脹立積從 $V'$ 變爲 $V$ 而其壓力始終不變此變化之關係依寫兒之定律可知 $V=V'(1+\frac{t}{273})$ 以 $V'$ 之同數代之故得 $V=$

$\frac{P_0V_0}{P}(1+\frac{t}{273})$ 即 $PV=P_0V_0(1+\frac{t}{273})=P_0V_0(\frac{273+t}{273})$ ………(甲)

又用絕對溫度法則因 $273+t=T^0$ 即

$\frac{PV}{P_0V_0}=\frac{273+t}{273}=\frac{T}{T^0}$……………(乙)

故凡一定量之氣體其溫度與壓力無論如何變更而壓力偕體積之相乘積與其絕對溫度之比恒爲一定不變此爲薄以耳及寫兒二定律之組合

從薄以耳及寫兒二定律組合之公式如壓力不變則準(甲)式而 $P=P$ 故得 $V=V_0(1+\frac{t}{273})$ 即寫兒之定律 如溫度不變而變其壓力則準(乙)式而 $T^0=T$ 故得 $PV=P_0V_0$ 即薄以耳之定律

第十二欵　標準溫度及標準壓力　凡氣體之密度及體積等恆因溫度及壓力之變化而異既如前所言通常所言氣體之密度及立積即溫度在攝氏零度壓力爲氣一壓（零度時水銀柱高七十六糎之壓力）時之密度及立積也此溫度及壓力謂之

標準溫度及標準壓力

問題

二十四　溫度 $t^0$ 壓力 P 之下其氣體之立積爲 V 則當標準溫度及標準壓力時其氣體之立積 $V_0$ 如何

解　於攝氏 $t^0$ 度及壓力 P 時其體積爲 V 於攝氏零度及壓力 $P_0$ 時其體積爲 $V_0$ 則準薄以耳及寫兒二定律組合之公式　$VP=V_0P_0(1+\frac{t}{273})=V_0P\frac{273+t}{273}$　故　$V_0=\frac{PV}{P_0}\times\frac{273}{273+t}$

二十五　攝氏十七度壓力四百耗之下有十六立之空氣則標準溫度及標準壓力時其空氣之立積如何

答　七立九三

解　於攝氏十七度壓力四十糎時其體積 V 爲一十六立於攝氏零度及壓力七十六糎時所求之體積爲 $V_0$ 則依薄以耳及寫兒之定律而得

$\frac{76\times V_0}{40\times 16}=\frac{273}{273+17}$ 故 $V_0=\frac{40\times 16\times 273}{76\times 290}=7.93$立

二十六　不含水蒸瀛之空氣其標準溫度標準壓力時一立之重爲　一·二九三〇瓦問攝氏百度氣壓六百耗時則一立之重幾何

答　〇·七四七三瓦

解　於攝氏零度及壓力七十六糎時空氣一立之體積有　一·二九三瓦之重於攝氏百度及壓力六十糎時則空氣之立積爲　$V=1\times 76\frac{273+100}{60\times 273}$立故得一比例式 V立:1.293瓦::1立:$x$瓦即可知$x=\frac{1.293}{V}=\frac{1.293\times 60\times 273}{76\times 373}=0.7473$瓦

二十七　一氣壓之下有攝氏二十度之空氣密閉之於弗蘭斯哥中而垂之於九十七度之水蒸瀛內則弗蘭斯哥中空氣之壓力幾何並此弗蘭斯哥能勝二氣壓半之壓力則至若干度始破裂

答　攝氏九十七度之壓力爲一·二六氣壓　攝氏四百五十九度五時之壓力爲二氣壓半

解　攝氏二十度時之壓力爲一氣壓如熱之使達攝氏九十七度而壓力增爲P則其體積之變化爲$\frac{1\times V}{273+20}=\frac{P\times V}{273+97}$

故得 $P=1.26$氣壓　又 P 爲二氣壓半時其所求之溫度爲攝氏 $t^0$ 度故得 $\frac{1\times V}{273+20}=\frac{2.5\times V}{273+t}$

因之可求得 $t^0=459.5C$

二十八　二個內空之球其內徑爲 $r$ 及 $r'$ 於兩球內充入同量之空氣其內徑 $r$ 之球熱至 $t^0$ 度內徑 $r'$ 之球熱至 $t'^0$ 度試證其兩球內空氣壓力之比如 $\frac{1+at}{r^3}:\frac{1+at'}{r'^3}$併證其壓於兩球內面之空氣其全壓力之比如 $\frac{1+at}{r}:\frac{1+at'}{r'}$

解　於兩球內充入同質量之空氣其內徑 $r$ 之球容積爲 V 於此中空氣壓力之强度爲 P 溫度爲 $t^0$ 其內徑 $r'$ 之球容積爲 $V'$ 於此中空氣壓力之强度爲 $P'$ 溫度爲 $t'$ 則依薄以耳及寫兒之定律其空氣之膨脹率命爲 $a$ 則得

$\frac{PV}{1+at}=\frac{P'V'}{1+at'}$ 因而兩壓力之比 $P:P'=\frac{1+at}{V}:\frac{1+at}{V'}$ 惟兩球內體積之比如其兩內徑三乘之正比即 $V:V'=r^3:r'^3$ 以此同數代入上式故得 $P:P'=\frac{1+at}{r^3}:\frac{1+at'}{r'^3}$ 又二球之全內面積之比$r^2:r'^2$故空氣壓於各球之全壓力之比爲 $Pr^2:P'r'^2=\frac{(1+at)r^2}{r^3}:\frac{(1+at')r'^2}{r'^3}$即 $Pr^2:P'r'^2=\frac{1+at}{r}:\frac{1+at'}{r'}$

## 第三章　比熱 (熱量之單位　比熱比熱測定法)

第十三欵　熱量之單位　凡熱量之常用單位謂之一加羅即一瓦之水令其溫度上昇一度所需之熱量也一稱瓦加羅或稱爲小加羅又計多量之熱量即一瓩之水令其溫度上昇一度所需之熱量謂之瓩加羅或稱大加羅即瓦加羅之千倍小加羅之符號以 $c$ 記之大加羅之符號以 C 記之以便易於識別

試以實驗徵之設如在任意溫度攝氏 $t$ 度時有

M 瓦之水量熱之使其上昇至溫度 $t'$ 度則其所需之熱量爲 $M(t'-t)$瓦加羅　即凡在低溫度或高溫度有一瓦之水量熱之使其溫度上昇一度其所需之熱量殆相等

附記　依精密之測定則水之溫度令其上昇一度其所需之熱量因其時之溫度不免少異但其差甚小故通常可視爲無差以便測各種之熱量容易計算也

第十四欵　比熱　凡物體之溫度令其上昇其所需之熱量恒因其物體之質量而有多寡如銅塊與水銀其質量相等今欲令其昇高達同溫度則銅塊比水銀所需之熱量較多故一物質之比熱即其物之若干量熱之使昇一度所需之熱量與同質量之水熱之使昇一度所需之熱量之比也故以加羅測熱量則一物質之比熱爲其一瓦量昇高一度所需之加羅數例如有銅一瓦熱之使其昇高一度則所

需熱量之數爲 ○·○九五加羅水銀一瓦熱之使其昇高一度則所需熱量之數爲○·○三三加羅故銅之比熱爲○·○九五水銀之比熱爲○·○三三

附記　凡同一物質高温度與低温度其比熱有些微之差恰如一瓦之水從攝氏十七度熱之至十八度其所需之熱量與從零度昇高一度其所需之熱量不免畧有差異若物體因温度之差異而其比熱之差最爲顯著則可設爲平均比熱例言有一瓦之硫磺從攝氏零度至一百度之間其所吸收之熱量爲 H 則硫磺之平均比熱爲$\frac{H}{100}$

問題

二十九　二百五十五瓦之金塊從攝氏十八度熱之至六十三度其所吸收之熱量爲幾何加羅但金之比熱爲○·○三二

解　金之比熱爲 ○·○三二則一瓦之金從攝氏十八度熱之至六十三度其所需之熱量爲

$0.032(63-18)$加羅　故二百五十瓦之金則需熱量二百五十倍故得 $0.032(63-18)250=360$ 加羅

三十　百瓦之銅塊從攝氏零度熱之至一百度其所需之熱量爲九百五十加羅問銅之平均比熱若何

答　銅之比熱爲〇·〇九五加羅

解　命銅之比熱爲 $C^c$ 則得 $950=C^c\times 100(100^\circ-0^\circ)$加羅　因之可求得 $C^c=\frac{950}{100\times 100}=0.095$加羅

三十一　有一百度之沸水六十六瓦與一十五度五之水銀二百瓦相混而水與水銀之溫度平均則其溫度若何但水銀之比熱爲〇·〇三三

答　攝氏九十二度三

解　因水之比熱爲一水銀之比熱爲 〇·〇三三命兩者相混合後之平均溫度爲 t 則水從一

百度冷至 $t$ 度其所失熱之總量爲 $1\times 66(100-t)$ 惟水銀得此熱量從十五度熱至 $t$ 度其熱量爲 $0.033\times 200(t-15.5)$ 故 $1\times 66(100-t)=0.033\times 200(t-15.5)$ 卽 $t=92.3C$

第十五款　比熱測定之混合法　凡比熱測定之混合法先權其所欲測其比熱之物質而取其若干量熱之至任何溫度(其溫度以寒暖計測之)而速投之於一定溫度一定質量之水中或既知其比熱之液體中則此物質與水或液體之溫度平均卽可測定其比熱

固體之比熱　今設有 M 瓦之物體熱之至攝氏 $t^0$ 度而入之於攝氏 $t'$ 度 W 瓦之水中則此後兩者之溫度平均爲攝氏 $\theta^0$ 度但此際固體之溫度從攝氏 $t^0$ 度低至 $\theta^0$ 度因而其放出之熱量爲 $M\times C(t-\theta)$ (C 爲固體之比熱) 而水或液體得此熱量從攝氏 $t'$ 度昇至 $\theta^0$ 度惟 W 瓦之水

從攝氏 $t'$ 度昇至 $\theta$ 度其所需之熱量爲 $W(\theta-t')$ 則 $M\times C(t-\theta)=W(\theta-t')$ 因之而求 C 之値則 $C=\frac{W(\theta-t')}{M(t-\theta)}$

如既知用其比熱 S 之液體則如上法而得 $M\times C(t-\theta)=W\times S(\theta-t')$ 因之而求 C 之値則 $C=\frac{W\times S(\theta-t')}{M(t-\theta)}$

液體之比熱　凡測定液體比熱之混合法亦可依以上所言之法但於其欲測定其比熱 S 若干量 W 之液體中投入已知其比熱 C 若干量 M 且有一定溫度之固體……………即得 $M\times C(t-\theta)=W\times S(\theta-t')$ 因之而求 S 之値則 $S=\frac{M\times C(t-\theta)}{W(\theta-t')}$

問一　熱量計之構造基於混合法試略言之

問題

三十二　有攝氏九十五度二百八十瓦之銀塊投入熱量計之溫度一十六度四五百六十五瓦之水中則其溫度平均爲一十八度六試求銀之比熱

若何但盛水器所受之熱略去不計

答　銀之比熱爲〇·〇五七····加羅

解　命銀之熱爲 C 因銀塊所放出之熱量爲 $C\times280(95-18.6)$ 水所受之熱量爲 $1\times560(18.6-16.4)$ 惟因 $C\times280(95-18.6)=1\times560(18.6-16.4)$ 故得 $C=\frac{560\times2.2}{280\times76.4}=0.057$··加羅

三十三　於攝氏十八度五四百五十六瓦之油中投入八十五度一百二十五瓦之銀塊則其溫度平均爲二十一度五問油之比熱若何

答　油之比熱約爲〇·三二加羅

解　命油之比熱爲 S 惟依前題所言銀之比熱爲〇·〇五七則可知其放出之熱量爲 $0.057\times120(85-21.5)$ 而油所受之熱量爲 $S\times456(21.5-18.5)$ 故得 $S\times456(21.5-18.5)=0.057\times120(85-21.5)$ 因之可求得 $S=\frac{0.057\times120\times63.5}{456\times3}=0.32$····加羅

三十四　水銀之比熱爲 〇·〇三三則水銀一瓩從攝氏零度熱之至一百度所需之熱量問五十五之水可從攝氏零度熱至若干度

答　攝氏六十六度

解　因一瓩(卽一千瓦)之水銀從攝氏零度熱之至一百度其所需之熱量爲 $0.033\times1000(100-0)$ 而五十五之水其所得之熱量爲 $1\times50\times t$ 故得 $0.033\times1000(100-0)=1\times50\times t$

卽 $t=66°C$

三十五　有鐵塊二百四十五投入攝氏六度一百五十五之水中令水之溫度上昇至十八度則鐵塊須預先熱至若干度但鐵之比熱爲〇·一二

答　攝氏八十度五

解　命鐵塊預先使熱之溫度爲 $t$ 則準溫度平均之理而得 $0.12\times240(t-18)=1\times150(18-6)$

故得 $t=80.5C$

三十六　極薄金屬所造之器內盛二十五瓦之水於其內入以小寒暖計測得水之溫度爲攝氏十度次於器內注以熱至四十度四十瓦之水以寒暖計攪勻而試其溫度恰上昇至二十八度則此時之水爲金屬容器及寒暖計所吸收之熱量並放散空氣中所失之熱量共有幾何

答　三十加羅

解　因於二次所注入器內之溫水已知其放出之總熱量爲 $1\times40(40-28)=480$ 加羅　而初次盛入器內之水其所受之熱量爲 $1\times25(28-10)=450$ 加羅　故可知　$480-450=30$ 加羅爲熱容器及寒暖計所費之熱及放散於空氣中之熱之合計也

三十七　酒精之比熱爲　○·五六水銀之比熱爲○·○三三　而酒精之密度爲○·八二　水銀之密度爲　一三·六問同體積之酒精與水銀各加同

量之熱所生之温度上昇之比較

答　酒精與水銀之比若〇·四五與〇·四六之比

解　因酒精之 V 立方粴之容積其質量爲 $V\times0.82$ 而水銀之 V 立方粴之容積其質量爲 $V\times13.6$ 其一定量之熱命爲 Q 則温度之上昇在酒精爲 t 則 $Q=0.56\times V\times0.82\times t$ 在水銀爲 $t'$ 則 $Q=0.033\times V\times13.6\times t'$ 由此可知 $t:t'=0.033\times13.6:0.56\times0.82$ 即 $t:t'=0.449\cdots\cdots:0.459\cdots\cdots=0.45:0.46$

問二　氣體二種比熱之區別

## 第四章　三態之變化　潛熱（融解及凝固　氣化及液化）

問一　融解並凝固之現象如何

問二　何謂融解點及凝固點

問三　氣化並液化之現象如何

問四　何謂沸騰點

第十六款　融解之潛熱(一名融解熱)　凡純粹之固體各有其一定之融解點即如熱此固體從初解以至全解不問其所受之外熱如何其温度恒有一定而無昇降故此際所加之熱不感於寒暖計又不感吾人之觸官因固體變爲液體時此熱量恒潛伏於物質中即可知融解一瓦之固體所需之熱量稱之爲固體融解之潛熱或單謂之融解熱反之而液體變爲固體必放出同量之熱即謂之凝固熱全與融解熱同量例如融解攝氏零度之氷一瓦而變爲水之時其所吸收之熱量爲八十加羅故氷之潛熱爲八十加羅又攝氏零度之水而凝固成氷之時其所放出之熱量亦爲八十加羅

第十七款　氣化之潛熱(一名氣化熱)　凡液體之沸騰點雖因物質而各有一定但凡在一定氣壓時從初沸以至終沸雖加任何之外熱其温度恒一

而無昇降此際所加之熱量因液體氣化時恒潛伏於其蒸氣中不感於寒暖計又不感吾人之觸官亦如固體之融解熱即可知一瓦量之液體熱之令其全行氣化其所需之熱量稱之爲液體氣化之潛熱或單謂之氣化熱反之而蒸氣因液化之際再放出之顯熱謂之液化熱全與氣化熱等量例如攝氏一百度一瓦量之水因氣化而變爲同熱度之蒸氣其所吸收之熱量爲五百三十六加羅故水之氣化熱爲五百三十六加羅

附記　凡液體在沸騰點以下之溫度徐徐蒸發氣化而在低溫度其氣化時所吸收之熱量與在沸騰點其氣化時所吸收之熱量不免差異故凡氣化時所必需之熱量雖在同一物質亦因其溫度而變通例所言氣化熱蓋當一氣壓之下於通常沸騰點氣化時所需之熱量也

問題

三十八　攝氏零度之氷二十四瓦半悉融解而化爲同温度之水其所吸收之熱量爲一千九百五十加羅問氷之潛熱若何

答　氷之潛熱爲七九·五····加羅

解　命攝氏零度時一瓦之氷融解爲攝氏零度之水其所放出之熱量爲 L (即氷之潛熱) 則得 $L\times24.5=1950$ 因此可求得 $L=\frac{1950}{24.5}=79.5\cdot$····加羅

三十九　攝氏零度之氷三百瓦投於七百瓦之沸騰水中氷悉融解時水之温度爲四十六度但此時水之熱可視爲全不放散於空氣中問氷之融解幾何

答　氷之潛熱爲八十加羅

解　沸騰水所放出之熱量爲 $1\times700(100-46)$ 惟攝氏零度之氷欲融解爲四十六度之水須先融解爲攝氏零度之水而後熱之至四十六度命

氷之融解熱爲 L 則攝氏零度時三百瓦之氷融解爲攝氏零度之水其所吸收之熱量爲 $L\times300$ 而此三百瓦之水從攝氏零度熱之至四十六度可知其所需之熱量爲 $1\times300(46-0)$

故得 $L\times300+300\times46=700\times59$ 即得

$L=80$加羅

四十　以氷塊穿一孔於其中注以攝氏百度之水銀一百瓦問氷之融解有若干量但氷之融解熱爲八十加羅水銀之融解熱爲〇·〇三三加羅

答　氷之融解四五一二五

解　因水銀入氷中而終變爲攝氏零度命氷之融解量爲 M 瓦則 $80\times M=0.033\times100(100-0)$ 故得 $M=4.125$瓦

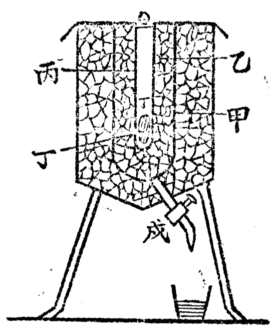
四十一　攝氏零度之氷三瓩與百度之水銀六十瓦相混合則其溫度平均時之溫度幾何

答　氷不盡融解故混合溫度爲攝氏零度

解　因水銀之比熱 C 爲〇·〇三三加羅氷之融解熱爲八十加羅今有六十瓦之水銀從攝氏一百度降至零度其所放出之熱量僅有 $0.033 \times 60 \times 100 = 198$ 加羅　故可知三千瓦之氷不能悉數融解而僅能融解其一部分因而此混合物爲因其所融解一部分之水與其餘之氷及水銀而成故知其溫度必在攝氏零度

四十二　如左圖之氷熱量計爲甲乙丙三重金屬而成充入氷於其中層乙而包裹其內層丙令其溫度常在攝氏零度於其內層丙投入熱體丁而盖之（其盖須用不傳熱體俟其熱體丁冷至

第三圖



零度則中層之氷受熱而其一部分融解爲水乃開其活栓戊以容器受其水於天秤權之其重量其外層甲亦置氷於其中使中層之氷不受外氣之熱今設有攝氏百度八十五之銅塊投入氷熱量計之內層丙而緊蓋之其中層之氷所融解之水權之計重九五半問銅之比熱若何

答　銅之比熱爲〇·〇九五加羅

解　命銅之比熱爲 C 因氷之融解熱已知爲八十加羅故得 $C\times 80(100-0)=80\times 9.5$ 因之可求得 $C=0.095$加羅

四十三　於攝氏二十度之水一立中投入氷若干量悉數融解而令水之溫度低至攝氏五度問須用氷幾何量

答　一百七十六瓦四

解　因一立(即一千瓦)之水其所放出之熱量爲 $1\times 1000(20-5)$ 命其所投入氷之重量爲

$M$ 瓦則 $M$ 瓦之氷融解爲攝氏零度之水其所吸收之熱量爲 $80\times M$（八十爲氷之融解熱）又攝氏零度時 $M$ 瓦之水熱之至攝氏五度其所吸收之熱量爲 $1\times M(5-0)$ 故得 $1\times 1000(20-5)=80\times M+1\times M(5-0)$ 即 $M=176.4\cdot$ 瓦

四十四　攝氏一百度之水蒸氣十二瓦通於十八度之水二百四十瓦之中使其凝縮則水之溫度變爲何度

答　攝氏四十七度四

解　命通入水蒸氣之後水之混合溫度上升至 $t$ 度惟攝氏百度之水蒸氣先凝縮爲攝氏百度之水而後降至 $t$ 度而水之氣化熱爲五百三十六加羅則十二瓦之水蒸氣變爲百度之水所放出之熱量爲 $560\times 12$ 加羅又攝氏百度之水降至攝氏 $t$ 度所放出之熱量爲 $1\times 12(100-t)$

故得　$536\times 12+1\times 12(100-t)=1\times 240$

$(t-18)$ 即 $t=47.4\cdots\cdots C$

四十五　攝氏一百度之水蒸氣 M 瓦通於 t 度之水 W 瓦中而水之温度上昇至 $\theta$ 度其蒸氣之潛熱爲 $x$ 則由　$x=\frac{W}{M}(\theta-t)-100+\theta$ 式可以求得試證之

解　依前問題之解法可知攝氏百度時 M 瓦之水蒸氣變爲攝氏百度之水其所放出之熱量爲 $x\times M$加羅 又攝氏百度之水降至 $\theta$ 度時其所放出之熱量爲 $1\times M(100-\theta)$加羅　惟攝氏 t 度時 W 瓦之水上昇至 $\theta$ 度其所受之熱量爲 $1\times W(\theta-t)$加羅　故得 $x\times M+1\times M(100-\theta)=1\times W(\theta-t)$ 故得 $x=\frac{W}{M}(\theta-t)-100+\theta$

四十六　攝氏零度之水二瓩於其中通入一百度之水蒸氣欲令達於沸騰點則水蒸氣須若干量又設令連續再通入水蒸氣則水蒸氣之現象如

何

答　三百七十三瓦

解　使攝氏零度時二千瓦(即二瓩)之水達於沸點(即一百度)其所需之熱量爲 $1\times2000\times100$ 加羅惟此熱量即 M 瓦之水蒸氣凝縮而放出之熱量而水蒸氣之潛熱爲五百三十六加羅　故得　$2000\times100=536\times M$　即　$M=373.1$ 瓦　又已達沸騰點之水雖更通入蒸氣然不凝縮而沸騰愈甚

四十七　有銀製之容器重一百五十瓦盛攝氏八度之水三百五十瓦通入百度之水蒸氣而權之知其重量增十瓦則水之溫度上昇若干度但器與水全不放熱亦不受外氣之熱而銀之比熱爲〇·〇五六

答　水之溫度上昇約二十五度〇五

解　已知通入水蒸氣之量爲十瓦命其混合後

之溫度爲 $\theta$ 其水蒸氣之潛熱爲五百三十六加羅則其所放出之熱量爲 $536\times10+1\times10(100-\theta)$ 加羅而銀製容器內之水所吸收之熱量爲 $1\times350(\theta-8)$ 加羅銀容器所受之熱量爲 $0.056\times150(\theta-8)$ 加羅故得 $536\times10+10(100-\theta)=350(\theta-8)+0.056\times150(\theta-8)$ 故得 $\theta=25.05$

## 第五章　熱傳導

第十八款　熱傳導率　試以金屬棒之一端熱之則其熱次第傳播而達於他端而此際棒之分子毫不變動惟其熱傳於棒之質中從其一部而移及他部謂之傳導但因物質之不同而傳導有遲速如金屬傳熱極速謂之良導體木片毛布水等傳熱最遲謂之不良導體此二體雖傳熱有遲速之差然全不傳熱之物體世固未之有也

今設有兩側面平行之金屬板其一面與熱水相接觸又其一面與冷水相接觸則從其高溫度之側面

向低溫度之側面而生熱之傳播但凡同物質而成之板如用數枚以試其熱之傳播則薄板之傳熱較速於厚板之傳熱又凡在同一板面其兩側面溫度之差大者較小者傳熱較速故可知板之熱傳導之速與其兩側面之廣爲正比例與其厚爲反比例與其兩側面溫度之差爲正比例又設如板之廣及厚俱相等而兩側面溫度之差亦相等則因其構成此板之物質而傳導因有遲速例如銅板之厚爲一糎其兩面溫度之差常爲一度於一秒間通過側面積一平方糎之熱量爲 〇·九二加羅 此際所需之熱量爲其板之傳導度其表此熱量之數謂之傳導率即凡長之單位爲糎溫度之單位爲攝氏度數熱量之單位爲加羅則銅之傳導度爲 〇·九二加羅 而其傳導率爲〇·九二其傳導率以 K 表之

依以上所言之實驗可知因傳導率爲 K 之物質所構成之板其厚爲一糎側面之廣爲一平方糎而

兩側面溫度之差常爲一度則其一秒時所通過之熱量爲 K×$\theta$加羅 又其面積之廣爲 S 則其一秒時所通過之熱量爲 K×S加羅 如溫度之差爲 $\theta$ 度而板之厚爲 $d$ 糎則其一秒時所通過之熱量爲 $\frac{1}{d}$ K×$\theta$×S加羅 又熱量通過此板之時間爲 t 則其式爲 $\frac{1}{d}$K×$\theta$×S加羅 卽可知因傳導率爲 K 之物質而成之板其厚爲 $d$ 糎面積之廣爲 S 平方糎其兩側面溫度之差爲 $\theta$ 命於 t 秒時所通過之熱量爲 Q 則其關係式爲

$$Q=K\times\frac{1}{d}\theta\times S\times t$$

問題

四十八 有銅製之箱其側面之長及廣各十糎厚爲半糎於箱中盛以溫水連續注入熱水使其溫度始終爲二十五度此時外氣之溫爲一十七度則一分時間從此側面而放散箱外之熱量幾何但銅之傳導率爲〇·九

答　八萬六千四百加羅

解　因側面之廣S為一百平方糎側面之厚$d$為〇·五糎側面內外溫度之差$\theta$為八度即　25－17＝8　其時間t為六十秒傳導率K為〇·九加羅故可知從此側面上一分時間所放散之熱量為Q　故得$Q=\frac{0.9\times8\times100\times60}{0.5}=86400$加羅

四十九　有厚二糎廣五百平方糎之鐵板其兩側之溫度為攝氏零度與百度於一時間通過$1.44\times(10)^7$加羅　之熱問鐵之傳導率幾何

答　鐵之傳導率為〇·一六加羅

解　命鐵之傳導率為K　則準公式而得　$1.44\times(10)^7=K\frac{100\times500\times60\times60}{2}$　因之可求得　K＝0.16加羅

五十　用厚三粉而傳導率為　〇·〇〇三五之木材而成之屋壁屋內之溫度為攝氏十五度屋外大氣之溫度為五度壁面之廣為一千平方米則

每一時間通過此壁所失之熱量幾何又因此熱之放散欲使屋内之溫度不至低下至少必須燃若干量之石炭但此石炭燃燒一瓩所生之熱量爲八千四百加羅

答　一時間所失之熱量爲四千二百萬加羅

至少一時間須用石炭五瓩

解　命一時間所失之熱量爲 Q 則準公式

$Q=K\frac{1}{d}\theta\times S\times t$　故得

$$Q=\frac{0.0035(15-5)\times1000\times(100)^2\times60\times60}{3\times10}=4.2\times(10)^7$$

加羅　如欲補此所失之熱量四千二百萬加羅則因燃燒一瓩石炭所生之熱量爲八千四百加羅故得　$[4.2\times(10)^7]\div8400=5000$瓦　即可知至少所需石炭之燃燒爲五瓩

## 第六章　熱之功用

問一　熱不能有如熱素之物質試舉實例證明之

問二　熱可能有如器械之功用試舉其例

問三　器械之功用可能變熱試舉其例

問四　熱爲物體分子之能力試舉其說

問五　査勒斯熱之功用相當量試記其實驗法并其理由

第十九款　熱之功用當量　熱爲組織物體之分子所有之能力（因分子之振動及還原能力而成）可變爲器械之功用如蒸氣機械是也又凡器械之功用可變爲熱如物體因摩擦而生熱物體相衝突之際其温度必增是也此理始於英人査勒斯用種種之法而精測其與熱量之單位相當之器械功用之量經後之學者反覆研究用重力單位而知一加羅之熱量大約與四百二十五瓩米之功用相當即重一瓩之物體從四百二十五米之高而下落或四百二十五瓩之物體從一米之高而下落其與地面相衝擊之際物體所有之運動能力悉變爲熱試以

此熱量溫一瓩之水其溫度恰上升一度此四百二十五瓩米之功用稱之爲一瓩加羅熱量之功用當量或單云工比熱故一瓦加羅熱量之功用當量爲四萬二千五百瓦格

又四萬二千五百瓦糎之功用如以絕對單位愛格表之則可得 $42500\times981=41700000$愛格 卽 $4.17(10)^7$愛格

問題

五十一　有一瓩之物體從八十五米之高處墜於不導體所製成之床上其所生之熱量悉能令一瓩之水溫度上升問能上昇至若干度

答　十分度之二

解　因一瓩之物體位於八十五米之高處則可知其位置能力爲 $1\times85$瓩米　及物體落於床上而其能力悉變爲熱能令水之溫度上升但一瓩之水上升一度必須四百二十五瓩米之功用

故可知八十五瓩米之功用僅能使一瓩之水上升十分度之二卽 $85 \div 425 = 0.2C$

五十二　一百一十瓩米之功用能令八瓩之水銀溫度上升若干度

答　百分度之九八

解　因水銀之比熱爲〇·〇三三加羅故八瓩(卽八千瓦)之水銀使其上昇t度其所需之熱量爲 $0.033 \times 8000 \times t$ 加羅　惟一百一十瓩米之功用與 $\frac{110}{425}$ 瓩加羅之熱量相當而此熱量僅能使水銀上昇 t 度故得 $\frac{110}{425} \times 1000 = 0.033 \times 8000 \times t$　卽　$t = 0.98C$

五十三　有鉛丸從五十米之高處落於地上其所生熱量之半能令鉛丸加熱而又一半傳於地中則鉛之溫度上昇幾何

答　一度九

解　因鉛丸之 M 瓩量在五十米之高處則所

有能力之量爲 $M\times50$瓩米 惟僅用此能力之半分使溫度上昇 $t$ 度而鉛之比熱爲〇·〇三一故得 $\frac{M\times80}{2\times425}=0.031\times M\times t$ 即 $t=1.9C$

