MÉMOIRES COURONNÉS

ET

AUTRES MÉMOIRES

PUBLIÉS PAR

L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

COLLECTION IN-8°. — TOME XXV.

BRUXELLES.

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE.

Octobre 1875.

MÉMOIRES COURONNÉS

ET

AUTRES MÉMOIRES.

MÉMOIRES COURONNÉS

ET

AUTRES MÉMOIRES

PUBLIÉS PAR

L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

COLLECTION IN-8°. — TOME XXV.

BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE.

Octobre 1875.

(I)

THÉORIE

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU

PREMIER ORDRE;

PAR

M. PAUL MANSION,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND.

Ingressum instruas, progressum dirigas, egressum compleas! St THOMAS.

(Mémoire couronné par la classe des sciences, le 15 décembre 1873.)

AVERTISSEMENT.

I. OBJET DE CE MÉMOIRE.

Le présent mémoire est un essai de réponse à la question mise au concours par l'Académie en 1870 et en 1872, et relative à la théorie des équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

MM. Imschenetsky et Graindorge ont publié, l'un et l'autre, sur ce sujet, d'excellentes monographies, qui nous ont permis de nous borner, dans ce mémoire, à la théorie des équations du premier ordre. Leurs écrits, en effet, contiennent un bon résumé des travaux des géomètres sur les équations du second ordre, à part les études récentes de MM. Darboux et Lie, qui n'ont d'ailleurs été publiées que par fragments.

Les mémoires de MM. Imschenetsky et Graindorge sont incomplets sur la théorie des équations du premier ordre (*). Nous avons donc cru répondre au vœu de l'Académie, en essayant de faire un exposé des principales recherches des mathématiciens sur ce sujet, depuis Lagrange jusqu'à MM. Lie et Mayer.

Nous avons fait précéder notre travail d'une explication détaillée du plan que nous avons suivi.

[Conformément à l'avis des commissaires, chargés de juger notre mémoire, nous y avons fait un grand nombre de corrections et d'additions, qui sont placées entre crochets, ou signalées dans des notes spéciales.]

II. LISTE DES OUVRAGES ET MÉMOIRES CITÉS LE PLUS FRÉQUEMMENT (**).

A. *Traités de calcul intégral et monographies sur les équations aux dérivées partielles.*

I. Lacroix. Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. Seconde édition. Tome II, 1814, pp. 527-604, 672-690; t. III, 1819, pp. 702-708. Paris, veuve Courcier.

II. Boole. A Treatise on differential Equations. Second edition. Cambridge and London, Macmillan and C°, 1865. Un volume de 496 pages, avec un Supplément de 235 pages.

(*) Le mémoire de M. Graindorge contient, outre la théorie des équations du second ordre, les matières exposées dans nos §§ 1 (en partie), 5, 6, 16, 17, 18, 19, 20, 21. Celui de M. Imschenetsky contient, de plus, nos §§ 9 et 29, et un chapitre sur les équations canoniques de la dynamique. M. Graindorge a aussi publié à part un résumé des travaux des géomètres sur l'intégration des équations de la mécanique.

(**) Nous n'indiquons ici que les écrits cités assez souvent.

III. Serret. Cours de calcul différentiel et intégral. Tome II : Calcul intégral. Paris, Gauthier-Villars, 1868.

IV. Imschenetsky : 1° Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, traduit du russe par Houel. Paris, Gauthier-Villars; Greifswald, Koch. 1869. Ce travail a paru d'abord dans les *Archives de Grunert*, t. L, pp. 278-474.

2° Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes, traduit du russe par Houel. Paris, Gauthier-Villars; Greifswald, Koch. Ce travail a paru d'abord dans les *Archives de Grunert*, 1872, t. LIV, pp. 209-360.

V. Graindorge. Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres. Liége, Decq; Paris, Gauthier-Villars, 1872 (Extrait des *Mémoires de la Société royale des sciences de Liége*, 2me série, t. V).

B. *Mémoires de Lagrange et de Jacobi.*

I. Lagrange. 1. Sur l'intégration des équations à différences partielles du premier ordre (*Mémoires de Berlin*, 1772, p. 353; *Œuvres*, t. III, pp. 549-577. Paris, 1869).

2. Sur les intégrales particulières des équations différentielles (*Mémoires de Berlin*, 1774, p. 239; *OEuvres*, t. IV, pp. 5-108. Paris, 1869). Nous ne citons qu'une partie de l'article V : Des intégrales particulières des équations aux différences partielles, avec des remarques nouvelles sur la nature et sur l'intégration de ces sortes d'équations, pp. 62-89.

3. Sur différentes questions d'analyse relatives à la théorie des solutions particulières (*Mémoires de Berlin*, 1779, pp. 121-160; *OEuvres*, t. IV, pp. 585-634). Nous ne citons que l'article V : Sur

l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre (*Mémoires de Berlin*, 1773, pp. 152-160; *OEuvres*, t. IV, pp. 624-634).

4. Méthode générale pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre, lorsque ces différences ne sont que linéaires (*Mémoires de Berlin*, 1785, pp. 174-190).

5. Leçons sur le calcul des fonctions. Nouvelle édition. Paris, Courcier, 1806. Leçon 20, pp. 353-400.

6. Théorie des fonctions analytiques. Nouvelle édition. Paris, Courcier, 1813. Chap. XVI, pp. 152-164.

II. Jacobi. 1. Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (*Journal de Crelle*, t. II, pp. 317-329).

2. Ueber die Pfaffsche Methode, eine gewöhnliche lineäre Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integriren (*Ibid.*, pp. 347-357).

3. Ueber die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einziges Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (*Ibid.*, t. XVII, pp. 97-162).

Ce mémoire a été traduit en français : « Sur la réduction de l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre entre un nombre quelconque de variables à l'intégration d'un seul système d'équations différentielles ordinaires » (*Journal de Liouville*, t. III, pp. 60-96; 161-201).

Nous citons la traduction française, en indiquant en même temps les paragraphes.

4. Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium systematatis earumque connexione cum aequationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis (*Journal de Crelle*, t. XXIII, pp. 1-104).

5. Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi (*Ibid.*, t. LX, pp. 1-181; reproduit dans le t. III des *OEuvres* de Jacobi, pp. 129-309). Nous citons les paragraphes.

6. Vorlesungen über Dynamik von C.-G.-J. Jacobi nebst fünf hinterlassenen Abhandlungen derselben, herausgegeben von A. Clebsch. Berlin, Reimer, 1866.

III. NOTATIONS ET CONVENTIONS SPÉCIALES.

I. Lorsqu'une variable z est fonction explicite ou implicite des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots$ nous désignons ses dérivées par rapport à x_1, x_2, etc., par les notations

$$\frac{dz}{dx_1},\ \frac{dz}{dx_2},\ldots \tag{1}$$

contrairement à l'usage de Jacobi, qui emploie, dans ce cas, les notations

$$\frac{\partial z}{\partial x_1},\ \frac{\partial z}{\partial x_2},\ldots$$

et réserve les d pour les dérivées des fonctions d'une seule variable.

Nous employons les notations

$$\frac{\delta \varphi}{\delta x_1},\ \frac{\delta \varphi}{\delta x_2},\ldots \tag{2}$$

pour désigner les dérivées d'une fonction *explicite* $\varphi(x_1, x_2, \ldots)$ de $x_1, x_2, \ldots$ *par rapport à la lettre* x_1, *à la lettre* x_2, etc., sans nous inquiéter si $x_1, x_2, \ldots$ sont indépendantes l'une de l'autre ou non. Les deux notations peuvent être équivalentes dans certains cas; la notation (1) sert à désigner une expression qui ne dépend pas de la *forme* des relations qui existent entre $z, x_1, x_2, \ldots$; c'est l'inverse pour la notation (2).

II. La notation

$$D\frac{f_1, \ldots, f_n}{x_1, \ldots, x_n}$$

représente le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1}, \ldots, \frac{df_n}{dx_1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{df_1}{dx_n}, \ldots, \frac{df_n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

Il sera facile de discerner les deux cas, dans les applications que nous ferons de cette notation.

III. Pour la commodité du langage, nous avons fait de *dériver* un verbe actif, ce qui est conforme à l'étymologie, sinon à l'usage.

PLAN DU MÉMOIRE ET NOTICE HISTORIQUE.

Ce mémoire contient le résumé des recherches de Lagrange, Pfaff, Jacobi, Bour, Weiler, Clebsch, Korkine, Boole, Mayer, Cauchy, Serret et Lie, sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Nous avons groupé les travaux de ces géomètres dans les subdivisions suivantes :

Introduction. Génération des équations aux dérivées partielles du premier ordre (§§ 1-4).

Livre I. Méthode de Lagrange et de Pfaff (§§ 5-15).

Livre II. Méthode de Jacobi (§§ 16-27).

Livre III. Méthode de Cauchy et de Lie (§§ 28-32).

Appendice. Méthode de Lie comme synthèse des idées antérieures (§ 33).

Cet arrangement est rigoureusement didactique, c'est-à-dire, que du commencement à la fin nous pénétrons de plus en plus profondément dans notre sujet. Il est en même temps historique dans ses grandes lignes, à une exception près : la méthode de Cauchy est antérieure de beaucoup à tous les travaux résumés dans notre livre deuxième. Nous avons été amenés à placer la méthode de Cauchy à la fin de notre mémoire, avec celle de Lie, parce que cette dernière est la suite naturelle de la première, et que, réunies, elles constituent une étude plus approfondie de la question de l'intégration des équations aux dérivées partielles que les méthodes de Lagrange, de Pfaff, de Jacobi et de Bour.

Dans notre Introduction, nous donnons d'abord, d'après Lagrange (1772 et 1774) et Lie (1872), la définition du problème de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Nous indiquons ensuite, d'après Jacobi, deux moyens généraux et très-simples de faire disparaître la variable indépendante des équations en question. Nous montrons, contrairement à l'avis de Bertrand et d'autres géomètres, que le second procédé de transformation de Jacobi n'est pas illusoire (§ 1). Les deux paragraphes suivants contiennent la théorie des équations aux dérivées partielles, à 3 ou à $(n+1)$ variables, telle que l'a découverte Lagrange en 1774, au moyen de sa féconde méthode de la variation des constantes arbitraires. Nous avons ajouté toutefois à l'exposition de Lagrange diverses remarques empruntées à Jacobi et une méthode très-simple de génération des équations simultanées. Le dernier paragraphe est consacré aux vues de Lie sur le sujet traité dans les numéros précédents et à l'explication du paradoxe relatif aux constantes supplémentaires.

Le livre premier contient l'analyse des travaux de Lagrange et de Pfaff. Nous avons exposé, avec prédilection, ces recherches déjà anciennes, d'abord parce qu'elles contiennent le germe de maintes découvertes ultérieures, ensuite parce qu'elles sont susceptibles d'une foule d'applications que l'on traite plus simplement, par ces méthodes, que par les méthodes plus savantes de Jacobi ou de Cauchy.

Le premier chapitre traite des équations linéaires, dont Lagrange a trouvé la théorie en 1779 et en 1785. Notre exposition ne diffère de celle de nos devanciers qu'en ce que nous employons davantage la théorie des déterminants fonctionnels. Dans le dernier paragraphe, nous donnons l'extension de la théorie de Lagrange faite par Jacobi, en 1827. Il est assez étonnant que ces recherches du géomètre de Berlin soient passées sous silence dans tous les traités, et même dans les mémoires récents de Graindorge et Imschenetsky, car seules, elles font comprendre l'étroite connexion qui existe entre les équations aux dérivées partielles et les systèmes d'équations différentielles du premier ordre (voir le n° 32). En passant, nous avons fait connaître sous quel point de vue Lie considère les équations linéaires (n° 25).

Le second chapitre contient l'analyse des travaux de Lagrange sur les équations non linéaires. C'est en 1772 que le géomètre de Turin trouva le moyen de ramener l'intégration des équations non linéaires à trois variables à celle des équations linéaires à quatre variables. Il revint sur le même sujet en 1774, pour faire connaître les diverses intégrales des équations aux dérivées partielles, et en 1806, pour expliquer un singulier paradoxe que présente la théorie de l'intégrale générale. Nous faisons connaître la méthode de Lagrange sous ses diverses formes. En premier lieu, le grand géomètre observe qu'intégrer l'équation

$$q = \varkappa(x, y, z, p),$$

c'est trouver une valeur de p, telle que

$$dz = pdx + \varkappa dy$$

soit intégrable. Ensuite, il indique le moyen général pour trouver une valeur de p avec une constante arbitraire, ce qui est le germe de la *méthode de Jacobi*. Enfin, il montre comment on peut déduire la valeur la plus générale de z, de la valeur la plus générale de p, ce qui est le germe de la *méthode de Pfaff*.

Jacobi, en effet, en appliquant la méthode de Lagrange, sous sa dernière forme, aux équations à n variables indépendantes, a été amené, en 1827, à refaire en sens inverse tous les calculs de Pfaff. Nous exposons ce curieux travail de Jacobi dans notre chapitre III. Le géomètre de Berlin ramène l'intégration d'une équation non linéaire à celle d'un système d'équations simultanées dont la solution est plus générale que celle de l'équation donnée. Pour particulariser cette solution et en déduire l'intégrale cherchée, il est forcé de faire un changement de variables : $(2n - 1)$ variables $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}$ sont remplacées par les constantes de l'intégration des équations simultanées auxiliaires, et la question se ramène dès lors à l'intégration d'une équation différentielle totale à $(2n - 1)$ variables.

Pfaff, dès 1814, avait suivi précisément une route inverse, comme nous le montrons dans le chapitre suivant. Pour intégrer l'équation

$$p_n = \varkappa(z, x_1, .., x_n, p_1, ..., p_{n-1})$$

il considère l'équation différentielle totale

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_{n-1} dx_{n-1} + \varkappa dx_n$$

à $2n$ variables, $z, x_1, ..., x_n, p_1, ..., p_{n-1}$, et la transforme en une autre de même forme à $(2n-1)$ variables. C'est précisément celle que Jacobi a trouvée en généralisant les dernières recherches de Lagrange, et Pfaff y arrive en intégrant le même système d'équations que Jacobi. Les deux méthodes sont donc identiques, sauf que l'une est, plus clairement que l'autre, la généralisation de la méthode de Lagrange, et que Pfaff traite, en outre, le problème général de l'intégration des équations différentielles totales, qui porte son nom. Dans notre exposition des travaux de Pfaff, nous nous aidons de divers écrits de Gauss, de Jacobi et de Cayley. Le dernier paragraphe du chapitre IV contient, outre le problème inverse de Pfaff, la simplification introduite dans toute cette théorie, par l'emploi des valeurs initiales des variables comme constantes arbitraires. Le problème général de Pfaff conduit à intégrer n systèmes d'équations simultanées dont chacun ne peut être formé qu'après l'intégration complète de tous les précédents. Jacobi, en 1836, profitant d'une idée de Hamilton, montra que l'on peut former immédiatement ces n systèmes, si l'on prend, comme nous venons de le dire, les valeurs initiales des variables pour constantes arbitraires; de plus, s'il s'agit de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles, il n'y a plus qu'un système à intégrer. Cauchy, longtemps auparavant, en 1818, était arrivé à ce dernier résultat, en employant aussi les valeurs initiales des variables comme constantes. C'est à lui, d'ailleurs, qu'est due l'introduction de cette idée dans la science, mais Jacobi semble avoir ignoré les travaux de Cauchy.

Tel est le cycle des recherches exposées dans notre livre premier. Nous avons joint à chaque théorie les applications que l'on rencontre ordinairement dans les traités, outre celles qui se trouvent dans les mémoires de Lagrange. De plus, nous avons donné dans un paragraphe spécial l'intégration d'une équation très-remarquable, due à Schläfli, et publiée par lui en 1868.

Le livre second est consacré à la méthode de Jacobi et de Bour, aux perfectionnements de cette méthode dus à Weiler et à Clebsch, enfin aux méthodes de Korkine, de Boole et de Mayer qui s'y rattachent de très-près.

La *Nova methodus* de Jacobi a été trouvée par lui en 1838 et publiée par Clebsch en 1862. Nous la faisons connaître dans nos deux premiers chapitres. Notre exposition ne diffère de celle de Graindorge et Imschenetsky qu'en ce que nous avons réuni dans un chapitre spécial, le premier, tout ce qui se rapporte aux conditions d'intégrabilité. En nous éloignant un peu de nos prédécesseurs et de Jacobi sur ce point, on trouvera peut-être que nous avons abusé des notations symboliques. Toutefois, le lecteur qui se sera familiarisé avec ces notations reconnaîtra que, seules, elles peuvent conduire naturellement à la démonstration des principes de la méthode de Jacobi. Dans le chapitre III, nous donnons l'extension de cette méthode aux équations simultanées, due à Bour, en corrigeant la petite erreur qui s'est glissée dans l'exposition de ce dernier et dans celle des auteurs qui l'ont suivi. Cette erreur a été signalée par Mayer, en 1871. Au point de vue historique, il importe de remarquer que les travaux de Bour ne procèdent pas de ceux de Jacobi, qui n'ont été publiés qu'en 1862. Liouville, Bour et Donkin avaient trouvé, vers 1853 et 1854, les théorèmes fondamentaux de la *Nova methodus*, sans avoir connaissance de celle-ci. Dans le chapitre IV, nous reproduisons des calculs d'une admirable élégance, dus à Clebsch, et publiés en 1866, où l'éminent algébriste fait connaître une notable simplification de la méthode de Jacobi, trouvée par Weiler en 1863.

Les chapitres V et VI sont consacrés à des méthodes où l'on procède par changement de variables. Dans la méthode de Korkine (1868), qui s'applique aux équations simultanées non linéaires, on dispose de la fonction arbitraire, qui entre dans l'intégrale générale de l'une des équations données, de manière à satisfaire aux autres équations; on transforme ainsi le système en un autre qui contient une équation et une variable de moins. Les calculs auxquels nous avons été conduit pour démontrer les principes de cette méthode, auraient été extrêmement longs, si nous n'avions largement employé la théorie des déterminants. La méthode de Boole (1863), qui s'applique seulement aux équations linéaires, procède à peu près comme celle de Korkine. Elle est exposée dans le dernier paragraphe du chapitre V. La méthode de Mayer (1872), qui vient ensuite, s'applique aussi aux équations linéaires, dont elle ramène l'intégration à celle de certains systèmes d'équations différentielles totales. Chaque fois que l'on parvient à intégrer une équation de l'un de ces systèmes, on le transforme en un autre système contenant une équation et une variable de moins. Les nouvelles variables sont les valeurs initiales des variables primitives. En outre, au moyen d'une transformation de variables d'un genre tout différent, on peut faire en sorte de n'avoir à considérer qu'un seul système. Quand il s'agit des équations linéaires auxquelles conduit la méthode de Jacobi, un théorème de Mayer, analogue à celui de Poisson et Jacobi, dont il est un corollaire, introduit de nouvelles simplifications.

Les méthodes de Jacobi, de Weiler et de Mayer, conduisent à chercher *une* intégrale de systèmes de $2(n-1)$, $2(n-2)$, ..., 2 équations différentielles ordinaires, ces systèmes étant respectivement pour les trois méthodes, au nombre de :

$$\begin{array}{lll} 1, 2, 3, \ldots & (n-2), & (n-1), \\ 1, 2, 2, \ldots & 2, & 2, \\ 1, 1, 1, \ldots & 1, & 1. \end{array}$$

Les équations sont supposées ne pas contenir explicitement la variable dépendante. La méthode de Lie, dont nous parlerons plus bas, exige précisément le même nombre d'intégrations que celle de Mayer.

Le livre troisième contient d'abord l'exposé de la méthode de Cauchy. L'illustre géomètre l'a trouvée dès 1818, en partant de deux idées principales; l'une est le changement de variables, qu'il semble emprunter à Ampère, plutôt qu'à Lagrange ou à Pfaff, car il paraît avoir ignoré les recherches de celui-ci; l'autre est l'introduction immédiate dans le calcul des valeurs initiales des variables, comme on le fait dans la théorie des intégrales définies. Si les recherches de Cauchy n'étaient antérieures à celles de Jacobi sur la méthode de Pfaff, on les prendrait pour une exposition simplifiée de tous les travaux analysés dans notre livre premier, y compris la théorie des équations linéaires de Lagrange. Quand il s'agit de trouver les intégrales de ces équations, supposées à trois variables, Lagrange et Monge cherchent d'abord les courbes qui peuvent engendrer les surfaces représentées par les intégrales. Une idée analogue donne à Cauchy les courbes ou variétés à une dimension, appelées caractéristiques par Lie, qui engendrent, pour ainsi dire, l'intégrale des équations non linéaires. Pfaff et Jacobi étaient forcés, dans la suite de leurs calculs, d'égaler à des constantes n de leurs $(2n - 1)$ variables auxiliaires. Cauchy, dès le début, ne prend que $(n - 1)$ variables auxiliaires, et il suppose immédiatement que ce sont les valeurs initiales des anciennes variables, ce qui le dispense du circuit par lequel Jacobi est arrivé, plus tard, au même résultat. Cauchy a donné une forme plus générale à sa méthode, en 1841; les valeurs initiales des variables peuvent être à volonté de nouvelles variables ou des constantes d'intégration. C'est ce travail de 1841, auquel on n'a pas accordé suffisamment d'attention, qui est la base de notre exposition. Nous avons pu, grâce à lui, donner, avec une entière rigueur, la théorie de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles, dans les cas les plus singuliers, par exemple, dans le cas des équations semi-linéaires de Lie (1872), rencontré incidemment par Serret en 1861; l'intégrale de ces équations est donnée par m relations entre $(n + 1)$ variables et n constantes arbitraires. Mayer a montré, en 1871, que la méthode de Pfaff, modifiée par Jacobi, ne donne jamais l'intégrale complète des équations homogènes par rapport aux quantités p; il en est de même de la méthode primitive de Cauchy. Mais quand on laisse à cette méthode toute son élasticité, si j'ose ainsi dire, elle conduit, sans calcul, aux modifications de la méthode de Pfaff et Jacobi, proposées par Mayer.

La méthode générale de Cauchy se prête très-bien aussi à une exposition rigoureuse des recherches de Serret (1861), relatives au cas où la méthode de Cauchy *semble* en défaut. Nous donnons ces recherches dans le chapitre II.

Le chapitre suivant contient, d'après Mayer, un exposé de la méthode de Lie (1872) considérée comme une extension de la méthode de Cauchy. Dans cette méthode, on ramène l'intégration de $(m + 1)$ équations à $(n + m)$ variables indépendantes à celles d'une équation unique contenant n variables indépendantes, soit en cherchant une intégrale de m équations, soit après une simple transformation de variables. Dans ce dernier cas, on voit clairement que la méthode de Lie est la suite naturelle de celle de Cauchy. Combinée avec celle de Jacobi, elle s'applique à une seule équation à $(n + 1)$ variables, surtout dans les cas les plus défavorables.

Enfin, dans un court appendice, nous donnons, au moyen des idées de Lie lui-même, un aperçu synthétique des méthodes principales, qui permet au lecteur d'entrevoir leur fusion prochaine, entre les mains du géomètre norwégien.

THÉORIE

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU PREMIER ORDRE.

INTRODUCTION.

GÉNÉRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

§ 1er. ***Définition des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Moyen d'en faire disparaître la variable dépendante. Interprétation géométrique de Lie.***

1. *Définition de Lagrange.* Une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$f(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

est une relation entre une variable dépendante z, n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et les dérivées premières

$$p_1 = \frac{dz}{dx_1}, \; p_2 = \frac{dz}{dx_2}, \ldots, p_n = \frac{dz}{dx_n},$$

de z par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Elle est dite *linéaire,* si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ n'y entrent qu'au premier degré.

Intégrer l'équation (1), c'est trouver toutes les relations entre

$z, x_1, x_2, \ldots, x_n$, telles que les valeurs de $z, p_1, p_2, \ldots, p_n$ que l'on en déduit, rendent cette équation (1) identique.

Plusieurs équations de même forme que l'équation (1) forment un système simultané d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, soit qu'il y entre une seule fonction inconnue z et ses dérivées, ou qu'il y en ait plusieurs. Les géomètres s'étant presque exclusivement occupés du premier de ces deux cas, nous nous bornerons ici à l'étude des équations simultanées qui ne contiennent qu'une variable dépendante.

Intégrer un système d'équations simultanées analogues à l'équation (1), c'est encore trouver toutes les relations entre $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$, telles que les valeurs de $z, p_1, p_2, \ldots, p_n$ que l'on en déduit, rendent ces équations identiques.

2. *Première méthode de transformation.* Qu'il s'agisse d'une équation unique, ou d'un système, il est souvent utile de transformer les relations données en d'autres qui contiennent une variable indépendante de plus, mais où la nouvelle variable dépendante n'entre que par ses dérivées partielles. Jacobi a donné, pour atteindre ce but, deux méthodes de transformation que nous allons faire connaître, en nous bornant au cas d'une équation unique (*).

Soit une équation aux dérivées partielles :

$$f(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

et

$$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

(*) La première méthode se trouve dans le mémoire de Jacobi, intitulé : *Dilucidationes, etc.* (Journal de Crelle, t. XXIII, pp. 18-20); l'autre, dans sa *Nova methodus*, § 1, et dans les *Vorlesungen*, leçon 31, p. 237. Cette seconde méthode est beaucoup moins pratique que la première, mais elle n'est pas illusoire, comme l'ont prétendu Boole, *On the differential equations of dynamics* (Philosophical Transactions, 1863, pp. 485-501), p. 489, Bertrand, dans ses leçons au Collége de France, en 1852, 1855, 1868 (Graindorge, *Mémoire*, etc., p. 16, note), et, d'après lui, Imschenetsky, p. 43, Graindorge, p. 16, et Mayer (Mathematische Annalen, t. III, p. 437). Ces géomètres ont attribué à Jacobi une erreur qu'il n'a pas faite, celle de vouloir éliminer deux quantités y et t entre deux équations. *Jacobi war doch nicht so kurzsichtig*, lisait Clebsch à propos de cette prétendue erreur du grand géomètre.

une intégrale de cette équation. On aura :

$$p_1 = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, p_2 = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \ldots, p_n = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), il viendra :

$$f\left(z, x_1, \ldots, x_n, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \ldots, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

L'équation obtenue au moyen de celle-ci, en changeant partout ∂ en d,

$$f\left(z, x_1, \ldots, x_n, -\frac{\frac{dF}{dx_1}}{\frac{dF}{dz}}, \ldots, -\frac{\frac{dF}{dx_n}}{\frac{dF}{dz}}\right) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

est la transformée que nous cherchons. C'est une équation aux dérivées partielles entre une variable dépendante F et les variables indépendantes z, $x_1, \ldots, x_n$, dont l'intégration donne immédiatement celle de l'équation (1), comme nous allons le montrer.

Soit
$$\varphi(F, z, x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

une solution quelconque de l'équation (4). On aura :

$$\frac{dF}{dz} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\frac{\partial \varphi}{\partial F}}, \frac{dF}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial F}}, \ldots, \frac{dF}{dx_n} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}}{\frac{\partial \varphi}{\partial F}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

et, en substituant dans (4),

$$f\left(z, x_1, \ldots, x_n, -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}, -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}, \ldots -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}\right) = 0. \quad . \quad . \quad (7)$$

Cette équation (7) ne contient pas de dérivée par rapport à F. En la comparant à l'équation (1), on voit immédiatement que l'équation (5) est une solution de (1) pourvu que l'on y regarde F comme une constante (*).

L'équation transformée (4) est *homogène* par rapport aux dérivées de F. Comme on le verra plus loin, les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles ne s'appliquent pas toujours directement à cette sorte d'équations. C'est là, sans doute, la raison qui a conduit Jacobi à employer une autre méthode de transformation.

3. *Seconde méthode de transformation.* Posons

$$y = zt, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

et *supposons* z *indépendant de* t, de sorte que

$$\frac{dz}{dt} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

On tire de (8) :

$$\frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dy}{dx_1}\frac{1}{t} = p_1, \ldots, \frac{dy}{dx_n}\frac{1}{t} = p_n \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Au moyen de ces valeurs (10), l'équation (1) devient

$$f\left(\frac{dy}{dt}, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{dy}{dx_1}\frac{1}{t}, \frac{dy}{dx_2}\frac{1}{t}, \ldots, \frac{dy}{dx_n}\frac{1}{t}\right) = 0, \quad \ldots \quad (11)$$

qui ne contient plus explicitement y, mais où entre une variable t de plus.

Soit

$$F(y, t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

une intégrale quelconque de cette transformée (11). En général, comme l'a remarqué Bertrand, il ne suffira pas de remplacer dans cette équation (12), y par zt pour que l'on ait une solution

$$F(zt, t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

(*) Comme on le voit, il est inutile de supposer l'équation (5) résolue par rapport à F, comme l'ont fait Imschenetsky, p. 44, et Graindorge, p. 17, pour démontrer le théorème dont il s'agit dans ce numéro.

de l'équation (1) d'où t disparaisse de lui-même. Mais on ne peut pas conclure de là que la seconde méthode de transformation de Jacobi soit, en général, illusoire.

L'équation (13) est une intégrale, non de l'équation (1), mais de l'équation

$$f\left(z + t\frac{dz}{dt}, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n\right) = 0, \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

où z est regardé comme une fonction de t, $x_1, \ldots x_n$. Quand on pose dans celle-ci $y = zt$, z *dépendant de* t, on est conduit à la transformée (11), et réciproquement de l'équation (11), on repassera à l'équation (14), en supposant uniquement $y = zt$. Ainsi, l'équation (13) est une solution de l'équation (14), parce que (12) est une solution de (11).

Mais pour repasser de l'équation (11) à l'équation (1), il ne suffit pas de supposer $y = zt$, il faut aussi tenir compte de l'équation (9), qui exprime que z est indépendant de t. Par conséquent, on trouvera une intégrale de (1), au moyen de (13), en éliminant t entre cette relation et celle-ci,

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y} z + \frac{\partial F}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial y} t} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

qui est équivalente à (9) et où y est supposé remplacé par zt. Autrement dit encore, on trouvera une intégrale de (1), en éliminant y et t entre les équations (8), (12), (15).

Remarque. Si l'équation donnée est homogène par rapport aux quantités p, on peut la mettre sous la forme

$$\varphi\left(z, x_1, \ldots, x_n, \frac{p_1}{p_n}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1')$$

La transformée

$$\varphi\left(\frac{dy}{dt}, x_1, \ldots, x_n, \frac{p_1}{p_n}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) = 0$$

ne contient pas explicitement t, ce qui est une nouvelle simplification, comme on le verra plus bas (n° 15).

4. *Définition d'une équation aux dérivées partielles, d'après Lie* (*). Quand on considère une variable x, qui varie de $-\infty$ à $+\infty$, ou, plus généralement, qui prend toutes les valeurs imaginables, on dit qu'elle est susceptible de recevoir un nombre infini de valeurs. On peut dire, de même, que le système des deux variables x, y, peut prendre ∞^2 valeurs, que le système des trois variables x, y, z, peut prendre ∞^3 valeurs, et ainsi de suite. En général, dire que le système

$$z, x_1, \ldots, x_n,$$

peut prendre ∞^{n+1} valeurs, signifie que chacune des variables peut recevoir toutes les valeurs imaginables.

Si deux variables x, y, sont liées par une équation

$$f(x, y) = 0,$$

x peut prendre ∞ valeurs, et à chaque valeur de la variable x en correspondra seulement un certain nombre de la variable y; dans ce cas, on dira que le système (x, y) n'a que ∞ valeurs, et non ∞^2 comme dans le cas précédent. De même, $(n+1)$ variables liées entre elles par $1, 2, \ldots, n$ relations seront dites avoir $\infty^n, \infty^{n-1}, \ldots, \infty$ valeurs.

Si l'on regardre x, y, z, comme les coordonnées d'un point dans l'espace, l'ensemble des trois coordonnées x, y, z peut aussi être appelé *point*, et l'on pourra dire que l'espace contient ∞^3 points, une surface ∞^2, une courbe ∞ seulement. On peut convenir d'appeler *point*, d'une manière générale, l'ensemble de $(n+1)$ valeurs $(z, x_1, \ldots, x_n)$ dites *coordonnées*, et *espace à* $(n+1)$ *dimensions*, l'ensemble des points qui correspondent à toutes les valeurs possibles de ces coordonnées. Si l'on considère parmi les ∞^{n+1} points de l'espace à $(n+1)$ dimensions, ceux dont les coordonnées satisfont à l'équation

$$f(z, x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

(*) Lie, Nachrichten de Göttingen, 1872, n° 16, pp. 321-326, n° 25, pp. 473-489, et pp. 151 sqq. du grand Mémoire : *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen* (Mathematische Annalen, t. V, pp. 145-256). [C'est Cauchy qui s'est occupé, le premier, des espaces à un nombre quelconque de dimensions (Comptes rendus, t. XXIV, pp. 885-887).]

on a *une variété à* n *dimensions,* contenant ∞^n points. L'ensemble des points représentés par *deux, trois,..., n* équations semblables, constituent *une variété à* (n — 1), (n — 2),..., 1 *dimension.* Les points eux-mêmes peuvent être dits de dimension *nulle.*

Dans l'espace à 3 dimensions, on distingue, parmi les surfaces, celle dont l'équation est du premier degré ou le plan :

$$pX + qY - Z + P = 0.$$

Le plan est déterminé si l'on connaît ses coefficients de direction $p, q, -1$, et l'un de ses points, x, y, z. Son équation, dans ce cas, est :

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0.$$

Un point et un plan passant par ce point constituent un *élément* de l'espace. Un élément de l'espace est donc déterminé par cinq quantités, dites ses coordonnées,

$$x, y, z, p, q,$$

et, par suite, l'espace en contient ∞^5.

Parmi les éléments de l'espace, ceux dont les coordonnées satisfont à l'équation

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

sont en nombre ∞^4, et sont dits *les éléments de cette équation,* ou les éléments de la figure représentée par cette équation, si l'on peut ainsi parler. Par chaque point de l'espace, passent ∞^2 plans, dont ∞ seulement constituent, avec ce point, ∞ éléments de l'équation f. Ces ∞ plans enveloppent un certain cône ayant le point commun pour sommet. En un certain sens, on peut donc dire que l'équation $f = 0$, représente aux environs de leurs sommets, ∞^3 cônes ayant chacun, en ces points, ∞ plans tangents.

Dans l'espace à $(n + 1)$ dimensions, nous pouvons appeler *plan* la variété à n dimensions dont l'équation est linéaire par rapport aux coordonnées courantes. Un plan passant par un point $(z, x_1, \dots, x_n)$, a pour équation

$$p_1(X_1 - x_1) + \cdots + p_n(X_n - x_n) - (Z - z) = 0,$$

et constitue avec le point lui-même un *élément de l'espace*, déterminé par les $(2n+1)$ coordonnées :

$$z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n.$$

L'espace contient ∞^{2n+1} éléments. La figure représentée par l'équation

$$f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

est l'ensemble des éléments, en nombre ∞^{2n} qui satisfont à cette équation. Ces éléments sont dits les éléments de l'équation ou de la figure correspondante.

5. *Nouvelle manière d'envisager l'intégration des équations aux dérivées partielles.* Pour Lie, intégrer une équation aux dérivées partielles, à trois variables, par exemple,

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

c'est trouver toutes les figures contenant ∞^2 des ∞^4 éléments représentés par cette équation, et telles que deux éléments infiniment voisins satisfassent à l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

De même, intégrer une équation à $(n+1)$ variables

$$f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

c'est trouver toutes les figures contenant ∞^n des ∞^{2n} éléments représentés par cette équation, et telles que deux éléments voisins satisfassent à l'équation :

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Si dans l'équation (16), on suppose x, y, z constants, p, q variables, les éléments, obtenus ainsi, satisfont à l'équation (17), puisque l'on a :

$$dx = 0, \quad dy = 0, \quad dz = 0;$$

mais ces éléments ne sont qu'en nombre simplement infini. De même les éléments représentés par l'équation (1) quand on y regarde le point comme fixe, satisfont à la condition (18), mais sont seulement en nombre ∞^{n-1}. Les figures correspondantes ne sont donc pas des intégrales.

Les équations (5) et (6) du n° 2, qui donnent ∞^{n+1} éléments de l'équation (4), transformée de (1), n'en donnent plus que ∞^n quand on suppose F constant. De même l'équation (12) du n° 5 et les valeurs de $\frac{dy}{dt}, \frac{dy}{dx_1}, \dots, \frac{dy}{dx_n}$ que l'on en déduit, représentent ∞^{n+1} éléments de l'équation (11), et donnent, par suite, une intégrale de cette équation (11); mais si l'on suppose l'existence de la relation (15) ou (9), ces éléments ne sont plus qu'au nombre de ∞^n, et donnent une intégrale de l'équation (1).

§ 2. *Génération des équations à trois variables. Théorie de Lagrange* (*).

6. *Génération de ces équations, de trois manières différentes.* Soit

$$z = \mathrm{F}(x, y, a, b) \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

une relation entre x, y, z, où entrent deux constantes arbitraires a et b. On déduira de là :

$$p = \mathrm{F}'_x(x, y, a, b) \quad q = \mathrm{F}'_y(x, y, a, b) \ldots \ldots \quad (2)$$

Éliminant a et b entre ces trois équations, on aura

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \quad \text{ou} \quad z = \varphi(x, y, p, q), \ldots \ldots \quad (3)$$

équations aux dérivées partielles du premier ordre.

(*) La distinction des trois sortes d'intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre est due à Lagrange (Mémoires de Berlin, 1772, Œuvres, t. III, n° 12, p. 572; 1774, Œuvres, t. IV, n° 41, p. 65, n° 47, p. 74; *Leçons, etc.*, pp. 367 et suivantes). Voir aussi, Pfaff (Mémoires de Berlin, 1814-1815), *passim*, et Jacobi, *Ueber die Pfaffsche Methode, etc.* (Journal de Crelle, t. II, pp. 348-349), et surtout, *Vorlesungen*, pp. 471-509. Nous nous servons principalement ici de l'exposition d'Imschenetsky, chapitre I, pp. 9-19. Graindorge, I, pp. 1-9, est moins complet.

Nous recommandons au lecteur une exposition plus simple de cette théorie, donnée plus bas à propos des équations simultanées, et qui ne semble pas avoir été remarquée (n° 12).

Si l'on remplace a et b par des fonctions convenables de x et de y, il peut arriver que l'équation (1) conduise à la même équation (3); il suffira, pour cela, que les nouvelles valeurs de p et q :

$$p = \mathrm{F}'_x + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a}\frac{da}{dx} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial b}\frac{db}{dx},$$

$$q = \mathrm{F}'_y + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a}\frac{da}{dy} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial b}\frac{db}{dy},$$

se réduisent aux anciennes, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a}\frac{da}{dx} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial b}\frac{db}{dx} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a}\frac{da}{dy} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial b}\frac{db}{dy} \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

On déduit de ces dernières :

$$\mathrm{D}\frac{a,b}{x,y}\cdot\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a} = 0, \quad \mathrm{D}\frac{a,b}{x,y}\cdot\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial b} = 0, \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

relations auxquelles on satisfait : 1° en posant

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial b} = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

2° en posant

$$\mathrm{D}\frac{a,b}{x,y} = 0 \quad \text{ou} \quad b = \pi a, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

π désignant une fonction quelconque. Dans ce cas, les deux équations (4) se réduisent l'une et l'autre à

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial b}\frac{\partial \pi}{\partial a} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Les deux équations (6), ou les équations (7) et (8) suffisent pour déterminer les fonctions a et b.

Nous verrons dans le numéro suivant que toutes les solutions de l'équation (2) sont comprises parmi les solutions données, soit par l'équation (1), dite *intégrale complète* de (2), ou par les équations (1), (7), (8), où π est arbitraire, ce qui constitue l'*intégrale générale,* ou enfin, par les équations (1) et (6), qui fournissent la *solution* ou *intégrale singulière.*

Géométriquement, l'équation (3) exprime une propriété des plans tangents aux surfaces représentées par l'intégrale complète, ou des enveloppes de celles-ci, que donne l'intégrale générale, ou enfin des enveloppes d'un autre genre représentées par l'intégrale singulière. Les premières enveloppes touchent les surfaces (1), chacune suivant une courbe donnée par les équations (1), (7), (8), les secondes en des points donnés par (1) et (6).

7. *Toutes les intégrales de l'équation* (3) *sont données par* (1), (1) *et* (6), *ou* (1), (7), (8). Soit

$$z = \psi(x, y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

une relation satisfaisant à l'équation (3), c'est-à-dire telle que

$$\psi(x, y) = \varphi\left(x, y, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

soit une identité. Posons :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

et tirons de là les valeurs de a et b, qui seront constantes ou non. Pour ces valeurs de a et b, on aura identiquement, puisque F est une solution de (3) :

$$F(x, y, a, b) = \varphi\left(x, y, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right); \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

ou, à cause des relations (10) et (11),

$$F(x, y, a, b) = \psi(x, y). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Ainsi l'équation (9) devient identique à l'équation (1), si a et b ont les valeurs déduites des équations (11). De plus, ces valeurs de a et b satisfont aux équations (4), si elles ne sont pas constantes. On a, en effet, pour ces valeurs de a et b :

$$p = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial a}\frac{da}{dx} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$q = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial a}\frac{da}{dy} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{dy} = \frac{\partial\psi}{\partial y};$$

d'où, au moyen des équations (11) :

$$\frac{\partial F}{\partial a}\frac{da}{dx}+\frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{dx}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial a}\frac{da}{dy}+\frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{dy}=0.$$

Ce sont précisément les relations (4). Ainsi, l'équation (9) est comprise dans l'une des trois intégrales dont il est parlé au n° précédent.

On remarquera que deux des équations (11) et (13) entraînent la troisième, de sorte que l'on peut déterminer a et b, au moyen de deux quelconques de ces trois relations.

8. *Extension de la théorie précédente au cas d'une relation implicite entre* x, y, z. L'équation

$$F(x, y, z, a, b)=0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1')$$

donne, par dérivation :

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q=0; \quad \ldots \ldots \quad (2')$$

et, par élimination de a et b, entre ces dernières équations :

$$f(x, y, z, p, q)=0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3')$$

si a et b sont des constantes, ou des fonctions de x et y telles que

$$\left(\frac{\partial F}{\partial a}\frac{da}{dx}+\frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{dx}\right):\frac{\partial F}{\partial z}=0, \quad \left(\frac{dF}{\partial a}\frac{da}{dy}+\frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{dy}\right):\frac{\partial F}{\partial z}=0. \quad (4')$$

On déduit de ces dernières, comme plus haut,

$$D\frac{a, b}{x, y}\times\frac{-\dfrac{\partial F}{\partial a}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=0, \quad D\frac{a, b}{x, y}\times\frac{-\dfrac{\partial F}{\partial b}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=0, \quad \ldots \ldots \quad (5')$$

relations auxquelles on satisfait : 1° en posant :

$$\frac{-\dfrac{\partial F}{\partial a}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=0,\quad \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial b}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=0;$$

c'est-à-dire,

$$\frac{dz}{da}=0,\quad \frac{dz}{db}=0; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6')$$

2° ou bien :

$$\mathrm{D}\frac{a,b}{x,y}=0,\quad \text{c'est-à-dire}\quad \pi(a,b)=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7')$$

π désignant une fonction quelconque. Dans ce dernier cas, les équations (5′), à cause des relations suivantes, déduites de (7′) :

$$\frac{\partial\pi}{\partial a}:\frac{\partial\pi}{\partial b}=-\frac{db}{dx}:\frac{da}{dx}=-\frac{db}{dy}:\frac{da}{dy},$$

deviennent l'une et l'autre

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial a}-\dfrac{\partial F}{\partial b}\times\dfrac{\dfrac{\partial\pi}{\partial a}}{\dfrac{\partial\pi}{\partial b}}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=0,$$

que l'on peut écrire

$$\frac{dz}{da}+\frac{dz}{db}\frac{db}{da}=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8')$$

Les deux équations (6′), ou les équations (7′) et (8′), suffisent pour déterminer les fonctions a et b.

Toute relation

$$\psi(x,y,z)=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9')$$

satisfaisant à l'équation (5′), c'est-à-dire telle que les valeurs z_1, p_1, q_1 de

$$z,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{dz}{dy},$$

que l'on en déduit, donnent identiquement :

$$f(x, y, z_1, p_1, q_1) = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10')$$

appartient à l'une des trois classes de solutions indiquées plus haut. En effet, déterminons a et b, par les relations :

$$p = p_1, \quad q = q_1, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11')$$

p et q étant les valeurs déduites de (2'). En comparant l'équation (10') à

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5')$$

et tenant compte de (11'), il viendra :

$$z = z_1.$$

On prouvera ensuite, comme plus haut, que les valeurs a et b déterminées par les équations (11') satisfont aux équations (4'), ce qui achève la démonstration du théorème (*).

Remarque. L'intégrale générale, donnée par les équations (1') (7') (8') ne comprend pas, en général, la solution singulière, donnée par (1'), (6'). En effet, les équations (7') (8') donnent le plus souvent :

$$\frac{\dfrac{dz}{da}}{\dfrac{\delta \pi}{\delta a}} = \frac{\dfrac{dz}{db}}{\dfrac{\delta \pi}{\delta b}}$$

qui n'a pas pour corollaires les équations (6).

L'intégrale complète peut se déduire de l'intégrale générale, en

(*) Les explications de ce numéro auraient été inutiles, si Imschenetsky, § 6, pp. 18-19, Graindorge, n° 10, pp. 7-9, n'avaient laissé de côté le dénominateur $\frac{\delta F}{\delta z}$. On sait, par la théorie des solutions singulières des équations différentielles ordinaires, que l'on doit soigneusement éviter de faire disparaître les dénominateurs de ce genre, parce que seuls, très-souvent, ils conduisent à la solution cherchée, quelque forme que l'on donne à la fonction F, quand les infinis de $\frac{\delta F}{\delta z}$ sont à une distance finie. Darboux (Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, t. IV, p. 158, note 2) a méconnu l'importance de cette remarque.

faisant entrer deux constantes arbitraires dans π. Il est clair, d'ailleurs, que l'on peut trouver une infinité d'intégrales complètes (*).

9. Exemples (**). I. L'équation

$$z = a + bx + bmy$$

donne

$$p = b, \quad q = bm,$$
$$q = mp.$$

La solution singulière n'existe pas, car les équations (6) sont

$$\frac{dz}{da} = 1 = 0, \quad \frac{dz}{db} = x + my = 0,$$

dont la première est absurde. L'intégrale générale est donnée par élimination de a et b entre

$$\begin{aligned} z &= a + b(x + my), \\ b &= \pi a, \\ 0 &= 1 + \pi' a (x + my), \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$z = \chi(x + my),$$

χ désignant une fonction quelconque.

II. Soit

$$z = a + bx + yf(a, b).$$

On aura :

$$p = b, \quad q = f(a, b).$$

(*) Lagrange (Mém. de Berl., 1774, Œuvres, t. IV, p. 80). La théorie complète des relations qui existent entre les intégrales complètes a été esquissée par Jacobi, *Vorlesungen*, pp. 471-509, et en divers endroits de ses mémoires, et par Mayer, Math. Annalen, t. III, pp. 449-452 et Nachrichten de Göttingen, 1872, n° 21, pp. 405-420 ; mais ce difficile sujet ne peut être traité qu'au moyen de la théorie générale des transformations de Lie, que ce géomètre n'a pas encore publiée (voir Nachrichten, 1872, p. 484). C'est pourquoi nous nous contentons d'exposer la partie absolument nécessaire des recherches de ces géomètres.

(**) Lagrange (Mém. de Berlin, 1774, Œuvres, t. IV, n° 39, pp. 63-64 ; n° 49, pp. 75 et suivantes).

On tire de là l'équation :

$$q = f(z - px - qy, p).$$

III. *Équation de Clairaut généralisée.* Nous appelons ainsi l'équation que l'on déduit de

$$z = ax + by + f(a, b),$$

en éliminant a et b, au moyen des relations suivantes, trouvées par dérivation,

$$p = a, \quad q = b.$$

L'équation aux dérivées partielles est donc

$$z = px + qy + f(p, q).$$

L'intégrale générale de celle-ci est donnée par les équations :

$$\begin{aligned} z &= ax + by + f(a, b), \\ b &= \pi a, \\ 0 &= x + y\pi' a + \frac{\delta f}{\delta a} + \frac{\delta f}{\delta b}\pi' a. \end{aligned}$$

Elle représente une surface développable, enveloppe du plan dont l'équation est l'intégrale complète.

La solution singulière

$$z = ax + by + f(a, b)$$

$$x + \frac{\delta f}{\delta a} = 0, \quad y + \frac{\delta f}{\delta b} = 0,$$

représente une surface tangente à chacun de ces plans en un point, ou à chaque surface développable suivant une courbe (comparez le n° 21).

IV. Comme exemple d'équation de Clairaut généralisée, soit à résoudre le problème suivant : « *Trouver les surfaces dont le plan tangent est à une distance constante* h *de l'origine des coordonnées.* » L'équation du problème est

$$z = px + qy + h\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

L'intégrale complète est l'équation d'un plan quelconque, situé à une distance h de l'origine :

$$z = ax + by + h\sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

La solution singulière est la sphère,

$$x^2 + y^2 + z^2 = h^2,$$

tangente à tous ces plans.

L'intégrale générale représentera une surface développable quelconque circonscrite à cette sphère. Si l'on fait, par exemple,

$$am + bn = 1,$$

on trouve un cylindre de révolution; car cette relation équivaut, dans le cas actuel, à

$$mp + nq = 1$$

à cause de $p = a$, $q = b$ (voir n° 20).

Si l'on fait

$$h\sqrt{1 + a^2 + b^2} = k - ma - nb,$$

on trouve un cône, qui sera encore de révolution, puisqu'il est circonscrit à la sphère. En effet, on a, dans ce cas :

$$z = ax + by + (k - ma - nb),$$

et

$$z - k = p(x - m) + q(y - n),$$

qui appartient au cône ayant pour sommet (m, n, k) (voir n° 20).

On peut remarquer, avec Lagrange, à propos de cet exemple, qu'il est impossible de déterminer π de manière que l'intégrale générale

$$z = ax + y\,\pi a + h\sqrt{1 + a^2 + (\pi a)^2},$$

$$0 = x + y\pi' a + h\frac{a + \pi a . \pi' a}{\sqrt{1 + a^2 + (\pi a)^2}},$$

représente la sphère. On ne peut, en effet, éliminer x, y et z entre les deux équations que nous venons d'écrire et celle de la sphère. D'ailleurs, ces deux équations représentent une surface développable, et l'on sait que la sphère, analytiquement parlant, est, comme toutes les surfaces du second degré à centre unique, une surface gauche; chaque génératrice est imaginaire, sauf en un point.

§ 3. *Génération des équations à un nombre quelconque de variables. Théorie de Lagrange* (*).

10. *Génération de ces équations, de trois manières différentes.* Soit la relation

$$z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

On en déduit :

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1},\ p_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots, p_n = \frac{\partial F}{\partial x_n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

En éliminant $a_1, \ldots, a_n$, entre les équations (1) et (2), on trouvera une équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

ou

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

On trouve la même équation (3) en supposant que $a_1, \ldots, a_n$ soient des fonctions de $x_1, \ldots, x_n$, telles que l'on ait :

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{da_1}{dx_1} + \cdots\cdots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{da_n}{dx_1} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{da_1}{dx_n} + \cdots\cdots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{da_n}{dx_n} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4_n)$$

On déduit de ces relations, en posant

$$\Delta = D\frac{a_1 \ldots a_n}{x_1 \ldots x_n}:$$

$$\Delta\frac{\partial F}{\partial a_1} = 0,\ \Delta\frac{\partial F}{\partial a_2} = 0, \ldots, \Delta\frac{\partial F}{\partial a_n} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

(*) Nous réduisons ce qui se rapporte aux équations à n variables indépendantes au strict nécessaire, les principes ayant été suffisamment exposés dans le paragraphe précédent.

On satisfait à ces dernières de diverses manières : 1° en posant

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}=0\,,\ \frac{\partial F}{\partial a_2}=0,\ldots,\frac{\partial F}{\partial a_n}=0\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

équations qui suffisent pour déterminer les fonctions a; 2° en posant

$$D\,\frac{a_1\ldots a_n}{x_1\ldots x_n}=0.\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Cette équation (7) sera vérifiée chaque fois que les fonctions a_1, $a_2,\ldots,a_n$ ne seront pas indépendantes les unes des autres. Soit $n=(m+k)$, et, pour simplifier les écritures, écrivons b_1, $b_2,\ldots,b_m$, au lieu de $a_{k+1}, a_{k+2},\ldots,a_n$. Pour satisfaire à l'équation (7), nous écrirons :

$$b_1=\pi_1\,(a_1, a_2,\ldots,a_k),\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7'_1)$$

$$b_2=\pi_2\,(a_1, a_2,\ldots,a_k),\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7'_2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_m=\pi_m(a_1, a_2,\ldots,a_k).\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7'_m)$$

On aura donc, pour l'une quelconque des quantités b,

$$\frac{db}{dx}=\frac{\partial\pi}{\partial a_1}\frac{da_1}{dx}+\frac{\partial\pi}{\partial a_2}\frac{da_2}{dx}+\cdots+\frac{\partial\pi}{\partial a_k}\frac{da_k}{dx}.\ \ldots\ldots \quad (7'')$$

Il en résulte que chacune des équations (4) prend la forme

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial F}{\partial a_1}+\dfrac{\partial F}{\partial b_1}\dfrac{\partial\pi_1}{\partial a_1}+\cdots+\dfrac{\partial F}{\partial b_m}\dfrac{\partial\pi_m}{\partial a_1}\right)\dfrac{da_1}{dx}+\cdots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \left(\dfrac{\partial F}{\partial a_k}+\dfrac{\partial F}{\partial b_1}\dfrac{\partial\pi_1}{\partial a_k}+\cdots+\dfrac{\partial F}{\partial b_m}\dfrac{\partial\pi_m}{\partial a_k}\right)\dfrac{da_k}{dx}=0\end{array}\right\}\ \ldots\ldots \quad (4')$$

Multiplions les équations $(4'_1)$ $(4'_2)$ $(4'_3)\ldots(4_k)$ respectivement par $dx_1, dx_2, dx_3,\ldots,dx_k$, ajoutons les résultats, il viendra :

$$\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial F}{\partial a_1}+\dfrac{\partial F}{\partial b_1}\dfrac{\partial\pi_1}{\partial a_1}+\cdots+\dfrac{\partial F}{\partial b_m}\dfrac{\partial\pi_m}{\partial a_1}\right)da_1+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \left(\dfrac{\partial F}{\partial a_k}+\dfrac{\partial F}{\partial b_1}\dfrac{\partial\pi_1}{\partial a_k}+\cdots+\dfrac{\partial F}{\partial b_m}\dfrac{\partial\pi_m}{\partial a_k}\right)da_k=0.\end{array}$$

Les fonctions $a_1, a_2, \ldots a_k$ sont indépendantes les unes des autres, et, par suite, leurs différentielles sont arbitraires; on tire donc, de l'équation précédente, les k relations :

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} + \frac{\partial F}{\partial b_1}\frac{\partial \pi_1}{\partial a_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial b_m}\frac{\partial \pi_m}{\partial a_1} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{da_1} = 0, \quad \ldots \quad (8_1)$$

. . . .

$$\frac{\partial F}{\partial a_k} + \frac{\partial F}{\partial b_1}\frac{\partial \pi_1}{\partial a_k} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial b_m}\frac{\partial \pi_m}{\partial a_k} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{da_k} = 0. \quad \ldots \quad (8_k)$$

Les relations (7) et (8) suffiront pour déterminer les fonctions a et b. Les cas les plus remarquables sont ceux où $m = 1$ et où $m = (n - 1)$. Si $m = 1$, $k = (n - 1)$, et les équations (7′) et (8) deviennent :

$$a_n = \pi(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}), \quad \ldots \ldots \quad (7''')$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial \pi}{\partial a_1} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial a_{n-1}} + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial \pi}{\partial a_n} = 0. \quad \ldots \ldots \quad (8')$$

Si $m = (n - 1)$, $k = 1$, et les équations (7′) et (8) deviennent

$$a_1 = \pi_1(a_n); \quad a_2 = \pi_2(a_n), \ldots, a_{n-1} = \pi_{n-1}(a_n),$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}\pi'_1 a_n + \frac{\partial F}{\partial a_2}\pi'_2 a_n + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_{n-1}}\pi'_{n-1} a_n + \frac{\partial F}{\partial a_n} = 0.$$

La solution (1) de l'équation (5), est l'*intégrale complète*; la solution donnée par les relations (1) et (6) est la *solution singulière*; la solution donnée par les relations (1), (7‴), (8′) est l'*intégrale générale*; les autres solutions données par (1), (7′), (8) n'ont pas reçu de nom particulier. Elles sont intermédiaires entre la *solution singulière* et *l'intégrale générale*; on peut les appeler *intégrales semi-singulières*.

Ce qui précède peut s'exposer facilement encore, quand la relation (1) entre z, les x et les a est donnée sous forme implicite.

11. *Toute intégrale de l'équation* (5) *est comprise dans les précédentes.* Soit

$$z = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

une solution de (3), c'est-à-dire supposons que

$$\psi(x_1,\ldots,x_n) = \varphi\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{\partial\psi}{\partial x_1},\cdot\cdot,\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Posons

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial\psi}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{\partial\psi}{\partial x_n}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

et tirons de là les valeurs de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pour ces valeurs, on aura identiquement, puisque F est une solution de (3),

$$F(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_n) = \varphi\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{\partial F}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\right), \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{da_1}{dx_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{da_n}{dx_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$p_n = \frac{\partial F}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{da_1}{dx_n} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{da_n}{dx_n} = \frac{\partial\psi}{\partial x_n};$$

d'où, au moyen des équations (11), $F = \psi$ et les équations (4). La solution $z = \psi$ est donc comprise parmi celles qui ont été données au numéro précédent. On peut encore déduire les quantités a de l'équation (12) et de $(n - 1)$ des équations (11).

Si la solution (9) était donnée sous forme d'une relation implicite entre z et les x, on pourrait faire encore la démonstration précédente.

Il résulte d'ailleurs de tout ce que nous venons de démontrer qu'*il suffit d'avoir la solution complète d'une équation aux dérivées partielles pour en connaître toutes les solutions*. Ainsi, par exemple, toutes les solutions de l'*équation de Clairaut généralisée* (comparez le n° 28)

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n + f(p_1, p_2, \cdots, p_n)$$

peuvent se déduire de l'intégrale générale :

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + f(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

[**12**. *Génération des équations aux dérivées partielles simultanées* (*). Considérons la relation

$$z = \mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m),\ m < n \quad \ldots\ldots \quad (1')$$

On en déduit

$$p_1 = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1}, \cdots, p_n = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_n} \quad \ldots\ldots \quad (2')$$

En éliminant $a_1, \ldots, a_m$, entre ces $(n+1)$ équations, on trouve le système suivant de $k = (n + 1 - m)$ équations simultanées, aux dérivées partielles et du premier ordre,

$$f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_k = 0, \quad \ldots\ldots \quad (3')$$

chacune des fonctions f dépendant de l'ensemble ou d'une partie des quantités $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$.

On trouve les mêmes équations $(3')$, si l'on suppose que $a_1, \ldots, a_m$, soient des fonctions des variables telles que

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a_1} da_1 + \cdots + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a_m} da_m = 0; \quad \ldots\ldots \quad (4')$$

car, dans ce cas, on aura

$$dz = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_m} dx_m,$$

relation équivalente aux équations $(2')$. L'équation $(4')$ elle-même est équivalente aux n équations

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a_1}\frac{da_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a_m}\frac{da_m}{dx} = 0.$$

Pour satisfaire à l'équation $(4')$ on peut poser, en premier lieu,

$$da_1 = 0, \ldots, da_m = 0,$$

ce qui conduit à l'*intégrale complète* $(1')$.

En second lieu, on peut se donner les équations

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a_1} = 0, \ldots, \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a_m} = 0,$$

ce qui conduit à la *solution singulière*.

(*) Le lecteur remarquera que ce numéro 12 contient, sous une forme extrêmement condensée, tous les résultats précédents relatifs à la génération des équations aux dérivées partielles.

En troisième lieu, on peut supposer

$$a_m = \pi(a_1, \dots, a_{m-1}),$$

ce qui donne

$$\frac{\delta F}{\delta a_1} + \frac{\delta F}{\delta a_m}\frac{\delta \pi}{\delta a_1} = 0, \dots, \frac{\delta F}{\delta a_{m-1}} + \frac{\delta F}{\delta a_m}\frac{\delta \pi}{\delta a_{m-1}} = 0;$$

ou

$$a_{m-1} = \pi_1(a_1, \dots, a_{m-2}); \; a_m = \pi_2(a_1, \dots, a_{m-2}),$$

ce qui donne

$$\frac{\delta F}{\delta a_1} + \frac{\delta F}{\delta a_{m-1}}\frac{\delta \pi_1}{\delta a_1} + \frac{\delta F}{\delta a_m}\frac{\delta \pi_2}{\delta a_1} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\delta F}{\delta a_{m-2}} + \frac{\delta F}{\delta a_{m-1}}\frac{\delta \pi_1}{\delta a_{m-2}} + \frac{\delta F}{\delta a_m}\frac{\delta \pi_2}{\delta a_{m-2}} = 0;$$

et ainsi de suite.

Enfin, on peut faire des hypothèses intermédiaires entre les précédentes, par exemple, poser

$$da_1 = 0, \quad \frac{\delta F}{\delta a_2} = 0, \quad a_m = \pi(a_3, \dots, a_{m-1}).$$

Dans tous les cas, on est conduit à un nombre d'équations suffisant pour déterminer toutes les quantités a.

Toute solution,

$$z = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

est comprise parmi les précédentes. Les valeurs de z et des quantités p déduites de la valeur de z satisfont aux équations (3'), et par suite aux équations équivalentes (1') (2'). On a donc

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m), \quad \dots\dots \quad (10')$$

$$\frac{\delta \psi}{\delta x_1} = \frac{\delta F}{\delta x_1}, \dots, \frac{\delta \psi}{\delta x_n} = \frac{\delta F}{\delta x_n}. \quad \dots\dots \quad (11')$$

Tirons de la première de ces équations, par différentiation, la suivante :

$$\frac{\delta \psi}{\delta x_1}dx_1 + \dots + \frac{\delta \psi}{\delta x_n}dx_n = \frac{\delta F}{\delta x_1}dx_1 + \dots + \frac{\delta F}{\delta x_n}dx_n$$
$$+ \frac{\delta F}{\delta a_1}da_1 + \dots + \frac{\delta F}{\delta a_m}da_m. \quad \dots\dots \quad (13')$$

Les valeurs des quantités a tirées de m des équations (10') et (11') satisfont aux autres équations (10′) et (11′) et par suite à l'équation (13′). Or celle-ci, à cause des relations (11′), se réduit à

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} da_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_m} da_m \ldots\ldots\ldots\ldots (4')$$

Donc, enfin, la solution $z = \psi$ est comprise parmi celles auxquelles conduit cette relation (4′).

