Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 18

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 18.1. Lucy Sonnenschein befindet sich auf der Zahlengerade in Position 2 und schaut in die positive Richtung. Sie bewegt sich drei Schritte nach vorne (das bezieht sich auf ihre momentane Ausrichtung), sodann sieben Schritte zurück, sie macht sodann eine Halbdrehung, dann geht sie vier Schritte nach vorne, macht wieder eine Halbdrehung, macht einen Salto rückwärts im Stand und geht zwei Schritte zurück. In welcher Position befindet sie sich zum Schluss?

Übungsaufgaben

Gar nicht mehr lange! Wir wünschen schon jetzt frohe Weihnachten!

Aufgabe 18.2. Welche Vorstellungen zu den ganzen Zahlen (einschließlich der Verknüpfungen) haben Sie?

Aufgabe 18.3. Wir betrachten die Tage

$$\ldots \text{ vorvorvorgestern, vorvorgestern, vorgestern, gestern, heute, morgen, übermorgen, überübermorgen, überüberübermorgen}, \ldots$$

als Zahlen und addieren mit ihnen.

(1) Bestimme vorgestern von morgen.
(2) Bestimme vorvorvorgestern von übermorgen.
(3) Bestimme vorvorvorvorgestern von vorvorvorgestern von überüberüberüberübermorgen.
(4) Welchen Tag von überüberüberübermorgen muss ich nehmen, um heute zu erhalten?
(5) Wie bestimmt man den „negativen“ Tag zu einem gegebenen Tag?
(6) Welchen Tag von überüberüberübermorgen muss ich nehmen, um vorvorgestern zu erhalten?
(7) Wie selbstverständlich ist in diesem Modell das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz?

Aufgabe 18.4. Wie zählt man die Jahre in der Geschichte? Warum?

Aufgabe 18.5. Was hat die Temperaturskala mit den ganzen Zahlen zu tun?

Aufgabe 18.6. Soll man eine negative Zahl stets mit einem Minuszeichen als $-x$ schreiben? Oder darf man eine negative Zahl auch mit x bezeichnen?

Aufgabe 18.7. Man mache sich die verschiedenen Rollen des Minuszeichens klar: Benennungszeichen (Teil des Namens der Zahl), Umkehrungszeichen (Negationszeichen), Verknüpfungszeichen (Subtraktionszeichen bzw. bedingtes Subtraktionszeichen in $\mathbb{N}$). Wo könnten prinzipiell Verwechslungen auftreten? Aufgrund von welchen mathematischen Gesetzmäßigkeiten ist diese mehrfache Verwendung des gleichen Zeichens sinnvoll?

Aufgabe 18.8. Es sei N die Nachfolgerabbildung und V die Vorgängerabbildung auf den ganzen Zahlen. Berechne

$$(N \circ V \circ V \circ V \circ N \circ V \circ N \circ N \circ V \circ V \circ V \circ N \circ N \circ V)(3)\,.$$

Aufgabe 18.9.*

Zeige, dass die Nachfolgerabbilung $N\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die folgenden Eigenschaften besitzt.

(1) Die Nachfolgerabbildung stimmt auf $\mathbb{N}$ mit der dortigen Nachfolgerabbildung überein.
(2) Die Nachfolgerabbildung ist bijektiv.
(3) Es ist $N(-a) = -V(a)$ und $V(-b) = -N(b)$ für $a, b \in \mathbb{N}_+$.
(4) Jede ganze Zahl lässt sich ausgehend von 0 durch eine Iteration der Nachfolgerabbildung oder eine Iteration der Vorgängerabbildung erreichen.

Aufgabe 18.10.*

Es sei V die Vorgängerabbildung auf den ganzen Zahlen. Beweise die Gleichheit

$$V^{2a}(a) = -a$$

für $a \in \mathbb{N}$ durch Induktion über a.

In der folgenden Aufgabe verstehen wir zu $a \in \mathbb{Z}$ unter $\mathbb{Z}_{\geq a}$ die Menge aller sukzessiven Nachfolger von a (einschließlich a) und unter $\mathbb{Z}_{\leq a}$ die Menge aller sukzessiven Vorgänger von a. Dies stimmt mit der späteren Definition über die Ordung auf $\mathbb{Z}$ überein.