五十四 有氷塊從高處墜於井中僅融解其五分之一今井水及氷塊之溫度恰爲零度則其落下有若干高

答 六千八百米

解 因氷塊之重量 $M$ 瓩從 $h$ 米之高墜下僅能融解其五分之一故得 $\frac{M\times h}{425}=80\times\frac{M}{5}$ 即 $h=6800$米

五十五 四萬八千六百爱格之功用悉變爲熱能得幾何加羅

答 〇·〇〇一一六加羅

解 因一瓦加羅之熱量當四萬二千五百瓦糎之功用又當 $4.17\times(10)^7$爱格 即 $425\times980$爱格 故可知四萬八千六百爱格之功用試改

算爲熱量則得$48600 \div (42500 \times 980) = 0.00116$加羅

五十六　六千五百八十瓩加羅之熱量其功用當量幾何

答　二百七十九萬六千五百瓩米

解　因瓩加羅之熱量其功用當量爲四百二十五瓩米故得　$425 \times 6580 = 2796500$瓩米

五十七　有重五瓩之鉛丸飛行於一秒時有八十米之速度與石壁相衝而止問此時所生最大之熱量幾何

答　三千八百三十瓦加羅

解　因五瓩之物體以每秒八十米（即八千糎）之速度飛行依第四篇第五款之理可知其運動能力爲　$\frac{1}{2}500(8000)^2$愛格　今此能力悉變爲熱則得　$[500(8000)^2] \div [2 \times 4.17(10)^7] = 3830$瓦加羅

五十八　有鉛丸以每秒百米之速度與鐵壁相衝擊而所生之熱量鉛丸與鐵壁均得其半問鉛丸之溫度上升幾何

答　十九度三

解　因 M 瓦之物體以每秒一百米(即一萬糎)之速度飛行則可知其運動能力爲 $\frac{1}{2}M\times(10000)^2$ 爱格　惟僅需此能力之半分使鉛丸之溫度上昇至t度而鉛之比熱已知爲〇·〇三一故得 $[M\times(10000)^2]\div[5\times2\times4.17(10)^7]=0.031\times M\times t$　即　$t=19.3\cdots\cdot C$

五十九　石炭之燃燒熱一瓦有七千八百加羅如有一瓩石炭之燃燒則其所生熱量之功用當量有幾何爱格

解　因一瓩當一千瓦故其所生熱量之功用當量以爱格計之則得　$7800\times1000\times4.17\times(10)^7=3.25\cdots\cdot\times(10)^{14}$ 爱格

六十　於鐵板鑽鑿一孔如用一馬須費一時間半而成此際十五瓩半之水可從十五度熱至三十五度問變熱之功用當幾馬力但一馬力於一秒時有七十六瓩米之功用(見前第四篇第三款)

答　當○·三二馬力

解　因十五瓩半之水從攝氏十五度熱至三十五度其所需之熱量爲 $15.5(35-15)$瓩加羅因之可求得每秒時變熱之功用所當之馬力爲

$$[15.5(35-15)425]\div[76\times60\times60\times1.5]=0.32\cdots$$

馬力

六十一　一馬每日五時間之勞動有一秒六瓩米之功用如欲補給此馬所消耗之能力每週須食幾何量之小麥但小麥一瓩因燃燒所生之熱量恰等於十瓩之水可令溫度上昇一度

答　至少須一百七十七瓦八有餘

解　因此馬一週間所成功用之量爲

$6 \times 60 \times 60 \times 5 \times 7$瓩米　今馬所食之小麥悉令於體內酸化而燃燒其所生之熱量適等於一瓩有　$10 \times 1 \times 425$瓩米　之功用故欲以燃燒所生熱量之功用當量補償此馬於一週間所消耗之功用之量則因此而得一比例式爲 $(10 \times 1 \times 425):1 :: (6 \times 60 \times 60 \times 5 \times 7):x$　故得 $x = 177.8\cdots$瓩

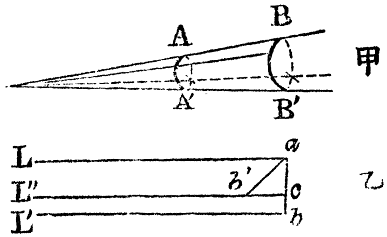
# 第七篇 光學

## 第一章 光量（光量 發光體之照力 本生之光度計）

問 何謂光體及暗體

第一款 物體由光體所受之量 如圖甲光源 L 所發之光其任何位置之物體如 A 及 B 則其所受之光量（一）與光源 L 發光之量爲正比例

第 一 圖




（二）與光源之距離自乘爲反比例（三）與受光之表面與光線間之角之傾度相關今設以光源 L 爲

頂點而旋成一圓錐體如 $BALA'B'$ 其 $L$ 爲中心而切於 $A$ 及 $B$ 二球面則則此 $AA'$ 及 $BB'$ 二球面同受光源發光之量惟因 $AA'$ 與 $BB'$ 面積之比各與其半徑自乘爲正比例因而與 $LA$ 及 $LB$ 之自乘數爲正比例故欲令其兩球面上有相等之面積而比較其所受之光之量即可知與距離 $LA$ 及 $LB$ 之自乘爲反比例如圖乙 $ab$ 爲受光之表面與光源 $LL'L'$ 等恒爲直角則可知 $ab$ 面所受之光線凡在 $L$ 及 $L'$ 之間今設傾側 $ab$ 面至 $ab'$ 之位置則所受之光線僅限於 $L$ 及 $L''$ 之間而 $L''$ 與 $L'$ 間之光線不射於 $ab'$ 面上因之而 $ab'$ 面上所受之光量必小於 $ab$ 面上所受之光量如太陽之熱朝夕較弱而正午較强即其理也由此可知 $ab$ 與 $ab'$ 所受之光量爲 $ab$ 與 $ac$ 之比故凡同一面積與光線成直角時所受之光量爲 1 則與直角之位置成

$\theta$ 角時其所受之光量爲 $1\times\theta$餘弦 若傾側 $ab$ 面至與光線平行則全不受光即可知物體從光體照力之强度可以其所受光量之多寡計之

問題

一 從發光體有二尺與五尺之距離則其光之强弱如何

答 二尺處與五尺處光力之强之比如五與二平方之比

解 準本款可知兩處所受之光量與其距離自乘爲反比故得 二尺處光力之强：五尺處光力之强$=5^2:2^2=25:4$

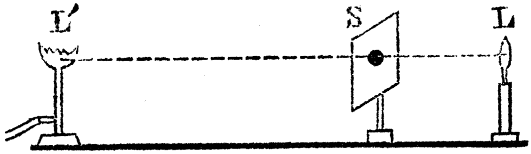
二 離蠟燭之火焰三尺處有小鏡與光線成直角又離八尺處同面積之小鏡與光線成四十五度角則鏡光之比若何

答 兩鏡面所受之光之比如一與 $\frac{9\sqrt{2}}{128}$ 之比

解 凡同一平面置於離光源三尺之處與置於

離光源八尺之處可知其所受光力之强之比爲 $8^2:3^2=1:(\frac{3}{8})^2$ 又凡同一平面置於等距離之處其與光線成直角及與光線成四十五度角所受光力之强之比爲 $1:45^\circ$餘弦$=1:\frac{1}{\sqrt{2}}$由此可知離光源三尺之處置一鏡面與光線成直角及離光源八尺之處置一鏡面與光線成四十五度角其所受光量之强度之比如 $1:\frac{3^2\times 1}{8^2\times\sqrt{2}}$ 即 $1:\frac{9\times\sqrt{2}}{64\times 2}=1:\frac{912}{128}$

第二圖




第二欵 從二光源源射來之光量 如圖 L 及

L′ 爲二光源從二光源射至 S 處其所受之光量欲驗其相等與否則於 S 處張一白紙於其中央附以油點令從兩光源 L 及 L′ 射至白紙之表面如其光之强度不等則紙面之油點與其周圍白紙之部分顯異其光澤可識別油點之存在若其光之强度全相等則油點與周圍白紙之部分其光澤相等而油點之存在殆難識別準此可知其光量之相等與否即所謂本生光度計也

第三款　光體之照力　通常所云電燈之光比蠟燭之光强又蠟燭之光大者比小者强物理學於此例稱爲電燈或大燭之光度(或照力)較强於小燭之光度而發光體照力之强度原基於所射光量之多寡如前圖本生光度計爲測發光體照力之强度先擇一光源 L 爲照力之標準而以他光源 L′ 與之比較則於兩光源之中間張一白紙於中央附以油點置之於兩光體之左右令其二光源射來之光

度相等之位置如 S 由此可測定兩光源 L 及 L′ 之距離其測法或用物尺或於光度計之臺上預先劃定尺度既得此兩光源之距離 LS 及 L′S 欲求得他光源L′之照力則準第一欵所言之理物體從任何光體所受之光量恒與其光源發光之量爲正比又與從光體之距離自乘爲反比故本生光度計其紙障之油點從二光源射來之光量命其二光源之光度爲 1 及 1′ 則可知與 $\frac{1}{LS^2}$ 及 $\frac{1'}{L'S^2}$ 爲正比惟因二光源射來之光量相等則 $\frac{1}{LS^2}=\frac{1'}{L'S^2}$ 即 $1:1'=L'S^2:L'S^2$ 即可知二光體之光度 1 及 1′ 與從光源至其紙障之距離自乘爲反比例故 L 光體既知其光度爲 1 則他光體 L′ 之光度 1′ 亦可求得

光度之單位　光度所用之單位各國不同例如英國所定之標準則以重一磅都之蠟燭於一時間燃燒一百二十格林(當七五·七九)之比例所發之光

謂之一燭光此蠟燭謂之標準燭

問題

三　用本生光度計計電燈之照力於相距二尺四寸之處置一紙障又從紙障與電燈反向相距八寸之處置二燭光力之蠟燭其紙障之油點不見問此電燈有幾何燭光

答　十八燭光

解　命電燈之照力爲 $1'$ 則得 $\frac{1'}{(24)^2}=\frac{2}{8^2}$ 故得 $1'=18$

四　四燭光之石油燈與三十六燭光之電燈相距爲三十二尺則兩位置須於何處而兩光之照力始能相等

答　從石油燈向電燈八尺之處　或從石油燈與電燈反向一十六尺之處

解　設定離石油燈及電燈之處有等强之照點命與石油燈之距離爲 $x$ 尺則可知與電燈之距離爲 $(32-x)$ 尺　因此可得 $\frac{4}{x^2}=\frac{36}{(32\pm x)^2}$ 如

法化之故得 $x=8$ 或 $x=16$ 即從石油燈向電燈之方相離八尺之處或從石油燈與電燈反向相離一十六尺之處此二處所受兩光源之光力其強度相等

五　五燭光之蠟燭照讀於二尺五寸之距離如代用二十燭光之瓦斯燈欲令其照力相等則相距須若干尺

答　離書籍五尺之處

解　命置瓦斯燈之距離爲 $x$ 則得 $\frac{5}{(25)^2}=\frac{20}{x^2}$ 故 $x=50$寸　即可知瓦斯燈之位置在離書籍五尺之處

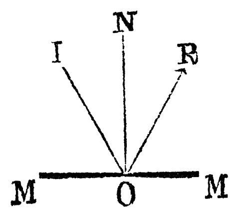
## 第二章　光之反射及鏡（反射之定律　平面鏡　球面凹鏡及凸鏡）

問　光之反射如何

問　何謂散光

第四款　反射之定律　如圖 MOM′ 爲反射之

第 三 圖




平面 IO 爲投射光線 RO 爲反射光線 NO 爲 MOM′ 反射面之垂線投射線與垂線所成之角爲投射角反射線與垂線所成之角爲反射角則依實驗而知次之定律(一)凡垂線與投射線及反射線悉在於與反射面成直角之一平面內(二)投射角與反射角相等如圖中所示之 NO 及 IO 及 RO 三線悉含於與 MOM′ 成直角之一平面內而 RON 角與 ION 角相等　又反射面如爲曲面則於投射點向曲面引相切之平面亦可依上之定律

問題(關於平面鏡)

六　投射角爲二十五度則投射線與反射線所夾之角如何

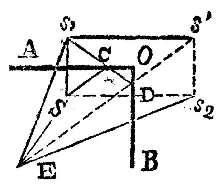
答　五十度

解　凡投射線與反射線在竪立反射面之垂線之異側而與垂線成等角故可知投射線與反射線所夾之角爲投射角之二倍卽可知爲五十度

七　二枚之平面鏡互爲直角於其間置一小物體則所呈之像有幾個試以圖明之

答　有三個像

第四圖




解　如圖AO與BO爲互爲直角之二鏡面於 S 點置一小物體試從 E 處望之則 S $S_1$ $S'$ $S_2$ 爲直角四邊形但 S 及 $S_1$ 在 AO 鏡面之兩側其距離相等 S 及 $S_2$ 在 BO 鏡面之兩側其距離相等則其三角點 $S_1$ $S'$ $S_2$ 卽爲像

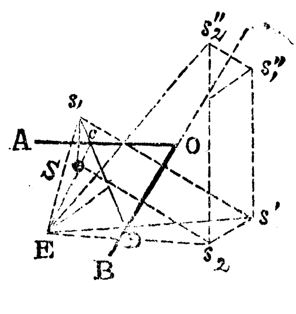
之位置何則先從 AO 鏡得 $S_1$ 一像從 BO 鏡得 $S_2$ 一像次於 ES′ 與 BO 之交點 $DDS_1$ 與 AO 之交點 C 則從 S 點所發之光線中 SC 線被 AO 鏡反射而爲 CD 而 CD 復被 BO 鏡反射而爲 DE 入於人目 E 恰如 $S_1$ 之像結像於 S′ 點故總合爲三個像

八　如上記之兩平面鏡互爲六十度角於其間置小物體則所呈之像幾何

答　五個像

解　如圖依前問題之解法先從 AO 鏡得 S 之像 $S_1$ 從 BO 鏡得 S 之像 $S_2$ 次以 BO 爲軸而作 $S_1$之

第五圖



對稱點 $S'_1$ 卽 BO 分 $S_1 S'_1$ 線爲二等分而 $S'$ 恰如 $S_1$ 之像因 $ES'_1$ 與 BO 之交點爲 DDS 與 AO 之交點爲 C 則從 S 點所發之光線中 SC 被 AO 鏡反射而爲 CD 而 CD 復被 BO 鏡反射而爲 DE 入於人目 E 恰如 $S_1$ 之像結於 $S'_1$ 點依同理而以 AO 爲軸得 $S_2$ 之對稱點 $S''_2$ 之一像叉以 BO 爲軸得 $S''_2$ 之對稱點 $S''_1$ 之一像而與 AO 爲軸得 $S_1$ 之對稱點 $S''_1$ 之一像相合故總合 S 點之像有 $S_1$ S $S'_1$ $S'_2$ $S''_1$ 之五個

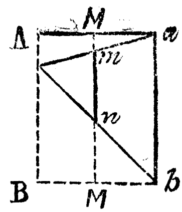
凡二鏡面所夾之角爲 $a$ 則其所呈像之數爲 $\frac{360}{a}-1$ 而合原物及所呈之像則其數爲$\frac{360}{a}$

九　立於平面鏡之前試由鏡中窺之鏡雖不甚大而可見全身之像其故何與叉問能見全身之像則其像須若干大

解　如圖 AB 爲人身之高 E 爲人目於 MM

線中豎立一鏡如 $mn$ 今試與 MM 線成直角作 $Ma$ 線與 AM 等則 A 之像呈於 $a$ 點依同理作 $Mb$ 線與 BM 等則 B 之像呈於 $b$ 點故得 AB 之像爲 $ab$ 又 $Ea$ 線與 $Eb$ 線相切於 MM 線之點爲 $m$ 及 $n$ 則鏡面之大爲 $mn$ 即可見全身之像 $ab$ 又 $m$ 爲 $Ea$ 之中點 $n$ 爲 $Eb$ 之中點故 $mn$ 爲 $ab$ 之半即鏡面爲全身之半

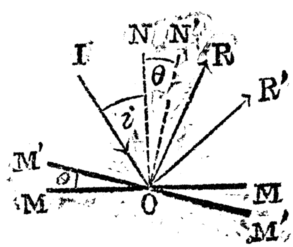
第六圖




十　有平面鏡以與投射面成垂直之軸而旋轉之則反射線變其方向之角度等於鏡之回轉角度之二倍試說明之

解　如圖 IO 爲投射線當鏡面在 MOM 之位置則其反射線爲 OR 如鏡面旋轉 $\theta$ 角而至

第七圖

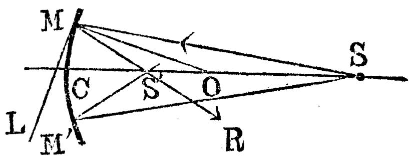



M'OM' 之位置則其反射線爲 OR' 因 NO 爲 MOM 之垂線 N'O 爲 M'OM' 之垂線其 ION 角以三表之今欲證 ROB' 角爲 θ 角之二倍先識別 NON' 角與 MOM' 角相等卽與 θ 角相等故 IOR 角爲 I 角之二倍惟IOR 角爲 ION' 角之二倍卽 I 角與 θ 角和之二倍故可知 IOR' 角爲 IOR' 角與 IOR 角之差卽 θ 角之二倍

第五欵　球面凹鏡及凸鏡　凡所謂球面鏡者卽取球面之一部依平面截之而其內面之凹處爲平滑之反射面謂之球面凹鏡其外面之凸處爲平滑

之反射面謂之球面凸鏡而因其原球面之半徑卽爲球面鏡之曲率半徑又凡經過其中心與球面中央點之直線謂之鏡軸或云主軸從中心向鏡面之他點所引之直線謂之副軸

第八圖




第六款　曲面上光線反射之方向　如圖 MCM′ 爲曲面鏡 SM 爲投射光線今欲求其反射光線之方向則準第四款反射之定律先於 M 點作與曲面相切之平面如 ML 復引一與ML成垂線MO則可求得 MR 反射線與 SM 投射線及 MO 垂線同在一平面內又其與垂線 OM 所成之 OMR

角必等於投射線與垂線所成之 SMO 角

第七欵　焦點　如前圖 MOM′ 爲球面凹鏡試於其主軸上 CO 之延長線內置一光源於 S 點則其投射鏡面之光線爲 SM 其反射光線爲 MR 而 OMR 之反射角必等於 OMS 之投射角(但此處之 OM 線爲於球面之 M 點與切球面之平面 ML 成垂線而經過球之中心者)今設取 MR 反射線與主軸相交之 S′ 點則其 OM 線爲 SMS′ 角之二等分線故依幾何學之理可得 MS : MS′ = OS : OS′ 若鏡面之直徑甚小則 CM 球面亦甚小故 MS 略等於 CSMS′ 略等於 CS′ 卽得 CS: CS′ = OS:OS′ 惟 OS = CS − CO　OS′ = CO − CS′ 故得CS′(CS − CO) = CS(CO − CS′) 兩端各以 CS × CS′ × CO除之則得 $\frac{1}{CS}-\frac{1}{CS}=\frac{1}{CS'}-\frac{1}{CS}$ 故 $\frac{1}{CS}+\frac{1}{CS'}=\frac{2}{CO}=\frac{2}{r}$(CO爲球面之曲率半徑命爲 $r$)

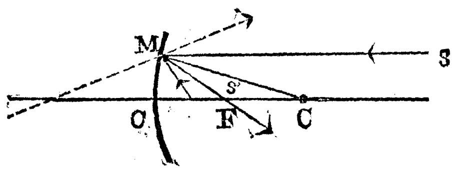
又設有任意投射線 SM′ 試取其反射線 M′R′ 與

主軸相交之 $S''$ 點則準前之同理而得 $\frac{1}{CS}+\frac{1}{CS''}=\frac{2}{r}$ 故 $CS''$ 與 $CS'$ 相等卽 $S''$ 點與 $S'$ 點相合而 $SM'$ 之反射線與 $SM$ 之反射線於主軸上之 $S'$ 點相合且不獨 $SM$ 與 $SM'$ 之反射線於 $S'$ 點相合即凡從 $S$ 點至 $MCM'$ 上之投射光線其反射光線俱合於 $S'$ 點依此理可知 $S'$ 點爲最光明之點稱之爲光源 $S$ 之焦點

共軛焦點　設令光體置於 $S'$ 點則 $S'M$ 之反射線依反射之定律可知爲 $MS$ 線卽光點 $S'$ 之焦點結於 $S$ 點由此可知 $S$ 與 $S'$ 互爲焦點謂之共軛焦點如以 $f$ 表從凹面之中點 $C$ 至 $S$ 之距離 $CS$ 以 $f'$ 表從凹面之中點 $C$ 至 $S'$ 之 $CS'$ 距離 $CS$ 則準上式可得 $\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}=\frac{2}{r}$ 爲共軛焦之公式

正焦點及焦點距離　如圖球面鏡之主軸上其光點 $S$ 之位置時常變動則其焦點 $S'$ 之位置亦因

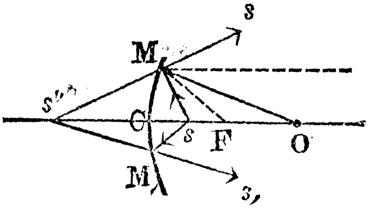
第九圖




而變但光點 S 愈遠於 C 點則焦點 S′ 益近於 C 點今若光點 S 在非常之遠如地球面受太陽之光線則其投射線 SM 可視爲主軸平行而 CS 爲無窮大即 $f=8$ 欲求此時焦點 F 之位置則從公式 $\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}=\frac{2}{r}$ 惟 $f=\infty$ 即 $\frac{1}{f}=\frac{1}{8}=0$ 故得 $\frac{1}{f'}=\frac{2}{\ }$ 即 $f'=\frac{r}{2}$ 由此可知焦點距離必等於曲率半徑之二分之一如此等光線與主軸平行則其焦點謂之正焦點其與 C 點之距離 CF 謂之球面凹鏡之正焦點距離或單稱焦點距離通常以 F 表之依而如上之公式爲 $\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}=\frac{2}{\ }=$

$\frac{1}{F}$ 爲球面凹鏡之公式

第　十　圖




虛焦點及實焦點　如圖設光點 S 漸近 C 點而在球之中心 O 以內則其反射線 MS′ 必出於 OM 線之外若光點 S 在正焦點 F 上則其反射線 MS″ 與主軸平行而其焦點距離無限如光點 S 過正焦點 F 而漸近 C 點則其反射線 MS′ 如 S′MS′ 之方向蓋光點 S 至球面之投射線其反射光線如 $MSM_1S_1$ 等於鏡之右方却放散而聚集於引長反射線於鏡之左方 S″ 點爲此光點 S

之焦點故從鏡之右方視之則其反射線恰如從$S''$點發射其光點 S 之像恰如在鏡之後方但反射線之實際從 M 點進行於 $S'$ 之方向而鏡質爲不透明體卽光線不能達鏡之背後故聚集於鏡之後方 $S''$ 點之像爲虛像謂之爲虛焦點反之而聚集於鏡之前方之焦點其反射線之實際達於此處謂之爲實焦點由此可知虛焦點卽光點 S 在於正焦點 F 之內卽 $f<F$ 準前式 $\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}=\frac{1}{F}$ 卽 $\frac{1}{f'}=\frac{1}{F}-\frac{1}{f}=\frac{f-F}{F\times f}$ 故得 $f'=\frac{F\times f}{f-F}$惟因$f<F$ 故 $f-F$ 爲負卽 $f'$ 亦爲負故可知虛焦點之距離 $f'$ 必爲負數

又球面凸鏡所生之焦點常爲虛焦點（見問題十四）

問題

十一　於球面凹鏡之主軸上在球面中心與正焦點之間置一光點則其焦點之位置如何

解　如上圖從正焦點 F 之光線 FM 則其反射線 MF′ 必與主軸平行從球面中心 O 點之光線 OM 則其反射線 MO 必與投射線相合而反向故可知光點在 F 與 O 點之間則其光線之反射線必在 MO 與 MF′ 之間而其共軛焦點在主軸上 O 點之外

又準公式 $\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}=\frac{1}{F}$ 其 $f$ 爲光點離鏡面之距離則其共軛焦點 $f$ 之距離爲 $f'=1\div\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{f}\right)$ 惟球面之曲率半徑爲 $r$ 則因 $r=2F$ 即 $\frac{1}{F}=\frac{2}{r}$ 又依題意可知 $f$ 必大於 F 而小於 $r$ 故得 $\frac{1}{f}>\frac{1}{r}$ 由此可知 $\frac{1}{F}-\frac{1}{f}<\frac{1}{r}$ 即 $1\div\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{f}\right)>r$ 即 $f'>r$

十二　有曲率半徑一尺之球面凹鏡於其主軸上在鏡之前方相距二尺之處置一小物體則其像呈於何處

答　離鏡面六寸六分餘

解　準公式 $r$ 為一尺 $f$ 為二尺故得 $\frac{1}{2}+\frac{1}{f'}=\frac{2}{1}$ 即 $f'=0.666$尺

十三　在球面凹鏡之主軸上離鏡面一尺二寸之處置一小物體其像呈於前方八寸之處問此凹鏡之焦點距離及其曲率半徑

答　曲率半徑九寸六分　正焦點距離四寸八分

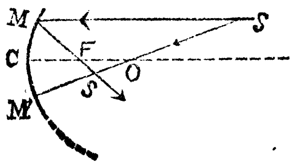
解　準公式 $f$ 為一十二寸 $f'$ 為八寸故得 $\frac{1}{12}+\frac{1}{8}=\frac{1}{\mathrm{F}}$ 因之可求得 $\mathrm{F}=4.8$寸　又準 $r=2\mathrm{F}$ 故得 $r=9.6$寸

十四　有球面凹鏡在其主軸外之光點則其焦點聚於何處又球面凸鏡之焦點如何

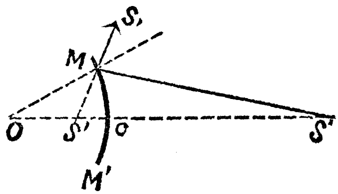
解　如圖甲 F 為正焦點 O 為曲率中心設有光點 S 不在於主軸上則其發射之光線中與主軸平行之 SM 線被反射而為 MF 又其 SM′ 線被反射而復歸於原線中如 M′O 故可

第十一圖

甲




乙

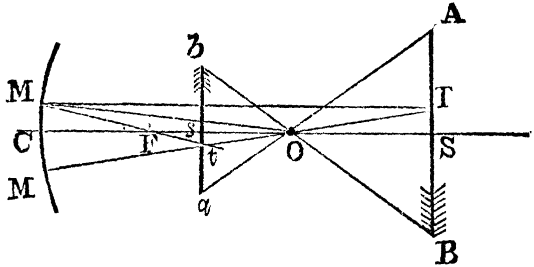



知 MF 與 M'O 之交點 S' 卽爲光點 S 之共軛焦點

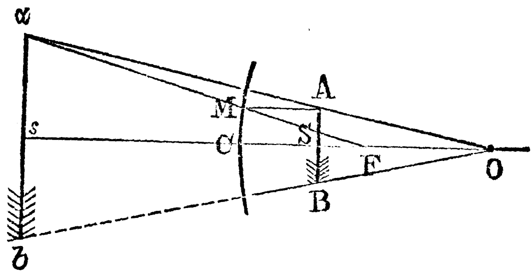
如圖乙 MCM' 爲球面凸鏡O 爲曲率中心 OC 爲主軸設於 S 置一光點則其發射之 SM 線被反射而擴散於 $MS_1$ 之方向故 S 點之共軛焦點現於鏡之裏面 S' 故可知球面凸鏡所結之焦點常爲虛焦點

第八款 球面凹鏡及凸鏡所生之像 設於球面凹鏡之前置一物體則物體映於鏡面而顯呈其像

第十二圖




第十三圖



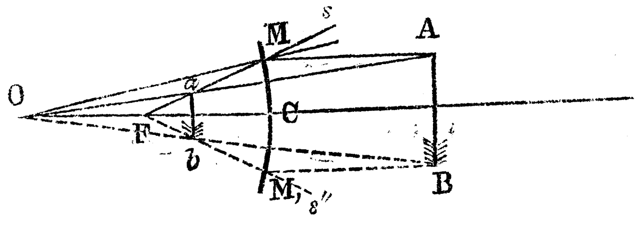

如圖 O 爲球面之中心 F 爲鏡之正焦點今欲求物體 AB 映於鏡面之像先求物體中之一點 T

其焦點之位置因從 T 點發射至鏡面有無數之光線於其中如 TM 線與主軸平行則從 M 點反射之光線必通過正焦點 F(前欵)又其中如 TO 線過球之中心點 C 則 M′ 點反射之光線復歸於原線上故可知 T 之焦點在 MF 與 M′T 二線之交點 t 依同理可知 AB 上各點之焦點集合而成 $atSb$ 卽物體所呈之像但物體在球中心之外則其所呈之像如 $ab$ 之倒置

虛像及實像　如第十三圖若物體置於正焦點之內則 AB 各點之焦點聚於鏡之後面如 $ab$ 像因虛焦點而成謂之虛像反之而物體之像呈於鏡之前方謂之實像但實像常倒立而虛像常直立且球面凹鏡所呈之虛像常大於原物體今欲求像之位置及大小則如第十二圖令 $CS=f$ $CS'=f'$ 準前欵之公式 $\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}=\frac{1}{F}=\frac{2}{r}$ 故得 $f'=(f\times F)\div(f-F)$ 惟因 OAB 三角形與 $Oab$ 三角

形爲相似三角形而 $ab : AB = Oa : OA = os : OS$ 故 $ab = AB\frac{OS}{OS}$ 命爲 t 其原物體 AB 命爲 L 則 L : t = 原物之大 : 像之大 = 從物體至曲率中心之距離 : 從曲率中心至像之距離　又因 $t = OS = r - f' = 2F - f'$　$OS = f - r = f - 2F$　故 $t = L \times \frac{r-f'}{f-r}$　或 $= L \times \frac{2F-f'}{f-2F}$

第　十　四　圖




球面凸鏡之像　凡凸鏡所呈之像恒爲虛像而直立如圖 $MCM_1$ 爲球面 O 爲中心今設有物體 AB 其投射線如 $AM_1$ 及 $BM'$ 則其反射線 MS

MS″ 等常放散於鏡之前面故其所呈之像恆聚於鏡之後面如 $ab$ 但爲虛像而直立且常小於原物體其理觀圖自明由此可知球面凸鏡準前欵之公式 $\frac{1}{f}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}=\frac{\ }{\ }$ 其從鏡面至物體之距離爲正則其中心 O 焦點 S 正焦點 F 等其方向俱相反故 $r$ 及 $f'$ 及 F 俱可知爲負但其正焦點距離 F 必等於曲率半徑之半與球面凹鏡相同