Remarque. Les fonctions f du système simultané (3′) ont entre elles des relations identiques, comme on le verra à propos de la méthode de Jacobi.]

§ 4. *Génération des équations à un nombre quelconque de variables. Théorie de Lie.*

13. *Génération d'une équation aux dérivées partielles, au moyen de plusieurs équations primitives* (*). I. Considérons une variété à $(n - m + 1)$ dimensions définies par m équations contenant, outre les variables, n constantes arbitraires :

$$F_1(z, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) = 0, \ldots\ldots\ldots (1_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F_m(z, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) = 0. \ldots\ldots\ldots (1_m)$$

Cherchons l'ensemble des éléments passant par les points de cette variété et tels que l'on ait

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Pour cela, considérons la variété à n dimensions dont l'équation est

$$F = \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_{m-1} F_{m-1} + F_m = 0, \ldots\ldots (3)$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ étant des constantes arbitraires. Tous les points de la variété (1) font partie de la variété (3). Cherchons, en ces points de (3), les éléments qui satisfont à la condition (2); pour cela, nous devons écrire les équations

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \ldots\ldots (4)$$

(*) Sophus Lie : *Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere über eine Classification derselben* (Nachrichten de Göttingen, 1872, pp. 473-489, n° 25), pp. 480-482.

En éliminant $a_1, \dots, a_n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$, entre les équations (1) et (4), nous trouverons une équation aux dérivées partielles,

$$f(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0, \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

dont tous les éléments satisferont à la condition (2) et auront leurs points sur la variété (1).

Réciproquement, l'équation (5) représente tous les éléments définis par les équations (1) et (2). On déduit, en effet, de l'équation (1), en se servant de la valeur (2) de dz :

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) dx_n = 0, \quad \dots \quad (6_1)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\left(\frac{\partial F_m}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F_m}{\partial z}\right) dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial F_m}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F_m}{\partial z}\right) dx_n = 0. \quad \dots \quad (6_m)$$

On voit par là que $(n - m)$ seulement des différentielles dx sont arbitraires, pour lès éléments représentés par les équations (1) et (2). Pour éliminer m différentielles des équations (6), multiplions ces équations respectivement par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}$ et l'unité, et ajoutons-les; égalons à zéro les coefficients de m différentielles, en vue de l'élimination, puis les coefficients des autres, à cause de l'indépendance de ces différentielles restantes. Ces calculs nous conduisent aux équations (4). Ce sont les conditions nécessaires pour que les éléments qui satisfont aux équations (1) satisfassent aussi à l'équation (2).

Donc, enfin, les équations (1) et (4) représentent les éléments cherchés, et la résultante (5) de ces équations est l'équation unique de ces ∞^{2n} éléments.

[II. Imaginons que les équations (1) soient résolues par rapport à m des constantes, et appelons les $(n - m) = k$ restantes, $b_1, b_2, \dots, b_k$. Supposons que les nouvelles équations ainsi obtenues soient les suivantes

$$H_1(z, x_1, \dots, x_n, b_1, \dots, b_k) - a_1 = 0, \quad \dots\dots\dots \quad (1'_1)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$H_m(z, x_1, \dots, x_n, b_1, \dots, b_k) - a_m = 0. \quad \dots\dots\dots \quad (1'_m)$$

En raisonnant comme dans le cas précédent, on sera amené à éliminer les quantités a, b et λ entre ces m équations (1′), et les suivantes :

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \ldots, \frac{\partial H}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (4')$$

La fonction H est définie par l'équation

$$H = \lambda_1 (H_1 - a_1) + \lambda_2 (H_2 - a_2) + \cdots + \lambda_{m-1} (H_{m-1} - a_{m-1}) + (H_m - a_m),$$

ou encore,

$$H = \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \cdots + \lambda_{m-1} H_{m-1} + H_m + h,$$

en posant

$$0 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_{m-1} a_{m-1} + a_m + h.$$

Les quantités $a_1, \ldots, a_m$ n'entrent pas dans les équations (4′); donc l'élimination des quantités a, b, λ, entre les équations (1′) (4′) revient à celle des quantités b et λ entre les équations (4′).

Enfin, si l'on considère la relation unique

$$H - h = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1'')$$

et si l'on cherche l'équation aux dérivées partielles du premier ordre correspondante, on sera aussi conduit à éliminer les constantes b et λ entre les équations (4′).

Par conséquent, l'équation

$$f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

est celle des éléments représentés par les équations (1) et (2), ou (1′) et (2), ou (1″) et (2), et il suffira de trouver une solution (1″) de cette équation (5), pour connaître implicitement la solution (1′) ou (1).]

14. *Classification des équations aux dérivées partielles.* Des considérations précédentes résulte la classification suivante des équations aux dérivées partielles (*).

I. *L'équation provient de* (n + 1) *relations analogues à* (1).

(*) Lie, *Zur Theorie*, etc. (Nachrichten, p. 485).

Dans ce cas, on peut éliminer les constantes a entre ces équations, ce qui conduit à une relation

$$f(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

qui ne contient pas les p. Cette équation représente, en un certain sens, ∞^{2n} éléments, savoir, en chacun des ∞^n points de cette variété à n dimensions, les ∞^n éléments obtenus, en faisant varier $p_1, \ldots, p_n$ de toutes les manières possibles. Ces éléments satisfont à l'équation (2), puisque les quantités dz, $dx_1, \ldots, dx_n$, sont toutes nulles.

II. *L'équation* (3) *provient de* n *relations analogues à* (1). On verra (n° 23) que, dans ce cas, l'on arrive à une équation linéaire.

III. *L'équation provient de* (n — 1), (n — 2), ..., 2 *relations analogues à* (1). On trouve, de cette manière, (n—2) classes d'équations *semi-linéaires,* si l'on peut ainsi les nommer. Lie annonce qu'il est parvenu à les ramener aux équations linéaires. Nous n'avons pu reconstruire sa démonstration (*). La méthode de Cauchy, telle que nous l'exposons, s'applique directement à ce cas, comme au cas des équations linéaires (comparez n° 109).

IV. *L'équation provient d'une seule relation analogue à* (1). C'est le cas ordinaire des équations non linéaires.

[Plus simplement, l'équation (3) peut provenir d'une relation de la forme (1″) contenant *linéairement* I. n constantes; II. (n — 1) constantes; III. (n — 2), (n — 3), ... 1, constante; ou enfin, IV. pas de constante.]

[**15**. *Des constantes supplémentaires* (**). Il arrive souvent, dit Jacobi, que les calculs qui servent à trouver une solution complète d'une équation aux dérivées partielles, conduisent naturellement à introduire dans cette solution un nombre de constantes, plus grand que celui des variables indépendantes; et l'on détruit la symétrie des calculs, si l'on pose un certain nombre des constantes supplémentaires égal à zéro. On suppose d'ailleurs que ces

(*) Lie, *Zur Theorie,* etc. (Nachrichten, pp. 486-487).

(**) Jacobi, *Vorlesungen*, pp. 475-481, est à peu près le seul auteur qui s'occupe de cette question. Il la traite d'une manière analytique. Nous avons cru préférable et plus clair d'en dire ici quelques mots, en nous servant des idées fondamentales de Lie.

constantes ne peuvent pas se réduire à un moindre nombre, en prenant pour nouvelles constantes des fonctions des premières. Dans ce cas, au point de vue pratique, le mieux est de considérer les constantes supplémentaires comme des constantes ayant une valeur spéciale, mais quelconque. On en trouvera un exemple, plus bas, dans l'intégration de l'*équation de Schläfli* (§ 12).

La manière dont Lie envisage la nature des équations aux dérivées partielles permet d'expliquer l'introduction de ces constantes supplémentaires, comme nous allons le faire voir sur un exemple très-simple. Cet exemple nous permettra, en même temps, de faire comprendre comment il peut exister plusieurs intégrales complètes absolument équivalentes, pour une seule et même équation aux dérivées partielles (*).

Trouver une surface dont le plan tangent fasse un angle constant r *avec un plan donné.* Prenons le plan donné pour plan des xy et une perpendiculaire à ce plan, pour axe des z. L'équation du problème sera :

$$1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 r} \text{ ou } k^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

On trouve aisément que les plans représentés par l'équation

$$z-c=\mathrm{A}x+\mathrm{B}y, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

où

$$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2=k^2-1,$$

satisfont à la question. L'équation (1) représente ∞^4 éléments faisant un angle r avec le plan des xy; l'équation (2) et celles que l'on en déduit,

$$p=\mathrm{A}, \quad q=\mathrm{B}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2')$$

représentent les mêmes ∞^4 éléments.

Si l'on prend, au lieu de l'équation (2), l'équation

$$(z-c)=\mathrm{A}(x-a)+\mathrm{B}(y-b), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

(*) Jacobi, *Vorlesungen*, pp. 491-509, s'occupe de ce sujet, qui n'est pas encore complètement élucidé. Voir, plus bas (§ 32), à propos de la méthode de Lie, quelques-unes des recherches de Mayer, sur lesquelles est basée l'exposition qu'il a donnée de la méthode du géomètre norwégien.

cette équation (3) pourra se réduire à la forme (2), et satisfera à l'équation (1). Mais on peut aussi envisager cette équation (3) et celles que l'on en déduit

$$p = \mathrm{A}, \quad q = \mathrm{B}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3')$$

comme représentant ∞^2 fois les ∞^4 éléments représentés par (2) et (2'). En effet, pour chaque valeur de a et de b, l'équation (3) a la même étendue que l'équation (2).

L'enveloppe des plans représentés par l'équation (3), quand

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 = k^2 - 1,$$

est le cône dont l'équation est :

$$(z - c)^2 = (k^2 - 1)\left[(x - a)^2 + (y - b)^2\right] \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Ce cône est une surface qui satisfait à la question. Si l'on regarde a et b, comme des constantes arbitraires dans l'équation (4), elle est une solution complète; avec les équations

$$(z - c)\,p = (k^2 - 1)(x - a), \quad (z - c)\,q = (k^2 - 1)(y - b), \quad \ldots \quad (4')$$

la relation (4) représente les ∞^4 éléments de l'équation (1). Mais si l'on suppose que c est aussi une constante arbitraire, les équations (4) et (4') représentent une infinité de fois les mêmes ∞^4 éléments.

En un certain sens, les équations (4) et (4') représentent ∞^5 éléments de l'espace, comme les équations

$$z^2 + d = (k^2 - 1)\left[(x - a)^2 + (y - b)^2\right], \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

$$zp = (k^2 - 1)(x - a), \quad zq = (k^2 - 1)(y - b). \quad \ldots \ldots \quad (5')$$

Mais les ∞^5 éléments représentés par (5) et (5') sont tous distincts, et il n'y en a que ∞^4 qui soient représentés par l'équation (1), ceux pour lesquels $d = 0$; les éléments représentés par (4) et (4') satisfont tous à l'équation (1), mais ils ne sont pas tous distincts; ce sont ∞ fois les ∞^4 éléments de l'équation (1).

En général, toute équation

$$\mathrm{F}(z, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+s}) = 0, \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

solution d'une équation aux dérivées partielles

$$f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

et contenant s constantes supplémentaires, représentera, avec les relations

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6')$$

∞^s fois les ∞^{2n} éléments de l'équation (7). Nous supposons, bien entendu, que les relations (6) et (6′) transforment l'équation (7) en une identité, sans quoi il n'y aurait pas, dans (6), s constantes supplémentaires, mais seulement un moindre nombre.

En particulier, *il y a un cas, où il est toujours facile d'introduire dans une solution complète une constante supplémentaire.* C'est celui où la variable z, ou l'une des variable x_i, n'entre pas d'une manière explicite dans l'équation donnée. Dans ce cas, il est clair que l'on peut, dans la solution, remplacer, sans inconvénient, z par $(z - a)$, x_i par $(x_i - a_i)$, a et a_i étant des constantes arbitraires, puisque

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(z-a)}{dx}, \quad \frac{dz}{dx_i} = \frac{dz}{d(x_i - a_i)}.$$

Les constantes qui accompagnent celles des variables qui n'entrent pas explicitement dans l'équation donnée sont appelées, par les géomètres allemands, *constantes additives.* Faire varier une de ces constantes équivaut à une translation dans l'espace du système des éléments de l'équation. Il est clair qu'il suffit de trouver une solution avec $(n - t)$ constantes non additives, pour une équation où manquent t variables. Il est facile, en effet, d'en déduire une solution avec n constantes arbitraires, en introduisant t constantes additives.]

LIVRE I.

MÉTHODE DE LAGRANGE ET DE PFAFF (*).

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES (**).

§ 5. *Équations linéaires aux dérivées partielles à deux variables indépendantes.*

16. *Génération de ces équations.* Soient u et v deux fonctions données des variables x, y, z, et

$$F(u, v) = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

(*) Nous résumons, dans ce premier livre, non-seulement les travaux de Lagrange et de Pfaff, mais aussi les premiers mémoires de Jacobi, qui relient entre elles les recherches de ces deux géomètres.

(**) La théorie des équations linéaires aux dérivées partielles est due essentiellement à Lagrange, qui l'a exposée, sous diverses formes, dans les Mémoires de Berlin de 1779 et 1785, dans les *Leçons sur la théorie des fonctions*, leçon 20, et dans la *Théorie des fonctions analytiques*, ch. XVI de la première partie Sur la vraie portée du procédé d'intégration exposé ici, voir le § I du mémoire de Jacobi : *Dilucidationes, etc.* (Journal de Crelle, t. 23). Au fond, on ne fait qu'établir la connexion qui existe entre la théorie des équations linéaires différentielles simultanées et celles des équations linéaires aux dérivées partielles. Nous nous sommes aidé, dans notre exposition, de celle de Serret, *Calcul intégral*, pp. 599-608, et de Boole, *A treatise*, *etc.*, pp. 324-335, *Suppl.*, pp. 56-69.

une relation quelconque entre ces fonctions. Il existe entre x, y, z et les dérivées partielles

$$p=\frac{dz}{dx}, \quad q=\frac{dz}{dy},$$

de z par rapport à x et à y, une relation indépendante de la forme de l'équation (1), et linéaire en p et q.

Pour le montrer, dérivons la relation (1) par rapport à x et à y; il viendra :

$$\frac{\delta F}{\delta u}\left(\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta u}{\delta z}p\right)+\frac{\delta F}{\delta v}\left(\frac{\delta v}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta z}p\right)=0,$$

$$\frac{\delta F}{\delta u}\left(\frac{\delta u}{\delta y}+\frac{\delta u}{\delta z}\right)q+\frac{\delta F}{\delta v}\left(\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta v}{\delta z}q\right)=0.$$

D'où, en éliminant les dérivées de F par rapport à u et à v,

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta u}{\delta z}p, & \frac{\delta u}{\delta y}+\frac{\delta u}{\delta z}q \\ \frac{\delta v}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta z}p, & \frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta v}{\delta z}q \end{vmatrix}=0,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta u}{\delta x}, & \frac{\delta u}{\delta y} \\ \frac{\delta v}{\delta x}, & \frac{\delta v}{\delta y} \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} \frac{\delta u}{\delta z}, & \frac{\delta u}{\delta y} \\ \frac{\delta v}{\delta z}, & \frac{\delta v}{\delta y} \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} \frac{\delta u}{\delta x}, & \frac{\delta u}{\delta z} \\ \frac{\delta v}{\delta x}, & \frac{\delta v}{\delta z} \end{vmatrix} = 0;$$

ou encore, en employant la notation des déterminants fonctionnels,

$$p\,\mathrm{D}\frac{u,v}{y,z}+q\,\mathrm{D}\frac{u,v}{z,x}=\mathrm{D}\frac{u.\,v}{x,y}.$$

Nous écrirons cette équation sous la forme abrégée

$$Xp+Yq=Z, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

en posant

$$X=\mathrm{D}\frac{u,v}{y,z}, \quad Y=\mathrm{D}\frac{u,v}{z,x}, \quad Z=\mathrm{D}\frac{u,v}{x,y}.$$

17. *Système d'équations différentielles simultanées correspondant à l'équation* (2) (*). D'après les propriétés des déterminants, on a :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore

$$X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y} + Z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad X\frac{\partial v}{\partial x} + Y\frac{\partial v}{\partial y} + Z\frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Il résulte de ces équations que les relations,

$$u = a, \quad v = b,$$

où a et b sont des constantes, forment un système intégral des équations :

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

On peut encore énoncer cette remarque sous une autre forme, en disant que les équations

$$Y = \frac{dy}{dx}X,$$

$$Z = \frac{dz}{dx}X,$$

ont, pour système intégral,

$$u = a, \quad v = b; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

ou encore,

$$F_1(u, v) = A, \quad F_2(u, v) = B, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

A et B étant de nouvelles constantes arbitraires, et F_1 et F_2 désignant des fonctions quelconques. On peut, en effet, déduire les

(*) Nous exposons la même chose, à propos des équations à n variables indépendantes, en employant plus encore les déterminants. Le lecteur jugera laquelle de ces deux expositions est préférable.

équations (5) des équations (6) ou réciproquement. On peut aussi montrer directement que les différentielles dF_1, dF_2 sont identiquement nulles, quand on suppose l'existence des relations (3) et (4). On déduit, en effet, de $F_1 = A$, au moyen de (4) et (3),

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}\partial z\right) + \frac{\partial F_1}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right) = 0,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}X + \frac{\partial u}{\partial y}Y + \frac{\partial u}{\partial z}Z\right) + \frac{\partial F_1}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}X + \frac{\partial v}{\partial y}Y + \frac{\partial v}{\partial z}Z\right) = 0;$$

c'est-à-dire,

$$0 = 0.$$

Réciproquement si $u = a$, $v = b$ sont des intégrales distinctes du système (4) où X, Y, Z sont des fonctions quelconques de x, y, z, c'est-à-dire si les relations (3) existent, toute équation

$$F(u, v) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

entre les fonctions u et v, est une solution de l'équation

$$Xp + Yq = Z.$$

On déduit, en effet, de l'équation (1) :

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + p\left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + q\left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} - \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0.$$

Ajoutons ces trois équations après les avoir multipliées respectivement par X, Y, Z; il viendra :

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y} + Z\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(X\frac{\partial v}{\partial x} + Y\frac{\partial v}{\partial y} + Z\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\right)(Xp + Yq - Z) = 0.$$

En vertu des équations (5), on déduit de là

$$Xp + Yq = Z,$$

ce qui démontre le théorème.

Ainsi, l'équation aux dérivées partielles (2) et les équations simultanées (4) se correspondent d'une manière remarquable. Deux solutions (6) de la forme (1) de l'équation (2) donnent immédiatement le système intégral des équations (4), et réciproquement le système intégral (5) des équations (4), conduit immédiatement à une intégrale (1) de l'équation de la forme (2). Nous allons voir que toute solution de l'équation (1) est d'ailleurs nécessairement de cette forme, ce qui ramènera complètement la solution des équations de la forme (2) à celle des équations de la forme (4), et réciproquement.

18. *Intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes.* Soit

$$\psi(x, y, z) = 0$$

une solution quelconque de l'équation aux dérivées partielles :

$$Xp + Yq = Z.$$

On aura, d'après le n° 2,

$$X\frac{\partial\psi}{\partial x} + Y\frac{\partial\psi}{\partial y} + Z\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Si, d'ailleurs, $u = a$, $v = b$, sont des solutions du système :

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

on vient de voir que

$$\left.\begin{aligned} X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y} + Z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ X\frac{\partial v}{\partial x} + Y\frac{\partial v}{\partial y} + Z\frac{\partial v}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Éliminant X, Y, Z entre ces trois relations, il vient

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x}, & \frac{\partial\psi}{\partial y}, & \frac{\partial\psi}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\mathrm{D}\frac{\psi,\, u,\, v}{x,\, y,\, z} = 0.$$

D'après une propriété des déterminants fonctionnels (*), il résulte de là que ψ est une fonction de u et de v, de sorte que toute solution de l'équation donnée est de la forme (**)

$$\mathrm{F}(u, v) = 0;$$

d'après le numéro précédent, d'ailleurs, toute relation de cette forme est une solution.

19. *Détermination de la fonction arbitraire; interprétation géométrique.* A cause de la forme arbitraire de la fonction F, on peut imposer à la solution une condition telle que celle-ci : *pour* $x = x_0$, *il doit exister entre* y *et* z *une relation donnée*,

$$w(y, z) = 0. \quad \text{. . . . .} \quad (8)$$

Faisons $x = x_0$ dans les fonctions u et v; nous aurons, pour cette valeur x_0,

$$u = u_0(y, z) \quad \text{. . . . .} \quad (9)$$

$$v = v_0(y, z) \quad \text{. . . . .} \quad (10)$$

(*) Baltzer. *Déterminants*, § XIII, n° 3, p. 114.

(**) Lagrange n'a démontré cette réciproque que dans son mémoire de 1785. Dans ses autres écrits sur ce sujet, avant et après 1785, il l'admet tacitement sans la démontrer. La forme que nous donnons à la démonstration est empruntée à Boole.

Éliminons y et z entre ces trois relations, et soit

$$F(u, v) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

le résultat de l'élimination, *de telle sorte que l'on puisse inversement déduire* (8) *de* (9) (10) (11) *par élimination de* u *et* v. Il est clair que la relation (11) satisfait à l'équation donnée et à la condition donnée, car, si l'on y fait $x = x_0$, elle se réduit à (8).

On peut s'imposer des conditions autres que celle que nous venons d'indiquer; pour les énoncer plus facilement, interprétons géométriquement la solution donnée plus haut. L'équation :

$$Xp + Yq = Z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

exprime une propriété du plan tangent à la *surface*, représentée par la relation

$$F(u, v) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Cette surface est évidemment engendrée par les *courbes* dont les équations sont

$$u = a, \quad v = b, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

et qui sont assujetties à la condition exprimée par la relation :

$$F(a, b) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

On peut demander que cette surface passe par une courbe donnée parallèle au plan des yz :

$$x = x_0, \quad w(y, z) = 0.$$

comme nous l'avons fait plus haut, ou par une *courbe quelconque*, dont les équations sont

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \chi(x, y, z) = 0,$$

ou qu'elle soit tangente à une surface donnée, ou qu'elle satisfasse à telle autre condition géométrique que l'on voudra. Dans chaque cas particulier, du moment que l'on aura la condition analytique (12), on en déduira immédiatement l'équation de la surface. On voit, par là, que la détermination de la forme de F est une question de géométrie analytique à trois dimensions.

20. Exemples. I. *Équations des cylindres* (*). Les cylindres dont les génératrices sont parallèles à la droite

$$x = az + a', \quad y = bz + b',$$

ont pour équation finie :

$$x - az = \varphi(y - bz),$$

et, par suite, pour équation aux dérivées partielles :

$$ap + bq = 1.$$

Réciproquement ces équations n'appartiennent qu'aux cylindres. La chose est évidente pour la première. La seconde a la première pour intégrale, car le système d'équations simultanées correspondant

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

conduit immédiatement à l'équation suivante des génératrices qui sont des droites parallèles à une direction donnée :

$$x - az = a', \quad y - bz = b'.$$

L'équation aux dérivées partielles des cylindres exprime que le plan tangent est parallèle à la direction des génératrices.

II. *Équations des cônes.* Les cônes, dont le sommet est le point (a, b, c), ont pour équation finie :

$$\frac{x - a}{z - c} = \varphi\left(\frac{y - b}{z - c}\right),$$

et pour équation aux dérivées partielles :

$$p(x - a) + q(y - b) = z - c.$$

Si le sommet est à l'origine, cette équation prend la forme plus simple,

$$z = px + qy.$$

(*) Nous donnons ces exemples élémentaires pour être complet.

On trouve, sans peine, que cette dernière équation, qui exprime que le plan tangent au cône passe par le sommet, appartient exclusivement aux surfaces coniques; autrement dit, que l'équation aux dérivées partielles a pour intégrale l'équation finie donnée plus haut.

III. *Équations des conoïdes.* Quand on prend la directrice rectiligne pour axe des z, et le plan directeur pour plan des xy, on trouve pour équation finie des conoïdes :

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

et pour équation aux dérivées partielles :

$$px + qy = 0.$$

Celle-ci exprime que le plan tangent contient la génératrice qui passe par le point de contact. Lorsqu'on intègre cette équation, on retombe sur l'équation finie, ce qui prouve que l'équation aux dérivées partielles n'appartient qu'aux conoïdes.

IV. *Surfaces de révolution.* On peut regarder une surface de révolution comme le lieu d'un cercle mobile :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a,$$
$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = b,$$

dont le plan est perpendiculaire à la direction déterminée par les cosinus $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, quand on suppose que l'axe de révolution a cette direction et passe par l'origine des coordonnées. L'équation finie des surfaces de révolution est donc :

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \varphi\,(x^2 + y^2 + z^2).$$

On tire de là, en dérivant par rapport à x et y, et écrivant en outre une équation identique, pour la symétrie :

$$\begin{aligned}
\cos \alpha + p \cos \gamma &= 2\varphi' . (x + pz),\\
\cos \beta + q \cos \gamma &= 2\varphi' . (y + qz),\\
\cos \gamma - \cos \gamma &= 2\varphi' . (z - z).
\end{aligned}$$

D'où, immédiatement :

$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ x+pz, & y+qz, & z-z \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en retranchant la première ligne, multipliée par z, de la seconde :

$$\begin{vmatrix} p, & q, & -1 \\ x, & y, & z \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

C'est là l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution. On peut encore l'écrire :

$$p(y\cos\gamma - z\cos\beta) + q(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = x\cos\beta - y\cos\alpha.$$

On remonte aisément de cette équation à l'équation finie des surfaces de révolution. Pour cela, on doit intégrer le système auxiliaire :

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} y, & z \\ \cos\beta, & \cos\gamma \end{vmatrix}} = \frac{dy}{\begin{vmatrix} z, & x \\ \cos\gamma, & \cos\alpha \end{vmatrix}} = \frac{dz}{\begin{vmatrix} x, & y \\ \cos\alpha, & \cos\beta \end{vmatrix}}.$$

Ces trois rapports sont égaux aux suivants, où les dénominateurs sont nuls et, par suite aussi, les numérateurs :

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x, & y, & z \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \end{vmatrix}} = \frac{\cos\alpha dx + \cos\beta dy + \cos\gamma dz}{\begin{vmatrix} \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \\ x, & y, & z \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \end{vmatrix}}.$$

Les relations :

$$xdx + ydy + zdz = 0, \quad \cos\alpha dx + \cos\beta dy + \cos\gamma dz = 0,$$

donnent immédiatement les intégrales du système auxiliaire :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a, \quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = b,$$

et, par suite, l'intégrale de l'équation aux dérivées partielles est :

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \varphi (x^2 + y^2 + z^2).$$

L'équation aux dérivées partielles exprime que les normales, le long d'un parallèle de la surface, rencontrent l'axe de révolution en un même point (*).

V. *Trajectoires orthogonales* (**). Si

$$F(x, y, z, k) = 0$$

représente, en coordonnées rectangulaires, une série de surfaces correspondant aux diverses valeurs de k, l'équation

$$p \frac{\partial F}{\partial x} + q \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z}$$

sera la condition pour qu'une autre surface dont le plan tangent a pour coefficients de direction p, q, -1, lui soit normale. Si l'on élimine k entre les deux équations précédentes, l'équation résultante sera l'équation aux dérivées partielles des trajectoires orthogonales de la surface donnée. Cette équation, comme on le voit, sera du premier ordre.

Comme exemple, considérons les ellipsoïdes,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = k.$$

L'équation aux dérivées partielles des trajectoires orthogonales sera

$$p \frac{x}{a^2} + q \frac{y}{b^2} = \frac{z}{c^2}.$$

(*) C'est Monge, si nous ne nous trompons, qui a donné le premier les équations aux dérivées partielles des diverses sortes de surfaces. Voir ses *Feuilles d'Analyse appliquée à la géométrie, à l'usage de l'École polytechnique, publiées la première année de cette école (an III de la République)*, nos 4, 5 et 6 et tous les traités de calcul infinitésimal.

(**) Lagrange, Mémoires de Berlin, 1785, p. 189, no 16.

On trouve immédiatement pour intégrale :

$$\frac{x^{a^2}}{z^{c^2}} = \varphi\left(\frac{y^{b^2}}{z^{c^2}}\right).$$

21. *De quelques équations que l'on peut rendre linéaires* (*).

I. Soit, en premier lieu, l'équation :

$$xf_1(p, q, z - px - qy) + yf_2(p, q, z - px - qy) + f_3(p, q, z - px - qy) = 0.$$

Posant :

$$u = z - px - qy,$$

on aura :

$$du = -xdp - ydq;$$

et, par suite, si l'on prend, p et q pour variables indépendantes :

$$\frac{du}{dp} = -x, \quad \frac{du}{dq} = -y.$$

Par conséquent, l'équation devient :

$$\frac{du}{dp} f_1(p, q, u) + \frac{du}{dq} f_2(p, q, u) = f_3(p, q, u).$$

Celle-ci étant linéaire, on pourra en trouver l'intégrale. On tirera de cette intégrale les valeurs des dérivées par rapport à p et à q; on les égalera à x et à y; puis, entre les équations ainsi obtenues, et $u = (z - px - qy)$, on éliminera u, p et q.

(*) Lagrange, Mémoires de Berlin, 1774, Œuvres, t. IV, nº 53, p. 83; Lacroix, t. II, p. 558, t. III, p. 708. Chasles, *Rapport sur les progrès de la géométrie*, pp. 90-91, Paris, 1870, indique divers travaux sur les équations de ce genre, en en attribuant la découverte à Monge. Voir, en outre, une note de M. Orloff, Bulletins de Bruxelles, 2e série, t. XXXIII, pp. 113-122, puis Lie, Mathematische Annalen, t. V, p. 159, qui en donne une interprétation, au point de vue de la géométrie moderne. On appelle souvent *transformation de Legendre*, la transformation effectuée ici. [Plücker s'occupe de l'interprétation géométrique de la tranformation de Legendre, dans ses *Analytisch-geometrische Entwickelungen* (Essen, 1831), p. 265, et dans le Journal de Crelle, t. IX, pp. 124-134.]

Cette méthode se simplifie dans le cas de l'équation de Clairaut, déjà étudiée plus haut (n° 9)

$$z = px + qy + f(p, q),$$

qui conduit, non à une équation aux dérivées partielles, mais à l'équation

$$u = f(p, q).$$

On fera,

$$p = a, \quad q = b, \quad u = f(a, b),$$

ce qui donnera

$$du = 0, \quad dp = 0, \quad dq = 0.$$

Par conséquent, la relation $du = -xdp - ydq$ sera vérifiée. On trouvera d'ailleurs pour intégrale complète

$$z = ax + by + f(a, b).$$

II. Soit, en second lieu, l'équation :

$$xf_1(y, p, z - px) = qf_2(y, p, z - px) - f_3(y, p, z - px).$$

On posera :

$$u = z - px;$$

d'où

$$du = qdy - xdp,$$

$$\frac{du}{dy} = q, \quad \frac{du}{dp} = -x.$$

L'équation donnée deviendra :

$$\frac{du}{dp} f_1(y, p, u) + \frac{du}{dy} f_2(y, p, u) = f_3(y, p, u),$$

et l'intégration s'achèvera comme dans le cas précédent.

En particulier, si l'on a,

$$z - px = f(y, p)$$

on trouve, pour équation transformée :

$$u = f(y, p).$$

On fera

$$p = \varphi y,$$

et pour déterminer z, quel que soit φ, l'on aura la relation

$$z = x\varphi y + f(y, \varphi y),$$

comme on le savait d'avance, puisque y joue, dans l'équation donnée, le rôle d'une constante.

§ 6. *Équations linéaires aux dérivées partielles contenant un nombre quelconque de variables*

22. *Génération de ces équations, d'après Lagrange.* Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$, n fonctions données des variables $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$, et

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \qquad (1)$$

une relation quelconque entre ces fonctions. Il existe entre z, $x_1, \ldots, x_n$ et les dérivées partielles

$$p_1 = \frac{dz}{dx_1}, \ldots, p_n = \frac{dz}{dx_n},$$

de z par rapport à x et à y, une relation indépendante de la forme de l'équation (1) et linéaire en $p_1, \ldots, p_n$.

Pour le montrer, dérivons la relation (1) par rapport à x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Il viendra :

$$\frac{\delta F}{\delta u_1}\left(\frac{\delta u_1}{\delta x_1} + \frac{\delta u_1}{\delta z} p_1\right) + \cdots + \frac{\delta F}{\delta u_n}\left(\frac{\delta u_n}{\delta x_1} + \frac{\delta u_n}{\delta z} p_1\right) = 0,$$
$$\frac{\delta F}{\delta u_1}\left(\frac{\delta u_1}{\delta x_2} + \frac{\delta u_1}{\delta z} p_2\right) + \cdots + \frac{\delta F}{\delta u_n}\left(\frac{\delta u_n}{\delta x_2} + \frac{\delta u_n}{\delta z} p_2\right) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\delta F}{\delta u_1}\left(\frac{\delta u_1}{\delta x_n} + \frac{\delta u_1}{\delta z} p_n\right) + \cdots + \frac{\delta F}{\delta u_n}\left(\frac{\delta u_n}{\delta x_n} + \frac{\delta u_n}{\delta z} p_n\right) = 0.$$

D'où, en éliminant les dérivées de F par rapport à $u_1, u_2, \ldots, u_n$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta u_1}{\delta x_1} + \frac{\delta u_1}{\delta z} p_1, \ldots, \frac{\delta u_n}{\delta x_1} + \frac{\delta u_n}{\delta z} p_1 \\ \frac{\delta u_1}{\delta x_2} + \frac{\delta u_1}{\delta z} p_2, \ldots, \frac{\delta u_n}{\delta x_2} + \frac{\delta u_n}{\delta z} p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\delta u_1}{\delta x_n} + \frac{\delta u_1}{\delta z} p_n, \ldots, \frac{\delta u_n}{\delta x_n} + \frac{\delta u_n}{\delta z} p_n \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$Z = X_1 p_1 + X_2 p_2 + \cdots + X_n p_n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

en posant :

$$Z = D\frac{u_1, u_2, \ldots, u_n}{x_1, x_2, \ldots, x_n}, \quad X_1 = D\frac{u_1, u_2, \ldots, u_n}{z_1, x_2, \ldots, x_n},$$

$$X_2 = D\frac{u_1, u_2, \ldots, u_n}{x_1, z, x_3, \ldots, x_n}, \ldots, X_n = D\frac{u_1, u_2, \ldots, u_n}{x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, z}.$$

L'équation (2) peut facilement se mettre sous la forme d'un déterminant, contenant une colonne et une ligne de plus que le précédent :

$$\begin{vmatrix} +1, & \frac{\partial u_1}{\partial z}, & \frac{\partial u_2}{\partial z}, \ldots, & \frac{\partial u_n}{\partial z} \\ -p_1, & \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \ldots, & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -p_n, & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_n}, \ldots, & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2')$$

Enfin, si l'on suppose la relation (1) mise sous la forme

$$\psi(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (3)$$

de façon que

$$p_1 = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}}, \quad p_2 = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_2}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}}, \ldots, p_n = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_n}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}},$$

les équations (2) et (2'), transformées d'après le n° 2, deviendront

$$Z\frac{\partial \psi}{\partial z} + X_1\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (4)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial z}, & \frac{\partial u_1}{\partial z}, & \frac{\partial u_2}{\partial z}, \ldots, & \frac{\partial u_n}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \ldots, & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_n}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_n}, \ldots, & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (4')$$

ou

$$D\frac{\psi, u_1, u_2, \ldots, u_n}{z, x_1, x_2, \ldots, x_n} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4'')$$

Cette relation s'obtient en éliminant dz, dx_1, dx_2, ..., dx_n, entre les équations $d\psi = 0$, $du_1 = 0$, ..., $du_n = 0$ (*).

23. [*Génération des équations linéaires d'après Lie.* D'après ce que l'on a vu plus haut (n° 15), on devra éliminer a_1, a_2, ..., a_n, λ_1, λ_2, ..., λ_{n-1}, entre les équations

$$u_1 - a_1 = 0, \quad u_2 - a_2 = 0, \ldots, u_n - a_n = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

où

$$F = \lambda_1 (u_1 - a_1) + \lambda_2 (u_2 - a_2) + \cdots + \lambda_{n-1} (u_{n-1} - a_{n-1}) + u_n - a_n.$$

Les constantes a disparaissant d'elles-mêmes, on est donc ramené à éliminer les quantités λ entre les équations :

$$\lambda_1 \left(\frac{du_1}{dx_1} + p_1 \frac{du_1}{dz}\right) + \cdots + \left(\frac{du_n}{dx_1} + p_1 \frac{du_n}{dz}\right) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_1 \left(\frac{du_1}{dx_n} + p_n \frac{du_1}{dz}\right) + \cdots + \left(\frac{du_n}{dx_n} + p_n \frac{du_n}{dz}\right) = 0,$$

ce qui conduit à la même équation que la méthode de Lagrange.]

24. *Système d'équations différentielles simultanées correspondant à l'équation* (2). D'après les propriétés des déterminants, si l'on remplace dans l'équation (4''), ψ par u_1, u_2, ... ou u_n, elle sera encore vérifiée, c'est-à-dire que l'on a :

$$Z\frac{\partial u_1}{\partial z} + X_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial u_1}{\partial x_n} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (5_1)$$

$$Z\frac{\partial u_2}{\partial z} + X_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial u_2}{\partial x_n} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (5_2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Z\frac{\partial u_n}{\partial z} + X_1 \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (5_n)$$

(*) Boole, *Supplément*, p. 65, déduit l'équation (4') de cette remarque, au lieu de faire l'inverse, mais cela ne nous semble pas permis.

Ces équations expriment, non-seulement que les équations

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

sont, chacune prise à part, une intégrale de l'équation (2), ce que nous savions déjà, puisque la forme de F est arbitraire, mais aussi que, prises ensemble, elles constituent le système intégral des équations simultanées :

$$\frac{dz}{Z} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Si l'on multiplie (5_1) par $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}$, ($5_2$) par $\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}$, ..., ($5_n$) par $\frac{\partial\varphi}{\partial u_n}$, ces multiplicateurs étant les dérivées partielles d'une fonction $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, et si l'on ajoute les résultats, il vient

$$Z\frac{d\varphi}{dz} + X_1\frac{d\varphi}{dx_1} + \cdots + X_n\frac{d\varphi}{dx_n} = 0.$$

Il résulte de là que l'on peut encore prendre, pour système intégral des équations (7), n relations distinctes de la forme :

$$\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) = b_1, \ldots, \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) = b_n; \quad \ldots \quad (8)$$

et, en effet, on peut déduire de celles-ci les relations (5). De plus, les équations (8) étant de la forme (1), satisfont à l'équation (2). On voit donc qu'il y a une correspondance exacte entre les équations (2) et (7), ce qui lie étroitement les solutions de celles-ci à la solution de celle-là et réciproquement.

On peut établir directement cette correspondance entre les équations (2) et (7) comme suit. Supposons que Z, X_1, ... X_n soient des fonctions quelconques de z, x_1, ... x_n, et soient

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

des intégrales distinctes des équations

$$\frac{dz}{Z} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Je dis que la relation

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

où F désigne une fonction quelconque, est une solution de l'équation

$$Z = p_1 X_1 + p_2 X_2 + \cdots + p_n X_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

On déduit, en effet, de (1) par dérivation, et en écrivant, en outre, une équation identique :

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1} + p_1 \frac{dF}{dz} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_2} + p_2 \frac{dF}{dz} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_n} + p_n \frac{dF}{dz} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial z} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial z} - \frac{dF}{dz} = 0.$$

Multiplions ces équations par X_1, $X_2, \ldots, X_n$, Z et ajoutons les résultats. Il viendra :

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}\left(X_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \cdots + X_n\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + Z\frac{\partial u_1}{\partial z}\right) +$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_2}\left(X_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \cdots + X_n\frac{\partial u_2}{\partial x_n} + Z\frac{\partial u_2}{\partial z}\right) +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_n}\left(X_1\frac{\partial u_n}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial u_n}{\partial x_2} + \cdots + X_n\frac{\partial u_n}{\partial x_n} + Z\frac{\partial u_n}{\partial z}\right) +$$

$$\frac{dF}{dz}(p_1X_1 + p_2X_2 + \cdots + p_nX_n - Z) = 0.$$

Les relations (6) constituent des intégrales des équations (7), et, par suite, les relations (5) sont satisfaites. Les coefficients de

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}, \frac{\partial F}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial u_n},$$

dans l'équation précédente, sont donc nuls, et, par suite, l'on a, en général :

$$Z = p_1X_1 + p_2X_2 + \cdots + p_nX_n.$$

25. *Intégration des équations linéaires aux dérivées partielles contenant un nombre quelconque de variables.* Soit

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n, \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

le système intégral des équations :

$$\frac{dz}{Z} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}; \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

de sorte que l'on a les n équations distinctes :

$$\left.\begin{array}{l} Z\dfrac{\delta u_1}{\delta z} + X_1\dfrac{\delta u_1}{\delta x_1} + \cdots + X_n\dfrac{\delta u_1}{\delta x_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z\dfrac{\delta u_n}{dz} + X_1\dfrac{\delta u_n}{\delta x_1} + \cdots + X_n\dfrac{\delta u_n}{\delta x_n} = 0. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (5)$$

Je dis que toute solution de l'équation

$$Z = p_1X_1 + p_2X_2 + \cdots + p_nX_n \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

sera de la forme

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Soit, en effet,

$$\psi(z, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

cette solution. On aura, d'après le n° 2,

$$Z\frac{\delta\psi}{\delta z} + X_1\frac{\delta\psi}{\delta x_1} + \cdots + X_n\frac{\delta\psi}{\delta x_n} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

En éliminant $Z, X_1, \ldots, X_n$ entre les équations (5) et (9), il vient

$$D\frac{\psi, u_1, \ldots, u_n}{z, x_1, \ldots, x_n} = 0,$$

équation équivalente à (1), d'après les propriétés des déterminants fonctionnels.

26. *Détermination de la fonction arbitraire.* Supposons que l'on demande de déterminer la forme de la fonction F de manière que, pour $x_n = x_{n0}$, on ait, entre $z, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, une relation de la forme

$$F_0(z, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

On fera $x_n = x_{n0}$ dans les valeurs des u et l'on aura ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = u_{10}(z, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = u_{n0}(z, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Soit

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

le résultat de l'élimination de z, x_1, x_2, ..., x_{n-1} entre les équations (10) et (11), *de sorte que réciproquement l'élimination de* $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n$, *entre les équations* (11) *et* (12) *donne l'équation* (10). En faisant $x_n = x_{n0}$ dans (12), on trouvera, entre $z, x_1, \ldots, x_{n-1}$, cette relation (10).

On peut s'imposer des conditions autres que celle que nous venons d'indiquer, et il est facile de montrer comment on y satisfait, en interprétant les résultats précédents, au moyen du langage symbolique actuellement adopté et relatif à un espace à $(n + 1)$ dimensions.

L'équation

$$Z = p_1 X_1 + \cdots + p_n X_n$$

exprime une propriété de la *variété linéaire à* n *dimensions,* qui a un contact du premier ordre avec la *variété à* n *dimensions,*

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0.$$

Celle-ci est évidemment engendrée par les *variétés à une dimension*

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \ldots, v_n = a_n, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

soumises à la condition analytique :

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

Cette condition analytique peut résulter de conditions géométriques. Si la variété $F = 0$ doit passer, par exemple, par la variété à $(n - 1)$ dimensions déterminée par les équations

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

aux points communs à la variété *génératrice* (13) et à la variété *directrice* (14), les valeurs des $(n+1)$ coordonnées $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ devront être identiques. On trouvera donc la condition

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

en éliminant ces coordonnées entre les équations (13) et (14).

Supposons encore que la variété F doive avoir une variété linéaire à n dimensions, tangente commune avec une variété à n dimensions donnée :

$$F_1(z, x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Le long de la *variété de contact*, les valeurs des quantités p seront communes à F et F_1. On aura donc :

$$Z\frac{\partial F_1}{\partial z} + X_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial F_1}{\partial x_n} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Les équations (15) et (16) donnent la *variété de contact à* (n — 1) *dimensions*. On éliminera $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre les équations (13) (15) (16) et on trouvera encore la condition $F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ (*).

27. Exemples. I. « Soit proposée l'équation entre quatre variables

$$(y+t+z)\frac{dz}{dx} + (x+t+z)\frac{dz}{dy} + (x+y+z)\frac{dz}{dt} = x+y+t.$$

On aura à intégrer ces trois équations particulières :

$$dy - \frac{x+t+z}{y+t+z}dx = 0,$$

$$dt - \frac{x+y+z}{y+t+z}dx = 0,$$

$$dz - \frac{x+y+t}{y+t+z}dx = 0,$$

(*) Les auteurs se sont bornés, jusqu'à présent, à la recherche de F dans le cas où l'on se donne la condition (10), ce qui est naturel, puisque l'idée d'une géométrie à $(n+1)$ dimensions est toute récente. Cependant Cauchy, vers la fin du mémoire que nous analysons plus bas (livre III, ch. I), s'impose des conditions un peu plus générales que (10). Les recherches de Lie, qui sont la continuation naturelle de celles de Cauchy, reposent essentiellement sur la géométrie à $(n+1)$ dimensions. [Comparez la note du n° 4, p. 6.]

et pour cet effet, j'en tire d'abord celles-ci :

$$dy - dx = \frac{x - y}{y + t + z} dx,$$

$$dt - dx = \frac{x - t}{y + t + z} dx,$$

$$dz - dx = \frac{x - z}{y + t + z} dx,$$

$$dx + dy + dt + dz = \frac{3(x + y + t + z)}{y + t + z} dx,$$

d'où éliminant $\frac{dx}{y+t+z}$, j'ai trois équations intégrables, et dont les intégrales seront

$$(y - x)^3 (x + y + t + z) = \alpha,$$
$$(t - x)^3 (x + y + t + z) = \beta,$$
$$(z - x)^3 (x + y + t + z) = \gamma;$$

de là, on aura pour l'intégrale de la proposée $\alpha = \varphi(\beta, \gamma)$ » (Lagrange) (*).

Supposons que pour $x = 0$, on ait

$$t^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

On devra éliminer t, y, z entre cette équation et les suivantes :

$$y^3 (y + t + z) = \alpha,$$
$$t^3 (y + t + z) = \beta,$$
$$z^3 (y + t + z) = \gamma.$$

On trouve d'abord, en ajoutant ces trois relations :

$$\alpha + \beta + \gamma = y + z + t,$$

puis,

$$y = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}}, \quad t = \sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}}, \quad z = \sqrt[3]{\frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}}.$$

En substituant ces valeurs dans la dernière équation, on trouve l'équation de condition suivante :

$$(\alpha + \beta + \gamma)^{4/3} = \alpha^{1/3} + \beta^{1/3} + \gamma^{1/3};$$

(*) Mémoires de Berlin, 1779, pp. 155-156.

d'où pour l'intégrale :

$$(y-x)^3+(z-x)^3+(t-x)^3=\left[\frac{(y-x)+(z-x)+(t-x)}{x+y+z+t}\right]^{\frac{3}{4}}.$$

II. L'équation

$$mz=px+p_1x_1+\cdots+p_nx_n$$

conduit au système auxiliaire

$$\frac{dz}{mz}=\frac{dx}{x}=\frac{dx_1}{x_1}=\cdots=\frac{dx_n}{x_n},$$

dont les intégrales sont :

$$\frac{z}{x^m}=a,\ \frac{x_1}{x}=a_1,\ldots,\frac{x_n}{x}=a_n.$$

L'intégrale de l'équation donnée est donc :

$$z=x^m\varphi\left(\frac{x_1}{x},\ \frac{x_2}{x},\ldots,\frac{x_n}{x}\right),$$

ce qui prouve que *les fonctions homogènes jouissent seules de la propriété exprimée par l'équation aux dérivées partielles*

$$mz=px+p_1x_1+\cdots+p_nx_n\ (^*).$$

III. Soit à intégrer l'équation (**)

$$(X_1-x_1X_n)\,p_1+(X_2-x_2X_n)\,p_2+\cdots+(X_{n-1}-x_{n-1}X_n)\,p_{n-1}=1,$$

(*) Lacroix, t. II, n° 736, p. 543.

(**) C'est à peu près l'équation étudiée par Hesse dans le mémoire intitulé : *De integratione aequationis differentialis partialis*

$$A_1-A_2\frac{\partial x_1}{\partial x_2}-A_3\frac{\partial x_1}{\partial x_3}-\cdots-A_{n-1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}}$$
$$+A_n\left\{x_2\frac{\partial x_1}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial x_1}{\partial x_3}+\cdots+x_{n-1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}}-x_1\right\}=0$$

designantibus A_1, A_2, ..., A_n *functiones quaslibet variabilium* x_1, x_2, ..., x_{n-1} *lineares* (Journal de Crelle, t. XXV, pp. 171-177). Hesse cite un travail antérieur sur l'équation différentielle correspondant à $n=3$, dû à Jacobi et auquel il a emprunté sa méthode d'intégration. Voir aussi Serret, *Calcul intégral*, pp. 425-433, [et Fouret, C. R., t. LXXVIII, pp. 831, 1693, 1837.]

où les fonctions X sont définies par l'équation :

$$X_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{i,n-1}x_{n-1} + a_{i,n}.$$

Les équations auxiliaires seront :

$$\frac{dz}{1} = \frac{dx_1}{X_1 - x_1X_n} = \frac{dx_2}{X_2 - x_2X_n} = \cdots = \frac{dx_{n-1}}{X_{n-1} - x_{n-1}X_n},$$

ou encore :

$$\frac{dx_1}{dz} = X_1 - x_1X_n,$$

$$\frac{dx_2}{dz} = X_2 - x_2X_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_{n-1}}{dz} = X_{n-1} - x_{n-1}X_n.$$

Posons, avec Hesse,

$$x_1 = \frac{y_1}{y_n},\ x_2 = \frac{y_2}{y_n}, \ldots, x_{n-1} = \frac{y_{n-1}}{y_n},$$

y_n étant une fonction encore indéterminée. On aura :

$$\frac{dx_1}{dz} = \frac{1}{y_n}\frac{dy_1}{dz} - \frac{y_1}{y_n^2}\frac{dy_n}{dz}, \ldots, \frac{dx_{n-1}}{dz} = \frac{1}{y_n}\frac{dy_{n-1}}{dz} - \frac{y_{n-1}}{y_n^2}\frac{dy_n}{dz},$$

et, par suite, le système auxiliaire sera, après multiplication par y_n,

$$\frac{dy_1}{dz} - X_1y_1 = \frac{y_1}{y_n}\left(\frac{dy_n}{dz} - X_ny_n\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dz} - X_{n-1}y_{n-1} = \frac{y_{n-1}}{y_n}\left(\frac{dy_n}{dz} - X_ny_n\right).$$

Déterminons y_n par la condition

$$\frac{dy_n}{dz} = X_ny_n,$$

et posons en général :

$$Y = X_ny_n = a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n.$$

Le système auxiliaire deviendra :

$$\frac{dy_1}{dz} = Y_1,\quad \frac{dy_2}{dz} = Y_2, \ldots, \frac{dy_n}{dz} = Y_n.$$

On intègre facilement ces équations par la méthode des produits symboliques de Brisson et Cauchy (*). Si D indique une dérivation par rapport à z, chacune des équations précédentes pourra s'écrire :

$$a_{i1} y_1 + \cdots + (a_{ii} - \mathrm{D}) y_i + \cdots + a_{in} y_n = 0.$$

L'élimination de toutes les fonctions à déterminer, sauf une quelconque, conduit, comme l'on sait, à une seule équation linéaire d'ordre n :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \mathrm{D}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - \mathrm{D}, & a_{23}, & \ldots, & a_{2n} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - \mathrm{D}, & \ldots, & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & \ldots, & a_{nn} - \mathrm{D} \end{vmatrix} y = 0.$$

On déduit de là, pour les fonctions y, des expressions de la forme :

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 z_{11} + c_2 z_{12} + \cdots + c_n z_{1n}, \\ y_2 &= c_1 z_{21} + c_2 z_{22} + \cdots + c_n z_{2n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= c_1 z_{n1} + c_2 z_{n2} + \cdots + c_n z_{nn}, \end{aligned}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant des constantes, $z_{11}, \ldots, z_{nn}$, des fonctions de z, qui, dans le cas général, ne diffèrent que par des facteurs constants, pour deux fonctions y.

On tire des valeurs précédentes

$$x_1 = \frac{y_1}{y_n} = \frac{\sum c_i z_{1i}}{\sum c_i z_{ni}}, \ldots, x_{n-1} = \frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\sum c_i z_{n-1,i}}{\sum c_i z_{ni}}.$$

(*) Cauchy, Exercices de mathématiques, t. II, pp. 159 et suiv.: *Sur l'analogie des puissances et des différences.* [Voir aussi notre petit Mémoire : *Note sur la première méthode de Brisson pour l'intégration des équations aux différences finies ou infiniment petites.* Mém. couronnés et autres mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique, t. XXII.]

On aura l'intégrale de l'équation donnée, en éliminant les $(n-1)$ constantes

$$\frac{c_1}{c_n},\ \frac{c_2}{c_n},\dots,\frac{c_{n-1}}{c_n},$$

entre ces équations et la relation quelconque

$$F\left(\frac{c_1}{c_n},\ \frac{c_2}{c_n},\dots,\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)=0.$$

[Au point de vue de Lie, les équations qui donnent les valeurs des $(n-1)$ quantités x, constituent l'intégrale complète de l'équation donnée.]

28. *De quelques équations que l'on peut rendre linéaires* (*).

I. Soit l'équation

$$x_1 f_1 = p_2 f_2 + p_3 f_3 + \cdots + p_n f_n - f,$$

chacune des fonctions f étant de la forme

$$f(z-p_1x_1, p_1, x_2, \dots, x_n).$$

Nous poserons, comme au n° 21 :

$$u = z - p_1 x_1.$$

On déduira de là :

$$du = -x_1 dp_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n,$$

et, en prenant pour nouvelles variables $p_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\frac{du}{dp_1} = -x_1, \frac{du}{dx_2} = p_2, \dots, \frac{du}{dx_n} = p_n.$$

L'équation donnée deviendra

$$f_1\frac{du}{dp_1} + f_2\frac{du}{dx_2} + \cdots + f_n\frac{du}{dx_n} = f,$$

d'où l'on tirera aisément l'intégrale de l'équation donnée (voir n° 21).

(*) Lagrange, Mém. de Berlin, 1779, t. IV, n^os 8 et 9, p. 652. L'équation donnée et la transformée ont été appelées *réciproques*. Voir la note du n° 21.

II. Soit l'équation :

$$x_1f_1 + x_2f_2 = p_3f_3 + \cdots + p_nf_n - f,$$

chacune des fonctions f étant de la forme :

$$f(u, p_1, p_2, x_3, \ldots, x_n),$$

et u étant donné par la relation :

$$u = z - p_1x_1 - p_2x_2.$$

On aura :

$$du = - x_1dp_1 - x_2dp_2 + p_3dx_3 + \cdots + p_ndx_n,$$

$$\frac{du}{dp_1} = - x_1, \quad \frac{du}{dp_2} = - x_2, \quad \frac{du}{dx_3} = p_3, \cdots, \frac{du}{dx_n} = p_n.$$

L'équation donnée deviendra encore linéaire :

$$f_1\frac{du}{dp_1} + f_2\frac{du}{dp_2} + f_3\frac{du}{dx_3} + \cdots + f_n\frac{du}{dx_n} = f.$$

III. Et ainsi de suite. On doit, en particulier, noter l'équation

$$x_1f_1 + x_2f_2 + \cdots + x_nf_n + f = 0,$$

chacune des fonctions f étant de la forme :

$$f(z - p_1x_1 - \cdots - p_nx_n, p_1, \ldots, p_n).$$

En posant :

$$u = z - p_1x_1 - \cdots - p_nx_n,$$

on trouvera :

$$du = - x_1dp_1 - x_2dp_2 - \cdots - x_ndp_n,$$

$$\frac{du}{dp_1} = - x_1, \quad \frac{du}{dp_2} = - x_2, \ldots, \frac{du}{dp_n} = - x_n,$$

et l'équation transformée sera :

$$f_1\frac{du}{dp_1} + f_2\frac{du}{dp_2} + \cdots + f_n\frac{du}{dp_n} = f.$$

Ainsi, l'équation déjà étudiée plus haut (n° 11)

$$z = p_1x_1 + \cdots + p_nx_n + f(p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

devient de cette manière

$$u = f(p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

En posant

$$p_1 = a_1, p_2 = a_2, \ldots, p_n = a_n,$$

$$u = f(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

on a :

$$du = 0, dp_1 = 0, \ldots, dp_n = 0,$$

et par suite

$$du = -x_1 dp_1 - \cdots - x_n dp_n.$$

On trouve ainsi l'intégrale complète

$$z = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + f(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

§ 7. *Intégration d'un système remarquable d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre* (*).

29. *Génération du système de ces équations.* Soit $(N+1) = (m+n)$, et considérons N fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_N$ de $(m+n)$ variables,

$$z_1, \ldots, z_m, x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

liées entre elles par m équations :

$$F_1(u_1, u_2, \ldots, u_N) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$F_m(u_1, u_2, \ldots, u_N) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1_N)$$

Nous allons montrer qu'il existe entre les dérivées des variables z, par rapport aux variables x, des relations remarquables indépendantes de la forme des fonctions F.

Considérons, pour cela, le déterminant fonctionnel

$$R = D\frac{F(u_1, \ldots, u_N), u_1, \ldots, u_N}{z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(*) Jacobi (Journal de Crelle, t. II, pp. 321-323). On ne comprend pas pourquoi les traités de calcul intégral, publiés depuis l'époque (1827) où il a donné cette extension des recherches de Lagrange, ne font aucune mention de ce complément *indispensable* de toute théorie des équations linéaires aux dérivées partielles. Nous abrégeons l'exposition de Jacobi, sans la modifier, par l'emploi des déterminants fonctionnels.

où entre l'une quelconque des fonctions F. Comme la fonction F dépend des fonctions u, ce déterminant sera nul. Donc

$$Z_1 \frac{dF}{dz_1} + \cdots + Z_m \frac{dF}{dz_m} + X_1 \frac{dF}{dx_1} + \cdots + X_n \frac{dF}{dx_n} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

en appelant $Z_1, \ldots, Z_m, X_1, \ldots, X_n$, les déterminants mineurs de R, de sorte que

$$Z_i = (-1)^{i-1} \mathrm{D} \frac{u_1, u_2, \ldots, u_N}{z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n},$$

$$X_i = (-1)^{m+i-1} \mathrm{D} \frac{u_1, u_2, \ldots, u_N}{z_1, \ldots, z_m; x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n} \cdot \cdot$$

L'équation (3) est équivalente aux m équations :

$$Z_1 \frac{dF_1}{dz_1} + \cdots + Z_m \frac{dF_1}{dz_m} + X_1 \frac{dF_1}{dx_1} + \cdots + X_n \frac{dF_1}{dx_n} = 0, \quad . \quad . \quad (3_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z_1 \frac{dF_m}{dz_1} + \cdots + Z_m \frac{dF_m}{dz_m} + X_1 \frac{dF_m}{dx_1} + \cdots + X_n \frac{dF_m}{dx_n} = 0. \quad . \quad . \quad (3_m)$$

Considérons maintenant le déterminant fonctionnel

$$\Delta = \mathrm{D} \frac{F_1, \ldots, F_m}{z_1, \ldots, z_m} = A_{11} \frac{dF_1}{dz_1} + A_{21} \frac{dF_2}{dz_1} + \cdots = A_{12} \frac{dF_1}{dz_2} + A_{22} \frac{dF_2}{dz_2} + \cdots,$$

où les A_{ik} désignent des mineurs dont la valeur est donnée par la formule

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \mathrm{D} \frac{F_1, \ldots, F_{i-1}, F_{i+1}, \ldots, F_m}{z_1, \ldots, z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots, z}.$$

On aura donc

$$A_{11} \frac{dF_1}{dz_2} + A_{21} \frac{dF_2}{dz_2} + \cdots = 0,$$

$$A_{11} \frac{dF_1}{dz_3} + A_{21} \frac{dF_2}{dz_3} + \cdots = 0, \text{ etc.}$$

Multiplions les équations (3) respectivement par $A_{11}, A_{21}, \ldots, A_{m1}$, puis par $A_{12}, A_{22}, \ldots, A_{m2}$, etc., et ajoutons, il viendra :

$$Z_1 \Delta + \sum_1^n X_i \left(A_{11} \frac{dF_1}{dx_i} + \cdots + A_{m1} \frac{dF_m}{dx_i} \right) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z_m \Delta + \sum_1^n X_i \left(A_{m1} \frac{dF_1}{dx_i} + \cdots + A_{mm} \frac{dF_m}{dx_i} \right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4_m)$$

Il est facile de simplifier ces relations. On a, pour chaque variable x,

$$\frac{dF_1}{dx}+\frac{dF_1}{dz_1}\frac{dz_1}{dx}+\cdots+\frac{dF_1}{dz_m}\frac{dz_m}{dx}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dF_m}{dx}+\frac{dF_m}{dz_1}\frac{dz_1}{dx}+\cdots+\frac{dF_m}{dz_m}\frac{dz_m}{dx}=0.$$

Multiplions ces relations par

$$A_{i1},\ A_{i2},\ldots,A_{im},$$

et ajoutons, elles donneront

$$A_{i1}\frac{dF_1}{dx}+\cdots+A_{im}\frac{dF_m}{dx}+\Delta\frac{dz_i}{dx}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

A cause de cette équation (5), les équations (4) prennent la forme très-simple découverte par Jacobi :

$$Z_1=X_1\frac{dz_1}{dx_1}+X_2\frac{dz_1}{dx_2}+\cdots+X_n\frac{dz_1}{dx_n}, \quad \ldots\ldots \quad (6_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z_m=X_1\frac{dz_m}{dx_1}+X_2\frac{dz_m}{dx_2}+\cdots+X_n\frac{dz_m}{dx_n} \quad \ldots\ldots \quad (6_m)$$

30. [*Démonstration directe des formules* (6). Voici une démonstration directe des m formules (6), qui n'a pas été remarquée encore, croyons-nous. Le déterminant fonctionnel

$$S_i=D\,\frac{z_i,u_1,\ldots,u_N}{z_1,z_m,x_1,\ldots,x_n}$$

est nul, parce que les $(m+n)$ fonctions $u_1,\ldots,u_N$ et z_i, des variables $z_1,\ldots,z_m,x_1,\ldots,x_n$ ne sont pas indépendantes, puisqu'il existe entre elles m relations (1). L'équation, qui exprime cette dépendance, savoir

$$S_i=0,$$

est précisément l'équation (6_i).]