Aufgabe 18.11. Zeige, dass zu jeder ganzen Zahl a sowohl die Menge $\mathbb{Z}_{\geq a}$ mit der Nachfolgerabbildung als auch die Menge $\mathbb{Z}_{\leq a}$ mit der Vorgängerabbildung die Dedekind-Peano-Axiome erfüllt.

Aufgabe 18.12. Wir betrachten die Menge

$$M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

mit der natürlichen Nachfolgerabbildung N, die wir durch $N(9) = 0$ ergänzen. Vergleiche diese Menge mit den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und der dortigen Nachfolgerabbildung unter den folgenden Aspekten.

(1) Ist N bijektiv?
(2) Was ist die Umkehrabbildung?
(3) Gibt es eine Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow M,$$

die die beiden Nachfolgerabbildungen respektiert? Man denke an ein Zahnrad und eine unendliche Zahngerade.
(4) Gibt es eine Abbildung

$$M \longrightarrow \mathbb{Z},$$

die die beiden Nachfolgerabbildungen respektiert?
(5) Kann man auf M eine Addition einführen?

Aufgabe 18.13. Wir nehmen die Menge $M = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ mit der Nachfolgerabbildung aus Aufgabe 18.12 unendlich oft, und zwar für jede natürliche Zahl i genau einmal, diese Kopie bezeichnen wir mit M_i. Vergleiche die Nachfolgerabbildung auf dieser Gesamtmenge und auf $\mathbb{Z}$. Gibt es eine Addition auf dieser Gesamtmenge?

Aufgabe 18.14. Es seien zwei Haufen H und G an (hinreichend vielen) Äpfeln gegeben. Es werden der Reihe nach 7 Äpfel von H nach G, 13 Äpfel von G nach H, dann 10 Äpfel von G nach H und schließlich 9 Äpfel von H nach G transportiert. Wie viele Äpfel werden insgesamt und in welche Richtung transportiert?

Aufgabe 18.15. Lucy Sonnenschein hat einen Stand auf dem Flohmarkt. Sie verkauft ein altes Kleid für 8 Euro, trinkt einen Kaffee für 2 Euro, verkauft eine alte Schallplatte für 5 Euro, hat Hunger und holt sich eine Schlachtplatte für 7 Euro, verschenkt einen Aschenbecher und kauft sich beim Nachbarstand eine coole Bluse für 3 Euro. Wie sieht ihr finanzielles Gesamtergebnis vom Flohmarkttag aus?

Aufgabe 18.16. Lucy Sonnenschein unternimmt eine Zeitreise. Sie reist zuerst 71 Stunden nach vorne, dann (immer vom jeweiligen erreichten Zeitpunkt aus) 23 Stunden nach vorne, dann 87 Stunden zurück, dann 17 Stunden zurück, dann 10 Stunden nach vorne und dann 13 Stunden zurück.

(1) Wo befindet sie sich am Ende dieser Zeitreise, wenn die Reise selbst keine Zeit verbraucht?
(2) Wo befindet sie sich am Ende dieser Zeitreise, wenn eine Zeitreise um eine Stunde, egal ob in die Zukunft oder in die Vergangenheit, immer eine Minute verbraucht?

Aufgabe 18.17. Ein Elektron e hat eine negative Elementarladung und ein Proton p hat eine positive Elementarladung, die sich gegenseitig neutralisieren. Auf einer bislang ladungstechnisch neutralen Weihnachtskugel landen zuerst 3 Elektronen, dann 5 Protonen, sodann 1 Elektron und schließlich nochmal 2 Elektronen. Durch welchen einfacheren Elementarteilchenflug hätte man die Endladung der Kugel auch erreichen können?

Aufgabe 18.18. Mustafa Müller und Heinz Ngolo tauschen Fußballbildchen aus. Mustafa gibt Heinz vier Bildchen und Heinz gibt Mustafa fünf Bildchen. Daheim merkt Mustafa, dass er jetzt eines doppelt hat und gibt es am Nachmittag zurück. Heinz hat vier neue Bildchen von seiner Oma bekommen, davon gibt er zwei an Mustafa weiter. Der revanchiert sich mit einem Bildchen. Wie viele Bildchen haben sie unter dem Strich ausgetauscht?