問題

十五 有球面凹鏡其焦點距離爲六寸於鏡之前面相距八寸之處置一小蠟燭則其像呈於何處最爲明晰又蠟燭之高爲一寸則其像之長幾何

答 像之位置離鏡二尺四寸 像之高三寸

解 如第八欵之圖依題理可知蠟燭之位置必在正焦點與半徑中心之間……………………故焦點距離 F (卽 CF) 爲六寸從燭之位置至鏡面

之距離 $f$(即 CS) 爲八寸…………從所求像之位置至鏡面之距離 $f$(即 CS) 則準公式 $\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}=\frac{1}{F}$ 故得 $f'=\frac{f\times F}{f-F}=\frac{8\times6}{8-6}=24$寸　又蠟燭之高 L (即 $ab$) 爲一寸所求像之高 t (即 AB) 則準公式 $\frac{t}{L}=\frac{f'-2F}{2F-f}$ 故 $\frac{t}{1}=\frac{24-12}{12-8}$ 故得 $t=1\times\frac{12}{4}=3$寸

十六　於球面凹鏡甚遠之處置一物體漸々移向鏡面則其像之位置及大小之變化如何

解　(一) 如前第八欵之圖物體去鏡面甚遠其物體中之一點如 T 則其焦點在 TO 與 MF 線之交點 t 故其像常結於曲率中心 O 與正焦點之中間而小於原物體如物體漸近於曲率中心 O 而像亦近於中心 O 但其像常爲實像而倒立

(二) 如物體在曲率中心 O 點上則像亦結於 O 點而像常與實物等大而倒立

(三) 如物體在曲率中心 O 點之內則 AB 與 $ab$ 爲共軛焦點故其像大於原物體常爲實像而倒立

(四) 如物體在正焦點 F 上則其像呈於非常之遠與不呈像同

(五) 如物體入於正焦點 F 之內則其像呈於鏡之裏面常大於原物體但爲虛像而直立

十七 有球面凹鏡其焦點距離爲八寸於鏡之前面若干尺之處置一物體則其像之大爲其原物體之半

答 物體之位置在離鏡二尺四寸之處

解 命物體之大爲 L 像之大爲 t 從物體至曲率中心之距離爲 $f=2F$ 從曲率中心至像之距離爲 $2F-f'$ 故 $\frac{t}{L}=\frac{2F-f'}{f-2F}$ 惟準公式 $\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}=\frac{1}{F}$ 可求得 $f'=\frac{f\times F}{f-F}$ 以此代入上式內則得 $L:t=(f-2F):(2F-\frac{f\times F}{f-F})$ 即 $\frac{1}{L}(f$

$-2F)(f-F)=2F(f-F)-f\times F$　卽　$\frac{1}{2}(f-16)(f-8)=16(f-8)-f\times 8$　故得　$f=16$寸或$=24$寸　因此二數値內之十六寸與球之曲率半徑相當故不可用

十八　有球面凹鏡於鏡之前面相距五尺之處豎立一高六寸之棒而呈一寸五分之實像試求其正焦點距離及曲率半徑

答　正焦點距離一尺　曲率半徑二尺

解　依前問題之解法已知 t 爲一十五分 L 爲六十分 $f$ 爲五百分故得　$\frac{15}{60}(500-2F)(500-F)=F(500-F)-500\times F$ 卽 $F=100$ 或$=250$ 爲正焦點距離　又準公式 $r=2F=2\times 100=2$尺 爲曲率半徑因二數內値之二百五十分其二百五十分之二倍（卽五尺）爲物體之位置故不可用

十九　於球面凹鏡與正焦點之正中置一物體而

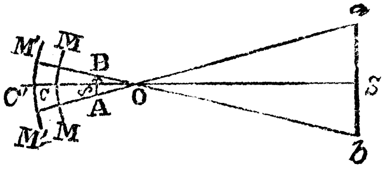
其像之大爲原物之二倍問此像之性質如何

解　依第八欵之圖可知其像爲虛而直立又因題言像之大爲原物體之二倍則物體之位置適合於公式中　$f=\frac{F}{2}$ 故……………………得 $f'=\frac{f\times F}{f-F}=\frac{\frac{F}{2}\times F}{\frac{F}{2}-F}=-F$ 即可知像爲虛而現於鏡之後面有與 F 相等之距離今欲求原物體與像之大之比則準上所言之公式 $\frac{t}{L}=\frac{2F-f'}{f-2F}$ 故得 $\frac{t}{L}=\frac{2F-(-F)}{\frac{F}{2}-2F}=\frac{3F}{-\frac{3}{2}F}=-2$

二十　於壁面欲映一大於原物體一十二倍之像其物體與壁之距爲一十三尺則球面凹鏡之曲率半徑如何又球面凹鏡之位置如何

解　如圖欲令物體之像大於原物體一十二倍則物體之位置須倒立於鏡面曲率半徑之中心以內惟從中心至物體之距離 $os$ 與從中心至像之距離 OS 之比爲 $os:OS=AB:ab=L:t$

第十五圖




$=1:12$ 惟 $Ss$ 爲一十三尺故得 $OS=12$尺 $Os=1$尺 又據圖觀之無論鏡面之曲率半徑如何如 CO 或 C'O 但取其中心 O 點離 S 點一十二尺離 $s$ 點一尺如此樣之位置則可得所求之處有十二倍大之像

二十一　球面凹鏡所生之像之大爲原物體之 N 分之一則原物體與鏡相距爲$(N-1)F$試證之

解　準公式 $L:t=(f-2F):(2F-f')=(f-2F):(2F-\frac{f\times F}{f-F})$ 惟因題言 $L:t=N:1$ 故得 $\frac{1}{N}(f-2F)(f-F)=2F(f-F)-f\times F$ 卽 $F=$

$(N-1)F$ 或 $=2F$ 此式中之數値 $2F$ 與曲率半徑相當故不可用

二十二 有球面凹鏡其曲率半徑六十糎於鏡之前方十糎之處置一物體則其像之位置及大如何

答 像之位置在鏡面之後一十五糎 像之大爲一倍半

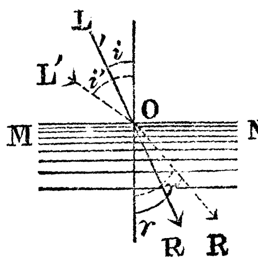
解 命像離鏡面之距離爲 $f'$ 則準以上之公式 $f'=\frac{f\times F}{f-F}$ 故得 $f'=\frac{10\times 30}{10-30}=-15$ 糎 又試求物體與像之大之比則準公式 $L:l=(f'-2F)\div(2F-f')=\frac{60--15}{10-60}=15$ 卽可知像爲虛而直立且爲原物體之一倍有半

## 第三章 光之屈折及靈視（光之屈折 全反射 凸靈視及凹靈視 鏡射）

問 光之屈折試舉其二三之例

第九欵 光屈折之定律 凡光線從空氣中入水中則屈折而變其方向卽凡通過任何物質 A 中之光線進入於他種物質 B 中亦屈折而變其方向如圖投射線 LO 於二種物質之境界面 MN 之 O 點相會則投射線與此面之垂線所成之角爲投射角(如 $i$) 屈折線 OR 與此面之垂線所成之角爲屈折角(如 $r$) 但光線之屈折有近於垂線者如上圖 LO 之 OR 或 L′O 之 OR′ 卽光線從空氣中入水中之例也又光線之屈折有遠於垂線者卽光線從水中出空氣中之例也

第十六圖




依實驗而得次之定律 (一)凡投射線及屈折線俱

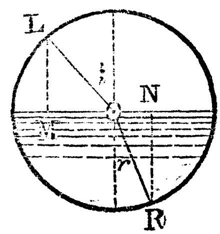
在於與二物質之境界面爲垂直之同一平面內而於投射點上竪立鏡界面之垂線之兩側（二）凡同此二個物質不問其投射角之大小如何其角之正弦與屈折角之正弦之比恒爲一定不變之數謂之兩物質間之屈折率如上圖 LO 之屈折線 ORL′O 之屈折線 OR′ 則其兩正弦之比 $r$正弦：$i$正弦$=r'$正弦：$i'$正弦$=$N 此N爲定數卽屈折率也設如光線從空氣中入水中其屈折率爲 $\frac{4}{3}$ 又光線從空氣中入玻璃中其屈折率爲 $\frac{3}{2}$ 今就上圖觀之光線在空氣中其投射之方向爲 LO 而光線入水中其屈折之方向爲 OR 反之而光線在水中其進行之方向爲 RO 而光線出空氣中其屈折之方向爲 OL 此皆吾人所知也故光線從水中出空氣中之屈折率爲 $\frac{3}{4}$ 卽從空氣入水中之屈折率之倒數依理可知光線從玻璃出空氣中其屈折率爲 $\frac{2}{3}$ 卽可知此例爲屈折線比投射線

較遠於垂線者　又諸物質之屈折率表詳載卷末

第十款　已知其屈折率而求其屈折線　凡已知其屈折率而求其屈折線則有二法如次

(一) 作圖以明之如圖先定其投射角爲 $i$ 欲求其相當之屈折角則以投射點 O 爲中心而於投射線之面內畫一平圓則從此圓周與投射線相切之點 L 向鏡界面上引一垂線 LM 次從境界面上之 O 點而求其與 M 異

第十七圖




向之 N點 (卽 $\frac{OM}{ON}=N$ 爲屈折率相切之點 如光線從空氣入水中其屈折率爲 $\frac{OM}{ON}=\frac{4}{3}$ 復從 N 點向圓周引一垂線其相交之點爲 R 則 OR 線爲投射線 LO 之屈折線而 ORN 角爲屈折

角

(二) 依算法而測定之凡光線從 A 物質中而入 B 物質中其投射角爲 $i$ 而屈折率爲 N 命屈折角爲 $r$ 則從前式 $\frac{i\text{正弦}}{r\text{正弦}}=\mathrm{N}$ 卽可知 $r$正弦$=\frac{i\text{正弦}}{\mathrm{N}}$ 又凡同此二種物質或從 B 物質中而入 A 物質中其屈折率爲 $\frac{1}{\mathrm{N}}$ 故投射角爲 $i$ 則從前式 $\frac{i\text{正弦}}{r\text{正弦}}=\frac{1}{\mathrm{N}}$ 故可知 $r$正弦$=\mathrm{N}\times i$ 正弦

問題

二十三 有光線從空氣中入水中其投射角爲四十五度試作圖以明屈折之方向但空氣與水之屈折率爲 $\frac{4}{3}$

解 依第十七圖先定 $i$ 角爲四十五度而求得其屈折率 N 爲 ON 與 OM 之比如三與四則可求得其屈折線 OR

二十四 如上之問題試依算法而求其屈折角

解 命投射角爲 $i$ 屈折角爲 $r$ 則得其屈折

率$N=\frac{i\text{ 正弦}}{r\text{ 正弦}}=\frac{4}{3}$惟 $i$ 角爲四十五度則其正弦爲 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 故得 $r$正弦$=\frac{3}{4}$ $i$正弦 卽可知 $r$正弦 $=\frac{3}{4}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=0.70711\times\frac{3}{4}=0.5503$ 檢正弦表可知 $r$ 角約爲三十二度

二十五　有光線從空氣入夫利脫玻璃時其投射角爲六十度其屈折角爲三十度而兩物質間之屈折率爲 $\sqrt{3}$ 試證之

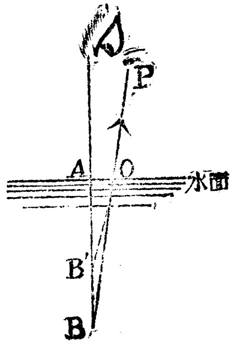
解　因投射角 $i$ 爲六十度其正弦爲 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 屈折角 $r$ 爲三十度其正弦爲 $\frac{1}{2}$ 則得其屈折率

$N=\frac{60^{\circ}\text{ 正弦}}{30^{\circ}\text{ 正弦}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\div\frac{1}{2}=\sqrt{3}$

二十六　於清流見底不及實際之深其故何與

解　如圖從水底 B 而來之光線 BO 其透出空氣中時恆屈

第十八圖



折如 OR 之方向故自人目視之恰如水底不在 B 而在 B′ 較眞深似淺今欲求視深 OB′ 與眞深 OB 之比因光線從水中透出空氣其屈折率爲 $\frac{3}{4}$ 故得 $\frac{OA}{OB'}:\frac{OA}{OB}=4:3$ 即 $OB:OB'=4:3$ 故可知依直視注視水底較眞深祇能見其四分之三

二十七　有透明之玻璃板其兩面平滑而並行有光線通過此板而出與其初入此板時其方向平行則其屈折率如何

解　因此事實可判然者雖不一而足但知其先從空氣中透入平板之屈折率與平板面復透出空氣之屈折率恰爲倒數

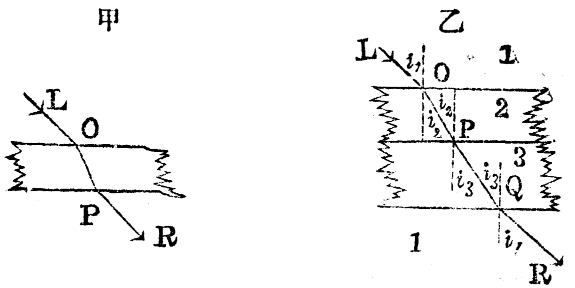
二十八　有光線射入水中其投射之方向殆如水平面則其屈折之方向如何

解　因投射線殆與水面平行則投射角殆等於九十度其正弦爲一惟光線從空氣入水中已知

其屈折率爲 $\frac{4}{3}$ 故準公式 $N=\frac{i\text{正弦}}{r\text{正弦}}=\frac{4}{3}$ 卽 $r$正弦 $=\frac{3}{4}90^{\circ}$正弦 $=\frac{3}{4}1=0.75$ 檢正弦表可知 $r$ 角約爲四十八度三十六分

第十一款　絕對屈折率　凡光線從眞空中入任何物質中則其屈折率爲此物質之絕對屈折率但一物質之絕對屈折率與從空氣中入同物質中之屈對率雖其值不同然無大差蓋一物質之絕對屈折率爲從空氣中入同物質之屈折率之 一·〇〇〇三倍其理如下欵所言因 一·〇〇〇三 爲從眞空入空氣中之屈折率也

第 十 九 圖



第十二款 逐次之屈折 依前問題二十七之理如圖甲其光線 LO 從空氣中經過二面平行之透明板復從板面出空氣中其方向 PR 與投射線 LO 平行又如圖乙有異質之板二枚相重其光線 LO 通過此二板有三回之屈折如 OP PQ QR 而再出空氣中此際之板面平行則出板之光線 QR 與射入之方向 LO 亦爲平行今設於空氣及二枚之板附以一二三之記號則於 O 點爲光線從空氣(一)入於(二)板則其屈折率爲 $N_{12}=\frac{i_1\text{正弦}}{i_2\text{正弦}}$(甲)於 P 點爲光線從(二)板入(三)板則其屈折率爲 $N_{23}=\frac{i_2\text{正弦}}{i_3\text{正弦}}$(乙)於 Q 點爲光線從(三)板出空氣一則其屈折率爲 $N_{31}=\frac{i_3\text{正弦}}{i_1\text{正弦}}$(丙)反之而光線從空氣(一)入(三)板則可知其屈折率爲 $N_{13}=\frac{i_1\text{正弦}}{i_3\text{正弦}}$ 故 $N_{23}=\frac{i_2\text{正弦}}{i_3\text{正弦}}=\frac{i_1\text{正弦}}{i_3\text{正弦}}\div\frac{i_2\text{正弦}}{i_1\text{正弦}}=N_{13}\div N_{12}$ 依同理而知 $N_{23}=N_{13}\times N_{21}$ 故可知光線從(二)板入(三)板之屈折率 $N_{23}$ 必等於以

從(一)板入(二)板之屈折率 $N_{12}$ 除從(一)板入(三)板之屈折率 $N_{13}$ 之數如光線從空氣入水中其屈折率爲 $\frac{4}{3}$ 光線從空氣入玻璃中其屈折率爲 $\frac{3}{2}$ 故可知光線從水入玻璃中則其屈折率爲 $\frac{3}{2}\div\frac{4}{3}=\frac{9}{8}$ 卽其例也

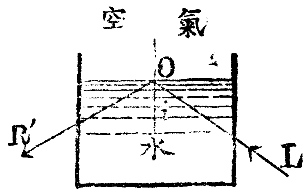
由此可知凡欲求各種物質間之屈折率須於各種物質中任取二種相組合而一一實測之先定一種爲標準物質而依次實測他種物質之屈折率則此等物質相互間之屈折率可依法算出尋常所用測定者爲眞空氣中之屈折率卽絕對屈折率也試記一二於次

| | | | |
|---|---|---|---|
| 空氣 | 一・〇〇〇三 | 水 | 一・三三六 |
| 金剛石 | 二・五…… | | |

第十三欵　全反射　凡光線從稀薄物質而入濃厚物質則生反射線與屈折線若光線從濃厚物質而出稀薄物質……………………………則因其投射角之

如何僅生反射線而不生屈折線如光線從水中出空氣其投射角 $i$ 大於四十八度半光線雖稍出空氣中仍從境界面反射

第二十圖




水中如圖其投射線 LO 於 O 點全部反射而生 OR′ 線可知光線從第一物質入第二物質不生屈折線而其全部反射謂之全反射

滿限角(或臨界角又危急角) 凡在同此二物質間必其投射角達於一定之大以上而後能全部反射因此一定之限角內其投射之光線能生屈折線與反射線過此一定之限角卽僅能生反射線而不生屈折線故光線之全部反射此限角謂之滿限角如光線從水中出空氣其滿限角爲四十度三十五

分通常之光線反射常有屈折線故光量之一部爲屈折線而反射線之光量其强度必減於原光線若光線之全反射則其投射線之全部反射故反射線之光量殆與原光線相等特通過物質之際其光量爲物質所吸收不過其光量減殺甚小耳

滿限角之測定　如上圖光線從水中出空氣中其投射角漸次增大則屈折角亦因而增大而屈折線益遠於垂線而近於境界面如屈折角等於一直角則其屈折線爲零故可知屈折角之最大極度爲九十度則從前式$\frac{i\text{正弦}}{r\text{正弦}}=\frac{3}{4}$而得$i$正弦$=\frac{3}{4}r$正弦惟因$r=90^\circ$卽$r$正弦$=1$故$i$正弦$=\frac{3}{4}$故得$i=40^\circ35'$由此可知光線從水中出空氣其滿限角爲四十度三十五分卽凡一切之滿限角$i$爲$r=90^\circ$時之角故$r$正弦$=90^\circ$正弦$=1$卽$i$正弦$=N$因之可求得$i$角

問題

二十九　當攝氏十八度時水及夫利脫玻璃之絕

對屈折率爲一·三三六及一·八九五問光線從水入夫利脫玻璃其屈折率如何（夫利脫玻璃卽鉛玻璃）

答　屈折率一·四一九

解　從眞空中入水其屈折率爲一·三三六從眞空中入夫利脫玻璃其屈折率爲一·八九五故可知從水中入夫利脫玻璃其屈折率爲

$1.895 \div 1.336 = 1.419$

三十　有光線從空氣入水時其屈折率爲 $\frac{4}{3}$ 從水入氷時其屈折率爲 $\frac{50}{51}$ 問光線從空氣入氷其屈折率如何

答　屈折率約一·三一

解　因光線從空氣入水中其屈折率爲 $\frac{4}{3}$ 從水入氷中其屈折率爲 $\frac{50}{51}$ 故可知從空氣入氷中其屈折率爲 $\frac{3}{4} \times \frac{50}{51} = 1.31$約

三十一　有光線從空氣入哥羅仿謨（無色液體）

其屈折率爲一·四五試求其全反射之滿限角

解 因光線從空氣入啝羅仿謨其屈折率爲一·四五從啝羅仿謨出空氣中其屈折率爲 $\frac{1}{1.45}$ 故可知光線從啝羅仿謨出空氣中則準公式而得 $N=\frac{i\text{正弦}}{r\text{正弦}}=\frac{1}{1.45}$ 惟依滿限角之測定凡一切之滿限角爲適等於 $r$ 角爲九十度之 $i$ 角故依上式而得 $i$ 正絃 $=90^{\circ}$ 正絃 $\frac{1}{1.45}=1\times\frac{1}{1.45}=0.689$ 檢正弦表可知 $i$ 角爲四十三度三十六分

三十二 有光線從透明體出空氣中其滿限角爲四十五度則其屈折率幾何

答 屈折率爲 $\sqrt{2}$

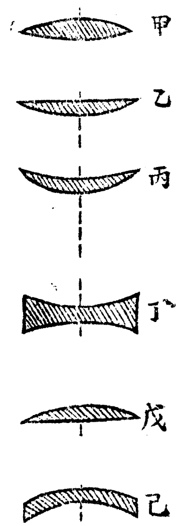
解 依前問題之解法凡光線從空氣入透明體其屈折率爲 N 反之而光線從透明體出空氣中其屈折率恰爲倒數即 $\frac{1}{N}$ 故得 $\frac{i\text{正弦}}{r\text{正弦}}=\frac{1}{N}$ 惟 $i$ 角爲四十五度其正弦爲 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $r$ 角爲九

十度其正弦爲一故得 $\frac{45^\circ\text{正弦}}{90^\circ\text{正弦}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{N}$

即 $N=\sqrt{2}$

第十四款　靈視　凡用玻璃或他種透明體所製之器或其前後兩面俱爲曲面或其一面爲曲面而他面爲平面謂之靈視但曲面之形狀有球面形之一部又有楕圓面拋物線面之一部尋常所用者皆球面形之曲面也如圖之甲乙丙三種靈視其中央極厚而周圍最薄者謂之凸靈視丁戊已三種靈視其中央極薄而周圍最厚者謂之凹靈視而其各球面之中心即爲曲面之中心其通過兩中心之線

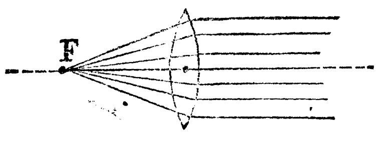
第二十一圖



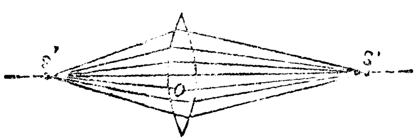
謂之主軸但靈視中之一面爲平面者其主軸即從其餘一面之曲面中心向此平面上所引之垂線而凸靈視又謂之聚光線視即一束之光線通過凸靈視之後而其光悉聚集於一處也如後圖甲凹靈視又謂之散光靈視即凡一束之光線通過凹靈視之後而其光放散於四周也如後圖丙

第二十二圖

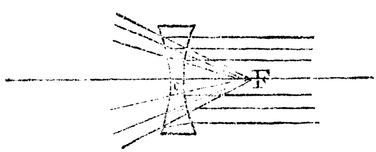
甲



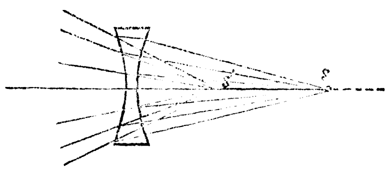

乙



丙




丁



第五十欵　焦點距離　如圖甲凡平行一束之光線與凸靈視之主軸並行（如大陽光線）其光線通過凸靈視之後而聚集於一點此點之光輝最爲顯著謂之凸靈視之正焦點從靈視至正焦點之距離謂之焦點距離詳言之則所謂焦點距離爲從靈視之光學中心（參照十七款）至焦點之距離較爲精

密但尋常所言從靈視至正焦點之距離亦無大差如圖丙凡並行一束之光線通過凹靈視之後則其光發散於四周然此發散之光線設引長之令俱會於一點 F 則於此處所結之焦點謂之凹靈視之正焦點從靈視至正焦點之距離謂之焦點距離但凹靈視之正焦點恆與光線之來向同側而爲虛焦點

共軛焦點　如圖乙及圖丁於靈視之一面置一光源 S 而其通過靈視之光線或其引長線相會於一點 S′ 而結一焦點恰如並行一束之光線相聚於正焦點反之如 S′ 點置一光源則其焦點正結於 S 之位置此 S 與 S′ 二點互爲焦點謂之共軛焦點

靈視之公式　凡靈視之焦點距離與其表面之彎曲及物質之屈折率俱有關係即屈折率大而表面彎曲甚者其焦點距離必短屈折率小而表面近於扁平者其焦點距離較長依理論上之測定（第十

六款）命靈視之焦點距離爲 $F$ 兩球面之半徑爲 $r$ 及 $r'$ 屈折率爲 $N$ 則焦點距離之關係式如次

$$\frac{1}{F}=(N-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)\cdots\cdots\text{甲}$$

命從共軛焦點至靈視之距離爲 $f$ 及 $f'$ 兩球面之半徑爲 $r$ 及 $r'$ 屈折率爲 $N$ 則共軛焦點之關係式如次

$$\frac{1}{f'}-\frac{1}{f}=(N-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)\cdots\cdots\text{乙}$$

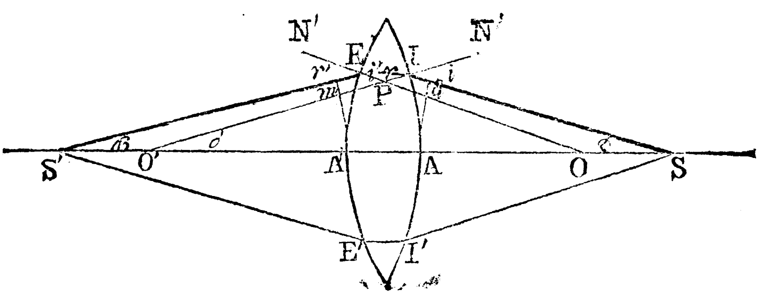
準此可知焦點距離與共軛焦點之關係式如次

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f'}-\frac{1}{f}\cdots\cdots\text{丙}$$

以上三個公式爲凸靈視及凹靈視通用之式但焦點距離 $F$ 共軛焦點之距離 $f$ 及 $f'$ 兩球面之半徑 $r$ 及 $r'$ 於代數學上之量各含有正或負之意義即從靈視之一面測其距離爲正則其反向之距離爲負又 $f$ 常定爲正即從靈視至光源點（或物體）測其方向恒爲正如前圖乙 $f$ 及 $r'$ 爲正

而 $f'$ 及 $r$ 爲負而 $r'$ 爲與原光點同方球面之半徑 $r$ 爲與原光點異方球面之半徑又 F 爲負數但凹靈視之正焦點恒結於與平行光線射來之方向故 F 爲正數由此可知凡在凸靈視定 $f$ 爲正號 F 常爲負號如焦點爲實焦點則 $f'$ 爲負號如焦點爲虛焦點則 $f'$ 爲正號而 $r$ 及 $r'$ 則因靈視之形而或正或負凡在凹靈視定 $f$ 爲正號 F 常爲正號其焦點常結於虛焦點故 $f$ 爲正號而 $r$ 及 $r'$ 則因靈視之形而或正或負

第二十三圖



第十六款　靈視之聚光及散光　凡靈視從一光點所發射之光線或並行一束之光線集合於一點如集合之一點爲實焦點卽爲聚光如集合之一點爲虛焦點卽爲散光此理已詳於前款靈視之公式試再以理論證明之如上圖之凸靈視 S S′ 線爲主軸而 S 及 S′ 之兩點爲共軛焦點今試置光點於 S 其投射靈視之光線有數多之光線於其中取其一線 SI 此光線之屈折線爲 IE 復自靈視透出其屈折線爲 ES′ 則 NIO′ 線爲於投射點 I 與曲面 AI 成垂直之線而通過其中心 O′ N′EO 線爲於透光點 E 與曲面 A′E 成垂直之線而通過其中心 O 其 I 點之投射角爲 $i$ (卽 SIN 角)屈折角爲 $r$ (卽 O′IE 角) E 點之投射角爲 $i'$ (卽 OEI 角)屈折角爲 $r'$ (卽 S′EN角)又 ASI 角以甲顯之 A′S′E 角以乙顯之 AOE 角以丙顯之 A′O′I 角以丁顯之則 $i$ 角爲 IO′S 三

角形之外角故 $i$＝甲＋丁　又 $r'$ 角為 EOS′ 三角形之外角故 $r'$＝乙＋丙　由此可知

$$i+r'=\text{甲}+\text{乙}+\text{丙}+\text{丁}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{一})$$

命靈視之屈折率為 N 則

$$\left.\begin{array}{l}\text{於 I 點}\quad i\text{正弦}=N\times r\text{正弦}\\ \text{於 E 點}\quad r'\text{正弦}=N\times i'\text{正弦}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{二})$$

但如圖所示如其半徑 AO′ 及 A′O 之比甚為明顯則靈視甚厚且大然實際兩半徑之比與靈視面之 AI 弧及 A′E 弧甚小則 $i\ r\ i'\ r'$ 等角亦甚小故 $i$ 正弦 $r$ 正弦 $i'$ 正弦 $r'$ 正弦等可視為 $i\ r\ i'\ r'$ 等亦無大差則準(二)式而得 $i=N\times r$ 及 $r'=N\times i'$ 以此二式相加則得 $i+r'=N(i'+r)$ 又 POO′ 三角形與 PIE 三角形俱以 P 為頂角故 $r+i'$＝丙＋丁　卽 $i+r'$＝N(丙＋丁) 以此式代入(一)式　故得 N(丙＋丁)＝甲＋乙＋丙＋丁　由此可知

$(N-1)(丙+丁)=甲+乙$……………………(三)

設命半徑 OA′ 爲 $r'$ 半徑 O′A 爲 $r'$ 光點之距離 SA 爲 $f$ 焦點之距離 S′A′ 爲 $f'$ 次以 S 爲中心 SA 爲半徑旋規作 A$d$ 弧又以 S′ 爲中心 S′A′ 爲半徑旋規作 A′M 弧則得 $甲=\frac{Ad}{As}=\frac{Ad}{f}$ $乙=\frac{A'M}{NS'}=\frac{A'M}{f'}$ $丙=\frac{A'E}{OA'}=\frac{A'E}{r'}$ $丁=\frac{AI}{O'A}=\frac{AI}{}$ 代入三式則 $(N-1)(\frac{A'E}{r'}+\frac{AI}{r})=\frac{Ad}{f}+\frac{A'M}{f'}$……………………(四)

但此處之 A′E AI A$d$ A′M 可視爲與半徑 $r$ 及 $r'$ 之比爲甚小且有相等之長亦無差違則(四)式可變爲次式

$(N-1)(\frac{1}{}+\frac{1}{r'})=\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}$……………………(甲)

觀此式可知爲投射線 SI 與其屈折線 SE 所得之終結但凡從 S 點所發之投射線俱可得同一之終結何則如 SI′ 之投射線其屈折線與主軸相切之點爲 S″ 命 S″ A′ 爲 $f_1$ 則依與前同一之

理論而得 $(N-1)(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'})=\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}$ 因 $(N-1)(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'})$及 $\frac{1}{f}$ 與前同樣故可知 $f_1$ 與 $f'$ 同樣卽 S″ 點與 S′ 點相合由此可知 S 點所發之投射線其通過靈視之後相會於同一點 S′ 此點最爲著明卽此光線之焦點