Si l'on remplace les A, par leur valeur, dans chacune des équations (4), on arrive à une formule remarquable de la théorie des déterminants fonctionnels. Elle exprime la même chose que l'équation $S_i=0$, mais les relations entre les z et les u, supposées explicites dans cette dernière, sont supposées sous forme implicite dans la formule dont nous parlons. Nous croyons inutile de l'écrire.

31. *Intégration du système* (6). Si dans le système (6), $Z_1, \ldots, Z_m$; $X_1, \ldots, X_n$, sont des fonctions quelconques, pour intégrer ce système, on cherchera d'abord les N intégrales

$$u_1 = a_1, u_2 = a_2, \ldots, u_N = a_N,$$

des équations

$$\frac{dz_1}{Z_1} = \cdots = \frac{dz_m}{Z_m} = \frac{dx_1}{X_1} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Toute fonction F des quantités u satisfera aux équations (3) et par suite égalée à 0, aux équations (6). On pourra donc prendre pour système intégral des équations (6), m relations de la forme $F = 0$.

Réciproquement toute équation

$$\psi(z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

qui satisfait avec $(m - 1)$ autres, au système donné (6), est de la forme (1).

En effet, on aura :

$$\frac{\delta\psi}{\delta x_1} + \frac{\delta\psi}{\delta z_1}\frac{dz_1}{dx_1} + \cdots + \frac{\delta\psi}{\delta z_m}\frac{dz_m}{dx_1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\delta\psi}{\delta x_n} + \frac{\delta\psi}{\delta z_1}\frac{dz_1}{dx_n} + \cdots + \frac{\delta\psi}{\delta z_m}\frac{dz_m}{dx_n} = 0.$$

Multiplions ces équations par $X_1, X_2, \ldots, X_m$, et ajoutons les produits. Il viendra, en tenant compte des équations (6) :

$$Z_1\frac{\delta\psi}{\delta z_1} + Z_2\frac{\delta\psi}{\delta z_2} + \cdots + Z_m\frac{\delta\psi}{\delta z_m} + X_1\frac{\delta\psi}{\delta x_1} + X_2\frac{\delta\psi}{\delta x_2} + \cdots + X_m\frac{\delta\psi}{\delta x_m} = 0.$$

Cette équation donne, avec les équations (3), où l'on fait

$$F = u_1, u_2, \ldots, u_N,$$

$$D\frac{\psi, u_1, u_2, \ldots, u_N}{z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n} = 0,$$

ou

$$\psi = F(u_1, u_2, \ldots, u_N),$$

ce qu'il fallait démontrer (*).

(*) Cette réciproque n'est pas donnée par Jacobi.

32. *Conclusion générale.* Il résulte, des théorèmes démontrés dans ce chapitre, que la solution d'un système :

$$\frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \cdots = \frac{dy_k}{Y_k}, \qquad \text{(A)}$$

au moyen de $(k-1)$ relations :

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2,$$

$Y_1, Y_2, \ldots, u_1, u_2, \ldots$ étant des fonctions de $y_1, y_2, \ldots$, entraîne celle des systèmes d'équations suivants :

$$\left.\begin{array}{ll}
1 \ldots\ldots & Y_1 = Y_2 \dfrac{dy_1}{dy_2} + Y_3 \dfrac{dy_1}{dy_3} + \text{etc.}; \\[2ex]
2 \ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} Y_1 = Y_3 \dfrac{dy_1}{dy_3} + Y_4 \dfrac{dy_1}{dy_4} + \text{etc.}, \\[1ex] Y_2 = Y_3 \dfrac{dy_2}{dy_3} + Y_4 \dfrac{dy_2}{dy_4} + \text{etc.}; \end{array}\right. \\[4ex]
3 \ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} Y_1 = Y_4 \dfrac{dy_1}{dy_4} + Y_5 \dfrac{dy_1}{dy_5} + \text{etc.}, \\[1ex] Y_2 = Y_4 \dfrac{dy_2}{dy_4} + Y_5 \dfrac{dy_2}{dy_5} + \text{etc.}, \\[1ex] Y_3 = Y_4 \dfrac{dy_3}{dy_4} + Y_5 \dfrac{dy_3}{dy_5} + \text{etc.}; \end{array}\right. \\[6ex]
 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\[1ex]
(k-2) \ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} Y_1 = Y_{k-1} \dfrac{dy_1}{dy_{k-1}} + Y_k \dfrac{dy_1}{dy_k}, \\[1ex] Y_2 = Y_{k-1} \dfrac{dy_2}{dy_{k-1}} + Y_k \dfrac{dy_2}{dy_k}, \\[1ex] \ldots\ldots\ldots\ldots \\[1ex] Y_{k-2} = Y_{k-1} \dfrac{dy_{k-2}}{dy_{k-1}} + Y_k \dfrac{dy_{k-2}}{dy_k}; \end{array}\right. \\[8ex]
(k-1) \ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} Y_1 = Y_k \dfrac{dy_1}{dy_k}, \\[1ex] Y_2 = Y_k \dfrac{dy_2}{dy_k}, \\[1ex] \ldots\ldots\ldots \\[1ex] Y_{k-1} = Y_k \dfrac{dy_{k-1}}{dy_k}; \end{array}\right.
\end{array}\right\} \text{(B)}$$

dont le premier est réduit à une équation, et dont le dernier est le système (A) lui-même. La solution d'un quelconque des systèmes (B) se compose d'autant de relations distinctes, de la forme

$$F(u_1, \ldots, u_k) = 0,$$

qu'il y a d'équations dans le système.

CHAPITRE II.

MÉTHODE DE LAGRANGE POUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES A TROIS VARIABLES ET DE QUELQUES ÉQUATIONS CONTENANT UN PLUS GRAND NOMBRE DE VARIABLES (*).

§ 8. *Idée générale de la méthode de Lagrange.*

33. *Idée générale de la méthode de Lagrange.* Soit

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \quad \text{ou} \quad q = \varkappa(x, y, z, p), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

(*) LAGRANGE (Mémoires de Berlin, 1772, OEuvres, t. III, pp. 549-577) a ramené l'intégration des équations quelconques du premier ordre à trois variables, à celles des équations linéaires aux dérivées partielles à quatre variables et aussi du premier ordre. Il a réduit, comme on l'a vu dans le chapitre Ier, l'intégration de celles-ci à celle des équations différentielles ordinaires, en 1779 ; cependant en 1785, il ne voyait pas encore clairement qu'il résulte de là que l'intégration des équations aux dérivées partielles quelconques à trois variables est ramenée à celle des équations différentielles ordinaires, car dans son Mémoire de cette année, p. 188, il déclare ne pouvoir achever l'intégration d'une équation non linéaire. C'est CHARPIT qui a montré, le premier, en 1784, dans un mémoire qui n'a jamais été publié, la connexion de ces trois questions : intégration des équations différentielles ordinaires, intégration des équations linéaires aux dérivées partielles, et intégration des équations non linéaires aux dérivées partielles. Nous empruntons ces remarques à LACROIX, t. II, n° 740, p. 548, et JACOBI (Journal de Crelle, t. XXIII, p. 3).

l'équation donnée. Remplaçons q par sa valeur dans

$$dz = pdx + qdy; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

il viendra

$$dz = pdx + \varkappa(x, y, z, p)\,dy. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

La méthode de Lagrange, *sous sa première forme*, consiste à chercher, en général par tâtonnement, une valeur de p contenant une constante arbitraire a et rendant l'équation différentielle totale (3) intégrable; puis à en déduire z avec une seconde constante arbitraire b.

Autrement dit encore, et sous une forme plus générale, on doit chercher une relation autre que (1) entre x, y, z, p, q, contenant une constante arbitraire, et telle que les valeurs de p et q qu'on déduit de cette relation et de (1), rendent l'équation (2) intégrable (*).

La méthode s'étend sans peine à un nombre quelconque de variables. Soit

$$f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad \text{ou} \quad p_n = \pi(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}), \quad (1')$$

l'équation donnée. Remplaçons p_n par sa valeur dans

$$dz = p_1dx_1 + p_2dx_2 + \cdots + p_ndx_n; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2')$$

il viendra

$$dz = p_1dx_1 + p_2dx_2 + \cdots + \pi dx_n. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3')$$

Il faudra trouver pour $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ des valeurs contenant chacune une constante arbitraire et rendant (3′) intégrable. Plus généralement, il faut trouver $(n - 1)$ relations contenant chacune $(n - 1)$ constantes arbitraires et donnant, avec (1′), pour $p_1, p_2, \ldots, p_n$, des valeurs qui permettent d'intégrer l'équation (2′).

Telle est la méthode de Lagrange, sous sa forme la plus générale. Nous allons montrer, sur quelques exemples, que l'on peut déjà, au moyen des indications qui précèdent, intégrer des équations assez compliquées.

(*) Lagrange, dans son premier mémoire, a indiqué la méthode générale pour trouver cette seconde relation, mais sans pouvoir la faire aboutir en général, puisqu'il ne possédait pas alors l'intégration des équations linéaires.

34. *Exemples.* I. Soit à intégrer les équations (*) :

$$1^\circ\ q = \varkappa p,$$
$$2^\circ\ q = \varkappa(p, y).$$

On aura

$$dz = pdx + \varkappa pdy, \quad dz = pdx + \varkappa(p, y)\,dy,$$

équations immédiatement intégrables si on fait $p = a$. On trouve les intégrales complètes :

$$z = ax + b + \varkappa ay,$$
$$z = ax + b + \int \varkappa(a, y)\,dy.$$

En appliquant ce procédé d'intégration aux équations :

$$pq = 1,$$
$$p^2 + q^2 + 1 = m^2,$$
$$p = qy + q^2,$$

on trouve les intégrales complètes :

$$z = ax + b + \frac{y}{a},$$
$$z = ax + b + \frac{y}{\sqrt{m^2 - 1 - a^2}},$$
$$z = ax + b - \frac{y^2}{4} \pm \left(\frac{y\sqrt{y^2 + 4a}}{4} + 2a\,\mathrm{l}\left(y + \sqrt{y^2 + 4a}\right)\right).$$

La seconde de ces équations répond au problème suivant : « *Trouver les surfaces dont l'aire, pour une portion quelconque, est à sa projection sur le plan des* xy, *dans le rapport* m : 1 ; ou encore : *Trouver les surfaces dont les normales soient parallèles aux génératrices d'un cône droit* (Comp. n° 15).

II. Soit à intégrer : 1° L'équation (**)

$$f_1(x, p) = f_2(y, q).$$

(*) Lagrange, Mémoires de Berlin, 1772, 1er, 2me et 3me cas ; Œuvres, t. III, pp. 558-560.

(**) Lagrange, Mémoires de Berlin, 1772, 4me cas, Œuvres, t. III, p. 561 ; Mémoires de Berlin, 1774, n° 50, Œuvres, t. IV, p. 80.

On posera

$$f_1(x, p) = a, \quad f_2(y, q) = a.$$

On en déduira :

$$p = \varphi_1(x, a), \quad q = \varphi_2(y, a);$$

d'où

$$dz = \varphi_1(x, a)\, dx + \varphi_2(y, a)\, dy,$$
$$z = \int \varphi_1(x, a)\, dx + \int \varphi_2(y, a)\, dy + b.$$

2° Soit de même à intégrer (*)

$$F(f_1, f_2, \cdots, f_n) = 0,$$

où

$$f_i = f_i(x_i, p_i \varphi z).$$

Il suffira de poser

$$f_i = a_i,$$
$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

pour pouvoir déterminer, $p_1\varphi$ en fonction de x_1, $p_2\varphi$ en fonction de x_2, ... , de manière que

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

deviendra intégrable après multiplication par φ.

On peut rattacher à ces deux exemples la méthode dite *par séparation des variables ;* on la trouvera plus bas (§ 19, n° 72).

III. Soit encore à intégrer l'équation (**)

$$q = pf(x, y) + F(x, y, z),$$

On aura

$$dz = p[dx + f(x, y)\, dy] + F dy.$$

Intégrons

$$dx + f dy,$$

au moyen d'un facteur intégrant v, de manière que

$$v(dx + f dy) = du.$$

(*) Lagrange, Mémoires de Berlin, 1772, nos 13-14; Œuvres, t. III, p. 374.

(**) Lagrange, Mémoires de Berlin, 1772, 8me cas, t. III, p. 367; idem, 1774, t. IV, n° 52, p. 82.

On éliminera x de F, en y introduisant u, puis on intégrera

$$dz - Fdy = 0$$

au moyen d'un facteur intégrant V, de telle sorte que, dans cette hypothèse,

$$V(dz - Fdy) = dU,$$

ou encore, en supposant u variable, que

$$V(dz - Fdy) + \frac{dU}{du}du = dU.$$

En introduisant du et dU dans la valeur de dz, il vient enfin

$$dU = V(dz - Fdy) + \frac{dU}{du}du = \frac{Vpdu}{v} + \frac{dU}{du}du.$$

Posons

$$\frac{Vp}{v} + \frac{dU}{du} = a,$$

et nous aurons, pour intégrale :

$$U - au - b = 0.$$

Ainsi, par exemple, si

$$q = p\frac{y}{x} + (x^2 + y^2 + z),$$

$$u = x^2 + y^2, \quad v = 2x, \quad U = l(z + u) - y, \quad V = (z + u)^{-1},$$

et l'intégrale est

$$-y + l(z + x^2 + y^2) - a(x^2 + y^2) - b = 0.$$

IV. Soit enfin l'équation (*)

$$q = p^m \times f_1x \times f_2y \times f_3z.$$

Nous poserons

$$p = F_1x \,.\, F_2z,$$

F_1 et F_2 étant des fonctions encore indéterminées. On aura

$$dz = F_1x \,.\, F_2z \,.\, dx + (F_1x)^m \,.\, f_1x \times f_2y \times (F_2z)^m \,.\, f_3zdy.$$

(*) LAGRANGE, Mémoires de Berlin, 1772, 9me cas, t. III, p. 569.

Si l'on détermine F_1 et F_2 par les relations

$$(F_2 z)^{m-1} f_3 z = 1,$$
$$(F_1 x)^m f_1 x = a^m,$$

il vient :

$$\frac{dz}{F_2 z} = \frac{adx}{\sqrt[m]{f_1 x}} + a^m f_2 y dy,$$

qui est immédiatement intégrable.

On trouve la même solution, par la méthode dite de séparation des variables (voir plus bas, § 19, n° 72).

§ 9. *Méthode de Lagrange pour l'intégration des équations aux dérivées partielles à trois variables* (*).

35. *Cas où l'équation ne contient pas la variable dépendante.* Soit

$$f(x, y, p, q) = 0, \quad \text{ou} \quad q = \varkappa(x, y, p), \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

l'équation donnée. On sait que

$$dz = pdx + qdy. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Si l'on connaissait les valeurs de p et de q en x et y, on devrait avoir

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

et l'équation (1) pour ces valeurs deviendrait une identité. On a donc :

$$\frac{dq}{dx} = \frac{\delta\varkappa}{\delta x} + \frac{\delta\varkappa}{\delta p}\frac{dp}{dx}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta p}\frac{dp}{dx} + \frac{\delta f}{\delta q}\frac{dq}{dx} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4')$$

Éliminons $\frac{dq}{dx}$ de la relation (4) ou de la relation (4'), au moyen

(*) Outre les écrits cités au commencement du § 7, voir Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik,* leçon 22, pp. 168-173.

de (3); nous trouverons que p doit satisfaire à l'une des équations linéaires équivalentes :

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\delta\varkappa}{\delta x} + \frac{\delta\varkappa}{\delta p}\frac{dp}{dx}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta p}\frac{dp}{dx} + \frac{\delta f}{\delta q}\frac{dp}{dy} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5')$$

Réciproquement, si l'on connaît une solution des équations (5) ou (5′), la valeur de p donnée par cette solution, et la valeur correspondante de q donnée par (1), rendent dz intégrable, ou satisfont à l'équation (3). En effet, des équations (1), (5) ou (1), (5′) on déduit l'équation (3).

Ainsi, on trouvera toutes les solutions de l'équation (1), en cherchant toutes les valeurs de p, qui satisfont à l'équation (5) ou à l'équation (5′), puis au moyen de (1), toutes les valeurs correspondantes de q, et intégrant l'équation (2). En général, il vaudra mieux se contenter de chercher une valeur de p contenant une constante arbitraire a, et satisfaisant à (5′), puis la valeur correspondante de q, et enfin intégrer (3); on arrivera ainsi à une solution de l'équation (1) qui contiendra deux constantes arbitraires, et qui sera une intégrale complète.

L'intégrale de l'équation (1) peut être trouvée, par des calculs plus symétriques, si l'on cherche une seconde relation

$$f_1(x, y, p, q) = 0,$$

entre x, y, p, q, qui serve à déterminer p et q avec (1) de la manière suivante. On a alors

$$\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta p}\frac{dp}{dx} + \frac{\delta f}{\delta q}\frac{dq}{dx} = 0; \quad \frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta f}{\delta p}\frac{dp}{dy} + \frac{\delta f}{\delta q}\frac{dq}{dy} = 0;$$

$$\frac{\delta f_1}{\delta x} + \frac{\delta f_1}{\delta p}\frac{dp}{dx} + \frac{\delta f_1}{\delta q}\frac{dq}{dx} = 0; \quad \frac{\delta f_1}{\delta y} + \frac{\delta f_1}{\delta p}\frac{dp}{dy} + \frac{\delta f_1}{\delta q}\frac{dq}{dy} = 0.$$

Éliminant, au moyen de la théorie des déterminants,

$$\frac{dp}{dx}, \quad \frac{dq}{dx}, \quad \frac{dp}{dy}, \quad \frac{dq}{dy},$$

entre ces équations et l'équation (5), il viendra :

$$\mathrm{D}\frac{f,\ f_1}{x,\ p}+\mathrm{D}\frac{f, f_1}{y, q}=0,$$

ou

$$\frac{\delta f}{\delta x}\frac{\delta f_1}{\delta p}-\frac{\delta f}{\delta p}\frac{\delta f_1}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta y}\frac{\delta f_1}{\delta q}-\frac{\delta f}{\delta q}\frac{\delta f_1}{\delta y}=0\ldots\ldots\quad(6)$$

36. *Cas général.* Soit maintenant l'équation

$$f(x, y, z, p, q)=0,\quad \text{ou}\quad q=\varkappa(x, y, z, p).\ldots\ldots\quad(7)$$

On sait que

$$dz=pdx+qdy.\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(2)$$

Si l'on connaissait une seconde relation

$$f_1(x, y, z, p, q)=0,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\quad(8)$$

entre x, y, z, p, q, on pourrait déduire, de cette équation et de l'équation donnée, les valeurs de p et de q, et en substituant ces valeurs dans l'équation (2), celle-ci deviendrait immédiatement intégrable. On devra donc avoir

$$\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(9)$$

ou

$$\frac{\delta p}{\delta y}+\frac{\delta p}{\delta z}q=\frac{\delta q}{\delta x}+\frac{\delta q}{\delta z}p.\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(9')$$

pour toute relation (8) correspondant à une solution de (7).

Supposons que l'on substitue dans l'équation (7) les valeurs de p et de q en x, y, z, déduites de cette équation (7) et de l'équation (8); l'équation (7) deviendra une identité, et par suite on aura :

$$\frac{\delta q}{\delta x}=\frac{\delta\varkappa}{\delta x}+\frac{\delta\varkappa}{\delta p}\frac{\delta p}{\delta x},\quad \frac{\delta q}{\delta z}=\frac{\delta\varkappa}{\delta z}+\frac{\delta\varkappa}{\delta p}\frac{\delta p}{\delta z},\ldots\ldots\quad(10)$$

ou

$$\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta p}\frac{\delta p}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta q}\frac{\delta q}{\delta x}=0,\quad \frac{\delta f}{\delta z}+\frac{\delta f}{\delta p}\frac{\delta p}{\delta z}+\frac{\delta f}{\delta q}\frac{\delta q}{\delta z}=0.\ldots\quad(10')$$

Au moyen des équations (10), ou (10′) et (7), on pourra éliminer $\frac{dq}{dx}$, $\frac{dq}{dz}$ de l'équation (9′), qui deviendra ainsi :

$$\frac{\delta p}{\delta x}\frac{\delta\varkappa}{\delta p}-\frac{\delta p}{\delta y}+\frac{\delta p}{\delta z}\left(p\frac{\delta\varkappa}{\delta p}-\varkappa\right)+\frac{\delta\varkappa}{\delta x}+p\frac{\delta\varkappa}{\delta z}=0,\ \ldots\quad(11)$$

ou $$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q}+\left(p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial p}{\partial z}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)=0.\quad(11')$$

Réciproquement, des équations (7) (11) ou (7) (11′), on peut déduire l'équation (9′). L'intégration de l'équation (7) est donc ramenée à celle de l'équation (11), ou de l'équation (11′) d'où l'on suppose q éliminé.

On peut aussi ramener l'intégration de (7) à la recherche d'une relation implicite (8). Pour cela, on tirera de (7) et (8),

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0, &&\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0, &&\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0,\\
&\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z}=0, &&\frac{\partial f_1}{\partial z}+\frac{\partial f_1}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial f_1}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

Les deux premières de ces équations donnent :

$$\mathrm{D}\frac{f,f_1}{x,p}+\mathrm{D}\frac{f,f_1}{q,p}\frac{\partial q}{\partial x}=0;$$

les secondes :

$$\mathrm{D}\frac{f,f_1}{y,q}+\mathrm{D}\frac{f,f_1}{p,q}\frac{\partial p}{\partial y}=0;$$

les troisièmes :

$$\mathrm{D}\frac{f,f_1}{z,p}+\mathrm{D}\frac{f,f_1}{q,p}\frac{\partial q}{\partial z}=0,\qquad \mathrm{D}\frac{f,f_1}{z,q}+\mathrm{D}\frac{f,f_1}{p,q}\frac{\partial p}{\partial z}=0.$$

Combinant ces relations avec (9′) il vient :

$$\mathrm{D}\frac{f,f_1}{x,p}+\mathrm{D}\frac{f,f_1}{y,q}+p\,\mathrm{D}\frac{f,f_1}{z,p}+q\,\mathrm{D}\frac{f,f_1}{z,q}=0;$$

ou, en changeant les signes, et ordonnant suivant les dérivées de f_1

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\left(p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}\right)-\frac{\partial f_1}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)-\frac{\partial f_1}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}\right)=0.\,(13)$$

On arrive au même résultat, par la théorie des déterminants, en éliminant les dérivées de p et q entre (9′) et (12). On peut aussi remonter des équations (7) et (13) à l'équation (9′).

37. *Déduction de l'intégrale générale, de l'équation (11), (11') ou (13).* Les systèmes d'équations différentielles simultanées correspondant à ces équations, d'après le n° 32, sont :

$$-\frac{dx}{\frac{\delta\varkappa}{\delta p}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{\varkappa - p\frac{\delta\varkappa}{\delta p}} = \frac{dp}{\frac{\delta\varkappa}{\delta x} + p\frac{\delta\varkappa}{\delta z}}, \; \ldots\ldots \quad (11_a)$$

$$\frac{dx}{\frac{\delta f}{\delta p}} = \frac{dy}{\frac{\delta f}{\delta q}} = \frac{dz}{p\frac{\delta f}{\delta p} + q\frac{\delta f}{\delta q}} = \frac{-dp}{\frac{\delta f}{\delta x} + p\frac{\delta f}{\delta z}}, \; \ldots\ldots \quad (11'_a)$$

$$\frac{dx}{\frac{\delta f}{\delta p}} = \frac{dy}{\frac{\delta f}{\delta q}} = \frac{dz}{p\frac{\delta f}{\delta p} + q\frac{\delta f}{\delta q}} = \frac{-dp}{\frac{\delta f}{\delta x} + p\frac{\delta f}{\delta z}} = \frac{-dq}{\frac{\delta f}{\delta y} + q\frac{\delta f}{\delta z}}. \quad (13_a)$$

Considérons l'un quelconque de ces systèmes; on tire immédiatement des deux premières équations

$$dz = pdx + qdy, \; \ldots\ldots \quad (14)$$

relation qui peut donc remplacer l'une d'elles. Lagrange a ingénieusement déduit de là la solution d'un paradoxe analytique qu'il avait découvert lui-même.

Le système (11_a) a pour solution un système

$$u = a, \quad v = b, \quad w = c,$$

où u, v, w sont des fonctions de x, y, z, p, et a, b, c des constantes. Par conséquent, l'intégrale de l'équation (11) ou (11') est une relation de la forme

$$u = \varphi(v, w) \; \ldots\ldots \quad (15)$$

φ étant arbitraire.

« Cette équation (15), dit Lagrange, combinée avec l'équation donnée,

$$f(x, y, z, p, q) \; \ldots\ldots \quad (7)$$

donnera les valeurs de p et q en x, y, z, qui, étant substituées dans l'équation

$$dz = pdx + qdy \; \ldots\ldots \quad (2)$$

la rendront susceptible d'une équation en x, y, z qui sera l'équation cherchée. »

« Comme jusqu'ici, rien ne limite la fonction $\varphi(v, w)$, il s'ensuivrait que l'équation primitive d'une équation du premier ordre à trois variables pourrait renfermer une fonction arbitraire de deux quantités; il est facile de se convaincre qu'il est impossible de faire disparaître d'une équation à trois variables une fonction arbitraire de deux quantités par le moyen de ses deux équations dérivées. »

Cette objection n'est pas tout à fait exacte. On peut dire simplement ceci : il est assez extraordinaire, au premier abord, que l'équation primitive d'une équation du premier ordre à trois variables *puisse dépendre de la valeur de* p, *déduite d'une relation* (15) *qui renferme une fonction arbitraire de deux quantités.* Quoi qu'il en soit, Lagrange a très-bien expliqué le paradoxe que nous venons de faire connaître et a donné en même temps le moyen de trouver l'intégrale générale de l'équation (7), comme suit :

Au lieu des variables x, y, z, p, qui entrent dans les équations (11_a) ou ($11'_a$), nous prendrons u, v, w, p. L'équation (14) pouvant remplacer l'une des équations (11_a) ou ($11'_a$), « dans la formule $dz - pdx - qdy$, les termes provenant de la variabilité de p, se détruiront mutuellement, puisque ces mêmes expressions » des anciennes variables en fonction des nouvelles, « rendent cette formule nulle dans le cas où u, v, w sont constantes. Elle deviendra donc de la forme :

$$\mathrm{U}du + \mathrm{V}dv + \mathrm{W}dw,$$

dans laquelle U, V, W seront des fonctions de p, u, v, w » (Lagrange). Au lieu de l'équation (14), on peut donc prendre

$$\mathrm{U}du + \mathrm{V}dv + \mathrm{W}dw = 0 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (16)$$

Comme l'équation (15), qui est une solution de celle-ci, ne contient plus explicitement p, il en sera de même de (16), de sorte que U, V, W sont exprimés au moyen de u, v, w seulement.

Au lieu d'intégrer la relation

$$dz = pdx + qdy \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (2)$$

après y avoir remplacé p et q par leurs valeurs tirées de

$$f(x,y,z,p,q)=0, \dots \dots \dots \dots (7)$$

$$u=\varphi(v,w), \dots \dots \dots \dots (15)$$

nous pouvons donc intégrer

$$\mathrm{U}du+\mathrm{V}dv+\mathrm{W}dw=0, \dots \dots \dots \dots (16)$$

en tenant compte de

$$u=\varphi(v,w), \dots \dots \dots \dots (15)$$

les fonctions u, v, w ne contenant pas q, même implicitement, si elles ont été déterminées au moyen de (11_a). On tirera de (15)

$$du=\frac{\delta\varphi}{\delta v}dv+\frac{\delta\varphi}{\delta w}dw,$$

et par suite, on aura, au lieu de (16) :

$$\left(\mathrm{U}\frac{\delta\varphi}{\delta v}+\mathrm{V}\right)dv+\left(\mathrm{U}\frac{\delta\varphi}{\delta w}+\mathrm{W}\right)dw=0, \dots \dots (17)$$

d'où l'on pourra éliminer u et déduire une relation de la forme

$$v=\psi(w). \dots \dots \dots \dots (18)$$

En éliminant p entre (15) et (18) on aura l'intégrale générale cherchée. Si l'on avait laissé q dans u, v, w, on ajouterait l'équation donnée (7) aux équations (15) et (18). En tout cas, on voit que u et v sont des fonctions de w l'une et l'autre, mais l'une d'elles n'est pas arbitraire.

Les équations (13_a), qui sont au nombre de quatre, ne donnent rien de plus que les équations (11_a) ou ($11'_a$), parce que l'une des solutions de (13_a) est $f=0$, comme on le trouve aisément. En effet, si l'on forme un rapport égal à ceux qui entrent dans (13_a) et dont le numérateur soit

$$\frac{\delta f}{\delta x}dx+\frac{\delta f}{\delta y}dy+\frac{df}{dz}dz+\frac{df}{dp}dp+\frac{\delta f}{\delta q}dq,$$

on trouve que le dénominateur est nul. Une des équations (13_a)

peut donc être remplacée par $df = 0$, ou $f =$ constante. Cette constante doit être nulle, puisque sans cela l'intégrale trouvée serait incompatible avec l'équation donnée. Le système (15_a) équivaut donc au système ($11'_a$) auquel on ajoute $f = 0$ (*).

38. *Recherche de l'intégrale complète* (**). Prenons, pour la relation (15), l'équation

$$u = a + bv + cw,$$

où a, b, c sont des constantes arbitraires, et faisons $b = 0$, $c = 0$. On trouvera

$$u = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Cette équation, avec

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

donnera p et q exprimés au moyen de la constante arbitraire a, et des variables x, y, z. Par suite

$$dz = pdx + qdy$$

conduira à une solution avec deux constantes arbitraires qui sera l'*intégrale complète*.

On peut arriver à celle-ci d'une autre manière, en certains cas. Supposez que dans l'équation (16), on ait $W = 0$. Il est clair que l'on satisfera à celle-ci, en posant

$$u = a, \quad v = b,$$

relations qui, avec (7), donneront l'intégrale complète (voir l'exemple du n° 39).

(*) Lagrange, *Leçons*, pp. 386 et suiv. Lacroix, t. II, n° 747, p. 564. Lagrange dit encore : on a

$$v = \psi w, \quad u = \chi w$$

avec la condition

$$U\chi' w + V\psi' w + W = 0.$$

(**) C'est là, si nous comprenons bien Lacroix, t. II, n° 741, p. 549, une idée de Charpit. Lacroix, t. III, p. 705, fait connaître quelques remarques de Poisson, sur la liaison qui existe entre le procédé qui donne la solution générale au moyen de l'intégrale complète, et celui que nous avons exposé au numéro précédent.

Remarque. La méthode de Lagrange comporte une double extension dans le cas où le nombre des variables est supérieur à trois. On peut ramener la question à la détermination d'une intégrale d'une équation analogue à (16), telle qu'elle soit en même temps l'intégrale de l'équation donnée; c'est ce qu'a fait Jacobi, dans son extension de la méthode de Lagrange, comme on le verra au chapitre suivant. Cette méthode exige l'intégration complète des équations (11_a), ($11'_a$) ou (13_a). Mais Jacobi a trouvé une autre extension de la méthode de Lagrange, qui mérite le *nom de méthode de Jacobi,* et qui est fondée sur l'*intégration incomplète* d'un certain nombre de systèmes d'équations analogues à (13_a). Cette méthode sera exposée dans la seconde partie de ce mémoire.

§ 10. ***Exemples*** (*).

39. *Exemple d'application de la méthode du n° 37.* Soit

$$z = pq$$

l'équation donnée. Les équations auxiliaires :

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{p}$$

(*) Le premier de ces exemples, qui a été admirablement choisi par Lagrange, comme application de la méthode générale, se trouve dans les *Leçons,* etc., p. 393. La classification des autres est due à Legendre (Mémoires de l'Académie de Paris, 1787 : *Mémoire sur l'intégration des équations aux différences partielles,* pp. 309-351 ; § IX, pp. 337-348 : *Des équations non linéaires du 1er ordre*), résumé par Lacroix, t. II, nos 742-747, pp. 550-564. Les cas particuliers, où l'on parvient à terminer les calculs, ont été empruntés par l'un et l'autre, à Lagrange, Mémoires de Berlin, 1772, 1774, 1785. Jacobi (Journal de Crelle, t. XXIII, p. 2) fait remarquer que plusieurs de ces exemples traités par Lagrange avaient déjà été résolus par Euler, au moyen d'artifices particuliers. Nous faisons aussi quelques emprunts à Boole, *Treatise,* ch. XIV. Pour abréger, nous avons laissé de côté les raisonnements de Lacroix relatifs à une méthode générale, pour découvrir de nouveaux cas d'intégration (t. II, n° 745, p. 558), et l'exemple qu'il en donne, savoir

$$p = -\frac{z}{2x} + \frac{1}{z}\varphi\left(\frac{qxz}{y}, x, z^2 - qyz\right).$$

On intègre cette équation en posant $ay = qxz$ (t. II, p 561).

conduisent facilement aux intégrales :

$$u = y - p = a, \quad v = \frac{z}{p^2} = b, \quad w = x - \frac{z}{p} = c.$$

On tire de ces trois équations :

$$y = u + p, \quad z = p^2 v, \quad x = w + pv,$$
$$dy = du + dp, \quad dz = 2pvdp + p^2 dv, \quad dx = dw + pdv + vdp.$$

L'équation

$$dz - pdx - qdy = 0$$

prend la forme

$$dw + vdu = 0.$$

Si l'on fait

$$v = \varphi(u, w),$$

cette équation devient

$$dw + \varphi(u, w)\, du = 0,$$

qui conduit à l'intégrale générale.

En posant, au contraire,

$$dw = 0, \quad du = 0,$$

ou

$$w = x - \frac{z}{p} = c, \quad u = y - p = a,$$

on trouve deux relations, qui par élimination de p conduisent à l'intégrale complète

$$(x - c)(y - a) = z.$$

On arrive encore à l'intégrale complète, en prenant pour déterminer p l'équation $(y - p) = a$. On a

$$p = y - a, \quad q = \frac{z}{y - a},$$

$$dz = (y - a)\, dx + \frac{z}{y - a} dy,$$

ou

$$\frac{dz}{y - a} - \frac{zdy}{(y - a)^2} = dx.$$

L'intégrale de celle-ci est

$$\frac{z}{y - a} = x - c,$$

ou

$$z = (x - c)(y - a),$$

40. *Exemples dépendant de l'intégration d'une seule des équations auxiliaires.* I. *Exemples dépendant de l'intégration de*

$$\frac{dx}{-\frac{\partial \varkappa}{\partial p}} = dy.$$

On pourra intégrer cette équation, si l'on a :

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial p} = \mathrm{F}(x, y)$$

c'est-à-dire, si l'équation donnée est de la forme :

$$q = p\mathrm{F}(x, y) + \varphi(x, y).$$

Dans ce cas

$$dz = p(dx + \mathrm{F}dy) + \varphi(x, y)\,dy.$$

Si

$$dx + \mathrm{F}dy = 0$$

a pour facteur d'intégrabilité v, de sorte que

$$v(dx + \mathrm{F}dy) = du,$$

il viendra :

$$dz = \frac{pdu}{v} + \varphi(x, y)\,dy.$$

Supposons que l'on ait éliminé x de φ et de v, en remplaçant cette variable par sa valeur en u et y; on devra avoir

$$\frac{d\left(\frac{p}{v}\right)}{dy} = \frac{d\varphi}{du}.$$

On déduira de là

$$p = v\int \frac{d\varphi}{du}\,dy.$$

Cette valeur de p contiendra une constante arbitraire; la valeur de z en contiendra donc deux et donnera l'intégrale complète (*).

(*) Lagrange, Mém. de Berlin, 1772; Œuvres, t. III, 3me cas, p. 562.

Soit, par exemple,

$$xq = py + xe^{x^2+y^2};$$

on aura :

$$F = \frac{y}{x}, \quad v = 2x, \quad u = x^2 + y^2, \quad \varphi(x, y) = e^{x^2+y^2} = e^u, \quad \frac{d\varphi}{du} = e^u,$$

$$p = 2xye^u + 2ax, \ q = 2y^2e^u + e^u + 2ay,$$

$$dz = ye^{x^2+y^2}(2xdx + 2ydy) + e^{x^2+y^2}dy + 2axdx + 2aydy,$$

$$z = ye^{x^2+y^2} + a(x^2 + y^2) + b.$$

II. *Exemples dépendant de l'intégration de*

$$dy = \frac{dp}{\frac{\partial \varkappa}{\partial x} + p\frac{\partial \varkappa}{\partial z}}.$$

On pourra intégrer cette équation, si l'on a :

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\partial \varkappa}{\partial x} + p\frac{\partial \varkappa}{\partial z} = F(p, y).$$

Cette équation linéaire aux dérivées partielles donne pour $\varkappa$ ou q la valeur suivante :

$$q = xF(p, y) + \varphi(p, y, z - px).$$

On déduit de là :

$$dz = pdx + xF(p, y)\,dy + \varphi(p, y, z - px)\,dy.$$

Posons

$$dp - F(p, y)\,dy = 0,$$

ce qui détermine p, et $(z - px) = u$; l'équation précédente deviendra

$$du = \varphi(p, y, u)\,dy,$$

d'où l'on saura éliminer p (*).

Comme cas particuliers, nous citerons : 1° Celui où

$$F(p, y) = \psi' y;$$

alors

$$p = \psi y,$$

$$du = \varphi(\psi y, y, u)\,dy.$$

(*) Lagrange, Mém. de Berlin, 1774; Œuvres, t. IV, n° 54, p. 85.

2° Celui où

$$F = 0;$$

alors

$$q = \varphi(p, y, z - px),$$

ou

$$z = px + f(p, y, q).$$

Dans ce cas :

$$z = ax + u,$$

$$du = \psi(a, y, u)\, dy.$$

3° Enfin, comme cas plus particulier encore, l'on peut considérer les deux équations

$$q = \psi(p, y),$$

$$q = \Psi(p),$$

qui ont été traités plus haut (n° 34, I, p. 65).

Au reste, nous avons étudié auparavant l'équation la plus générale dont nous nous occupons ici (n° 21).

III. *Exemples dépendant de l'intégration de*

$$\frac{dx}{\frac{\delta\varkappa}{\delta p}} = \frac{-dp}{\frac{\delta\varkappa}{\delta x} + p\frac{\delta\varkappa}{\delta z}}.$$

Posons :

$$\frac{dp}{dx} = F(x, p),$$

ou

$$\frac{\delta\varkappa}{\delta x} + p\frac{\delta\varkappa}{\delta z} + \frac{\delta\varkappa}{\delta p} F(x, p) = 0.$$

Pour trouver la valeur de $\varkappa$ ou q qui satisfait à cette équation linéaire, nous devrons intégrer le système auxiliaire :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{p} = \frac{dp}{F(x, p)} = \frac{dq}{0}.$$

Soit $T = a$, l'intégrale de $dp = F(x, p)\, dx$; tirons-en $p = \pi(x, a)$. On aura

$$dz = \pi(x, a)\, dx, \quad z - \int \pi(x, a)\, dx = b;$$

les autres intégrales sont $q = c$, $y = d$. Donc l'équation linéaire qui donne q, aura pour intégrale :

$$q = \varphi\left(y, T, z - \int \pi(x, a)\, dx\right).$$

La relation $dz = pdx + qdy$, devient

$$dz = pdx + \varphi\left(y, \mathrm{T}, z - \int \pi(x, a)\, dx\right).$$

Posons, $p = \pi(x, a)$, et soit

$$z = \int \pi(x, a)\, dx + v,$$

il viendra :

$$dz = pdx + dv = pdx + \varphi(y, a, v)\, dy.$$

On n'aura plus qu'à déterminer v par la relation :

$$dv = \varphi(y, a, v)\, dy.$$

Remarque. Il est visible que ce cas ne diffère pas au fond du précédent, puisque les x et les y jouent un rôle identique dans les équations aux dérivées partielles. Nous nous contenterons donc de donner un exemple particulier, emprunté à Lacroix (*). L'équation :

$$q = (z + px)^2$$

a pour intégrale :

$$z + \frac{a}{x} + \frac{1}{y + b} = 0.$$

IV. *Exemples dépendant de l'intégration de*

$$\frac{dz}{\varkappa - p\dfrac{\partial\varkappa}{\partial p}} = \frac{dp}{\dfrac{\partial\varkappa}{\partial x} + p\dfrac{\partial\varkappa}{\partial z}}.$$

Nous poserons, pour rendre cette équation intégrable :

$$\frac{\partial\varkappa}{\partial x} + p\frac{\partial\varkappa}{\partial z} = \mathrm{F}(z, p)\left(\varkappa - p\frac{\partial\varkappa}{\partial p}\right).$$

Cette équation aux dérivées partielles a pour système d'équations simultanées correspondant :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{p} = \frac{dp}{p\mathrm{F}(z, p)} = \frac{d\varkappa}{\varkappa\mathrm{F}(z, p)}.$$

Soit $\mathrm{T} = b$ l'intégrale de $dp = \mathrm{F}(z, p)\, dz$, et soit $p = \pi(z, b)$ la

(*) Tome II, n° 741, p. 549.

valeur de p que l'on en déduira; on aura pour les autres intégrales du système auxiliaire,

$$\varkappa = pa,\quad x - \int \frac{dz}{\pi(z, b)} = c,\quad y = d.$$

L'équation en $\varkappa$ conduit donc à l'intégrale :

$$q = p\varphi\left(y, \mathrm{T}, x - \int \frac{dz}{\pi(z, b)}\right).$$

Les équations de cette forme donnent pour dz la valeur

$$dz = p\left[dx + \varphi\left(y, \mathrm{T}, x - \int \frac{dz}{\pi(z, b)}\right) dy\right].$$

On posera

$$p = \pi(z, b),\quad x = \int \frac{dz}{\pi(z, b)} + v.$$

il viendra :

$$dz = \pi(z, b)\left[\frac{dz}{\pi(z, b)} + dv + \varphi(y, b, v)\, dy\right],$$

qui se réduit à l'équation intégrable :

$$dv + \varphi(y, v, b)\, dy = 0.$$

Un cas particulier est celui où

$$q = \varkappa(p, z).$$

On a alors

$$dz = pdx + \varkappa(p, z)\, dy.$$

La condition d'intégrabilité est, en supposant p fonction de z seul, $p = \pi z$, par exemple,

$$\frac{\delta p}{\delta z}\varkappa(p, z) - \left(\frac{\delta \varkappa}{\delta z} - \frac{\delta \varkappa}{\delta p}\frac{\delta p}{\delta z}\right) p = 0,$$

ou

$$qdp = pdq.$$

Donc

$$q = ap \quad \text{ou} \quad \varkappa(p, z) = ap.$$

On tire la valeur de πz de cette dernière relation. Cela fait, $p = \pi z$ conduit à la valeur de x :

$$x = \int \frac{dz}{\pi z} + \psi y.$$

D'autre part, $q = a\pi z$ donne

$$ay = \int \frac{dz}{\pi z} + \chi x.$$

Pour que ces deux relations soient identiques, il faut que

$$\psi y = -ay + b, \quad \chi x = -x + b.$$

Donc, enfin, l'intégrale complète est :

$$x + ay - b = \int \frac{dz}{\pi z}.$$

Cette solution ingénieuse est due à Lagrange (*).

Application géométrique. Trouver l'équation d'une surface dans laquelle la longueur de la normale comptée jusqu'au plan des xy *soit égale à l'unité.* L'équation du problème est :

$$z^2(1 + p^2 + q^2) = 1.$$

Posons

$$p = \pi z, \quad q = a\pi z,$$

on aura :

$$\pi z = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z} \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

La solution sera donc

$$x + ay = b - \sqrt{1 + a^2}\sqrt{1 - z^2},$$

ou

$$(x + ay - b)^2 = (1 + a^2)(1 - z^2).$$

C'est l'équation d'un cylindre de révolution, dont l'axe est représenté par les équations :

$$z = 0, \quad x + ay - b = 0.$$

On trouve pour solution singulière, d'après la règle générale,

$$z = \pm 1.$$

En procédant autrement, on arrive à une intégrale complète

(*) Mémoires de Berlin, 1772, Œuvres, t. III, 7me cas, p. 566 ; 1774, Œuvres, t. IV, n° 51, p. 81.

qui représente la sphère. On tire, de l'équation donnée :

$$q = \frac{\sqrt{1 - z^2 - p^2z^2}}{z}.$$

Par conséquent,

$$2zdz = 2zpdx + 2(1 - z^2 - p^2z^2)^{1/2}\, dy.$$

Le premier membre est une différentielle exacte ; il en sera de même du premier terme du second, si l'on fait $pz = (a - x)$. Dans cette hypothèse, soit

$$z^2 + (a - x)^2 = v;$$

il viendra

$$2(1 - v)^{1/2}\, dy = dv,$$

ou

$$(1 - v) = (y - b)^2.$$

Donc enfin :

$$z^2 + (x - a)^2 + (y - b)^2 = 1.$$

Remarque. Dans les divers exemples que nous venons de traiter, nous avons toujours employé la méthode du n° 38, qui consiste à tirer la valeur de p de la solution $u = a$, de l'une des équations auxiliaires. Nous savions *à priori* que nous devions arriver de cette manière à rendre $dz = pdx + qdy$ intégrable. Nous venons de voir *à posteriori* qu'il est bien ainsi.

41. *Quelques exemples dépendant de l'intégration de deux des équations auxiliaires.* I. Considérons les équations auxiliaires :

$$\frac{dx}{-\frac{\delta \varkappa}{\delta p}} = \frac{dy}{1} = \frac{dp}{\frac{\delta \varkappa}{\delta x} + p\frac{\delta \varkappa}{\delta z}}.$$

Ces équations seront intégrables si

$$\frac{\delta \varkappa}{\delta p} \quad \text{et} \quad \frac{\delta \varkappa}{\delta x} + p\frac{\delta \varkappa}{\delta z}$$

sont des fonctions de x, y et p seulement. Il suffit pour cela que z entre dans q au premier degré et soit multiplié par une fonction de y seul ; autrement dit que

$$q = \mathrm{F}(x, y, p) + z\varphi y.$$

Comme cas particulier, nous pouvons citer celui où

$$\varphi y = 0.$$

On a alors une équation qui ne contient plus z, et on peut lui appliquer la méthode du n° 35. Ainsi, l'équation

$$px + qy = pq$$

donne, de cette manière,

$$p = y + b^{-1}x, \quad q = x + by, \quad 2b(z - a) = (x + by)^2.$$

Lagrange traite, par un artifice spécial, l'équation (*) :

$$q = f\left(p, \frac{x}{y}\right).$$

Il pose

$$x = yu, \quad p = \varphi u,$$

d'où

$$dx = ydu + udy, \quad q = f(\varphi u, u)$$
$$dz = y\varphi udu + \big(f(\varphi u, u) + u\varphi u\big)\,dy.$$

Il détermine φ par l'équation

$$b + \int \varphi udu = f(\varphi u, u) + u\varphi u,$$

ce qui donne :

$$z = a + by + y\int \varphi udu.$$

II. Les équations auxiliaires

$$\frac{dx}{-\frac{\partial \varkappa}{\partial p}} = \frac{dz}{\varkappa - p\frac{\partial \varkappa}{\partial p}} = \frac{dp}{\frac{\partial \varkappa}{\partial x} + p\frac{\partial \varkappa}{\partial z}},$$

$$dy = \frac{dz}{\varkappa - p\frac{\partial \varkappa}{\partial p}} = \frac{dp}{\frac{\partial \varkappa}{\partial x} + p\frac{\partial \varkappa}{\partial z}},$$

conduisent de même à l'intégration des équations aux dérivées partielles de la forme :

$$q = \mathrm{F}(y, z, p) + px\varphi y,$$
$$q = \varphi y \mathrm{F}(x, z, p),$$

ou, au moins, la facilitent considérablement.

(*) Lagrange, Mém. de Berlin, 1772, Œuvres, t. III, 6e cas, p. 564. Avec cet exemple se termine l'analyse de tous les cas particuliers traités par l'habile géomètre de Turin.

CHAPITRE III.

EXTENSION DE LA MÉTHODE DE LAGRANGE AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES CONTENANT UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES (*).

§ 11. *Théorie.*

42. *Réduction de la question à l'intégration d'un système d'équations différentielles simultanées.* Soit donnée l'équation

$$f(z, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

Si l'on en connaît une solution, les valeurs de $p_1, p_2, \dots, p_n$, en

(*) Cette extension de la méthode de Lagrange, vainement tentée par Charpit, d'après Lacroix, t. II, n° 748, pp. 567-572, a été effectuée par Jacobi, dans le petit mémoire intitulé : *Ueber die Integration*, etc. (Journal de Crelle, t. II, pp. 317-329). Les calculs sont les mêmes que dans la méthode de Pfaff, mais ils sont effectués dans un ordre inverse. Dans la méthode de Lagrange et Jacobi, on ramène l'intégration des équations aux dérivées partielles non linéaires à celle des équations aux dérivées partielles linéaires, ou à celle des équations différentielles simultanées correspondantes; c'est là l'idée fondamentale, qui conduit d'ailleurs à un changement de variables, comme on l'a vu au n° 37. Dans la méthode de Pfaff, au contraire, le changement de variables est l'idée fondamentale, et elle conduit au reste aux équations différentielles simultanées dont nous venons de parler. Comme on le voit, le travail de Jacobi, que nous analysons dans ce chapitre, est éminemment propre à montrer le lien qui existe entre la méthode de Lagrange et celle de Pfaff. C'est pourquoi nous le plaçons ici, quoiqu'il n'ait eu absolument aucune influence sur le développement de la science.

[A. Meyer, dans l'écrit intitulé : *Mémoire sur l'intégration de l'équation générale aux différences partielles du premier ordre d'un nombre quelconque de variables* (Mém. de l'Acad. de Belgique, t. XXVII, 3e pagination, pages 1-24), a reproduit le travail de Jacobi que nous analysons ici, sans y faire d'addition essentielle.]

$z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ que l'on en déduira, rendront intégrable l'équation :

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n. \qquad (2)$$

Par conséquent, on aura :

$$\frac{dp_i}{dx_k} = \frac{dp_k}{dx_i}, \qquad (3)$$

ou

$$\frac{\delta p_i}{\delta x_k} + \frac{\delta p_i}{\delta z} p_k = \frac{\delta p_k}{\delta x_i} + \frac{\delta p_k}{\delta z} p_i.$$

Si l'on substitue dans (1) les valeurs de $p_1, \ldots, p_n$ dont nous parlons, et que de plus, l'on remplace z par sa valeur, l'équation (1) deviendra une identité dont nous pourrons déduire, par dérivation :

$$-\frac{\delta f}{\delta x_1} - \frac{\delta f}{\delta z} p_1 = \frac{\delta f}{\delta p_1}\frac{dp_1}{dx_1} + \cdots + \frac{\delta f}{\delta p_n}\frac{dp_n}{dx_1} \qquad (4_1)$$

$$-\frac{\delta f}{\delta x_2} - \frac{\delta f}{\delta z} p_2 = \frac{\delta f}{\delta p_1}\frac{dp_1}{dx_2} + \cdots + \frac{\delta f}{\delta p_n}\frac{dp_n}{dx_2} \qquad (4_2)$$

. . . .

$$-\frac{\delta f}{\delta x_n} - \frac{\delta f}{\delta z} p_n = \frac{\delta f}{\delta p_1}\frac{dp_1}{dx_n} + \cdots + \frac{\delta f}{\delta p_n}\frac{dp_n}{dx_n} \qquad (4_n)$$

Posons :

$$P_1 = -\frac{\delta f}{\delta x_1} - \frac{\delta f}{\delta z_1} p_1, \ldots, P_n = -\frac{\delta f}{\delta x_n} - \frac{\delta f}{\delta z} p_n; \qquad (5)$$

$$P = p_1 \frac{\delta f}{\delta p_1} + \cdots + p_n \frac{\delta f}{\delta p_n}. \qquad (6)$$

Introduisant les conditions (3) dans les équations (4) et y ajoutant une équation identique, qui n'est pas différente de (6), on arrive au système d'équations suivantes auxquelles devront satisfaire les valeurs de $z, p_1, \ldots, p_n$, déduites d'une solution quelconque de (1) :

$$P_1 = \frac{\delta f}{\delta p_1}\frac{dp_1}{dx_1} + \frac{\delta f}{\delta p_2}\frac{dp_1}{dx_2} + \cdots + \frac{\delta f}{\delta p_n}\frac{dp_1}{dx_n}. \qquad (7_1)$$

$$P_2 = \frac{\delta f}{\delta p_1}\frac{dp_2}{dx_1} + \frac{\delta f}{\delta p_2}\frac{dp_2}{dx_2} + \cdots + \frac{\delta f}{\delta p_n}\frac{dp_2}{dx_n}, \qquad (7_2)$$

. . . .

$$P_n = \frac{\delta f}{\delta p_1}\frac{dp_n}{dx_1} + \frac{\delta f}{\delta p_2}\frac{dp_n}{dx_2} + \cdots + \frac{\delta f}{\delta p_n}\frac{dp_n}{dx_n}, \qquad (7_n)$$

$$P = \frac{\delta f}{\delta p_1}\frac{dz}{dx_1} + \frac{\delta f}{\delta p_2}\frac{dz}{dx_2} + \cdots + \frac{\delta f}{\delta p_n}\frac{dz}{dx_n} \qquad (7_{n+1})$$

Il est essentiel de remarquer que, si l'on peut déduire les équations (7) des équations (4) et (3), on ne peut pas inversement déduire les équations (3) de (4) et (7). On peut donc conclure de l'analyse précédente que les valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, z en x_1, $x_2, \ldots, x_n$ qui satisfont aux équations (7), contiennent les solutions de l'équation (1); mais la réciproque n'est pas vraie, en général : les solutions du système (7) peuvent ne pas satisfaire à (1).

Il résulte de là qu'il faut chercher, parmi les solutions du système (7), celles qui satisfont à l'équation (1). L'intégration du système (7), d'après le § 7 (voir particulièrement le n° 32), se ramène à celle du système

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial f}{\partial p_1}} = \cdots = \frac{dx_n}{\frac{\partial f}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\mathrm{P}} = \frac{dp_1}{\mathrm{P}_1} = \cdots = \frac{dp_n}{\mathrm{P}_n} \quad \ldots\ldots \quad (7_a)$$

Comme

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial p_n} + \mathrm{P}\frac{\partial f}{\partial z} + \mathrm{P}_1\frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + \mathrm{P}_n\frac{\partial f}{\partial p_n} = 0,$$

les rapports qui entrent dans les équations (7_a) sont égaux à

$$\frac{df}{0};$$

autrement dit, une de ces équations peut être remplacée par $df=0$. Il résulte de là que l'une des intégrales du système (7_a) est $f=c_{2n}$, que nous écrivons $f_{2n}=c_{2n}$; le système intégral des équations (7_a) pourra être représenté par

$$f_1 = c_1, \quad f_2 = c_2, \ldots, f_{2n-1} = c_{2n-1}, \quad f_{2n} = c_{2n},$$

les f désignant des fonctions de $z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, les c des constantes.

Le système (7) aura pour solution $(n+1)$ relations de la forme

$$\mathrm{F}(f_1, f_2, \cdots, f_{2n}) = 0.$$

Reste à particulariser la forme des fonctions F de manière qu'elles donnent la solution de (1).

43. *Changement de variables.* Posons, comme dans le cas des équations à trois variables :

$$f = 0, f_1 = u_1, f_2 = u_2, \dots, f_{2n-1} = u_{2n-1}, \dots\dots \quad (8)$$

et déduisons, de ces $2n$ équations, les valeurs des variables

$$x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n,$$

en fonction de

$$u_1, u_2, \dots, u_{2n-1}, z.$$

Si l'on introduit ces variables dans l'équation

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n, \dots\dots\dots \quad (2)$$

elle deviendra :

$$dz = Z dz + U_1 du_1 + U_2 du_2 + \cdots + U_{2n-1} du_{2n-1}. \dots \quad (9)$$

Il est facile de prouver que $Z = 1$ et que l'équation (9) ne contient plus z. En effet, on déduit des n premières équations (7_a)

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n \dots\dots \quad (10)$$

Cette équation (10) peut donc remplacer l'une des équations (7), et il en est de même de l'équation (9), équivalente à (10). Or, les équations (7_a) ont pour solution :

$$u_1 = c_1, \quad u_2 = c_2, \dots, u_{2n-1} = c_{2n-1},$$

qui donnent

$$du_1 = 0, \quad du_2 = 0, \dots, du_{2n-1} = 0,$$

et par suite transforment (9) en $Z = 1$. Ensuite

$$F(u_1, u_2, \dots, u_{2n-1}) = 0 \dots\dots\dots \quad (11)$$

est une solution des équations (7_a) et par suite de l'équation (9), ou de

$$U_1 du_1 + \cdots + U_{2n-1} du_{2n-1} = 0; \dots\dots\dots \quad (9')$$

celle-ci ne peut donc pas contenir la variable z, qui n'est plus dans (11).

On peut encore démontrer les remarques précédentes, par un calcul direct. On a :

$$Z = p_1 \frac{dx_1}{dz} + p_2 \frac{dx_2}{dz} + \cdots + p_n \frac{dx_n}{dz},$$

les valeurs de

$$\frac{dx_1}{dz}, \frac{dx_2}{dz}, \ldots, \frac{dx_n}{dz}$$

étant déduites des relations (8), qui satisfont à (7_a). Ainsi :

$$\frac{dx_1}{dz} = \frac{1}{P}\frac{\delta f}{\delta p_1}, \quad \frac{dx_2}{dz} = \frac{1}{P}\frac{\delta f}{\delta p_2}, \ldots, \frac{dx_n}{dz} = \frac{1}{P}\frac{\delta f}{\delta p_n}.$$

Par conséquent, d'après (6)

$$Z = \frac{1}{P}\left\{ p_1 \frac{\delta f}{\delta p_1} + p_2 \frac{\delta f}{\delta p_2} + \cdots + p_n \frac{\delta f}{\delta p_n} \right\} = 1.$$

Calculons un des coefficients U. On a, pour l'un quelconque de ces coefficients :

$$U = p_1 \frac{dx_1}{du} + p_2 \frac{dx_2}{du} + \cdots + p_n \frac{dx_n}{du}.$$

La dérivée de U par rapport à z, est :

$$\frac{dU}{dz} = \sum_1^n \left(\frac{dp_i}{dz}\frac{dx_i}{du} + p_i \frac{d^2 x_i}{dz du} \right).$$

On peut transformer cette équation au moyen de la relation :

$$p_i \frac{d^2 x_i}{dz du} = \frac{d}{du}\left(p_i \frac{dx_i}{dz} \right) - \frac{dp_i}{du}\frac{dx_i}{dz}.$$

Il vient ainsi :

$$\frac{dU}{dz} = \sum_1^n \left(\frac{dp_i}{dz}\frac{dx_i}{du} - \frac{dp_i}{du}\frac{dx_i}{dz} \right) + \frac{d}{du}\sum_1^n p_i \frac{dx_i}{dz},$$

ou

$$\frac{dU}{dz} = \sum_1^n \left(\frac{dp_i}{dz}\frac{dx_i}{du} - \frac{dp_i}{du}\frac{dx_i}{dz} \right),$$

puisque

$$\sum_1^n p_1 \frac{dx_i}{dz} = Z = 1.$$

Nous pouvons maintenant remplacer dans $\frac{dU}{dz}$, les quantités

$$\frac{dp_i}{dz}, \frac{dx_i}{dz}$$

par leurs valeurs déduites des relations (8) ou (7_a). On aura :

$$\frac{dp_i}{dz} = \frac{P_i}{P}, \quad \frac{dx_i}{dz} = \frac{1}{P}\frac{\delta f}{\delta p_i}.$$

Donc

$$\frac{dU}{dz} = \frac{1}{P}\sum_1^n\left(P_i\frac{dx_i}{du} - \frac{\delta f}{\delta p_1}\frac{dp_i}{du}\right).$$

Remplaçons P_i par sa valeur :

$$\frac{dU}{dz} = \frac{1}{P}\sum_1^n\left(-\frac{\delta f}{\delta x_1}\frac{dx_i}{du} - \frac{\delta f}{\delta p_1}\frac{dp_i}{du}\right) - \frac{1}{P}\frac{\delta f}{\delta z}\sum_1^n p_i\frac{dx_i}{du}.$$

La première somme est la dérivée par rapport à u de l'expression f, qui est identiquement nulle, la seconde est égale à U. Donc

$$\frac{\frac{dU}{dz}}{U} = -\frac{\frac{\delta f}{\delta z}}{P},$$

ou encore

$$U = Ce^{-\int\frac{\delta f}{\delta z}\frac{dz}{P}},$$

C étant une fonction des variables autres que z, savoir u_1, $u_2, \ldots, u_{2n-1}$.

Il résulte de là que l'on peut diviser l'équation (9') par

$$e^{-\int\frac{\delta f}{\delta z}\frac{dz}{P}}.$$

Elle deviendra ainsi :

$$C_1du_1 + C_2du_2 + \cdots + C_{2n-1}du_{2n-1} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Pfaff a inventé une méthode générale pour intégrer les équations de cette forme. Nous la ferons connaître après avoir montré, sur un bel exemple particulier, l'utilité des tranformations précédentes. Elles suffisent, en effet, dans beaucoup de cas, pour déterminer l'intégrale des équations aux dérivées partielles du premier ordre, parce que souvent l'on parvient à intégrer l'équation (12) sans avoir recours à la méthode de Pfaff.

§ 12. *Application à l'intégration de l'équation de Schläfli*,

$$a_1(x_2p_3 - x_3p_2)^2 + a_2(x_3p_1 - x_1p_3)^2 + a_3(x_1p_2 - x_2p_1)^2 = 1 \ (^*).$$

44. *Intégration du système d'équations différentielles simultanées auquel conduit la question.* I. Nous poserons :

$$s_1 = x_2p_3 - x_3p_2, \quad s_2 = x_3p_1 - x_1p_3, \quad s_3 = x_1p_2 - x_2p_1.$$

L'équation pourra s'écrire

$$f = \begin{vmatrix} a_1s_1, & a_2s_2, & a_3s_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ p_1, & p_2, & p_3 \end{vmatrix} - 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Les premiers déterminants mineurs du déterminant précédent pourront être représentés dans le tableau suivant :

$$\left\{ \begin{matrix} s_1, & s_2, & s_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3 \\ \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 \end{matrix} \right\}$$

On aura :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} = - p_3a_2s_2 + p_2a_3s_3 = \xi_1; \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2} = \xi_2; \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3} = \xi_3;$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial p_1} = \quad x_3a_2s_2 - x_2a_3s_3 = \pi_1; \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial p_2} = \pi_2; \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial p_3} = \pi_3.$$

Donc enfin, le système auxiliaire à intégrer est :

$$\frac{dx_1}{\pi_1} = \frac{dx_2}{\pi_2} = \frac{dx_3}{\pi_3} = \frac{dz}{1} = \frac{-dp_1}{\xi_1} = \frac{-dp_2}{\xi_2} = \frac{-dp_3}{\xi_3} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

II. A cause des propriétés des déterminants, on a :

$$\pi_1x_1 + \pi_2x_2 + \pi_3x_3 = 0, \quad p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + p_3\xi_3 = 0,$$
$$\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 = 1, \quad p_1\pi_1 + p_2\pi_2 + p_3\pi_3 = 1.$$

Par conséquent, on peut tirer des équations différentielles :

$$x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3 = 0, \qquad p_1dp_1 + p_2dp_2 + p_3dp_3 = 0,$$
$$p_1dx_1 + p_2dx_2 + p_3dx_3 = dz = -(x_1dp_1 + x_2dp_2 + x_3dp_3).$$

(*) Schlaefli, *Sopra una equazione a differenziali parziale del primo ordine* (Annali di matematica pura ed applicata, serie 2e, t. II, pp. 89-96).