Aufgabe 18.19. Gabi Hochster und Heinz Ngolo tauschen Küsse aus. Gabi gibt Heinz drei Küsse, daraufhin gibt Heinz Gabi fünf Küsse, woraufhin Gabi einen Kuss zurückgibt. Wie viele Küsse haben sie unter dem Strich ausgetauscht?

Aufgabe 18.20. Präzisiere an jeder Stelle der Definition der Addition auf $\mathbb{Z}$, ob $+$ die Addition in $\mathbb{N}$ oder in $\mathbb{Z}$ bezeichnet und ob $-$ die Differenz auf $\mathbb{N}$ oder die Negation bezeichnet.

Aufgabe 18.21. Es bezeichne N die Nachfolgerabbildung und V die Vorgängerabbildung auf den ganzen Zahlen. Begründe die *Umlegungsregel*

$$x + y \,=\, N(x) + V(y)$$

unter Bezug auf das Assoziativgesetz der Addition.

Aufgabe 18.22. Begründe, dass man allein mit Hilfe der Umlegungsregel

$$x + y \,=\, N(x) + V(y)$$

jede Addition innerhalb der ganzen Zahlen ausrechnen kann. Führe dies für $3 + -(5)$ durch.

Aufgabe 18.23. Beweise die übrigen Fälle für die Assoziativität der Addition in $\mathbb{Z}$ wie im Beweis zu Lemma 18.10.

Aufgabe 18.24. Zeige, dass zu gegebenen ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ die Gleichung

$$a + x \,=\, b$$

eine eindeutige Lösung, nämlich $b - a$, besitzt.

Aufgabe 18.25. Zeige, dass für jede ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ die Additionsabbildung mit a, also

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ x \longmapsto x + a,$$

bijektiv ist. Was ist die Umkehrabbildung?

Aufgabe 18.26. Betrachte die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Differenz als Verknüpfung, also die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ (a, b) \longmapsto a - b.$$

Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element? Ist diese Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es zu jedem Element ein inverses Element?

Aufgabe 18.27.*

Berechne

$$----------------7\cdot-------11\,.$$

Aufgabe 18.28. Präzisiere an jeder Stelle der Definition der Multiplikation auf $\mathbb{Z}$, ob $\cdot$ die Multiplikation in $\mathbb{N}$ oder in $\mathbb{Z}$ bezeichnet.

Aufgabe 18.29. Beweise die Assoziativität der Multiplikation in $\mathbb{Z}$. Wie kann man die Anzahl der möglichen Fälle reduzieren?

Aufgabe 18.30. Heinz Ngolo multipliziert eine positive Zahl mit einer negativen Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer negativen Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer negativen Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer positiven Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer negativen Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer negativen Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer positiven Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer negativen Zahl. Ist das Ergebnis positiv oder negativ?

Aufgabe 18.31. Berechne

$$(-1)^{934050663653}\,.$$

Aufgabe 18.32.*

Zeige, dass für zwei von 0 verschiedene ganze Zahlen x, y auch das Produkt $x \cdot y$ von 0 verschieden ist.

Aufgabe 18.33. Erstelle eine Verknüpfungstabelle für die Multiplikation der ganzen Zahlen, wobei aber nur die drei Symbole $0, p, n$ (für positiv und negativ) vorkommen sollen. Ist eine solche Verknüpfungstabelle wohldefiniert und sinnvoll? Ist diese Verknüpfung assoziativ, kommutativ, besitzt sie ein neutrales Element?

Ist eine entsprechende Verknüpfungstabelle für die Addition sinnvoll?

Aufgabe 18.34. Was kommt heraus, wenn man -7 „positiv nimmt“ oder von -7 „das Positive nimmt“?

Aufgabe 18.35. Beweise die folgenden Eigenschaften für den Betrag ganzer Zahlen.

(1) $|x| \geq 0$.
(2) $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.
(3) $|x| = |y|$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist.
(4) $|y - x| = |x - y|$.
(5) $|xy| = |x|\,|y|$.
(6) Es ist $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung für den Betrag*).