次設令原光點漸次距靈視較遠而在無限之距離如太陽之光線則 $f=\infty$ 故 $\frac{1}{f}=\frac{1}{\infty}=0$則公式(甲)爲 $(N-1)(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'})=\frac{1}{f'}$ 但凡在無限之遠處射來之光線爲平行一束則其時之焦點爲正焦點故此之 $f'$ 爲靈視之正焦點距離以 F 代之則得

$$(N-1)(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'})=\frac{1}{F}\cdots\cdots\cdots\cdots(乙)$$

從(甲)及(乙)二式而得

$$\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}=\frac{1}{F}\cdots\cdots\cdots\cdots(丙)$$

卽亦凡焦點距離與共軛焦點至靈視之距離之關係式也

依以上之論證其 $f$ $f'$ F $r$ $r'$ 等俱爲正數但依

前款之理論定 $f$ 爲正數而 $f'$ F $r$ $r'$ 等因其靈視而測其與 $f$ 同向者爲正其與 $f$ 反向者爲負則依上所言之關係式如前款所言設 $r$ 爲靈視與光體同面之側面半徑而 $r$ 爲靈視與光體異面之側面半徑則得 $(N-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)=\frac{1}{f'}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$

卽凡凸靈視及凹靈視所適用之公式也

問題

三十三　有一面凸一面平之凸靈視其凸面之曲率半徑爲八糎而靈視之玻璃屈折率爲一・八試求其焦點距離

答　正焦點距離十糎

解　依靈視之公式 $\frac{1}{F}=(N-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\right)$ 假令光線之投射來自凸面之側則於此例測得其焦點距離爲正因凸面之半徑 $r$ 爲負八糎平面之半徑 $r'$ 爲無窮玻璃質之屈折率 N 爲一・八則

可知 $\frac{1}{F}=(1.8-1)(\frac{1}{-8}-\frac{1}{\infty})=0.8\times(-\frac{1}{8})=-$

01 故得 $F=10$糎

三十四 有凸靈視其焦點距離一十二糎於其一面二十糎之處置一小體則其像呈於何處

答 像之位置離靈視之距離三十糎

解 依靈視之公式 $\frac{1}{f'}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ 先定其物體所在之側面 $f$ 爲正號其從靈視至物體之距離 $f$ 爲二十糎焦點距離 F 爲負十二糎試求從靈視至像之距離 $f'$ 則準公式 $\frac{1}{f'}=\frac{1}{F}+\frac{1}{f}$

故得 $f'=\frac{f\times F}{f\times F}=\frac{20\times(-12)}{20-12}=-30$糎 因而像爲實像而從靈視至像之距離爲三十糎

三十五 如上題之凸靈視於其一面六糎之處置一光體則其焦點結於何處

答 虛焦點距離十二糎

解 準公式 $f'=\frac{6(-12)}{6-12}=12$糎 因焦點在離靈視與原體同側故可知爲虛焦點

三十六　兩面凸之靈視其焦點距離十糎於其一面三十糎之處置一光點則其虛焦點之位置如何

答　虛焦點距離七糎五

解　於公式 $\frac{1}{f'}=\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ 中如在凹靈視則依第十五款先定物體所在之側之方向爲正號則正焦點常爲虛而正因題言從靈視至物體之距離 $f$ 爲三十糎正焦點距離 F 爲十糎試求從靈視至像之距離 $f'$ 則準公式而得 $f'=\frac{f\times F}{f+F}$ $=\frac{30\times10}{10+30}=7.5$糎

三十七　一面平一面凹之凹靈視於其一面四十五糎之處置一小體而呈像於距靈視九糎之處試求凹靈視之焦點距離

答　正焦點距離十一糎二五

解　依前問題三十六之解法已知從靈視至物體之距離 $f$ 爲四十五糎從靈視至像之距離 $f'$

爲九糎試求其焦點距離 F 則準公式而得

$F=\frac{f\times f'}{f-f'}=\frac{45\times 9}{45-9}=11.25$糎

三十八　兩面凸之靈視其曲率半徑爲四寸及六寸而其玻璃質之屈折率爲一·八試求其焦點距離

答　正焦點靈離三糎

解　準第十六款靈視之公式(乙) $\frac{1}{F}=(N-1)(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'})$ 已知靈視之屈折率 N 爲一·八兩曲面之半徑 $r$ 及 $r'$ 爲正四糎及負六糎試求其焦點距離 F……則得 $\frac{1}{F}=(1.8-1)(\frac{1}{-6}-\frac{1}{4})=0.8(-\frac{10}{24})=-\frac{10}{30}$ 即 $F=-3$糎

三十九　用粘粒烏玻璃作成一面平一面凸之靈視其屈折率爲一·八而其焦點距離爲八寸試求凸面之曲率半徑

答　凸面之曲率半徑六寸四分

解　依前問題三十八之解法已知靈視之屈折

率 N 爲一·八正焦點距離 F 爲負八寸平面之曲率半徑 $r'$ 爲無窮今求凸面之曲率半徑 $r$ 則準公式 $\frac{1}{F}=(N-1)(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'})$ 故得 $-\frac{1}{8}=(1.8-1)(\frac{1}{r}-\frac{1}{\infty})$ 因之求得 $r=6.4$寸

四十 以金剛石作成兩面凸之靈視其屈折率爲二·五 而其曲率半徑各爲五糎試求其焦點距離

答 焦點距離一糎六六

解 依前問題三十八之解法已知其屈折率 N 爲二·五兩凸面之曲率半徑 $r$ 及 $r'$ 爲正五糎及負五糎今求其焦點距離 F 則準公式而得 $\frac{1}{F}=(2.5-1)(\frac{1}{-5}-\frac{1}{5})$ 故得 $F=1.66\cdots\cdots$糎

四十一 於洋燈火焰之前置一靈視欲令照徹遠方則靈視須如何位置

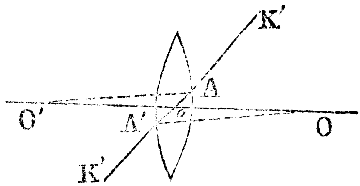
解 靈視之正焦點正而火焰相合即所求靈視之位置因光線通過靈視之後其焦點結於無窮

遠之距離故能照徹遠方

第十七款

靈視之光學中心　凡各種靈視於其主軸上靈視之內部或與之極近之處

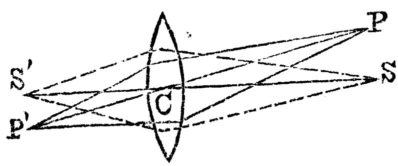
第二十四圖




有一定點設投射線經過此點則其透出靈視之後與投射線同一方向恰如不受屈折然此定點謂之靈視之光學中心欲知此點之位置則於任意之方向引曲率半徑 OA′ 及 O′A 二線互爲平行復從 A 及 A′ 二點引 AA′ 線其與主軸相交之點 C 即光學中心也因 A 及 A′ 二點各作一與曲面相切之平面則此二平面互爲平行（以與曲面垂直之二半徑 OA′ 及 O′A 互爲平行故也）故

依第十二欵甲圖之理可知 A A′ 線恰如經過兩面平行之透明體如 KA 爲投射線其入靈視之屈折方向爲 A A′ 則其透出靈視之後其光線如 K′ A′ 方向與投射線 AK 平行若靈視之面極薄且不甚大而投射線 KA 之方向與主軸所成之角爲極小則其間之投射線 KA 與透出線A′K′ 殆可視爲同一直線

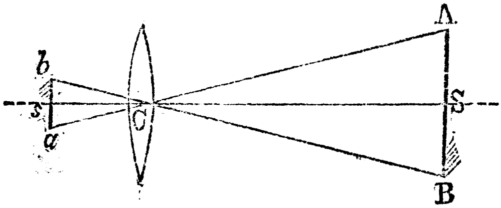
第 二 十 五 圖




副軸 凡光線通過光學中心而不過通曲面之中心謂之副軸但副軸與主軸所成之角甚小則可依靈視之公式 $\frac{1}{f'}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ 可以求得如圖 PP′ 爲

副軸於其上置光點 P 則 P′ 爲其焦點此原理即靈視之物體肖像之基本也

第二十六圖




第十八欵　靈視之物體肖像　於靈視之一面有一物體則從此物體各點所發之光線其通過靈視之後各作焦點故集合此等之焦點即爲物體之肖像如圖所示之凸靈視 C 點爲光學中心 AB 爲物體則 A 點之焦點呈於 AC 副軸上之 $a$ 點 B 點之焦點呈於 BC 副軸上之 $b$ 點 S 點之焦點呈於 SC 主軸上之 S′ 點又其他各點之焦

點悉呈於 $a$ 及 $b$ 之間如此所集合之 $ab$ 線即爲物體之肖像但凡物體所呈之像亦依共軛焦點之同理而生實像與靈像(一)物體遠於正焦點則所呈之像爲實像而顚例其位置(二)物體在正焦點上則其各點之焦點至有無限之距離而實際不能呈像(三)物體在正焦點以內則其各點之共軛焦點爲虛而其像爲靈像而直立且大於原物體若爲凹靈視則物體所呈之像常爲虛像而直立且小於原物體

靈視之物像之大　如前圖今欲求其物體 AB 與其像 $ab$ 之比則因 ACB 三角形與 $acb$ 三角形爲相似三角形故可知 $\frac{l}{L}=\frac{ab}{AB}=\frac{cs}{CS}=\frac{f'}{f}$ 因 $f$ 及 $f'$ 爲共軛焦點之距離故既知共軛焦點之距離則其像之大容易求得

問題

四十二　從凸靈視一十二糎之處置一長五糎之

物體則其像之大及位置如何但此靈視之焦點距離爲八糎

答　像之位置離靈視二十四糎但爲實像而倒立且大於原物體計有二倍

解　先求像之位置已知從靈視至物體之距離 $f$ 爲一十二糎焦點距離 F 爲負八糎今求其從靈視至像之距離 $f'$ 則準公式(丙) $\frac{1}{F}=\frac{1}{f}-\frac{1}{f'}$ 故得 $f'=\frac{f\times F}{f+F}=\frac{12(-8)}{12-8}=-24$糎　次求物體與像之大之比已知原物體 L 之大爲五糎今欲求像之大 t 則準公式 $\frac{t}{L}=\frac{f'}{f}=\frac{-24}{12}=-2$

四十三　離室壁三尺六寸之處豎立蠟燭復於蠟燭與室壁之間置焦點距離八寸之靈視欲令蠟燭映於壁面之像最爲著明則靈視之位置如何

答　靈視之位置在離壁二尺四寸或一尺二寸之處

解　命所求從靈視至壁之距離爲 $f'$ 已知從靈視至蠟燭之距離負 $f$ 爲 $36+f'$ 其焦點距離 F 爲負八種則準靈視之公式 $\frac{1}{F}=\frac{1}{f'}-\frac{1}{f}$ 故得 $-\frac{1}{8}=\frac{1}{f'}-\frac{1}{36+f'}=\frac{36+f'-f'}{f'(36+f')}$ 即 $f'(36+f')=-36\times 8$ 故得 $f'=24$ 寸或 $-12$ 寸　準此可知 $24+12=36$ 即從蠟燭至室壁之距離但 $f$ 爲十二則 $f'$ 爲負二十四 $f$ 爲二十四則 $f'$ 爲負十二可知二十四與一十二爲共軛焦點之關係

四十四　離凸靈視三寸之處有一物體今作一大於物體三倍之像試求此靈視之焦點距離

答　正焦點距離二寸二分五厘

解　命物體之大 L 爲一像之大 t 爲三則準公式 $\frac{t}{L}=\frac{f'}{f}$ 故得 $\frac{3}{1}=\frac{f'}{f}$ 惟已知 $f$ 爲三寸則可知 $f'$ 爲負九寸今欲求其焦點距離 F 則準公式(丙) $\frac{1}{F}=\frac{1}{f'}-\frac{1}{f}$ 故得 $\frac{1}{F}=\frac{1}{-9}-\frac{1}{3}$ 即可知

$F=2.25$寸

四十五　離室壁三尺之處豎立蠟燭欲令五倍大之實像映於壁面則須置何種靈視并其室壁之距離若何

答　靈視之位置離壁二尺五寸且須用正焦點距離四寸一七三之凸靈視

解　命原物體之大 L 爲一像之大 t 爲五則得 $\frac{t}{L}=\frac{5}{1}=\frac{f'}{f}$ 故用比例配分法先分其從室壁至蠟燭之距離三尺如五與一之比即得 $f'=\frac{3}{1+5}\times5=2.5$尺　爲靈視之位置　次求其正焦點距離 F 惟已知 $f'$ 爲二尺五寸則 $f$ 爲五寸故準靈視之公式 $\frac{1}{F}=\frac{1}{f'}-\frac{1}{f}=\frac{1}{-2.5}-\frac{1}{0.5}$ 即可求得　$F=0.417\cdots\cdots$尺

四十六　於靈視立長四糎之物尺而試其像之映於紙障最爲鮮明在靈視之後面九十糎之處其長爲二十糎試求其正焦點距離

答　正焦點距離一十五糎

解　準靈視之公式 $\frac{1}{F}=\frac{1}{f'}-\frac{1}{f}$ 故得 $F=\frac{f\times f'}{f-f'}$ 惟物體之大 L 爲四糎像之大 t 爲二十糎從靈視至像之距離 $f'$ 爲九十糎則準公式 $\frac{t}{L}=\frac{f'}{f}$ 故得 $\frac{20}{4}=\frac{90}{f}$ 即可知 $f=18$糎 因之可求得 $F=\frac{18(-90)}{18+90}=-15$糎

四十七　有凸靈視其實像比實物大 N 倍則物體與靈視之距離爲 $\frac{N+1}{N}\times F$ 試證之

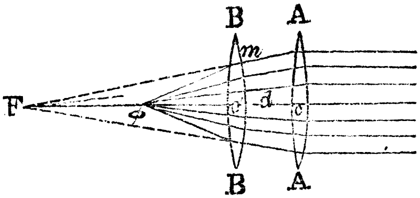
解　因所求實像 t 大於原物體 L 之 N 倍則準公式 $\frac{t}{L}=\frac{f'}{f}$ 故得 $\frac{N}{1}=\frac{-f'}{f}$ 即 $f'=-Nf$ 又準靈視之公式 $\frac{1}{F}=\frac{1}{f'}-\frac{1}{f}$ 以 $-Nf$ 代式中之 $f'$ 則 $\frac{1}{F}=\frac{1}{-Nf}-\frac{1}{f}=\frac{f+Nf}{Nf\times f}=\frac{1+N}{Nf}$ $f=\frac{1+N}{N}\times F$

四十八　有二個靈視相重試求其焦點距離若何

解　命二個靈視之焦點距離爲 F 及 F′ 其相重合之焦點距離爲 $\varphi$ 如圖有 AB 二靈視

其間之距離爲 $d$ 設有並行一束之光線與主

第二十七圖




軸平行而透過 A 靈視則其正焦點結於 F 惟因於 A 與 F 之間插入 B 靈視則 AF 屈折線透過 B 靈視再行屈折而其焦點結於 $\phi$ 即平行光線通過相重 AB 二靈視之後而其光聚於 $\phi$ 點即二靈視之正焦點也今欲求 $\phi$ 點與 F 及 F′ 之關係因 $C'\phi = \phi$　$CE = F$ 試單就 B 靈視而觀令光點置於 $\phi$ 點則從 $\phi$ 點所出之光線通過 B 靈視時其屈折之方向爲 MA

則其虛焦點結於 F 即可知 $\phi$ 與 F 爲 B 靈視之共軛焦點惟因 B 靈視之焦點距離 F′ 則依靈視之公式而得 $\frac{1}{F}=\frac{1}{C\phi}-\frac{1}{C'F}$ 故得 $\frac{1}{F'}=\frac{1}{\phi}-\frac{1}{F-d}$ 移其項則得 $\frac{1}{F'}+\frac{1}{F-d}=\frac{1}{\phi}$ 爲 $\phi$ 與 F 及 F′ 之關係式　若 AB 二靈視緊相密接則 $d=0$ 故得 $\frac{1}{F'}+\frac{1}{F}=\frac{1}{\phi}$

四十九　二個極薄之凸靈視其焦點距離爲一十五糎與三十糎若此二靈視緊相密接試求其焦點距離

答　焦點距離十糎

解　因二個靈視之焦點距離 F 及 F′ 爲十五糎及三十糎其相重合之焦點距離爲 $\phi$ 則依前題之公式 $\frac{1}{\phi}=\frac{1}{F'}+\frac{1}{F}$ 故得 $\frac{1}{\phi}=\frac{1}{30}+\frac{1}{15}$ 因之可求得 $\phi=10$糎

五十　有二個凸靈視其焦點距離爲六糎與八糎若此二靈視緊相重合試求其焦點距離

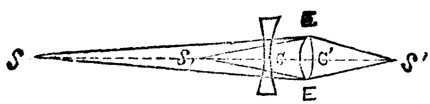
答　焦點距離三糎又七分之三

解　因二個靈視之焦點距離 F 及 F′ 爲六與八其相重合之距離 $\phi$ 則準前題之解法故得 $\frac{1}{\phi}=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$ 即 $\phi=3\frac{3}{7}$糎

五十一　有近視眼觀書置於距眼十五糎之處則甚明晰若置書於距眼六十糎之處欲令觀書明晰則須配焦點距離若干糎之眼鏡

答　所用之凹眼鏡其焦點距離二十糎

第二十八圖




解　如圖 EE 爲近視眼之結晶體其狀爲凸靈視則與眼相距一十五糎之處如 S′ 所發之光線恰如結焦點於網膜上 S′ 則甚明晰若置

物體於與眼相距六十糎之處如 S 欲令其視之明晰則須配眼鏡一具使物體 S 所結之像恰在 $S_1$ 點之位置故可知所用之眼鏡爲凹靈視鏡命此凹靈視鏡之焦點距離爲 F 其 $C'$ 點殆與 C 點相接則準靈視之公式 $\frac{1}{F}=\frac{1}{f'}-\frac{1}{f}$ 其 $f$ 爲六十糎 $f'$ 爲一十五糎故得 $\frac{1}{F}=\frac{1}{15}-\frac{1}{60}$ 即 $F=20$糎

五十二　健全眼之明視其距離爲三十糎今近視眼之明視其距離爲十糎須配何度之近眼鏡但眼鏡之度其焦點距離以吋計之如三十度之眼鏡有三十吋之焦點距離又一吋當二糎五四

答　六度之凹眼鏡

解　依前問題之解法於與人目相距三十糎之處如 S 置一物體欲令其視之明晰則須令射來之光線恰如在與人目相距十糎之處如 S 命其所用之凹鏡其焦點距離爲 F 則準公式

$\frac{1}{F}=\frac{1}{f'}-\frac{1}{f}$ 故得 $\frac{1}{F}=\frac{1}{10}-\frac{1}{30}$ 即 F－15糎 試改算爲吋數則因 2.54糎＝1吋 故得 15÷2.54＝5.9 即可知爲六度之凹眼鏡

五十三 老眼之明視其距離二十吋則所用之眼鏡如何但常人之明視其距離爲十二吋

答 三十度之凸鏡

解 於與人目相距一十二吋之處置一物體欲令其射來之光線恰如在離眼二十吋之處故可知所用之眼鏡爲凸鏡命凸鏡之焦點距離爲 F 則準靈視之公式 $\frac{1}{F}=\frac{1}{f'}-\frac{1}{f}$ 故得 $\frac{1}{F}=\frac{1}{20}-\frac{1}{12}$ 因之可求得 F＝－30吋 故可知所用之凸鏡爲三十度

# 第八篇　電氣學

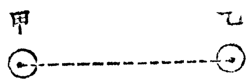
## 第一章　電氣斥力及引力　電氣量

問一　測電氣之斥力及引力試詳克倫振秤之實驗

問二　有等大之金屬球須如何而可令帶同量之電氣

第一款　電氣斥力及引力之定律　凡同種之電氣相驅或異種之電氣相引悉與其所受電體之距離及其電氣之量相關係此係法人克倫借用振秤器以測定此力而發明次之定律曰凡帶電氣之二物體其間之斥力及引力與其二物體之電氣量之相乘積爲正比例又與其間之距離自乘爲反比例由此可知電

第一圖



氣力與第一篇四十三欵之萬有引力同法亦間隔作用力之一種也如圖所示之甲乙二球甲球所有之電氣電爲 $e$ 乙球所有之電氣爲 $e'$ 其兩球中心之距離爲 $r$ 命兩球間之斥力或引力爲 F 則關係式爲 $F=K\times\frac{e\times e'}{r^2}$ 但 K 爲常數

第二欵　電氣量之單位　吾人本克倫之定律而制定電氣量之單位曰凡帶任何等量之電氣其二小球中心之距離定爲一糎時則其間之斥力或引力以如一達音力之電氣量爲單位稱之爲電氣量之 CGS 靜電氣單位但小球可視爲甚小之質點亦無差違

附記　如有一小金屬球帶若干量之電氣令與等大之另一金屬球相接觸則在甲球之電氣已傳播其二分之一於乙球而此甲乙二球有等量之電氣又凡異種之電氣欲知其等量與否則兩者相接觸之後兩電氣有中和作用全失其發電

之現象則可知兩者之電氣量相等

依上電氣量單位之定義計電氣之量以 CGS 靜電氣單位計距離以糎計力以達音則其式變爲 $F=\frac{e\times e}{r^2}$ 但凡電氣之斥力則 $e$ 及 $e'$ 同號故 F 爲正數而電氣之引力則 $e$ 及 $e'$ 異號故 F 爲負數

實用單位　如上所言之電氣量 CGS 靜電氣單位爲數甚小頗不便於實用因而實用上之單位取其三十億倍卽 $(3\times(10)^9$ 之電氣量謂之爲一克倫卽實用單位也

問題

一　有二個帶電氣之小球兩球之中心距離爲四則其斥力爲十六如其距離爲三十二則其斥力幾何

答　○·二五

解　因兩球間電氣之斥力與其距離自乘爲反

比例故可知距離增八倍則其斥力之減少爲

$\frac{16}{82}=0.25$

二　二球之中心距離爲一糎甲球之電氣量二單位乙球之電氣量四單位則其斥力幾何又甲球之電氣量二單位乙球之電氣量八單位則其斥力幾何

答　最初斥力爲八達音　第二斥力爲十六達音

解　已知甲球之電氣量 $e$ 爲二單位乙球之電氣量 $e'$ 爲四單位其兩球間之距離 $r$ 爲一糎則準本款之公式　$F=\frac{e\times e'}{r^2}$ 故得 $F=\frac{2\times 4}{1^2}=8$ 達音又得 $F=\frac{2\times 8}{1^2}=16$ 達音

三　甲乙二球之異種電氣量爲三與四其距離爲六而引力爲十若同種電氣量爲六與二十其距離爲十二則其斥力幾何

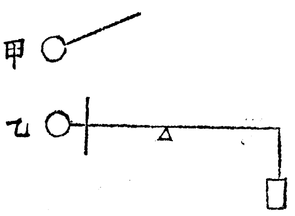
答　斥力四

解　準公式可求得其引力　$F=10=-K\times\frac{3\times4}{6^2}$　又可求得其斥力　$F'=K\times\frac{6\times20}{12^2}$　故引力與斥力之比爲　$10:F'=K\times\frac{3\times4}{6^2}:K\times\frac{6\times20}{12^2}$

因之可求得　$F'=4$

四　有同大之二小球其乙球懸於天秤之一端而於他端置一分銅令其平準另置甲球令其帶若干量之電

第　二　圖




氣與乙球猝相接觸則移其電氣量之一半如置於乙球直上若干距離之處則兩球互相反撥故乙球下行而天秤失其平準復於天秤之他端加六瓦之分銅而天秤仍歸於平準如甲球之位置不變另以第三等大之球與甲球猝相接觸則分

銅須減若干量可使天秤平準但天秤須不傳導體且其支點在中央點

答　分銅之重須減三瓦

解　因最初甲球與乙球相接之後兩球有等量之電氣命爲 $e$ 惟二球間之距離爲 $r$ 而其斥力 F 爲六瓦故得 $F=6=K\times\frac{e^2}{r^2}$ 次另以與甲球同大而不含電氣之第三球令與甲球相接觸則甲球之電氣量 $e$ 已減其二分之一命此時之斥力爲 $F'$ 則得 $F'=K\times\frac{c\times(e\div2)}{r^2}$ 故兩斥力之比爲 $6:F'=K\times\frac{e^2}{r^2}:K\frac{c\times(e\div2)}{r^2}$ 因之可求得 $F'=3$瓦

五　如上之問題試求甲球最初所有之電氣量但甲乙二球間之距離爲五糎

答　七百六十六絕對單位

解　於前問題四之解中已知其斥力 $F=6=K=\frac{e^2}{r^2}$ 試以達音計之則得 $F=6\times980$達音

而兩球間之距離 $r$ 依題可知爲五糎……故得

$6\times980=\frac{e^2}{5^2}$ 因之可求得 C＝383絕對單位

惟甲球未與乙球相接觸之前其所含之電氣量

爲此絕對單位之二倍故得 $383\times2=766$絕對

單位

六　如上之問題兩球有等量之電氣於天秤之他

端加六瓦之分銅而天秤平準其兩球間之距離

爲五糎若其距離二糎則天秤之他端須加幾何

之分銅

答　三十七瓦五

解　因兩球之距離爲五糎則其斥力 F 爲六

瓦則得 $6=K\times\frac{e}{5^2}$ 若兩球間之距離爲二糎則

其斥力 $F'=K\times\frac{e}{2^2}$ 故可知兩斥力之比爲

$6:F'=K\times\frac{e^2}{5^2}:K\times\frac{e^2}{2^2}$ 因之可求得 $F'=$

37.5瓦

七　有一球不受電氣而與同形同大之受電氣球

猝相接觸之後置於相距八糎之處則其間之斥力爲十六達音試求其最初受電球之電氣量

答　六十四絕對單位

解　因同形同大之兩球猝相接觸則兩球有等量之電氣命爲 $e$ 而兩球間之距離爲八糎其斥力 F 爲十六達音則可知 $16=\frac{e^2}{8^2}$ 即 $e=32$ 絕對單位　惟最初受電氣之一球其所含之電氣量爲此絕對單位之二倍故得 $2\times32=64$ 絕對單位

八　二小球之受電量爲五克倫與八克倫而兩球之相距爲一十五米則其間之斥力有幾達音又與若干瓩之重力相當

解　因電氣之實用單位可知一克倫當 $3\times(10)^9$ 絕對單位故可知其斥力 $F=\frac{(5\times3\times10^9)(8\times3\times10^9)}{1500^2}=1.6\times1^{14}$ 達音　試改算爲瓩則得

$(1.6\times10^{14})\div(980\times1000)=1.63\cdots(10)^8$ 瓩

九　有半徑五糎之金屬球令其受十二·五克倫之電氣量則其電氣密度(單位面積上之電氣量)如何

答　一平方糎上有〇·〇三九八克倫

解　因一二·五之電氣量分布於球面而球之面積爲 $4\pi5^2$ 故一平方糎上所有之電量爲 $\rho$

則 $\rho=\dfrac{1.25}{4\pi\times25}=0.0398$克倫

## 第二章　電流（電流　電位之差）

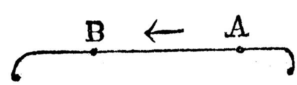
問一　正切電流計之構造並其理由

問二　薄爾大計之理如何

問三　電氣計之用如何

第三款　電流之單位　如圖有電氣從 A 向 B 流動於單位時間其單位電氣量所流

第　三　圖

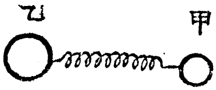


之電流謂之電流之單位卽於一秒間其 CGS 靜電氣單位量所流之電流謂之電流之 CGS 靜電氣單位但其量甚小頗不適於實用

電流之實用單位　所謂電流之實用單位卽於一秒間有一克倫之電氣量所流之電流謂之一安培卽 CGS 靜電氣單位之三十億倍(卽$3\times(10)^9$)也

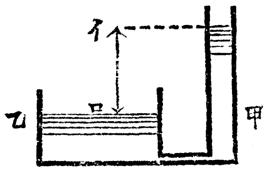
第四款　電位之差

第四圖




如圖有甲乙二個良導體今令甲體帶若干量之電氣以一金線連絡二體則甲體電氣之一部分由金線傳至乙體卽此金線生電流之狀況其所以生電流之理如圖水從高處甲向低處乙而流至兩處同一水平面而止又熱從溫度高之物體移於溫度低之物體至兩體同溫度而止其所以使水從高處向低處而流因其水平面之差使熱從溫

第　五　圖




度高之物體向低溫度之物體而流因其溫度之差準此可知電氣之流動原基於電位之差例如甲乙二體相連結陽電氣從甲流至乙則甲體之電位必高於乙體之電位而電氣從甲體流至乙體則甲體之電位漸漸低下而乙體之電位漸々增高至兩物體同電位而止如一物體受陽電氣愈多則電位愈高而向他方容易放電恰如物體受熱益多則溫度益高而熱之放散於周圍愈形急激反之而一物體受陰電氣愈多則電位愈降又凡陽電氣從甲體移至乙體與陰電氣從乙體移至甲體相同因甲體漸減陽電氣之量而乙體亦減等量之陰電氣故也由此可知陰電氣恒從電位之低者向電位之高者而流

凡電氣之移動原基於電位之差故電池所生電位之差謂之電動力通常電池所生電位之差原基於構成之白金板與溶液之化學作用

電位之標準　凡受電之物體如與地面相連接則失其發電之現象故可以地面之位置定爲電位之零點因之而電位之比地面高者可知其受陽電氣電位之比地面低者可知其受陰電氣

第五款　電位之差之單位　凡計溫度之差其單位爲一度可以寒暖計計之計水準之差其單位爲長之單位可以物尺測之計電位之差通常用薄爾大計測之卽實用單位也如達紐耳電瓶之電動力爲 一·〇八 薄爾大而雷鳴之際雲間與地表之間所生電位之差約在數萬薄爾大以上是其例也

薄爾大　電動力之實用單位薄爾大當 CGS 靜電氣單位之三百分之一略近於達紐爾電瓶一個之電動力而電動力之 CGS 單位其如何制定之

理過於深遠玆不詳述但略言其大概蓋電流之功用之量恒與其電流之强度及其生電流之電動力爲正比例故於任何電流之下其一 CGS 單位之電流於一秒間而流動此電量悉變爲功用其功用之量恰爲一爱格卽電動力之 CGS 單位也

電流之能力　於一薄爾大之電動力之下有一安培之電流於一秒間之流動恰能成一千萬爱格(卽 $10^7$ 爱格）之功用謂之一薄爾大安培故可知於 E 薄爾大之電動力之下有 C 安培之電流於 t 秒間之流動則可知其全功用之量爲 $E \times C \times t \times 10^7$ 爱格

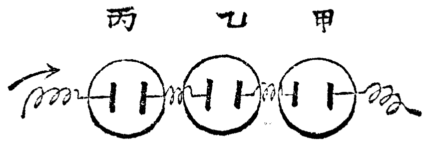
第六款　電氣分解　凡通電流於各種物質之水溶液中而使各物質起化學作用謂之電氣分解例如通電流於略帶酸性之水中則其陽板生出酸素陰板生出水素通電流硫酸銅之水溶液中則其陽板發出酸素陰板沈積銅其方程式如次