La dernière relation donne encore :

$$d\,(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) = 0.$$

On tire de là, en remarquant que

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\,(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - (x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3)^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, \quad (3)$$

trois intégrales qui sont comprises dans les équations suivantes :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = m^2, \qquad s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \mathrm{N}^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; (4_1)\;(4_2)$$

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \frac{\mathrm{N}^2}{m^2 \sin^2 \varepsilon}, \quad x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = \mathrm{N} \cot \varepsilon, \quad (4_3)\;(4_4)$$

auxquelles il faut ajouter l'équation donnée :

$$a_1s_1^2 + a_2s_2^2 + a_3s_3^2 = 1\,; \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(1)$$

N, m, ε sont des constantes arbitraires.

III. On a ensuite :

$$ds_1 = x_2dp_3 + p_3dx_2 - x_3dp_2 - p_2dx_3 = (-x_2\xi_3 + p_3\pi_2 + x_3\xi_2 - p_2\pi_3)\,dz.$$

Mais d'après les propriétés des déterminants :

$$a_2s_2s_3 + x_2\xi_3 + p_2\pi_3 = 0\,,$$

$$a_3s_3s_2 + x_3\xi_2 + p_3\pi_2 = 0.$$

Donc

$$(a_2 - a_3)\,s_2s_3 = -\,x_2\xi_3 - p_2\pi_3 + x_3\xi_2 + p_3\pi_2\,,$$

et, par conséquent,

$$ds_1 = (a_2 - a_3)\,s_2s_3dz.$$

De même

$$ds_2 = (a_3 - a_1)\,s_3s_1dz\,,$$

$$ds_3 = (a_1 - a_2)\,s_1s_2dz.$$

De ces équations une seule est distincte des précédentes, car on en tire :

$$s_1ds_1 + s_2ds_2 + s_3ds_3 = 0,$$

$$a_1s_1ds_1 + a_2s_2ds_2 + a_3s_3ds_3 = 0,$$

qui conduisent aux relations (1) et (4_2). Nous poserons :

$$du = 2s_1s_2s_3dz.$$

On aura :

$$2s_1ds_1 = (a_2 - a_3)\,du, \quad 2s_2ds_2 = (a_3 - a_1)\,du, \quad 2s_3ds_3 = (a_1 - a_2)\,du,$$

ou, en posant, pour abréger,

$$a_2 - a_3 = b_1, \quad a_3 - a_1 = b_3, \quad a_1 - a_2 = b_3,$$

et intégrant :

$$s_1^2 = b_1u + A_1,$$
$$s_2^2 = b_2u + A_2,$$
$$s_3^2 = b_3u + A_3.$$

Les constantes A_1, A_2, A_3, à cause des relations (1) et (4_2) sont telles que

$$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A = 1,$$
$$A_1 + A_2 + A_2 = N.$$

De plus on peut supposer A_1 constante absolue, puisque u est une variable que nous choisissons arbitrairement (*). La relation qui existe entre u et z donne ensuite :

$$z = k + \frac{1}{2}\int_0^u \frac{du}{\sqrt{(A_1 + b_1u)(A_2 + b_2u)(A_3 + b_3u)}}.$$

IV. Cherchons une dernière intégrale. On a :

$$p_1dx_1 - x_1dp_1 = (p_1\pi_1 + x_1\xi_1)\,dz = (1 - a_1s_1^2)\,dz = (a_2s_2^2 + a_3s_3^2)\,dz$$
$$p_2dx_2 - x_2dp_2 = (p_2\pi_2 + x_2\xi_2)\,dz = (1 - a_2s_2^2)\,dz = (a_3s_3^2 + a_1s_1^2)\,dz$$
$$p_3dx_3 - x_3dp_3 = (p_3\pi_3 + x_3\xi_3)\,dz = (1 - a_3s_3^2)\,dz = (a_1s_1^2 + a_2s_2^2)\,dz.$$

Or :

$$\begin{vmatrix} x_1, & m^2 \\ p_1, & N\cot\varepsilon \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ p_1, & x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 \end{vmatrix} = x_2s_3 - x_3s_2.$$

Donc :

$$m^2p_1 = N\cot\varepsilon . x_1 - (x_2s_3 - x_3s_2),$$
$$m^2(p_1dx_1 - x_1dp_1) = x_1d\,(x_2s_2 - x_3s_2) - (x_2s_3 - x_3s_2)\,dx_1.$$

Posons :

$$Nx_1 = m\rho_1\cos\theta_1, \quad (x_2s_3 - x_3s_2) = m\rho_1\sin\theta_1, \quad \rho_1^2 = s_2^2 + s_3^2,$$

(*) Nous avons vainement essayé de laisser A_1 constante arbitraire et de rendre la solution du n° 45 aussi symétrique que celle du n° 44.

ce qui est permis, puisque :

$$(x_2 s_3 - x_3 s_2)^2 + N^2 x_1^2 = (x_2^2 + x_3^2)(s_2^2 + s_3^2) - (x_2 s_2 + x_3 s_3)^2 + N^2 x_1^2$$
$$= (m^2 - x_1^2)(N^2 - s_1^2) - (x_1 s_1)^2 + N^2 x_1^2 = m^2 (N^2 - s_1^2) = m^2 (s_2^2 + s_3^2).$$

On aura :

$$x_1 d(x_2 s_3 - x_3 s_2) = \frac{m}{N} \rho_1 \cos\theta_1 (m \sin\theta_1 d\rho_1 + m\rho_1 \cos\theta_1 d\theta_1),$$

$$(x_2 s_3 - x_3 s_2) dx_1 = \frac{m}{N} (-\rho_1 \sin\theta_1 d\theta_1 + \cos\theta_1 d\rho) m\rho_1 \sin\theta_1.$$

Par conséquent :

$$m^2 (p_1 dx_1 - x_1 dp_1) = \frac{m^2}{N} \rho^2 d\theta_1 = \frac{m^2 (s_2^2 + s_3^2)}{N} d\theta_1.$$

On a donc les équations suivantes, en introduisant des quantités θ_2, θ_3 analogues à θ_1 :

$$(s_2^2 + s_3^2) d\theta_1 = N (a_2 s_2^2 + a_3 s_3^2) dz,$$
$$(s_3^2 + s_1^2) d\theta_2 = N (a_3 s_3^2 + a_1 s_1^2) dz,$$
$$(s_1^2 + s_2^2) d\theta_3 = N (a_1 s_1^2 + a_2 s_2^2) dz.$$

Les quantités s_1, s_2, s_3, ainsi que dz, peuvent s'exprimer au moyen de u. On peut donc écrire :

$$\theta_1 = \alpha_1 + N \int_0^u \frac{a_2 s_2^2 + a_3 s_3^2}{s_2^2 + s_2^2} dz,$$

$$\theta_2 = \alpha_2 + N \int_0^u \frac{a_3 s_3^2 + a_1 s_1^2}{s_3^2 + s_1^2} dz,$$

$$\theta_3 = \alpha_3 + N \int_0^u \frac{a_1 s_1^2 + a_2 s_2^2}{s_1^2 + s_2^2} dz.$$

Des trois nouvelles constantes α_1, α_2, α_3, une seule est arbitraire. On déduit, en effet, des équations qui définissent θ_1, θ_2, θ_3 :

$$N^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = m^2 (\rho_1^2 \cos^2\theta_1 + \rho_2^2 \cos^2\theta_2 + \rho_3^2 \cos^2\theta_3);$$

$$(x^2 s_3 - x_3 s_2)^2 + (x_3 s_1 - x_1 s_3)^2 + (x_1 s_2 - x_2 s_1)^2$$
$$= m^2 (\rho_1^2 \sin^2\theta_1 + \rho_2^2 \sin^2\theta_2 + \rho_3^2 \sin^2\theta_3),$$

ou encore, comme on le voit facilement :

$$N^2 = \rho_1^2 \cos^2 \theta_1 + \rho_2^2 \cos^2 \theta_2 + \rho_3^2 \cos^2 \theta_3,$$
$$N^2 = \rho_1^2 \sin^2 \theta_1 + \rho_2^2 \sin^2 \theta_2 + \rho_3^2 \sin^2 \theta_3.$$

Si l'on fait $u = 0$ dans ces égalités, il vient :

$$N^2 = (A_2 + A_3) \cos^2 \alpha_1 + (A_3 + A_1) \cos^2 \alpha_2 + (A_1 + A_2) \cos^2 \alpha ,$$
$$N^2 = (A_2 + A_3) \sin^2 \alpha_1 + (A_3 + A_1) \sin^2 \alpha_2 + (A_1 + A_2) \sin^2 \alpha_3.$$

équations équivalentes.

On trouve une seconde relation de la manière suivante. On a identiquement :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$x_1 (x_2 s_3 - x_3 s_2) + x_2 (x_3 s_1 - x_1 s_3) + x_3 (x_1 s_2 - x_2 s_1) = 0.$$

Remplaçant les différents facteurs de cette somme de produits par leurs valeurs tirées des équations qui définissent les θ, il viendra :

$$\rho_1^2 \sin 2\theta_1 + \rho_2^2 \sin 2\theta_2 + \rho_3^2 \sin 2\theta_3 = 0.$$

Si l'on fait $u = 0$, on aura :

$$(A_2 + A_3) \sin 2\alpha_1 + (A_3 + A_1) \sin 2\alpha_2 + (A_1 + A_2) \sin 2\alpha_3 = 0.$$

On remarquera que les autres relations entre les quantités A et α sont équivalentes à celle-ci :

$$(A_2 + A_3) \cos 2\alpha_1 + (A_3 + A_1) \cos 2\alpha_2 + (A_1 + A_2) \cos 2\alpha_3 = 0.$$

Pour plus de symétrie, nous poserons encore

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3n.$$

Nous n'avons affaire qu'à cinq constantes, m, N, n, k et ε; en effet, les quantités A s'expriment au moyen de N et k, et les quantités α au moyen de n et N. On remarquera que

$$\frac{x}{m}, \quad \frac{y}{m}, \quad \frac{z}{m},$$

dépendent seulement de N et n, z ne contient que k et N.

45. *Intégration de l'équation donnée.* Prenons les quantités m, N, n, ε, k et u pour nouvelles variables. L'expression

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 - dz$$

prendra la forme :

$$-dk + \mathrm{P}_1 dm + \mathrm{P}_2 dn + \mathrm{P}_3 d\mathrm{N},$$

sans contenir $d\varepsilon$, puisque z, x_1, x_2, x_3 ne contiennent pas ε; ni du, puisque, d'après la théorie générale, si z était la sixième variable nouvelle, le coefficient de dz serait nul et que $du = 2s_1 s_2 s_3 dz$. De même nous savons que P_1, P_2, P_3 sont indépendants de z et par suite de u.

I. *Calcul de* $\mathrm{P}_1 = p_1 \frac{dx_1}{dm} + p_2 \frac{dx_2}{dm} + p_3 \frac{dx_3}{dm}$. On a :

$$\frac{d}{dm}\left(\frac{x_1}{m}\right) = 0;$$

donc

$$\frac{dx_1}{dm} = \frac{x_1}{m}.$$

De même :

$$\frac{dx_2}{dm} = \frac{x_2}{m}, \quad \frac{dx_3}{dm} = \frac{x_3}{m}.$$

Par conséquent :

$$\mathrm{P}_1 = p_1 \frac{dx_1}{dm} + p_2 \frac{dx_2}{dm} + p_3 \frac{dx_3}{dm} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3}{m} = \frac{\mathrm{N}}{m} \cot \varepsilon.$$

II. *Calcul de* $\mathrm{P}_2 = p_1 \frac{dx_1}{dn} + p_2 \frac{dx_2}{dn} + p_3 \frac{dx_3}{dn}$. On a :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = m.$$

Donc

$$x_1 \frac{dx_1}{dn} + x_2 \frac{dx_2}{dn} + x_3 \frac{dx_3}{dn} = 0.$$

Par suite :

$$\mathrm{P}_2 x_1 = \begin{vmatrix} x_1, & x_1 \frac{dx_1}{dn} + x_2 \frac{dx_2}{dn} + x_3 \frac{dx_3}{dn} \\ p_1, & p_1 \frac{dx_1}{dn} + p_2 \frac{dx_2}{dn} + p_3 \frac{dx_3}{dn} \end{vmatrix}$$

$$= s_3 \frac{dx_2}{dn} - s_2 \frac{dx_3}{dn} = \frac{d}{dn}(x_2 s_3 - x_3 s_2)$$

$$= \frac{d}{dn}(m\rho_1 \sin \theta_1) = m\rho_1 \cos \theta_1 \frac{d\theta}{dy_1} \frac{dx_1}{dn} = \mathrm{N} x_1 \frac{dx_1}{dn}.$$

Donc enfin :

$$P_2 = N \frac{d\alpha_1}{dn}.$$

De même,

$$P_2 = N \frac{d\alpha_2}{dn}, \quad P_2 = N \frac{d\alpha_3}{dn}.$$

D'où, en ajoutant, d'après la définition de n :

$$3P_2 = N \frac{d}{dn} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = N \frac{d.3n}{dn} = 3N.$$

Par conséquent

$$P_2 = N.$$

III. *Calcul de* $P_3 = p_1 \frac{dx_1}{dN} + p_2 \frac{dx_2}{dN} + p_3 \frac{dx_3}{dN} - \frac{dz}{dN}$. L'expression $\frac{dz}{dN}$ est une intégrale définie entre les limites 0 et u, puisque N n'entre dans z qu'implicitement à cause des quantités A qui sont sous le signe d'intégration. Comme on peut faire $u = 0$, dans P_3 sans changer sa valeur, on aura simplement :

$$P_3 = \left(p_1 \frac{dx_1}{dN} + p_2 \frac{dx_2}{dN} + p_3 \frac{dx_3}{dN}\right)_{u=0}.$$

Pour arriver à calculer cette expression, nous serons forcé de faire une hypothèse particulière sur A_1 et α_1. Nous supposerons $A_1 = 0$, $\alpha_1 = n$, ce qui ne changera rien aux calculs précédents, mais simplifiera les suivants en entraînant, pour $u = 0$,

$$s_1 = 0, \quad \frac{d\theta}{dN} = \frac{d\alpha_1}{dN} = 0.$$

On a, comme plus haut :

$$P_3 x_1 = s_3 \frac{dx_2}{dN} - s_2 \frac{dx_3}{dN} = \frac{d}{dN}(x_2 s_3 - s_2 x_3) + x_3 \frac{ds_2}{dN} - x_2 \frac{ds_3}{dN}.$$

Exprimons $(x_2 s_3 - s_2 x_3)$, s_2, s_3 en fonction de N et de ρ_1, et ρ_1 en fonction de s_1, qui ne contient pas N, et de N. On trouvera :

$$x_2 s_3 - x_3 s_2 = m\rho_1 \sin\theta_1; \qquad \rho_1^2 = N^2 - s_1^2;$$
$$(a_2 - a_3) s_2^2 = 1 - a_1 s_1^2 - a_3 \rho_1^2; \quad (a_3 - a_2) s_3^2 = 1 - a_1 s_1^2 - a_2 \rho_1^2.$$

On tire de là :

$$\frac{d\rho_1}{dN} = \frac{N}{\rho_1}, \quad \frac{ds_2}{dN} = \frac{-a_3 N}{(a_2 - a_3) s_2}; \quad \frac{ds_3}{dN} = \frac{-a_2 N}{(a_3 - a_2) s_3}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} P_3 x_1 &= m \sin\theta_1 \frac{N}{\rho_1} + m\rho_1 \cos\theta_1 \frac{d\theta_1}{dN} - \frac{N}{(a_2 - a_3) s_2 s_3}(a_2 x_2 s_2 + a_3 x_3 s_3) \\ &= N x_1 \frac{d\theta_1}{dN} + \frac{N}{\rho_1^2}(x_2 s_3 - x_3 s_2) - \frac{N}{(a_2 - a_3) s_2 s_3}(a_2 x_2 s_2 + a_3 x_3 s_3) \\ &= N x_1 \frac{d\theta_1}{dN} + \frac{N}{(a_2 - a_3)\rho_1^2 s_2 s_3}\Big\{ x_2 s_2 \left[(a_2 - a_3) s_3^2 - a_2 \rho_1^2\right] \\ &\qquad + x_3 s_3 \left[(a_3 - a_2) s_2^2 - a_3 \rho_1^2\right] \Big\} \\ &= N x_1 \frac{d\theta_1}{dN} + \frac{N}{(a_2 - a_3)\rho_1^2 s_2 s_3}(a_1 s_1^2 - 1)(x_2 s_2 + x_3 s_3). \end{aligned}$$

Comme

$$x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3 = 0, \quad a_1 s_1^2 + a_2 s_2^2 + a_3 s_3^2 = 1,$$

on a encore

$$P_3 x_1 = N x_1 \frac{d\theta_1}{dN} + \frac{N x_1 s_1 (a_2 s_2^2 + a_3 s_3^2)}{(a_2 - a_3)(s_2^2 + s_3^2) s_2 s_3} = x_1 \left(N \frac{d\theta_1}{dN} + s_1 \frac{d\theta_1}{ds_1} \right).$$

Supprimons le facteur x_1, et faisons $u = o$, il viendra

$$P_3 = 0.$$

IV. *Achèvement de l'intégration.* Les calculs précédents ramènent l'intégration de l'équation donnée à celle de la suivante :

$$dk = N \frac{\cot\varepsilon}{m} dm + N dn.$$

Choisissant pour k une fonction quelconque de m et n, il viendra :

$$\frac{dk}{dm} = N \frac{\cot\varepsilon}{m}, \quad \frac{dk}{dn} = N.$$

Nous aurons ainsi k, N, $\cot\varepsilon$ exprimés au moyen de m, n. Donc x_1, x_2, x_3, z seront des fonctions de m, n, u ; l'élimination de ces trois quantités donnera l'intégrale générale (*).

(*) SCHAEFLI donne une belle application de la solution précédente, au mouvement d'un corps autour de son centre de gravité (l. c., pp. 94-96).

CHAPITRE IV.

MÉTHODE DE PFAFF (*).

§ 13. *Transformation de Pfaff.*

46. *Idée générale du problème de Pfaff.* Pfaff a fait dépendre le problème de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre du problème général suivant, qui porte son nom : Étant donnée une expression différentielle :

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_m dx_m \;, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, la transformer en une autre de la forme :

$$\lambda \left(U_1 du_1 + U_2 du_2 + \cdots + U_{m-1} du_{m-1} \right) \;, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

où $U_1, U_2, \ldots, U_{m-1}$ sont des fonctions de $(m - 1)$ nouvelles variables, $u_1, \ldots, u_{m-1}$, qui sont liées, ainsi que λ, aux anciennes par des équations que l'on doit déterminer.

Supposons ces équations de la forme :

$$x_1 \quad = x_1 (u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, x_m), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3_1)$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$x_{m-1} = x_{m-1} (u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, x_m) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3_{m-1})$$

(*) Pfaff, *Methodus generalis, aequationes differentiarum partiarum, nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quot cumque variabiles complete integrandi* (Mémoires de Berlin, 1814-1815, pp. 76-136). Une analyse de ce mémoire a été faite par Gauss (Göttingische gelehrte Anzeigen, 1er juillet 1815; Œuvres, t. III, pp. 231-241), et par Jacobi, *Ueber die Pfaffsche Methode, etc.* (Journal de Crelle, t II, pp. 347-357), *Sur la réduction, etc.* (Journal de Liouville, pp. 161 et suivantes). Les mémoires de Jacobi et la petite note de Gauss contiennent divers perfectionnements de la méthode de Pfaff, que nous indiquerons plus bas.

On aura, pour l'une quelconque des variables, $x_1, \ldots, x_{m-1}$,

$$dx = \frac{\delta x}{\delta u_1} du_1 + \frac{\delta x}{\delta u_1} du_2 + \cdots + \frac{\delta x}{\delta u_{m-1}} du_{m-1} + \frac{\delta x}{\delta x_m} dx_m \quad . \quad . \quad (4)$$

Substituons ces valeurs dans l'expression (1). On trouvera :

$$\left.\begin{array}{l} \left(X_1 \dfrac{\delta x_1}{\delta u_1} + X_2 \dfrac{\delta x_2}{\delta u_1} + \cdots + X_{m-1} \dfrac{\delta x_{m-1}}{\delta u_1}\right) du_1 + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(X_1 \dfrac{\delta x_1}{\delta u_{m-1}} + X_2 \dfrac{\delta x_2}{\delta u_{m-1}} + \cdots + X_{m-1} \dfrac{\delta x_{m-1}}{\delta u_{m-1}}\right) du_{m-1} + \\ \left(X_1 \dfrac{\delta x_1}{\delta x_m} + X_2 \dfrac{\delta x_2}{\delta x_m} + \cdots + X_{m-1} \dfrac{\delta x_{m-1}}{\delta x_m} + X_m\right) dx_m \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Pour que l'expression (5) prenne la forme (2), il faudra : 1° que le coefficient de dx_m soit nul; 2° que les coefficients de du_1, $du_2, \ldots, du_{m-1}$ soient de la forme $\lambda U_1, \lambda U_2, \ldots, \lambda U_{m-1}$, $U_1, U_2, \ldots, U_{m-1}$, étant des fonctions qui ne contiennent plus explicitement que les variables $u_1, u_2, \ldots, u_m$. On devra avoir pour cela :

$$\frac{d}{dx_m} (\log \lambda U) = \frac{d \log \lambda}{dx_m} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dx_m}.$$

Les conditions précédentes s'exprimeront donc analytiquement comme suit :

$$X_1 \frac{\delta x_1}{\delta u_1} + \cdots + X_{m-1} \frac{\delta x_{m-1}}{\delta u_1} = \lambda U_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_1 \frac{\delta x_1}{\delta u_{m-1}} + \cdots + X_{m-1} \frac{\delta x_{m-1}}{\delta u_{m-1}} = \lambda U_{m-1}, \quad . \quad . \quad . \quad (6_{m-1})$$

$$X_1 \frac{\delta x_1}{\delta x_m} + \cdots + X_{m-1} \frac{\delta x_{m-1}}{\delta x_m} + X_m = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6_m)$$

$$\frac{1}{\lambda U_1} \frac{d\lambda U_1}{dx_m} = \frac{1}{\lambda U_2} \frac{d\lambda U_2}{dx_m} = \cdots = \frac{1}{\lambda U_{m-1}} \frac{d\lambda U_{m-1}}{dx_m} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dx_m} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

47. *Détermination des relations qui existent entre les anciennes et les nouvelles variables.* Cherchons les dérivées, par rapport à x_m, qui entrent dans ces dernières équations. On a :

$$\frac{d\lambda U}{dx_m} = \left(\frac{dX_1}{dx_m}\frac{\delta x_1}{\delta u} + \cdots + \frac{dX_{m-1}}{dx_m}\frac{\delta x_{m-1}}{\delta u}\right)$$
$$+ \left(X_1 \frac{\delta^2 x_1}{\delta u \delta x_m} + \cdots + X_{m-1}\frac{\delta^2 x_{m-1}}{\delta u \delta x_m}\right).$$

Retranchons de cette équation celle que l'on obtient, en dérivant la relation (6_m) par rapport à u, c'est-à-dire :

$$-\frac{dX_m}{du} = \left(\frac{dX_1}{du}\frac{\delta x_1}{\delta x_m} + \cdots + \frac{dX_{m-1}}{du}\frac{\delta x_{m-1}}{\delta x_m}\right)$$
$$+ \left(X_1 \frac{\delta^2 x_1}{\delta u \delta x_m} + \cdots + X_{m-1}\frac{\delta^2 x_{m-1}}{\delta u \delta x_m}\right),$$

il viendra :

$$\frac{dX_m}{du} + \frac{d\lambda U}{dx_m} = \left(\frac{dX_1}{dx_m}\frac{\delta x_1}{\delta u} - \frac{dX_1}{du}\frac{\delta x_1}{\delta x_m}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{dX_{m-1}}{dx_m}\frac{\delta x_{m-1}}{\delta u} - \frac{dX_{m-1}}{du}\frac{\delta x_{m-1}}{\delta x_m}\right).$$

Remplaçons maintenant dans cette égalité les dérivées des quantités X par rapport à u et à x_m, par leurs valeurs. On a, en général,

$$\frac{dX}{dx_m} = \frac{\delta X}{\delta x_1}\frac{\delta x_1}{\delta x_m} + \cdots + \frac{\delta X}{\delta x_{m-1}}\frac{\delta x_{m-1}}{\delta x_m} + \frac{\delta X}{\delta x_m},$$
$$\frac{dX}{du} = \frac{\delta X}{\delta x_1}\frac{\delta x_1}{\delta u} + \cdots + \frac{\delta X}{\delta x_{m-1}}\frac{\delta x_{m-1}}{\delta u}.$$

Substituons ces valeurs dans l'expression de $\frac{d\lambda U}{dx_m}$; nous aurons:

$$\frac{d\lambda U}{dx_m} = \frac{\delta x_1}{\delta u}\left[\left(\frac{\delta X_1}{\delta x_1} - \frac{\delta X_1}{\delta x_1}\right)\frac{\delta x_1}{\delta x_m} + \cdots + \left(\frac{\delta X_1}{\delta x_m} - \frac{\delta X_m}{\delta x_1}\right)\right]$$

. . . .

$$+ \frac{\delta x_{m-1}}{\delta u}\left[\left(\frac{\delta X_{m-1}}{\delta x_1} - \frac{\delta X_1}{\delta x_{m-1}}\right)\frac{\delta x_1}{\delta x_m} + \cdots + \left(\frac{\delta X_{m-1}}{\delta x_m} - \frac{\delta X_m}{\delta x_1}\right)\right]. \quad (8)$$

Posons pour simplifier :

$$\mu\nu = (\mu\nu) = (\mu, \nu) = \frac{\delta X_\mu}{\delta x_\nu} - \frac{\delta X_\nu}{\delta x_\mu},$$

de sorte que

$$(\nu\mu) = -(\mu, \nu); \quad (\mu\mu) = 0,$$

et ensuite :

$$k_1 = (1,1)\frac{\delta x_1}{\delta x_m} + (1,2)\frac{\delta x_2}{\delta x_m} + \cdots + (1, m-1)\frac{\delta x_{m-1}}{\delta x_m} + (1, m), \quad (9_1)$$

$$k_2 = (2,1)\frac{\delta x_1}{\delta x_m} + (2,2)\frac{\delta x_2}{\delta x_m} + \cdots + (2, m-1)\frac{\delta x_{m-1}}{\delta x_m} + (2, m), \quad (9_2)$$

. . . .

$$k_{m-1} = (m-1, 1)\frac{\delta x_1}{\delta x_m} + \cdots + (m-1, m-1)\frac{\delta x_{m-1}}{\delta x_m} + (m-1, m). \quad (9_{m-1})$$

$$k_m = (m, 1)\frac{\delta x_1}{\delta x_m} + \cdots + (m, m-1)\frac{\delta x_{m-1}}{\delta x_m} + (m, m) \quad \ldots\ldots \quad (9_m)$$

L'équation générale (8) deviendra :

$$\frac{d\lambda U}{dx_m} = k_1\frac{\delta x_1}{\delta u} + k_2\frac{\delta x_2}{\delta u} + \cdots + k_{m-1}\frac{\delta x_{m-1}}{\delta u} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

En supposant $u = u_1$, $u = u_2, \ldots, u = u_{m-1}$, on trouvera les $(m-1)$ équations suivantes, auxquelles nous ajoutons une équation identique, déduite des équations (9)

$$\frac{d\lambda U_1}{dx_m} = k_1\frac{\delta x_1}{\delta u_1} + k_2\frac{\delta x_2}{\delta u_1} + \cdots + k_{m-1}\frac{\delta x_{m-1}}{\delta u_1}, \quad \ldots \quad (11_1)$$

. . . .

$$\frac{d\lambda U_{m-1}}{dx_m} = k_1\frac{\delta x_1}{\delta u_{m-1}} + k_2\frac{\delta x_2}{\delta u_{m-1}} + \cdots + k_{m-1}\frac{\delta x_{m-1}}{\delta u_{m-1}}, \quad \ldots \quad (11_{m-1})$$

$$0 = k_1\frac{\delta x_1}{\delta x_m} + k_2\frac{\delta x_2}{\delta x_m} + \cdots + k_{m-1}\frac{\delta x_{m-1}}{\delta x_m} + k_m \quad . \quad (11_m)$$

Comparons ces équations aux relations (6) et (7), et nous verrons que l'on satisfait à toutes les conditions exprimées par ces dernières, en posant :

$$\frac{k_1}{X_1} = \frac{k_2}{X_2} = \cdots = \frac{k_{m-1}}{X_{m-1}} = \frac{k_m}{X_m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Chacun de ces rapports sera d'ailleurs égal à

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dx_m}.$$

On devra donc, pour effectuer la transformation de Pfaff, intégrer le système (12), où n'entrent que des dérivées par rapport à x_m. On en conclut que l'on pourra prendre les $(m-1)$ constantes de l'intégration pour les nouvelles variables $u_1, \ldots, u_{m-1}$.

Dans des cas particuliers, c'est-à-dire, pour certaines valeurs des fonctions X, les $(m-1)$ équations (12) se réduiront à un nombre moindre et une ou plusieurs des relations (5) resteront arbitraires. Dans ce cas, le plus simple sera de se donner arbitrairement la valeur d'une ou de plusieurs des dérivées

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_m}, \frac{\partial x_2}{\partial x_m}, \ldots, \frac{\partial x_{m-1}}{\partial x_m}$$

ce qui revient à prendre un certain nombre de nouvelles variables u, identiques aux anciennes.

48. *Résolution des équations (12), par rapport aux dérivées* $\frac{\partial x}{\partial x_m}$ (*). Pour résoudre les équations (12), nous poserons

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dx_m}dx_m = dx_{m+1};$$

(*) Tout ce qui se rapporte à la résolution effective des équations (12) ne fait pas, à proprement parler, partie de la théorie que nous exposons ici. Sur les déterminants gauches et les pfaffiens, nous renvoyons à Baltzer, *Déterminants*, § III, n° 8, p. 21; § VIII, n^{os} 1-4, pp. 52-60; § IX, n^{os} 4-5, pp. 67-68. Pfaff et Gauss remarquent qu'il est impossible de résoudre le système (12) quand m est impair, mais n'en donnent pas la démonstration. Jacobi donne les notions les plus essentielles sur ce sujet dans le mémoire cité. Toutefois la théorie des pfaffiens est due surtout à Cayley, dont les travaux sont résumés et complétés par Baltzer, dans l'ouvrage cité. L'élégant artifice que nous donnons plus bas, pour résoudre le système (12) n'est pas dans l'ouvrage de Baltzer (édition française). Nous l'empruntons à un petit mémoire de Cayley, où il est employé incidemment : *Démonstration d'un théorème de* de cette manière, ces équations prendront la forme symétrique suivante :

$$(1,\ 1)\,dx_1 + (1,\ 2)\,dx_2 + \cdots + (1,\ m)\,dx_m = X_1 dx_{m+1}, \quad . \quad . \quad (13_1)$$

$$(2,\ 1)\,dx_1 + (2,\ 2)\,dx_2 + \cdots + (2,\ m)\,dx_m = X_2 dx_{m+1}, \quad . \quad . \quad (13_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(m, 1)\,dx_1 + (m, 2)\,dx_2 + \cdots + (m, m)\,dx_m = X_m dx_{m+1} \quad . \quad . \quad (13_m)$$

Le déterminant de ce système linéaire est le déterminant symétrique gauche :

$$G = \begin{vmatrix} 11, 12, 13, \ldots, 1m \\ 21, 22, 23, \ldots, 2m \\ 31, 32, 33, \ldots, 3m \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ m1, \ \ldots\ , \ mm \end{vmatrix}$$

Or, celui-ci, comme on le sait, est le carré du pfaffien :

$$(1, 2, 3, \ldots, m),$$

si m est pair, et est identiquement nul, si m est impair. Il résulte de là que la transformation de Pfaff n'est, en général, possible que si m est pair. Dans le cas où m est impair, pour qu'elle soit possible, il faut que les déterminants qui sont au numérateur des inconnues dx_1, dx_2, ..., soient tous nuls en même temps que le dénominateur commun, qui est le déterminant écrit ci-dessus; ce qui revient à dire que les équations (13) ne sont pas toutes distinctes les unes des autres.

Dans le cas où m est pair, Cayley a donné une méthode extrêmement simple pour résoudre ces équations. Posons :

$$-X_1 = (1, m+1), \quad -X_2 = (2, m+1), \ldots, -X_m = (m, m+1).$$

Jacobi par rapport au problème de Pfaff (Journal de Crelle, t. LVII, pp. 273-277), p. 275. En imitant le procédé de Cayley, nous avons pu trouver l'équation (15) sans nous servir des propriétés des déterminants adjoints, comme fait Baltzer.

On pourra écrire comme suit les équations (13) :

$$(1,1)\,dx_1 + (1,2)\,dx_2 + \cdots + (1,m)\,dx_m + (1,m+1)\,dx_{m+1} = 0, \quad (14_1)$$

. . . .

$$(m,1)\,dx_1 + (m,2)\,dx_2 + \cdots + (m,m)\,dx_m + (m,m+1)\,dx_{m+1} = 0. \quad (14_m)$$

On a évidemment,

$$\frac{dx_1}{(2,3,4,\ldots,m,m+1)} = \frac{dx_2}{(3,4,5,\ldots,m+1,1)} = \cdots$$
$$= \frac{dx_m}{(m+1,1,2,\ldots,m-1)} = \frac{dx_{m+1}}{(1,2,3,\ldots,m)},$$

les dénominateurs étant des pfaffiens. En effet, d'après la théorie de ces expressions remarquables, si l'on substitue ces valeurs dans les équations (14), on trouve pour résultat de la substitution les pfaffiens suivants qui sont identiquement nuls, comme ayant deux indices égaux :

$$(1,1,2,3,4,\ldots,m+1),\ (2,1,2,3,4,\ldots,m+1),\ (3,1,2,3,4,\ldots,m+1), \text{ etc.}$$

Il est facile d'exprimer au moyen de X_1, X_2, etc., les valeurs de dx_1, dx_2, etc. D'après une propriété fondamentale des pfaffiens, on a :

$$(2,3,4,\ldots,m+1) = -(m+1,2,3,4,\ldots m)$$
$$= -\left[(m+1,2)(3,4,\ldots,m) + (m+1,3)(4,5.\ldots,m,2) + \text{etc}\right],$$

ou encore

$$-(2,3,4,\ldots,m+1) = X_2(3,4,\ldots,m) + X_3(4,5,\ldots,m,2) + \cdots + X_m(2,3,\ldots,m-1).$$

De même

$$-(3,4,5,\ldots,m+1,1) = X_3(4,5,\ldots,m,1) + X_4(5,6,\ldots,m,1,3) + \text{etc.},$$

. . . .

$$-(m+1,1,2,3,\ldots,m-1) = X_1(2,3,4,\ldots,m-1) + X_2(3,4,5,\ldots,m-1,1) + \text{etc.}$$

Dans le cas où m est impair, et par conséquent $(m+1)$ pair, les équations (14) sont incompatibles, ou peuvent se réduire à un moindre nombre. Il est facile de distinguer les deux cas. Multiplions :

la première par. . . $(2, 3, 4, \ldots, m)$,
la deuxième par. . . $(3, 4, 5, \ldots, m, 1)$,
la troisième par. . . $(4, 5, 6, \ldots, m, 1, 2)$,
etc.

et ajoutons les résultats; les coefficients de dx_1, dx_2, ..., dx_m seront des pfaffiens identiquement nuls comme ayant deux indices égaux. Donc le résultat final sera :

$$[(1, m+1)(2, 3, 4, \ldots, m) + (2, m+1)(3, 4, \ldots, m, 1) + \text{etc.}]\, dx_{m+1} = 0,$$

ou encore,

$$(1, 2, 3, \ldots, m+1) = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Dans le cas où m est pair, $(m+1)$ impair, cette équation est satisfaite identiquement; si m est impair, $(m+1)$ pair, le premier membre de cette équation n'étant pas nul, *en général*, les équations (14) ou (15) seront donc incompatibles. Mais, *en particulier*, si les valeurs de $X_1, \ldots, X_m$, sont telles que $(1, 2, 3, \ldots, m+1) = 0$, les équations (13) se réduiront à un nombre moindre et seront compatibles. Cette équation de condition (15) peut prendre la forme suivante :

$$X_1(2, 3, \ldots, m) + X_2(3, 4, \ldots, m, 1) + \cdots + X_m(1, 2, \ldots, m-1) = 0. \quad (15')$$

Elle a déjà été indiquée par Jacobi, qui l'a trouvée d'une manière moins simple que celle que nous indiquons ici.

49. *Extension de la méthode précédente de transformation* (*). Considérons une expression différentielle

$$\Omega = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}.$$

(*) Gauss, Œuvres, t. III, pp. 233-234. Gauss fait remarquer que les transformations dont il s'agit ici ne sont comprises qu'implicitement dans le mémoire de Pfaff. Jacobi (Journal de Liouville, t. III, p. 201) expose à peu

Nous venons de voir qu'on peut la transformer en une expression

$$\lambda_1 (Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + \cdots + Y_{2n-1} dy_{2n-1}).$$

On peut effectuer une transformation analogue dans le cas où il s'agit d'une expression contenant un nombre impair de différentielles :

$$\Omega_1 = Y_1 dy_1 + \cdots + Y_{2n-2} dy_{2n-2} + Y_{2n-1} dy_{2n-1}.$$

Pour cela, on transformera d'abord par la théorie précédente ($\Omega_1 - Y_{2n-1}\, dy_{2n-1}$), en regardant y_{2n-1} comme constant, de manière à mettre cette expression sous la forme :

$$\lambda_1 (Z_1 dz_1 + \cdots + Z_{2n-3} dz_{2n-3}).$$

On aura évidemment alors :

$$\Omega_1 = \lambda_1 (Z_1 dz_1 + \cdots + Z_{2n-3} dz_{2n-3}) + Z_{2n-2} dy_{2n-1},$$

expression où

$$Z_{2n-2} = Y_{2n-1} - \lambda_1 \left(Z_1 \frac{\delta z_1}{\delta y_{2n-1}} + \cdots + Z_{2n-3} \frac{\delta z_{2n-3}}{\delta y_{2n-1}} \right).$$

Appelons première transformation, celle de Pfaff, dans le cas où m est pair, seconde transformation, celle que nous venons d'indiquer, d'après Gauss. Cela posé, en appliquant ($n - 1$) fois la seconde transformation à l'expression Ω_1, on parviendra à la mettre sous la forme :

$$U_1 du_1 + U_2 du_2 + \cdots + U_n du_n.$$

Une expression différentielle Ω qui contient une variable et une différentielle de plus, prendra la même forme, si l'on emploie *une* fois la transformation I, ($n - 1$) fois la transformation II. Dans

près les mêmes transformations dans un ordre inverse. Lagrange et Monge ont souvent employé des artifices de calcul semblables à celui de Gauss que nous exposons dans ce numéro.

ce dernier cas, pour effectuer ces transformations, il faut intégrer n systèmes d'équations simultanées analogues à (15), savoir :

1 système de $(2n - 1)$ équations simultanées,
1 » » $(2n - 3)$ » »
. . . .
1 système de 3 équations simultanées,
1 équation unique.

Dans le cas où il s'agit de transformer une expression Ω_1 contenant une variable de moins, il y a un système de moins à intégrer. Aucun système ne peut être formé qu'après l'intégration du précédent. Il résulte de là qu'en pratique les transformations de Pfaff sont extrêmement compliquées.

§ 14. *Intégration des équations différentielles totales et des équations aux dérivées partielles du premier ordre par la méthode de Pfaff.*

50. *Intégrale complète d'une équation différentielle totale par la méthode de Pfaff.* Soit à intégrer une équation différentielle totale entre $2n$ ou $(2n - 1)$ variables, par exemple, entre $2n$ variables :

$$X_{11}dx_{11} + X_{12}dx_{12} + \cdots + X_{1,2n}dx_{1,2n} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_1)$$

On peut d'abord transformer cette expression, comme l'indique Gauss, en une autre de la forme :

$$U_1du_1 + U_2du_2 + \cdots + U_ndu_n = 0.$$

Cela conduit à l'*intégrale complète* donnée par les relations

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n,$$

les a étant des constantes.

On peut aussi procéder autrement, en suivant la marche un peu plus simple indiquée par Pfaff. On transforme l'équation donnée en la suivante :

$$X_{21}dx_{21} + X_{22}dx_{22} + \cdots + X_{2,2n-1}\,dx_{2,2n-1} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_2)$$

Pour pouvoir y appliquer la même transformation, nous posons

$$x_{2,2n-1} = a_1,$$

et alors on peut mettre (1_2) sous la forme :

$$X_{31}dx_{31} + X_{32}dx_{32} + \cdots + X_{3,2n-3}dx_{3,2n-3} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_3)$$

Posons

$$x_{3,2n-3} = a_2,$$

et transformons ensuite (1_3) en

$$X_{41}dx_{41} + X_{42}dx_{42} + \cdots + X_{4,2n-5}dx_{4,2n-5} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_4)$$

On posera encore

$$x_{4,2n-5} = a_3,$$

et on continuera de cette manière, jusqu'à ce que l'on soit arrivé à

$$X_{n,1}dx_{n,1} + X_{n,2}dx_{n,2} + X_{n,3}dx_{n,3} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_n)$$

On posera

$$x_{n,3} = a_{n-1}.$$

L'équation donnera ensuite une intégrale de la forme :

$$f(x_{n,1}\ ,\ x_{n,2}) = a_n.$$

L'ensemble des relations

$$\begin{gathered} x_{2,2n-1} = a_1\ , \\ x_{3,2n-3} = a_2\ , \\ x_{4,2n-5} = a_3\ , \\ \cdots\cdots \\ x_{n,3} = a_{n-1}\ ; \\ f = a_n, \end{gathered}$$

constitue une intégrale de l'équation donnée, avec n constantes arbitraires; on peut l'appeler une *intégrale complète* de l'équation donnée (1).

On trouve aussi une intégrale complète avec n constantes arbitraires, quand il s'agit d'une équation différentielle totale à $(2n - 1)$ variables, telles que (1_2).

51. *Intégrales que l'on peut déduire de l'intégrale complète.* Dans la solution précédente, que l'on opère comme Gauss ou comme Pfaff, au fond, l'on met toujours l'équation sous la forme :

$$U_1 du_1 + U_2 du_2 + \cdots + U_n du_n = 0 \,, \quad \ldots \ldots \quad (a)$$

et l'on intègre en posant :

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n.$$

Mais ce n'est pas la seule manière d'intégrer cette équation auxiliaire (a). On peut aussi poser, avec Pfaff et Gauss :

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

F étant une fonction quelconque, et associer à cette relation les $(n - 1)$ suivantes, qui donnent avec $F = 0$, une intégrale de (1), dite *intégrale générale* :

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial u_1}}{U_1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial u_2}}{U_2} = \cdots = \frac{\frac{\partial F}{\partial u_n}}{U_n}.$$

Jacobi a fait remarquer que l'on pouvait encore trouver d'autres intégrales de la manière suivante. Posons :

$$F_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \ \ldots, \ F_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0.$$

On déduit de là :

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial F_1}{\partial u_2} du_2 + \cdots + \frac{dF_1}{\partial u_n} du_n = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial F_k}{\partial u_2} du_2 + \cdots + \frac{\partial F_k}{\partial u_n} du_n = 0.$$

Éliminons k différentielles du entre ces équations et (a) et égalons à zéro les coefficients des autres dans le résultat, nous trouverons ainsi $(n - k)$ relations :

$$F_{k+1} = 0, \quad F_{k+2} = 0, \ldots, F_n = 0,$$

qui avec celles que nous avons choisies arbitrairement

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, F_k = 0,$$

constituent encore un système intégral de l'équation (1) (*).

52. *Application à l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* Suivant une ingénieuse remarque de Pfaff, l'intégration d'une équation aux dérivées partielles :

$$f(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

revient à celle de l'équation différentielle totale :

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n + 0.dp_1 + \cdots + 0.dp_{n-1} + (-1)\, dz = 0, \; . \quad (3)$$

où p_n est censé remplacé par sa valeur déduite de la relation (2).

On peut appliquer la méthode précédente à cette équation (3). Pour cela, on posera

$$\begin{array}{llll} x_{n+1} = p_1, & x_{n+2} = p_2, \ldots, & x_{2n-1} = p_{n-1}, & x_{2n} = z, \\ X_1 \;\;\; = p_1, & X_2 \;\;\; = p_2, \ldots, & X_{n-1} = p_{n-1}, & X_n = p_n, \\ X_{n+1} = 0, & X_{n+2} = 0, \ldots, & X_{2n-1} = 0, & X_{2n} = -1. \end{array}$$

Presque toutes les quantités exprimées par le symbole

$$(\mu, \nu)$$

seront nulles, de sorte que les valeurs de $k_1, \ldots, k_{2n}$ se simplifieront beaucoup mais perdront en même temps leur forme symétrique.

(*) On trouve ainsi toutes les solutions, comme il est facile de le voir, en se reportant au n° 12.

On trouve :

$$k_1 = \frac{dp_1}{dz} - \frac{dp_n}{dx_1}\frac{dx_n}{dz},$$

$$k_2 = \frac{dp_2}{dz} - \frac{dp_n}{dx_2}\frac{dx_n}{dz},$$

. . . .

$$k_{n-1} = \frac{dp_{n-1}}{dz} - \frac{dp_n}{dx_{n-1}}\frac{dx_n}{dz},$$

$$k_n = \frac{dp_n}{dx_1}\frac{dx_1}{dz} + \cdots + \frac{dp_n}{dx_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dz} + \frac{dp_n}{dz} + \frac{dp_n}{dp_1}\frac{dp_1}{dz} + \cdots + \frac{dp_n}{dp_{n-1}}\frac{dp_{n-1}}{dz},$$

$$k_{n+1} = -\frac{dx_1}{dz} - \frac{dp_n}{dp_1}\frac{dx_n}{dz},$$

. . . .

$$k_{2n-1} = -\frac{dx_{n-1}}{dz} - \frac{dp_n}{dp_{n-1}}\frac{dx_n}{dz},$$

$$k_{2n} = -\frac{dp_n}{dz}\frac{dx_n}{dz}.$$

Les équations différentielles de la transformation sont, d'après ces valeurs, en remarquant que chacun des rapports $k : X$ est égal à

$$\frac{k_{2n}}{X_{2n}} = \frac{dp_n}{dz}\frac{dx_n}{dz},$$

et chassant dz :

$$dp_1 = \left(\frac{dp_n}{dx_1} + p_1\frac{dp_n}{dz}\right)dx_n; \quad dx_1 = -\frac{dp_n}{dp_1}dx_n;$$

. . . .

$$dp_{n-1} = \left(\frac{dp_n}{dx_{n-1}} + p_{n-1}\frac{dp_m}{dz}\right)dx_n; \quad dx_{n-1} = -\frac{dp_n}{dp_{n-1}}; dx_n$$

$$dz = \left(p_n - p_1\frac{dp_n}{dp_1} - \cdots - \frac{dp_n}{dp_{n-1}}\right)dx_n.$$

Pour mettre ces équations sous une forme plus symétrique, nous remarquerons que, d'après l'équation (2), on a :

$$\frac{dp_n}{dx} = -\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta p_n}}, \quad \frac{dp_n}{dp} = -\frac{\frac{\delta f}{\delta p}}{\frac{\delta f}{\delta p_n}}.$$

Introduisant ces valeurs dans les équations de la transformation, elles deviendront :

$$\frac{dx_1}{\frac{\delta f}{\delta p_1}} = \cdots = \frac{dx_n}{\frac{\delta f}{\delta p_n}} = \frac{dz}{\mathrm{P}} = \frac{dp_1}{\mathrm{P}_1} = \frac{dp_2}{\mathrm{P}_2} = \cdots = \frac{dp_n}{\mathrm{P}_n} : \quad . \quad . \quad . \quad (a')$$

si l'on pose, comme dans le chapitre précédent :

$$\mathrm{P}_1 = -\frac{\delta f}{\delta x_1} - \frac{\delta f}{\delta z} p_1, \ldots, \mathrm{P}_n = -\frac{\delta f}{\delta x_n} - \frac{\delta f}{\delta z} p_n,$$
$$\mathrm{P} = p_1 \frac{\delta f}{\delta p_1} + \cdots + p_n \frac{\delta f}{\delta p_n}.$$

Pfaff est donc arrivé identiquement aux mêmes équations auxiliaires auxquelles Jacobi est parvenu plus tard, en donnant à la méthode de Lagrange son extension naturelle (voir le § 11 tout entier). Comme nous l'avons déjà dit, les calculs se font de la même manière dans les deux méthodes, mais dans un ordre inverse.

Dans la méthode primitive de Pfaff, on doit intégrer n systèmes d'équations auxiliaires analogues à (a'), qui donnent n relations contenant n constantes arbitraires. L'élimination de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ entre ces n relations et l'équation donnée conduit à l'*intégrale complète* de l'équation aux dérivées partielles (2).

La formation des autres systèmes auxiliaires (a') ne peut se faire que dans chaque cas particulier, puisqu'ils dépendent des intégrales du premier de ces systèmes (*).

(*) Sur *le problème de Pfaff*, voir les remarquables mémoires de Natani (Journal de Crelle, t. LVIII, pp. 301-328), de Clebsch (Journal de Crelle, t. LIX, pp. 190-192; t., pp. LX 193-251 ; t. LXI, pp. 146-179) et de Dubois-Reymond (*ibid.*, t. LXX, pp. 299-315) ; puis divers écrits de Lie, dans les recueils de l'Académie de Christiania.

§ 15. *Simplification de la méthode de Pfaff. Problème inverse.*

53. *Simplification de la méthode de Pfaff pour l'intégration des équations aux dérivées partielles par Jacobi* (*). En supposant, comme aux nos 42 et 45, que l'on intègre les équations auxiliaires que nous venons de trouver, puis que l'on fasse un changement de variables, on ramènera l'intégration de l'équation donnée à celle de

$$C_1 du_1 + \cdots + C_{2n-1} du_{2n-1} = 0,$$

$u_1, \ldots, u_{2n-1}$ étant les constantes de l'intégration des équations auxiliaires, et les C étant définis par les relations :

$$U = p_1 \frac{dx_1}{du} + \cdots + p_n \frac{dx_n}{du},$$

$$U = Ce^{-\int \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{P}}.$$

Jacobi, s'inspirant des recherches de Hamilton sur la dynamique, a eu l'heureuse idée d'introduire dans cette théorie les valeurs initiales des variables, savoir z_0, x_{10}, ..., x_{n0}, p_{10}, ..., p_{n0} et de

(*) Jacobi, *Journal de Liouville*, t. III, pp. 171-182, § IX du Mémoire. Jacobi s'étonne que Pfaff n'ait pas trouvé la simplification exposée dans les nos 53 et 54. Mais la chose n'était pas si simple, puisque Jacobi lui-même n'y a pas songé quand il s'est occupé de la méthode de Lagrange. Il fallait, pour cela, introduire dans les équations les valeurs initiales des variables. C'est ce que fit Cauchy dès 1819; Jacobi n'a vu la portée de ce choix des nouvelles variables qu'en 1835, après les travaux de Hamilton sur la dynamique. C'est pourquoi il nous semble que l'on désigne à tort en Allemagne la méthode d'intégration que nous venons d'exposer sous le nom de méthode de Hamilton et Jacobi, puisque bien longtemps avant ces géomètres, Cauchy avait découvert, par une méthode plus directe que celle de Pfaff, les résultats retrouvés plus tard par Jacobi, d'une manière assez pénible. [M. Lie fait remarquer aussi, dans un de ses derniers mémoires, que la méthode de Pfaff, perfectionnée par Jacobi, doit s'appeler *méthode de Cauchy*.]

prendre l'intégrale qui entre dans l'équation précédente entre les limites z_0 et z. Il vient ainsi

$$U = U_0 e^{-\int_0^z \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{P}}, \quad C = U_0 = p_{10} \frac{dx_{10}}{du} + \cdots + p_{n0} \frac{dx_{n0}}{du}.$$

L'équation à intégrer se réduit à :

$$U_{10} du_1 + \cdots + U_{2n-1,0} du_{2n-1} = 0;$$

ou, tout au long :

$$\begin{aligned} & p_{10} \left(\frac{dx_{10}}{du_1} du_1 + \cdots + \frac{dx_{10}}{du_{2n-1}} du_{2n-1} \right) + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + p_{n0} \left(\frac{dx_{n0}}{du_1} du_1 + \cdots + \frac{dx_{n0}}{du_{2n-1}} du_{2n-1} \right) = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$p_{10} dx_{10} + \cdots + p_{n0} dx_{n0} = 0.$$

On peut prendre pour système intégral de ces équations :

$$x_{10} = a_1, \quad x_{20} = a_2, \ldots, x_{n0} = a_n,$$

a_1, a_2, ..., a_n désignant des constantes.

De là, la règle suivante pour intégrer l'équation (1). Soit f_0 ce que devient l'une quelconque des fonctions f quand on y fait $z = z_0$. Tirez des relations :

$$f_{10} = u_1, \ldots, f_{2n-1,0} = u_{2n-1}, \quad f_{2n,0} = 0,$$

les valeurs de x_{10}, ..., x_{n0}, p_{10}, ..., p_{n0}, en fonction de u_1, ..., u_{2n-1}. Soient trouvées ainsi les n relations :

$$\begin{aligned} x_{10} &= F_1(u_1, \ldots, u_{2n-1}), \\ & \cdots\cdots\cdots \\ x_{n0} &= F_n(u_1, \ldots, u_{2n-1}). \end{aligned}$$

Pour avoir l'intégrale complète de l'équation (1), il suffira d'éliminer p_1, ..., p_n entre les équations

$$F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2, \ldots, F_n = a_n,$$

après que les u sont remplacés par leurs valeurs.

Remarques. I. Si $P = 0$ en vertu de l'équation donnée, la méthode précédente donne pour une intégrale des équations auxiliaires, $z = z_0$. Dans ce cas, on ne trouve plus directement d'intégrale complète, comme il est facile de le voir, et comme nous le montrerons à propos de la méthode de Cauchy, où la même exception se présente.

II. Au lieu de prendre pour nouvelles variables les u et z, on peut prendre les u et un quelconque des x, ce qui rapproche davantage la méthode de Pfaff modifiée par Jacobi, de celle de Cauchy. La principale différence entre les deux méthodes consiste en ce que Cauchy emploie $(n - 1)$ nouvelles variables fonction des anciennes, et n constantes arbitraires dès le commencement des calculs, tandis que Pfaff et Jacobi emploient $(2n - 1)$ nouvelles variables et sont forcés, dans la suite des calculs, d'en faire n égales à des constantes, ou au moins, comme nous venons de le voir, d'égaler n fonctions de ces variables à des constantes, ce qui revient au même.

54. *Simplification de la méthode générale de Pfaff par Jacobi* (*). Nous avons indiqué plus haut (n° 53), comment Jacobi, en s'aidant des travaux de Hamilton, a ramené l'intégration de l'équation (2) à celle du seul système (a'). Nous allons faire connaître comment il a pu, d'une manière analogue, former immédiatement toutes les équations auxiliaires, dont on a besoin dans la méthode générale de Pfaff, pour intégrer une équation différentielle totale.

Soit x_{2n}^0 une valeur de x_{2n}, pour laquelle $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$ prennent les valeurs $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{2n-1}^0$. Posons :

$$\begin{array}{llll}
x_1 = x_1^0 + (x_{2n} - x_{2n}^0)\,\xi_1, & & X_1 = X_1^0 + (x_{2n} - x_{2n}^0)\,\Xi_1, \\
x_2 = x_2^0 + (x_{2n} - x_{2n}^0)\,\xi_2, & & X_2 = X_2^0 + (x_{2n} - x_{2n}^0)\,\Xi_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{2n-1} = x_{2n-1}^0 + (x_{2n} - x_{2n}^0)\,\xi_{2n-1}, & & X_{2n-1} = X_{2n-1}^0 + (x_{2n} - x_{2n}^0)\,\Xi_{2n-1}, \\
x_{2n} = x_{2n}^0 + (x_{2n} - x_{2n}^0)\,\xi_{2n}, & & X_{2n} = X_{2n}^0 + (x_{2n} - x_{2n}^0)\,\Xi_{2n},
\end{array}$$

(*) Jacobi, *Journal de Liouville*, t. III, pp. 194-201, § XII du mémoire. [Le sujet traité dans ce numéro et le suivant ne fait pas, à proprement parler, partie du sujet de ce mémoire.]

$\xi_1, \ldots, \xi_{2n-1}$ n'étant pas infinis pour $x_{2n} = x_{2n}^0$, et ξ_{2n} étant égal à 1. En introduisant à la place des anciennes variables, leurs valeurs initiales et x_{2n}, on aura

$$\begin{aligned} & X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} \\ & = B_1 dx_1^0 + B_2 dx_2^0 + \cdots + B_{2n-1} dx_{2n-1}^0 + B_{2n} dx_{2n}. \end{aligned}$$

Supposons que les relations données plus haut entre les nouvelles et les anciennes variables soient celles qui permettent de faire la première transformation de Pfaff, on aura $B_{2n} = 0$; ensuite,

$$B_i = X_i^0 + (x_{2n} - x_{2n}^0)\,\xi_i + (x_{2n} - x_{2n}^0) \sum \frac{d\xi_k}{dx_i^0} X_k^0 + (x_{2n} - x_{2n}^0)^2 \sum \frac{d\xi_k}{dx_i^0} \Xi_k,$$

étant indépendant de x_{2n}, à un facteur λ près, on pourra y faire $x_{2n} = x_{2n}^0$. De cette manière, l'équation donnée deviendra donc

$$X_1^0 dx_1^0 + X_2^0 dx_2^0 + \cdots + X_{2n-1}^0 dx_{2n-1}^0 = 0.$$

Pour intégrer celle-ci, nous poserons,

$$x_{2n-1}^0 = \alpha,$$

puis nous la transformerons en une autre contenant une variable de moins, au moyen de l'intégration d'un système auxiliaire analogue aux équations (12) du § 13 :

$$\frac{k_1}{X_1} = \frac{k_2}{X_2} = \cdots = \frac{k_{2n}}{X_{2n}}.$$

Pour obtenir ces nouvelles équations auxiliaires, il suffira de laisser dans le système précédent les deux dernières équations de côté, et de faire dans les autres $x_{2n} = x_{2n}^0$, puis de remplacer x_{2n-1} par α, x_i par x_i^0. En effet, ces changements étant faits dans les calculs du § 12, donneront les calculs nécessaires pour transformer la dernière équation différentielle totale en

$$X_1^{00} dx_1^{00} + X_2^{00} dx_2^{00} + \cdots + X_{2n-4}^{00} dx_{2n-4}^{00} = 0.$$

Et ainsi de suite. Il est clair que l'on peut continuer de cette manière la formation des systèmes d'équations auxiliaires et arriver au système intégral :

$$x^{0}_{2n-1} = \alpha_1, \quad x^{00}_{2n-3} = \alpha_2, \quad x^{000}_{2n-5} = \alpha_3, \ldots, x^{0^n}_{1} = \alpha_n.$$

Remarque. Il y a une grande simplification si

$$X_1 = 0, \ldots, X_{n-r} = 0.$$

Dans ce cas, quand on sera arrivé à une équation de la forme :

$$X^{0^r}_{n+1-r} dx^{0^r}_{n+1-r} + \cdots + X^{0^r}_{2n-2r}\, dx^{0^r}_{2n-2r} = 0,$$

on pourra s'arrêter. On aura, en effet, déjà r relations :

$$x^{0}_{2n-1} = \alpha_1, \quad x^{0^2}_{2n-3} = \alpha_2, \ldots, x^{0^{r-1}}_{2n+1-2r} = \alpha_r,$$

et l'on pourra en outre poser immédiatement, pour intégrer la dernière transformée :

$$x^{0^r}_{n+1-r} = \alpha_{r+1}, \ldots, x^{0^r}_{2n-2r} = \alpha_n.$$

Dans le cas des équations aux dérivées partielles, cela arrive après la première transformation parce que l'on a $r = (n-1)$.

55. *Problème inverse de celui de Pfaff* (*). Soient

$$x_1 = f_1(x_{n+1}, \ldots, x_{2n}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad \ldots\ldots \quad (4_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = f_n(x_{n+1}, \ldots, x_{2n}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad \ldots\ldots \quad (4_n)$$

(*) Jacobi, *Journal de Liouville*, t. III, pp. 185-194, § XIV du mémoire, donne le théorème de ce numéro, sans employer le calcul des variations. Dans le § X, pp. 182-185, il démontre le théorème correspondant pour les équations auxiliaires (a'). Nous avons cru préférable, pour ne plus revenir sur la méthode de Pfaff, de placer ici le théorème général, en employant les notations du calcul des variations pour plus de brièveté, et de donner comme cas particulier le théorème relatif aux équations (a'). Notre démonstration générale est imitée de celle de Jacobi, *Vorlesungen*, pp. 372-375.

Nous avons laissé de côté tout ce qui se rapporte aux équations de la forme indiquée dans la remarque II, pour ne pas entrer dans les théories de la dynamique supérieure, ce qui aurait trop allongé notre travail.

n relations satisfaisant à l'équation différentielle totale

$$X_1\,dx_1 + \cdots + X_{2n}dx_{2n} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

de sorte que

$$X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} + \cdots + X_n \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}} + X_{n+1} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (6_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_{2n}} + \cdots + X_n \frac{\partial f_n}{\partial x_{2n}} + X_{2n} = 0. \quad \ldots \ldots \quad (6_n)$$

Posons, en outre, les n relations

$$X_1 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} + \cdots + X_n \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_1} + \lambda\beta_1 = 0, \quad \ldots \ldots \quad (7_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_1 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_n} + \cdots + X_n \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_n} + \lambda\beta_n = 0 \quad \ldots \ldots \quad (7_n)$$

où $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont de nouvelles constantes. Les équations (6) et (7), après élimination de λ, contiennent $(2n-1)$ constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\frac{\beta_1}{\beta_n}, \ldots, \frac{\beta_{n-1}}{\beta_n}$, et sont les intégrales des $(2n-1)$ équations rencontrées par Pfaff dans la recherche de l'intégrale de (5).