Die Weihnachtsaufgabe für die ganze Familie

AUFGABE 18.36. Welches Bildungsgesetz liegt der Folge

$$1,\ 11,\ 21,\ 1211,\ 111221,\ 312211,\ ...$$

zugrunde?

(Es wird behauptet, dass diese Aufgabe für Grundschulkinder sehr einfach und für Mathematiker sehr schwierig ist.)

Eine der Aufgaben zum Abgeben verwendet den folgenden Begriff.

Es sei M eine Menge und

$$f\colon M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Ein Element $x \in M$ mit $f(x) = x$ heißt *Fixpunkt* der Abbildung.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 18.37. (2 Punkte)

Die Familie Müller hat im Monat Dezember folgende Einnahmen und Ausgaben (alles in Euro). Gehälter: 4847, Lebensmittelkosten: 1250, Kosten für das Silvesterfeuerwerk: 101, Schuldentilgung: 705, Zinsen: 280, Geschenke kaufen: 325, Lottogewinn: 253, Unterstützung an die Oma: 300, Taschengeld für die Kinder: 40, Spende an die Bahnhofsmission: 80, auf der Straße gefunden: 20, Heizungskosten: 531, Fortbildungsseminar: 345, Ausflug an die Nordsee: 470, Wasser- und Strom: 360, Opernbesuch: 108, Erlös durch den Verkauf der Fußballbildchen von Mustafa: 35.

Wie hoch sind die Gesamteinnahmen und wie hoch sind die Gesamtausgaben der Familie im Dezember? Wie sieht die Gesamtbilanz für den Monat Dezember aus?

Aufgabe 18.38. (3 Punkte)

Die Fahrradtournee „Rund um die Nordseedünen“ besteht aus sechs Etappen. Auch in diesem Jahr kommen nur drei Fahrer für den Sieg in Frage: Albert Albrecht, Bruno Rotato und Cico Ferrari. Bei der ersten Etappe fährt Albert einen Vorsprung von 13 Sekunden auf Bruno und von 16 Sekunden auf Cico heraus. Bei der zweiten Etappe landet Cico an erster Stelle mit einem Vorsprung von 19 Sekunden auf die zeitgleichen Albert und Bruno. Das dritte Rennen gewinnt Bruno, Cico kommt 8 Sekunden danach ins Ziel mit einem Vorsprung von 3 Sekunden auf Albrecht. Bei der vierten Etappe verliert Bruno 1 Sekunde auf Cico und 3 Sekunden auf Albrecht. Die fünfte Etappe gewinnen Albrecht und Cico zeitgleich mit einem Vorsprung von 4 Sekunden auf Bruno. Bei der letzten Etappe verliert Albrecht 11 Sekunden gegenüber Cico, dafür gewinnt er 7 Sekunden gegenüber Bruno.

Welche Gesamtzeitabstände bestehen am Ende der Tournee zwischen den drei Fahrern?

Aufgabe 18.39. (4 Punkte)

Ein Apotheker hat eine zweischalige Waage zur Verfügung und die folgenden Gewichte: Zwei 1-Gramm-Gewichte, ein 5-Gramm-Gewicht, zwei 10-Gramm-Gewichte, ein 50-Gramm-Gewicht, zwei 100-Gramm-Gewichte, ein 500-Gramm-Gewicht, u.s.w. Zeige, dass er mit diesen Gewichten jede Menge (in vollen Gramm) abwiegen kann.

Aufgabe 18.40. (2 Punkte)

Zeige, dass die Multiplikation mit -1 auf den ganzen Zahlen, also die Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ g \longmapsto -g,$$

bijektiv ist.

Aufgabe 18.41. (4 Punkte)

Unter welchen Bedingungen gilt für ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Gleichheit

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| ?$$

Aufgabe 18.42. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

die dem Bildungsgesetz aus Aufgabe 18.36 entspricht (die natürlichen Zahlen sind dabei als endliche Ziffernfolgen im Zehnersystem zu verstehen).

(1) Ist f wachsend?
(2) Ist f surjektiv?
(3) Ist f injektiv?
(4) Besitzt f einen Fixpunkt?

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Diciembre.jpg , Autor = Benutzer Lumentzaspi auf Commons, Lizenz = PD 1

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 11

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 11