$2H_2O = O_2 + 2H_2$

$2OH_2 + 2C_uSO_4 = O_2 + 2SO_4H_2 + 2C_u$

法賴第之定律　英人法賴第因電氣分解之理而發明次之定律曰(一)凡被電流分解之物質其可電解質之被分解之量恒與其電流之强度及其通入電流之時間之相乘積(卽通入電氣之總量)爲正比例(二)凡等量之電流當分解各種可電解質之時其分解生成物之量與其相當之化學當量爲比例所謂分解生成物卽化合物之被分解而現出於極板者如水之分解其酸素與水素爲分解生成物硫酸銅之分解其酸素與銅爲分解生成物是也今試舉一二之例以明法賴第之定律其意義如下如圖有甲乙丙三容器順次盛入硝酸銀($NO_3Ag$)硫酸銅($SO_4C_u$)鹽化亞米尼謨($CL_3AL$)等之水溶液各置二極板試以三容器列爲一行而通入電流則各溶液所通入之電氣量相等俟通入電流之後取

第六圖




其各容器之陰極所沈積之銀與銅及亞米尼謨權之恰與是等金屬之化學當量爲比例但銀之化學當量一〇七·六 銅之化學當量爲二分之 六三·六 亞米尼謨之化學當量爲三分之 二七·一因凡化學當量爲以原子價除原子量之數而銀之原子價爲一其原子量爲 一〇七·六 銅之原子價爲二其原子量爲 六三·六 亞米尼謨之原子價爲三其原子量爲二七·一故可知是等金屬之化學當量

依法賴第之定律第二可知分解生成物之僅一化學當量則其所需之電氣量相等而依實地之測定則銀之一化學當量其所需之電氣量有九萬六千

五百四十克倫之比例(見下款)

第七欵　電氣化學當量　凡受單位電氣量之分解其分解生成物之量謂之電氣化學當量通常所用者即一克倫電氣量所分解之量例如銀與鹽之水溶液於一秒時通入一安培之電流則可分析爲〇·〇〇一一一八五之銀即銀之電氣化學當量也但分折爲〇·〇〇一一一八五之銀其所需之電氣量爲一克倫之實用單位故欲分折銀之化學當量一〇七·九四五其所需之電氣量則有比例 $0.001118:1::107.94:x$ 故 $x=\frac{107.94}{0.001118}=96540$ 克倫　即前欵所言之數如欲求任何分解生成物之電氣化學當量已知其原子量 M 原子價 N 命電氣化學當量爲 $e$ 則其關係式爲 $e=\frac{M}{N}\div 96540$

第八欵　重要金屬及非金屬各單體之原子量及原子價表　凡各種電解生成物之化學當量必須電氣分解之計算而知玆特舉其重要之電解生成

物之原子量及原子價列表於次但如 $(SO_4)$ $(NO_3)$ $(PO_4)$ 等之複合(依翁)從水溶液中實際不能分離或與水化合或與構成陽極板之物質化合而化成他物故不能實驗其從化合物分出與否如次表所示特其重要之單體生成物而已其原子量以酸素十六為標準

重要金屬表

| 名稱 | 符號 | 原子量 | 原子價 |
|---|---|---|---|
| 那篤留謨 | Na | 二三·〇五 | 一 |
| 加留謨 | K | 三九·一五 | 一 |
| 利叟烏謨 | Li | 七·〇三 | 一 |
| 麻偃涅叟烏謨 | Mg | 二四·三六 | 二 |
| 加爾叟謨 | Ca | 四〇·〇 | 二 |
| 斯篤倫叟烏謨 | Sr | 八七·六 | 二 |
| 拔留謨 | Ba | 一三七·四 | 二 |
| 枯羅謨 | Cr | 五二·一 | 二或三 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 滿俺 | $Mn$ | 五五·〇 | 二或三 |
| 鐵 | $Fe$ | 五六·〇 | 二或三 |
| 箇拔爾篤 | $Co$ | 五九·〇 | 二或三 |
| 臑結爾 | $Ni$ | 五八·七 | 二 |
| 白金 | Pt | 一九四·八 | |
| 金 | $Au$ | 一九七·二 | 三 |
| 銅 | $Cu$ | 六三·六 | |
| 銀 | $Ag$ | 一〇七·九三 | 一 |
| 水銀 | Hg | 二〇〇·三 | 一或二 |
| 亞鉛 | $Zn$ | 六五·四 | 二 |
| 加篤米烏謨 | $Cd$ | 一一二·〇 | 二 |
| 亞米尼謨 | AI | 二七·一 | 三 |
| 他利阿謨 | TI | 二〇四·一 | 一或三 |
| 錫 | $Sn$ | 一一八·五 | 二或四 |
| 鉛 | $Pb$ | 二〇六·九 | 二 |
| 安質母尼 | $Sb$ | 一二〇· | 三 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 蒼鉛 | Bi | 二〇・八 | 三 |

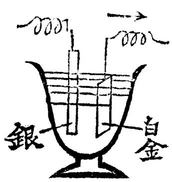
非金屬單體表

| 名稱 | 符號 | 原子量 | 原子價 |
|---|---|---|---|
| 鹽素 | Cl | 三五・四五 | 一 |
| 臭素 | Br | 七九・九六 | 一 |
| 沃素 | I | 一二六・八六 | 一 |
| 弗素 | F | 一九・ | 一 |
| 酸素 | O | 一六・ | 二 |
| 硫黃 | S | 三二 | 二 |

第九款　博爾大計　依電氣分解而計其分解生成物之量命所需之電氣量爲 Q 則依次式 $Q=\frac{W}{\quad}$ 惟依前款 $e=\frac{M}{N}\div(96540)$ 即 $Q=W\div(\frac{M}{N}\div96540)=\frac{W\times N\times 96540}{M}$ 但 $e$ 爲電氣分解生成物之電氣化學當量 W 爲因 Q 電氣量所分析之分解生成物之重量 M 爲分解生成物單體之原子量 N 爲分解生成物單體之原子價又電流

之強 C 安培於 t 時間流動其所需之全電氣量爲 Q 則 $Q=C\times t$ 故今有若干強度之電流於 t 時間通入而被分析之電解生成物之量爲 W 瓦則電流之強度可容易推得卽 $C\times t=\frac{W}{\ }$ 故 $C=\frac{W}{t\times e}$ 薄爾大計應用此理而計電流之強度亦電流計之一種也尋常所用最精確之薄爾大計爲銀薄爾大計如

第七圖




圖於玻璃容器中盛入硝酸銀之水溶液其陽極用銀板陰極用白金板用電流通入其中而硝酸銀之溶液分離爲銀依翁與硝酸銀依翁其方程式如次

$NO_3Ag=NO_3+Ag$

惟銀附着於白金極板面而硝酸與銀極板之作用復生硝酸銀溶解於水中則其方程式如次

$Ag+NO_3=AgO_3N$

由此可知通入電流之前與通入電流之後取其白金板之銀而權之卽知其所析出之銀之量

因前言之電氣化學當量（卽受一克倫電氣所析出之量)爲○·○○一一一八五故於 t 秒時間通入沈電流之後沈積於銀薄爾大計之白金極板之銀量命爲 W 則可知電流之強度 C 由次式而得卽$C=\frac{W}{0.001118\times t}$

問題

十　受二百克倫之電氣量其所分解之銀及水素之量各幾何

答　銀○·二二三六五　水素○·○○二○九五

解　凡物質之一化學當量如銀爲 一○七·九四五水素爲 一·○一五 從其化合物分析而出依第七欵所言可知其所需之電氣爲九萬六千五百四十克倫今有電氣量二百克倫則其所分解銀及水素之量爲 $\frac{107.94}{96540}\times200=0.22365$

及 $\frac{1.01}{96540}\times 200=0.00209$瓦

十一　硝酸銀之水溶液於五分時間通入八安培之電流則其分析之銀之量幾何

答　銀之量二瓦六八三

解　因硝酸銀之水溶液於五分時間通入八安培之電流則其全電量爲 $8\times 5\times 60=2400=$ 克倫　欲求其所分解銀之量則依前問題之解法而得 $\frac{107.94}{96540}\times 2400=2.683$瓦

十二　用銀薄爾大計而計電流於四分時之後得銀之量一·四六瓦間電流之强度幾何

答　五安培四二

解　命電流之强度爲 C 卽一秒時所流之電量準第九欵之公式 $C=\frac{W}{0.001118\times t}$ 已知 t 爲二百四十秒 卽 $4\times 60=240$秒　W 爲一·四六瓦故得 $C=\frac{1.46}{0.001118\times 240}=5.42\cdots$安培

十三　於食鹽之水溶液通入電氣則分解爲那篤

留讀及鹽素今有百瓩之食鹽欲於一百時間悉數分解問須用幾安培之電流

答　四百五十八安培三

解　因食鹽之一化學當量爲五十八瓦五其中有鹽素三十五瓦四五那篤留讀二十三瓦〇五如欲分解之則所需之電氣量爲九萬六千五百四十克倫今欲於一百時間分解一百瓩之食鹽命所需之電流爲 C 則得 $96540\times\frac{100000}{58.51}=C\times60\times60\times100$ 因之可求得 $C=458.3$安培

十四　欲用達紐耳電池先權其銅極板之重於一時間用之之後再權其重較前增十瓦八問此電池所出電流之强度及總電氣量各幾何

答　總電量三萬二千七百八十七克倫　電流之强度九安培一一

解　依第八欵所言可知由分解而析出銅之一化學當量爲 $\frac{63.6}{2}$ 瓦　其所需之電氣量爲九萬

六千五百四十克倫今欲分出 一〇·八瓦則得所需之總電量 $Q=96540\times\frac{10.8\times2}{63.6}=32787$克倫 次命電流之強度爲 C 則得 $C=\frac{32787}{60\times60}=$ 9.11安培

十五 以硫酸滴少許於水中於十六時間通入一·安培二之電流其所得之水素及酸素之體積若何但計算體積須在攝氏十七度壓力七十六糎時

答 酸素四·二六一立 水酸八·五二二立

解 因水被電氣分析其所生之水素與酸素體積之比如二與一故此二者之體積知其一即可知其他今試以酸素計之凡由分解而析出酸素之一化學當量爲 $\frac{16}{2}=8$瓦 其所需之電氣量爲九萬六千五百四十克倫故於十六時間通入一·二安培之電流其所分出之酸素量爲 W 則得 $V=8\frac{1.2\times16\times60\times60}{96540}$瓦 惟酸素之一立之重

量於攝氏零度及一氣壓時有一·四二八瓦今有W瓦之重量於攝氏零度及一氣壓時命所占之體積爲$V_0$則得$V_0=\frac{W}{1.428}=\frac{8\times1\cdot2\times16\times60\times60}{96540\times1.428}$ $=4.011$立 因之可求得攝氏十七度及一氣壓時其所占之體積命爲 V 則準氣體定律之公式故得 $V=4.011\times\frac{273+17}{273}=4.261$立 準此而知水素之體積爲酸素體積之二倍卽 $2\times4.261$ $=8.522$立

第十款 抵抗 凡電氣之傳導因物體而有難易如電池之兩極以導線連結而作輪道其通過之電流必不一樣因導線大而短則電流強導線細而長則電流弱又同長同大之導線因物質而有強弱如銀線銅線則電流強𦢊結爾線等則電流弱又凡同長同大且同物質之導線而電池之電動力大則電流強電池之電動力小則電流弱由此可知電流之難導者謂之抵抗大電流之易導者謂之抵抗小恰

如水之從高處流至低處其導管大則水之通過速其導管小則水之通過遲其理正自相同

歐姆之定律　德人歐姆因抵抗與電流之關係而發明次之定律曰凡電流之强度與發電體之電動力爲正比例與輪道之抵抗爲反比例命 C 爲電流之强度 E 爲發電體之電動力 R 爲輪道之抵抗則其關係數爲 $C=K\times\frac{E}{R}$ 但 K 爲常數

抵抗之實用單位　吾人於電動力一薄爾大之下使通一安培之電流之輪道謂之一歐姆之抵抗卽抵抗之實用單位也故凡電動力以薄爾大計之電流以安培計之抵抗以歐姆計之則歐姆之定律其式變爲 $C=\frac{E}{R}$ 但同長同大同物質之導線因溫度之變化其抵抗略有差異通常定爲水銀柱之斷面爲一平方粍長一百〇六糎三當攝氏零度時之抵抗爲一歐姆

第十一款　各種導線之抵抗　如上款所言導線

之抵抗與其構成之物質及其長短或大小俱有關係設用同物質之導線依實驗上之測定而知長短及大小之關係故有次之法則曰導線之抵抗與其長爲正比例與其横斷面積爲反比例命線長爲 t 横斷面積爲 S 抵抗爲 R 則其關係式爲 $R=K\times\frac{t}{S}$ 但 K 爲因導線之物質而特定之常數

比抵抗　凡一物質之線長爲一米而其横斷面積爲一平方粍則此導線之抵抗之量謂之比抵抗通例以 $\rho$ 字表之然則長爲 t 米而横斷面積爲 S 平方粍之導線其全抵抗之量命爲 R 則其式爲

$$R=\rho\frac{t}{S}$$

試舉重金屬之比抵抗於次其温度定爲攝氏十八度

| 金屬 | 比抵抗 $\rho$ |
|---|---|
| 水銀 | 〇·九五八〇歐姆 |
| 軟鐵 | 〇·〇九八歐姆 |

| | |
|---|---|
| 銀 | 〇·〇一六一歐姆 |
| 電信用鐵 | 〇·〇九九一歐姆 |
| 金 | 〇·〇二三〇歐姆 |
| 鉛 | 〇·〇二一歐姆 |
| 銅 | 〇·〇一七二歐姆 |
| 洋銀 | 〇·一六至〇·四〇歐姆 |

以上所舉特示一二例其詳表附載卷末

第十二欵　傳導度　凡物體之傳導與抵抗有相反之性質卽抵抗大則傳導小抵抗小則傳導大故可知物體之傳導度與導線之橫斷面積爲正比例與線長爲反比例通常以 K 表之則其關係式爲 $K=\frac{S}{t}$ 由此可知凡導線之傳導度爲抵抗之倒數故其式爲　$K=\frac{1}{R}$

比傳導度　凡一物質之導線其長爲一米而橫斷面積爲一平方粍則其傳導度稱爲此物質之比傳導度命此物質之比抵抗爲 $\rho$ 比傳導度爲 $\lambda$ 則

其式爲 $\lambda=\frac{1}{}$ 故可知物質之比傳導度恒以比抵抗測之

通常定任何物質爲標準而取其他種物質之傳導度與之比較今試定水銀爲標準而舉其他重要物質之傳導度與水銀相比較之數列表於次其表詳載卷末

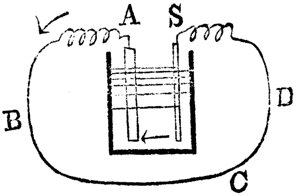
| 金屬 | 比傳導度 | 金屬 | 比傳導度 |
|---|---|---|---|
| 水銀 | 一 | 銅 | 五五· |
| 洋銀 | 二·四至六 | 銀 | 五九· |
| 眞鍮 | 一〇·至一四 | 金 | 四一· |
| 鐵 | 六至一〇 | 白金 | 六·五 |
| 銅鐵 | 二至六 | 曬結爾 | 二·三 |

又温度與抵抗之關係極爲複雜通常物質之抵抗温度昇則抵抗亦大然亦有一種物質溫度昇則抵抗却減如炭素是也

第十三欵　輪道各點之電位　如圖以一導線連

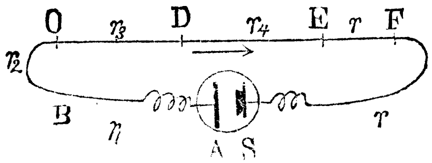
結電池之兩極而作輪道則生電流今欲求電流之強度須先識電池之電動力及導線之抵抗命電池之電

第八圖

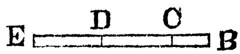



動力爲 E 導線之抵抗爲 $r$ 電池之內部極板 A 及 S 間之液體其抵抗爲 $b$ 則此輪道之全抵抗爲 $(r+b)$ 命電流之強度爲 C 則準歐姆之定律得式爲 $C=\frac{E}{r+b}$

第九圖



第 十 圖




次求輪道各點 B 及 C 等之電位如九圖所示可知 B 與 E 之電位之差爲 B 與 C 之差 C 與 D 之差 D 與 E 之差三者之和依熱傳導之例如第十圖其導體之 B 端與高温之物體相接導體之 E 端與低温度之物體相接則熱從 B 端向 E 端而流而 C 與 D 之任意點在 B 與 E 之間則可知 B 與 E 溫度之差爲 B 與之 C 溫度之差 C 與 D 溫度之差 D 與 E 溫度之差三者之和卽可知輪道之電位之差可依此理證明

今別考全輪道之 AB BC CD DE EF FS SA 之各部分其 AB 部分之抵抗命爲 $r_1{}'$ BC 部分之抵抗命爲 $r_2$ CD 部分之抵抗命爲 $r_3$ DE 部分之抵抗命爲 $r_4$ ES 部分之抵抗命爲 $r_5$ 其電池內

部 SA 之抵抗命爲 $b$ 而此輪道之全抵抗命爲 R 則其式爲 $R=r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+b$ 惟電池之電動力爲 E 電流之强度爲 C 其式爲 $C=\frac{E}{R}$ 次命 A 與 B 電位之差爲 $e$ B 與 C 電位之差爲 $e_2$ C 與 D 電位之差爲 $e$ D 與 E 電位之差爲 $e_4$ E 與 S 電位之差爲 $e_5$ S 與 A 電位之差爲 E′ 至輪道有同一之電流則各部分電流之强度 C 俱相等故可知 $e_1\ e_2\ e_3\cdots\cdots E'$ 等之價須與次式相當即

$$e=Cr_1\quad e_2=Cr_2\quad e_3=Cr_3\cdots\cdots e=Cr_5\quad E'=Cb\cdots\cdots\cdots(\text{甲})$$

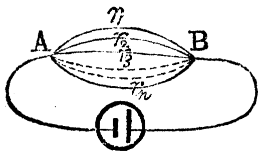
以兩端各各相加則得 $e_1+e_2+e_3+\cdots\cdots+E'=Cr+C_2+Cr_3+\cdots\cdots+Cb$ 卽 $e_1+e_2+e_3+e_4+\cdots\cdots+E'=C(r_1+r_2+r_3+\cdots\cdots+b)=CR$ 惟因 $C=\frac{E}{R}$ 卽 $E=CR$ 故得 $e_1+e_2+e_3+e_4+\cdots\cdots+E'=E\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{乙})$

準此可知輪道各點電位之差之和必等於電池之電動力故可知 B 與 E 之電位之差卽等於 B

與 CC 與 DD 與 E 之差之和

第十四欵　輪道之分派　如圖設輪道之中途如 AB 間之部分因數條之導線而成今欲求電流於此分派線間其流動以如何之比例而分配於各線又 AB 間之抵抗如何設 AB 間有 N 條之導線其各條導線之抵抗命爲 $r_1\ r_2\ r_3\ r_4 \cdots\cdots r_n$ 又全體之電流爲 C 其流動於各導線之電流命爲 $C_1\ C_2\ C_3 \cdots\cdots C_n$ 則可知

第十一圖




$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots\cdots + C_n \cdots\cdots\cdots\cdots (甲)$$

次命 AB 間電位之差爲 $e$ 則得

$$e = C_1 r_1 = C_2 r_2 = C_3 r_3 = \cdots\cdots = C_n r_n \cdots\cdots\cdots\cdots (乙)$$

又此 N 條之導線如以一線代之其抵抗命爲 W 則其式爲　$e = C \times W$　即　$C = \frac{e}{W} \cdots\cdots\cdots\cdots (丙)$

惟因 $C=C_1+C_2+C_3+\cdots\cdots C_n$ 故從(乙)式而得 $C=\frac{e}{r_1}+\frac{e}{r_2}+\frac{e}{r_3}+\cdots\cdots+\frac{e}{r_n}$ 又從(丙)式 $C=\frac{e}{W}$ 故得 $\frac{e}{W}=\frac{e}{r_1}+\frac{e}{r_2}+\frac{e}{r_3}+\cdots\cdots+\frac{e}{r_n}$ 卽可知 $\frac{1}{W}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{r_n}$ ……………………………………………………(丁)

準此可知從(甲)(乙)二式而知 AB 各分派線之電流從(丁)式而知 AB 間 N 條之導線以一線代之之抵抗

近道 若 A 與 B 間以二條導線而成其抵抗爲 $r_1$ 及 $r_2$ 其電流爲 $C_1$ 與 $C_2$ 則 $C=C_1+C_2$ $e=C_1r_1=C_2r_2$ 故 $\frac{C_1}{C_2}=\frac{r_2}{r_1}$ 若 $r_1$ 甚小而 $r_2$ 甚大則電流之大部分向 $C_1$ 之方而流而 $C_2$ 方之電流甚小故 $C_1$ 方對於 $C_2$ 方稱爲近道爲實用上緊要之事

問題

十六 哈伊庫羅米託電瓶之電動力爲二薄爾大其兩極以導線相結而電瓶及導線之抵抗合爲

二百五十歐姆問電流之强度如何

答　〇·〇〇八安培

解　因電瓶之電動力 E 卽輪道之全電動力為二薄爾大輪道之全抵抗 R 為二百五十歐姆故依第十欵歐姆之定律命電流之强度為 C 則得 $C=\frac{E}{R}=\frac{2}{250}=0.008$安培

十七　達紐耳瓶之電動力為 一·〇八 薄爾大用可伊爾之捲導線使成圓筒狀謂之可伊爾之電流計其抵抗為八十歐姆與五歐姆之抵抗之銅線相連結其電流之强為 〇·〇一二安培 問電池之內部抵抗如何

答　電池之內部抵抗為五歐姆

解　因輪道之全電動力為 一·〇八 薄爾大電流之强度 C 為〇·〇一二安培命電池之內部抵抗為 $b$ 則輪道之全抵抗為 $80+5+b$歐姆惟準公式 $C=\frac{E}{R}$ 故得 $0.012=\frac{1.08}{80+5+b}$ 因之

可求得 $b=5$歐姆

十八　有長一米之細玻璃管其孔之橫斷面爲〇·八平方粍於管内充入水銀問此水銀柱在攝氏零度時之抵抗有幾歐姆

答　一·一七六歐姆

解　依第十欵所言已知一歐姆與水銀柱之長一·〇六三米橫斷面積一平方粍之抵抗相當今有攝氏零度時水銀柱之長爲一米橫斷面積爲〇·八平方粍命此水銀柱之抵抗爲 $r$ 則得

$$r=1\times\frac{1}{1.063}\times\frac{1}{0.8}=1.176\text{歐姆}$$

十九　有銅線長一百零六糎三其橫斷面積爲一平方粍問此銅線之抵抗有幾歐姆但銅與水銀相比較其傳導度爲五五

答　銅線之抵抗爲〇·〇一八一八歐姆

解　因題言銅與水銀之比傳導度爲五十五惟導線之抵抗爲傳導度之反數銅之抵抗爲水銀

之抵抗之五十五分之一又水銀之長一〇六·三糎横斷面積一平方粍則其抵抗爲一歐姆今有等長横斷面積之銅線命其抵抗爲 $r$ 則得

$r=\frac{1}{55}0.01818$歐姆

二十　有電信用八番鐵線直徑爲〇·四〇六糎其長爲一萬五千米問此鐵線之全抵抗如何但此鐵線之比抵抗爲〇·〇九九一

答　此鐵線之全抵抗一百一十四歐姆

解　依第十一款所言比抵抗爲 $\rho$ 長爲 t 横斷面積之平方粍爲 S 導線之抵抗爲 $r$ 則有公式 $r=\rho\frac{t}{S}$　故可知電信線之抵抗爲 $r=$ $0.0991\times\frac{15000}{3.1416\left(\frac{4.00}{2}\right)}=114.85$歐姆

二十一　洋銀線之横斷面爲一平方粍欲令其抵抗爲一歐姆則其長須若干但此洋銀線之比抵抗爲〇·二

答　長五米

解　依前問題之解法命所求之長爲 t 則準公式 $r=\rho\frac{t}{S}$ 故得 $1=0.2\times\frac{t}{1}$ 因之可求得 t＝5米

二十二　有甲乙二線爲同物質所製而其重量亦相等但乙線之長爲甲線之九倍試求此兩線抵抗之比

答　甲線與乙線兩抵抗之比如一與八十一

解　因兩線係同一物質且其重量相等惟乙線之長爲甲線之九倍則甲線長與乙線長之比如一與九（爲正比）甲線橫斷面積與乙線橫斷面積之比如九與一（爲反比）因此可求得甲線之抵抗爲 $\frac{1}{9}$ 乙線之抵抗爲 $\frac{9}{1}$ 故可知兩線之抵抗之比爲　甲抵抗：乙抵抗 $=\frac{1}{9}:\frac{9}{1}=1:81$

二十三　有圓線其直徑爲 N 分之一粍長爲 M 米其抵抗爲 $r$ 歐姆試求此圓線之物質之比抵抗及比傳導度

解　因圓線之橫斷面積爲 $3.1416\left(\frac{1}{2N}\right)^2$ 平方耗　長爲 M 米抵抗爲 $r$ 歐姆命所求之比抵抗爲 $\rho$ 則準公式可知 $r=\rho\frac{M}{3.1416\left(\frac{1}{2N}\right)^2}$ 故得 $\rho=\frac{r\times3.1416}{4M\times N}$ 次命所求之比傳導度爲 $\lambda$ 則因比傳導度爲比抵抗之反數故得 $\lambda=\frac{4M\times N}{r\times3.1416}$

二十四　有銅線二條其一條重二十五半長四米半又其一條重八十二瓦長一十八米試求此二銅線抵抗之比

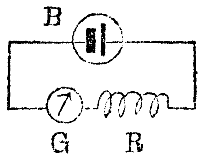
答　甲銅線抵抗與乙銅線抵抗之比如一與四

解　因甲線之長爲四米五其重爲二十五五乙線之長爲一十八米其重爲八十二瓦因此可求得甲銅線之橫斷面積爲 $\frac{20.5}{4.5}$ 乙銅線之橫斷面積爲 $\frac{82}{18}$ 故依問題二十二之解法可知兩線抵抗之比爲　甲抵抗：乙底抗 $=4.5\div\frac{20.5}{4.5}:18\div\frac{82}{18}=1:4$

二十五　有本生之電瓶試以導線連結正切電流

計及抵抗線如圖B爲本生電池 G 爲電流計其可伊爾之抵抗有一·二歐姆 R 爲抵抗線今抵抗線爲一歐姆則電流爲〇·五安培

第十二圖




又抵抗線爲三歐姆則電流爲〇·三安培問電池之內部抵抗如何但導線之抵抗非常小可略去不算

答　內部抵抗〇·八歐姆

解　命電池之電動力爲 E 電池之內部抵抗爲 $b$ 因初次之測定電流 C 爲〇·五安培全抵抗 R 爲$(1.2+1+b)$歐姆則準公式而得 $0.5=\frac{E}{1.2+1+b}$ 二次之測定電流 C 爲〇·二安培全抵抗 R 爲 $(1.2+3+b)$歐姆則準公式而得 $0.2=\frac{E}{1.2+3+b}$ 準此二式可知 $0.5(1.2+1+b)=0.2(1.2+3+b)$ 因之可求得 $b=0.8$歐姆

二十六　如上題試求電瓶之電動力

答　電動力一·五薄爾大

解　命電瓶之電動力爲 E 依前問題之解法已知內部抵抗 $b$ 爲〇·八歐姆故從 $0.5=\frac{E}{1.2+1+0.8}$ 可求得 $E=1.5$薄爾大

二十七　有數個電瓶相連之電池其全動力爲十五薄爾大今於其兩極以一銅線相連結而生一·五安培之電流而兩極電位之差在九薄爾大以下問銅線之抵抗及電池之全內部抵抗如何

答　銅線之抵抗六歐姆　電池內部之全抵抗四歐姆

解　因輪道之全電動力 E 爲十五薄爾大電流之强度 C 爲一·五安培故輪道之全抵抗 $R=\frac{E}{C}=10$歐姆　惟依第十三欵所言已知銅線之抵抗與電池內部抵抗之比如九與六由此可知

銅線之抵抗爲 $\frac{10}{15}\times 9=6$歐姆⋯⋯電池內部之總抵抗爲 $\frac{10}{15}\times 6=4$歐姆

二十八　有薄勒寫發電機生八百三十薄爾大之電動力其內部抵抗爲十一歐姆可以十六個之弧狀燈連爲一行而點火試證之其弧狀燈之抵抗各爲四·五歐姆其點火須十安培之電流

解　以十六個之弧狀燈連爲一行其各燈之抵抗爲四·五歐姆則其全抵抗爲 $4.5\times 16$歐姆因而可知輪道之全抵抗 R 爲 $R=4.5\times 16+11=83$歐姆　惟發電機之起電力 E 爲八百三十薄爾大則電流之強度 C 爲 $C=\frac{830}{83}=10$安培　又電燈之點火其所需之電流爲一十安培故可知如此之裝置可能點此之十六個燈

二十九　電氣導線之一部以二本之線而成其一有四歐姆之抵抗又其一有十歐姆之抵抗問此

部分之合成抵抗如何

答　二歐姆又七分之六

解　命合成之抵抗爲W則依第十四款所言之理卽可知 $\frac{1}{W}=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}$ 故 $W=2\frac{6}{7}$歐姆

三十　有銅線三本其抵抗各爲二歐姆試將此三本線合爲一束則其抵抗如何

答三分之二歐姆

解　命三本爲一束之合成抵抗爲 W 則依第十四款所言可知 $\frac{1}{W}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ 故 $W=\frac{2}{3}$ 歐姆

三十一　有分輪道以二線而成其二線係同一物質所製其長爲 t 及 t′ 而橫斷面積爲 S 及 S′ 試求兩線所通過電流之比

解　依前問題二十二之解法可知此二線之抵抗之比爲 $\frac{1}{S}\cdot\frac{t'}{S'}$ 惟電流之强度恒與抵抗爲反比故可知二線電流之比爲 $\frac{S}{t}\cdot\frac{S'}{t'}$

三十二　於電池之兩極以二分線相連結其一線有二歐姆之抵抗又其一線有十歐姆之抵抗而此二池之電動力爲二薄爾大其內部抵抗爲三歐姆問電流之强度如何又二分線所通過之電流若何

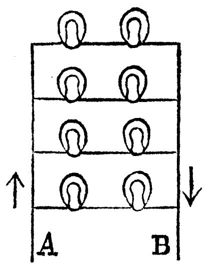
答　總電流之强度爲七分之三安培　通過有二歐姆抵抗之線其電流爲十四分之一安培　通過有十歐姆抵抗之線其電流爲十四分之五安培