Imaginons, en effet, que l'on déduise des équations (6) et (7) les variables x en fonction de λ, des α et des β. Faisons varier dans les équations (6) et (7) α et β de $\delta\alpha$ et $\delta\beta$, les x varieront de δx. Cela posé, multiplions les équations $(6_1), \ldots, (6_n)$, $(7_1), \ldots, (7_n)$ respectivement par $\delta x_{n+1}, \delta x_{n+2}, \ldots, \delta x_{2n}, \delta\alpha_1, \ldots, \delta\alpha_n$; en ajoutant les résultats, il viendra à cause de (4),

$$X_1\delta x_1 + \cdots + X_{2n}\delta x_{2n} + \lambda(\beta_1\delta\alpha_1 + \cdots + \beta_n\delta\alpha_n) = 0. \quad \ldots \quad (8)$$

Dérivons par rapport à λ, et cette équation donnera :

$$\Sigma X\delta \frac{dx}{d\lambda} + \Sigma \frac{dX}{d\lambda}\delta x + \Sigma\beta d\alpha = 0. \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

En multipliant les équations (6) par $\frac{dx_{n+1}}{d\lambda}, \ldots, \frac{dx_{2n}}{d\lambda}$, et ajoutant les résultats, on trouve la relation suivante, évidente d'ailleurs d'après (5) :

$$X_1 \frac{dx_1}{d\lambda} + \cdots + X_{2n} \frac{dx_{2n}}{d\lambda} = 0,$$

d'où, par variation,

$$\Sigma X \delta \frac{dx}{d\lambda} + \Sigma \frac{dx}{\delta\lambda} \delta X = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Retranchons de l'équation (9), l'équation (10) et l'équation (8) divisée par λ, il viendra

$$\Sigma \frac{dX}{d\lambda} \delta x - \Sigma \frac{dx}{d\lambda} \delta X - \frac{\Sigma X \delta x}{\lambda} = 0.$$

On déduit de là, en égalant à zéro, les coefficients de $\delta x_1, \ldots, \delta x_{2n}$,

$$\frac{dX_1}{d\lambda} - \left(\frac{dx_1}{d\lambda}\frac{\delta X_1}{\delta x_1} + \cdots + \frac{dx_{2n}}{\delta\lambda}\frac{\delta X_{2n}}{\delta x_1}\right) - \frac{X_1}{\lambda} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dX_{2n}}{d\lambda} - \left(\frac{dx_1}{d\lambda}\frac{\delta X}{\delta x_{2n}} + \cdots + \frac{dx_{2n}}{\delta\lambda}\frac{\delta X_{2n}}{\delta x_{2n}}\right) - \frac{X_{2n}}{\lambda} = 0.$$

En écrivant, au lieu de $\frac{dX}{d\lambda}$, la valeur :

$$\frac{\delta X}{\delta x_1}\frac{\delta x_1}{\delta\lambda} + \cdots + \frac{\delta X}{\delta x_{2n}}\frac{\delta x_{2n}}{\delta\lambda},$$

les équations précédentes prennent la forme suivante :

$$\frac{dx_1}{d\lambda}(1,1) + \frac{dx_2}{d\lambda}(1,2) + \cdots + \frac{dx_{2n}}{d\lambda}(1,2n) = \frac{X_1}{\lambda},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dx_1}{d\lambda}(2n,1) + \frac{dx_2}{d\lambda}(2n,2) + \cdots + \frac{dx_{2n}}{d\lambda}(2n,2n) = \frac{X_{2n}}{\lambda},$$

ce qui est le système auxiliaire de Pfaff.

Remarques. I. Pour que les variations des x soient indépendantes en même temps que celle des α et des β, comme on le suppose plus haut, il faut que les équations (6) et (7) soient telles que

$$D\frac{x_1, \ldots, x_{2n}}{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n}$$

ne soit pas identiquement nul.

II. Ce qui précède peut s'appliquer, en particulier, aux équations auxiliaires auxquelles on est conduit quand on cherche l'intégrale de l'équation

$$p_n + f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}) = 0.$$

Si

$$z = \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

est une solution complète de cette équation, ou de

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_{n-1} dx_{n-1} - f dx_n,$$

on aura, pour intégrale des équations auxiliaires :

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{\delta f}{\delta p_1}, \ldots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{\delta f}{\delta p_{n-1}},$$

$$\frac{dp_1}{dx_n} = -\frac{\delta f}{\delta x_1} - p_1 \frac{\delta f}{\delta z}, \ldots, \frac{dp_{n-1}}{dx_n} = -\frac{\delta f}{\delta x_{n-1}} - p_{n-1} \frac{\delta f}{\delta z},$$

$$\frac{dz}{dx_n} = p_1 \frac{\delta f}{\delta p_1} + \cdots + p_{n-1} \frac{\delta f}{\delta p_{n-1}} - f,$$

le système

$$\frac{\delta \mathrm{F}}{\delta x_1} = p_1, \ldots, \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta x_{n-1}} = p_{n-1}, \mathrm{F} = z \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\mathrm{I})$$

$$\frac{\delta \mathrm{F}}{\delta \alpha_1} = \beta_1 \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta \alpha_n}, \ldots, \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta \alpha_{n-1}} = \beta_{n-1} \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta \alpha_n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\mathrm{II})$$

contenant $2n$ constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$.

On déduit ces résultats des précédents, au moyen des hypothèses du n° 52. La démonstration directe en est d'ailleurs très-simple (*).

(*) Binet (C. R., t. XIV, pp. 654-660, t. XV, pp. 74-80), Cauchy, § II du mémoire analysé au Livre III (Exercices d'analyse et de phys. math., t. II, pp. 261-272), Jacobi, *Vorlesungen*, pp. 364-369, ont employé le calcul des variations pour exposer la méthode de Pfaff modifiée par Jacobi ou des recherches équivalentes sur les équations aux dérivées partielles. Nous croyons pouvoir nous borner ici à donner une idée de ce mode d'exposition, à propos du problème inverse de celui de Pfaff. On abrége considérablement les écritures par ce moyen, mais l'exposition devient moins claire.

III. Puisque $z = F$ est une solution complète de l'équation $p_n + f = 0$, les fonctions F, $\varphi_1 = \frac{\delta F}{\delta x_1}, \ldots, \varphi_{n-1} = \frac{\delta F}{\delta x_{n-1}}$, considérées comme fonctions des constantes, doivent être indépendantes, sans quoi il y aurait une relation entre ces fonctions et, par suite, z satisferait à une seconde équation aux dérivées partielles. Or, si cela était, cette équation et la donnée représenteraient seulement au plus ∞^{2n-1} éléments, et il en serait de même de $z = F$ et de ses dérivées; par conséquent $z = F$ contiendrait au moins une constante supplémentaire, ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc, en posant :

$$\psi_1 = \frac{\delta F}{\delta a_1}, \ldots, \psi_n = \frac{\delta F}{\delta a_n},$$

$$\begin{vmatrix} \psi_1 & , \ldots , & \psi_n \\ \frac{\delta \psi_1}{\delta x_1} & , \ldots , & \frac{\delta \psi_n}{\delta x_1} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \frac{\delta \psi_1}{\delta x_{n-1}} & , \ldots , & \frac{\delta \psi_n}{\delta x_{n-1}} \end{vmatrix} = (\psi_1)^n \, D \, \frac{\left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right), \ldots, \left(\frac{\psi_{n-1}}{\psi_1}\right)}{x_1, \ldots, x_{n-1}} \gtrless 0 \quad . \; . \; . \quad \text{(III)}$$

Il résulte de là que si l'on résout les équations (I) et (II), par rapport aux constantes, on trouvera des fonctions des variables indépendantes les unes des autres. En effet, par hypothèse, des équations (I), on peut déduire les valeurs des α, puisque le déterminant fonctionnel des premiers membres par rapport aux α n'est pas nul. Des équations (II) on peut déduire les valeurs des constantes β à cause de l'inégalité (III) (*).

(*) Jacobi, *Vorlesungen*, pp. 471-475.

(125)

LIVRE II.

MÉTHODE DE JACOBI (*).

CHAPITRE I.

PRINCIPES.

§ 16. *Propriétés fondamentales des expressions symboliques de Poisson* (**).

56. *Définitions.* Soient φ et ψ deux fonctions explicites des variables $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$; supposons que de plus φ contienne explicitement r fonctions $a_1, a_2, \ldots, a_r$, et ψ s fonctions $b_1, b_2, \ldots, b_s$ de ces mêmes variables, de sorte que

$$\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, a_1, \ldots, a_r),$$
$$\psi = \psi(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, b_1, \ldots, b_s).$$

(*) La méthode nouvelle de Jacobi a été publiée par Clebsch dans le t. LX du Journal de Crelle en 1862, sous le titre *Nova methodus*, etc., puis dans les *Vorlesungen über Dynamik*, leçons 21-23 et passim, en 1866; mais Jacobi possédait cette méthode dès 1838, comme il résulte des indications données plus bas, note 1 du § 17. C'est pourquoi cette méthode doit porter le nom de Jacobi, quoiqu'elle ait été retrouvée avant 1862, par Liouville, Bour et Donkin, dans ses traits essentiels (voir la note citée). Nous rattachons à la méthode de Jacobi les recherches qui en sont la suite naturelle.

(**) Poisson, *Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique* (Journal de l'école polytechnique, 15e cahier, p. 281), a le premier employé la notation (φ, ψ). La notation $[\varphi, \psi]$ s'est ensuite introduite d'elle-même. Nous proposons les trois autres notations symboliques pour simplifier les démonstrations du § 18. Nous suivons, en général, dans ce § 16, l'exposition d'Imschenetsky, § 16, pp. 48-52.

Nous poserons :

$$(\varphi, \psi) = \sum_1^n \begin{vmatrix} \frac{\delta\varphi}{\delta x_i}, & \frac{\delta\psi}{\delta x_i} \\ \frac{\delta\varphi}{\delta p_i}, & \frac{\delta\psi}{\delta p_i} \end{vmatrix},$$

$$[\varphi, \psi) = \sum_1^n \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx_i}, & \frac{\delta\psi}{\delta x_i} \\ \frac{d\varphi}{dp_i}, & \frac{\delta\psi}{\delta p_i} \end{vmatrix},$$

$$(\varphi, \psi] = \sum_1^n \begin{vmatrix} \frac{\delta\varphi}{\delta x_i}, & \frac{d\psi}{dx_i} \\ \frac{\delta\varphi}{\delta p_i}, & \frac{d\psi}{dp_i} \end{vmatrix},$$

$$[\varphi, \psi] = \sum_1^n \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx_i}, & \frac{d\psi}{dx_i} \\ \frac{d\varphi}{dp_i}, & \frac{d\psi}{dx_i} \end{vmatrix},$$

$$(\overline{\varphi, \psi}) = \sum_1^n \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx_i}, & \frac{d\psi}{dx_i} \\ \frac{\delta\varphi}{dp_i}, & \frac{\delta\psi}{\delta p_i} \end{vmatrix}.$$

Au besoin, quand cela ne sera cause d'aucune ambiguïté, nous écrirons, au lieu de n'importe quel de ces symboles,

$$\varphi\psi \quad \text{ou} \quad \varphi, \psi,$$

en supprimant les parenthèses et les crochets.

On trouve immédiatement les formules suivantes :

$$\varphi\varphi = 0; \quad \varphi\psi = -\psi\varphi; \quad \varphi, -\psi = -\varphi\psi; \quad \text{constante}, \psi = 0; \quad . \quad (1)$$

$$(x_i, \psi) = \frac{\delta\psi}{\delta p_i}; \quad (x_i, \psi] = \frac{d\psi}{dp_i}; \quad (p_i, \psi) = -\frac{\delta\psi}{\delta x_i}; \quad (p_i, \psi] = -\frac{d\psi}{dx_i}; \quad (2)$$

$$(x_i, x_k) = (p_i, p_k) = (x_i, p_k) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Si u désigne une des variables x ou p, on trouve encore, en supposant que D indique une dérivation par rapport à u,

$$\mathrm{D}\,(\varphi, \psi) = (\mathrm{D}\varphi, \psi) + (\varphi, \mathrm{D}\psi), \ldots \ldots \tag{4_1}$$

$$\mathrm{D}^2\,(\varphi, \psi) = (\mathrm{D}^2\varphi, \psi) + 2\,(\mathrm{D}\varphi, \mathrm{D}\psi) + (\varphi, \mathrm{D}^2\psi), \ldots \ldots \tag{4_2}$$

. . . .

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{D}^n(\varphi, \psi) = {} & (\mathrm{D}^n\varphi, \psi) + \frac{n}{1}(\mathrm{D}^{n-1}\varphi, \mathrm{D}\psi) + \frac{n(n-1)}{1.2}(\mathrm{D}^{n-2}\varphi, \mathrm{D}^2\psi) + \cdots \\ & + \frac{n(n-1)}{1.2}(\mathrm{D}^2\varphi, \mathrm{D}^{n-2}\psi) + \frac{n}{1}(\mathrm{D}\varphi, \mathrm{D}^{n-1}\psi) + (\varphi, \mathrm{D}^n\psi) \end{aligned}\right\}, \tag{4_n}$$

dont l'analogie avec la formule de Leibniz pour la recherche de $\mathrm{D}^n\varphi\psi$ est évidente (*). A priori, d'ailleurs, cette analogie doit exister puisque les expressions symboliques de Poisson sont des sommes de produits de deux fonctions, et cette remarque suffit pour démontrer les formules (4).

57. *Développements des diverses expressions* $\varphi\psi$. On a immédiatement par les propriétés élémentaires des déterminants :

$$(\overline{\varphi, \psi}) = \Sigma \begin{vmatrix} \dfrac{d\varphi}{dx}, & \dfrac{d\psi}{dx} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial p}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial p} \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial x} + \cdots + \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_r}\dfrac{\partial a_r}{\partial x}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial b_1}\dfrac{\partial b_1}{\partial x} + \cdots + \dfrac{\partial\psi}{\partial b_s}\dfrac{\partial b_s}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial p} & , \dfrac{\partial\psi}{\partial p} \end{vmatrix}$$

Cette équation prend une forme remarquable si $r = s = n$, et si $a = b = p$, les p étant supposés fonction des x. Alors il vient, en développant le déterminant du second membre

$$(\overline{\varphi, \psi}) = (\varphi, \psi) + \Sigma_i\Sigma_k \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_k}\left\{\frac{\partial p_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial x_i}\right\}. \ldots \ldots \tag{5}$$

la somme double s'étendant aux valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$ de i et k.

(*) Les formules (4) sont données par IMSCHENETSKY, pp. 51-52.

L'expression $[\varphi, \psi]$ donne un développement semblable. Elle est égale à

$$\Sigma \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_r}\frac{\partial a_r}{\partial x}, & \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial b_1}\frac{\partial b_1}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial b_s}\frac{\partial b_s}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_r}\frac{\partial a_r}{\partial p}, & \frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{\partial \psi}{\partial b_1}\frac{\partial b_1}{\partial p} + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial b_s}\frac{\partial b_s}{\partial p} \end{vmatrix}$$

En développant cette expression, on trouve la formule

$$[\varphi, \psi] = (\varphi, \psi) + \Sigma \frac{\partial \psi}{\partial b}(\varphi, b) + \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial a}(a, \psi) + \Sigma\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial \psi}{\partial b}(a, b) \,.\,.\,. \quad (6)$$

En particulier, si $r = s$, $a_i = b_i$,

$$[\varphi, \psi] = (\varphi, \psi) + \Sigma \left\{ (\varphi, a)\frac{\partial \psi}{\partial a} - (\psi, a)\frac{\partial \varphi}{\partial a} \right\} + \Sigma_i \Sigma_k \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial a_i}\frac{\partial \psi}{\partial a_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial a_k}\frac{\partial \psi}{\partial a_i} \right\} (a_i, a_k) \quad (6')$$

la somme double du second membre se rapportant aux valeurs de i inférieure à r, et aux valeurs de k supérieures à i, ou si l'on veut, 1, 2, 3, ..., r de i et de k, puisque les termes (a_i, a_i) se détruisent en vertu de la première formule (1).

Si φ et ψ ne contenaient explicitement que les a, cette formule (6′) se réduirait à

$$[\varphi, \psi] = \Sigma\Sigma \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial a_i}\frac{\partial \psi}{\partial a_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial a_k}\frac{\partial \psi}{\partial a_i} \right\} (a_i, a_k) \,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (6'')$$

Si φ ne contenait pas les fonctions a, et si ψ ne contenait que les fonctions a, la formule (6) conduirait à celle-ci :

$$[\varphi, \psi] = \Sigma (\varphi, a)\frac{\partial \psi}{\partial a} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (6''')$$

On arrive à un développement plus utile, mais moins naturel, de l'expression $[\varphi, \psi]$, en partant de la formule peu connue relative aux déterminants :

$$\begin{vmatrix} M + m, & N + n \\ P + p, & Q + q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M, & N + n \\ P, & Q + q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M + m, & N \\ P + p, & Q \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} M, & N \\ P, & Q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m, & n \\ p, & q \end{vmatrix}$$

Soient, dans cette formule (7),

$$M + m = \frac{d\varphi}{dx}, \quad N + n = \frac{d\psi}{dx}, \quad M = \frac{\delta\varphi}{\delta x}, \quad N = \frac{\delta\psi}{\delta x},$$

$$P + p = \frac{d\varphi}{dp}, \quad Q + q = \frac{d\psi}{dp}, \quad P = \frac{\delta\varphi}{\delta p}, \quad Q = \frac{\delta\psi}{\delta p}.$$

et faisons la somme de toutes les expressions semblables, il viendra immédiatement

$$[\varphi, \psi] = (\varphi, \psi] + [\varphi, \psi) - (\varphi, \psi) + \Sigma\Sigma \frac{\delta\varphi}{\delta a} \frac{\delta\psi}{\delta b} (a, b) \quad . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Si en particulier, $a = b$, $r = s$, cette formule devient :

$$[\varphi, \psi] = (\varphi, \psi] + [\varphi, \psi) - (\varphi, \psi) + \Sigma\Sigma \left\{ \frac{\delta\varphi}{\delta a_i} \frac{\delta\psi}{\delta a_k} - \frac{\delta\varphi}{\delta a_k} \frac{\delta\psi}{\delta a_i} \right\} (a_i, a_k) \quad . \quad (8')$$

Un cas extrêmement remarquable est celui où la fonction φ se réduit à p_i et ψ à p_k. On a alors, d'après les formules (2) et (3),

$$[\varphi, \psi] = (p_i, p_k) = 0;$$

$$[\varphi, \psi) = (p_i, \psi) = -\frac{\delta\psi}{\delta x_i} = -\frac{\delta p_k}{\delta x_i}; \quad (\varphi, \psi] = \frac{\delta p_i}{\delta x_k};$$

par suite, la formule (8′) donne

$$\frac{\delta p_k}{\delta x_i} - \frac{\delta p_i}{\delta x_k} = \Sigma\Sigma \left\{ \frac{\delta\varphi}{\delta a_i} \frac{\delta\psi}{\delta a_k} - \frac{\delta\varphi}{\delta a_k} \frac{\delta\psi}{\delta a_i} \right\} (a_i, a_k) - (\varphi, \psi) \; . \; . \; . \quad (8'')$$

Si, en particulier, $(\varphi, \psi) = 0$, cette formule se réduit à

$$\frac{\delta p_k}{\delta x_i} - \frac{\delta p_i}{\delta x_k} = \Sigma\Sigma \left\{ \frac{\delta\varphi}{\delta a_i} \frac{\delta\psi}{\delta a_k} - \frac{\delta\varphi}{\delta a_k} \frac{\delta\psi}{\delta a_i} \right\} (a_i, a_k) \; (^*) \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8''')$$

(*) Nous empruntons les formules (6) à IMSCHENETSKY, pp. 50-51. Les autres sous leur forme générale sont nouvelles. Contrairement à l'usage, nous laissons dans les sommes les termes qui se détruisent deux à deux, parce que leur suppression introduit dans les formules une complication inutile.

17. Théorème fondamental de Jacobi (*).

58. *Forme spéciale des conditions* $(\varphi, \psi) = 0$, *quand* φ *et* ψ *sont linéaires par rapport aux dérivées partielles de la variable dépendante.* Soit R une fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_m$ et

$$\rho_1 = \frac{dR}{du_1}, \quad \rho_2 = \frac{dR}{du_2}, \cdots, \rho_m = \frac{dR}{du_m},$$

$$I = AR = a_1 \frac{dR}{du_1} + \cdots + a_m \frac{dR}{du_m} = a_1\rho_1 + a_2\rho_2 + \cdots + a_m\rho_m,$$

$$J = BR = b_1 \frac{dR}{du_1} + \cdots + b_m \frac{dR}{dR_m} = b_1\rho_1 + b_2\rho_2 + \cdots + b_m\rho_m,$$

(*) Résumé de Jacobi, *Nova methodus*, §§ 23-26. Ce résumé se trouve aussi dans Imschenetsky, § 25, pp. 141-144, qui donne, en outre, la démonstration de Donkin, p. 145, pour le théorème fondamental; ensuite une démonstration qui lui est propre, nº 39, pp. 53-55; et dans Graindorge, V, pp. 35-41.

Il résulte d'un passage de la *Nova methodus*, § 28, signalé par Clebsch, que Jacobi possédait son principe fondamental dès 1838. Ce principe se trouve virtuellement contenu dans le *théorème de Poisson* (*Sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*, Journal de l'École polytechnique, 15e cahier, p 280), dont son auteur lui-même, ni Lagrange ne soupçonnèrent l'importance, comme le remarque Jacobi, *Nova methodus*, § 28. A la mort de Poisson, Jacobi appela l'attention sur le théorème (C. R., année 1840, p. 529), mais malheureusement sa *Nova methodus* ne fut publiée qu'en 1862 par Clebsch, *sans aucun changement*, sauf une petite addition d'une page à la fin du § 52, comme nous l'avons appris de la bouche même de ce géomètre. C'est donc par erreur que Imschenetsky dit que Clebsch « *a rédigé le travail de Jacobi d'après les matériaux trouvés dans ses papiers* » (page 6). Mais, il importe de faire remarquer avec le savant russe (pp. 124 et 145), que Donkin a trouvé le théorème fondamental de son côté (Philosophical Transactions, 1854, part. I, pp. 71 et 93); que Liouville l'a également démontré dans son cours de 1853, d'après ce que dit Bour, dans son mémoire, *Sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier et du second ordre* (Journal de l'École polytechnique. 39e cahier, pp. 148-191), p. 168, où il l'appelle *théorème de Liouville.* Néanmoins, il convient de conserver à ce théorème le nom de *téhorème de Jacobi*, parce que ce géomètre en a plus qu'aucun autre révélé la fécondité.

$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m$ étant des fonctions quelconques des u, et A et B étant des symboles d'opération définis par les équations précédentes.

Cherchons l'expression

$$(\mathrm{I}, \mathrm{J}) = \sum \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{I}}{\partial u_i}, & \dfrac{\partial \mathrm{J}}{\partial u_i} \\ \dfrac{\partial \mathrm{I}}{\partial \rho_i}, & \dfrac{\partial \mathrm{J}}{\partial \rho_i} \end{vmatrix}.$$

Elle sera égale à

$$\sum_1^m \begin{vmatrix} \dfrac{\partial (a_1\rho_1 + \cdots + a_m\rho_m)}{\partial u_i}, & \dfrac{\partial (b_1\rho_1 + \cdots + b_m\rho_m)}{\partial u_i} \\ a_i & b_i \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire, en réunissant les divers termes multipliés par $\rho_1, \ldots, \rho_m$:

$$\rho_1 \left[\left(b_1 \frac{\partial a_1}{\partial u_1} + b_2 \frac{\partial a_1}{\partial u_2} + \cdots + b_m \frac{\partial a_m}{\partial u_1}\right) - \left(a_1 \frac{\partial b_1}{\partial u_1} + a_2 \frac{\partial b_1}{\partial u_2} + \cdots + a_m \frac{\partial b_1}{\partial u_m}\right)\right] +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\rho_m \left[\left(b_1 \frac{\partial a_m}{\partial u_1} + b_2 \frac{\partial a_m}{\partial u_2} + \cdots + b_m \frac{\partial a_m}{\partial u_m}\right) - \left(a_1 \frac{\partial b_m}{\partial u_1} + a_2 \frac{\partial b_m}{\partial u_2} + \cdots + a_m \frac{\partial b_m}{\partial u_m}\right)\right];$$

ou encore

$$(\mathrm{I}, \mathrm{J}) = \rho_1 (\mathrm{B}a_1 - \mathrm{A}b_1) + \rho_2 (\mathrm{B}a_2 - \mathrm{A}b_2) + \cdots + \rho_m (\mathrm{B}a_m - \mathrm{A}b_m).$$

Si l'on ajoute à l'ensemble des termes qui ont le signe + dans (I, J), tous les termes de la forme

$$a_i b_j \frac{\partial^2 \mathrm{R}}{\partial u_i \partial u_j},$$

et si l'on retranche la même quantité des autres termes, on reconnaît immédiatement que l'ensemble des termes positifs représente BAR, et les autres —ABR.

Donc enfin,

$$(\mathrm{I}, \mathrm{J}) = \mathrm{BAR} - \mathrm{ABR} = (\mathrm{BA} - \mathrm{AB})\,\mathrm{R}.$$

Corollaires. I. L'opération (BA — AB) n'introduit pas de dérivées secondes, mais seulement des dérivées premières de la fonction sur laquelle on opère.

II. Si l'on a identiquement $(I, J) = 0$, ou si l'on a identiquement $Ba - Ab = 0$, on a aussi :

$$ABR = BAR,$$

c'est-à-dire que l'on peut intervertir les opérations A et B. Si l'on convient d'écrire A^iR, au lieu de $A . A^{i-1}R$, on en conclut qu'on peut écrire aussi

$$A^m B^n R = B^n A^m R, \text{ etc.}$$

Il résulte de là que, si R est une solution de $AR = 0$, il en est de même de $B^m R$. Car $A . B^m R = B^m . AR = B^m 0 = 0$.

Jacobi a donné de ce corollaire l'élégante démonstration que voici. Soit posé

$$a_i = \frac{du_i}{dt}, \quad b_i = \frac{du_i}{ds}.$$

On aura

$$\frac{da_i}{ds} = \frac{db_i}{dt},$$

ou encore :

$$\frac{da_i}{du_1}\frac{du_1}{ds} + \frac{da_i}{du_2}\frac{du_3}{ds} + \cdots + \frac{da_i}{du_m}\frac{du_m}{ds} = \frac{db_i}{du_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{db_i}{du_2}\frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{db_i}{du_m}\frac{du_m}{dt},$$

c'est-à-dire, successivement :

$$\left(b_1 \frac{da_i}{du_1} + \cdots + b_m \frac{da_i}{du_m}\right) - \left(a_1 \frac{db_i}{du_1} + \cdots + a_m \frac{db_i}{du_m}\right) = 0,$$

$$Ba_i - Ab_i = 0.$$

Remarquons ensuite qu'il viendra :

$$I = a_1 \frac{dR}{du_1} + \cdots a_m \frac{dR}{du_m} = \frac{dR}{du_1}\frac{du_1}{dt} + \cdots + \frac{dR}{du_m}\frac{du_m}{dt} = \frac{dR}{dt} = AR,$$

$$J = \frac{dR}{ds} = BR.$$

Par conséquent :

$$\mathrm{BAR} = \frac{d\dfrac{d\mathrm{R}}{ds}}{dt} = \frac{d\dfrac{d\mathrm{R}}{dt}}{ds} = \mathrm{ABR}.$$

59. *Théorème fondamental de Jacobi. Démonstration de Jacobi.* Les premiers membres des équations (φ, ψ) sont linéaires par rapport aux dérivées de l'une des fonctions φ ou ψ. En appliquant à ces expressions la formule principale du numéro précédent, on arrive au théorème fondamental de Jacobi. Soient $m = 2n$ et

$$u_1 = p_1, \quad u_2 = p_2, \ldots, \quad u_n = p_n, \quad u_{n+1} = x_1, \ldots, u_m = x_n.$$

Posons

$$\mathrm{AR} = (\mathrm{M}, \mathrm{R}) = \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_1}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p_1} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial p_1}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_1}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_n}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p_n} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial p_n}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_n}\right),$$

$$\mathrm{BR} = (\mathrm{N}, \mathrm{R}) = \left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x_1}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p_1} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial p_1}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_1}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x_n}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p_n} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial p_n}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_n}\right),$$

de sorte que, pour $i < n + 1$,

$$a_i = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_i}, \quad a_{n+i} = -\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial p_i}, \quad b = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x_i}, \quad b_{n+i} = -\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial p_i}.$$

On aura :

$$(\mathrm{BA} - \mathrm{AB})\,\mathrm{R} = \Sigma \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p}\left(\mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} - \mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\right) - \Sigma \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}\left(\mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial p} - \mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial p}\right).$$

Mais d'après la définition des signes A et B :

$$\mathrm{BAR} = (\mathrm{N}, (\mathrm{M}, \mathrm{R})), \quad \mathrm{ABR} = (\mathrm{M}, (\mathrm{N}, \mathrm{R})),$$

$$\mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} = \left(\mathrm{N}, \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}\right), \quad \mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} = \left(\mathrm{M}, \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\right),$$

$$\mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial p} = \left(\mathrm{N}, \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial p}\right), \quad \mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial p} = \left(\mathrm{M}, \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial p}\right).$$

D'où, en tenant compte des formules (1), (4_1) du § 16,

$$\begin{aligned}&(\mathrm{N}, (\mathrm{M}, \mathrm{R})) - (\mathrm{M}, (\mathrm{N}, \mathrm{R}))\\ &= \Sigma \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p} \left\{ \left(\mathrm{N}, \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}, \mathrm{M}\right) \right\} - \Sigma \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x} \left\{ \left(\mathrm{N}, \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial p}\right) + \left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial p}, \mathrm{M}\right) \right\}\\ &= \Sigma \left\{ \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p} \frac{\partial (\mathrm{N}, \mathrm{M})}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x} \frac{\partial (\mathrm{N}, \mathrm{M})}{\partial p} \right\} = ((\mathrm{N}, \mathrm{M}), \mathrm{R}).\end{aligned}$$

On tire de là, en faisant passer tous les termes dans le second membre, au moyen de la formule (1) du § 16 :

$$(\mathrm{M}, (\mathrm{N}, \mathrm{R})) + (\mathrm{N}, (\mathrm{R}, \mathrm{M})) + (\mathrm{R}, (\mathrm{M}, \mathrm{N})) = 0,$$

ce qui est le théorème fondamental de Jacobi.

Corollaire. Soient $\mathrm{M} = a$, $\mathrm{N} = b$ des solutions de l'équation :

$$(\mathrm{R}, z) = 0,$$

il résultera du théorème précédent que l'on a aussi, pour solution $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = c$. Car l'équation fondamentale donnera :

$$(\mathrm{M}, 0) + (\mathrm{N}, 0) + (\mathrm{R}, (\mathrm{M}, \mathrm{N})) = 0,$$

ou

$$(\mathrm{R}, (\mathrm{M}, \mathrm{N})) = 0.$$

60. *Démonstration de Donkin* (*). « Si M, N, R sont des fonctions quelconques des $2n$ variables $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, on a :

$$(\mathrm{M}, (\mathrm{N}, \mathrm{R})) + (\mathrm{N}, (\mathrm{R}, \mathrm{M})) + (\mathrm{R}, (\mathrm{M}, \mathrm{N})) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Si l'on développe cette expression, il est évident que chacun de ses termes se compose du produit d'une dérivée du second ordre de l'une des fonctions M, N, R par des dérivées du premier ordre de chacune des deux autres fonctions.

(*) Nous empruntons cette citation textuelle de Donkin à Imschenetsky, p. 145. La démonstration de celui-ci repose sur l'emploi de la formule ($6'''$) du § précédent pour exprimer (M, (N, R)) (N, (R, M)), de la formule (4_1) pour exprimer (R, (M, N)). On ajoute les résultats trouvés, et on permute deux fois, circulairement, dans la nouvelle équation, les lettres M, N, R. On trouve le théorème de Jacobi, en ajoutant les trois dernières relations obtenues.

Considérons les termes contenant des dérivées du second ordre de M; ils seront de l'une des formes

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_i \partial p_j} \frac{\partial N}{\partial x_j} \frac{\partial R}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial N}{\partial p_i} \frac{\partial R}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial N}{\partial x_i} \frac{\partial R}{\partial x_j},$$

i pouvant être égal à j, et chacun d'eux proviendra du second ou du troisième terme de l'équation (e).

En examinant maintenant chacune de ces formes, il est aisé de voir que, à chaque terme provenant du second terme de l'équation (e), en correspond un semblable, *mais affecté d'un signe contraire,* provenant du troisième terme de cette équation; et comme la chose est vraie pour les termes où entrent les dérivées secondes de N et de R, il s'ensuit que le premier membre de l'équation (e) tout entier se réduit identiquement à zéro. Donc le théorème est démontré. »

§ 18. ***Formes diverses des conditions d'intégrabilité d'une équation aux dérivées partielles*** (*).

61. *Première forme des conditions d'intégrabilité* (**). Soit

$$H_1(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = a_1 \dots \dots \quad (H_1)$$

une équation aux dérivées partielles à intégrer, $p_1, p_2, \dots, p_n$ désignant comme plus haut les dérivées d'une fonction inconnue z, par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_n$. On a :

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n.$$

Pour trouver une intégrale complète de l'équation donnée, il

(*) Résumé de Jacobi, *Nova methodus*, §§ 2-17 et 30-32. Ce résumé se trouve également dans Imschenetsky, §§ 10-11, pp. 32-36; § 13, pp. 41-42; § 15, pp. 45-48; § 17, pp. 55-62; §§ 20-22, *passim;* Graindorge, III, pp. 15-30; IV, pp. 30-35; VII, *passim*. Nous croyons qu'il vaut mieux réunir tous les théorèmes du même genre, comme nous l'avons fait ici, que d'en mêler quelques-uns à la méthode d'intégration elle-même.

(**) Jacobi, *Nova meth.*, § 2. Nous ajoutons la forme (I').

suffira d'avoir, outre cette équation, $(n-1)$ autres relations de même forme, contenant chacune une constante arbitraire

$$H_2(x_1,\ldots,x_n,p_1,\ldots,p_n)=a_2, \quad \ldots\ldots \quad (H_2)$$
$$H_3(x_1,\ldots,x_n,p_1,\ldots,p_n)=a_3, \quad \ldots\ldots \quad (H_3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$H_n(x_1,\ldots,x_n,p_1,\ldots,p_n)=a_n, \quad \ldots\ldots \quad (H_n)$$

pourvu que les valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, déduites de ces équations (H),

$$p_1=\pi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,a_1,a_2,\ldots,a_n), \quad \ldots\ldots \quad (\pi_1)$$
$$p_2=\pi_2(x_1,x_2,\ldots,x_n,a_1,a_2,\ldots,a_n), \quad \ldots\ldots \quad (\pi_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_n=\pi_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,a_1,a_2,\ldots,a_n), \quad \ldots\ldots \quad (\pi_n)$$

rendent dz intégrable. En effet, s'il en est ainsi, on pourra trouver, par une simple quadrature, une expression pour z, contenant, outre les $(n-1)$ constantes arbitraires $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$, une $n^{\text{ième}}$ constante arbitraire provenant de l'intégration de dz. L'expression de z satisfera non-seulement à l'équation donnée, mais à tout le système H.

Les conditions d'intégrabilité de dz, sont, comme on le sait,

$$\frac{\delta p_i}{\delta x_k}=\frac{\delta p_k}{\delta x_i} \quad \text{ou} \quad \frac{\delta \pi_i}{\delta x_k}=\frac{\delta \pi_k}{\delta x_i}, \quad \ldots\ldots \quad (I)$$

i et k recevant les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$. On remarquera que ces conditions peuvent se mettre sous la forme

$$(p_i-\pi_i, p_k-\pi_k)=0 \quad \ldots\ldots \quad (I')$$

62. *Seconde forme des conditions d'intégrabilité* (*). On obtient cette seconde forme en remarquant que l'on a

$$[H_i, H_k]=(a_i, a_k)=0,$$

(*) Jacobi, *Nova meth.*, §§ 14-16. La relation qui conduit au théorème direct étant résolue par rapport à $\frac{\delta\pi_{i'}}{\delta x_{k'}}-\frac{\delta\pi_{k'}}{\delta x_{i'}}$ conduit au théorème réciproque. C'est ainsi que fait Jacobi dans le § 16, résumé par Graindorge, IV, pp. 30-35. Nous avons suivi Jacobi pour la démonstration du théorème direct, comme et développant la première expression au moyen de la formule (6′) du § 16, où l'on fait

$$a_i = \pi_i, \quad \varphi = H_i, \quad \psi = H_k,$$

Il vient ainsi :

$$0 = (H_i, H_k) + \Sigma\Sigma \frac{\partial H_i}{\partial p_{i'}} \frac{\partial H_k}{\partial p_{k'}} \left(\frac{\partial \pi_{i'}}{\partial x_{k'}} - \frac{\partial \pi_{k'}}{\partial x_{i'}}\right).$$

D'après les conditions (I), le second terme du second nombre est nul. Donc

$$(H_i, H_k) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (II)$$

Réciproquement les conditions (II) entraînent les relations (I). On a, en effet, identiquement :

$$p_i = \pi_i (x_1, \ldots, x_n, \; H_1, \ldots, H_n),$$
$$p_k = \pi_k (x_1, \ldots, x_n, \; H_1, \ldots, H_n).$$

Imschenetsky, § 11, p. 33, et nous avons simplifié la démonstration donnée par ce dernier, n° 40, p. 55 pour le théorème inverse. Dans le § 14 de la *Nova methodus*, Jacobi donne une autre démonstration des formules (II), en se basant sur les formules (IV) données plus bas. Soient

$$p_1 = \psi_1 (x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, p_3, \ldots, p_n), p_2 = \psi_2 (x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, p_3, \ldots, p_n).$$

Les relations

$$H_1 (x_1, \ldots, x_n, \psi_1, \psi_2, p_3, \ldots, p_n) = a_1, H_2 (x_1, \ldots, x_n, \psi_1, \psi_2, p_3, \ldots, p_n) = a_2,$$

seront des identités. On tire de là, pour $H = H_1$ ou $H = H_2$.

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \psi_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial (p_1 - \psi_1)}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial (p_2 - \psi_2)}{\partial x},$$

puisque p_1, p_2 ne contiennent pas x explicitement. On a de même,

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial (p_1 - \psi_1)}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial (p_2 - \psi_2)}{\partial p},$$

même pour $p = p_1$ ou $p = 2$. Il résulte immédiatement de ces formules

$$(H_1, H_2) = \left(\frac{\partial H_1}{\partial p_1} \frac{\partial H_2}{\partial p_2} - \frac{\partial H_1}{\partial p_2} \frac{\partial H_2}{\partial p_1}\right) (p_1 - \psi_1, \; p_2 - \psi_2),$$

ce qui donne l'équation (II), quand l'équation (IV) existe. Cette démonstration nous semble peu naturelle, parce que les théorèmes (III) et (IV) sont plus compliqués que II, ou au moins conduisent à des équations moins symétriques. Il vaut mieux démontrer ces théorèmes II et IV, indépendamment les uns des autres.

Donc, d'après la formule (8'') du § 16,

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \pi_k}{\partial x_i} = -\Sigma\Sigma \left\{ \frac{\partial \pi_i}{\partial H_{i'}} \frac{\partial \pi_k}{\partial H_{k'}} - \frac{\partial \pi_i}{\partial H_{k'}} \frac{\partial \pi_k}{\partial H_{i'}} \right\} (H_{i'}, H_{k'}) + (\pi_i . \pi_k).$$

Le premier terme du second membre est nul à cause des équations (2); le second est nul parce que π_i et π_k ne contiennent pas les p explicitement. Donc la relation précédente se réduit à

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \pi_k}{\partial x_i} = 0,$$

c'est-à-dire, à la condition (I).

On arrive au même résultat, mais plus péniblement, au moyen de la formule (6') du § 16 (*).

63. *Troisième forme des conditions d'intégrabilité* (**). Supposons que l'on déduise des relations (H) ou (π), les expressions suivantes des p :

$$p_1 = \varphi_1 (x_1, \ldots, x_n, a_1, p_2, p_3, \ldots, p_n); \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\varphi_1)$$
$$p_2 = \varphi_2 (x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, p_3, \ldots, p_n); \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\varphi_2)$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$p_n = \varphi_n (x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = \pi_n. \quad . \; . \; . \; . \quad (\varphi_n)$$

de sorte que chaque p est fonction des $2n$ lettres qui le suivent dans la série

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

On aura identiquement :

$$p_i = \varphi_i (x_1, \ldots, x_n, H_1, \ldots, H_i, p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_n),$$
$$p_k = \varphi_k (x_1, \ldots, x_n, H_1, \ldots, H_k, p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots, p_n).$$

(*) Imschenetsky, n° 40, pp. 55-57.

(**) Jacobi, *Nova methodus*, §§ 3, 4, 5, théorème direct; § 6, énoncé général; §§ 7 et 8, théorème inverse, résumé par Graindorge, nos 24-26, pp. 20-25. Imschenetsky donne le théorème direct sous une forme un peu différente de celle de Jacobi, n° 41, pp. 57-60 ; il évite la longue démonstration du théorème inverse, comme on le verra à propos des théorèmes (VI), (VII) et (VIII), en note. Jacobi, *Nova methodus*, §§ 9, 10, 11 s'occupe de la marche générale de l'intégration.

Donc, d'après la formule (8″) du § 16, rappelée plus haut :

$$\frac{\delta \varphi_i}{\delta x_k} - \frac{\delta \varphi_k}{\delta x_i} = (\varphi_i, \varphi_k), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(III)}$$

ou encore, comme il est facile de le voir,

$$(p_i - \varphi_i, p_k - \varphi_k) = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(III')}$$

La réciproque est vraie, c'est-à-dire que les équations (III) ont pour conséquence les équations (I) ou (II). Pour le montrer, remarquons que l'on a identiquement.

$$\begin{aligned}
p_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n) = \pi_1, \\
p_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \pi_3, \ldots, \pi_n) = \pi_2, \\
&\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
p_{n-1} &= \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, \pi_n) = \pi_{n-1}, \\
p_n &= \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n) = \pi_n.
\end{aligned}$$

Nous allons montrer au moyen de ces formules, par un calcul de proche en proche : 1° que l'on a :

$$\frac{\delta \pi_i}{\delta x_n} - \frac{\delta \pi_n}{\delta x_i} = 0.$$

2° que

$$\frac{\delta \pi_i}{\delta x_k} = \frac{\delta \pi_k}{\delta x_i}.$$

Pour démontrer le premier point, nous remarquerons que l'on a :

$$\frac{\delta \pi_i}{\delta x_n} - \frac{\delta \pi_n}{\delta x_i} = \frac{d\varphi_i}{dx_n} - \frac{\delta \varphi_n}{\delta x_i} = \frac{\delta \varphi_i}{\delta x_n} - \frac{\delta \varphi_n}{\delta x_i} + \left(\frac{\delta \varphi_i}{\delta \pi_{i+1}} \frac{\delta \pi_{i+1}}{\delta x_n} + \cdots + \frac{\delta \varphi_i}{\delta \pi_n} \frac{\delta \pi_n}{\delta x_n}\right).$$

Supposons que les relations (I) soient démontrées pour l'indice n, et les indices plus grands que i, on pourra remplacer

$$\frac{\delta \pi_{i+1}}{\delta x_n}, \frac{\delta \pi_{i+2}}{\delta x_n}, \ldots, \frac{\delta \pi_n}{\delta x_n},$$

par

$$\frac{\delta \pi_n}{\delta x_{i+1}}, \frac{\delta \pi_n}{\delta x_{i+2}}, \ldots, \frac{\delta \pi_n}{\delta x_n};$$

ou encore par

$$\frac{\delta\varphi_n}{\delta x_{i+1}}, \frac{\delta\varphi_n}{\delta x_{i+2}}, \ldots, \frac{\delta\varphi_n}{\delta x_n},$$

puisque est π_n est identique à φ_n. On aura donc, au lieu de la dernière égalité,

$$\frac{\delta\pi_i}{\delta x_n} - \frac{\delta\pi_n}{\delta x_i} = \frac{\delta\varphi_i}{\delta x_n} - \frac{\delta\varphi_n}{\delta x_i} + (\varphi_n, \varphi_i),$$

c'est-à-dire, d'après (III),

$$\frac{\delta\pi_i}{\delta x_n} - \frac{\delta\pi_n}{\delta x_i} = 0.$$

Ainsi, la relation (I) subsiste pour l'indice n et l'indice i, si elle subsiste pour l'indice n, et les indices supérieurs à i. Or, elle est évidente pour les indices n et n, donc aussi, de proche en proche, pour les indices n et $(n-1)$, n et $(n-2)$, n et $(n-3)$, ..., n et 1.

Supposons maintenant, pour démontrer le second point, que la formule (I) subsiste pour les indices

$$\begin{aligned} &k \text{ et } i+1,\quad k \text{ et } i+2, \ldots, k \text{ et } n,\\ &k+1 \text{ et } i,\quad k+2 \text{ et } i, \ldots, n \text{ et } i,\end{aligned}$$

je dis qu'elle subsiste aussi pour i et k, et, par suite, qu'elle est généralement vraie. En effet, on a

$$\frac{\delta\pi_i}{\delta x_k} - \frac{\delta\pi_k}{\delta x_i} = \frac{d\varphi_i}{dx_k} - \frac{d\varphi_k}{dx_i} = \frac{\delta\varphi_i}{\delta x_k} - \frac{\delta\varphi_k}{\delta x_i} + \Sigma\left\{\frac{\delta\varphi_i}{\delta\pi}\frac{\delta\pi}{\delta x_k} - \frac{\delta\varphi_k}{\delta\pi}\frac{\delta\pi}{\delta x_i}\right\},$$

la somme s'étendant à toutes les dérivées de φ_i et de φ_k, ce qui n'a pas d'inconvénient puisque les dérivées de φ_i par rapport au π d'indice non supérieur à i, et de celles de φ_k, par rapport aux π d'indice non supérieur à k sont nulles. D'après l'hypothèse, on pourra remplacer

$$\frac{\delta\pi}{\delta x_k} \text{ par } \frac{\delta\pi_k}{\delta x}, \quad \frac{\delta\pi}{\delta x_i} \text{ par } \frac{\delta\pi_i}{\delta x}.$$

D'ailleurs, d'après (III), le premier terme du second membre

$$\frac{\delta\varphi_i}{\delta x_k} - \frac{\delta\varphi_k}{\delta x_i} = -\Sigma\left\{\frac{\delta\varphi_i}{\delta p}\frac{\delta\varphi_k}{\delta x} - \frac{\delta\varphi_k}{\delta p}\frac{\delta\varphi_i}{\delta x}\right\}.$$

Donc,

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_k}-\frac{\partial \pi_k}{\partial x_i}=\Sigma\left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial \pi}\frac{\partial \pi_k}{\partial x}-\frac{\partial \varphi_k}{\partial \pi}\frac{\partial \pi_i}{\partial x}\right\}-\Sigma\left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial p}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}-\frac{\partial \varphi_k}{\partial p}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right\},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_k}-\frac{\partial \pi_k}{\partial x_i}=\Sigma\left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial p}\frac{\partial(\pi_k-\varphi_k)}{\partial x}-\frac{\partial \varphi_k}{\partial p}\frac{\partial(\pi_i-\varphi_i)}{\partial x}\right\}=\Sigma\begin{vmatrix}\dfrac{\partial(\pi_i-\varphi_i)}{\partial x}, & \dfrac{\partial(\pi_k-\varphi_k)}{\partial x}\\ \dfrac{\partial(-\varphi_i)}{\partial p}, & \dfrac{\partial(-\varphi_k)}{\partial p}\end{vmatrix}.$$

On peut sans inconvénient, dans la dernière ligne, mettre $(\pi_i-\varphi_i)$, $(\pi_k-\varphi_k)$ au lieu de $(-\varphi_i)$, $(-\varphi_k)$ puisque π_i, π_k ne contiennent pas p. Donc

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_k}-\frac{\partial \pi_k}{\partial x_i}=(\pi_i-\varphi_i,\ \pi_k-\varphi_k).$$

On peut transformer le second membre de cette équation d'une manière remarquable. On a, en effet, successivement, en désignant par $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_n$ les valeurs de φ données plus haut et égales aux π, et reprenant l'avant-dernière expression de ce second membre :

$$(\pi_i-\varphi_i,\pi_k-\varphi_k)=-\Sigma\begin{vmatrix}\dfrac{d\varphi'_i}{dx}-\dfrac{\partial \varphi'_i}{\partial x}, & \dfrac{d\varphi'_k}{dx}-\dfrac{\partial \varphi'_k}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \varphi'_i}{\partial p}, & \dfrac{\partial \varphi'_k}{\partial p}\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial \varphi'_i}{\partial \pi_{i+1}}\dfrac{\partial \pi_{i+1}}{\partial x}+\cdots+\dfrac{\partial \varphi'_i}{\partial \pi_n}\dfrac{\partial \pi_n}{\partial x}, & \dfrac{\partial \varphi'_k}{\partial \pi_{k+1}}\dfrac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial x}+\cdots+\dfrac{\partial \varphi'_k}{\partial \pi}\dfrac{\partial \pi_n}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \varphi'_i}{\partial p}, & \dfrac{\partial \varphi'_k}{\partial p}\end{vmatrix}=$$

$$\Sigma_{i'}\Sigma_{k'}\frac{\partial \varphi'_{i'}}{\partial \pi_{i'}}\frac{\partial \varphi'_{k'}}{\partial \pi_{k'}}\left\{\frac{\partial \pi_{i'}}{\partial x_{k'}}-\frac{\partial \pi_{k'}}{\partial x_{i'}}\right\},$$

i' devant avoir les valeurs $(i+1), (i+2), \ldots, n$, k' les valeurs $(k+1), (k+2), \ldots, n$. Pour ces valeurs, on a, par hypothèse,

$$\frac{\partial \pi_{i'}}{\partial x_{k'}}-\frac{\partial \pi_{k'}}{\partial x_{i'}}=0.$$

Donc enfin

$$(\pi_i - \varphi_i, \pi_k - \varphi_k) = 0 \ldots \ldots \ldots \quad \text{(III}'')$$

et

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \pi_k}{\partial x_i},$$

pour toutes les valeurs de i et de k.

64. *Quatrième forme des conditions d'intégrabilité* (*). Si l'on substitue dans les $(m-1)$ premières équations φ, la valeur de p_m, déduite de la $m^{ième}$, puis la nouvelle valeur de p_{m-1} dans les $(m-2)$ premières et ainsi de suite, on arrivera à m relations de la forme :

$$p_1 = \psi_1 (x_1, .., x_n, a_1, \ldots, a_m, p_{m+1}, \ldots, p_n), \ldots \quad (\psi_1)$$
$$p_2 = \psi_2 (x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m, p_{m+1}, \ldots, p_n), \ldots \quad (\psi_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_m = \psi_m (x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m, p_{m+1}, \ldots, p_n) = \varphi_m \ldots \quad (\psi_3)$$

(*) Jacobi, *Nova meth*, § 13, donne le théorème direct comme nous l'indiquons dans le texte, la forme seule des formules étant différente; Graindorge a résumé cette démonstration, n° 27, pp. 25-29, Imschenetsky, n° 42, pp 60-62. Ni l'un ni l'autre ne s'occupent du théorème inverse. Jacobi, *Nova meth.*, § 12, donne en outre la remarquable démonstration suivante du théorème et de sa réciproque; elle est déduite du théorème (V) donné dans le numéro suivant, en faisant $(m+1) = k$. Posons :

$$p_i = \psi_i (x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{k-1}, p_k, p_{k+1}, \ldots, p_n) = \chi_i (x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{k-1}, \varphi_k, p_{k+1}, \ldots, p_n).$$
$$p_k = \psi_k (x_1, \ldots, x_n, a_1 \ldots, a_{k-1}, a_k, p_{k+1}, \ldots, p_n) = \varphi_k (x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_k, p_{k+1}, \ldots, p_n).$$

On aura

$$\frac{\partial (p_i - \chi_i)}{\partial x} = \frac{\partial (p_i - \psi_i)}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial p_k} \frac{\partial (p_k - \varphi_k)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial (p_i - \chi_i)}{\partial p} = \frac{\partial (p_i - \psi_i)}{\partial p} + \frac{\partial \psi_i}{\partial p_k} \frac{\partial (p_k - \varphi_k)}{\partial p}.$$

D'où

$$(p_i - \chi_i, p_k - \varphi_k) = (p_i - \psi_i, p_k - \varphi_k) + \frac{\partial \psi_i}{\partial p_k} (p_k - \varphi_k, p_k - \varphi_k),$$

c'est-à-dire simplement :

$$(p_i - \chi_i, p_k - \varphi_k) = 0 \ldots \ldots \ldots \quad \text{(IV}''')$$

Jacobi fait très-bien remarquer que p_i et p_k peuvent représenter deux p quelconques, parce que dans les formules (V), on peut remplacer $(m+1)$ par un indice quelconque. Le théorème que nous démontrons ici en note est donc plus général que les théorèmes (III), (IV), (V). Jacobi ne démontre pas la réciproque de (IV), mais (IV''') entraîne (V) qui a pour conséquence (III) et par suite (II) et (I).

On démontre, absolument comme au numéro précédent, que les équations (I) (II) entraînent les suivantes et réciproquement :

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial\psi_k}{\partial x_i} = (\psi_i, \psi_k), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

$$(p_i - \psi_i, p_k - \psi_k) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV')}$$

$$(\pi_i - \psi_i, \pi_k - \psi_k) = 0; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV'')}$$

i et k sont supposés tout au plus égaux à m.

65. *Cinquième forme des conditions d'intégrabilité* (*). Considérons les conditions d'intégrabilité sous la forme (III), pour les indices 1, 2, ... m et $(m+1)$:

$$\begin{array}{lcl}
(p_1 - \varphi_1, p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = 0 & \text{ou} & \Phi_1 = 0, \\
(p_2 - \varphi_2, p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = 0 & \text{ou} & \Phi_2 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
(p_{m-1} - \varphi_{m-1}, p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = 0 & \text{ou} & \Phi_{m-1} = 0, \\
(p_m - \varphi_m, p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = 0 & \text{ou} & \Phi_m = 0,
\end{array}$$

et voyons, ce qu'elles deviennent quand on y introduit les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$, à la place de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, par les substitutions indiquées au commencement du n° précédent. Je dis qu'elles se transforment dans les suivantes :

$$\left.\begin{array}{lcl}
(p_1 - \psi_1, p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = 0 & \text{ou} & \Psi_1 = 0, \\
(p_2 - \psi_2, p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = 0 & \text{ou} & \Psi_2 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
(p_{m-1} - \psi_{m-1}, p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = 0 & \text{ou} & \Psi_{m-1} = 0, \\
(p_m - \psi_m, p_{m+1} - \varphi_{m+1}) = 0 & \text{ou} & \Psi_m = 0.
\end{array}\right\} \ldots \text{(V)}$$

La chose est évidente pour la dernière puisque $\psi_m = \varphi_m$. Pour déduire $\Psi_{m-1} = 0$ de $\Phi_{m-1} = 0$, remarquons que l'on a :

$$\psi_{m-1} = \varphi_{m-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, \psi_m, p_{m+1}, \ldots, p_n).$$

(*) Jacobi, *Nova methodus*, §§ 9-11, Imschenetsky, n° 71, pp. 93-94; Graindorge, n° 27, pp. 25-29.

Par conséquent :

$$\frac{\delta(p_{m-1}-\psi_{m-1})}{\delta x}=\frac{\delta(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\delta x}+\frac{\delta(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\delta\psi_m}\frac{\delta\psi_m}{\delta x}:$$

ou

$$\frac{\delta(p_{m-1}-\psi_{m-1})}{\delta x}=\frac{\delta(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\delta x}+\frac{\delta(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\delta p_m}\frac{\delta\varphi_m}{\delta x},$$

On a aussi, pour tous les p, p_{m-1} et p_m non exceptés :

$$\frac{\delta(p_{m-1}-\psi_{m-1})}{\delta p}=\frac{\delta(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\delta p}+\frac{\delta(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\delta p_m}\frac{\delta\varphi_m}{\delta p}.$$

Il résulte de là que

$$(p_{m-1}-\psi_{m-1},\, p_{m+1}-\varphi_{m+1})$$
$$=(p_{m-1}-\varphi_{m-1},\, p_{m+1}-\varphi_{m+1})+\frac{\delta(p_{m-1}-\varphi_{m-1})}{\delta p_m}(\varphi_m,\, p_{m+1}-\varphi_{m+1});$$

ou plus simplement :

$$\Psi_{m-1}=\Phi_{m-1}+\frac{\delta\varphi_{m-1}}{\delta p_m}\Phi_m.$$

On démontre de la même manière que :

$$\Psi_{m-2}=\Phi_{m-2}+\frac{\delta\varphi_{m-2}}{\delta p_{m-1}}\Phi_{m-1}+\frac{\delta\varphi_{m-2}}{\delta p_m}\Phi_m,$$

$$\Psi_{m-3}=\Phi_{m-3}+\frac{\delta\varphi_{m-3}}{\delta p_{m-2}}\Phi_{m-2}+\frac{\delta\varphi_{m-3}}{\delta p_{m-1}}\Phi_{m-1}+\frac{\delta\varphi_{m-3}}{\delta p_m}\Phi_m;$$

. . . .

$$\Psi_1=\Phi_1+\frac{\delta\varphi_1}{\delta p_2}\Phi_2+\frac{\delta\varphi_1}{\delta p_3}\Phi_3+\cdots+\frac{\delta\varphi_1}{\delta p_m}\Phi_m.$$

Ces relations entre les Ψ et les Φ prouvent que les équations (V) sont une conséquence des équations (III) correspondantes et réciproquement.

66. *Sixième, septième et huitième forme des conditions d'intégrabilité* (*). Les équations φ peuvent être supposées mises sous la forme suivante :

$$f_1(x_1,\ldots,x_n,p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n)=\mathrm{H}_1=a_1 \ldots\ldots (f_1)$$

$$f_2(x_1,\ldots,x_n,a_1,p_2,p_3,\ldots,p_n)=a_2, \ldots\ldots (f_2)$$

$$f_3(x_1,\ldots,x_n,a_1,a_2,p_3,\ldots,p_n)=a_3, \ldots\ldots (f_3)$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n(x_1,\ldots,x_n,a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},p_n)=a_n \ldots\ldots (f_n)$$

En remplaçant p_k par sa valeur $\varphi_k(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_k,p_{k+1},\ldots,p_n)$ dans f_k, on aura l'identité

$$f_k(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_k,\varphi_k,p_{k+1},\ldots p_n)=a_k.$$

On en déduit, en dérivant par rapport à l'un des x ou des p,

$$\frac{\partial f_k}{\partial x}=-\frac{\partial f_k}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}=\frac{\partial f_k}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial(p_k-\varphi_k)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial p}=-\frac{\partial f_k}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial p}=\frac{\partial f_k}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial(p_k-\varphi_k)}{\partial p}.$$

(*) Jacobi, *Nova methodus*, §§ 30-32. Jacobi ajoute cette remarque : Si l'on remplace dans (f_i, f_k), a_p par f_p soit dans l'une, soit dans l'autre, p étant plus petit que le plus grand des nombres i et k, on aura, en appelant f_i' et f_k' les nouvelles fonctions, d'après la formule (6) du § 16,

$$[f_i',f_k']=(f_i',f_k')+\frac{\partial f_i'}{\partial a_p}(f_p,f_k')+\frac{\partial f_k'}{\partial a_p}(f_i',f_p)+\frac{\partial f_i'}{\partial a_p}\frac{\partial f_k'}{\partial a_p}(f_p,f_p).$$

On conclut de là que le théorème VIII reste vrai quand on remplace une constante a_p par sa valeur f_p, par la méthode de proche en proche ; d'où en éliminant ainsi successivement toutes les constantes, on retombe sur $(\mathrm{H}_i, \mathrm{H}_k)=0$. Imschenetsky donne les théorèmes directs, n° 73, pp. 95-96 ; n° 84, pp. 111-112 ; la réciproque, en substituant H_p à a_p, n° 85, pp. 112-113 ; il indique la démonstration de Jacobi, n° 86, p. 113. Graindorge donne le théorème (VI) ou (VII), n° 52, pp. 53-55, et ne s'occupe pas du théorème réciproque.

Sous la seconde forme, la dernière formule subsiste même pour $p = p_k$. On a, d'après ces relations :

$$(p_i - \varphi_i, f_k) = \frac{\delta f_k}{\delta p_k}(p_i - \varphi_i, p_k - \varphi_k),$$

$$(p_i - \psi_i, f_{m+1}) = \frac{\delta f_{m+1}}{\delta p_{m+1}}(p_i - \psi_i, p_{m+1} - \varphi_{m+1}),$$

$$(f_i, f_k) = \frac{\delta f_i}{\delta p_i}\frac{\delta f_k}{\delta p_k}(p_i - \varphi_i, p_k - \varphi_k).$$

Donc, d'après les formules (III) et (V)

$$(p_i - \varphi_i, f_k) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VI)}$$

$$(p_i - \psi_i, f_k) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VII)}$$

$$(f_i, f_k) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VIII)}$$

Il est clair que, réciproquement, les équations (VI), (VII), (VIII) entraînent (III) et (V) et par suite (I).

Remarque. Nous avons ainsi quatre systèmes de conditions d'intégrabilité : 1° Le système primitif (I); 2° le système (II); 3° le système (III) ou les équivalents (VI) et (VIII); 4° un système composé des équations (IV), des équations (V) ou (VII), puis des équations (III) nécessaires pour avoir autant de conditions que dans le système (I). Toutes ces conditions d'intégrabilité ont une forme éminemment simple que l'on peut représenter par

$$(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = 0.$$

M, N étant deux des fonctions π, ou H, ou φ, ou ψ, ou ψ et φ, ou φ et f, ou ψ et f, ou f.

CHAPITRE II.

INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

---

§ 19. *Méthode de Jacobi quand les équations cherchées sont résolues par rapport aux constantes* (*).

67. *Idée générale de la marche à suivre dans l'intégration des systèmes* (II). L'intégration d'une équation aux dérivées partielles

$$H_1(x_1, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = a_1,$$

revient, comme on l'a dit plus haut, à trouver $(n-1)$ relations semblables :

$$H_2 = a_2, \quad H_3 = a_3, \dots, H_n = a_n,$$

d'où l'on puisse tirer des valeurs de $p_1, p_2, \dots, p_n$, telles que $dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$ soit immédiatement intégrable. Pour cela il suffit de trouver les intégrables des équations (II) du § 18, que nous écrirons comme suit :

$$(H_2, H_1) = 0, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$
$$(H_3, H_1) = 0, \quad (H_3, H_2) = 0, \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$
$$(H_4, H_1) = 0, \quad (H_4, H_2) = 0, \quad (H_4, H_3) = 0, \quad \dots\dots \quad (3)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(H_{n-1}, H_1) = 0, \ (H_{n-1}, H_2) = 0, \dots, (H_{n-1}, H_{n-2}) = 0, \ . \ . \ (n-2)$$
$$(H_n, H_1) = 0, \quad (H_n, H_2) = 0, \dots, \quad (H_n, H_{n-1}) = 0 \ . \ . \ (n-1)$$

(*) Il suffirait peut-être, dans l'exposition de la méthode de Jacobi, de se borner à ce qui est donné dans le paragraphe suivant, comme a fait Jacobi lui-même. Mais au point de vue didactique, il vaut mieux faire connaître d'abord la méthode du grand géomètre sous une forme plus symétrique, et qui peut d'ailleurs être utile en pratique, quand on ne sait pas résoudre les équations (H). Comparez à ce paragraphe, Imschenetsky, § 18, pp. 63-72, à qui il est emprunté presque en entier, et Graindorge, VI, pp. 42-50.

Il est clair qu'une solution $H_2 = a_2$ du système (1) satisfait au système (2) d'après la définition de celui-ci, puisque la fonction H_2 entre précisément dans l'équation (2_2). Donc, après avoir trouvé H_2, il faudra trouver une autre solution $H_3 = a_3$ du système (2). A cause de la définition de l'équation (3_3), H_2 et H_3 satisfont au système (3); il faudra en chercher une autre solution H_4, afin de pouvoir former l'équation (4_4) $(H_5, H_4) = 0$, et ainsi de suite.

En résumé, chaque système (i) est identique au suivant, sauf qu'il contient en moins une équation $(H_{i+2}, H_{i+1}) = 0$, où H_{i+1} est la fonction qui satisfait à toutes les équations (i); il faut trouver une nouvelle solution du système (i) qui satisfasse, en outre, à $(H_{i+2}, H_{i+1}) = 0$.

68. *Intégration de l'équation* (1) *et du système* (2). L'équation (1) est linéaire par rapport aux dérivées de H_2, considéré comme fonction des p et des x :

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial H_1}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial H_2}{\partial x_n}\frac{\partial H_1}{\partial p_n} - \frac{\partial H_2}{\partial p_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_1} - \cdots - \frac{\partial H_2}{\partial p_n}\frac{\partial H_1}{\partial x_n} = 0. \quad . \ (1)$$

Pour trouver l'intégrale $H_2 = a_2$, il suffira de connaître une solution de système correspondant (n° 32), à $(2n - 1)$ variables dépendantes, ou d'ordre $(2n - 1)$:

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial H_1}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial H_1}{\partial p_2}} = \cdots = \frac{dx_n}{\frac{\partial H_1}{\partial p_n}} = \frac{-\,dp_1}{\frac{\partial H_1}{\partial x_1}} = \frac{-\,dp_2}{\frac{\partial H_1}{\partial x_2}} = \cdots = \frac{-\,dp_n}{\frac{\partial H_1}{\partial x_n}} \ . \ (a)$$

Une fois H_2 trouvé, on pourra former le système (2)

$$(H_3, H_1) = 0, \quad (H_3, H_2) = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Pour en trouver une intégrale H_3, on cherchera d'abord une solution θ_1 autre que H_2, de (2_1) ou (1), c'est-à-dire, une nouvelle solution du système auxiliaire dont nous venons de parler, de sorte que l'on aura

$$(\theta_1, H_1) = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1')$$

Cela fait, on calculera les expressions suivantes :

$$\theta_2 = (\theta_1, H_2), \quad \theta_3 = (\theta_2, H_2), \quad \theta_4 = (\theta_3, H_2), \ldots,$$

c'est-à-dire que l'on vérifiera si θ_1, θ_2, θ_3, ne sont pas des solutions de (2_2). Je dis maintenant que l'on aura les cinq propositions suivantes :

I. Les fonctions θ_2, θ_3, θ_4, etc., satisfont toutes à l'équation (2_1), c'est-à-dire que

$$(\theta_2, H_1) = 0, \quad (\theta_3, H_1) = 0, \quad (\theta_4, H_1) = 0, \ldots$$

En effet, d'après le théorème fondamental de Jacobi :

$$(H_1, \theta_2) = (H_1, (\theta_1, H_2)) = -(\theta_1, (H_2, H_1)) - (H_2, (H_1, \theta_1)).$$

Le second membre de cette égalité d'après (1) et (1') se réduit à

$$-(\theta_1, 0) - (H_2, 0),$$

qui est nul. La même démonstration se fait pour θ_3, θ_4, etc.

II. Toute fonction Θ (H_1, H_2, θ_1, θ_2, ..., θ_i) des solutions antérieures de (1) ou de (2_1) est une solution de cette équation. On aura, en effet :

$$(\Theta, H_1) = (H_1, H_1)\frac{\partial\Theta}{\partial H_1} + (H_2, H_1)\frac{\partial\Theta}{\partial H_2} + (\theta_1, H_1)\frac{\partial\Theta}{\partial\theta_1} + \cdots + (\theta_i, H_1)\frac{\partial\Theta}{\partial\theta_i},$$

équation qui se réduit à

$$(\Theta, H_1) = 0.$$

III. En cherchant, par le procédé indiqué plus haut, des solutions H_2, θ_1, θ_2, θ_3, ..., de l'équation (1), on arrivera, à la fin, à une solution

$$\theta_{i+1} = (\theta_i, H_2),$$

qui sera une fonction Θ des précédentes, et il en sera de même de toutes les suivantes. Les équations (a), en effet, ne peuvent avoir que $(2n-1)$ solutions distinctes; donc la suite $H_2, \theta_1, \theta_2, \ldots$, contient au plus $(2n-1)$ fonctions, et l'on a

$$\theta_{i+1} = \Theta(H_1, H_2, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i),$$

pour $i = (2n-2)$, ou $i < (2n-2)$. La formule

$$\theta_{i+2} = (\Theta, H_2) = (H_1, H_2)\frac{\partial\Theta}{\partial H_1} + (H_2, H_2)\frac{\partial\Theta}{\partial H_2} + (\theta_1, H_2)\frac{\partial\Theta}{\partial\theta_1} + \cdots + (\theta_i, H_2)\frac{\partial\Theta}{\partial\theta_i}$$

prouve d'ailleurs que la fonction suivante s'exprime de même, et cette conclusion s'applique à θ_{i+3}, θ_{i+4}, etc.

IV. On peut déterminer une fonction des solutions H_1, H_2, $\theta_1, \ldots, \theta_i$, de (2_1) qui satisfasse en même temps à (2_2). Soit θ cette fonction, on posera $(\theta, H_2) = 0$, ou

$$(\theta_1, H_2)\frac{\partial\theta}{\partial\theta_1} + (\theta_2, H_2)\frac{\partial\theta}{\partial\theta_2} + \cdots + (\theta_i, H_2)\frac{\partial\theta}{\partial\theta_i} = 0,$$

ou encore,

$$\theta_2\frac{\partial\theta}{\partial\theta_1} + \theta_3\frac{\partial\theta}{\partial\theta_2} + \cdots + \theta_i\frac{\partial\theta}{\partial\theta_{i-1}} + \theta_{i+1}\frac{\partial\theta}{\partial\theta_i} = 0,$$

dont l'intégration dépend de la recherche d'une intégrale du système

$$\frac{d\theta_1}{\theta_2} = \frac{d\theta_2}{\theta_3} = \cdots = \frac{d\theta_{i-1}}{\theta_i} = \frac{d\theta_i}{\theta_{i+1}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

Ce système devient, en introduisant une variable auxiliaire t dont la différentielle dt est égale à chacun des rapports précédents :

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \theta_2, \quad \frac{d\theta_2}{dt} = \theta_3, \ldots, \frac{d\theta_i}{dt} = \Theta(a_1, a_2, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i).$$

On en tire l'équation :

$$\frac{d^i\theta_1}{dt^i} = \Theta\left(a_1, a_2, \theta_1, \frac{d\theta_1}{dt}, \frac{d^2\theta_1}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{i-1}\theta_1}{dt^{i-1}}\right).$$

Si l'on connaît une intégrale première de celle-ci :

$$H_3\left(a_1, a_2, \theta_1, \frac{d\theta_1}{dt}, \frac{d^2\theta_1}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{i-1}\theta_1}{dt^{i-1}}\right) = a_3,$$

on pourra écrire cette intégrale sous la forme :

$$H_3(H_1, H_2, \theta_1, \ldots, \theta_i) = a_3,$$

et ce sera la solution cherchée.

Remarques I. L'intégration de l'équation (1) exige la recherche d'une solution du système (a), d'ordre $(2n-1)$; l'intégration de (2), la recherche d'une solution autre du système (a), d'ordre $(2n-1)$, et d'un autre d'ordre $(i-1)$, c'est-à-dire d'ordre $(2n-3)$, au plus, ou d'ordre $(2n-2)$, si l'on introduit une variable t auxiliaire.

II. Les solutions $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$, de (2_1) donnent aussi autant de solutions du système (a), sauf si elles rentrent les unes dans les autres. C'est dans cette remarque que consiste le *théorème de Poisson*. Bertrand a remarqué que ce théorème est souvent illusoire, quand on veut l'appliquer à la recherche de nouvelle solution d'équations de la forme (a). Cela arrive si $\theta_2, \theta_3, \ldots$, sont identiquement nuls. Mais, quand il s'agit de l'intégration des équations aux dérivées partielles, c'est là précisément le cas le plus favorable (voir n° 71, 1°). C'est là ce qui rend l'étude des systèmes canoniques de la forme (a) plus difficile que celle des équations aux dérivées partielles correspondantes.

69. *Intégration du système* (3) *et des autres systèmes.* On cherche une seconde intégrale θ_1 du système (2) ou de (3_1), (3_2). On forme les expressions suivantes :

$$\theta_2 = (\theta_1, H_3), \quad \theta_3 = (\theta_2, H_3), \quad \theta_4 = (\theta_3, H_3), \ldots,$$

c'est-à-dire que l'on vérifie si $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$, ne sont pas des solutions de (3_3). Ces fonctions $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \ldots$ seront des solutions communes de (3_1), (3_2). En effet, on aura pour la fonction θ_2, par exemple :

$$(H_1, \theta_2) = (H_1, (\theta_1, H_3)) = -(\theta_1, (H_3, H_1)) - (H_3, (H_1, \theta_1)),$$
$$(H_2, \theta_2) = (H_2, (\theta_1, H_3)) = -(\theta_1, (H_3, H_2)) - (H_3, (H_2, \theta_1)).$$

Les seconds membres de ces relations sont nuls, en vertu des équations (2), ou des équations :

$$(H_1, \theta_1) = 0, \quad (H_2, \theta_1) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2')$$

qui expriment que θ_1 est une solution de (2).

La suite $\theta_1, \theta_2, \ldots$, dans le cas actuel comprendra au plus $(2n-4)$ fonctions distinctes, parce que, d'après le numéro précédent, à cause du système (b), qui ne peut avoir au plus que $(2n-3)$ solutions distinctes, il ne peut y avoir non plus que $(2n-3)$ solutions distinctes $H_3, \theta_1, \theta_2, \ldots$, de (2).

On trouvera, comme dans le numéro précédent, qu'il suffit de connaître une solution de l'équation :

$$(\theta_1, H_3)\frac{\partial\theta}{\partial\theta_1} + \cdots + (\theta_i, H_3)\frac{\partial\theta}{\partial\theta_i} = 0,$$

ou

$$\theta_2\frac{\partial\theta}{\partial\theta_1} + \cdots + \theta_{i+1}\frac{\partial\theta}{\partial\theta_i} = 0,$$

ou, enfin, du système

$$\frac{d\theta_1}{\theta_2} = \frac{d\theta_2}{\theta_3} = \cdots = \frac{d\theta_i}{\theta_{i+1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b')$$

θ_{i+1} étant une fonction de $H_1, H_2, H_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_i$, pour connaître la solution cherchée $H_4 = a_4$ du système (4).

Et ainsi de suite pour les systèmes successifs.

70. Remarques I. Le système (3) exige d'abord, pour trouver θ_1, comme dans le cas précédent que l'on trouve une solution du système (a) d'ordre $(2n-1)$, et une solution du système (b) au plus d'ordre $(2n-3)$; ensuite pour déterminer H_4, une solution du système (b'), au plus d'ordre $(2n-5)$.

II. En continuant, on verra sans peine qu'en résumé, l'intégration de

(1) exige l'intégration d'un système d'ordre $2n-1$, savoir le système (a),
(2) » » » $2n-1$, 1 d'ordre $2n-3$,
(3) » » » $2n-1$, 1 » $2n-3$, 1 d'ordre $2n-5$,
. . . .
. . . .
$(n-1)$ exige l'intégration d'un système d'ordre $2n-1$, 1 d'ordre $2n-3$. . . . ,
1 d'ordre 3, 1 équation d'ordre 1.

En tout, il faudra donc chercher, au plus,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{1.2} \text{ intégrales.}$$

En particulier il faudra chercher $(n-1)$ intégrales du système (a); puis, au plus, $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ intégrales des systèmes auxiliaires (b), (b') qui sont beaucoup plus simples.

En apparence, la méthode de Jacobi exige plus d'intégrations que celles de Lagrange et de Pfaff, puisque, dans celles-ci, il suffit, en général, d'intégrer complétement l'équation (a), en prenant pour constantes les valeurs initiales des variables. Mais la méthode de Jacobi laisse une grande liberté dans les calculs, puisque l'on peut les commencer, à partir de chaque système auxiliaire, par n'importe quelle des solutions, et l'ordre de ces systèmes peut s'abaisser considérablement dans les cas particuliers. On verra, en outre, dans le paragraphe suivant, qu'elle peut encore être simplifiée.

III. On peut combiner la méthode de Jacobi avec celle de Cauchy, comme on le verra au n° 125, c'est-à-dire se servir du théorème fondamental de Jacobi, ou plutôt de celui de Poisson, pour trouver, dans certains cas, d'une manière simple, les intégrales du système (a), quand on en connaît quelques-unes. C'est le mode d'intégration le plus avantageux si la suite des fonctions θ est complète. Dans ce cas, connaissant $(2n-1)$ solution de (a), le mieux est d'abandonner la méthode de Jacobi. Cette remarque est due à Lie (*).

71. *Simplifications et modifications.* 1° Il peut arriver que l'une des fonctions θ, que l'on cherche soit *nulle;* alors le θ précédent est la solution cherchée. Ainsi, par exemple, si l'on a :

$$\theta_r = (\theta_{r-1}, H_3) = 0,$$

θ_{r-1} étant déjà une solution des deux autres équations du système (3), de manière que

$$(\theta_{r-1}, H_1) = 0, \quad (\theta_{r-1}, H_2) = 0,$$

il est clair que θ_{r-1} est la solution de tout le système (3).

(*) Lie, Nachrichten de Göttingen, 1872, n° 25, pp. 488-489.

2° Si l'une des fonctions θ est une *constante*, les calculs s'achèvent immédiatement. Ainsi, par exemple, si

$$\theta_r = (\theta_{r-1}, H_3) = m,$$

l'équation auxiliaire (b') devient :

$$\frac{d\theta_{r-2}}{\theta_{r-1}} = \frac{d\theta_{r-1}}{m},$$

qui est intégrable.

3° Toutefois si $r = 2$, la méthode devient illusoire; la fonction appelée plus haut θ est alors déterminée par l'équation

$$\theta_2 \frac{d\theta}{d\theta_1} = 0,$$

qui donne pour θ une simple constante.

Dans ce cas, on partira d'une autre intégrale de l'équation (a) ou (b), et la même circonstance ne se présentera plus, ou bien, on trouvera immédiatement la solution. Si l'on a, en effet, pour deux solutions différentes θ_1, θ_1' de (3_1), (3_2)

$$(\theta_1, H_3) = m, \quad (\theta_1', H_3) = m',$$

on prendra pour solution commune à (3_1), (3_2), (3_3), une fonction θ de θ_1, θ_1'. On devra avoir :

$$(H_1, \theta(\theta_1, \theta_1')) = 0, \quad (H_2, \theta(\theta_1, \theta_1')) = 0, \quad (H_3, \theta(\theta_1, \theta_1')) = 0.$$

Les deux premières sont identiquement satisfaites, l'autre devient

$$(H_3, \theta_1)\frac{\delta\theta}{\delta\theta_1} + (H_3, \theta_1')\frac{\delta\theta}{\delta\theta_1'} = 0,$$

que l'on saura toujours intégrer.

72. *Cas plus général de simplification. Séparation des variables* (*). I. Supposons l'équation donnée de la forme :

$$H_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) = a_1,$$

(*) Nous résumons le plus brièvement possible, IMSCHENETSKY, § 19, pp. 73-79.

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ désignent des fonctions de $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, telles que l'on ait, pour les valeurs de r et s comprises dans la suite $1, 2, 3, \ldots, m$,

$$(\varphi_r, \varphi_s) = 0.$$

Si l'on parvient à trouver des fonctions H, contenant les quantités x, les quantités p et les fonctions φ, et telles que l'on ait

$$(H_i, \varphi_r) = 0,$$
$$(H_i, H_k) = 0,$$

en supposant, que dans ces fonctions H les fonctions φ soient remplacées par des constantes, je dis que l'on aura aussi

$$[H_i, H_k] = 0,$$

dans le cas où on laisse les fonctions φ dans les fonctions H.

En effet, la formule (6′) du § 16, donne

$$[H_1, H_k] = (H_i, H_k) + \Sigma \left\{ (H_i, \varphi_r) \frac{\partial H_k}{\partial \varphi_r} - (H_k, \varphi_r) \frac{\partial H_i}{\partial \varphi_r} \right\}$$
$$+ \Sigma\Sigma \left\{ \frac{\partial H_i}{\partial \varphi_r} \frac{\partial H_k}{\partial \varphi_s} - \frac{\partial H_i}{\partial \varphi_s} \frac{\partial H_k}{\partial \varphi_r} \right\} (\varphi_r, \varphi_s),$$

ou

$$[H_i, H_k] = 0.$$

Cette remarque simplifie beaucoup la recherche des fonctions H. Ainsi, en particulier, si l'on a :

$$(\varphi_r, \varphi_s) = 0,$$
$$(H_1, \varphi_r) = 0,$$

pour trouver les fonctions $H_2, H_3, \ldots, H_{m+1}$, il suffira de poser :

$$H_2 = \varphi_1, \quad H_3 = \varphi_2, \ldots, H_{m+1} = \varphi_m,$$

ou même :

$$H_2 = F_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m), \ldots, H_{m+1} = F_m(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m),$$

pourvu que les fonctions F soient indépendantes les unes des autres. Nous supposons naturellement $m < n$.

II. Un cas remarquable, où il est facile de trouver des fonctions φ satisfaisant aux conditions indiquées plus haut, est celui où *les variables sont dites séparées.* Nous prendrons un cas particulier pour nous faire comprendre. Supposons une équation aux dérivées partielles :

$$H_1(x_1,\ldots,x_n,p_1,\ldots,p_n,\varphi,\psi,\chi)=a_1,$$

où

$$\varphi=\varphi(y_1,\ldots,y_j,q_1,q_2,\ldots,q_j),$$
$$\psi=\psi(t_1,\ldots,t_k,r_1,r_2,\ldots,r_k),$$
$$\chi=\chi(u_1,\ldots,u_l,s_1,s_2,\ldots,s_l),$$
$$p=\frac{dz}{dx},\quad q=\frac{dz}{dy},\quad r=\frac{dz}{dt},\quad s=\frac{dz}{du},$$

de sorte que H_1, φ, ψ, χ contiennent toutes des variables indépendantes différentes.

Il est clair que l'on aura.

$$(H_1,\varphi)=0,\quad (H_1,\psi)=0,\quad (H_1,\chi)=0,$$
$$(\varphi,\psi)=0,\quad (\varphi,\chi)=0,\quad (\psi,\chi)=0.$$

Par suite, on pourra poser

$$H_1=a_1,\quad H_2=\varphi=a_2,\quad H_3=\psi=a_3,\quad H_4=\chi=a_4.$$

Appelons z_1, z_2, z_3, z_4 les intégrales de ces quatre équations qui pourront se chercher indépendamment les unes des autres. La solution complète de l'équation donnée sera

$$z=\alpha+z_1+z_2+z_3+z_4.$$

En effet, en premier lieu, on déduira de là, précisément les mêmes valeurs pour les p, les q, les r, les s que de z_1, z_2, z_3, z_4; ensuite le nombre des constantes arbitraires sera $(n+j+k+l)$. Car dans z_1 entrent $(n-1)$ constantes arbitraires, dans z_2, $(j-1)$ et en outre a_2, dans z_3, $(k-1)$ et en outre a_3, dans z_4, $(l-1)$ et en outre dans a_4. Donc, en comptant encore la constante α, il y aura $(n+j+k+l)$ constantes arbitraires.

III. Ces précieuses remarques nous permettent de traiter systématiquement quelques cas remarquables, déjà étudiés par la méthode de Lagrange (§ 8, n° 34), qui, au reste, conduit au résultat général que nous venons d'exposer :

1° L'équation

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

a pour intégrale

$$z = \alpha + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n,$$

les constantes arbitraires a satisfaisant à l'équation

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0.$$

On ramène à ce cas celui où l'équation est de la forme

$$z = f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

au moyen de la transformation du n° 2. En particulier, si z est une fonction homogène des quantités p de degré μ, il vient

$$z = \left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{\mu - 1}} \frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)^{\frac{\mu}{\mu - 1}}}{[f(a_1, a_2, \ldots, a_n)]^{\frac{1}{\mu - 1}}}.$$

2° L'équation

$$f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0,$$

où φ_i ne contient que x_i et p_i, a pour intégrale :

$$z = \alpha + \int \psi_1 dx_1 + \int \psi_2 dx_2 + \cdots + \int \psi_n dx_n,$$

ψ_i étant la valeur de p_i déduite de $\varphi_i = a_i$ et les constantes a étant liées par la relation

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0.$$

3° L'équation

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

où f est une fonction homogène de degré μ, par rapport aux p, devient, en appelant $u = 0$ la solution complète et posant :

$$\frac{\delta u}{\delta x_1} = q_1, \ldots, \frac{\delta u}{\delta x_n} = q_n, \quad \frac{\delta u}{\delta z} = q_{n+1},$$

$$z q_{n+1}^{\mu} = (-1)^{\mu} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

où la variable z est séparée des autres. Il suffira donc d'intégrer à part

$$zq_{n+1}^{\mu} = (-1)^{\mu}\,\mathrm{A}, \quad f = \mathrm{A}.$$

Si l'intégrale de la dernière est

$$z_1 = \alpha_1 + \mathrm{F}\,(x_1, \ldots, x_n, \mathrm{A}, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}),$$

on trouve aisément que celle de l'équation donnée est

$$\mathrm{A}z^{\mu-1} = \left(\frac{\mu-1}{\mu}\,\mathrm{F}\right)^{\mu}.$$

73. Exemples. I. Soit l'équation (*)

$$x_1x_2 \ldots x_n = p_1p_2 \ldots p_n.$$

Les variables peuvent être séparées, si l'on pose $x_i\varphi_i = p_i$, ce qui transforme l'équation en

$$\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n = 1.$$

On posera :

$$2^n a_1a_2 \ldots a_n = 1,$$

$$\frac{p_1}{x_1} = 2a_1, \quad \frac{p_2}{x_2} = 2a_2, \ldots, \frac{p_n}{x_n} = 2a_n.$$

ce qui conduira aux solutions auxiliaires :

$$z_1 = \alpha_1 + a_1x_1^2, \ldots, z_n = \alpha_n + a_nx_n^2,$$

et par suite à la solution complète

$$z = \alpha + a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2.$$

II. Soit encore l'équation (**)

$$(x_2p_1 + x_1p_2)\,x_3 + p_3\,(p_1 - p_2)\left[p_4^2 + (p_5 + x_4)\,(p_5 + x_6)\,p_6\right] = a_1.$$

(*) C'est l'équation étudiée, plus bas, par la méthode de Cauchy (n° 110). Graindorge, n^{os} 49 et 69, intègre cette équation par la méthode générale de Jacobi sous ses deux formes.

(**) Nous empruntons cet exemple, si bien choisi pour montrer toutes les simplifications et toutes les modifications de la méthode de Jacobi, à Imschenetsky, n^{os} 61-65, pp. 79-86.

On posera, à cause de la séparation des variables x_1, x_2, x_3, et x_4, x_5, x_6,

$$p_4^2 + (p_5 + x_4)(p_5 + x_6)\, p_6 = \alpha.$$

On trouvera, encore par séparation des variables, après avoir posé $p_5 = \beta$, l'intégrale de celle-ci sans aucune difficulté :

$$z' + A' = \frac{2}{3\gamma}(\alpha - \beta\gamma - \gamma x_4)^{\frac{3}{2}} + \beta x_5 + \mathrm{l}.\, (\beta + x_6)^{\gamma}.$$

L'équation donnée deviendra alors :

$$\mathrm{H}_1 = (x_2 p_1 + x_1 p_2)\, x_3 + \alpha p_3 (p_1 - p_2) = a_1.$$

La fonction H_2, d'après la méthode générale de Jacobi, sera une solution des équations auxiliaires (a) qui deviennent dans le cas actuel :

$$\frac{dp_1}{p_2 x_3} = \frac{dp_2}{p_1 x_3} = \frac{dp_3}{p_1 x_2 + p_2 x_1} = \frac{-\,dx_1}{x_2 x_3 + \alpha p_3} = \frac{-\,dx_2}{x_1 x_3 - \alpha p_3} = \frac{-\,dx_3}{\alpha(p_1 - p_2)} . \quad (a)$$

On déduit de là,

$$\frac{d(p_1 + p_2)}{p_1 + p_2} = \frac{-\,d(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2},$$

d'où, pour H_2, la valeur

$$\mathrm{H}_2 = (x_1 + x_2)(p_1 + p_2).$$

Il faut maintenant trouver une solution commune aux équations :

$$(\mathrm{H}_3, \mathrm{H}_1) = 0, \quad (\mathrm{H}_3, \mathrm{H}_2) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Pour cela, il faut chercher une seconde solution θ_1 des équations (a), et la substituer dans (2_2). On tire de la première équation :

$$\frac{dp_1}{p_2} = \frac{dp_2}{p_1},$$

et par suite

$$\theta_1 = \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2^2}{2}.$$

Formons la quantité $\theta_2 = (\theta_1, H_2)$. On trouve :

$$\theta_2 = (\theta_1 . H_2) = (p_1 + p_2)(-p_1) + (p_1 + p_2) p_2 = - p_1^2 + p_2^2 = - 2\theta_1,$$

c'est-à-dire que nous rencontrons le cas d'exception signalé plus haut (n° 68, Rem. II). On est donc forcé de chercher une autre intégrale du système (a). On trouve encore, au moyen des équations (a)

$$\frac{d(p_1 - p_2)}{-x_3(p_1 - p_2)} = \frac{-dx_3}{\alpha(p_1 - p_2)},$$

l'intégrale :

$$\theta'_1 = \alpha(p_1 - p_2) - \frac{x_3^2}{2}.$$

Formons $\theta'_2 = (\theta'_1, H_2)$. Il vient :

$$\theta'_2 = (p_1 + p_2)(-\alpha) + (p_1 + p_2)\alpha = 0.$$

Nous rencontrons précisément le cas où la simplification est la plus grande, c'est-à-dire, celui où une solution de (2_1) satisfait aussi à (2_2). Nous poserons donc :

$$H_3 = \alpha(p_1 - p_2) - \frac{x_3^2}{2}.$$

Les équations $H_1 = a_1$, $H_2 = a_2$, $H_3 = a_3$, permettent de calculer $dz'' = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3$, et par suite z''. On trouve ainsi :

$$z'' + A'' = \frac{a_2}{2} \text{l.}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2\alpha}(x_1 - x_2)\left(a_3 + \frac{x_3^2}{2}\right)$$
$$+ \frac{a_1\sqrt{2}}{\sqrt{a_3}} \operatorname{arctg} \frac{x_3}{\sqrt{2a_3}} - \frac{a_2}{2} \text{l.}(2a_3 + x_3^2).$$

Donc enfin, en réunissant z' et z'', la valeur de z, avec 6 constantes α, β, γ, A, a_2, a_3, est la suivante :

$$z + A = \text{l.} \frac{(x_1 + x_2)^{\frac{a_2}{2}} (\beta + x_6)^{\gamma}}{(2a_3 + x_3^2)^{\frac{a_2}{2}}} + \frac{1}{2\alpha}(x_1 - x_2)\left(a_3 + \frac{x_3^2}{2}\right)$$
$$+ \frac{a_1\sqrt{2}}{\sqrt{a_3}} \operatorname{arctg} \frac{x_3}{\sqrt{2a_3}} + \frac{2}{3\gamma}(\alpha - \beta\gamma - \gamma x_4)^{\frac{3}{2}} + \beta x^5.$$

Nous pouvons encore, avec Imschenetsky, arriver à la même intégrale complète, en cherchant une solution commune du système (2), à partir d'une solution de (2_2), ou du système correspondant qui n'est que du troisième ordre :

$$\frac{dp_1}{p_1+p_2}=\frac{dp_2}{p_1+p_2}=\frac{-dx_1}{x_1-x_2}=\frac{x_1-x_2}{-dx_2}.$$

Une solution très-simple est $\varkappa_1=p_1-p_2=$constante. Cherchons $\varkappa_2=(\varkappa_1, H_1)$, $\varkappa_3=(\varkappa_2, H_1)$, etc.

$$\varkappa_2=(p_2x_3)(-1)+(p_1x_3)(+1)=x_3\varkappa_1,$$

$$\varkappa_3=(p_2x_3)(-x_3)+(p_1x_3)(+x_3)+\varkappa_1\alpha(p_1-p_2)=\frac{\varkappa_2^2}{\varkappa_1}+\alpha\varkappa_1^2.$$

Une fonction $\theta(H_2, \varkappa_1, \varkappa_2)$ satisfait à (2_2); elle satisfait à (2_1), si elle est une solution du système (b) :

$$\frac{d\varkappa_1}{\varkappa_2}=\frac{d\varkappa_2}{\varkappa_3},\quad \text{ou}\quad \frac{d\varkappa_2}{d\varkappa_1}=\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}+\alpha\frac{\varkappa_1^2}{\varkappa_2}.$$

On retombe, en intégrant cette relation, sur la valeur θ_1' donnée plus haut, et par suite on arrive à la même intégrale complète.

§ 20. *Méthode de Jacobi sous sa forme la plus simple* (*).

74. *Idée générale de la marche à suivre.* 1° On déduira la valeur

$$p_1=\varphi_1(x_1,\dots,x_n, a_1, p_2, p_3,\dots,p_n)=\psi_{11}$$

de la première équation II. 2° Cela fait, l'équation (VI), du § 18, où $f_2=f_2(x_1, \dots, x_n, a_1, p_2, \dots, p_n)$, savoir

$$(p_1-\psi_{11}, f_2)=0, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

(*) Résumé de Jacobi, *Nova methodus*, §§ 9 à 11, §§ 18 à 22. Le même résumé se trouve dans Imschenetsky, §§ 20 à 22, pp. 86-121, Graindorge, VII, pp. 53-73, avec des exemples et quelques théorèmes donnés par nous dans les paragraphes précédents.

donnera $f_2 = a_2$, et l'on pourra en tirer

$$p_2 = \varphi_2 (x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, p_3, \ldots, p_n) = \psi_{22},$$

et, par suite,

$$p_1 = \psi_{12} (x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, p_3, \ldots, p_n),$$

de sorte que l'on aura (§ 18, IV')

$$(p_1 - \psi_{12}, p_2 - \psi_{22}) = 0. \qquad (1')$$

3° On déterminera ensuite $f_3 (x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, p_3, \ldots, p_n)$, au moyen du système (VI) :

$$(p_1 - \psi_{12}, f_3) = 0, \quad (p_2 - \psi_{22}, f_3) = 0. \qquad (2)$$

La fonction f_3 trouvée, en l'égalant à une constante arbitraire a_3, on pourra en tirer la valeur de p_3, que l'on substituera dans les valeurs précédentes de p_1 et p_2. On aura ainsi des équations de la forme

$$p_1 = \psi_{13} (x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, p_4, \ldots, p_n),$$
$$p_2 = \psi_{23} (x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, p_4, \ldots, p_n),$$
$$p_3 = \varphi_3 (x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, p_4, \ldots, p_n) = \psi_{33}.$$

Alors, d'après (IV') :

$$(p_1 - \psi_{13}, p_3 - \psi_{33}) = 0, (p_2 - \psi_{23}, p_3 - \psi_{33}) = 0, (p_1 - \psi_{13}, p_2 - \psi_{23}) = 0. \ (2')$$

4° Soit ensuite $f_4 (x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, p_4, \ldots, p_n)$ une fonction satisfaisant aux équations

$$(p_1 - \psi_{13}, f_4) = 0, \quad (p_2 - \psi_{23}, f_4) = 0, \quad (p_3 - \psi_{33}, f_4) = 0, \ldots \qquad (3)$$

on tirera p_4 de $f_4 = a_4$, et l'on pourra écrire

$$p_1 = \psi_{14} (x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, a_4, p_5, \ldots, p_n),$$
$$p_2 = \psi_{24} (x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, a_4, p_5, \ldots, p_n),$$
$$p_3 = \psi_{34} (x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, a_4, p_5, \ldots, p_n),$$
$$p_4 = \varphi_4 (x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, a_3, a_4, p_5, \ldots, p_n) = \psi_{44}.$$

Ces valeurs seront telles d'ailleurs, d'après (IV'), que

$$(p_1-\psi_{14}, p_4-\psi_{44})=0,\ (p_2-\psi_{24}, p_4-\psi_{44})=0,\ (p_3-\psi_{34}, p_4-\psi_{44})=0, \quad (3')$$
$$(p_1-\psi_{14}, p_3-\psi_{34})=0,\ (p_2-\psi_{24}, p_3-\psi_{34})=0,$$
$$(p_1-\psi_{14}, p_2-\psi_{24})=0.$$

Et ainsi de suite.

Si l'on appelle $f_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)=a_1$ l'équation donnée, on trouvera ainsi le système suivant, auquel nous adjoignons l'équation donnée elle-même:

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)=a_1,\\
&f_2(x_1, \ldots, x_n, a_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)=a_2,\\
&f_3(x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, p_3, \ldots, p_n)=a_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_{n-1}(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-2}, p_{n-1}, p_n)=a_{n-1},\\
&f_n(a_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-1}, p_n)=a_n;
\end{aligned}$$

et l'on en a déduit

$$\begin{aligned}
p_n &= \psi_{nn}\quad (x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)=\pi_n,\\
p_{n-1} &= \psi_{n-1,n}(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)=\pi_{n-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
p_2 &= \psi_{2n}\quad (x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)=\pi_2,\\
p_1 &= \psi_{1n}\quad (x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)=\pi_1.
\end{aligned}$$

Il est clair, d'après le § 18, que ces valeurs de p satisferont aux conditions d'intégrabilité. Toute la question est donc ramenée à trouver les solutions

$$f_2=a_2,\quad f_3=a_3,\quad f_4=a_4, \ldots$$

des équations (1), (2), (3), etc. On va voir que ces intégrations sont plus simples que dans le cas où l'on cherche les équations H, parce que le nombre des variables va sans cesse en décroissant.

75. *Intégration du système (2).* L'équation (1), écrite tout au long, prend la forme :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial(p_1-\psi_{11})}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial(p_1-\psi_{11})}{\partial p_1}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial p_1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial(p_1-\psi_{11})}{\partial x_2}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial(p_1-\psi_{11})}{\partial p_2}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial p_2} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial(p_1-\psi_{11})}{\partial x_n}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial p_n} \\ \dfrac{\partial(p_1-\psi_{11})}{\partial p_n}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial p_n} \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore, en changeant les signes :

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \sum_2^n \left(\frac{\partial \psi_{11}}{\partial x_m} \frac{\partial f_2}{\partial p_m} - \frac{\partial \psi_{11}}{\partial p_m} \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \right),$$

équation linéaire par rapport aux dérivées de f_2, ne contenant que $(2n-1)$ variables, $x_1, \dots, x_n, p_2, \dots, p_n$. Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{-\dfrac{\partial \psi_{11}}{\partial p_2}} = \frac{dx_3}{-\dfrac{\partial \psi_{11}}{\partial p_3}} = \cdots = \frac{dx_n}{-\dfrac{\partial \psi_{11}}{\partial p_n}} = \frac{dp_2}{\dfrac{\partial \psi_{11}}{\partial x_2}} = \frac{dp_3}{\dfrac{\partial \psi_{11}}{\partial x_3}} = \cdots = \frac{dp_n}{\dfrac{\partial \psi_{11}}{\partial x_n}}.$$

Pour avoir la relation cherchée $f_2 = a_2$, il suffira d'en connaître une intégrale.

Le système (2) se composera de deux équations

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \sum_3^n \left(\frac{\partial \psi_{12}}{\partial x_m} \frac{\partial f_3}{\partial p_m} - \frac{\partial \psi_{12}}{\partial p_m} \frac{\partial f_3}{\partial x_m} \right), \quad \ldots \ldots \quad (2_1)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \sum_3^n \left(\frac{\partial \psi_{22}}{\partial x_m} \frac{\partial f_3}{\partial p_m} - \frac{\partial \psi_{22}}{\partial p_m} \frac{\partial f_3}{\partial x_m} \right), \quad \ldots \ldots \quad (2_2)$$

qui contiennent chacun $(2n-5)$ variables indépendantes. Soit θ_1 une solution de (2_1), de sorte que

$$(\theta_1, p_1 - \psi_{12}) = 0.$$

Posons, afin de voir si θ_1 satisfait aussi à (2_2),

$$\theta_2 = (\theta_1, p_2 - \psi_{22}), \quad \theta_3 = (\theta_2, p_2 - \psi_{22}), \quad \theta_4 = (\theta_3, p_2 - \psi_{22}), \text{ etc.}$$

Les fonctions θ_1, θ_2, θ_3, etc., satisfont aussi à (2_1). En effet, l'on a :

$$(p_1 - \psi_{12}, \theta_2) = (p_1 - \psi_{12}, (p_2 - \psi_{22}, \theta_1))$$
$$= -(p_2 - \psi_{22}, (\theta_1, p_1 - \psi_{12})) - (\theta_1, (p_1 - \psi_{12}, p_2 - \psi_{22})).$$

Le second membre est nul, en vertu de l'équation (1') et de l'hypothèse sur θ. Donc

$$(\theta_2, p_1 - \psi_{12}) = 0.$$

De même

$$(\theta_3, p_1 - \psi_{12}) = 0,$$
$$(\theta_4, p_1 - \psi_{12}) = 0.$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Il peut arriver deux cas distincts : 1° L'une des fonctions θ est identiquement nulle; dans ce cas cette fonction θ est évidemment la solution commune des équations (2). 2° Une des fonctions θ sera une fonction des précédentes et de x_2, constante dans (2_1). Cela arrivera nécessairement avant que l'on ait calculé $(2n - 3)$ fonctions θ, puisque les équations différentielles simultanées correspondant à (2_1) peuvent avoir au plus $(2n - 4)$ intégrales distinctes. On verrait comme plus haut (n° 68) qu'il en serait de même de toutes les fonctions θ que l'on pourrait calculer ultérieurement.

Supposons que l'on ait trouvé i fonctions θ distinctes. Soit

$$\theta = \theta(x_2, \theta_1, \ldots, \theta_i).$$

On aura :

$$(\theta, p_2 - \psi_{22}) = (x_2, p_2 - \psi_{22}) \frac{\partial\theta}{\partial x_2} + (\theta_1, p_2 - \psi_{22}) \frac{\partial\theta}{\partial\theta_1} + \cdots + (\theta_i, p_2 - \psi_{22}) \frac{\partial\theta}{\partial\theta_i}$$
$$= \frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \theta_2 \frac{\partial\theta}{\partial\theta_1} + \theta_3 \frac{\partial\theta}{\partial\theta_2} + \cdots + \theta_{i+1} \frac{\partial\theta}{\partial\theta_i}.$$

Par hypothèse :

$$\theta_{i+1} = \Theta(x_2, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i).$$

On posera

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \theta_2 \frac{\partial\theta}{\partial\theta_1} + \theta_3 \frac{\partial\theta}{\partial\theta_2} + \cdots + \Theta \frac{\partial\theta}{\partial\theta_i} = 0,$$

équation dont l'intégration dépendra de celle du système

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{d\theta_1}{\theta_2} = \frac{d\theta_2}{\theta_3} = \frac{d\theta_3}{\theta_4} = \cdots = \frac{d\theta_{i-1}}{\theta_i} = \frac{d\theta_i}{\Theta},$$

ou de l'équation

$$\frac{d^i\theta_1}{dx_2^i} = \Theta\left(x_2, \theta_1, \frac{d\theta_1}{dx_2}, \frac{d^2\theta_1}{dx_2^2}, \ldots, \frac{d^{i-1}\theta_1}{dx_2^{i-1}}\right).$$

Il suffira de connaître une intégrale première de cette équation :

$$f_3\left(x_2, \theta_1, \ldots, \frac{d^{i-1}\theta_1}{dx^{i-1}}\right) = a_2,$$

pour avoir la solution commune cherchée :

$$f_3(x_2, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i) = a_2.$$

En particulier, il sera facile de trouver f_3 dans le cas où $\theta_{i+1} =$ constante k, car alors

$$\frac{d^i\theta_1}{dx_2^i} = k, \quad \frac{d^{i-1}\theta_1}{dx_2^{i-1}} = kx_2,$$

et

$$f_3 = \theta_i - kx_2.$$

Il est clair, en effet, que si $(\theta_i, p_2 - \psi_{22}) = k$, on a

$$(\theta_i - kx_2, p_2 - \psi_{22}) = 0.$$

Remarque. On aurait pu commencer aussi bien par l'équation (2_2) que par l'équation (2_1). En tout cas, on ne rencontre plus ici l'exception qui rend illusoire la méthode exposée dans le paragraphe précédent. Si l'on a

$$\theta_2 = (\theta_1, p_2 - \psi_{22}) = \text{constante déterminée } k,$$

on prend simplement pour f_2, l'expression

$$\theta_1 - kx_2,$$

qui donne, en effet,

$$(\theta_1 - kx_2, p_2 - \psi_{22}) = 0,$$

comme plus haut.

Un cas très-simple est celui où l'on a

$$\theta_2 = \theta(x_2, \theta_1),$$

parce que l'équation auxiliaire se réduit à

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{d\theta_1}{\theta(x_2, \theta_1)}.$$

Elle se simplifie encore quand x_2, θ_1, ou x_2 et θ_1 manquent dans θ.

76. *Intégration du système (3).* Les équations du système (3) contiennent $(2n - 5)$ variables, c'est-à-dire deux de moins que le précédent. Ce système contient trois équations :

$$(p_1 - \psi_{13}, f_4) = 0, \quad (p_2 - \psi_{23}, f_4) = 0, \quad (p_3 - \psi_{33}, f_4) = 0. \quad . \quad . \quad (3)$$

Soit θ_1 une solution des deux premières, de sorte que

$$(p_1 - \psi_{13}, \theta_1) = 0, \quad (p_2 - \psi_{23}, \theta_1) = 0.$$

Substituons-la dans la troisième et formons la suite,

$$\theta_2 = (\theta_1, p_3 - \psi_{33}), \quad \theta_3 = (\theta_2, p_3 - \psi_{33}), \text{ etc.}$$

On aura :

$$(p_1 - \psi_{13}, \theta_2) = (p_1 - \psi_{13}, (\theta_1, p_3 - \psi_{33}))$$
$$= -(p_3 - \psi_{33}, (\theta_1, p_1 - \psi_{13})) - (\theta_1, (p_1 - \psi_{13}, p_3 - \psi_{33})),$$

c'est-à-dire, d'après les équations (2') et la définition de θ_1,

$$(p_1 - \psi_{13}, \theta_2) = 0.$$

De même

$$(p_2 - \psi_{23}, \theta_2) = 0,$$

c'est-à-dire que θ_2 est solution des deux premières équations (3). Il en est de même de θ_3, θ_4, etc.

La suite des fonctions θ comprend au plus $(2n-6)$ fonctions distinctes ; on arrivera donc à une fonction θ_{i+1}, qui sera fonction des précédentes, et si l'on veut de x_3, qui joue le rôle d'une constante dans les équations (3_1), (3_2). Soit

$$\theta_{i+1}=\Theta(x_3, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i).$$

Les fonctions θ_{i+2}, θ_{i+3}, etc., s'exprimeront de même. Soit maintenant $\theta(x_3, \theta_1, \dots, \theta_i)$ une fonction nouvelle; elle satisfait à (3_1) et à (3_2), comme on le voit sans peine. Pour qu'elle satisfasse à (3_3), il faudra que l'on ait, comme dans le n° précédent,

$$\frac{d\theta}{dx_3}+\theta_2\frac{d\theta}{d\theta_1}+\theta_3\frac{d\theta}{d\theta_2}+\cdots+\Theta\frac{d\theta}{d\theta_i}=0,$$

dont il suffira de trouver une intégrale $f_4=a_4$, ou une du système

$$\frac{dx_3}{1}=\frac{d\theta_1}{\theta_2}=\frac{d\theta_2}{\theta_3}=\cdots=\frac{d\theta_i}{\Theta}=0,$$

ou encore une intégrale première de

$$\frac{d^i\theta_1}{dx_3^i}=\Theta\left(x_3, \theta_1, \frac{d\theta_1}{dx_3}, \dots, \frac{d^{i-1}\theta_1}{dx_3^{i-1}}\right).$$

77. *Intégration des autres systèmes et en particulier du dernier.* Il est évident que l'on peut continuer de la même manière l'intégration des systèmes successifs (4), (5), ..., $(n-1)$. Supposons que l'on soit arrivé à ce dernier, qui est :

$$(p_1-\psi_{1,n-1}, f_n)=0,\quad (p_2-\psi_{2,n-2}, f_n)=0\ \dots\ (p_{n-1}-\psi_{n-1,n-1}, f_n)=0,$$

ou encore :

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_{1,n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial f_n}{\partial p_n}-\frac{\partial\psi_{1,n-1}}{\partial p_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_n}=0, \quad \dots\dots \quad (n-1_1)$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_2}+\frac{\partial\psi_{2,n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial f_n}{\partial p_n}-\frac{\partial\psi_{2,n-1}}{\partial p_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_n}=0, \quad \dots\dots \quad (n-1_2)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}}+\frac{\partial\psi_{n-1,n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial f_n}{\partial p_n}-\frac{\partial\psi_{n-1,n-1}}{\partial p_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_n}=0 \quad .\ . \quad (n-1_{n-1})$$

On cherchera une solution de $(n-1_1)$; on en déduira d'autres solutions au moyen du théorème fondamental, puis, comme ci-dessus, une solution commune de $(n-1_1)$, $(n-1_2)$. Le théorème fondamental de Jacobi en donnera d'autres, puis on saura trouver une solution commune aux équations $(n-1_1)$, $(n-1_2)$, $(n-1_3)$; et ainsi de suite.

On remarquera que l'intégration de $(n-1_1)$ dépend de la recherche d'une intégrale d'un système d'équations simultanées à trois variables, ou de la recherche d'une intégrale première d'une équation différentielle ordinaire du second ordre. Pour déduire de là une solution commune aux équations $(n-1_1)$, $(n-1_2)$, il faut encore trouver une intégrale première d'une équation qui est *au plus* du second ordre; il en est de même dans la recherche des solutions communes aux 3, aux 4, aux 5... premières équations $(n-1)$. Par conséquent, on a tout au plus à chercher une intégrale première de $(n-1)$ équations du second ordre.

En résumé, on voit que la méthode de Jacobi exige la détermination d'une seule intégrale de chacun des $\frac{n(n-1)}{2}$ systèmes d'équations. Parmi ces systèmes, il y en a

1	de l'ordre	$2(n-1)$	servant	à déterminer	f_2,
2	»	$2(n-2)$	»	»	f_3,
3	»	$2(n-3)$	»	»	f_4,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$n-1$	»	2	»	»	f_n.

C'est là le cas le plus défavorable. On conçoit bien que, dans chaque cas particulier, on peut introduire des simplifications, puisque, en général, dans l'intégration de chacun des systèmes (1), (2),..., $(n-1)$, on peut commencer par telle équation que l'on veut.

78. Exemple (*). Soit l'équation :

$$p_1+(3x_2+2x_3)p_2+(4x_2+5x_3)p_3+[x_4+x_5(p_2-p_3)]\,p_5+\frac{x_5p_5^2}{p_4}=0.$$

(*) Nous l'empruntons à Imschenetsky, n° 89, pp. 116-121. Graindorge, n° 71, pp. 70-73, en donne un autre, emprunté à Ampère, que la méthode de Jacobi permet d'intégrer très-simplement.

1° Il faut trouver d'abord une intégrale de

$$(p_1 - \psi_{11}, f_2) = 0,$$

$(p_1 - \psi_{11})$ représentant le premier membre de l'équation donnée. Le système auxiliaire correspondant est :

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{-\frac{\delta\psi_{11}}{\delta p_2}} = \cdots = \frac{dx_5}{-\frac{\delta\psi_{11}}{\delta p_5}} = \frac{dp_2}{3p_2 + 4p_3} = \frac{dp_3}{2p_2 + 5p_3} = \frac{dp_4}{\frac{\delta\psi_{11}}{\delta x_4}} = \frac{dp_5}{\frac{\delta\psi_{11}}{\delta x_5}}.$$

On en tire

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{d(p_2 - p_3)}{p_2 - p_3},$$

et par suite on peut prendre l'intégrale de cette équation pour f_2, c'est-à-dire poser :

$$f_2 = (p_2 - p_3)\, e^{x_1} = a_2.$$

On tire de là, la valeur de p_2, et on la substitue dans p_1. On a ainsi

$$p_1 - \psi_{12} = p_1 + (3x_2 + 2x_3)(p_3 + a_2 e^{-x_1}) + (4x_2 + 5x_3)\, p_3$$
$$+ \left[x_4 + x_5 a_2 e^{-x_1}\right] p_5 + \frac{x_5 p_5^2}{p_4}; \quad p_2 - \psi_{22} = p_2 - p_3 - a_2 e^{-x_1}.$$

2° Il faudra trouver une solution commune des équations

$$(p_1 - \psi_{12}, f_3) = 0, \quad (p_2 - \psi_{22}, f_3) = 0.$$

On obtient une intégrale de la seconde équation en cherchant une solution d'un système contenant l'équation

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{dp_3}{\frac{\delta\psi_{22}}{\delta x_3}},$$

ou

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{dp_3}{0}.$$

On pourra donc poser, puisque $p_3 =$ constante est l'intégrale de cette dernière,

$$\theta_1 = p_3.$$

On aura ensuite :

$$\theta_2 = -(p_1 - \psi_{12}, p_3) = -2(p_3 + a_2 e^{-x_1}) - 5p_3 = -7\theta_1 - 2a_2 e^{-x_1}.$$

La suite des fonctions θ s'arrête ici. Il faut maintenant chercher une intégrale de

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{d\theta_1}{-7\theta_1 - 2a_2 e^{-x_1}},$$

et ce sera f_3. On trouve :

$$f_3 = \left(\theta_1 + \frac{1}{5} a_2 e^{-x_1}\right) e^{7x_1} = \left(p_3 + \frac{1}{5} a_2 e^{-x_1}\right) e^{7x_1} = a_3.$$

On tire des résultats précédents :

$$p_3 - \psi_{33} = p_3 + \frac{1}{5} a_2 e^{-x_1} - a_3 e^{-7x_1},$$

$$p_2 - \psi_{23} = p_2 - \frac{2}{5} a_2 e^{-x_1} - a_3 e^{-7x_1},$$

$$p_1 - \psi_{13} = p_1 + \text{etc.}$$

5° On considère ensuite les équations

$$(p_1 - \psi_{13}, f_4) = 0, \quad (p_2 - \psi_{23}, f_4) = 0, \quad (p_3 - \psi_{33}, f_4) = 0.$$

La dernière a pour solution $\theta_1 = p_4 =$ constante, qui satisfait également à la seconde. Ensuite :

$$\theta_2 = (\theta_1, p_1 - \psi_{13}) = -p_5,$$

$$\theta_3 = (\theta_2, p_1 - \psi_{13}) = -a_1 e^{-x_1}\theta_2 + \frac{\theta_2^2}{\theta_1}.$$

Cela conduit, par la méthode générale, à

$$f_4 = \mathrm{l.}\left(-\frac{p_5}{p_4}\right) - a_2 e^{-x_1} = -\mathrm{l.}\, a_4.$$

D'où

$$p_4 - \psi_{44} = p_4 - p_5 a_4 e^{-a_2 e^{-x_1}},$$
$$p_3 - \psi_{34} = \text{etc.}$$
$$p_2 - \psi_{24} = \text{etc.}$$
$$p_1 - \psi_{14} = \text{etc.}$$

4° La dernière des équations :

$$(p_1 - \psi_{14}, f_5) = 0, \quad (p_2 - \psi_{24}, f_5) = 0, \quad (p_3 - \psi_{34}, f_5) = 0, \quad (p_4 - \psi_{44}, f_5) = 0.$$

a pour solution $\theta_1 = p_5 =$ constante, qui satisfait à la seconde et à la troisième, et donne

$$\theta_2 = (\theta_1, p_1 - \psi_{14}) = - a_2 e^{-x_1} \theta_1 - \frac{1}{a_4} e^{a_2 e^{-x_1}} \theta_1 .$$

On trouve alors :

$$f_5 = \mathrm{l}.p_5 - a_2 e^{-x_1} + \frac{1}{a_4} \int e^{a_2 e^{-x_1}} dx_1 = \mathrm{l}.a_5 ,$$

et

$$p_5 = a_5 \left(e^{a_2 e^{-x_1} - \frac{1}{a_4} \int e^{a_2 e^{-x_1}} dx_1} \right).$$

5° On exprimera p_4, p_3, p_2, p_1 en fonction des x seuls et des constantes. En intégrant l'expression

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 + p_4 dx_4 + p_5 dx_5 ,$$

on trouvera enfin :

$$z = a_1 + \frac{a_2}{3} (2x_2 - x_3) e^{-x_1} + a_3 (x_2 + x_3) e^{-7x_1}$$
$$+ a_5 \left(a_4 x_4 + x_5 e^{a_1 e^{-x_1}} \right) e^{-\frac{1}{a_4} \int e^{a_1 e^{-x_1}} dx_1} .$$

CHAPITRE III.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

—

§ 21. *Théorie générale. Méthode de Bour* (*).

79. *Cas où les équations données sont résolues par rapport à* m *des quantités* p. Supposons que l'on ait à chercher une solution commune des m équations :

$$p_1 = \psi_1(x_1, .., x_n, p_{m+1}, ..., p_n), \quad \ldots \ldots \quad (1_1)$$
$$p_2 = \psi_2(x_1, ..., x_n, p_{m+1}, ..., p_n), \quad \ldots \ldots \quad (1_2)$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$p_m = \psi_m(x_1, ..., x_n, p_{m+1}, ..., p_n). \quad \ldots \ldots \quad (1_m)$$

La question revient à chercher $(n - m)$ nouvelles relations entre les p et les x de telle sorte que les valeurs de $p_1, ..., p_n$ en $x_1, ..., x_n$ que l'on déduit de ces nouvelles équations et des données rendent

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

immédiatement intégrable.

(*) *Sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier et du second ordre* (Journal de l'école polytechnique, 39me cahier, pp. 149-191), surtout le § III, pp. 165-174. La méthode de Bour est exposée dans Graindorge, VIII, pp. 73-89; Imschenetsky, § 23, pp. 121-136; Collet (Annales de l'école normale supérieure, t. VII, pp. 7-47). La théorie de Bour contenait une légère erreur reproduite par ces divers auteurs et corrigée par Mayer dans un excellent petit mémoire (Mathematische Annalen, t. IV, pp. 88-94), dont nous donnons ici la substance. Il a pour titre : *Ueber die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit derselben unbekannten Function.* Imschenetsky, § 26, pp. 145-156, applique la théorie générale à la détermination des conditions d'intégrabilité immédiate d'une expression différentielle.

Il résulte de là que l'on doit avoir pour les valeurs de i et de k comprises dans la suite 1, 2, 3, ..., m :

$$(p_i - \psi_i, p_k - \psi_k) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

On doit ici distinguer trois cas :

I. *Il se peut que l'équation* (3) *soit identiquement satisfaite pour toutes les valeurs de* i *et de* k. Dans ce cas, on trouve la valeur de z en se servant de la méthode de Jacobi pour le cas d'une équation aux dérivées partielles isolée, à partir du moment où l'on connaît dejà m relations entre les p et les x.

On cherchera donc $(n - m)$ autres relations

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \ldots, f_{n-m} = a_{n-m},$$

entre les p et les x, et l'on trouvera une solution, dite *intégrale complète* avec $(n - m + 1)$ constantes arbitraires.

II. *On peut trouver, pour une ou plusieurs valeurs de* i *et de* k

$$(p_i - \psi_i, \quad p_k - \psi_k) = \text{constante},$$

ou

$$(p_i - \psi_i, \quad p_k - \psi_k) = \mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Dans ce cas, les équations (1) n'ont pas de solution commune, puisqu'il est, ou bien absolument impossible de satisfaire à la condition (3), où bien l'on ne pourrait y satisfaire qu'en posant $\mathrm{F} = 0$, c'est-à-dire en supposant qu'il y a une relation entre les x (*).

III. *On peut trouver pour une ou plusieurs valeurs de* i *et de* k

$$(p_i - \psi_i, \quad p_k - \psi_k) = f(x_1, \ldots, x_n, p_{m+1}, \ldots, p_n).$$

Dans ce cas, il est clair que, si le système donné a une solution, les relations qui restent à trouver entre les x et les p doivent être telles que l'on ait pour chaque fonction f :

$$f(x_1, \ldots, x_n, p_{m+1}, \ldots, p_n) = 0.$$

(*) Il y aurait lieu toutefois d'examiner si l'on ne se trouve pas dans le cas des équations *semi-linéaires* de Lie, dont nous n'avons pu donner plus haut (nº 14) que la définition.

Donc, et c'est en cela que consiste essentiellement la méthode de Bour, toutes celles de ces équations $f = 0$ qui sont distinctes, doivent être ajoutées au système primitif puisqu'elles doivent être satisfaites comme les équations données elles-mêmes.

Le système ainsi complété devra être traité comme le système primitif; si le cas I se présente, on achèvera la solution par la méthode de Jacobi; si c'est le cas II que l'on rencontre, le problème n'a pas de solution; si c'est le cas III, nous devrons encore ajouter de nouvelles équations aux équations données et faire la même étude sur un troisième système, composé du précédent et de ces équations nouvelles. Et ainsi de suite.

Il est clair qu'à la fin on tombera sur le cas I ou sur le cas II. En particulier, si l'on rencontre un système contenant plus de n équations, le problème sera impossible.

80. *Cas où les équations sont données sous forme implicite.* Soient

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \ldots, H_m = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1')$$

où H désigne une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, les équations données. On prouvera, comme plus haut, que pour les valeurs de i et k, non supérieures à m, on doit avoir

$$(H_i, H_k) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3')$$

On trouvera encore trois cas à examiner, et, en outre, un quatrième, qui avait échappé à Bour et qui a été signalé par Mayer.

I. *Les équations* (3') *sont identiquement satisfaites pour toutes les valeurs de* i *et* k, *non supérieures à* m. Dans ce cas, la méthode de Jacobi exposée au § 19 conduira le plus souvent à la solution; dans le cas contraire, on emploiera celle du § 20.

II. *On trouvera, pour une ou plusieurs valeurs de* i *et de* k :

$$(H_i, H_k) = \text{constante},$$

$$(H_i, H_k) = F(x_1, \ldots, x_n, H_1, H_2, \ldots, H_m),$$

c'est-à-dire,

$$(\mathrm{H}_i, \mathrm{H}_k) = \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, 0, \ldots, 0).$$

Dans ce cas, les équations (1') n'ont pas de solution commune.

III. *On a, pour une ou plusieurs valeurs de* i *et de* k,

$$(\mathrm{H}_i, \mathrm{H}_k) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n).$$

Dans ce cas, on ajoutera les équations $f = 0$, au système primitif, et l'on refera pour le système complété la même discussion que pour le système primitif, en comprenant le 4me cas dans cette discussion.

IV. *Enfin, il se peut que les équations* (3') *soient satisfaites, non identiquement, mais en vertu des équations* (1') *elles-mêmes.* Cela arrivera toujours, par exemple, si les premiers membres des équations (1') sont des carrés parfaits,

$$h_1^2 = 0, \quad h_2^2 = 0, \ldots, h_m^2 = 0,$$

puisque chaque terme de $(\mathrm{H}_i, \mathrm{H}_k)$ contient le facteur $h_i h_k$. Dans ce cas, il faut bien recourir à la méthode du numéro précédent, pour voir lequel des cas I, II ou III se présente.

Remarques. I. Soit :

$$\mathrm{H}_{m+1} = (\mathrm{H}_i, \mathrm{H}_k).$$

On aura, par le théorème de Jacobi,

$$(\mathrm{H}_j, \mathrm{H}_{m+1}) = \big(\mathrm{H}_j, (\mathrm{H}_i, \mathrm{H}_k)\big) = -\big(\mathrm{H}_i, (\mathrm{H}_k, \mathrm{H}_j)\big) - \big(\mathrm{H}_k, (\mathrm{H}_j, \mathrm{H}_i)\big).$$

Si l'on a déjà

$$(\mathrm{H}_k, \mathrm{H}_j) = 0, \quad (\mathrm{H}_j, \mathrm{H}_i), = 0,$$

on aura, sans nouveau calcul,

$$(\mathrm{H}_j, \mathrm{H}_{m+1}) = 0.$$

II. Que l'on emploie les équations sous l'une ou sous l'autre forme, en tout cas, il faut que les équations de chaque système considéré soient compatibles algébriquement.

81. *Cas spécial, où il est inutile de recourir aux équations* $p - \psi = 0$ (*). Supposons que l'on ait résolu, par rapport à $p_1, p_2, \ldots, p_m$, les m équations $H = 0$ du numéro précédent, puis que l'on ait remis dans ces équations ces valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_m$; elles deviendront des identités, et l'on aura, par suite :

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_m}\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0,$$

équation que l'on peut encore écrire :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial (p_1 - \psi_1)}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_m}\frac{\partial (p_m - \psi_m)}{\partial x}.$$

On aura de même :

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial (p_1 - \psi_1)}{\partial p} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_m}\frac{\partial (p_m - \psi_m)}{\partial p},$$

même pour p égal à $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Donc

$$(H_i, H_k) = \sum_1^m \sum_1^m \frac{\partial H_i}{\partial p_r}\frac{\partial H_k}{\partial p_s}(p_r - \psi_r, p_s - \psi_s).$$

Résolvons ces équations par rapport à $(p_r - \psi_r, p_s - \psi_s)$; le dénominateur de la valeur de ces expressions sera le carré du déterminant

$$D\frac{H_1, H_2, \ldots, H_m}{p_1, p_2, \ldots, p_m},$$

où l'on suppose d'ailleurs $p_1, p_2, \ldots, p_m$ remplacés par leurs valeurs. Si ce déterminant n'est pas nul, en général, les équations $(H_i, H_k) = 0$ entraîneront les équations $(p_r - \psi_r, p_s - \psi_s) = 0$, et, par suite, le quatrième cas n'étant pas à considérer dans l'analyse du numéro précédent, on pourra se servir uniquement d'équations de la forme (H_i, H_k) dans l'application de la méthode de Bour.