解　先求得輪道之全抵抗因電池之內部抵抗爲三歐姆其外部抵抗則準公式而得 $\frac{1}{W}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ 即 $W=\frac{5}{3}$歐姆　因之可求得輪道之全抵抗爲 $R=3+\frac{5}{3}=4\frac{2}{3}$歐姆　故可知電流之强度 $C=\frac{2}{4\frac{2}{3}}=\frac{3}{7}$安培　因此可知通過二歐姆抵抗之線其電流爲 $\frac{3}{7}\times\frac{2}{10+2}=\frac{1}{14}$安培　又可知通過十歐姆抵抗之線其電流爲 $\frac{3}{7}\times\frac{10}{10+2}$

$=\frac{5}{14}$ 安培

三十三　有八個白熱電燈其電動力爲一百一十薄爾大其所需之電流爲一·二安培今欲用此八個電燈每二個相連共成四列而點火如上圖之連結法問須供給幾何之電流又A與B間之電動力幾何

第十三圖




答　電動力二百二十薄爾大　電流四·八安培

解　如圖可知AB間之電動力爲 $110\times2=2.20$薄爾大　又A與B二點之間等分爲四分派其各分線須一·二安培之電流故可知全電流須爲 $1.2\times4=4.8$安培

三十四　如上題之八個電燈連爲一行而點火則

其電動力如何幷所需之電流若何

答　電動力八百八十薄爾大　電流一·二安培

解　依前問題之解法以八電個燈連爲一行則可知其電動力爲 $110\times8=880$薄爾大　又其電流爲一·二安培

三十五　有電流傳至導線其能力悉變爲熱而輪道之溫度高今用二十薄爾大之電動力生四十安培之電流問於一分時間能生熱若干量

答　約一萬一千五百一十瓦加羅

解　依第五欵所言電流之能力可知於二十薄爾大之電動力 E 於六十秒間 t 流動四十安培之電動力 C 則其全能力　$E\times C\times t=20\times40\times60=48000$ 恰與 $48000\times10^7$愛格　相當惟一瓦加羅之熱量與 $4.17\times10^7$愛格　相當故可知如上之電流之全能力試改算爲熱量則得 $(48000\times10^7)\div(4.17\times10^7)=11510$瓦加羅

三十六　有數個電瓶連結之電池其電池之全電動力爲二十四薄爾大其內部抵抗爲八歐姆今於其兩極以一百一十二歐姆之抵抗之針金相連結試將此針金悉浸入百瓦之水中其水之温度爲一十五度問於十分時間水之温度昇至何度但熱在水中可視爲全不放散

答　水之温度至攝氏二十一度四四

解　先求得電流之強度 C 則準公式而得 $C=\frac{24}{8+112}=0.2$ 安培　又導線之兩端其電位之差爲 $E'$ 於 t 秒間通過 C 之電流則其全能力爲 $E'+C\times t$ 惟導線之抵抗 R 爲一百一十二歐姆準公式 $C=\frac{E'}{R}$ 即 $E'=C\times R$　故得 $E'\times C\times t=C\times R\times C\times t=(0.2)^2\times 112\times 60\times 10=2688$　試改算爲熱量則依前問題三十五之解法而得所求之熱量爲 $(2688\times 10^7)\div(4.17\times 10^7)=644$ 瓦加羅　次依第七篇第十九

欵所言一瓩加羅之熱量可能令一瓩（卽一千瓦）之水上昇一度今有六百四十四瓦加羅（卽〇·六四四瓩加羅）之熱量可能令一百瓦（卽〇·一瓦）之水上昇六度四四卽可知水之溫度爲攝氏二十一度四四

三十七　以白熱燈五個連爲一列欲以發電機點火其電燈之抵抗各爲一百歐姆其點火需八十薄爾大之電動力問發電機之起動力至少須若干薄爾大但其內部抵抗定爲二歐姆

答　發電機之起電力至少須八十八薄爾大

解　先求得五燈點火所需之電流而後算定與此電流相當發電機之起電力因白熱燈一個之抵抗爲一百歐姆而點火須八十薄爾大之電動力故可知電流之強度準公式　$C=\frac{E}{R}$　故得

$C=\frac{60}{100}=0.8$安培　今將此白熱燈五個列爲五列則各列須〇·八安培之電流故五列所需之

電流爲 $0.8\times5=4$ 安培 次因五列之全抵抗爲$\frac{100}{5}=20$歐姆 而發電機之內部抵抗爲二歐姆故可知全輪道之全抵抗爲 $R=20+2=22$ 歐姆又電強之強度 C 爲四安培因之可求得生此電流之電動力 E 則準公式而得 $E=C\times R=4\times22=88$薄爾大

三十八 如上題之五個電燈連爲一行而點火則發電機之起電力至少須若干薄爾大

答 發電機之起電力至少須四百零一薄爾大

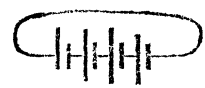
解 依前問題之解法若五個白熱燈相連爲一行而點火則所需之電流 C 其全體雖祇須〇·八安培然五燈相連之全抵抗爲 $100\times5=500$ 歐姆 因而輪道之全抵抗 R 爲 $500+2=502$ 歐姆 因而發電機之起電力故得 $E=CR=0.8\times502=401.6$薄爾大

第十五欵 電池連結法 凡電池之連結法厥有

三樣(一)爲行之連結法卽直列法也(二)爲列之連結法卽駢列法也(三)爲行與列之併用法

行之連結法　如左圖所示爲數個之電瓶逐次以一個之陽極與他一個之陰極相連結是爲行之連結法

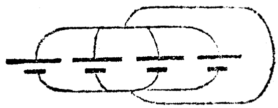
第十四圖



依行之連結法而求其電流之强度 C 設電池之電瓶之數有 N 個其各個之電動力爲 E 則其全電動力爲 $N\times E$ 又各個之內部抵抗爲 $b$ 則 N 個之內部抵抗爲 $N\times b$ 而導線之抵抗（卽外部抵抗）爲 $r$ 則以內部抵抗與外部抵抗相加卽爲全抵抗 R 其式爲 $R=Nb+r$ 故準公式 $C=\frac{E}{R}$ 而得 $C=\frac{N\times E}{Nb+r}$ 卽可知行之連結法雖其電動力爲電瓶之 N 倍而其內部抵抗亦爲 N 倍故於電動力有利而於內部抵抗有損

列之連結法　如上圖所示爲數個之電瓶各個之陽極與陽極相連結陰極與陰極相連結是爲列之連結法

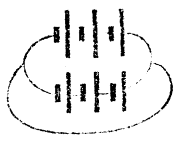
第十五圖



依列之連結法而求其電流之强度 C 則可知電池之電動力 E 恒有一定而其內部抵抗 $b$ 却減爲 N 分之 $b$ 故其式爲 $C=\frac{F}{\frac{b}{N}+r}$ 卽可知列之連結法於電動力無利而於內部抵抗有利

行與列之並用法　有 N 個之電瓶以 P 個連爲一行而成 Q 列如上圖所示爲有六個之電瓶以三個連爲一行而成二列是爲行與列之併用法

第十六圖



依行與列之並用法而求其電流之強度 C 則可知電池之電動力爲 $P\times E$ 而其內部抵抗爲 $\frac{b\times p}{q}$ 故其式爲 $C=\frac{P\times E}{(p\times b)\div q+r}=\frac{q\times p\times E}{pb+rq}$ 惟因 $p\times q=N$ 代入上式故得 $C=\frac{NE}{p\times b+rq}$

問題

三十九　達紐耳之電瓶其電動力爲一·〇八薄爾大其內部抵抗爲一·二歐姆今將其十個電瓶連爲一行而與電流計相接續但電流計之可伊爾線之抗抵爲十歐姆而導線之抵抗爲三十二歐姆問電流爲若干安培

答　電流之強度爲〇·二安培

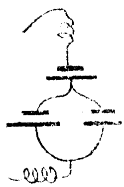
解　因十個瓶之全電動力爲 $NE=10\times1.08=10.8$ 薄爾大 又全內部之抵抗爲 $10\times1.2=12$ 歐姆 電流計之抵抗爲十歐姆導線之抵抗爲三十二歐姆故輪道之全抵抗爲 $R=12+10+32=54$ 歐姆 命電流之強度爲 C 則準公

式 $C=\frac{E}{R}$ 而得 $C=\frac{10.8}{54}=0.2$安培

四十 達紐耳之電瓶其電動力爲一·〇八薄爾大其內部抵抗爲一歐姆試將其三個電瓶如左圖之連結法則其兩極之電動力幾何

答 電動力二·一六薄爾大

第十七圖



解 因電瓶之電動力爲一·〇八薄爾大 惟如上圖之連結爲二行則可知其全動力爲 $P\times E$ 故得 $2\times1.08=2.16$ 薄爾大

四十一 如上所記連結法之電池試以五歐姆抵抗之針金接於兩極間電流之強度如何

答 電流之強度〇·三三二安培

解 依前問題之解法可知其全電動力爲二·一六薄爾大而全內部之抵抗爲一·五歐姆(因

電池二個之處其抵抗爲〇·五歐姆電池一個之處其抵抗爲一歐姆故也)外部之抵抗爲五歐姆故可知電流之强度 $C=\frac{E}{R}=\frac{2.16}{1.5+5}=$ 0.332安培

四十二　如上所記連結法之電池今欲得四安培之電流須用如何之導線

答　不能得四安培之强電流

解　於前問題四十一之解中雖用外部全無抵抗之導線然其電流之强度止能達於一·四安培卽 $C=\frac{2.16}{1.5+o}=1.4$ 安培　故可知電池如上圖之裝置不能得大於一·四安培之電流

四十三　有 N 個之電瓶今欲得其最大電流則其連結法如何

答　其連結法須令內部抵抗與外部抵抗相等則得最大之電流因之可求得電池之行數

$P=\sqrt{\frac{N\times r}{b}}$

解　命電流之强度爲 C 各電瓶之電動力爲 E 電瓶之總數爲 N 行數爲 P 列數爲 Q 外部之抵抗爲 $r$ 內部之抵抗爲 $b$ 則依第十五款行與列之併用法而得 $C=\frac{PE}{(pb)\div q+r}=\frac{E}{b\div q+r\div p}$ 如欲令電流極大其分子爲不變之數故分母須爲極小惟依代數之解法其分母 $\frac{b}{q}+\frac{r}{p}$ 惟 $\frac{b}{q}=\frac{r}{p}$ 之時爲最小故 $r=\frac{pb}{q}$ 卽外部之抵抗與內部之抵抗相等則得最大之電流因之可求得電池之行數惟 $Q=\frac{N}{p}$ 故得 $r=\frac{N\times b}{N\div P}$ 卽 $P^2=\frac{Nr}{b}$ 故 $P=\sqrt{\frac{N\times r}{b}}$

(一)如外部抵抗 $r$ 爲甚小則 P 近於零卽 N 個之電瓶俱連結爲列則得最大之電流故 $Q=N$ 則 $C=\frac{E}{b\div N+O}$

(二)如外部抵抗 $r$ 爲最大則 P 須令極多卽 N 個之電瓶俱連結爲行則得最大之電流故 $P=N$ 則 $C=\frac{NE}{Nb+r}=\frac{NE}{o+r}$

四十四　有本生之電瓶其電動力爲一·八薄爾大而內部抵抗爲三歐姆今將其電瓶一百二十個用四歐姆抵抗之導線依直列法而連結之則其電流如何

答　電流之強度五·四安培

解　因電池之電動力 E 爲二百零六薄爾大即 $120 \times 1.8 = 206$ 內部抵抗 $b$ 爲三十六歐姆即 $120 \times 0.3 = 36$ 外部抵抗 $r$ 爲四歐姆故可知電流之強度　$C = \frac{E}{b+r} = \frac{206}{36+4} = 5.4$安培

四十五　如上之電瓶一百二十個依並列法而連結之則其電流如何

答　電流之強度約爲〇·四五安培

解　因電池之電動力 E 爲一·八薄爾大內部抵抗　$b = \frac{0.3}{120}$歐姆　外部抵抗 $r$ 爲四歐姆故可知電流之強度依前題之解法可得　$C = \frac{18}{\frac{0.3}{120} + 4} = 0.45$安培

四十六　如上之電瓶一百二十個欲得其最大電流則其連結法如何

答　四十個為一行計共三列

解　依前問題四十三之解法命電池連結之行數為 P 則準公式　$P=\sqrt{\frac{Nr}{b}}=\sqrt{\frac{120\times 4}{0.3}}=40$ 為所求之行數命電池連結之列數為 Q 則準公式　$Q=\frac{N}{P}=\frac{120}{40}=3$　為所求之列數故可知如此之裝置則準行與列之倂用法而得　$C=\frac{PE}{(Pb)\div Q+r}$ 故電流之強度 $C=\frac{40\times 1.8}{\frac{0.3}{3}\times 40+4}=9$ 安培

四十七　有四個電池依直列法而連結之其第一瓶之電動力為　一・〇八薄爾大內部抵抗為一歐姆第二瓶之電動力為　一・五二薄爾大內部抵抗為〇・三歐姆第三瓶之電動力為二薄爾大內部抵抗為　〇・三歐姆第四瓶之電動力為一・八薄爾大內部抵抗為〇・五歐姆則其全電動力及全內部抵抗如何

答　全電動力六·四薄爾大　全內部抵抗二·一歐姆

解　因全電動力爲各電瓶電動力之和故以各電瓶之電動力相加則得 $1.08+1.52+2+1.8=6.4$薄爾大　全內部抵抗爲各電瓶內部抵抗之和故得 $1+0.3+0.3+0.5=2.1$歐姆

四十八　如上所記之四個電瓶其連結法定爲第一瓶及第三瓶之電極與第二瓶及第四瓶之電極反向則其全電動力及抵抗如何又設令導線之抵抗爲一·五歐姆則其電流若何

解　因一電瓶之電極與他電瓶之同電極相連則依同極相驅之理其電動力互爲消滅然抵抗則無變更故可知全電動力爲 $1.08-1.52+2-1.8=0.24$ 薄爾大　其全內部抵抗依上題可知爲二·一歐姆又外部之抵抗爲一·五歐姆則可知電流之強度爲 $C=\frac{-0.24}{2.1+1.5}=\frac{1}{15}$安培

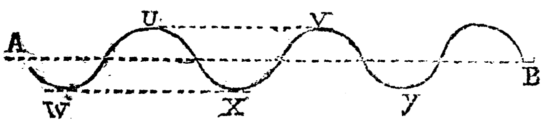
依而可知與第二瓶及第四瓶所生之電流同方向亦得十五分之一安培

# 第九篇 音學

## 第一章　音波及其傳達

**第一款　波動**　吾人以瓦礫投池中則見瓦礫與

第一圖




水面相觸處現出波紋從一點擴散四周以達池岸其他如風觸田面而見稻穗之搖動倏伏倏起固定繩之一端持其他端而振搖之則見繩上下動盪從此端傳至彼端凡此等現出之波形決非實質之移動不過波形之傳達而已卽所謂波動也如第一圖 AB 爲軸線 U 及 V 爲波形之最高部謂之峯 W 及 X 及 Y 爲波形之最低部謂之谷而從一峯

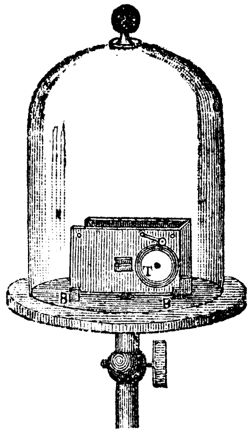
至相隣之峯之距離如 UV 或從一谷至相隣之谷之距離如 WX 及 XY 謂之波長（一名波徑）從波峯或波谷至與軸線成垂直之距離如 UO 及 SX 謂之波幅（一名振幅）

第二欵　音源　凡在空氣中之彈性物體爲他物所打擊或摩擦使其迅速震動則此物體必發音響如緊張一條弦線試以手指彈之其音響發生時可視其絃線之顫動其他如撞鐘擊鼓以及音叉之發音皆原於物體之振動胥吾人所習見也

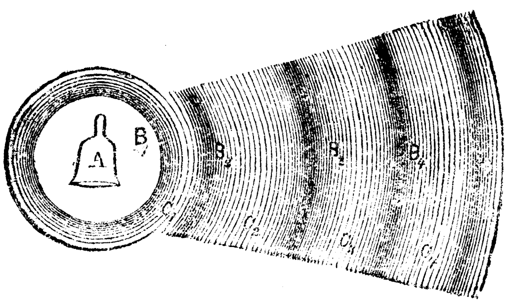
第三欵　音之傳達　如前欵所言音響之發生基於彈性體之振動然其所以能達人耳者必有物焉爲之傳達通常傳音之物多以空氣爲主試以實驗明之如第二圖於排氣機之圓板上墊以棉布置響鐘於其上復以玻璃鐘罩之而排除其空氣則音響次第衰滅至空氣十分除盡殆全不聞鐘聲如開其下部活栓使空氣通入鐘內則音響如初且非獨空

氣然也卽其他各種氣體依上之實驗法亦可證明但音之强弱胥準各氣體之密度又液體及固體亦能傳音如人伏水中聞各種音較在空氣中清楚附耳於金屬棒之一端而於他端搔之聞其音亦甚了然皆其證也

第二圖




第三圖



第四欵　音波　空氣之傳達音響非其分子之移動但空氣之分子與震動體相接觸受其動搖而此空氣復與相密接之空氣順次傳播向外其空氣之分子或密聚於一處或從一處而互相分離則成濃厚部分與稀薄部分交互傳達而生疎密波卽所謂音波也如第三圖 A 爲響鐘 $B_1$ $B_2$ $B_3$ 爲空氣濃厚部分 $C_1$ $C_2$ $C_3$ 爲空氣稀薄部分每一濃厚部分與稀薄部分層叠相間其變疎變密之層數卽可以分子振動之次數定之如鐘之分子每秒振動三百次卽可知空氣之疎密層有三百重也命振動之次數爲 N 其周期爲 N 分之一命爲 T 音波所經過之距離(卽波長)命爲 $\lambda$ 一秒時前進之速度命爲 V 則其關係式如次

$$\lambda = T \times V$$

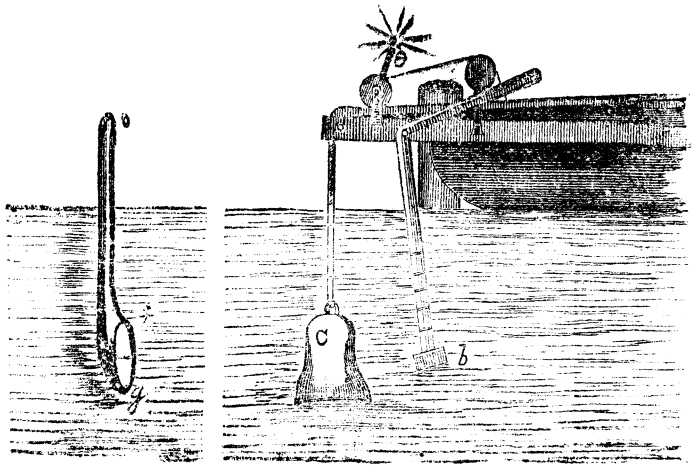
第五欵　空氣中音之速度　吾人於甚遠之距離從甲地所發之音必經時始達乙地如電光與雷鳴

其時間幷無先後然恒電光燭目之後須費少許時間始覺霹靂震耳緣音之速度稍遲於光之速度故也欲測定音響之速度須測定甲乙丙地之距離於夜間四野無風從甲地發砲而乙地之觀測者先計其望見火光之時間次計其聽到砲聲之時間然後以前後兩時間之差除已經測定之距離依此法屢次實驗而得其平均數卽爲音響之速度（但此際光線之速度不妨略去）然音響之速度每因溫度而異大約在攝氏十五度時（卽常溫時）其音響之速度一秒時凡三百四十米突設在攝氏零度時其音響之速度一秒時凡三百三十一米突則當攝氏 $t$ 度時其音響之速度命爲 $V_t$ 則其關係式如次但 $a$ 爲二百七十三分之一

$V = 331\sqrt{1+at} = 331(1+\frac{1}{2}at)$ 約米突

第六欵　水中音之速度　於水中欲測定音之速度如第四圖以二舟對置於波靜之水面測定其距

第四圖




離若干而一舟置聽音器如 $og$ 觀測者以耳當其一端 $o$ 其下端 $fg$ 與他舟懸鐘相向而於他舟沈 $c$ 鐘於水中其 $e$ 處燃火之時同時令 $b$ 鐘擊鐘觀測者從見烟至聞聲時計其所需之時間以除其二舟對置之距離依此法屢次實驗而得其平均數卽一秒之速度凡一千四百二十五米突較空

氣中之速度約在四倍以上

第七欵 固體傳音之速度 於固體測定音之速度試以耳當電信柱而擊其相濟之電信柱則聞聲二次一爲電線之傳播而達於耳一爲空氣之傳播而達於耳依此法之實驗銅之傳音之速度較空氣有十一倍鐵與玻璃傳音之速度較空氣有十六倍金傳音之速度較空氣有五倍鉛傳音之速度較空氣有四倍由此可知音響之速度固體爲最液體次之氣體爲下試略舉傳音之速度數種於下其溫度俱以攝氏零度爲準

| | | | |
|---|---|---|---|
| 炭酸氣 | 二五九米 | 空氣 | 三三〇、七米 |
| 水素氣 | 一二六六米 | 水 | 一四五三米 |
| 銅 | 四九六七米 | 鐵 | 五零一六米 |

問題

一 有發音體於一秒時振動四百二十五次而音波之速度定爲一秒時三百四十米試求其音波

之長

答　音波之長八十糎

解　因質點振動一次則生一層波今發音體於一秒時振動四百二十五次則生四百二十五層波惟一秒時音波之速度可達三百四十米故於三百四十米之間有四百二十五層之波今求其一波之長則準本篇第四款之公式 $\lambda=V\times T$

惟　$T=\frac{1}{N}=\frac{1}{425}$ 故得 $\lambda=340\times\frac{1}{425}=8$米（卽八十糎）

二　音波之進行一秒時凡一百尺其波長爲二尺試求質點振動之周期及一秒時間振動次數各幾何

答　質點振動之周期〇·〇二尺　一秒時振動五十次

解　因題言音波進行之速度 V 爲一百尺波長 $\lambda$ 爲二尺命質點振動之周期爲 T 則本篇

第四欵之公式 $\lambda = V \times T$ 卽 $T = \frac{\lambda}{V}$ 故得 $T = \frac{2}{100} = 0.02$ 尺 又振動次數爲 N 因 $T = \frac{1}{N}$ 故得 $0.02 = \frac{1}{N}$ 卽 $N = \frac{1}{0.02} = 50$

三　觀測水者注一定點每五秒時間見其波經過一次而峯與峯之距離爲二十尺試求波行之速度

答　速度四尺

解　因波動之周期 T 爲五而峯與峯之距離（卽波長）$\lambda$ 爲二十尺命波行之速度爲 V 則準公式 $\lambda = TV$ 故得 $20 = V \times 5$ 卽 $V = \frac{20}{5} = 4$ 尺

四　通常人之最高音及最低音每一秒時間振動八十次及八百次而音之速度一秒時間凡一千一百英尺試求各音波之長幾何

答　最高音之波長八三·七五英尺　最低音之波長八·三七五英尺

解　因最高音一秒時振動八十次則其周期 T

爲八十分之一最低音一秒時振動八百次則其周期$T'$爲八百分之一而音之速度 $V$ 凡一秒時一千一百英尺命所求之波長爲$\lambda$及$\lambda'$則準公式可得 $\lambda=1100\frac{1}{80}=83.75$英尺　$\lambda'=1100\frac{1}{800}=8.375$英尺．

五　於水中音之速度一秒時四千九百英尺如上題之最高音及最低音試求其水中之波長幾何

答　最高音之波長六十英尺　最低音之波動六英尺

解　依題言可知水中音之速度 $V$ 爲四千九百英尺依前題之解法可得 $\lambda=4800\frac{1}{80}=60$英尺　$\lambda'=4800\frac{1}{800}=6$英尺

六　於鐵中音之速度一秒時一萬五千英尺而發音體之振動一秒時凡五百次試求其音波之長

答　音波之長三十英尺

解　因發音體振動之周期 $T$ 爲五百分之一

而於鐵中音之速度爲一萬五千英尺命所求之波長爲$\lambda$則凖公式 $\lambda=VT$ 故得 $\lambda=15000\frac{1}{500}$
$=30$英尺

七　空氣中音之速度如温度昇高一度則其速度之增有若干米又温度至十五度時其速度幾何

答　速度之增〇、六米　十五度時之速度三百四十米

解　凖本篇第五欵　$V_t=331\sqrt{1+at}=331(1+\frac{1}{2}at)$ 惟題言昇高一度則 $t=1$ 故得 $V_1=331+\frac{1}{2}331\times a$ 故可知温度每昇一度其速度之增爲 $\frac{1}{2}331\times a$ 又因 $a=\frac{1}{273}=0.00366$ 故得 $\frac{1}{2}331\times0.00366=0.6$米 因此可知十五度時之速度爲 $331+0.6\times15=340$米

八　有甲地發砲而乙地從見烟一十五秒之後始聞砲聲此際之温度在攝氏十五度試求甲乙兩地之距離

答　兩地之距離五千一百米

解　聲與烟同時並發經十五秒之後始聞砲聲則音波進行其所費之時間爲一十五秒惟溫度在攝氏十五度時音波進行之速度一秒時凡三百四十米故可知甲乙兩地之距離爲 $340\times15=5100$米

九　有長九百五十一米二五之鐵管附耳於其一端而於他端擊之其音之從鐵管來者直達於耳經二秒半之後始聞從空氣傳來之音而空氣中音之速度定爲三百四十米試求鐵管中音波之速度幾何

答　鐵管中音波之速度一秒時三千一百九十米

解　命鐵管中音波之速度爲 $x$ 則音從空氣中經過九百五十一米二五所需之時間爲 $\frac{951.25}{340}$ 音從鐵管中經過九百五十一米二五所

需之時間爲 $\frac{951.35}{}$ 故兩時間之差爲 $\frac{951.35}{340}-\frac{951.35}{}=2.5$ 因之可求得 $x=\frac{340\times951.25}{101.25}=$ 3190米

十　有細長鐵線附耳於其一端而令人擊其他端由鐵線傳到擊聲後經〇·四秒時始聞由空氣傳到擊聲定此時之溫度爲攝氏零度試求鐵線之長

答　鐵線之長一百四十二米

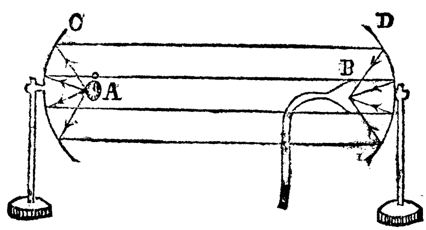
解　命鐵線之長爲 $x$ 則音從空氣中行過 $x$ 距離所需之時間爲 $\frac{x}{331}$ 音從鐵線中行過 $x$ 距離所需之時間爲 $\frac{x}{5016}$（檢表可知）故兩時間之差爲 $\frac{x}{331}-\frac{x}{5016}=0.4$ 因之可求得 $x=142$米

第八欵　音之强度　凡音波之發生胥起於音源之一點次第向外擴散如球形然但波動漸次前進則振動之質點愈增而音響之强度漸減又發音體之振幅大則其音强振幅小則其音弱故可知音響

之強度恒與發音體之距離自乘爲反比例與發音體之振幅自乘爲正比例且其能力之量與發音之面積恒有關係試顫動音叉其音甚微及其柄觸於板面則板面亦同時振動而能力較強卽其證也若音從管中經過其波不成球形則傳達可至甚遠而不至變衰故與距離無甚關係

第九款　音之反射　水波之進行而達池岸或岩

第五圖

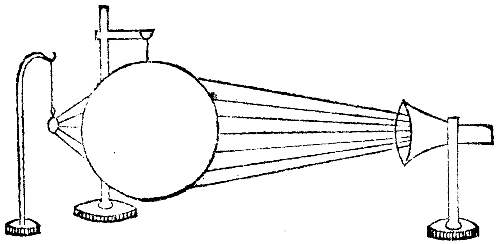



石則此處波形之傳達與前進之方向變易吾人所目擊也而空氣之波動亦因與障礙物體相衝突阻其前進而生逆行之方向卽所謂反射也如第五圖

CD 爲二個凹鏡對置於相距十米突之處懸時計於 A 點而以聽音器之開端當於 B 點使 D 鏡所受之音悉集於此部附耳於其細口聽之覺甚響亮恍如音從 D 鏡而發且音響之投射波與反射波各與垂直線成相等之角其理已詳於光學篇中茲不復贅但音響之反射必其障礙物體有適當之距離而後不與原音相混試向井戶發聲往々不聞反響緣井戶甚淺其反射之音與初發之音錯雜混聽故也吾人發一音至少必需五分之一秒惟音於五分之一秒時通過六十八米卽 $\frac{340}{5}=68$ 故自原音方終至恰聞反響爲六十八米之二分之一卽三十四米也如連發二音三音始聞原音則發音體至障礙體之距離必爲三十四米之二倍三倍

第十款 音之屈折　如第六圖以護謨所製之薄囊充入炭酸氣而懸之於其傍掛一時計復於時計之異側與球囊相距數尺之處置一漏斗附耳於漏

第六圖



斗之細端令其位置前後移動至適當之距離而時計之音響入耳較强緣音波被球囊之防礙而屈折其進行之路故也

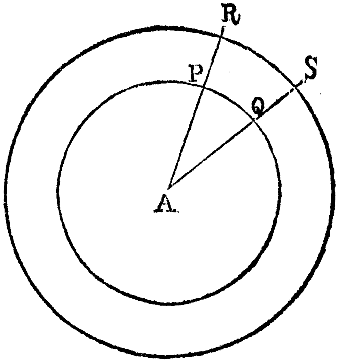
問題

十一　音響之强度與距離自乘為反比例試證之

解　如第七圖 A 為音源 PQ 為內球面 PA 為內球半徑 RS 為外球面 AR 為外球半徑因凡球面振動能力之總和與音源之振動能力

其量恆一定不變命爲 E 其球面之面積依幾何學求積之法爲 $2\pi r^2$ 故得內球面單位面積之能力爲 $\frac{E}{2\pi AP^2}$ 外球面單位面積之能力爲 $\frac{E}{2\pi AR^2}$ 因此可求得兩單

第七圖




位面積能力之比爲 $\frac{E}{2\pi AP^2}:\frac{E}{2\pi AR^2}=AR^2:AP^2$

十二　發音後一·八秒始聞反響定此時音之速度爲三百四十米試求障礙體之距離幾何

答　障礙體之距離三百零六米

解　命從發音體至障礙體之距離爲 $x$ 則 $2x$ 爲音波進行所經過之距離惟行此距離所需之

時間爲一·八秒而音之速度每秒時三百四十米則準速度之公式 $S=Vt$ 卽 $2x=1.8\times 340$ 故得 $x=\frac{1}{2}1.8+340=306$ 米