C'est, en particulier, ce qui arrive toujours dans le cas des

(*) La remarque de ce numéro est encore due à Mayer (Math. Ann., t. IV, pp. 93-94).

équations linéaires, puisque le déterminant D ne contient plus $p_1, p_2, \dots, p_m$.

82. Exemple (*). Considérons les équations

$$H_1 = p_1p_3 - x_2x_4 = 0, \quad H_2 = p_2p_4 - x_1x_3 = 0,$$

linéaires par rapport à p_1 et p_2, et auxquelles on peut par conséquent appliquer la méthode du n° 80, sans s'occuper du 4[me] cas. On trouve

$$(H_1, H_2) = x_1p_1 - x_2p_2 + x_3p_3 - x_4p_4.$$

Posons

$$H_3 = x_1p_1 - x_2p_2 + x_3p_3 - x_4p_4 = 0.$$

On aura :

$$(H_1, H_3) = -2(p_1p_3 - x_2x_4) = -2H_1 = 0,$$
$$(H_2, H_3) = +2(p_2p_4 - x_1x_3) = +2H_2 = 0.$$

On déduit des trois relations $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, $H_3 = 0$, les deux systèmes suivants de valeurs pour p_1, p_2, p_3 :

$$p_1 = \frac{x_2x_3}{p_4}, \quad p_2 = \frac{x_1x_3}{p_4}, \quad p_3 = \frac{p_4x_4}{x_3},$$
$$p_1 = \frac{x_2x_3}{p_4}, \quad p_2 = \frac{p_4x_4}{x_2}, \quad p_3 = \frac{x_1x_2}{p_4}.$$

Le second système de valeurs s'obtient en permutant, dans le premier, les indices 2 et 3 ; la solution de la question dans un des cas donnera donc la solution dans l'autre, par la même permu-

(*) Imschenetsky, n° 105, pp. 133-136 ; Collet, pp. 44-47 ; Graindorge, n° 79-83, pp. 77-85. Nous donnons la même solution qu'Imschenetsky ; Collet en donne une plus compliquée, en partant de la solution commune suivante des équations, répondant au second système de valeurs des p :

$$f = x_2x_4 - x_1x_3\left(\frac{x_2}{p_4}\right)^2.$$

Cette valeur est trouvée au moyen de la solution $x_4 - x_1x_2x_3p_4^{-2}$ de la première des trois équations linéaires aux dérivées partielles à intégrer. Graindorge reproduit ces deux solutions sous une autre forme, et donne, en outre, une troisième solution par la méthode de Lagrange, une fois les valeurs de p_1, p_2, p_3 obtenues. Voir un autre exemple, plus bas (n° 93).

tation. Prenons le premier système. On devra appliquer la méthode de Jacobi au système d'équations linéaires simultanées :

$$(p_1 - x_2 x_3 p_4^{-1}, f) = 0, \quad (p_2 - x_1 x_3 p_4^{-1}, f) = 0, \quad (p_3 - p_4 x_4 x_3^{-1}, f) = 0,$$

où f est une fonction de x_1, x_2, x_3, x_4 et p_4. Les deux premières de ces équations écrites toutes au long sont :

$$\frac{\delta f}{\delta x_1} + \frac{\delta f}{\delta x_4} x_2 x_3 p_4^{-2} = 0,$$
$$\frac{\delta f}{\delta x_2} + \frac{\delta f}{\delta x_4} x_1 x_3 p_4^{-2} = 0.$$

Elles ont pour solution commune $\theta_1 = p_4$. Plaçons cette expression dans le premier membre de la troisième et nous trouverons une seconde solution commune aux deux premières, savoir $\theta_2 = p_4 x_3^{-1}$. Il n'y en a pas d'autre distincte de θ_1 et θ_2. La solution commune aux trois équations devra satisfaire ensuite à l'équation :

$$\frac{dx_3}{\theta_1} = \frac{d\theta_1}{\theta_2}, \quad \text{ou} \quad \frac{d\theta_1}{\theta_1} = \frac{dx_3}{x_3}.$$

Celle-ci conduit enfin à la solution commune

$$p_4 = a x_3.$$

On déduit de cette valeur de p_4, et des résultats précédents :

$$p_1 = \frac{x_2}{a}, \quad p_2 = \frac{x_1}{a}, \quad p_3 = a x_4,$$
$$dz = \frac{1}{a}(x_2 dx_1 + x_1 dx_2) + a(x_4 dx_3 + x_3 dx_4),$$
$$z = \frac{1}{a} x_1 x_2 + a x_3 x_4 + b.$$

Par permutation tournante, on trouve une autre solution :

$$z = \frac{1}{a} x_1 x_3 + a x_2 x_4 + b.$$

CHAPITRE IV.

MÉTHODE DE CLEBSCH ET DE WEILER POUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES AUXQUELLES CONDUIT LA MÉTHODE DE JACOBI (*).

—

§ 22. *Réduction d'un système complet d'équations linéaires à un système de Jacobi, ou transformation de Clebsch.*

83. *Propriété d'un système complet.* Soit un système d'équations linéaires aux dérivées partielles homogènes :

$$A_1 z = 0, \quad A_2 z = 0, \ldots, A_\mu z = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

où

$$Az = a_1 \frac{dz}{dx_1} + a_2 \frac{dz}{dx_2} + \cdots + a_n \frac{dz}{dx_n} \cdot$$

Pour que les équations du système donné aient une solution commune, il faut que l'on ait pour les valeurs de i et de k, non supérieures à μ,

$$(A_i A_k - A_k A_i) z = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

comme on l'a vu au § 17.

Si ces relations sont *identiquement* satisfaites, Clebsch appelle le système donné *un système de Jacobi;* si le premier membre des équations (2) est une combinaison linéaire des équations (1), il l'appelle *système complet* et nous savons que dans ce cas encore les équations (1) ont une solution commune, comme on l'a vu au chapitre précédent. Enfin si les équations (2) ne sont pas satis-

(*) Clebsch, *Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen* (Journal de Crelle, t. LXV, pp. 257-268), pp. 257-266. Nous n'avons pu consulter le mémoire de Weiler, cité par Clebsch (Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik, etc., t. VIII, année 1863, p. 264).

faites pour toutes les valeurs de i et de k, la méthode de Bour permet de transformer le système donné en un système complet, ou de voir qu'il n'a pas de solution. Il suffit donc de considérer les systèmes complets et les systèmes de Jacobi.

Cela posé, soit donné le système complet (1). Soient ensuite :

$$\begin{aligned} Mz &= m_1 A_1 z + m_2 A_2 z + \cdots + m_\mu A_\mu z = 0, \\ Nz &= n_1 A_1 z + n_2 A_2 z + \cdots + n_\mu A_\mu z = 0, \end{aligned}$$

deux combinaisons linéaires des équations données. Il en sera de même de

$$MNz - NMz = 0.$$

On a, en effet,

$$\begin{aligned} MNz = {} & m_1 A_1 \ (n_1 A_1 z + n_2 A_2 z + \cdots + n_\mu A_\mu z) \\ & + m_2 A_2 \ (n_1 A_1 z + n_2 A_2 z + \cdots + n_\mu A_\mu z) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + m_\mu A_\mu \ (n_1 A_1 z + n_2 A_2 z + \cdots + n_\mu A_\mu z) \\ = {} & (Mn_1 \times A_1 z + \cdots + Mn_\mu \times A_\mu z) + \sum_{11}^{\mu\mu} m_i n_k A_i A_k z. \end{aligned}$$

Donc :

$$(MN - NM)\, z = \Sigma\,(Mn_i - Nm_i) \times A_i z + \sum_{11}^{\mu\mu} m_i n_k (A_i A_k - A_k A_i)\, z.$$

La première partie du second membre est d'elle-même une combinaison linéaire des équations données; il en est de même de la seconde, à cause des équations (2). Donc enfin :

On peut remplacer dans un système complet, un certain nombre d'équations, par un nombre égal d'autres équations qui sont des combinaisons des équations données, sans qu'il cesse d'être un système complet.

84. *Réduction d'un système complet à un système de Jacobi.* Soient

$$u_1, u_2, \ldots, u_\mu,$$

μ fonctions arbitraires, et déduisons les équations :

$$B_1 z = 0, \quad B_2 z = 0, \quad B_3 z = 0, \ldots, B_\mu z = 0, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

des relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}
A_1z = A_1u_1.B_1z + A_1u_2.B_2z + \cdots + A_1u_\mu.B_\mu z, \\
A_2z = A_2u_1.B_1z + A_2u_2.B_2z + \cdots + A_2u_\mu.B_\mu z, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
A_\mu z = A_\mu u_1.B_1z + A_\mu u_2.B_2z + \cdots + A_\mu u_\mu.B_\mu z.
\end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ (4)$$

Le système (3) sera un système de Jacobi, c'est-à-dire que l'on aura *identiquement*

$$(B_iB_k - B_kB_i)\,z = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5)$$

Faisons, en effet, dans les équations (4), successivement $z = u_1$, $z = u_2, \ldots, z = u_\mu$. On trouvera, comme il est aisé de le voir :

$$B_1u_1 = 1,\quad B_2u_1 = 0,\quad B_3u_1 = 0, \ldots, B_\mu u_1 = 0, \ . \ . \ . \ . \ (6_1)$$
$$B_1u_2 = 0,\quad B_2u_2 = 1,\quad B_3u_2 = 0, \ldots, B_\mu u_2 = 0, \ . \ . \ . \ . \ (6_2)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$B_1u_\mu = 0,\quad B_2u_\mu = 0,\quad B_3u_\mu = 0, \ldots, B_\mu u_\mu = 1, \ . \ . \ . \ . \ (6_\mu)$$

c'est-à-dire :

$$B_iu_k = 0,\quad B_iu_i = 1 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (6)$$

D'après le numéro 83, $(B_iB_k - B_kB_i)z$ est une combinaison linéaire des expressions Az, ou, d'après (4), des expressions Bz. Donc :

$$(B_iB_k - B_kB_i)\,z = C_1B_1z + C_2B_2z + C_3B_3z + \cdots + C_\mu B_\mu z = 0. \ . \ (7)$$

Faisons dans cette équation $z = u_1$, $z = u_2, \ldots, z = u_\mu$; il viendra

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0, \ldots, C_\mu = 0,$$

d'après les relations (6_i). Donc enfin l'équation (5) est identiquement satisfaite.

Corollaire. Le système (3) de Jacobi est tel que l'on connaît $(\mu - 1)$ solutions distinctes de chacune des équations qui le composent, comme le prouvent les relations (6).

85. *Intégration du système des équations* $Bz = 0$. La méthode consiste, comme nous l'avons déjà dit, à chercher d'abord une solution de la première équation, puis une des deux premières, puis une des trois premières, et ainsi de suite. Mais la solution se simplifie à cause du corollaire du numéro précédent. Supposons, en effet, que nous ayons trouvé une solution θ_1 des $(i-1)$ premières équations, différente des solutions connues immédiatement, savoir u_i, u_{i+1}, ..., u_μ. On posera :

$$\theta_2 = B_i\theta_1, \quad \theta_3 = B_i\theta_2, \quad \text{etc.}$$

θ_2, θ_3, etc., seront encore des solutions des $(i-1)$ premières équations. Comme on ne peut trouver plus de $n-(i-1)$ solutions communes pour $(i-1)$ équations à n variables indépendantes, on est sûr que la série des valeurs

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

ne peut contenir plus de $n-(i-1)$ valeurs distinctes ; r est donc au plus égal à $(n-\mu)$. Nous chercherons ensuite, comme on a fait plus haut, une fonction

$$\theta\,(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r, u_i, \ldots, u_\mu)$$

qui satisfasse à $B_i z = 0$. Pour cela, on devra avoir

$$B_i\theta_1 \frac{d\theta}{d\theta_1} + B_i\theta_2 \frac{d\theta}{d\theta_2} + \cdots + B_i\theta_r \frac{d\theta}{d\theta_r} + B_i u_i \frac{d\theta}{du_i} + \cdots + B_i u_\mu \frac{d\theta}{du_\mu} = 0.$$

A cause de la définition des θ et des équations (6), cette équation auxiliaire se réduit à

$$\frac{d\theta}{du_i} + \theta_2 \frac{d\theta}{d\theta_1} + \theta_3 \frac{d\theta}{d\theta_2} + \cdots + \theta_{r+1} \frac{d\theta}{d\theta_r} = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

où θ_{r+1} est une fonction des autres solutions des $(i-1)$ premières équations $Bz = 0$. Ainsi l'existence des équations (6) simplifie la recherche de la série (8) et l'équation auxiliaire.

La solution complète du système (2) s'achève par les méthodes indiquées dans le chapitre précédent.

§ 23. ***Méthode de Weiler pour l'intégration des systèmes d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles auxquels conduit la méthode de Jacobi.***

86. *Notations et conventions spéciales pour l'application de la méthode du § précédent.* Pour plus de facilité, nous écrirons comme suit les systèmes du n° 67 :

$$A_1H_2 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1_1)$$
$$A_1H_3 = 0, \quad A_2H_3 = 0, \ldots\ldots\ldots \quad (1_2)$$
$$A_1H_4 = 0, \quad A_2H_4 = 0, \quad A_3H_4 = 0, \ldots\ldots \quad (1_3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_1H_n = 0, \quad A_2H_n = 0, \quad A_3H_n = 0, \ldots, A_{n-1}H_n = 0, \quad . \quad (1_{n-1})$$

et les systèmes transformés :

$$B_{11}H_2 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1'_1)$$
$$B_{12}H_3 = 0, \quad B_{22}H_3 = 0, \ldots\ldots\ldots \quad (1'_2)$$
$$B_{13}H_4 = 0, \quad B_{23}H_4 = 0, \quad B_{33}H_4 = 0, \ldots\ldots \quad (1'_3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_{1,n-1}H_n = 0, \quad B_{2,n-1}H_n = 0, \quad B_{3,n-1}H_n = 0, \ldots, B_{n-1,n-1}H_n = 0. \quad (1'_{n-1})$$

Pour effectuer la transformation de Clebsch, nous nous astreindrons aux règles suivantes : 1° Les u seront les mêmes pour le système (1_{i-1}) et le système (1_i), sauf que l'on prendra, pour transformer (1_i), une fonction u_i de plus ; 2° Cette fonction u_i sera une solution du système transformé $(1'_{i-1})$; 3° Les systèmes (1_1), (1_2), $(1_3), \ldots, (1_{n-1})$ n'étant pas indépendants, mais chacun ne différant du précédent que par l'addition d'une équation, pour transformer un système (1_i) quelconque, nous le supposerons remplacé par $(1'_{i-1})$ auquel on ajoute l'équation $A_iH_{i+1} = 0$.

La fonction u_1 est arbitraire ; $u_2, \ldots, u_{n-1}$, sont telles que l'on a :

$$B_{11}u_2 = 0,$$
$$B_{12}u_3 = 0, \quad B_{22}u_3 = 0,$$
$$B_{13}u_4 = 0, \quad B_{23}u_4 = 0, \quad B_{33}u_4 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_{1,n-2}u_{n-1} = 0, \quad B_{2,n-2}u_{n-1} = 0, \quad B_{3,n-2}u_{n-1} = 0, \ldots, B_{n-2,n-2}u_{n-1} = 0. \quad (2)$$

On aura d'ailleurs, comme dans les transformations du paragraphe précédent,

$$\begin{aligned}
&B_{11}u_1 = 1, \quad B_{22}u_2 = 1, \ldots, B_{n-1,n-1}u_{n-1} = 1,\\
&B_{12}u_1 = 1, \quad B_{23}u_2 = 1, \ldots,\\
&B_{13}u_1 = 1, \quad B_{24}u_2 = 1, \ldots,\\
&B_{14}u_1 = 1, \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&B_{1,i-1}u_1 = 1, \quad B_{2,i}u_2 = 1, \ldots \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)
\end{aligned}$$

87. *Transformation de Weiler.* Les formules générales de transformation sont, pour le système (1_i), quand on n'emploie pas la dernière convention du numéro précédent, en faisant $H_{i+1} = z$,

$$\begin{aligned}
A_1 z &= A_1 u_1 \; B_{1i} z + A_1 u_2 \; B_{2i} z + \cdots + A_1 u_{i-1} B_{i-1,i} z + A_1 u_i \; B_{i,i} z,\\
A_2 z &= A_2 u_1 \; B_{1i} z + A_2 u_2 \; B_{2i} z + \cdots + A_2 u_{i-1} B_{i-1,i} z + A_2 u_i \; B_{i,i} z,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{i-1} z &= A_{i-1} u_1 B_{1i} z + A_{i-1} u_2 B_{2i} z + \cdots + A_{i-1} u_{i-1} B_{i-1,i} z + A_{i-1} u_i B_{i,i} z,\\
A_i z &= A_i u_1 \; B_{1i} z + A_i u_2 \; B_{2i} z + \cdots + A_i u_{i-1} B_{i-1,i} z + A_i u_i \; B_{i,i} z. \quad (4)
\end{aligned}$$

Les $(i-1)$ premières de ces relations deviennent :

$$\begin{aligned}
B_{1,i-1} z = {} & B_{1,i-1} u_1 B_{1i} z + B_{1,i-1} u_2 B_{2i} z + \cdots\\
& + B_{1,i-1} u_{i-1} B_{i-1,i} z + B_{1,i-1} u_i B_{i,i} z,\\
B_{2,i-1} z = {} & B_{2,i-1} u_1 B_{1i} z + B_{2,i-1} u_2 B_{2i} z + \cdots\\
& + B_{2,i-1} u_{i-1} B_{i-1,i} z + B_{2,i-1} u_i B_{i,i} z,\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
B_{i-1,i-1} z = {} & B_{i-1,i-1} u_1 B_{1i} z + B_{i-1,i-1} u_2 B_{2i} z + \cdots\\
& + B_{i-1,i-1} u_{i-1} B_{i-1,i} z + B_{i-1,i-1} u_i B_{i,i} z;
\end{aligned}$$

si nous y introduisons la dernière convention (n° 86, 3°). Les conventions relatives aux u donnent ensuite, d'après les relations (2) et (3),

$$\begin{aligned}
&B_{1,i-1} z = B_{1,i} z,\\
&B_{2,i-1} z = B_{2,i} z,\\
&\ldots\ldots\\
&B_{i-2,i-1} z = B_{i-2,i} z,\\
&B_{i-1,i-1} z = B_{i-1,i} z + B_{i-1,i-1} u_i B_{i,i} z \ldots\ldots\ldots \quad (5)
\end{aligned}$$

Donc le système $(1'_i)$ est le système $(1'_{i-1})$, dont on a retranché la dernière équation, et auquel on ajoute deux nouvelles relations $B_{i-1,i}z = 0$, $B_{i-1}z = 0$, déterminées par les équations (4) et (5).

On peut donc représenter comme suit le système transformé :

$$\begin{array}{lllll}
C_1H_2 = 0, & & & & \\
D_1H_3 = 0, & C_2H_3 = 0, & & & \\
D_1H_4 = 0, & D_2H_4 = 0, & C_3H_4 = 0, & & \\
D_1H_5 = 0, & D_2H_5 = 0, & D_3H_5 = 0, & C_4H_5 = 0, & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
D_1H_{n-1} = 0, & D_2H_{n-1} = 0, \ldots, & C_{n-2}H_{n-1} = 0, & & \\
D_1H_n = 0, & D_2H_n = 0, \ldots, & D_{n-2}H_n = 0, & C_{n-1}H_n = 0. &
\end{array}$$

Les opérations désignées ici par C et D sont déterminées par les équations :

$$C_{i-1}F = D_{i-1}F + C_{i-1}u_iC_iF,$$

$$A_iF = A_iu_1 . D_1F + \cdots + A_iu_{i-1}D_{i-1}F + A_iu_iC_iF.$$

Au lieu du nombre d'intégrations indiquées au n° 77, il suffit, par la méthode de Clebsch et de Weiler, de chercher *une* intégrale

de 1 équation différentielle d'ordre $2n - 2$ pour trouver H_2,
de 2 équations différentielles d'ordre $2n - 4$ » » H_3,
de 2 » » » $2n - 6$ » » H_4,
. . . .
de 2 équations différentielles d'ordre 2 pour trouver H_n.

Toutefois il importe de remarquer que la simplification ne sera aussi grande que si les nombres analogues à r dans le paragraphe précédent ont toujours leur valeur maxima. Dans le cas contraire, la simplification s'arrête parce que l'on ne trouve plus des fonctions u en nombre suffisant pour l'effectuer complétement.

CHAPITRE V.

MÉTHODE DE KORKINE ET DE BOOLE.

[§ 24. *Méthode de Korkine* (*).

88. *Idée générale de la méthode de Korkine.* Dans la méthode de Clebsch et de Weiler, comme dans celle de Jacobi et de Bour, les systèmes d'équations simultanées sont traités absolument de la même manière qu'une équation unique, à laquelle on serait parvenu d'adjoindre, par bonheur, sans calcul, des relations entre les variables x, les dérivées partielles p, et des constantes arbitraires. Il n'y a aucune différence entre l'intégration d'un système d'équations simultanées et l'achèvement de l'intégration commencée d'une équation unique.

Dans les méthodes de Korkine, de Boole et de Mayer que nous exposons dans ce chapitre et le suivant, on part encore des idées de Jacobi, mais de plus, on élimine une variable, chaque fois que l'on parvient à intégrer une des équations simultanées. La méthode de Korkine s'applique aux équations quelconques, celle de Boole aux équations linéaires générales, celle de Mayer également, et de plus, spécialement aux équations linéaires auxquelles conduit la méthode de Jacobi. La méthode de Mayer contient en outre une autre idée, empruntée à la méthode de Cauchy, savoir, celle de l'introduction des valeurs initiales des variables, comme constantes.

(*) Korkine, Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. LXVIII, pp. 1460-1464, 1869, 1er semestre. Nous supposons que l'on fait disparaître la variable z des diverses équations, ce qui simplifie considérablement les calculs. La méthode de Korkine est la seconde méthode d'abaissement de Bour, comme il le dit lui-même. Le § 24 tout entier a été ajouté au Mémoire primitif, en 1874.

Voici en quoi consiste la méthode générale de Korkine. Soient

$$f_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_1, \ldots \ldots \ldots (1_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_m(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_m, \ldots \ldots \ldots (1_m)$$

m équations simultanées qui satisfont identiquement, pour les valeurs de i et k, non supérieures à m, à la condition

$$(f_i, f_k) = 0 \quad \text{ou} \quad \sum \begin{vmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x}, & \frac{\partial f_k}{\partial x} \\ \frac{\partial f_i}{\partial p}, & \frac{\partial f_k}{\partial p} \end{vmatrix} = 0. \ldots \ldots \ldots (2)$$

Intégrons l'une des équations (1), par exemple (1_m), et soit

$$z + u = \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}), \ldots \ldots \ldots (3)$$

l'intégrale complète trouvée, $u, y_1, \ldots, y_{n-1}$ étant les constantes arbitraires. On sait, par le n° 15, que u accompagne z, comme nous le supposons ici. La relation (3) donne :

$$p_1 = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1}, \ldots, p_n = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_m} \ldots \ldots \ldots (4)$$

Si l'on suppose que u soit une certaine fonction des quantités y, on déduira de l'intégrale complète (3) une intégrale générale, si l'on y adjoint les relations,

$$q_1 = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_1}, \ldots, q_{n-1} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_{n-1}}; \ldots \ldots \ldots (5)$$

où

$$q_1 = \frac{du}{dy_1}, \ldots, q_{n-1} = \frac{du}{dy_{n-1}}.$$

Dans la méthode de Korkine, on se propose de déterminer la forme de la fonction u en $y_1, \ldots, y_{n-1}$, de manière que l'intégrale générale de (1_m) dont nous venons de parler, satisfasse aussi aux autres équations $(1_1), \ldots, (1_{m-1})$ du système. Pour cela, déduisons des équations (4) et (5) les valeurs de

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, p_1, \ldots, p_n,$$

en fonction de

$$y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, x_n, q_1, \ldots, q_{n-1},$$

et substituons-les dans les équations (1). La dernière deviendra une identité, puisque les équations (3), (4) et (5) donnent une intégrale générale de (1_m). Les autres se transformeront en un système de $(m-1)$ équations simultanées entre $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$; $q_1, \ldots, q_{m-1}$, jouissant des deux propriétés suivantes (*) :

1° Elles ne contiendront plus la variable x_n;

2° Elles satisferont à des conditions d'intégrabilité analogues à l'équation (2), par rapport aux quantités y et q.

On déduira de ce nouveau système de $(m-1)$ équations contenant $(n-1)$ variables indépendantes, un troisième système qui contiendra une équation et une variable de moins, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à une équation unique contenant $(n-m)$ variables indépendantes.

La méthode générale se simplifie un peu, quand quelques-unes des quantités p manquent dans l'équation $f_n = 0$.

89. *Démonstration de la première propriété du système transformé* (**). Soit, après l'élimination de $x_1, \ldots, x_{n-1}, p_1, \ldots, p_n$,

$$\varphi(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n, q_1, \ldots, q_{n-1}) = f_i\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right).$$

On aura :

$$\frac{df_i}{dx_1}\frac{dx_1}{dx_n} + \cdots + \frac{df_i}{dx_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dx_n} + \frac{df_i}{dx_n} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = 0.$$

(*) Toutes les méthodes où l'on procède par élimination conduisent à des propriétés semblables. On en a déjà vu un exemple à propos de la méthode de Pfaff (n° 43). Les recherches de Lie rendront probablement inutiles toutes les démonstrations analytiques des théorèmes de ce genre.

(**) Korkine énonce les propriétés en question sans les démontrer.

De même, des équations (5), on tire

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial x_1}\frac{dx_1}{dx_n} + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial x_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dx_n} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial x_n} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_{n-1} \partial x_1}\frac{dx_1}{dx_n} + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial y_{n-1} \partial x_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dx_n} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_{n-1} \partial x_n} = 0.$$

L'élimination de $\frac{dx_1}{dx_n}, \cdots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n}$, entre ces équations, conduit à la relation

$$\begin{vmatrix} \dfrac{df_i}{dx_1}, & \cdots, & \dfrac{df_i}{dx_{n-1}}, & \dfrac{df_i}{dx_n} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial x_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial x_{n-1}}, & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_{n-1} \partial x_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_{n-1} \partial x_{n-1}}, & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_{n-1} \partial x_n} \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions les colonnes de ce déterminant, respectivement par

$$\frac{\partial f_m}{\partial p_1}, \frac{\partial f_m}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial p_n},$$

et ajoutons-les à la dernière; remarquons, en outre, que

$$\frac{\partial f_m}{\partial p_1}\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial p_n}\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial x_n} = 0,$$

$$\frac{\partial f_m}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dy_i} + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial p_n}\frac{dp_n}{dy_i} = 0,$$

puisque f_m est identiquement nul, après substitution des valeurs (4) des quantités p, et posons :

$$U = \frac{df_i}{dx_1}\frac{\partial f_m}{dp_1} + \cdots + \frac{df_i}{dx_n}\frac{\partial f_m}{\partial p_n};$$

il viendra

$$\begin{vmatrix} \dfrac{df_i}{dx_1}, & \ldots, & \dfrac{df_i}{dx_{n-1}}, & U - \dfrac{\delta\varphi}{\delta x_n} \\ \dfrac{\delta^2 F}{\delta y_1 \delta x_1}, & \ldots, & \dfrac{\delta^2 F}{\delta y_1 \delta x_{n-1}}, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\delta^2 F}{\delta y_{n-1} \delta x_1}, & \ldots, & \dfrac{\delta^2 F}{\delta y_{n-1} \delta x_{n-1}}, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

D'où, chaque fois que le déterminant

$$D \frac{q_1, \ldots, q_{n-1}}{x_1, \ldots, x_{n-1}}$$

ne sera pas nul, ce qui est évidemment le cas général,

$$U = \frac{\delta\varphi}{\delta x_n}.$$

Or, U est nul d'après l'équation

$$(f_i, f_m) = 0,$$

comme on va le voir. En effet, on a :

$$\frac{\delta f_m}{\delta x_k} = -\sum_{l=1}^{l=n} \frac{\delta f_m}{\delta p_l} \frac{\delta^2 F}{\delta x_l \delta x_k}.$$

Par conséquent,

$$0 = (f_i, f_m) = \sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} \dfrac{\delta f_i}{\delta x_k}, & \dfrac{\delta f_m}{\delta x_k} \\ \dfrac{\delta f_i}{\delta p_k}, & \dfrac{\delta f_m}{\delta p_k} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} \dfrac{\delta f_i}{\delta x_k}, & -\left(\dfrac{\delta f_m}{\delta p_1} \dfrac{\delta^2 F}{\delta x_1 \delta x_k} + \cdots + \dfrac{\delta f_m}{\delta p_n} \dfrac{\delta^2 F}{\delta x_n \delta x_k}\right). \\ \dfrac{\delta f_i}{\delta p_k}, & \dfrac{\delta f_m}{\delta p_k}, \end{vmatrix}$$

Ordonnons la somme du second membre par rapport à

$$\frac{\partial f_m}{\partial p_1}, \frac{\partial f_m}{\partial p_2}, \ldots,$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{\partial f_m}{\partial p_1}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \frac{\partial f_i}{\partial p_1}\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial p_n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1}\right) +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{\partial f_m}{\partial p_n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n} + \frac{\partial f_i}{\partial p_1}\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial p_n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}\right) = 0,$$

ou, en abrégé,

$$\frac{\partial f_m}{\partial p_1}\frac{df_i}{dx_1} + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial p_n}\frac{df_i}{dx_n} = 0,$$

c'est-à-dire

$$U = 0.$$

Donc enfin, on a aussi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0,$$

c'est-à-dire que les équations transformées ne contiennent plus x_n.

90. *Démonstration de la seconde propriété du système transformé.* Considérons deux des fonctions f, par exemple, f_1 et f_2 et soit posé, pour plus de facilité, après élimination des x, au moyen des relations qui donnent les quantités q,

$$f_1\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = \varphi(y_1, \ldots, y_{n-1}, q_1, \ldots, q_{n-1}),$$
$$f_2\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = \psi(y_1, \ldots, y_{n-1}, q_1, \ldots, q_{n-1}).$$

En remplaçant dans le second membre de ces égalités les quantités q, par leur valeur, on obtiendra les identités suivantes :

$$f_1\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = \varphi\left(y_1, \ldots, y_{n-1}, \frac{\partial F}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial y_{n-1}}\right), \quad (6_1)$$
$$f_2\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = \psi\left(y_1, \ldots, y_{n-1}, \frac{\partial F}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial y_{n-1}}\right). \quad (6_2)$$

On déduit immédiatement de ces identités, en dérivant par rapport à une quelconque des variables y :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial y}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial q_{n-1}}\frac{\partial q_{n-1}}{\partial y}\right)+\frac{\partial f_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial y}+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=-\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial y}+\cdots+\frac{\partial\psi}{\partial q_{n-1}}\frac{\partial q_{n-1}}{\partial y}\right)+\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial y}+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial y}.$$

Par suite, dans l'expression

$$(\varphi,\psi)=\sum\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_i}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial y_i}\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial q_i}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial q_i}\end{vmatrix}$$

entre, avec le signe —, la somme suivante de déterminants :

$$\sum_{i=1}^{i=n-1}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_1}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y_1\partial y_i}+\cdots+\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_{n-1}}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y_{n-1}\partial y_i}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial q_i}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial q_1}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y_1\partial y_i}+\cdots+\dfrac{\partial\psi}{\partial q_{n-1}}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y_{n-1}\partial y_i}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial q_i}\end{vmatrix}.$$

Or cette somme est nulle, car la quantité

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_k\partial y_i}$$

est multipliée par

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_k},$$

dans le déterminant correspondant à l'indice i; mais la quantité

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_i\partial y_k}$$

est multipliée par

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_k}-\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_i},$$

dans le déterminant correspondant à l'indice k. Donc tous les termes se détruisent deux à deux.

Il résulte de là que la quantité (φ, ψ) est égale simplement à

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \begin{vmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta p_1}\frac{\delta p_1}{\delta y_i} + \cdots + \frac{\delta f_1}{\delta p_n}\frac{\delta p_n}{\delta y_i}, & \frac{\delta \varphi}{\delta q_i} \\ \frac{\delta f_2}{\delta p_1}\frac{\delta p_1}{\delta y_i} + \cdots + \frac{\delta f_2}{\delta p_n}\frac{\delta p_n}{\delta y_i}, & \frac{\delta \psi}{\delta q_i} \end{vmatrix}$$

Pour démontrer le second théorème de Korkine, il suffit de montrer que cette expression, que nous représentons en abrégé, par

$$\sum \begin{vmatrix} f'_{1i}, & \frac{\delta \varphi}{\delta q_i} \\ f'_{2i}, & \frac{\delta \psi}{\delta q_i} \end{vmatrix},$$

est nulle.

Pour cela, il faut trouver $\frac{\delta \varphi}{\delta q_i}$, $\frac{\delta \psi}{\delta q_i}$, et exprimer, en outre, que la substitution est telle que f_1 et f_2, après la transformation, ne contiennent plus x_n.

Pour trouver $\frac{\delta \varphi}{\delta q_1}$, dérivons par rapport à q les valeurs des fonctions $\varphi, p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_{n-1}$, comme suit :

$$\frac{\delta \varphi}{\delta q_1} = \frac{\delta f_1}{\delta x_1}\frac{dx_1}{dq_1} + \cdots + \frac{\delta f_1}{\delta x_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dq_1} + \frac{\delta f_1}{\delta p_1}\frac{dp_1}{dq_1} + \cdots + \frac{\delta f_1}{\delta p_n}\frac{dp_n}{dq_1},$$

$$0 = \frac{\delta p_1}{\delta x_1}\frac{dx_1}{dq_1} + \cdots + \frac{\delta p_1}{\delta x_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dq_1} - \frac{dp_1}{dq_1},$$

. . . .

$$0 = \frac{\delta p_n}{\delta x_1}\frac{dx_1}{dq_1} + \cdots + \frac{\delta p_n}{\delta x_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dq_1} - \frac{dp_n}{dq_1},$$

$$1 = \frac{\delta q_1}{\delta x_1}\frac{dx_1}{dq_1} + \cdots + \frac{\delta q_1}{\delta x_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dq_1},$$

$$0 = \frac{\delta q_2}{\delta x_1}\frac{dx_1}{dq_1} + \cdots + \frac{\delta q_2}{\delta x_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dq_1},$$

. . . .

$$0 = \frac{\delta q_{n-1}}{\delta x_1}\frac{dx_1}{dq_1} + \cdots + \frac{\delta q_{n-1}}{\delta x_{n-1}}\frac{dx_{n-1}}{dq_1}.$$

On déduit de là, par élimination des dérivées des x et des p, par rapport à q_1,

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & ,\dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}}, & \frac{\partial f_1}{\partial p_1},\dots, & \frac{\partial f_1}{\partial p_n} \\
0, & \frac{\partial p_1}{\partial x_1} & ,\dots, & \frac{\partial p_1}{\partial x_{n-1}}, & -1,\dots, & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0, & \frac{\partial p_n}{\partial x_1} & ,\dots, & \frac{\partial p_n}{\partial x_{n-1}}, & 0,\dots, & -1 \\
1, & \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & ,\dots, & \frac{\partial q_n}{\partial x_{n-1}}, & 0,\dots, & 0 \\
0, & \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & ,\dots, & \frac{\partial q_2}{\partial x_{n-1}}, & 0,\dots, & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0, & \frac{\partial q_{n-1}}{\partial x_1} & ,\dots, & \frac{\partial q_{n-1}}{\partial x_{n-1}}, & 0,\dots, & 0
\end{vmatrix} = 0.$$

En multipliant la première colonne par f'_{21}, puis ajoutant tous les déterminants semblables, obtenus en remplaçant $\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}$, par $\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}$, ..., on trouve un nouveau déterminant nul et ne différant du précédent qu'en ce que la première colonne est

$$\begin{array}{c}
\sum \frac{\partial\varphi}{\partial q_i} f'_{2i}, \\
0, \\
\vdots \\
0, \\
\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial y_1}, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial y_{n-1}} + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial y_{n-1}},
\end{array}$$

tandis que les autres colonnes restent les mêmes.

Multipliant les lignes du déterminant ainsi obtenu, à partir de la seconde, respectivement par

$$\frac{\partial f_1}{\partial p_1},\dots,\frac{\partial f_1}{\partial p_n},\ -\frac{\partial\varphi}{\partial q_1},\dots,-\frac{\partial\varphi}{\partial q_{n-1}},$$

puis ajoutons-les à la première ligne; celle-ci, à cause de l'équation suivante, déduite de (6_1),

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\frac{\partial f_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial x_i}\\ &=\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial \varphi}{\partial q_{n-1}}\frac{\partial q_{n-1}}{\partial x_i}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots (7)$$

n'aura que son premier élément non identiquement nul. Cet élément sera

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}f'_{2i}\\ &-\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial y_1}+\cdots+\frac{\partial f_2}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial y_1}\right)\right.\\ &\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\left.+\frac{\partial\varphi}{\partial q_{n-1}}\left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial y_{n-1}}+\cdots+\frac{\partial f_2}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial y_{n-1}}\right)\right\}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots (8)$$

A cause de

$$\frac{\partial p_i}{\partial y_k}=\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial y_k}=\frac{\partial q_k}{\partial x_i},$$

la partie de cet élément précédée du signe —, peut s'écrire

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial q_{n-1}}\frac{\partial q_{n-1}}{\partial x_1}\right)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{\partial f_2}{\partial p_n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x_n}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial x_n}\right).\end{aligned}$$

L'équation (7) nous donne encore, au lieu de cette expression,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial x_1}\right)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{\partial f_2}{\partial p_n}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}+\frac{\partial f_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_n}+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial x_n}\right).\end{aligned}$$

Le déterminant dont l'expression (8) est le premier élément, étant nul, et les autres éléments de sa première ligne étant des quantités nulles, ce premier élément doit être nul lui-même. Donc enfin,

$$\sum_1^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} f'_{2i} = \sum_1^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial p_i} + \sum_1^n \sum_1^n \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial p_k} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}.$$

On trouvera de même :

$$\sum_1^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} f'_{1i} = \sum_1^n \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \frac{\partial f_1}{\partial p_i} + \sum_1^n \sum_1^n \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial p_k} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Soustrayant la première de ces égalités de la seconde, il vient

$$(\varphi, \psi) = -(f_1, f_2) = 0,$$

ce qui constitue la seconde propriété du système transformé.

On remarquera que nous n'avons pas exprimé explicitement que f_1 et f_2, ne contiennent plus x_n après la transformation. Mais on le suppose implicitement, en employant les équations (6) (*)].

§ 25. *Équations linéaires. Méthode de Boole* (**).

91. *Forme spéciale des équations linéaires et de leurs conditions d'intégrabilité* (***). Soient à considérer m équations linéaires :

$$H_1 = b_{11}p_1 + b_{12}p_2 + \cdots + b_{1,N}p_N = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$H_m = b_{m1}p_1 + b_{m2}p_2 + \cdots + b_{m,N}p_N = 0,$$

(*) Korkine conclut de ces deux théorèmes que le système donné à une solution, avec $(n + 1 - m)$ constantes. La réciproque est plus facile à démontrer, en s'appuyant sur la théorie de Jacobi et de Bour, comme il est facile de le voir. Dans cet ordre d'idées, les grandes et pénibles démonstrations que nous donnons ici deviennent inutiles.

(**) Boole, Treatise, etc., Supplément, ch. XXIV, pp. 68-69; ch. XXV, pp. 74-89. Collet, Annales de l'école normale, t. VII, pp. 47-57.

(***) Voir sur ce sujet, outre les précédents, Imschenetsky, § 24, pp. 136-141. Ni cet auteur, ni Graindorge n'exposent la méthode de Boole.

où entrent $(m + n) = N$ variables indépendantes,

$$x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_N,$$

et les dérivées de z par rapport à ces variables,

$$p_1, p_2, \ldots, p_m, p_{m+1}, \ldots, p_N.$$

Nous pouvons déduire des équations données m autres relations dont chacune contiendra une seule des m premières dérivées. Pour plus de symétrie nous représenterons les variables

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_N,$$

par

$$y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

et les dérivées correspondantes par

$$q_1, q_2, \ldots, q_n.$$

Cela posé, les m nouvelles équations seront de la forme :

$$\begin{aligned}
A_1 z &= p_1 + a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + \cdots + a_{1,n} q_n = 0, \\
A_2 z &= p_2 + a_{21} q_1 + a_{22} q_2 + \cdots + a_{2,n} q_n = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_m z &= p_m + a_{m,1} q_1 + a_{m,2} q_2 + \cdots + a_{m,n} q_n = 0.
\end{aligned}$$

Les conditions d'intégrabilité, comme on le sait, par le § 17, sont toutes de la forme

$$(A_i A_k - A_k A_i)\, z = 0,$$

ou encore, en développant :

$$q_1 (A_i a_{k1} - A_k a_{i1}) + q_2 (A_i a_{k2} - A_k a_{i2}) + \cdots + q_n (A_i a_{kn} - A_k a_{in}) = 0.$$

Il sera facile, au moyen de cette formule, de chercher les conditions d'intégrabilité et de compléter le système des équations données, jusqu'à ce qu'il ait pris une forme telle que l'on puisse y appliquer la méthode d'intégration de Jacobi et de Bour.

92. *Transformation des équations linéaires* (*). Prenons de nouvelles variables indépendantes

$$u_1, u_2, \ldots, u_N.$$

On aura

$$p_1 = \frac{dz}{du_1}\frac{du_1}{dx_1} + \cdots + \frac{dz}{du_N}\frac{du_N}{dx_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_m = \frac{dz}{du_1}\frac{du_1}{dx_m} + \cdots + \frac{dz}{du_N}\frac{du_N}{dx_m},$$

$$q_1 = \frac{dz}{du_1}\frac{du_1}{dy_1} + \cdots + \frac{dz}{du_N}\frac{du_N}{dy_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_n = \frac{dz}{du_1}\frac{du_1}{dy_n} + \cdots + \frac{dz}{du_N}\frac{du_N}{dy_n}.$$

Substituons ces valeurs dans les équations $Az = 0$, elles deviendront :

$$A_1 z = (A_1 u_1)\frac{dz}{du_1} + \cdots + (A_1 u_N)\frac{dz}{du_N} = 0,$$

$$A_2 z = (A_2 u_1)\frac{dz}{du_1} + \cdots + (A_2 u_N)\frac{dz}{du_N} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_m z = (A_m u_1)\frac{dz}{du_1} + \cdots + (A_m u_N)\frac{dz}{du_N} = 0.$$

On peut simplifier ces équations et leur rendre la forme des équations $Az = 0$, en posant :

$$u = x_1,\ u_2 = x_2, \ldots,\ u_m = x_m,\ u_{m+1} = v_1,\ u_{m+2} = v_2, \ldots,\ u_N = v_n.$$

(*) On pourrait démontrer que le système transformé satisfait aux conditions d'intégrabilité ; mais la chose est inutile (voir la note de la fin du numéro 90), d'autant plus que la méthode même suppose l'existence d'une solution z contenant $(n+1)$ constantes arbitraires.

Les équations transformées, à cause des relations :

$$A_1x_1 = 1,\quad A_1x_2 = 0, \ldots, A_1x_m = 0,$$
$$A_2x_1 = 0,\quad A_1x_2 = 1, \ldots, A_2x_m = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_mx_1 = 0,\quad A_mx_2 = 0, \ldots, A_mx_m = 1,$$

deviennent :

$$A_1z = \left(\frac{dz}{dx_1}\right) + (A_1v_1)\frac{dz}{dv_1} + \cdots + (A_1v_n)\frac{dz}{dv_n} = 0,$$
$$A_2z = \left(\frac{dz}{dx_2}\right) + (A_2v_1)\frac{dz}{dv_1} + \cdots + (A_2v_n)\frac{dz}{dv_n} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_mz = \left(\frac{dz}{dx_m}\right) + (A_mv_1)\frac{dz}{dv_1} + \cdots + (A_mv_n)\frac{dz}{dv_n} = 0\ (^*).$$

Il est facile de faire en sorte que les $(m - 1)$ dernières de ces équations ne contiennent plus explicitement x_1. Supposons que

$$v_1, v_2, \ldots, v_n$$

constituent avec $x_2, x_3, \ldots, x_m$, les $(m + n - 1)$ solutions distinctes de la première équation $A_1z = 0$, de telle sorte que

$$A_1v_1 = 0,\quad A_1v_2 = 0, \ldots, A_1v_n = 0.$$

L'un quelconque des coefficients des $(m - 1)$ dernières équations, A_2v_1 par exemple, sera une solution de $A_1z = 0$; car, d'après le théorème de Jacobi :

$$A_1A_2v_1 = A_2A_1v = A_20 = 0.$$

(*) Nous avons employé des parenthèses pour indiquer qu'il y a une différence entre les p et les $\frac{dz}{dx}$ qui entrent dans les équations dont nous nous occupons ici. Si z était exprimé au moyen de $x_1, x_2, \ldots, x_m, v_1, v_2, \ldots, v_n$, on aurait

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\partial z}{\partial x},$$

suivant les notations que nous avons adoptées.

Donc $A_2 v$ est une fonction des solutions $x_2, x_3, \ldots, x_m, v_1, \ldots, v_n$.

La première équation se réduit dans le cas actuel à

$$\left(\frac{dz}{dx_1}\right) = 0,$$

ce qui prouve que le changement de variable a fait disparaître explicitement x, de la valeur de z.

Il résulte de ce qui précède que la substitution des variables

$$x_1, x_2, \ldots, x_m, v_1, v_2, \ldots, v_n,$$

à

$$x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

transforme le système donné des m équations à $(m + n)$ variables, en un système équivalent de $(m - 1)$ équations à $(m - 1 + n)$ variables et de même forme.

On pourra effectuer une transformation semblable sur le nouveau système et de proche en proche arriver à une seule équation linéaire à $(n + 1)$ variables.

93. *Exemple* (*). Soit proposé d'intégrer le système suivant :

$$2x_2x_4^2 \frac{dv}{dx_1} + x_3^2 x_4 \frac{dv}{dx_4} - x_3^2 v = 0,$$

$$2x_2 \frac{dv}{dx_2} - x_4 \frac{dv}{dx_4} - v = 0,$$

$$x_2 x_4^2 \frac{dv}{dx_3} + x_1 x_3 x_4 \frac{dv}{dx_4} - x_1 x_3 v = 0.$$

(*) Collet, Annales de l'école normale, etc., § 10, pp. 53-57. Les équations ne sont pas homogènes par rapport aux quantités p comme dans la théorie générale, mais il est clair que cette circonstance ne complique en rien les calculs.

Méthode générale. Posons $v = e^z$, ce qui fera disparaître v de l'équation; on aura :

$$H_1 = 2x_2x_4^2p_1 + x_3^2x_4p_4 - x_3^2 = 0,$$
$$H_2 = 2x_2p_2 - x_4p_4 - 1 = 0,$$
$$H_3 = x_2x_4^2p_3 + x_1x_3x_4p_4 - x_1x_3 = 0.$$

On trouve aisément :

$$(H_1, H_2) = 0, \quad (H_2, H_3) = 0, \quad (H_3, H_1) = 0.$$

On tire des équations données :

$$p_1 = -\frac{x_3^2}{2x_2x_4}p_4 + \frac{x_3^2}{2x_2x_4^2},$$
$$p_2 = \quad \frac{x_4}{2x_2}p_4 + \frac{1}{2x_2},$$
$$p_3 = -\frac{x_1x_3}{x_2x_4}p_4 + \frac{x_1x_3}{x_2x_4^2}.$$

Les équations auxiliaires

$$(p_1 - \psi_1, f) = 0, \quad (p_2 - \psi_2, f) = 0, \quad (p_3 - \psi_3, f) = 0,$$

sont :

$$\frac{\delta f}{\delta x_1} + \frac{x_3^2}{2x_2x_4}\frac{\delta f}{\delta x_4} + \frac{x_3^2}{2x_2x_4^3}(x_4p_4 - 2)\frac{\delta f}{\delta p_4} = 0,$$
$$\frac{\delta f}{\delta x_2} - \frac{x_4}{2x_2}\frac{\delta f}{\delta x_4} + \frac{p_4}{2x_2}\frac{\delta f}{\delta p_4} = 0,$$
$$\frac{\delta f}{\delta x_3} + \frac{x_1x_3}{x_2x_4}\frac{\delta f}{\delta x_4} + \frac{x_1x_3}{x_2x_4^3}(x_4p_4 - 2)\frac{\delta f}{\delta p_4} = 0.$$

La seconde de ces équations admet la solution.

$$\theta_1 = p_4x_4.$$

En substituant cette valeur dans le premier membre de la troisième équation à la place de f, on trouve une autre solution :

$$\theta_2 = \frac{2x_1x_3}{x_2x_4^2}(x_4p_4 - 1).$$

Faisant la même chose avec θ_2, on trouve une troisième solution

$$\theta_3 = \frac{2x_1}{x_2x_4^2}(x_4p_4 - 1) = \frac{\theta_2}{x_3}.$$

Une fonction $\theta\,(x_3, \theta_1, \theta_2)$ sera aussi une solution de la seconde équation; pour satisfaire à la troisième, il faudra que l'on ait :

$$\frac{d\theta}{dx_3} + \frac{d\theta}{d\theta_1}\theta_2 + \frac{d\theta}{d\theta_2}\theta_3 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\theta}{dx_3} + \frac{d\theta}{d\theta_1}\theta_2 + \frac{d\theta}{d\theta_2}\frac{\theta_2}{x_3} = 0.$$

Cette équation a pour solution :

$$\theta_1' = \frac{\theta_2}{x_3} = \theta_3 = \frac{2x_1(x_4p_4 - 1)}{x_2x_4^2}.$$

On trouve une autre solution commune, en portant cette valeur θ_1' dans la première des équations auxiliaires. Il vient $\theta_2' = \theta_1' : x_1$. Une fonction $\theta\,(x_1, \theta_1')$ sera une solution des trois équations, si l'on a :

$$\frac{d\theta}{dx_1} + \frac{d\theta}{d\theta_1'}\frac{\theta_1'}{x_1} = 0.$$

Donc enfin la solution commune sera

$$\frac{\theta_1'}{x_1} = 4a = \frac{2(x_4p_4 - 1)}{x_2x_4^2}.$$

On trouve alors :

$$p_1 = -ax_3^2, \quad p_2 = \frac{1}{x_2} + ax_4^2, \quad p_3 = -2ax_1x_3, \quad p_4 = \frac{1}{x_4} + 2ax_2x_4,$$

$$z = \mathrm{l}b + a(x_2x_4^2 - x_1x_3^2) + \mathrm{l}x_2x_4,$$

$$v = bx_2x_4e^{a(x_2x_4^2 - x_1x_3^2)}.$$

Méthode de Boole. Soit $z = 0$, la solution commune des équations données. On aura, d'après la transformation du n° 2, au lieu des équations données, en faisant $v = x_5$,

$$A_1 z = 2x_2 x_4^2 \frac{dz}{dx_1} + x_3^2 x_4 \frac{dz}{dx_4} + x_3^2 x_5 \frac{dz}{dx_5} = 0,$$

$$A_2 z = 2x_2 \frac{dz}{dx_2} - x_4 \frac{dz}{dx_4} + x_5 \frac{dz}{dx_5} = 0,$$

$$A_3 z = x_2 x_4^2 \frac{dz}{dx_3} + x_1 x_3 x_4 \frac{dz}{dx_4} + x_1 x_3 x_5 \frac{dz}{dx_5} = 0.$$

La première de ces équations a pour solutions :

$$u_1 = \frac{x_5}{x_4},\ u_2 = x_2,\ u_3 = x_3,\ u_4 = \frac{x_2 x_4^2 - x_1 x_3^2}{x_2}.$$

Prenons pour nouvelles variables x_1, u_1, u_2, u_3, u_4, et le système se réduira aux deux équations :

$$(A_2 x_1)\frac{dz}{dx_1} + (A_2 u_1)\frac{dz}{du_1} + (A_2 u_2)\frac{dz}{du_2} + (A_2 u_3)\frac{dz}{du_3} + (A_2 u_4)\frac{dz}{du_4} = 0,$$

$$(A_3 x_1)\frac{dz}{dx_1} + (A_3 u_1)\frac{dz}{du_1} + (A_3 u_2)\frac{dz}{du_2} + (A_3 u_3)\frac{dz}{du_3} + (A_3 u_4)\frac{dz}{du_4} = 0.$$

Mais on a :

$$A_2 x_1 = 0,\ A_2 u_1 = 2u_1,\ A_2 u_2 = 2x_2,\ A_2 u_3 = 0,\qquad A_2 u_4 = -2u_4,$$

$$A_3 x_1 = 0,\ A_3 u_1 = 0,\quad A_3 u_2 = 0,\quad A_3 u_3 = x_2 x_4^2,\ A_3 u_4 = 0.$$

Le système devient donc :

$$u_1 \frac{dz}{du_1} + x_2 \frac{dz}{dx_2} - u_4 \frac{dz}{du_4} = 0,\quad \frac{du}{dx_3} = 0.$$

On trouve comme solutions distinctes de la première, les fonctions

$$z_1 = \frac{u_1}{x_2},\quad z_2 = x_2 u_4,$$

qui satisfont aussi à la seconde. Il en sera de même de

$$\frac{u_1}{x_2} = F\,(x_2 u_4),$$

qui donne l'intégrale la plus générale du système des équations données, savoir :

$$x_5 \text{ ou } v = x_2 x_4 \, F\,(x_2 x_4^2 - x_1 x_3^2).$$

Ce résultat s'accorde avec celui qui est donné par la méthode générale (*).

(*) Collet (Annales de l'école norm., p. 57) traite encore les exemples suivants :

1°
$$(x_4^2 - x_3^2)\frac{dz}{dx_1} - (x_1 x_3 - x_2 x_4)\frac{dz}{dx_3} + (x_2 x_3 - x_1 x_4)\frac{dz}{dx_4} = 0,$$
$$(x_4^2 - x_3^2)\frac{dz}{dx_2} + (x_2 x_3 - x_1 x_4)\frac{dz}{dx_3} + (x_1 x_3 - x_2 x_4)\frac{dz}{dx_4} = 0.$$

Intégrale générale :

$$z = F\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad x_1 x_2 + x_3 x_4).$$

2°
$$x_1 \frac{dz}{dx_1} - x_2 \frac{dz}{dx_2} + x_2 \frac{dz}{dx_3} - x_4 \frac{dz}{dx_4} = 0,$$
$$x_3 \frac{dz}{dx_1} + x_4 \frac{dz}{dx_2} - x_1 \frac{dz}{dx_3} - x_2 \frac{dz}{dx_4} = 0.$$

Intégrale générale :

$$z = F\left[(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_4^2), \frac{x_1 x_2 + x_3 x_4}{x_2 x_3 - x_1 x_4}\right].$$

Imschenetsky, n° 108, p. 138-141, traite les équations suivantes :

$$p_1 + (x_4 + x_1 x_2 + x_1 x_3)\,p_3 + (x_2 + x_3 - 3x_1)\,p_4 = 0,$$
$$p_2 + (x_1 x_3 x_4 + x_2 - x_1 x_2)\,p_3 + (x_3 x_4 - x_2)\,p_4 = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$z = F\left(x_3 - x_1^3 - x_1 x_4 - \frac{x_2^2}{2}\right).$$

Graindorge, n° 84, pp. 85-87, donne l'exemple suivant :

$$2x_5 p_4 + x_1^2 p_5 = 0,$$
$$x_1^2 p_1 - 2x_5 p_2 + (x_1^2 x_4 - 2x_5)\,p_3 - 2x_1 x_4 p_4 = 0.$$

Intégrale complète :

$$2z + a x_1^2 x_4 - a x_5^2 + b = 0.$$

Il donne aussi, n° 85, pp. 87-89, l'exemple d'Imschenetsky.

CHAPITRE VI.

MÉTHODE DE MAYER POUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES AUXQUELLES CONDUIT LA MÉTHODE DE JACOBI (*).

§ 26. *Intégration des systèmes d'équations totales linéaires intégrables complétement.*

94. *Correspondance entre les systèmes simultanés d'équations linéaires et certains systèmes d'équations différentielles totales* (**). Toute équation linéaire aux dérivées partielles est équivalente, comme on le sait, à un certain système d'équations différentielles ordinaires (n° 32). Une correspondanee analogue existe entre un système d'équations linéaires aux dérivées partielles et certains systèmes d'équations différentielles totales.

(*) Mayer, Mathematische Annalen, t. V, pp. 448-470 : *Ueber unbeschränkt integrable Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen.* Lie a comparé la méthode de Mayer à la sienne, dans les Nachrichten de Göttingen, 1872, n° 25, pp. 474-476. Mayer cite comme lui ayant été utiles pour établir sa méthode, ou comme ayant quelque rapport avec elle, outre les recherches de Boole : Natani, *Ueber totale und partieller Differentialgleichungen* (Journal de Crelle, t. LVIII, pp. 301-328), et une note de du Bois-Reymond (*ibid.*, t. LXX, p. 312).

(**) Boole, Treatise, etc., Supplement, chap. XXV, pp. 74 et suivantes, s'occupe de ces systèmes. L'analogie de sa méthode, exposée plus haut, avec celle de Mayer, est évidente. Mais Mayer a eu de plus l'idée d'introduire les valeurs initiales des variables, comme l'a fait Cauchy. [Le second cahier du tome LVI des Archives de Grunert, qui a paru seulement en avril ou en mai 1874, contient, pp. 163-174, un travail intitulé : *Zur Integration eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung*, von L. Zajączkowski, où l'auteur expose, comme complément de la méthode de Boole, précisément ce que nous résumons, d'après Mayer, dans les n°s 94, 95, 96; seulement, il démontre directement tout ce qui se rapporte aux conditions d'intégrabilité.]

Soient, en effet, les m équations suivantes :

$$A_1 z = \frac{dz}{dx_1} + a_{11}\frac{dz}{dy_1} + a_{12}\frac{dz}{dy_2} + \cdots + a_{1n}\frac{dz}{dy_n} = 0, \quad . \; . \; . \quad (1_1)$$

. . . .

$$A_m z = \frac{dz}{dx_m} + a_{m1}\frac{dz}{dy_1} + a_{m2}\frac{dz}{dy_2} + \cdots + a_{mn}\frac{dz}{dy_n} = 0, \quad . \; . \; . \quad (1_m)$$

z et les a étant fonction des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \cdots, y_n$.

Multiplions ces équations par des quantités quelconques $\lambda_1, \ldots,$ λ_m et ajoutons les résultats, nous trouverons :

$$\begin{aligned} &\lambda_1 A_1 z + \cdots + \lambda_m A_m z \\ &= \lambda_1 \frac{dz}{dx_1} + \cdots + \lambda_m \frac{dz}{dx_m} + \\ &\frac{dz}{dy_1}(\lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_m a_{m1}) + \\ &\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ &\frac{dz}{dy_n}(\lambda_1 a_{1n} + \cdots + \lambda_m a_{mn}) = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2) \end{aligned}$$

Toute solution des équations (1) est une solution de (2) et, par suite, égalée à une constante, est aussi une solution des équations simultanées suivantes, qui correspondent à l'équation (2) :

$$\frac{dx_1}{\lambda_1} = \cdots = \frac{dx_m}{\lambda_m} = \frac{dy_1}{\lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_m a_{m1}} = \cdots = \frac{dy_n}{\lambda_1 a_{1n} + \cdots + \lambda_m a_{mn}},$$

ou encore des équations différentielles totales que l'on en déduit :

$$dy_1 = a_{11}dx_1 + a_{21}dx_2 + \cdots + a_{m1}dx_m, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3_1)$$

$$dy_2 = a_{12}dx_1 + a_{22}dx_2 + \cdots + a_{m2}dx_m, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3_2)$$

. . . .

$$dy_n = a_{1n}dx_1 + a_{2n}dx_2 + \cdots + a_{mn}dx_m. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3_n)$$

Réciproquement, si une fonction z est telle que sa différentielle est identiquement nulle en vertu des équations (3), il est clair que cette fonction est une solution des équations (1).

Il résulte de là que l'intégration des systèmes de forme (1) est équivalente à celle des systèmes de forme (3) et réciproquement.

Clebsch ayant montré que, dans l'étude des systèmes de forme (1), on peut se borner à ceux qui sont tels que

$$A_i A_h f - A_h A_i f = 0,$$

on peut aussi, comme on va le voir, se borner à étudier certains systèmes (3).

95. *Conditions nécessaires d'intégrabilité complète* (*unbeschränkte Integrabilität*). Nous ne considérons ici que les systèmes (3) qui proviennent d'un système de n équations entre $(n+m)$ variables, de la forme

$$F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = \text{constante},$$

par différentiation totale. Il résulte de là que les équations (3) que nous considérons, peuvent être regardées comme ayant pour solutions n fonctions y de $x_1, \ldots, x_m$ et de n constantes arbitraires. On a donc :

$$\frac{\delta y_k}{\delta x_h} = a_{hk}, \quad \frac{\delta y_k}{\delta x_i} = a_{ik}, \qquad (4)$$

et par conséquent :

$$\frac{da_{hk}}{dx_i} - \frac{da_{ik}}{dx_h} = 0. \qquad (5)$$

Nous employons ici le signe d pour la différentiation, parce que les a contiennent à la fois les x et les y. On remarque que

$$\frac{da_{hk}}{dx_i} = \frac{\delta a_{hk}}{\delta x_i} + \frac{\delta a_{hk}}{\delta y_1}\frac{\delta y_1}{\delta x_i} + \cdots + \frac{\delta a_{hk}}{\delta y_n}\frac{\delta y_n}{\delta x_i},$$

c'est-à-dire, d'après (4) :

$$\frac{da_{hk}}{dx_i} = \frac{\delta a_{hk}}{\delta x_i} + a_{i1}\frac{\delta a_{hk}}{\delta y_1} + \cdots + a_{in}\frac{\delta a_{hk}}{\delta y_n},$$

ou encore, en tenant compte de la signification du symbole d'opération A_i

$$\frac{da_{hk}}{dx_i} = A_i(a_{hk}).$$

Par conséquent, les conditions (5) peuvent s'écrire sous la forme

$$\mathrm{A}_i(a_{hk}) - \mathrm{A}_h(a_{ik}) = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5')$$

Les conditions (5) ou (5') sont en nombre $n.\frac{m(m-1)}{2}$. Elles doivent être satisfaites identiquement par les valeurs des y, puisque celles-ci contiennent n constantes arbitraires.