十三　有石橋離水面之高凡二百四十五米試於橋上墜一石塊問此石塊觸水面之音經幾秒時始復原處但音之速度定爲三百四十米

答　從發音至聞反響時一秒四四一

解　命從發音至聞反響之時間爲 $t$ 而石橋離水面之距離之二倍爲四百九十米而音之速度爲三百四十米則準速度之公式 $S=Vt$ 卽 $490=340\times t$ 故得 $t=\frac{490}{340}=1.441$ 秒

十四　有障礙體從發音至聞反響時需時一秒半而音之速度一秒時一千一百英尺試求障礙體之距離

答　從發音體至障礙體之距離八百二十五英尺

解　依問題十二之解法則得 $2x=1.5\times1100$ 故 $x=\frac{1}{2}1\cdot5\times1100=825$英尺

十五　有一井從水面至井口之深二百一十英尺試向井口發聲問幾秒時始聞反響但音之速度一秒時一千一百英尺

答　需時〇·三七二····秒

解　依前問題十三之解法可知從井口至水面之深其二倍爲四百二十英尺故得 $420=1100\times t$ 卽 $t=\frac{420}{1100}=0.372\cdots\cdots$秒

十六　以石塊墜入井中經四秒後始聞石觸水面聲而音之速度定爲一秒時三百四十米試求井口至水面之深

答　從井口至水面七十米四

解　命從井口至水面之深爲 $x$ 石塊墜下達於水面之時間爲 t 則依墜體之公式 $x=\frac{1}{2}gt^2$ 又石觸水面之音徑 $(4-t)$ 之時間復上行而達

人耳其音之速度命爲 V 則依速度之公式 $S=Vt$ 即 $x=V(4-t)$ 故可知 $\frac{1}{2}gt^2=V(4-t)$ 即 $gt^2+2Vt-8V=0$ 即 $t=\frac{-V\pm\sqrt{V^2+8gV}}{g}$ 惟 t 不能爲負故須取其正號 $t=\frac{-V+\sqrt{V^2+8gV}}{g}$ 今 $V=340$ $g=9.8$ 故得 $t=\frac{-340+\sqrt{(340^2+8\times9.8\times340}}{9.8}$ $=\frac{-340+377\times168}{9.8}=3.79$秒 代用於 $\frac{1}{2}gt^2$ 式則得 $x=70.4$

十七　一秒時能發五音之言語每發一音需時四分之一秒今從發第五音之後經半秒時聞第一音之反響問反響至發音處之距離幾何但音之速度定爲三百四十米

答　距離二百九十七米五

解　命所求之距離爲 $x$ 因從發第一音至發第五音之終其所需之時間爲 $\frac{1}{4}\times5$秒 又經過二分之一秒始聞第一音之反響則可知從發第一音至反響入耳之時間爲 $\frac{5}{4}+\frac{1}{2}+\frac{7}{4}$秒

惟此時間音波所經過之路爲從發音至反響處距離之二倍(卽$2x$)故依速度之公式　$Vt=S$　則　$340\times\frac{7}{4}=2x$　故　$x=340\times\frac{7}{4}\times\frac{1}{2}=297.5$米

## 第二章　樂音

第十一款　樂音之性質　凡音響之入耳有其聲清朗令人愉快其聲鈍濁令人壓惡之別卽音波之傳達連續而觸於聽官於一定之時間有一定之振動數例如笙笛悠揚謂之樂音若音波之傳達甚爲複雜其振動次數全無一定例如火藥爆發謂之噪音本篇所論者僅樂音之理

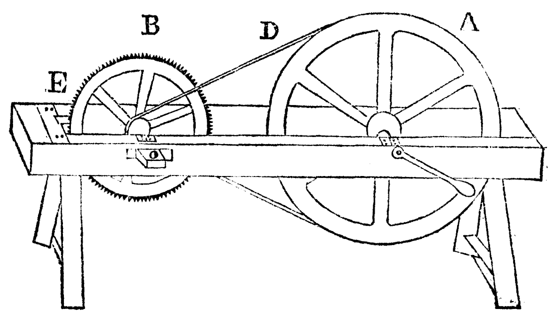
凡各種樂音所通有之性質大要有三卽音調强度音色是也其强度與距離及振幅相關之理已於前述之玆先論音調其音色俟後論之

第十二款　音調之差異　凡音調之顯異悉源於振動之遲速試張絃線以手指撥之記其音響更以

他之短縮絃線依法撥之則後者所發之音較銳於前者所發之音即可知音之銳鈍與振動之遲速相關振動速則音響銳振動遲則響音鈍惟銳音所發之調較高於鈍音所發之調故音調之顯異悉源於振動之遲速其理自可判然矣

第十三欵　沙巴托器　凡測定音調之振動數其

第八圖



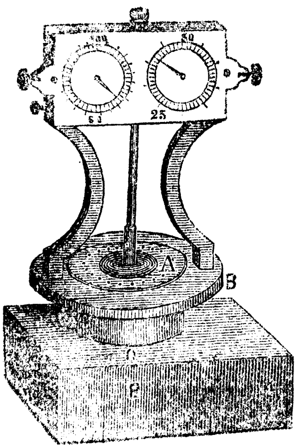

器械之最簡單者有沙巴托器如第八圖 A 爲大輪 B 爲齒輪以木框支置穩定另以絲 D 繞齒

輪 B 之軸而貫於大輪 A 之陷道內令其循環周轉復於木框之左端置薄板 E 使 B 輪旋轉時 E 板常擊齒輪而發音試以 A 輪徐徐旋轉則 E 板觸齒輪之音紓徐有節如旋轉漸速則音甚銳利故可知旋轉愈速則音調愈高今欲用此器測定該樂音之振動數令 A 輪漸次旋轉至 E 板觸齒輪之音與該樂音發同調之音約經數秒時間 A 輪之速度不變詳記 B 輪之旋轉次數以之乘該輪齒數即得該時間中之全振動數然後以經過之秒數除全振動數即爲一秒時之振動數

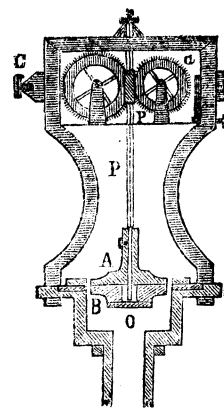
第十四欵　賽林器　賽林器亦測定振動數之器也如第九圖 E 爲風櫃 B 爲風室狀如圓筒其上面駢列小孔十五(可任意穿小孔若干)於其上裝置圓板 A 亦如數開列小孔緣風從風櫃之下部送入圓筒則筒內之空氣恒向小孔逸出故孔道不宜直立且風室與圓板之孔道其傾斜亦須異向如風室

第九圖

甲



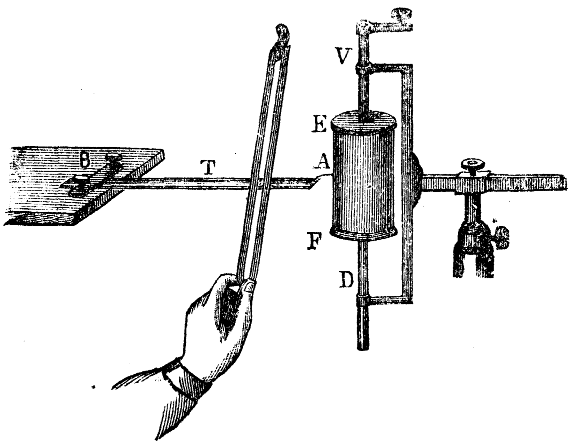

乙




向左斜穿則圓板向右斜穿復於圓板A上竪立一軸T令A板附軸旋轉則空氣之通路或開或閉每回轉一次可聞十五之低風音如旋轉漸次迅速則各音相連而音調甚高又軸之上方有無終螺旋運運一百齒之齒輪而齒輪之軸上有針於其相附

之盤面刻以百分度數如 A 板旋轉一次則螺旋與齒輪相啣接之處運轉一周而第一齒輪盤面之針進行一度如此針旋轉一周(即百分度)則第二齒輪盤面之針復進一度然則第一齒輪之針進一度即振動一十五次第二齒輪之針進一度即第一齒輪之針旋轉一周即振動一千五百次也欲用此器測定該樂音之振動數依上之同法可以求得但甲圖爲器之背面乙圖爲器之前面

第十圖



第十五欵　圖形畫法　凡音叉或彈條之振動可以圖形表之如第十圖固定彈條之一端而於其他端附一小針其針尖使觸煤燻紙捲束之圓筒上如圓筒旋轉則彈條之振動數卽畫成白波形於煤燻紙面其凹凸可數而知卽可得每秒之振動數但圓筒之軸須用螺旋以圓筒旋轉數次則波形線亦如螺旋狀決不至互相重疊

第十六欵　音調與波徑之關係　如上所言振動數之測定益可知音調之高低與振動之遲速相關然振動之遲速恒與波徑有關係卽振動愈速則波徑愈短設如有發音體一秒時振動五百六十次而音之速度於常温時一秒時凡三百四十米故可知一秒時間有五百六十之音波進行於三百四十米之距離卽此音波之長爲十四分之九米(凡二尺)如音調漸高至一秒時振動一千次則此音波之長爲五十分之十七米(凡一尺一寸餘)故可知音調

與波徑之關係發音體之振動愈速則波徑因之漸短而音調準之愈高

第十七欵　音階　吾人聞數種之樂音非僅有銳鈍之別又可知樂音之彼此相關如二種樂音或同時並發或先後相間其振動之次數各有一定之關係令人生愉快之感覺凡此類多音駢列謂之音階今將各音之符號及振動數之比例列表於次

| | 第一音 | 第二音 | 第三音 | 第四音 |
|---|---|---|---|---|
| 符號 | C | D | E | F |
| 振動數 | 1 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{4}{3}$ |
| | 第五音 | 第六音 | 第七音 | 第八音 |
| 符號 | G | A | B | C′ |
| 振動數 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{15}{8}$ | 2′ |

如右表雖實際有八種音然第八音之振動數爲第一音(即元音)之二倍卽更高一級之原音其符號以 1 表之其第一音 C 無論何種樂音有一定

之振動數皆可定爲元音但既定爲元音則以下各音之振動數須如表中所記之比例設如有一音一秒時振動四百次定爲元音則第三音 E 之振動數如表中之比例可知爲五百次卽 $400\frac{5}{4}=500$ 第五音 G 之振動數如表中之比例可知爲六百次卽 $400\frac{3}{2}=600$ 第八音 C′ 之振動數爲元音之二倍可知爲八百次卽 $400\times2=800$ 是其例也

如前欵所言振動愈速即波徑愈短故可知各音之振動數恒與波徑爲反比例試定第一音 C 之波徑爲一則以下各音之波徑如左表之比例

| C | D | E | F | G | A | B | C′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{8}{9}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{1}{2}$ |

凡各音相互之比謂之音階之間隙試推出各音間逐次之比例以最簡式明之其表如次

$C:D=8:9$ $D:E=9:10$

$E:F=15:16$ $F:G=8:9$

$G:A=9:10$ $A:B=8:9$

$B:C'=15:16$

問題

十八 十五孔之賽林器有發音體與其同音時一分時間迴轉二千一百八十八周試求發音體一秒時間之振動數

答 一秒時振動五百四十七次

解 因賽林器回轉一周空氣振動十五次則可知回轉二千一百八十八周則空氣之振動爲 $15\times 2188=32820$次 又因一分時(即六十秒)有三萬二千八百二十之振動數故可知一秒時之振動數爲 $\frac{32820}{60}=547$次

十九 十五孔之賽林器與一管同音時一分時之四分之一迴轉四百四十周試求管音一秒時之振動數

答 一秒時振動四百四十次

解　依前題之解法則可知回轉四百四十周其空氣之振動爲 $15\times 440=6600$ 惟一分時之四分之一爲一十五秒故可知一秒時之振動數爲 $\frac{6600}{15}=440$ 次

二十　用賽林器測定發音體之振動數其圓板爲十六孔於十二秒時圓板之旋轉三百零六次試求發音體之振動數

答　一秒時振動四百零八次

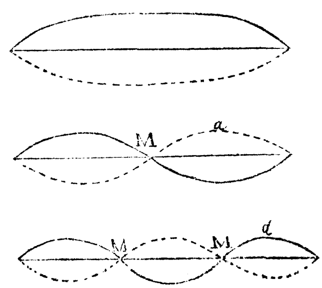
解　因圓板於一秒時旋轉之數爲 $\frac{306}{12}$ 回惟一次旋轉時圓板有十六孔則生十六次之振動故可知一秒時間之振動數爲 $\frac{306}{12}\times 16=408$ 次

## 第三章　諸樂器之原理及音波之混疊

第十八欵　紘之振動　試緊張一條紘線以手指撥之則顫動發音其他各種紘器之紘線或以金屬絲爲之或以絲線爲之如令其振動發音或以胡弓摩之或以小鎚擊之其紘線之顫動要皆與其弦長

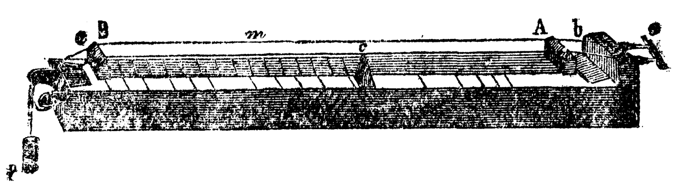
成正交而生橫動如紘線分段顫動則各段之界點恒靜止不動謂之節如圖中之 *m* 點是也其節與節之中點振幅最大謂之腹如圖中之 *a* 點是也

第十一圖




第十九款　紘線振動之定律　如第十二圖瑣羅

第十二圖



密託器用長四尺許之木框其上裝有分度尺其兩端固定二箇琴柱於其間另置一小琴柱使能左右移動復用一條絃線固着其一端橫過琴柱而他端貫於滑車之陷道內懸一重錘使其緊張由此可知絃線振動之定律如下(一)緊張力有一定則絃線之振動數與其長爲反比例設如緊張絃線一秒時振動一百八十次如緊張力不變而移轉中央之琴柱至顫動線之長恰在二分之一則絃線之振動數爲三百六十卽原振動之二倍如移置琴柱於線長三分之二則其餘絃線之三分之一其振動數爲五百四十卽原振動數之三倍(二)緊張力與線長俱不變則絃線之振動數與其直徑爲反比例如有大小二絃其緊張力與線長俱相等而大絃之直徑爲小絃直徑之二倍則小絃所發之音比大絃所發之音有二倍之振動數(三)絃線之長與粗俱相等則其振動數與緊張力之平方根爲正比例設如張一絃

線定所發之音爲原音復四倍其緊張力而令其振動則後者所發之音較原音有二倍之振動數(四)緊張力與線長及粗俱相等則絃線之振動數與其密度之平方根爲反比例卽凡重密物質所製絃線之音比輕疏物質所製絃線之音其音調較低

以上諸例如以比例證之命絃線之振動數爲 N 半徑爲 R 線長爲 L 緊張力爲 P 密度爲 D 則準第一例其兩絃線振動數之比爲 $N:N'=L':L$ 準第二例其兩絃線振動數之比爲 $N:N'=R':R$ 準第三例其兩絃線振動數之比爲 $N:N'=\sqrt{P}:\sqrt{P'}$ 準第四例其兩絃線振動數之比爲 $N:N'=\sqrt{D'}:\sqrt{D}$ 合以上諸例則得關係式如次

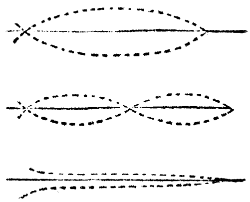
$$N=\frac{1}{2RL}\sqrt{\frac{P}{D}}$$

第二十欵 倍音及音色 如上所言絃線之振動無有單純之振動如彈其全長之時則全長之振動固不待言惟同時絃線之小部分亦生振動則此小

部分所發之音謂之倍音且非獨絃線然也其他各種器之振動亦有倍音其倍音恒與元音相混同而音之性質互呈差異謂之音色如笛箏三絃等使合奏同調音傾耳聽之雖音調相合而各種樂器之性質容易區別

第二十一欵　棒之振動　如第十三圖取一條金屬棒固定其一端而彈其他一端則音響發生如縮短其部分而彈之則音調愈高即可知棒之振動數與其棒長之平方爲反比例

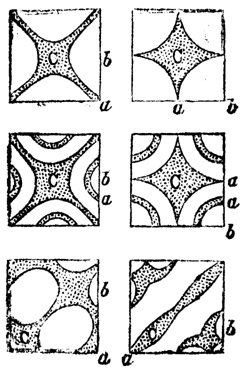
第十三圖



第二十二欵　板之振動　如第十四圖以玻璃或金屬所製之一板於板上布以細砂其板面之支點在 C 其側面試以手指按之如 $a$ 於其按處之中

央以胡弓摩之如 $b$ 則板面之細砂動搖而成一種奇形緣細砂去其動搖之部分而聚集於不動搖之部分若支點之位置與按指處及胡弓摩擦處種種變易則板面細砂聚集之部分現出各種奇形

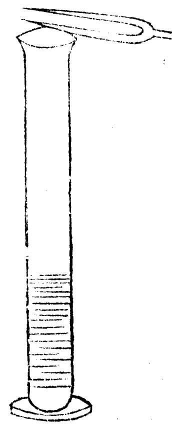
第十四圖




第二十三欵　管中空氣之振動　發音體之振動非僅固體然也卽氣體細管中亦成柱形之振動試以直徑各一寸長十六寸十二寸十寸八寸之四竹管閉其一端以口當其開端而强吹之則各發一種音今欲驗其振動數以十六寸管所發之音定爲元音則十二寸管所發之音當第三音十寸管所發之音當第五音八寸管所發之音當第八音次取兩端

開之細管以手指閉其一端而他端如前吹之令其發音名之爲元音更放開指頭而吹之則發第八音然則一端閉之管所發之音比一端開之管所發之音其音階較低今命管長爲 L 速度爲 V 振動次數爲 N 則一端閉之管所發之音其原音之振動數爲 $N=\frac{V}{4L}$ 而所發之倍音常爲原音之奇倍數即一三五七等倍數兩端開之管所發之音其原音之振動數爲 $N=\frac{V}{2L}$ 而所發之倍音常爲原音之任何倍數即一二三四等倍數

第十五圖

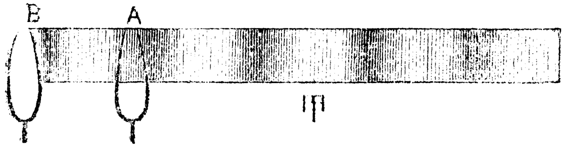


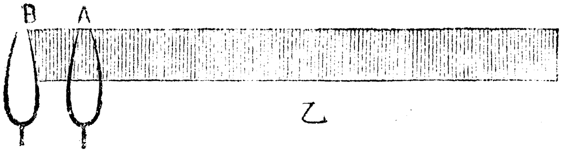
第二十四款　共鳴　如第十五圖試振動一音叉近於玻璃筒之口邊復注水於筒中至達一定之高則音響驟增於此時測定從口邊至水面之距離設於筒中復加多量之水則音響之强漸殺如

此之音響增大謂之共鳴以筒內之空氣與音义之振動有同調之音故音勢頓强

第二十五款　音之契合及交錯　凡二種音波相

第　十　六　圖



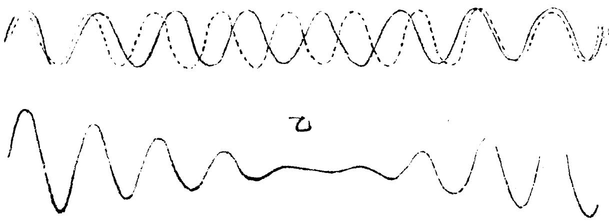




助而大增其音響謂之契合二種音波相防而消滅其音響謂之交錯如　AB　二音义發同調之音卽音波之長相等故兩音义對峙相隔一音波之長如

第十六圖甲則二種音波相契合而大增其音響反之而兩音义相對時其距離爲波長三分之一如第十七圖乙則一音义之濃縮空氣與又一音义之稀薄空氣互相交錯而音響消滅卽二浪成平之理也

第二十六欵　唫聲　設甲乙二音义其一音义一

第十七圖




秒時振動二百五十五次又一音义一秒時振動二百五十六次如同時令其振動而兩音波殆相契合增强其音勢至歷半秒之後兩音波互相交錯而音

勢漸衰至一秒時之後兩音波又互相契合此種異形之振動每半秒時契合與交錯相間謂之唸聲如第十七圖但甲圖所示爲兩波混疊之形乙圖所示爲不規則之波形

問題

二十一　兩絃線半徑之比如其重量之平方根之正比試證之

解　通常之絃線直徑甚小頗難測定試以同物質之絃線其直徑之比較可以重量測定之命絃絃之半徑爲 $r$ 長爲 $t$ 密度爲 $d$ 圓周率爲 $\pi$ 則依幾何學求積之公式可得圓柱形之體積爲 $\pi r^2 t$ 再以密度乘之則得 $\pi r^2 td$ 爲絃線之重量設有甲乙二絃線係同一物質所製其長相等甲線之重量爲 $M$ 半徑爲 $r$ 乙線之重量爲 $M'$ 半徑爲 $r'$ 則可得兩絃線重量之比爲 $M:M' = \pi r^2 td : \pi r'^2 td = r^2 : r'^2$ 即 $\sqrt{M} : \sqrt{M'} = r : r'$ 故可知兩絃線半徑之比如其重量之平方根之正比

二十二　有等長二線其一爲鐵線又其一爲銅線其緊張力相等而所發之音亦相等試求其兩直徑之比但鐵之密度爲七·八銅之密度爲八·八

答　鐵線與銅線兩直徑之比如一與一·〇六二

解　準第十九款絃線振動之定律其公式爲 $N=\frac{1}{1RL}\sqrt{\frac{P}{D}}$ 惟題言所發之音相等卽振動次數相等故得 $\frac{1}{2RL}\sqrt{\frac{P}{D}}-\frac{1}{2R'L}\sqrt{\frac{P}{D'}}$ 卽 $\frac{1}{R\sqrt{D}}=\frac{1}{R'\sqrt{D'}}$ 卽 $\frac{R'}{R}=\sqrt{\frac{D}{D'}}$ 令 $D=8.8$ $D'=7.8$ 故得 $R:R'=\sqrt{7.8}:\sqrt{8.8}=1.062$

二十三　有等長二線係同一物質所製其一線直徑爲〇·六粍張力爲四百瓦又其一線直徑爲一·五粍張力爲一千六百瓦試求其振動數之比

答　兩絃線振動次數之比如五與四

解　準第十九款絃線振動之定律則得

$\frac{1}{2RL}\sqrt{\frac{400}{D}} \cdot \frac{1}{2R'L}\sqrt{\frac{1600}{D}}$ 卽 $\frac{\sqrt{400}}{0.6} : \frac{\sqrt{1600}}{1.5} = 5 : 4$

二十四　有直徑相等之二絃線一爲眞瑜所所製張力爲二瓩一爲銀所製張力爲二十五瓩欲令其發同調之音試求其線長之比但眞瑜之密度爲八·四銀之密度爲一〇·五

答　銀與眞瑜線長之比如三·一六與一

解　因題言發同調之音卽振動次數相等故準第十九欵弦線振動之定律則得 $\frac{1}{2RL}\sqrt{\frac{P}{D}} = \frac{1}{2RL'}\sqrt{\frac{P'}{D'}}$ 卽 $\frac{1}{2RL}\sqrt{\frac{2}{8.4}} = \frac{1}{2RL'}\sqrt{\frac{25}{10.5}}$ 卽 $\frac{1}{L}\sqrt{\frac{2}{8.4}} = \frac{1}{L'}\sqrt{\frac{25}{10.5}}$ 故可知線長之比爲 $\frac{L'}{L} = \sqrt{\frac{25}{10.5} \times \frac{8.4}{2}} = \sqrt{10} = 3.16$

二十五　有長一米之眞瑜線其張力爲二百瓩今有直徑相等之銀線長三·一六米欲令其發同調之音試求銀線之張力

答　銀線之張力二千五百瓩

解　準第十九欵弦線振動之定律則得 $\frac{1}{2R3.16}$

$\sqrt{\frac{P}{10.5}}=\frac{1}{2R}\sqrt{\frac{200}{8.4}}$ 即 $\frac{1}{3.16}\sqrt{\frac{P}{10.5}}=\sqrt{\frac{200}{8.4}}$ 故得 $P=\frac{200}{8.4}\times(3.16)^2\times10.5=2500$

二十六　有直徑〇•八粍之銀線與直徑一•二粍之銅線以等力張之而發同調之音試求兩線長之比但銀之密度爲一〇•五銅之密度爲八•五

答　兩線長之比如一•三五與一

解　準第十九欵紘線振動之定律則得 $\frac{1}{2RL}\sqrt{\frac{P}{D}}=\frac{1}{2R'L'}\sqrt{\frac{P}{D'}}$ 即 $\frac{1}{0.8L}\sqrt{\frac{P}{1.05}}=\frac{1}{1.2L'}\sqrt{\frac{P}{8.5}}$ 故得 $L:L'=\frac{1}{0.8}\sqrt{\frac{P}{1.05}}:\frac{1}{1.2}\sqrt{\frac{P}{8.5}}=\frac{0.8}{1.2}\sqrt{\frac{1.05}{8.5}}=\sqrt{\frac{(0.8)^2 1.05}{(1.2)^2 8.5}}$ 即

$L:L'=\sqrt{(1.2)^2 8.5}:\sqrt{(0.8)^2 1.05}=1.35:1$

二十七　有紘線一條以二十斤之力張之則一秒時可振動四百次如以四十五斤之力張之則一秒時之振動數幾何

答　一秒時振動六百次

解　準第十九欵紘線振動定律之第三例 N:

$N' = \sqrt{P} : \sqrt{P'}$ 今 $N = 400$ $P = 20$ $P' = 45$ 故得$N' = \frac{400\sqrt{45}}{\sqrt{20}} = 400\sqrt{\frac{9}{4}} = 400\frac{3}{2} = 600$

二十八　有直徑相等之鐵線與絃線以等力張之而鐵線之密度爲絃線密度之九倍試求其振動數之比又此二線令發同調之音則其緊張力之比如何

答　振動數之比如一與〇·三三…緊張力之比如一與九

解　準第十九欵第四例　$N : N' = \sqrt{D} : \sqrt{D'}$ 今 $D' = 9$ $D = 1$ $N = 1$ 故得 $N' = 1\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} = 0.333\cdots$又此二線使發同音則振動次數相等故得 $\frac{1}{2RL}\sqrt{\frac{P}{D}} = \frac{1}{2RL}\sqrt{\frac{P'}{D'}}$ 卽 $\sqrt{\frac{P}{D}} = \sqrt{\frac{P'}{D'}}$ 卽 $\frac{P}{D} = \frac{P'}{D'}$ 今 $D' = 9$ $D = 1$ 故得 $\frac{P}{1} = \frac{P'}{9}$ 卽 $P : P' = 1 : 9$

二十九　有兩端開管其所發之原音振動數爲四百二十五而音之速度定爲三百四十米試求開管之長

答　管長四十糎

解　準第二十三欵開管之公式 $N=\frac{V}{2t}$ 故得 $425=\frac{340}{2t}$ 卽 $t=\frac{340}{2\times425}$米$=40$糎

三十　有兩端開管所發第三倍音之振動數爲八百五十而音之速度定爲三百四十米試求開管之長

答　管長六十糎

解　因開管第三倍音之振動數爲 $\frac{V}{2t}$ 之三倍故得 $\frac{340}{2t}\times3=850$　因此可求得　$t=\frac{3\times340}{2\times850}$米$=60$糎

三十一　有一端閉管其長爲半米而音之速度每秒時三百四十米試求原音之振動數

答　振動數一百七十次

解　準第二十三欵閉管之公式 $N=\frac{V}{4t}$ 故得 $N=\frac{340}{4\times0.5}=170$

三十二　有長五十糎之閉管試撿其內部空氣之

振動已知其全長離底三分之二有一勾節試求此音之振動數

答　振動數五百一十次

解　於閉管從底至勾節之距離爲波長之半分命波長爲$\lambda$則得$\frac{\lambda}{2}=\frac{2}{3}\times 50$卽$\lambda=\frac{4\times 50}{3}$糎$=\frac{2}{3}$米惟振動次數爲N則$N=\frac{V}{\lambda}$故$N=340\times\frac{3}{2}=510$

三十三　充空氣於閉管而令發音其原音之振動數爲四百一十五充炭酸氣於閉管而令發音其原音之振動數爲三百二十五而音於空氣中之速度爲三百三十一米問炭酸氣中音之速度幾何

答　二百五十九米

解　準閉管之公式$N=\frac{V}{4t}$今充空氣於閉管則得$415=\frac{331}{4t}$充炭酸氣於閉管命其音波之速度爲$V'$則得$325=\frac{V'}{4t}$以此二式相除而消去$4t$

則得$\frac{V}{331}=\frac{325}{415}$ 故 $V=331\times\frac{325}{415}=259$米

三十四　於一秒時間振動四百三十五次之音叉近開管之上端而發音其音之速度定爲三百四十米問管長須幾何始能與音叉相應而共鳴

答　管長三十九糎

解　因管與音叉共鳴則管中所發之音與音叉所發之音同調卽振動次數相等則準開管之公式 $N=\frac{V}{2t}$ 故得 $435=\frac{V}{2t}$ 卽 $435=\frac{340}{2t}$ 因之之可求得 $t=\frac{340}{2\times435}=39$糎

三十五　有兩端開管其長爲五十糎而音之速度定爲三百四十米試求其原音之波長幾何又其最初二倍音之波長幾何

答　原音之波長十米　二倍音之波長〇·五米

解　準開管之公式 $N=\frac{V}{2t}$ 故得 $N=\frac{340}{2\times0.5}=\frac{340}{10}$

命原音之波長爲$\lambda$則 $\lambda=\frac{V}{N}$ 故得 $\lambda=340\div\left(\frac{340}{10}\right)$

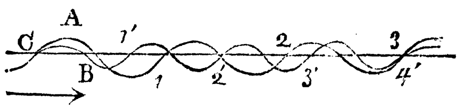
$=10$米　又二倍音之振動數爲原音振動數之

二倍故 $N' = \frac{V}{2t} \times 2 = \frac{340}{0.5}$ 因之可求得二倍音之波長爲 $\lambda = 340 \div \left(\frac{340}{0.5}\right) = 0.5$米

三十六　二音相混疊而生唸聲其一秒間所生唸聲之數與二音振動數之差相等試證之

解　如第十八圖有 AB 二波從〇點依矢向

第十八圖




進行其 A 波之 123 與 B 波之 1′2′3′ 互相交錯而 1 與 1′ 之間隔 2 與 2′ 之間隔漸次增加至 3 與 3′ 之間隔恰等於 B 一波之長依此可知二波進行至復相契合時其波數必差一重今命二音之振動數爲 M 及 N 一秒

間唸聲之數爲 $x$ 則一唸聲中各音波之數爲 $\frac{M}{x}$ 及 $\frac{N}{x}$ 依上言波數必差一重故得 $\frac{M}{x}-\frac{N}{x}=1$ 卽 $M-N=x$ 由此可知一秒間唸聲之數必等於二音振動數之差

三十七　有甲乙二音又甲之振動數三百六十乙之振動數三百六十五今有一發音體與甲共鳴則一秒間聞三唸聲與乙共鳴則一秒間聞二唸聲試求發音體之振動數

答　振動數三百六十三

解　依問題三十六之原理已知一秒間唸聲之數等於振動數之差故可知發音點與甲共鳴而生三唸聲則其振動數爲　$360+3=363$　或 $360-3=357$　又與乙共鳴而生二唸聲則其振動數爲 $365+2=367$ 或 $365-2=363$ 由此可知發音體之振動數必爲此二者之共通數卽三百六十三

三十八　有甲乙二音又甲之振動數二百五十六乙之振動數二百六十如同時令其發音則一秒時之唸聲幾何

答　一秒時可生四唸聲

解　依前問題三十六之原理一秒間唸聲之數等於振動數之差故準公式　$M-N=x$　則得

$260-256=4$

# 附錄

## 第一表　日英法度量衡比較表

### 尺度

| 日制 | 法制 | 英制 |
|---|---|---|
| 一里 | 三·九二七三粁 | 二·四四〇三哩 |
| 一町 | 一〇九·〇九米 | 一一九·三〇碼 |
| 一間 | | |
| 一尺 | 〇·三〇三〇三米 | 〇·九九四二〇呎 |

### 面積

| 日制 | 法制 | 英制 |
|---|---|---|
| 一町 | | |
| 一反 | 〇·〇九九一七四平方粨 | 〇·二四五〇七平方畝 |
| 一畝 | | |
| 一坪 | 三·三〇五八平方米 | 三·九五三八平方碼 |

## 容量

| 日制 | 法制 | 英制 |
|---|---|---|
| 一石 | | |
| 一斗 | | |
| 一升 | 一·八〇三九立 | 〇·三九六八二高倫 |
| 一合 | | |

一升桝當六四·八二七立方寸

## 重量

| 日制 | 法制 | 英制 |
|---|---|---|
| 一貫 | 三·七五瓩 | 八·二六七三听 |
| 一匁 | 三·七五瓦 | 〇·一三二二八嗵 |
| 一分 | | |
| 一厘 | | |
| 一毛 | 三·七五瓱 | 〇·〇五七八七喱 |

## 尺度

| 法制(米突法) | 日制 | 英制 |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| 一粨 | 〇·二五四六三里 | |
| 一粁 | | |
| 一粨 | | |
| 一料 | | |
| 一米 | 三·三尺 | 三·二八〇九呎 |
| 一粉 | | |
| 一糎 | 三·三分 | 〇·三九三七〇吋 |
| 一粍 | | |

米突法均以十進十退推算最爲便利其諸等數之譯音、一粨讀爲牡乃米突一粁讀爲啓羅米突一粨讀爲海克米突一料讀爲造希米突一糎讀爲仙奇米突一粍讀爲迷里米突

## 面　積

| 法制 | 日制 | 英制 |
|---|---|---|
| 一平方粨 | 一〇·〇八三反 | 二·四七一一 |
| 一平方料 | 三〇·二四九坪 | 一〇七六·四平方呎 |

| | | |
|---|---|---|
| 一平方米 | 一〇・八九平方尺 | 一〇・七六四平方呎 |

## 容積

| 法制 | 日制 | 英制 |
|---|---|---|
| 一竏(立方米) | 五・五四三五石 | 二一九・九八 |
| 一竡 | | |
| 一竍 | | |
| 一立(立方粉) | 〇・五五四三五升 | 〇・二一九九八 |
| 一竕 | | |
| 一竰 | | |
| 一竓(立方糎) | | |

## 重量

| 法制 | 日制 | 英制 |
|---|---|---|
| 一瓲 | 二六六・六七貫 | 〇・九八四二噸 |
| 一瓩 | 二六六・六七匁 | 二・二〇四六听 |
| 一瓸 | | |
| 一瓧 | | |

| | | |
|---|---|---|
| 一瓩 | ○·二六六六七匁 | 一·五·四三二嚘 |
| 一瓸 | | |
| 一瓲 | | |
| 一瓱 | ○·○○○二六·七匁 | ○·○一五四三嚘 |

## 尺度

| 英制 | 日制 | 法制 |
|---|---|---|
| 一哩 | ○·四○九七八里 | 一·六○九三粁 |
| 一佛郎 | | |
| 一竿 | | |
| 一碼 | | |
| 一呎 | 一·○○五八尺 | 三○·四八○糎 |
| 一吋 | | |
| 一海里 | ○·四七二四一里 | 一·八五五三粁 |

## 面積

| 英制 | 日制 | 法制 |
|---|---|---|
| 一平方哩 | | |

| | | |
|---|---|---|
| 一平方畝 | 四·〇八〇四反 | 〇·四〇四六八平方佰 |
| 一平方角 | | |
| 一平方竿 | | |
| 一平方碼 | 九·一二九平方尺 | 〇·八三六一三平方米 |
| 一平方呎 | | |

| 英制 | 日制 | 法制 |
|---|---|---|
| 一高倫 | 二·五二〇六升 | 四·五四五九六立 |
| 一卦 | | |
| 一呌 | | |

英制一高倫定爲二七七·四二立方吋 北米合衆國制則定一高倫爲二三一立方吋 故等英制之〇·八三二六四高倫

## 重量

| 英制 | 日制 | 法制 |
|---|---|---|
| 一噸 | 二七〇·九五貫 | 一·〇一六〇五瓲 |
| 一百滙 | | |

| | | |
|---|---|---|
| 一爪 | | |
| 一听(磅) | 一二〇·九六匁 | 四五三·五九三瓦 |
| 一唡 | 七·五五九九匁 | 二八·三五〇瓦 |
| 一噖 | | |
| 一喱(格林) | 〇·〇一七二八匁 | 〇·〇六四八〇瓦 |

## 第二表　固體比重表

### (一)　單　體　類

| 物名 | 比重 | 物名 | 比重 |
|---|---|---|---|
| 利叟烏謨 | 〇·五九 | 錫 | 七·三 |
| 加留謨 | 〇·八七 | 滿俺 | 七·一至八 |
| 那篤留謨 | 〇·九八 | 鋼鐵 | 七·六至七·八 |
| 麻偁涅叟謨 | 一·七四 | 鑄鐵 | 七·一至七·七 |
| 斜方硫礦 | 二·〇七 | 軟鐵 | 七·八 |
| 針狀硫礦 | 一·九六 | 加篤米烏謨 | 八·六 |
| 黃燐 | 一·八三 | 睍結爾 | 八·九 |
| 赤燐 | 二·一九 | 箇拔爾毒 | 八·五 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 金剛石 | 三·三至三·六 | 銅 | 八·五至八·九 |
| 石墨 | 一·八至二·六 | 銀 | 一〇·五 |
| 炭 | 見後木炭類 | 鉛 | 一一·三 |
| 亞米尼讀 | 二六 | 潑那旣讀 | 一一·五 |
| 沃素 | 四·九五 | 金 | 一九·三至一九·六 |
| 砒素 | 五·七 | 鑄白金 | 二一·五 |
| 枯羅讀 | 六·五 | 展白金 | 二二 |
| 安質母尼 | 六·七 | 依利旣讀 | 二二·四 |
| 亞鉛 | 七·一 | 阿斯米讀 | 二二·五 |

（二）合金類

| 物名 | 比重 | 物名 | 比重 |
|---|---|---|---|
| 布羅 | 八·七 | 眞鍮 | 八·一至八·六 |
| 洋銀 | 八·五 | | |

(三) 礦石類鹽類

| 物名 | 比重 | 物名 | 比重 |
| --- | --- | --- | --- |
| 氷 | ○·九一七 | 綠礬 | 一·八八 |
| 水晶 | 二·六五 | 皓礬 | 二·○一 |
| 瑪瑙 | 二·六 | 舍利鹽 | 一·六八 |
| 朱 | 八·一 | 芒硝 | 一·四六 |
| 螢石 | 三·二 | 明礬 | 一·七五 |
| 方解石 | 二·七一 | 硼砂 | 一·七二 |
| 大理石 | 二·八四 | 鉛糖 | 二·三九 |
| 食鹽 | 二·一五 | 乾砂 | 一·四至一·六 |
| 鹽化加利 | 一·九八 | 石灰石 | 二·六至二·八 |
| 硇砂 | 一·五二 | 花崗石 | 二·五至三·一 |
| 硝石 | 二·○九 | 長石 | 二·六 |
| 智利硝石 | 二·二四 | 那爲 | 二·八 |
| 硝酸銀 | 四·三五 | 壚坶 | 一·五至二·八 |
| 膽礬 | 二·二七 | 粘土 | 一·八至二·六 |

## (四) 玻璃及粘土製物類

| 物名 | 比重 | 物名 | 比重 |
|---|---|---|---|
| 窗玻璃 | 二·四至二·七 | 磁器 | 二·〇至·二·〇 |
| 鏡玻璃 | 二·四至二·七 | 煉瓦 | 二 |
| 庫那烏玻璃 | 二·四至·二·七 | 蘇釆托 | 二·七至三·〇五 |
| 加里玻璃 | 二·四至·二·七 | 乾漆喰 | 一·六至一·九 |
| 鉛玻璃 | 二·九至三·一 | | |
| 庫利斯他 | 二·〇至二·五 | | |

## (五) 木炭石炭類

| 物名 | 比重 | 物名 | 比重 |
|---|---|---|---|
| 乾木炭 | 〇·三至〇·五 | 褐炭 | 一·二至·一五 |
| 濕木炭 | 一·四至一·七 | 黑炭 | 一·二至·一五 |
| 骸炭 | 一·四 | 無烟炭 | 一·三至一·八 |

## (六) 木材類

| 物名 | 比重 | 物名 | 比重 |
|---|---|---|---|
| 科克 | 〇·二 | 風乾布那 | 〇·八 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 風乾桐 | | 風乾樫 | ○·八五 |
| 風乾柳 | ○·五 | 風乾黑檀 | 一·二 |
| 風乾榆 | ○·七 | 風乾黃楊 | ○·九至一·三 |

(七) 有機物類

| 物名 | 比重 | 物名 | 比重 |
|---|---|---|---|
| 蔗糖 | 一·五九 | 松脂 | 一·○七 |
| 那夫他利 | 一·一四 | 琥珀 | 一·○八 |
| 蓚酸 | 一·六三 | 彈性護謨 | 一 |
| 酒石酸 | 一·七六 | 脂肪 | ○·九二至·九四 |
| 樟腦 | ○·九九 | 骨 | 一·七至二 |
| 蠟 | ○·九六 | 牛酪 | ○·九四 |
| 配奈夫蠟 | ○·八七 | 象牙 | 一·九 |

## 第三表　液體比重表(攝氏十五度)

| 物名 | 比重 |
|---|---|
| 臭素 | 三·九九 |
| 亞爾科兒 | ○·七九三七 |

| | |
|---|---|
| 美旣亞爾科兒 | ○·八 |
| 依的兒 | ○·七二 |
| 亞米亞爾科兒 | ○·八一 |
| 本生 | ○·○八八四 |
| 託爾而 | ○·八九 |
| 査伊勒 | ○·八七 |
| 亞你利 | 一·○三 |
| 倔利設林 | 一·二六 |
| 醋酸 | 一·○五三 |
| 石炭酸 | 一·○八 |
| 枯魯頗讃 | 一·四九九 |
| 二硫化炭素 | 一·二七 |
| 液狀炭酸 | ○·八四 |
| 亞莫尼亞 | ○·六一 |
| 無水亞硫酸 | 一·三九 |

| | |
|---|---|
| 純鹽酸 | 一·一九五 |
| 純硝酸 | 一·三五 |
| 亞莫尼亞水 | 〇·八八二 |
| 純硫酸 | 一·八三八四 |
| 石油 | 〇·八四 |
| 阿勒夫油 | 〇·九一 |
| 添比油 | 〇·八七 |
| 人血液 | 一·〇六 |
| 乳類 | 一·〇〇八至一·〇四五 |
| 尿 | 一·〇二 |
| 海水 | 一·〇二至一·〇三 |
| 清酒類 | ·九八五至·九九五 |

水銀在攝氏零度時 其比重爲 一三·五九五七在攝氏十五度時 其比重爲 一三·五五九 因之可求得水銀在攝氏 t 度時之比重爲$\rho = (13{\cdot}5957) \div (1 + 0{\cdot}0001818 \times t)$

附各種溫度時水之比重及比容表

| 溫度 | 比重 | 比重差 | 比容(一瓦之體積) |
|---|---|---|---|
| 零度 | ○·九九九八七 | | 一·○○○一二 |
| 1 度 | ○·九九九九三 | 六 | 一·○○○○七 |
| 2 度 | ○·九九九九七 | 四 | 一·○○○○三 |
| 3 度 | ○·九九九九九 | 二 | 一·○○○○一 |
| 4 度 | 一·○○○○○ | 一 | 一·○○○○○ |
| 5 度 | ○·九九九九九 | 一 | 一·○○○○一 |
| 6 度 | ○·九九九九七 | 二 | 一·○○○○三 |
| 7 度 | ○·九九九九三 | 四 | 一·○○○○七 |
| 8 度 | ○·九九九八九 | 四 | 一·○○○一二 |
| 9 度 | ○·九九九八二 | 七 | 一·○○○一八 |
| 10度 | ○·九九九七四 | 八 | 一·○○○二六 |
| 11度 | ○·九九九六五 | 九 | 一·○○○三五 |
| 12度 | ○·九九九五五 | 一○ | 一·○○○四六 |
| 13度 | ○·九九九四三 | 一二 | 一·○○○五七 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 14度 | 〇・九九九三〇 | 一三 | 一・〇〇〇七〇 |
| 15度 | 〇・九九九一六 | 一四 | 一・〇〇〇八五 |
| 16度 | ・九九九〇〇 | 一六 | 一・〇〇一〇〇 |
| 17度 | ・九九九八四 | 一六 | 一・〇〇一一六 |
| 18度 | ・九九八六五 | 一九 | 一・〇〇一三四 |
| 19度 | ・九九八四六 | 一九 | 一・〇〇一五四 |
| 20度 | ・九九八二六 | 二〇 | 一・〇〇一七四 |
| 21度 | ・九九八〇五 | 二一 | 一・〇〇一九五 |
| 22度 | ・九九七八三 | 二二 | 一・〇〇二一七 |
| 23度 | ・九九七六〇 | 二三 | 一・〇〇二四〇 |
| 24度 | ・九九七三七 | 二三 | 一・〇〇二六四 |
| 25度 | ・九九七一二 | 二五 | 一・〇〇二八九 |
| 26度 | ・九九九八七 | 二五 | 一・〇〇三一四 |
| 27度 | ・九九六六〇 | 二七 | 一・〇〇三四一 |
| 28度 | 〇・九九六三三 | 二七 | 一・〇〇三六八 |
| 29度 | 〇・九九六〇五 | 二八 | 一・〇〇三九七 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 30度 | ○·九九五七七 | 二八 | 一·○○四二五 |
| 35度 | ○·九九四一八 | 一五九 | 一·○○五八六 |
| 40度 | ○·九九二三五 | 一八三 | 一·○○七七○ |
| 45度 | ○·九九○三七 | 一九八 | 一·○○九七一 |
| 50度 | ○·九八八一九 | 二一八 | 一·○一一九五 |
| 55度 | ○·九八五八一 | 二三八 | 一·○一四三九 |
| 60度 | ○·九八三三八 | 二四三 | 一·○一六九一 |
| 65度 | ○·九八○七四 | 二六四 | 一·○一九六四 |
| 70度 | ○·九七七九四 | 二八○ | 一·○二二五六 |
| 75度 | ○·九七四九八 | 二九六 | 一·○二五六六 |
| 80度 | ○·九七一九四 | 三○四 | 一·○二八八七 |
| 85度 | ○·九六八七九 | 三一五 | 一·○三二二一 |
| 90度 | ○·九九五五六 | 三二三 | 一·○三五六七 |
| 95度 | ○·九六二一九 | 三三七 | 一·○三九三一 |
| 100度 | ○·九五八六六 | 三五三 | 一·○四三一二 |

## 第四表　氣體比重表

| 名稱 | 一立之重量 | 對於空氣一之比重 | 對於酸素三十二之比重 |
|---|---|---|---|
| 空氣 | 一·二九二 | 一·〇〇〇 | 二八·九五 |
| 酸素 | 一·四二八 | 一·一〇五 | 三二·〇〇 |
| 化學窒素 | 一·二五〇 | 〇·九六七 | 二八·〇〇 |
| 空氣窒素 | 一·二五六 | 〇·九七二 | 二·〇〇 |
| 水素 | 〇·〇八九八 | 〇·〇六九五 | 七一·〇〇 |
| 鹽素 | 三·一六五 | 二·四五 | 七一· |
| 暴鳴瓦斯 | ·五三六 | ·四一四 | 一二 |
| 鹽化水素 | 一·六二七 | 一·二六 | 三六·五 |
| 硫化水素 | 一·五二 | 一·一八 | 三四·一 |
| 炭酸瓦斯 | 一·九六三 | 一·五二 | 四四·〇〇 |
| 一酸化炭素 | 一·二五〇 | ·九六七 | 二八·〇〇 |
| 美打 | ·七一五 | ·五五三 | 一六·〇〇 |
| 依他 | 一·三四 | 一·〇四 | 三〇·〇 |
| 愛旣林 | 一·二五 | 九七 | 二八·〇 |
| 亞舍旣林 | 一·一七 | ·九〇五 | 二六·〇 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 亞莫尼亞 | ○·七七 | ·五九 | 一八·○ |

## 第五表 各地落體之加速度表

(每秒每秒)

| 地名 | 加速度 |
|---|---|
| 赤道 | 九七八·一糎 |
| 北緯一十度 | 九七八·二糎 |
| 北緯二十度 | 九七八·七糎 |
| 北緯二十六度一十二分(那覇) | 九七九·二糎 |
| 小笠原島 | 九七九·五糎 |
| 北緯三十度 | 九七九·三糎 |
| 北緯三十一度三十五分(鹿兒島) | 九七九·六糎 |
| 北緯三十五度零一分(西京) | 九七九·七糎 |
| 富士山頂海面上一萬二千三百七十尺 | 九七八·九糎 |
| 北緯三十五度四十一分(東京) | 九七九·八糎 |
| 北緯三十六度三十二分(金澤) | 九七九·九糎 |

| | |
|---|---|
| 北緯三十九度零六分(水澤) | 九八〇·二糎 |
| 北緯四十度 | 九八〇·二糎 |
| 北緯四十三零三分(札幌) | 九八〇·五糎 |
| 北緯四十五度 | 九八〇·六二糎 |
| 北緯五十度 | 九八一·一糎 |
| 北緯六十度 | 九八一·九糎 |
| 北緯七十度 | 九八二·六糎 |
| 北緯八十度 | 九八三·〇糎 |
| 極地 | 九八三·二糎 |

## 第六表　液體之凝固點沸騰點體漲率表

| 物名 | 凝固點 | 沸騰點 | 體脹率(常溫) |
|---|---|---|---|
| 水 | 零度 | 一百度 | 見第三表 |
| 水銀 | 負三十九度五 | 三百五十七度 | 〇·〇〇〇一八 |
| 亞爾科兒 | 負一百一十度 | 七十八度三 | 〇·〇〇一〇七 |
| 依的兒 | 負一百一十八度 | 三十四度九 | 〇·〇〇一五八 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 本生 | 負五度三 | 八十度二 | 〇·〇〇一二一 |
| 二硫化炭素 | 負一百一十三度 | 四十六度 | 〇·〇〇一一九 |
| 枯魯頗謨 | 負七十度 | 六十一度二 | 〇·〇〇一二三 |
| 愛契由忝 | | 七十七度 | 〇·〇〇一三〇 |
| 醋酸 | 一十六度五 | 一百一十八度 | 〇·〇〇一〇六 |
| 石炭酸 | 四十度 | 一百八十三度 | 〇·〇〇〇六九 |
| 亞爾利 | 負八度 | 一百八十四度 | 〇·〇〇〇八三 |
| 託爾而 | 負一百零二 | 一百一十度 | 〇·〇〇一〇八 |
| 亞米阿而 | | 一百三十度 | 〇·〇〇〇九一 |
| 偎利設林 | | | 〇·〇〇〇五〇 |
| 臭素 | 負七度三 | 五十九度 | |
| 忝比油 | | 一百五十八度 | 〇·〇〇〇九五 |

## 第七表　液體之比熱融解熱氣化熱表

| 物名 | 比熱(常温) | 融解潛熱 | 氣化潛熱 |
|---|---|---|---|
| 水 | 一 | 七九·九加羅 | 五三六·加羅 |
| 水銀 | 〇·三三 | 二·八加羅 | 六二·加羅 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 亞爾科兒 | 〇·六〇 | | 二一〇·加羅 |
| 依的兒 | 〇·五四 | | 九〇·加羅 |
| 本生 | 〇·四二 | 三〇·〇加羅 | 九四·加羅 |
| 二硫化炭素 | 〇·二四 | | 九〇·加羅 |
| 枯魯傾謨 | 〇·二三 | | 五八·加羅 |
| 愛契由添 | | | 九〇·加羅 |
| 醋酸 | 〇·五二 | 四六·加羅 | 九七·加羅 |
| 石炭酸 | | 二五·加羅 | |
| 亞儞利 | 〇·五一 | | 九三·加羅 |
| 託爾而 | 〇·四二 | | 八五·加羅 |
| 亞米阿而 | 〇·六九 | | 一二一·加羅 |
| 倔利設林 | 〇·五七 | 四三·加羅 | |
| 臭素 | 〇·一一 | 一六·加羅 | 四五·加羅 |
| 添比油 | 〇·四三 | | 六八·加羅 |

## 第八表　固體之融解點及線膨脹率表

| 名稱 | 融解點 | 線長率（縱零度至一百度） |
|---|---|---|
| 沃素 | 一百一七四度 | |
| 八面體硫黃 | 一百一十四度 | 〇・〇〇〇〇六四 |
| 金剛石 | | 〇・〇〇〇〇〇一二 |
| 木炭 | | |
| 砒素 | 四百五十度（昇華） | 〇・〇〇〇〇〇五六 |
| 安質母尼 | 四百三十度 | 〇・〇〇〇〇一一 |
| 蒼鉛 | 二百六十五度 | 〇・〇〇〇〇一三 |
| 錫 | 二百三十二度 | 〇・〇〇〇〇二三 |
| 鉛 | 三百二十八度 | 〇・〇〇〇〇二九 |
| 亞米尼莫 | 六百二十五度 | 〇・〇〇〇〇二三 |
| 麻偏涅曳謨 | 七百五十度 | 〇・〇〇〇〇二八 |
| 亞鉛 | 四百二十度 | 〇・〇〇〇〇二九 |
| 加篤米謨 | 三百二十度 | 〇・〇〇〇〇三一 |
| 銅 | 一千零八十度 | 〇・〇〇〇〇一七 |
| 銀 | 九百七十度 | 〇・〇〇〇〇一九 |

| | | |
|---|---|---|
| 金 | 一千零七十度 | ○·○○○○一五 |
| 白金 | 一千七百八十度 | ○·○○○○○九 |
| 依利既讀 | 一千九百五十度 | ○·○○○○○七 |
| 阿斯米讀 | 二千五百度 | ○·○○○○○六 |
| 潑那既讀 | 一千五百度 | ○·○○○○一二 |
| 晒結爾 | 一千四百八十度 | ○·○○○○一三 |
| 箇拔爾篤 | | ○·○○○○一二 |
| 軟鐵 | 一千六百度 | ○·○○○○一二 |
| 剛鐵 | 一千四百度 | ○·○○○○一一 |
| 滿俺 | 比鐵高 | |
| 枯羅謨 | 三千度 | |
| 那篤留謨 | 九十五度六 | ○·○○○○七 |
| 加留謨 | 六十二度 | ○·○○○○八 |
| 眞鍮 | 九百度 | ○·○○○○一九 |
| 洋銀 | | ○·○○○○一九 |
| 布羅 | | ○·○○○○一八 |

| | | |
|---|---|---|
| 水晶 | 與主軸平行 | ○·○○○○○七二 |
| | 與主軸垂直 | ○·○○○○○一三三 |
| 氷 | 零度 | |
| 曹達玻璃 | | ○·○○○○○○九 |
| 加留玻璃 | | ○·○○○○○○八 |
| 夫利脫玻璃 | | |
| 枯那烏玻璃 | | ○·○○○○○○九 |
| 磁器 | | ○·○○○○○一○ |
| 花崗石 | | ○·○○○○○○八 |
| 木材類 | 與纖維平行 | 從○·○○○○○三 |
| | | 至○·○○○○○○九 |

## 第九表　固體之融解熱比熱傳熱率表

| 名稱 | 融解熱 | 比熱(從十五度至一百度) | 傳熱率 |
|---|---|---|---|
| 沃素 | 一一·七加羅 | ○·○五四 | |
| 八面體硫黃 | 九·加羅 | ○·一七五 | |
| 金剛石 | | | |
| 木炭 | | ○·一九 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 砒素 | | ○·○八三 | |
| 安質母尼 | | ○·○五○ | ○·○四 |
| 蒼鉛 | 一二·六加羅 | ○·○三○ | ○·○一 |
| 錫 | 一三·加羅 | ○·○五五 | ○·一五 |
| 鉛 | 六·加羅 | ○·○三一 | ○·○八 |
| 亞米尼莫 | | ○·二二 | ○·三一 |
| 麻偶湼曳謨 | | ○·二五 | ○·三七 |
| 亞鉛 | 二八·加羅 | ○·○九四 | ○·二九 |
| 加篤米莫 | 一三·七加羅 | ○·○五六 | ○·二二 |
| 銅 | | ○·○九三 | ○·九二 |
| 銀 | 二一·加羅 | ○·○五六 | 一·○ |
| 金 | | ○·○三二 | ○·五三 |
| 白金 | 二七·加羅 | ○·○三二 | ○·一 |
| 依利旣謨 | | ○·○三三 | |
| 阿斯米謨 | | ○·○三一 | |
| 潑那旣謨 | | ○·○五九 | |

| | | |
|---|---|---|
| 匿結爾 | ○·一一 | |
| 箇拔爾篤 | ○·一○七 | ○· |
| 軟鉄 | ○·一一三 | ○·一五至○·一八 |
| 剛鉄 | ○·一一七 | ○·○六至○·一二 |
| 滿俺 | ○·一二二 | |
| 枯羅謨 | ○·一 | |
| 那篤留謨 | ○·二九三 | |
| 加留謨 | ○·一七 | |
| 眞鍮 | ○·○九三 | ○·一五至○·三○ |
| 洋銀 | ○·○六五 | ○·○八 |
| 布羅 | ○·一○ | |
| 水晶 | ○·一九○ | |
| 氷　-七九·五加羅 | | ○·○○五 |
| 曹達玻璃<br>加留玻璃<br>夫利脫玻璃 | | 從·○○○五<br>至·○○一八 |

| | |
|---|---|
| 枯那烏玻璃 | |
| 磁器 | |
| 花崗石 | ○・○○○五 |
| 木材類 | 從・○○○○八<br>至・○○○三 |

## 第十表　透光體屈折率表

| 物名 | 屈折率 | 物名 | 屈折率 |
|---|---|---|---|
| 輕枯那烏玻璃 | 一・五一五 | 石膏 | 一・五二三 |
| 重枯那烏玻璃 | 一・六一五 | 氷砂糖 | 一・五六 |
| 輕夫利脫玻璃 | 一・六○九 | 加那達巴沙謨 | 一・五四 |
| 重夫利脫玻璃 | 一・七<br>一・九 | 水銀 | 五・八三 |
| 尋常水晶 | 一・五四四 | 水 | 一・三三 |
| 非常水晶 | 一・五五三 | 亞爾科兒 | 一・三七 |
| 尋常方解石 | 一・六五九 | 依的兒 | 一・三六 |
| 非常方解石 | 一・四八六 | 二硫化炭素 | 一・六三 |
| 金剛石 | 二・五 | 枯魯頗謨 | 一・四五 |
| 氷 | 一・三一 | 本生 | 一・五○ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 岩鹽 | 一·五四四 | 添比油 | 一·四七 |
| 螢石 | 一·四三四 | 濃硫酸 | 一·四三 |
| 黃玉石 | 一·六一四 | | |

## 第十一表　電氣之比抵抗及傳導度表

| 物名 | 比抵抗 | 傳導度 |
|---|---|---|
| 銀 | ○·○一六歐姆 | 五九 |
| 銅 | ○·○一七二歐姆 | 五五 |
| 金 | ○·○二三歐姆 | 四一 |
| 亞鉛 | ○·○六三歐姆 | 一五 |
| 鐵 | ○·○九<br>○·一五歐姆 | 六至一○ |
| 剛鐵 | ○·一五<br>○·五歐姆 | 二至六 |
| 白金 | ○·一四歐姆 | 六·五 |
| 鉛 | ○·二一歐姆 | 四·六 |
| 安質母尼 | ○·四五歐姆 | 二·一 |
| 水銀 | ○·九五八歐姆 | ○·九八四 |

| | | |
|---|---|---|
| 蒼鉛 | 一·二歐姆 | ○·八 |
| 砒素 | | 二·五 |
| 麻倔湟曳謨 | | 二○· |
| 加篤米謨 | | 一三· |
| 潑那契謨 | | 七· |
| 錫 | | 八·八 |
| 曙結爾 | | 八· |
| 滿俺 | | |
| 亞米尼謨 | | 三○· |
| 眞鍮 | ○·○七<br>○·○九歐姆 | 一○·至一四 |
| 洋銀 | ○·二六<br>○·四○歐姆 | 二·四至六 |
| 馬加你 | ○·四三歐姆 | 二 二 |
| 曙格利 | ○·四二歐姆 | 二·三 |
| 可斯他 | ○·五○歐姆 | 一·九 |
| 瓦斯加薄 | 五·○歐姆 | ·○二 |
| 石墨 | | ○·○八至○·○○一 |

如上表之比抵抗爲長一米横斷面一平方耗導線之抵抗當攝氏十八度時之温度傳導度爲各物體在攝氏十八度時當攝氏零度之水銀相比之數

光緒三十三年九月初一日印刷
光緒三十三年臘月初一日發行

定價 每本大洋二元五角



著作者 日本理學士 池田清 近藤清次郎
編譯兼發行者 彭覲圭
校閱者 彭兆龍
發行所 中國各書肆
發行所 日本東京神田區神保町 羣益書社
印刷者 東京市牛込區神樂町一丁目二番地 榎本邦信
印刷所 東京市牛込區神樂町一丁目二番地 翔鸞社井上印刷工場