Les conditions (5) ou (5') sont donc nécessaires pour que le système (5) ait un système intégral de la forme indiquée. Nous dirons que ces conditions définissent un système (5) *complétement intégrable*. On verra plus bas qu'elles sont suffisantes pour que l'intégration soit possible.

On peut remarquer que les conditions (5') donnent

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left[\mathrm{A}_i(a_{hk}) - \mathrm{A}_h(a_{ik})\right] \frac{dz}{dy_k} = 0, \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (6)$$

pour une fonction z quelconque. Mais on a (§ 17, n° 58) :

$$(\mathrm{A}_i\mathrm{A}_h - \mathrm{A}_h\mathrm{A}_i)\, z = \Sigma \left[\mathrm{A}_i(a_{hk}) - \mathrm{A}_h(a_{ik})\right] \frac{dz}{dy_k} \cdot$$

Donc les conditions (5) entraînent les suivantes :

$$\mathrm{A}_i\mathrm{A}_h z - \mathrm{A}_h\mathrm{A}_i z = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (7)$$

Réciproquement si celles-ci existent pour n fonctions z distinctes, il est clair qu'elles peuvent remplacer les conditions (5) ou (5'), d'après la théorie des déterminants.

96. *Réduction du système* (5) *à* m *systèmes de* n *équations ordinaires du premier ordre*. S'il y a vraiment n fonctions y qui satisfont aux équations (5), elles devront satisfaire en particulier aux n équations (4) suivantes :

$$\frac{\delta y_1}{\delta x_1} = a_{11}, \frac{\delta y_2}{\delta x_1} = a_{12}, \ldots, \frac{\delta y_n}{\delta x_1} = a_{1n}, \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4_1)$$

où $x_2, \ldots, x_m$ jouent le rôle de constantes. Soient

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = c_1, \ldots\ldots \quad (8_1)$$
$$\varphi_2(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = c_2, \ldots\ldots \quad (8_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = c_n, \ldots\ldots \quad (8_n)$$

le système intégral de (4_1), où $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ne contiennent que $x_2, \ldots, x_m$.

On peut se servir de ces équations pour effectuer un changement de variables, consistant à remplacer $y_1, \ldots, y_n$ par $c_1, \ldots, c_n$. Il est facile de former les équations différentielles totales qui doivent remplacer le système (5). On tire en effet de (8) :

$$\begin{aligned} dc = &\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{d\varphi}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1}\right) dx_1 \\ &+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_3}\right) dx_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_m} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_m} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_m}\right) dx_m ; \end{aligned}$$

ou encore

$$dc = \sum_1^m \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_h} + a_{h1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \cdots + a_{hn}\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\right) dx_h.$$

Les fonctions φ étant, par hypothèse, les solutions de (4), on a $\frac{d\varphi}{dx_1} = 0$, et par conséquent les équations précédentes se réduisent aux suivantes, où nous employons le symbole d'opération A,

$$dc_1 = \sum_2^m \mathrm{A}_h\varphi_1 dx_h, \ldots\ldots \quad (9_1)$$
$$dc_2 = \sum_2^m \mathrm{A}_h\varphi_2 dx_h, \ldots\ldots \quad (9_2)$$
$$\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$dc_n = \sum_2^m \mathrm{A}_h\varphi_n dx_h \ldots\ldots \quad (9_n)$$

Il est clair, d'ailleurs, que x_1 ne peut plus entrer dans ces équations puisque les c ne contiennent pas cette variable. On peut le montrer encore comme suit. On a, à cause de $A_1\varphi = 0$

$$A_1 A_h \varphi = A_h A_1 \varphi = 0,$$

ou encore,

$$\frac{d(A_h\varphi)}{dx_1} + a_{11}\frac{d(A_h\varphi)}{dy_1} + a_{12}\frac{d(A_h\varphi)}{dy_2} + \cdots + a_{1n}\frac{d(A_h\varphi)}{dy_n} = 0;$$

ce qui revient à dire qu'après substitution des valeurs de $y_1, \ldots, y_n$ dans $A_h\varphi$ la dérivée totale de $A_h\varphi$ par rapport à $x_1 = 0$. Il résulte de là qu'après la substitution dont il s'agit, les équations (9) ne contiennent plus x_1.

On peut donc, sans inconvénient, mettre à la place de x_1 *telle valeur particulière que l'on veut, sans que les équations* (9) *changent.*

On voit que la transformation que nous venons d'effectuer remplace le système (5) par un autre contenant un nombre égal d'équations et une variable indépendante de moins. On peut remplacer le système (9) par un système analogue contenant encore une variable x de moins et ainsi de suite, car le système (9) est évidemment complétement intégrable, puisqu'il est équivalent à (5). On voit donc qu'en continuant de cette manière, on peut ramener l'intégration de (5) à celle de m systèmes de n équations analogues aux équations (5).

97. *Détermination de ces systèmes successifs.* Si l'on introduit les valeurs initiales des variables y comme constantes, on peut établir immédiatement les m systèmes dont nous avons parlé à la fin du numéro précédent. Nous appellerons $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ ces valeurs initiales correspondant à $x_1 = x_{10}$.

Pour le montrer, nous résoudrons les équations (8) par rapport à $y_1, \ldots, y_n$. Nous trouverons ainsi

$$y_1 = \psi_1(x_1, \ldots, x_m, c_1, \ldots, c_n), \qquad (10_1)$$

. . . .

$$y_n = \psi_n(x_1, \ldots, x_m, c_1, \ldots, c_n) \qquad (10_n)$$

Si l'on suppose que les c soient déterminés d'une manière convenable en fonction de $x_2, \ldots, x_m$, ces équations donneront la solution des équations (5), et, par suite, on trouvera les n relations équivalentes aux équations (9) :

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial c_1} dc_1 + \cdots + \frac{\partial \psi_1}{\partial c_n} dc_n = \left(a_{21} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\right) dx_2 + \cdots + \left(a_{m1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_m}\right) dx_m, \quad (11_1)$$

. . . .

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial c_1} dc_1 + \cdots + \frac{\partial \psi_n}{\partial c_n} dc_n = \left(a_{2n} - \frac{\partial \psi_n}{\partial x_2}\right) dx_2 + \cdots + \left(a_{mn} - \frac{\partial \psi_n}{\partial x_m}\right) dx_m. \quad (11_n)$$

Les x_1 n'entreront pas dans ces équations équivalentes à (9), et les dx_1 en ont disparu aussi à cause de cette équivalence. On peut voir directement d'ailleurs que dx_1 devait disparaître des équations (11). En effet, les ψ étant des solutions du système (4_1), on a

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - a_{11} = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - a_{12} = 0, \ldots, \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} - a_{1n} = 0.$$

Introduisons maintenant les valeurs initiales comme constantes. Posons

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = \varphi(x_{10}, x_2, \ldots, x_m, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}) = c_1,$$

et déduisons des n relations contenues dans cette équation :

$$y_1 = \chi_1(x_1, \ldots, x_m, y_{10}, \ldots, y_{n0}), \quad \ldots\ldots \quad (10'_1)$$

. . . .

$$y_n = \chi_n(x_1, \ldots, x_m, y_{10}, \ldots, y_{n0}). \quad \ldots\ldots \quad (10'_n)$$

On aura, pour ces fonctions χ comme pour les ψ :

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial y_{10}} dy_{10} + \cdots + \frac{\partial \chi_1}{\partial y_{n0}} dy_{n0} = \left(a_{21} - \frac{\partial \chi_1}{\partial x_2}\right) dx_2 + \cdots + \left(a_{m1} - \frac{\partial \chi_1}{\partial x_m}\right) dx_m, \quad (11'_1)$$

. . . .

$$\frac{\partial \chi_n}{\partial y_{10}} dy_{10} + \cdots + \frac{\partial \chi_n}{\partial y_{n0}} dy_{n0} = \left(a_{2n} - \frac{\partial \chi_n}{\partial x_2}\right) dx_2 + \cdots + \left(a_{mn} - \frac{\partial \chi_n}{\partial x_m}\right) dx_m; \quad (11'_1)$$

équations qui sont indépendantes de x_1, comme les équations équivalentes (11) ou (9). Faisons-y $x_1 = x_{10}$, elles ne changeront pas. Dans cette hypothèse, χ_1 se réduit à $y_{10}, \ldots, \chi_n$ à y_{n0} et, par suite, le système (11′) est remplacé par celui-ci :

$$dy_{10} = a_{210} dx_2 + a_{310} dx_3 + \cdots + a_{m10} dx_m, \quad \ldots \quad (12_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$dy_{n0} = a_{2n0} dx_2 + a_{3n0} dx_3 + \cdots + a_{mn0} dx_m. \quad \ldots \quad (12_n)$$

On a ajouté un 0 aux indices a pour indiquer que l'une des variables x_1 y a été remplacée par sa valeur initiale x_{10}.

Il est clair que ce système (12) est encore complétement intégrable. En effet, il a pour solutions le système intégral du premier. On sait d'ailleurs que les conditions d'intégrabilité (5) ou (5′) étant identiquement satisfaites pour une valeur quelconque de x, le sont encore pour la valeur spéciale x_{10}.

Il est facile d'écrire les systèmes successifs de n équations si l'on convient d'ajouter les indices $1, 2, 3, \ldots, (m-1)$, aux indices des quantités y et a pour indiquer que l'on y remplace successivement $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ par leurs valeurs initiales, mais cela est inutile, comme nous allons le montrer.

98. *Réduction de l'intégration des* m *systèmes auxiliaires de* n *équations à celle d'un seul système.* Il y a un cas où l'on parvient immédiatement à terminer l'intégration. C'est celui où la valeur spéciale de x_1, savoir x_{10}, est telle que pour cette valeur, tous les a qui entrent encore dans les équations (12) s'annulent. Dans ce cas, le système (12) donne

$$y_{10} = \text{constante}, \ldots, y_{n0} = \text{constante},$$

le problème est complétement résolu et il est inutile d'effectuer aucune transformation ultérieure.

Nous allons montrer que l'on peut dans tous les cas, par un changement convenable de variables indépendantes, faire en sorte que cette simplification se produise. Posons

$$x_1 = x_1(u_1, \ldots, u_m), \ldots, x_m = x_m(u_1, \ldots, u_m). \quad \ldots \quad (13)$$

Le système (5) deviendra :

$$dy_1 = b_{11}du_1 + b_{21}du_2 + \cdots + b_{m1}du_m, \quad \ldots \quad (14_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$dy_n = b_{1n}du_1 + b_{2n}du_2 + \cdots + b_{mn}du_m; \quad \ldots \quad (14_n)$$

où :

$$b_{11} = \sum_1^m \frac{\delta x_i}{\delta u_1} a_{i1}, \ldots, b_{m1} = \sum_1^m \frac{\delta x_i}{\delta u_m} a_{i1}; \quad \ldots \quad (15_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{1n} = \sum_1^m \frac{\delta x_i}{\delta u_1} a_{in}, \ldots, b_{mn} = \sum_1^m \frac{\delta x_i}{\delta u_m} a_{in}. \quad \ldots \quad (15_n)$$

Ce système nouveau (14) sera complétement intégrable, puisque son système intégral se déduit de celui de (5). De même, si l'on pose

$$B_i z = \frac{\delta z}{\delta u_i} + \sum_{j=1}^{j=n} b_i \frac{dz}{du_j},$$

on aura :

$$B_i B_h z - B_h B_i z = 0,$$

ce qu'on vérifie aisément d'ailleurs par le calcul.

Pour intégrer (14), nous cherchons d'abord le système intégral des équations

$$\frac{\delta y_1}{\delta u_1} = b_{11}, \quad \frac{\delta y_1}{\delta u_1} = b_{12}, \ldots, \frac{\delta y_n}{\delta u_1} = b_{1n}. \quad \ldots \quad (16)$$

et nous y ferons entrer les valeurs initiales $y_{10}, \ldots, y_{n0}$ qui correspondent à la valeur u_{10} de u_1. Le système (14) sera remplacé alors par

$$dy_{10} = b_{210}du_2 + \cdots + b_{m10}du_m, \quad \ldots \quad (17_h)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$dy_{n0} = b_{2n0}du_2 + \cdots + b_{mn0}du_m. \quad \ldots \quad (17_n)$$

Choisissons maintenant les équations (13) qui définissent la substitution de telle manière que l'on ait

$$dy_{10} = 0, dy_{20} = 0, \ldots, dy_{n0} = 0 \quad \ldots \quad (18)$$

Pour cela, posons simplement

$$x_1 = x_{10} + (u_1 - u_{10})\, v_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13'_1)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$x_m = x_{m0} + (u_1 - u_{10})\, v_m, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13'_m)$$

$v_1, v_2, \ldots, v_m$ étant des fonctions de $u_1, u_2, \ldots, u_m$ qui laissent les variables x vraiment indépendantes, $x_{10}, \ldots, x_{m0}$ d'ailleurs étant choisis de manière que les a restent finis et déterminés, enfin, tels que l'hypothèse $u_1 = u_{10}$ ne rendant infinie aucune des fonctions v. On aura pour b_{hk} quelconque, h étant supérieur à 1 :

$$b_{hk} = (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_h} a_{ik}.$$

Donc, pour $u_1 = u_{10}$, $b_{hk} = 0$. Les équations (17) se réduiront donc aux équations (18). Ensuite, on aura

$$b_{1k} = \sum_{i=1}^{i=m} a_{ik} v_k + (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_1} a_{ik},$$

expression qui ne devient ni nulle ni infinie pour $u = u_{10}$, et par suite les équations (16) ne prennent pas une forme illusoire.

La solution du système (3) est donc ramenée à celle des équations (16). On fera entrer dans le système intégral de (16) les valeurs initiales des y quand $u_1 = u_{10}$. On aura ainsi, avec les équations (13′), $2n$ équations entre les x, les y et les u. Éliminant les u, on aura le système intégral de (3).

Remarque. La forme la plus simple des équations (13′) est celle-ci

$$x_1 = u_1,$$

$$x_2 = x_{20} + (u_1 - u_{10})\, u_2,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$x_n = x_{n0} + (u_1 - u_{10})\, u_n,$$

les constantes étant choisies de manière que les a ne soient pas infinis pour $u_1 = u_{10}$. On a, dans ce cas,

$$b_{1k} = a_{1k} + u_2 a_{2k} + \cdots + u_m a_{mk}\,,$$
$$b_{ik} = (u_1 - u_{10})\, a_{ik}\,,$$

ce qui montre que l'on peut transformer les équations données, d'une manière très-simple.

§ 27. *Intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

99. *Intégration complète d'un système de Jacobi.* Considérons maintenant les équations :

$$A_1 z = \frac{dz}{dx_1} + a_{11}\frac{dz}{dy_1} + \cdots + a_{1n}\frac{dz}{dy_n} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (1_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_m z = \frac{dz}{dx_m} + a_{m1}\frac{dz}{dy_1} + \cdots + a_{mn}\frac{dz}{dy_n} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (1_n)$$

Pour en trouver le système intégral, nous le transformerons, par les substitutions

$$x_1 = x_{10} + (u_1 - u_{10})\, v_1\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13'_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_m = x_{m0} + (u_1 - u_{10})\, v_m\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13'_n)$$

en celui-ci :

$$B_1 z = \frac{dz}{du_1} + b_{11}\frac{dz}{dy_1} + \cdots + b_{1n}\frac{dz}{dy_n} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (1'_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_m z = \frac{dz}{du_m} + b_{m1}\frac{dz}{dy_1} + \cdots + b_{mn}\frac{dz}{dy_n} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (1'_n)$$

où l'on a :

$$b_{1k} = \sum_{i=1}^{i=m} a_{ik} v_k + (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial v_i}{\partial u_1}\, a_{ik}\,,$$
$$b_{hk} = (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial v_i}{\partial u_h}\, a_{ik}\,.$$

Cela posé, on cherchera le système intégral des équations :

$$\frac{\delta y_1}{\delta u_1} = b_{11}, \quad \frac{\delta y_2}{\delta u_1} = b_{12}, \ldots, \frac{\delta y_n}{\delta u_1} = b_{1n}, \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

et l'on exprimera les constantes en fonctions des valeurs initiales $y_{10}, \ldots, y_{n0}$ des variables y pour $u_1 = u_{10}$. Ce système intégral sera en même temps celui des équations différentielles totales :

$$dy_1 = b_{11} du_1 + b_{21} du_2 + \cdots + b_{m1} du_m, \quad \ldots \ldots \quad (14_1)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$dy_n = b_{1n} du_1 + b_{2n} du_2 + \cdots + b_{mn} du_n, \quad \ldots \ldots \quad (14_n)$$

si l'on regarde $y_{10}, \ldots, y_{n0}$ comme des constantes. Tirons des équations qui donnent ce système intégral les valeurs de $y_{10}, \ldots, y_{n0}$. Les équations ainsi trouvées

$$y_{10} = F_1(u_1, \ldots, u_m, y_1, \ldots, y_n), \quad \ldots \ldots \quad (18_1)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$y_{n0} = F_n(u_1, \ldots, u_m, y_1, \ldots, y_n), \quad \ldots \ldots \quad (18_n)$$

satisfont encore au système (14), et par conséquent, d'après la correspondance qui existe entre les systèmes (14) et (1′), ces équations (18) constituent le système intégral de (1′). Éliminons-en $u_1, \ldots, u_m$ par la substitution inverse de (15) et nous aurons la solution complète du système (1).

Remarque. Les systèmes (1) doivent rarement être intégrés complétement. En général, on n'a besoin que d'une seule solution des systèmes de ce genre. Il est donc de la plus haute importance de montrer comment l'on peut déduire *une* seule solution de (1) d'*une* seule solution des équations (16).

100. *Théorème de Mayer* (*). *On peut déduire une solution du système* (1′) *de chaque solution du système* (16). Soit

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_m, y_1, \ldots, y_n) = \text{constante}, \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

(*) Lie, dans les Nachrichten de Göttingen, 1872, n° 25, p. 475, a très-bien fait remarquer toute l'importance de ce théorème de Mayer, qu'il n'avait pas rencontré dans le développement naturel de sa propre méthode. Au fond, ce théorème est une traduction, pour les systèmes ici considérés, du théorème de Poisson, ou mieux de Jacobi.

une solution du système (16). Si l'on considère les solutions

$$y_1 = \varphi_1(u_1, \ldots, u_n, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}), \quad \ldots\ldots \quad (20_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = \varphi_n(u_1, \ldots, u_n, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}), \quad \ldots\ldots \quad (20_n)$$

de ce système (16), on sait que, pour $u_1 = u_{10}$, les quantités $y_1, \ldots, y_n$ deviendront $y_{10}, \ldots, y_{n0}$. Donc, pour $u_1 = u_{10}$, on aura :

$$U = F(u_1, u_2, \ldots, u_m, y_1, \ldots, y_n) - F(u_{10}, u_2, \ldots, u_m, y_{10}, \ldots, y_{n0}) = 0, \quad (21)$$

lorsque les y sont remplacés par leurs valeurs dans F.

D'après ce que l'on a vu plus haut, si l'on regarde $y_{10}, \ldots, y_{n0}$ comme des constantes, les relations (20) satisfont aux équations (14), ou aux équations

$$\frac{\partial y_k}{\partial u_h} = b_{hk}.$$

Or, on déduit de (21), dans la même hypothèse :

$$\frac{\partial U}{\partial u_h} + \frac{\partial U}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial u_h} + \cdots + \frac{\partial U}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial u_h} = 0,$$

ou encore :

$$\frac{\partial U}{\partial u_h} + \frac{\partial U}{\partial y_1} b_{h1} + \cdots + \frac{\partial U}{\partial y_n} b_{hn} = 0,$$

c'est-à-dire,

$$B_h U = 0.$$

On peut encore arriver à ce résultat, au moyen de l'équation $B_1 F = 0$, identique par hypothèse. En effet, on a

$$B_1(B_h U) = B_h(B_1 U) = B_h(B_1 F) = 0$$

Donc $B_h U$, quand on y substitue les valeurs (20), a, comme U, une valeur indépendante de u_1. Mais pour $u_1 = u_{10}$, comme $y_1, \ldots, y_n$ deviennent $y_{10}, \ldots, y_{n0}$, U est nul et par suite $B_h U$ aussi.

Ainsi la fonction U est telle que l'on a :

$$B_1 U = 0, \quad B_2 U = 0, \ldots, B_m U = 0, \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

quand on y remplace les y par leurs valeurs (20); de plus, par hypothèse, la première des équations (22) est identiquement satisfaite. Mettons maintenant l'équation (21) sous la forme

$$y_{10} = \mathrm{U}_1(u_1, u_2, \ldots, u_m, y_1, \ldots, y_n, y_{20}, \ldots, y_{n0}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

On aura, à cause de (22), identiquement encore :

$$\mathrm{B}_1\mathrm{U}_1 = 0 \; : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

puis,

$$\mathrm{B}_2\mathrm{U}_1 = 0, \quad \mathrm{B}_3\mathrm{U}_1 = 0, \ldots, \mathrm{B}_m\mathrm{U}_1 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

quand on substitue les valeurs (20) aux y. Aucune de ces équations (25) ne peut être une conséquence de (23), parce qu'elles ne contiennent pas y_{10}. Il peut se présenter deux cas. Ou bien toutes les équations (25) seront identiquement satisfaites comme (24); alors U_1 est une solution commune cherchée des équations $\mathrm{B}z = 0$. Ou bien, on pourra en déduire encore $y_{20}, \ldots, y_{h0}$ en fonction des u, des y et des constantes restantes. S'il en est ainsi, on opérera sur les nouvelles valeurs trouvées comme sur (23). En continuant toujours de cette manière, ou bien on trouvera une solution commune des équations $\mathrm{B}z = 0$, ou bien on arrivera à exprimer toutes les valeurs des y_0 en fonction des y et de u, et les équations ainsi trouvées seront équivalentes aux équations (20) qui donnent la solution complète des équations (14) et par suite des équations (1′) ou (1) elles-mêmes.

101. *Application à l'intégration des équations linéaires auxquelles conduit la méthode de Jacobi.* La méthode de Jacobi, appliquée aux équations aux dérivées partielles du premier ordre, ramène l'intégration de celle-ci à celles de systèmes linéaires de la forme :

$$\mathrm{A}_1 f = 0, \quad \mathrm{A}_2 f = 0, \ldots, \quad \mathrm{A}_\mu f = 0,$$

où

$$\mathrm{A}_h f = \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{\mu+1}^{\nu} \left(\frac{\partial p_h}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial p_h}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = 0,$$

ν étant le nombre des variables de l'équation aux dérivées partielles donnée, et par suite $(2\nu - \mu)$ étant le nombre des variables indépendantes contenues dans le système Af, savoir :

$$x_1, x_2, \ldots, x_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_\nu, p_{\mu+1}, \ldots, p_\nu.$$

En appliquant la théorie précédente, on devra faire

$$m = \mu, \quad n = 2(\nu - \mu).$$

Pour trouver une intégrale du système Af, il faudra donc en trouver une d'un système de $2(\nu - \mu)$ équations ordinaires.

La méthode de Jacobi conduit à $\nu(\nu - 1)$ systèmes auxiliaires, contenant respectivement $2, 4, 6, \ldots, 2(\nu - 1)$ équations. Donc la méthode de Mayer pour intégrer une équation aux dérivées partielles nécessitera seulement la recherche d'une intégrale unique de

1 système de	$2(\nu - 1)$	équations	différentielles	ordinaires,
1 »	$2(\nu - 2)$	»	»	
1 »	$2(\nu - 3)$	»	»	
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
1 système de	4	équations	différentielles	ordinaires,
1 »	2	»	»	

On arrive à ce résultat en faisant $\mu = 1, 2, \ldots, (\nu - 1)$, dans la conclusion donnée plus haut. On remarquera que la méthode la plus favorable, celle de Weiler et Clebsch, exige un nombre presque double d'intégrations (voir n° 87).

LIVRE III.

MÉTHODE DE CAUCHY ET DE LIE.

CHAPITRE I.

EXPOSITION GÉNÉRALE. TRAVAUX DE CAUCHY (*).

§ 28. *Cas des équations à deux variables indépendantes.*

102. *Idée générale de la méthode de Cauchy, dans le cas des équations à deux variables indépendantes.* Considérons l'équation :

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

et supposons que x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 soient les valeurs initiales de x, y, z, p, q liées entre elles par l'équation :

$$f(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(*) Cauchy. Exercices d'analyse et de physique mathématique, t. II, pp. 238-272. Le § I que nous analysons ici est la reproduction d'un article publié, en janvier et février 1819, dans le Bulletin de la Société philomatique. L'examen du cas spécial où la méthode de Cauchy est en défaut, a été fait par Serret, dans les Comptes rendus, t. LIII, pp. 598-606, 734-745, ou Annales de l'école normale supérieure, t. III, pp. 143-161. C'est Bertrand, qui a signalé dans les Comptes rendus, t. XLV, pp. 617-619, l'existence de ce cas singulier, en prétendant, à tort, selon nous, qu'il se confondait avec le cas général. Ossian Bonnet (C. R. t. LXV, pp. 581-585) a donné une démonstration de la méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes, qui permet d'éviter la difficulté signalée par Bertrand. La méthode de Cauchy est aussi exposée dans Imschenetsky, pp. 191-200. Il renvoie pour les travaux de Serret à la 6me édi-

Soit u une fonction de x et de y; on pourra imaginer que y, z, p, q soient exprimés au moyen de x et de u. Dans cette hypothèse, on aura :

$$\frac{dz}{dx} = p + q\frac{dy}{dx}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

$$\frac{dz}{du} = \quad q\frac{dy}{du} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Dérivons l'équation (3) par rapport à u, l'équation (4) par rapport à x, et retranchons le second résultat du premier, nous trouverons :

$$\frac{dp}{du} = \frac{dq}{dx}\frac{dy}{du} - \frac{dq}{du}\frac{dy}{dx} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

On déduit ensuite de l'équation (1) :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dx} = 0, \quad \ldots \quad (6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{du} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{du} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{du} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{du} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Substituons dans cette dernière les valeurs de $\frac{dz}{du}$, $\frac{dp}{du}$ tirées de (4) et (5), ou multiplions (4) par $-\frac{\partial f}{\partial z}$, (5) par $-\frac{\partial f}{\partial p}$, et ajoutons-les à (7). Il viendra :

$$\frac{dy}{du}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dq}{dx}\right) + \frac{dq}{du}\left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad \ldots \quad (8)$$

tion du *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral* de Lacroix, *avec notes* de MM. Hermite et Serret, t. II, pp. 257-282, ouvrage que nous n'avons pu consulter. Voyez aussi Serret, *Cours de calcul différentiel et intégral*, t. II, pp. 624-649.

Cauchy a ajouté à son premier mémoire de 1819, des notes, à nos yeux, de la plus haute importance, où il généralise sa méthode d'exposition.

Jacobi, *Vorlesungen*, pp. 364-376, a donné une exposition *a posteriori* de cette méthode ou plutôt celle de Pfaff modifiée par lui; Mayer a montré le moyen de trouver en tout cas une intégrale complète dans le mémoire intitulé : *Ueber die Jacobi-Hamilton'sche Integrationsmethode der partielle Differentialgleichungen erster ordnung* (Mathematische Annalen, t. III, pp. 435-452). L'exposition générale de la méthode de Cauchy, donnée par lui, en 1841, contient implicitement ces recherches de Mayer.

La fonction u étant encore indéterminée, nous pouvons poser :

$$\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dy}{dx} = 0, \qquad (9)$$

ce qui réduira l'équation (8) à :

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dq}{dx} = 0. \qquad (10)$$

Enfin, ajoutons à l'équation (6), l'équation (5) multipliée par $-\frac{\partial f}{\partial z}$, l'équation (10) multipliée par $-\frac{dy}{dx}$, l'équation (9) multipliée par $-\frac{dq}{dx}$, il viendra :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} = 0. \qquad (11)$$

Les équations (5), (9), (10), (11) peuvent se mettre sous la forme suivante que nous avons déjà rencontrée (n° 57) :

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{-dp}{\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{-dq}{\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}} \qquad (12)$$

Ainsi, toute solution de l'équation (1) jouit de la propriété suivante : on peut choisir une fonction u de x et de y, telle que les équations (12) soient vérifiées, en même temps que l'équation (4)

$$\frac{dz}{du} = q\frac{dy}{du}. \qquad (4)$$

Il importe de remarquer que le système (12) ne contient que des dérivées par rapport à x; il conduira donc à un système intégral de la forme :

$$y = f_1(x, y_0, z_0, q_0), \qquad (13_1)$$

$$z = f_2(x, y_0, z_0, q_0), \qquad (13_2)$$

$$p = f_3(x, y_0, z_0, q_0), \qquad (13_3)$$

$$q = f_4(x, y_0, z_0, q_0), \qquad (13_4)$$

d'où l'on a supposé p_0 éliminé au moyen de la condition (2), et où

u n'entre que dans les constantes de l'intégration de (12), savoir y_0, z_0, q_0. Ces constantes contiendront u de telle sorte que l'équation (4) soit vérifiée.

Réciproquement, tout système intégral (13), des équations (4) et (12), où les valeurs initiales satisfont à la relation (2), donnera une intégrale de l'équation (1), telle que les valeurs initiales satisferont à la même équation (2). La relation entre x, y, z s'obtiendra en éliminant u entre (13_1) et (13_2), et les valeurs de p et de q, trouvées par élimination de u entre (13_1), (13_3) et (13_4) seront précisément $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$. En effet, les équations (12) et (4) permettent de remonter aux équations (6) et (7), ou

$$\frac{df}{dx}=0, \quad \frac{df}{du}=0.$$

On déduit de celle-ci $df = 0$, ou $f =$ constante. Cette constante est nulle à cause de la condition (2). Donc, en premier lieu, les équations (12) satisfont identiquement à la relation (1). Ensuite, on déduit des équations (5) et (4)

$$dz = pdx + qdy.$$

Si donc l'on prend pour variables, x et y, on aura :

$$\frac{dz}{dx}=p, \quad \frac{dz}{dy}=q.$$

L'intégration de l'équation (1) est donc ramenée complétement à celle du système des équations (12) et (4).

103. *Détermination d'une intégrale de* (12) *satisfaisant à* (4). Supposons que l'on ait déterminé le système intégral (13) des équations (12). Par hypothèse, on peut le mettre sous la forme :

$$y = y_0 + (x - x_0)\,\psi_1(x, y_0, z_0, q_0), \quad \ldots\ldots \quad (14_1)$$
$$z = z_0 + (x - x_0)\,\psi_2(x, y_0, z_0, q_0), \quad \ldots\ldots \quad (14_2)$$
$$p = p_0 + (x - x_0)\,\psi_3(x, y_0, z_0, q_0), \quad \ldots\ldots \quad (14_3)$$
$$q = q_0 + (x - x_0)\,\psi_4(x, y_0, z_0, q_0). \quad \ldots\ldots \quad (14_4)$$

Si ces équations ne satisfont pas identiquement à l'équation (4), on aura

$$\frac{dz}{du} = q\frac{dy}{du} + \mathrm{I} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4')$$

On déduira des équations (4') et (3), l'équation

$$\frac{dp}{du} = \frac{dq}{dx}\frac{dy}{du} - \frac{dq}{du}\frac{dy}{dx} + \frac{d\mathrm{I}}{dx}, \ldots\ldots\ldots \quad (5')$$

comme on a trouvé (5) au moyen de (4) et de (3). Les équations (3), (4), (5), (9) et (10) donnent l'identité (7); de la même manière (3), (4'), (5'), (9) et (10) donneront une équation, qui en vertu de (7) deviendra :

$$\mathrm{I}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{d\mathrm{I}}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

On déduit de celle-ci :

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_0 e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial p}} dx}.$$

Pour que I soit nul, il suffira en général que I_0 soit nul. Or, on a :

$$\mathrm{I} = \frac{dz_0}{du} + (x - x_0)\frac{d\psi_2}{du} - \left[q_0 + (x - x_0)\psi_4\right]\left[\frac{dy_0}{du} + (x - x_0)\frac{d\psi_1}{du}\right].$$

Par conséquent, on doit avoir

$$\mathrm{I}_0 = \frac{dz_0}{du} - q_0\frac{dy_0}{du} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

On peut satisfaire à cette équation des deux manières suivantes :

1° Si l'on suppose que

$$z = \varphi y,$$

pour $x = x_0$, on aura

$$z_0 = \varphi y_0, \quad q = \varphi' y_0,$$

et l'équation (16) sera identiquement satisfaite. Dans ce cas, on trouvera l'intégrale générale, en éliminant y_0 et par suite u, entre (13_1) et (13_2) qui deviendront :

$$y_1 = f_1(x, y_0, \varphi y_0, \varphi' y_0), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13'_1)$$
$$y_2 = f_2(x, y_0, \varphi y_0, \varphi' y_0). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13'_2)$$

2° On peut prendre pour z_0 et y_0 des constantes arbitraires qui ne contiennent pas u, et q_0 contiendra seul u dans les équations (13). On arrivera dans ce cas à une *solution complète* contenant deux constantes arbitraires z_0 et y_0, en éliminant q_0 entre les valeurs de y et de z (*).

104. *Examen d'une objection de* Bertrand. Bertrand a fait, contre le procédé de démonstration précédent, l'objection très-spécieuse que voici. On pourrait, dit-il, au moyen de ce procédé, prouver que toute fonction φx qui s'annule pour une valeur x_0 de x, s'annule pour toute valeur de x. En effet, posons

$$\pi x = \frac{\varphi' x}{\varphi x}\cdot$$

On aura :

$$\int_{x_1}^{x} \pi x dx = \int_{x_1}^{x} \frac{\varphi' x}{\varphi x} dx = \log. \frac{\varphi x}{\varphi x_1}\cdot$$

Donc

$$\varphi x = \varphi x_1 e^{\int_{x_1}^{x} \pi x dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Pour $x_1 = x_0$, $\varphi x_1 = \varphi x_0 = 0$, d'où il semble que l'on doive conclure par le raisonnement de Cauchy, que l'on a $\varphi x = 0$, pour toute valeur de x, ce qui est absurde.

Cette objection, très-juste en général, ne nous semble pas applicable au cas spécial traité par Cauchy. La fonction πx, dans l'exemple de Bertrand, est liée de telle manière à la fonction φx que les zéros de celle-ci sont les infinis de celle-là et réciproquement. L'équation (14) prouve que

$$e^{\int_{x_1}^{x} \pi x dx}, \quad \int_{x_1}^{x} \pi x dx, \quad \pi x,$$

convergent vers l'infini, en même temps que x_1 converge vers x_0, ou φx_1 vers φx_0.

(*) Les auteurs cités en tête de ce paragraphe, c'est-à-dire Serret et Imschenetsky, ne se sont pas occupés de ce second cas, pourtant d'une importance capitale, et signalé par Cauchy dans les notes ajoutées, en 1841, à son mémoire primitif de 1819. Cela provient de que ces auteurs font $u = y_0$, tandis qu'il faut laisser à u toute son indétermination afin de pouvoir faire, au besoin, $u = y_0$, ou $u = q_0$.

Dans le cas spécial traité par Cauchy, il n'en est pas de même. Posons :

$$\pi(x, y, z, p, q) = \left(-\frac{\delta f}{\delta z} : \frac{\delta f}{\delta p}\right).$$

Il est clair que cette fonction π, quand on y substitue les valeurs de y, z, p, q données par les équations (15) ne sera pas infinie, pour toute valeur de x, *parce qu'elle contient des constantes arbitraires ou une fonction arbitraire.* Par suite

$$\int_{x_0}^{x} \pi dx$$

ne peut devenir infinie que si $\pi = \infty$, pour $x = x_0$. En effet, si π était infinie pour une autre valeur, en restreignant suffisamment l'intervalle $(x - x_0)$, cette intégrale serait toujours finie.

Il ne peut donc y avoir d'exception que si l'on a, à la fois,

$$f(x_0, y_0, \varphi y_0, p_0, \varphi' y_0) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$\pi(x_0, y_0, \varphi y_0, p_0, \varphi' y_0) = \infty. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Cela ne peut arriver que si l'on prend la forme spéciale de la fonction φ déterminée précisément par ces équations. Dans ces cas particuliers, si π croît indéfiniment, en étant négatif, quand x converge vers x_0, l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} \pi dx$$

sera finie, ou infinie et négative. Dans ces deux cas, on pourra encore conclure $I = 0$ de $I_0 = 0$. Dans le cas contraire, il faudra calculer I directement. Si l'on trouve I différent de zéro, on peut en conclure qu'il n'y a pas de solution telle que pour $x = x_0$, $z = \varphi y$, rien de plus.

Il se peut que l'équation $\pi = \infty$, au lieu de donner une forme de φ pour laquelle on n'ait pas, à coup sûr, $I = 0$, donne au contraire une valeur $x = x_0$, telle qu'il soit douteux que $I = 0$. Dans ce cas, si réellement I n'est pas nul, on doit conclure qu'il n'y a pas de solution qui permette de donner à x la valeur initiale x_0. Ce cas d'exception ne semble pas avoir été signalé.

105. Remarques. I. Dans le cas où l'équation est linéaire et de la forme

$$Pp + Qq = R,$$

les deux premières équations auxiliaires sont celles de Lagrange :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

et elles suffisent pour résoudre complétement la question (§ 5).

II. Si les deux équations (13_1) (13_2) ne contiennent pas q_0, on en déduira :

$$y_0 = \varphi_1(x, y, z), \quad z_0 = \varphi_2(x, y, z);$$

Par suite, à cause de $z_0 = \varphi y_0$, on a pour l'intégrale générale :

$$\varphi_2 = \varphi(\varphi_1).$$

Celle-ci conduit à une équation linéaire. Les équations linéaires sont donc les seules qui conduisent à des intégrales du système auxiliaire telles que les valeurs de z et de y ne contiennent pas q_0. La réciproque est évidente d'après la remarque précédente.

III. En exprimant que les valeurs données par les relations (13) satisfont à l'équation (4), quand on suppose q_0 seul fonction de u, on trouve :

$$\frac{\delta f_2}{\delta q_0} = f_4 \frac{\delta f_1}{\delta q_0},$$

relation qui prouve que f_2 et f_1 contiennent à la fois q_0, ou en sont toutes deux indépendantes, sauf dans le cas ou $f_4 = 0$ (*).

(*) Serret, qui fait $u = y_0$, $z = \varphi y_0$, $q_0 = \varphi' y_0$, essaye de démontrer ce théorème comme suit. L'équation (4) donne, dans cette hypothèse :

$$\left(\frac{\delta f_2}{\delta y_0} + \frac{\delta f_2}{\delta z_0}\varphi' y_0 + \frac{\delta f_2}{\delta q_0}\varphi'' y_0\right) - f_4\left(\frac{\delta f_1}{\delta y_0} + \frac{\delta f_1}{\delta z_0}\varphi' y_0 + \frac{\delta f_1}{\delta q_0}\varphi'' y_0\right) = 0.$$

« Cette équation, dit-il, devant avoir lieu identiquement, les termes multipliés par $\frac{dq_0}{dy_0}$ doivent se détruire. On a donc identiquement

$$\frac{\delta f_2}{\delta q_0} - f_4 \frac{\delta f_1}{\delta q_0} = 0. »$$

Ce raisonnement nous semble sans force probante, puisque $\varphi'' y_0$ n'a pas une valeur indépendante de celle de z_0 et q_0.

106. Exemples. I. Soit l'équation (*)

$$xy = pq.$$

Les équations auxiliaires seront :

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{y} = \frac{dq}{x},$$

ou, en multipliant par $xy = pq$:

$$pdx = qdy = \frac{1}{2}dz = xdp = ydq,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{p}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dq}{q}, \quad dz = \frac{p}{x}\cdot 2xdx = \frac{q}{y}\cdot 2ydy.$$

On trouve immédiatement pour intégrales :

$$\frac{x}{p} = \frac{x_0}{p_0}, \quad \frac{y}{q} = \frac{y_0}{q_0}, \quad z - z_0 = \frac{p_0}{x_0}(x^2 - x_0^2) = \frac{q_0}{y_0}(y^2 - y_0^2),$$

avec la condition :

$$x_0 y_0 = p_0 q_0.$$

En multipliant entre elles les deux valeurs de $(z - z_0)$, on trouve

$$(z - z_0)^2 = (x^2 - x_0^2)(y^2 - y_0^2),$$

intégrale complète contenant une constante supplémentaire z_0, si on regarde z_0 comme arbitraire.

Pour avoir l'*intégrale générale,* il suffit d'ajouter à celle-ci la relation

$$(z - z_0)\frac{\delta z_0}{\delta y_0} = (x^2 - x_0^2)\, y_0,$$

ou

$$(z - z_0)\, q_0 = (x^2 - x_0^2)\, y_0,$$

qui est d'ailleurs identique avec l'une des relations données plus haut

$$(z - z_0)\, x_0 = (x^2 - x_0^2)\, p_0,$$

(*) Cauchy, Exercices, etc., t. II, p. 249.

quand on tient compte de $p_0 q_0 = x_0 y_0$.

II. Soit l'équation

$$2xz - px^2 + qxy + q^2 x = 0.$$

Les équations auxiliaires sont :

$$\frac{dx}{-x^2} = \frac{dy}{xy + 2qx} = \frac{dz}{q^2 x - 2xz} = \frac{-dp}{px} = \frac{-dq}{3qx}.$$

Elles conduisent au système intégral suivant, où $C = q_0\, x_0^{-3}$:

$$q = Cx^3,$$

$$p = \frac{p_0}{x_0} x,$$

$$z = -\frac{C^2 x^6}{4} + \frac{x^2}{x_0^2}\left(z_0 + \frac{C^2 x_0^6}{4}\right),$$

$$y = -\frac{Cx^3}{2} + \frac{x_0}{x}\left(y_0 + \frac{Cx_0^3}{2}\right).$$

Les quantités p_0, q_0, y_0, z_0 sont liés par l'équation

$$2x_0 z_0 - p_0 x_0^2 + q_0 x_0 y_0 + q_0^2 x_0 = 0.$$

En éliminant C entre les valeurs de y et de z, on trouve l'intégrale complète, A et B étant des constantes,

$$(z - Ax^2) + (y - Bx^{-1})^2 = 0.$$

Dans le cas actuel, on a $\pi = \infty$ pour $x = x_0 = 0$. En effet, $\pi = 2\, x^{-1}$. On trouve $1 = I_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2$, équation qui n'apprend plus rien. Mais l'intégrale complète que nous venons de trouver n'ayant plus aucun sens, pour $x_0 = 0$, nous pouvons conclure que nous trouvons ici le nouveau cas d'exception signalé plus haut. Il n'y a pas d'intégrale complète correspondant à $q =$ fonction arbitraire de u et telle que l'on puisse y faire $x = 0$.

§ 29. ***Équations contenant un nombre quelconque de variables.***

107. *Réduction du problème à l'intégration d'un système d'équations simultanées.* Soit l'équation :

$$f(z, x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Supposons que, pour $x_n = x_{n0}$, les quantités $z, x_1, \ldots, x_{n-1}$, $p_1, \ldots, p_n$ prennent les valeurs $z_0, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, \ldots, p_{10}, \ldots, p_{n0}$ liées entre elles par l'équation :

$$f(z_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}, p_{10}, \ldots, p_{n0}) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

La méthode de Cauchy consiste à prendre $(n-1)$ nouvelles variables $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ fonctions de $x_1, \ldots, x_n$. On pourra supposer réciproquement $z, x_1, \ldots, x_{n-1}, p_1, \ldots, p_n$ fonctions de u_1, $u_2, \ldots, u_{n-1}, x_n$. *Dans cette hypothèse,* on aura :

$$\frac{dz}{dx_n} = p_1 \frac{dx_1}{dx_n} + \cdots + p_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{dx_n} + p_n, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$\frac{dz}{du} = p_1 \frac{dx_1}{du} + \cdots + p_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{du}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

l'équation (4) en représentant $(n-1)$, que l'on obtient en remplaçant successivement u par $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ (*). Dérivons l'équation (3) par rapport à u, l'équation (4) par rapport à x_n, et retranchons le second résultat du premier, nous trouverons :

$$\frac{dp_n}{du} = \left(\frac{dp_1}{dx_n}\frac{dx_1}{du} - \frac{dp_1}{du}\frac{dx_1}{dx_n}\right) + \cdots + \left(\frac{dp_{n-1}}{dx_n}\frac{dx_{n-1}}{du} - \frac{dp_{n-1}}{du}\frac{dx_{n-1}}{dx_n}\right) \; . \; . \quad (5)$$

(*) Nous employons cette manière abrégée de représenter $(n-1)$ équations plusieurs fois afin de pouvoir calquer le § 29 sur le § 28. Ainsi les équations (5), (7), (8), (9), (10), (10′), (11) en représentent chacune $(n-1)$, obtenues en remplaçant u par $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, x par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, ou p par p_1, p_2, $\ldots, p_{n-1}$.

On déduit ensuite de l'équation (1)

$$\frac{\delta f}{\delta x_n}+\sum_1^{n-1}\frac{\delta f}{\delta x}\frac{dx}{dx_n}+\frac{\delta f}{\delta z}\frac{dz}{dx_n}+\sum_1^{n}\frac{\delta f}{\delta p}\frac{dp}{dx_n}=0, \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

$$\sum_1^{n-1}\frac{\delta f}{\delta x}\frac{dx}{du}+\frac{\delta f}{\delta z}\frac{dz}{du}+\sum_1^{n}\frac{\delta f}{\delta p}\frac{dp}{du}=0. \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Substituons dans cette dernière, les valeurs de $\frac{dz}{du}, \frac{dp_n}{du}$ tirées des équations (4) et (5), il viendra :

$$\sum_1^{n-1}\frac{dx}{du}\left(\frac{\delta f}{dx}+p\frac{\delta f}{\delta z}+\frac{\delta f}{\delta p_n}\frac{dp}{dx_n}\right)+\sum_1^{n-1}\frac{dp}{du}\left(\frac{\delta f}{\delta p}-\frac{\delta f}{\delta p_n}\frac{dx}{dx_n}\right). \quad . \ . \quad (8)$$

Les fonctions u étant indéterminées, nous ferons disparaître la dernière somme qui entre dans cette équation, en posant les $(n-1)$ équations :

$$\frac{\delta f}{\delta p}-\frac{\delta f}{\delta p_n}\frac{dx}{dx_n}=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

L'équation (8) deviendra par là :

$$\sum_1^{n-1}\frac{dx}{du}\left(\frac{\delta f}{\delta x}+p\frac{\delta f}{\delta z}+\frac{\delta f}{\delta p_n}\frac{dp}{dx_n}\right)=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Le déterminant

$$\mathrm{D}\,\frac{x_1, \ldots, x_{n-1}}{u_1, \ldots, u_{n-1}},$$

n'étant pas nul, en général, d'après les conditions (9), qui ne contiennent pas explicitement les u, les équations (10) équivalent à celles-ci :

$$\frac{\delta f}{\delta x}+p\frac{\delta f}{\delta z}+\frac{\delta f}{\delta p_n}\frac{dp}{dx_n}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10')$$

Enfin, on déduit des équations (6), (5), (10) et (9), comme on l'a vu dans le cas de deux variables indépendantes,

$$\frac{\delta f}{\delta x_n}+p_n\frac{\delta f}{\delta z}+\frac{\delta f}{\delta p_n}\frac{dp_n}{dx_n}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Les équations (3), (9), (10′), (11) peuvent se mettre sous la forme suivante que nous avons déjà rencontrée (n° 42) :

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial f}{\partial p_1}}=\cdots=\frac{dx_n}{\frac{\partial f}{\partial p_n}}=\frac{dz}{p_1\frac{\partial f}{\partial p_1}+\cdots+p_n\frac{\partial f}{\partial p_n}}=\frac{-dp_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial f}{\partial z}}=\cdots=\frac{-dp_n}{\frac{\partial f}{\partial x_n}+p_n\frac{\partial f}{\partial z}}. \quad (12)$$

Ces équations (12) ne contiennent pas les u. On en tirera un système de valeurs :

$$x_1=f_1,\ x_2=f_2,\ldots,\ x_{n-1}=f_{n-1},\ z=f_n,\ p_1=f_{n+1},\ldots,\ p_n=f_{2n}, \quad (13)$$

chacune des fonctions f_i contenant x_n, et les valeurs initiales $z_0, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, p_{10}, \ldots, p_{n-1,0}$. Il est clair que pour achever la solution, il suffit de déterminer ces valeurs initiales en fonction des u, de manière à satisfaire aux équations (4).

108. *Détermination d'une intégrale de* (12) *satisfaisant à* (4). Substituons les valeurs (13) dans l'équation (4), et posons :

$$\frac{dz}{du}=p_1\frac{dx_1}{du}+\cdots+p_{n-1}\frac{dx_{n-1}}{du}+\mathrm{I}. \quad \ldots\ldots \quad (4')$$

Au moyen de (3), on déduira de celle-ci :

$$\frac{dp_n}{du}=\sum_1^{n-1}\left(\frac{dp}{dx_n}\frac{dx}{du}-\frac{dp}{du}\frac{dx}{dx_n}\right)+\frac{d\mathrm{I}}{dx_n} \quad \ldots\ldots \quad (3')$$

En substituant ces valeurs de $\frac{dz}{du}$ et $\frac{dp_n}{du}$ dans (7), il vient

$$\mathrm{I}\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{d\mathrm{I}}{dx_n}\frac{\partial f}{\partial p_n}=0 \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

D'où, en faisant

$$\mathrm{I}_0=\frac{dz_0}{du}-\left(p_{10}\frac{dx_{10}}{du}+\cdots+p_{n-1,0}\frac{dx_{n-1,0}}{du}\right),\quad \pi=-\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial x_n}}. \quad (15)$$

$$\mathrm{I}=\mathrm{I}_0 e^{\int_{x_{n0}}^{x_n}\pi dx} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Pour que $I = 0$, il suffit, en général, que $I_0 = 0$, ou :

$$\frac{dz_0}{du_1} = p_{10}\frac{dx_{10}}{du_1} + \cdots + p_{n-1,0}\frac{dx_{n-1,0}}{du_1}, \quad \ldots \quad (17_1)$$

. . . .

$$\frac{dz_0}{du_{n-1}} = p_{10}\frac{dx_{10}}{du_{n-1}} + \cdots + p_{n-1,0}\frac{dx_{n-1,0}}{du_{n-1}}. \quad \ldots \quad (17_{n-1})$$

On peut satisfaire à celle-ci de diverses manières (*) :

1° On peut supposer que z_0, $x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}$ soient des constantes arbitraires, et que $p_{10}, \ldots, p_{n-1,0}$ soient des fonctions quelconques des u, ou soient eux-mêmes les u. Dans ce cas, en éliminant les p_0 entre les n premières équations (15) on trouvera l'*intégrale complète :*

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, z_0, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

2° On peut supposer

$$z_0 = \varphi(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}),$$
$$p_{10} = \frac{\delta\varphi}{\delta x_{10}}, \ldots; \; p_{n-1,0} = \frac{\delta\varphi}{\delta x_{n-1,0}},$$

$x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n-1,0}$ étant des fonctions quelconques des u, ou étant pris eux-mêmes pour les u. Pour trouver l'intégrale correspondant à cette hypothèse, il faut se donner préalablement la forme de φ, afin de pouvoir éliminer les u entre les n premières équations (15). Cette intégrale est l'*intégrale générale.*

3° Enfin, on peut satisfaire aux équations (17), au moyen d'hypothèses intermédiaires entre celles dont nous venons de parler. On peut poser, en même temps,

$$z_0 = \varphi(x_{10}, \ldots, x_{m0}),$$
$$x_{m+1,0} = \text{constante}, \ldots, x_{n-1,0} = \text{constante},$$

$x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0}, p_{m+1,0}, \ldots, p_{n-1,0}$ étant des fonctions quelconques des u, et les autres p étant déterminés par les relations suivantes :

$$p_{10} = \frac{\delta\varphi}{\delta x_{10}}, \ldots, p_{m0} = \frac{\delta\varphi}{\delta x_{m0}}.$$

(*) Ce ne sont pas les seules manières de satisfaire à ces équations (n° 116, III).

109. Remarques. I. Si l'équation donnée est linéaire et de la forme :

$$X_1 p_1 + \cdots + X_n p_n = Z,$$

les n premières équations auxiliaires sont celles de Lagrange :

$$\frac{dx_1}{X_1} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Elles suffisent pour résoudre complétement le problème (§ 6).

II. Si les n premières équations (15) ne contiennent pas les p_0, on en déduira :

$$x_{10} = \psi_1(z, x_1, \ldots, x_n), \ldots, x_{n-1,0} = \psi_{n-1}(z, x_1, \ldots, x_n), z_0 = \psi_n(z, x_1, \ldots, x_n),$$

ce qui donnera l'intégrale

$$\psi_n = \varphi(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}),$$

qui appartient à une équation linéaire.

III. En exprimant que les valeurs données par les relations (15) satisfont aux équations (4) quand on suppose $u = p_0$, il vient :

$$\frac{\partial f_n}{\partial p_{10}} = f_{n+1} \frac{\partial f_1}{\partial p_{10}} + \cdots + f_{2n-1} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial p_{10}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial p_{n-1,0}} = f_{n+1} \frac{\partial f_1}{\partial p_{n-1,0}} + \cdots + f_{2n-1} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial p_{n-1,0}}.$$

Il résulte de ces équations que si $(n - 1)$ des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ ne contiennent pas un des p_0, il en est de même de la $n^{\text{ième}}$.

IV. Si l'on déduit des n premières équations (15), par élimination des p, plus d'une et moins de n relations entre z et les x, on se trouve dans le cas des équations semi-linéaires, signalé par Lie (n° 14, III), et rencontré incidemment par Serret (n° 119).

V. On peut donner de la méthode de Cauchy, dans le cas général, une interprétation géométrique symbolique dans un espace à $(n + 1)$ dimensions, d'après les idées de Lie. L'équation (1) représente ∞^{2n} éléments dans l'espace à $(n + 1)$ dimensions. Les raisonnements des numéros précédents démontrent que les éléments de toute solution de l'équation (1) sont compris parmi ceux qui satisfont au système auxiliaire (12); le système auxiliaire (12) ne contenant que ∞^{2n} éléments, contient donc seulement les éléments de l'équation (1). Les équations (4) expriment simplement comment il faut grouper les éléments des équations (12), pour que l'on ait $dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$. Cette remarque explique aussi pourquoi il suffit de considérer les n premières équations (12) dans le cas où l'équation donnée est linéaire.

110. Exemple. Soit l'équation (*)

$$x_1 x_2 \ldots x_n = p_1 p_2 \ldots p_n.$$

Les équations auxiliaires, après multiplication par $x_1 \ldots x_n = p_1 \ldots p_n$ sont :

$$p_1 dx_1 = \cdots = p_n dx_n = \frac{dz}{n} = x_1 dp_1 = \cdots = x_n dp_n,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dp_1}{p_1}, \ldots, \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dp_n}{p_n},$$

$$\frac{dz}{n} = \frac{p_1}{x_1} x_1 dx_1 = \cdots = \frac{p_n}{x_n} x_n dx_n.$$

On trouve, pour les intégrales :

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{x_{10}}{p_{10}}, \ldots, \frac{x_n}{p_n} = \frac{x_{n0}}{p_{n0}},$$

$$2\frac{z - z_0}{n} = \frac{p_{10}}{x_{10}}(x_1^2 - x_{10}^2) = \cdots = \frac{p_{n0}}{x_{n0}}(x_n^2 - x_{n0}^2),$$

avec la condition :

$$x_{10} \ldots x_{n0} = p_{10} \ldots p_{n0}.$$

En multipliant entre elles les n valeurs de $(z - z_0)$, on trouve

$$\frac{2^n}{n^n}(z - z_0)^n = (x_1^2 - x_{10}^2)(x_2^2 - x_{20}^2) \ldots (x_n^2 - x_{n0}^2),$$

(*) Cauchy, dans le mémoire cité, traite ainsi cette équation quand $n = 3$. Graindorge, n° 49, p. 50, n° 69, p. 65, intègre la même équation pour $n = 3$, par la méthode de Jacobi, sous ses deux formes. Voir aussi le n° 73, I.

intégrale complète qui contient une constante supplémentaire, si l'on regarde z_0 comme arbitraire.

111. *Cas d'exception apparente. Modifications de Mayer et Darboux.* I. Si l'équation donnée est homogène par rapport aux p, on a, à cause de $f=0$,

$$p_1\frac{\partial f}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial f}{\partial p_2}+\cdots+p_n\frac{\partial f}{\partial p_n}=0,$$

et, par conséquent, la $n^{ième}$ équation (12) donne pour intégrale

$$z = \text{constante}.$$

Il est impossible évidemment d'éliminer les p_0 entre cette équation et les $(n-1)$ relations $(13_1), \ldots, (13_{n-1})$, et par conséquent la méthode générale de Cauchy ne donne plus l'intégrale complète.

Mayer a indiqué un moyen très-simple d'arriver, tant dans ce cas que dans le cas général, à une intégrale complète contenant comme constantes $p_{10}, \ldots, p_{n-1,0}$ et z_0. Pour cela, considérons l'intégrale générale qui est telle que

$$z_0 = z'_0 + p_{10}x_{10} + \cdots + p_{n-1,0}x_{n-1,0} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

On aura, z'_0 étant une constante,

$$\frac{\partial z_0}{\partial x_{10}} = p_{10}, \ldots, \frac{\partial z_0}{\partial x_{n-1,0}} = p_{n-1,0}.$$

Par conséquent, pour trouver l'intégrale complète correspondante, il suffira d'éliminer $z_0, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}$ entre les équations $(13_1), \ldots, (13_n)$ et (19). La chose est toujours possible parce que, les x se réduisant à x_0 pour $x_n = x_{n0}$, le déterminant $D\frac{x_1, \ldots, x_{n-1}}{x_0, \ldots, x_{n-1,0}}$ n'est jamais nul, puisque pour $x_n = x_{n0}$, il est égal à l'unité. On peut donc trouver les x_0 en fonction des x.

Il est facile de généraliser ce qui précède. Posons

$$z_0 = \varphi(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

$$p_{10} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{10}}, \ldots, p_{n-1,0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1,0}} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ étant n constantes. Éliminons entre les équations $(13_1), \ldots,$ (13_n), (20) et (21) les quantités z_0, x_0 et p_0, on trouvera

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

relation qui sera une nouvelle intégrale complète. Le système des équations $(13_1), \ldots, (13_n)$ (20) (21) peut être remplacé par $(13_1), \ldots,$ (13_n) (21) (22). Si donc l'on fait $x_n = x_{n0}$, et, par suite, si les équations (13) donnent $x_1 = x_{10}, \ldots, x_{n-1} = x_{n-1,0}$, $z = z_0$, l'équation (22) conduira à la relation

$$z_0 = \varphi(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

Donc, si l'on faisait simplement $x_n = x_{n0}$ dans (22), on trouverait

$$z = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Ainsi l'intégrale complète en question se réduit à la fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, pour $x_n = x_{n0}$ (*).

[II. On peut encore satisfaire aux équations (4) en posant :

$$z = z_0' + p_{10}x_{10} + \cdots + p_{m0}x_{m0},$$

et regardant $x_{10}, \ldots, x_{m0}, p_{m+1,0}, \ldots, p_{n-1,0}$ comme étant les u, $p_{10}, \ldots, p_{m0}, x_{m+1,0}, \ldots, x_{n-1,0}, z_0'$ les constantes (**).]

(*) Mayer expose directement ces remarques au moyen de la méthode de Pfaff modifiée par Jacobi. Il donne plusieurs théorèmes intéressants sur la liaison des intégrales entre elles (voir le n° 120, note). [On voit que la méthode de Cauchy, exposée dans toute sa généralité, comme nous l'avons fait plus haut, contient implicitement la modification de Mayer.]

[(**) Darboux (Comptes rendus, 1874, t. LXXIX, pp. 1488-1489, 1875, t. LXXX, pp. 160-164) a le premier signalé cette intégrale, mais seulement dans le cas des équations semi-linéaires (voir n° 119). Il expose aussi ses recherches au moyen de la méthode de Pfaff modifiée par Jacobi.]

CHAPITRE II.

RECHERCHES DE SERRET.

—

§ 30. *Équations à deux variables indépendantes.*

112. *Forme donnée à la solution générale dans les recherches de Serret.* L'équation

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

conduit aux équations auxiliaires

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\dfrac{\partial f}{\partial p} + q\dfrac{\partial f}{\partial q}} = \frac{-dp}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + p\dfrac{\partial f}{\partial z}} = \frac{-dq}{\dfrac{\partial f}{\partial y} + q\dfrac{\partial f}{\partial z}}, \quad \ldots \quad (2)$$

dont les intégrales sont

$$y = f_1(x, y_0, z_0, q_0), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3_1)$$
$$z = f_2(x, y_0, z_0, q_0), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3_2)$$
$$p = f_3(x, y_0, z_0, q_0), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3_3)$$
$$q = f_4(x, y_0, z_0, q_0). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3_4)$$

Nous supposerons que l'on ait déduit des deux premières l'intégrale complète

$$z = \mathrm{M}(x, y, y_0, z_0). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

On aura, par conséquent :

$$p = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} = \mathrm{N}(x, y, y_0, z_0), \quad q = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \mathrm{P}(x, y, y_0, z_0) \quad \ldots \quad (5)$$

Si l'on veut avoir l'intégrale générale, on n'a qu'à supposer

$$z_0 = \varphi y_0,$$
$$q_0 = \varphi' y_0,$$

et joindre à l'équation (4) sa dérivée par rapport à y_0 :

$$\frac{\partial M}{\partial y_0}+\frac{\partial M}{\partial z_0}q_0=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Les équations (4), (5), (6) sont équivalentes aux équations (3) et les remplaceront complétement dans ce qui suit (*).

113. *Nouvelle forme de la valeur de* I, *trouvée par Serret.* On peut obtenir la différentielle totale de $f(x, y, z, p, q)$, en ajoutant les différentielles de l'équation (3), ou des équations équivalentes (4), (5), (6), multipliées par des facteurs tels que les différentielles dy_0, dz_0, dq_0 disparaissent du résultat final. Il est évident que l'on doit multiplier par 0, ou laisser de côté l'équation (6), qui contient seule q_0. Multiplions les équations (1), (5_1), (5_2) respectivement par μ, ν, ρ. On aura :

$$df=\left(\mu\frac{\partial M}{\partial x}+\nu\frac{\partial N}{\partial x}+\rho\frac{\partial P}{\partial x}\right)dx$$
$$+\left(\mu\frac{\partial M}{\partial y}+\nu\frac{\partial N}{\partial y}+\rho\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy-\mu dz-\nu dp-\rho dq=0,$$

si μ, ν, ρ satisfont aux relations :

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y_0}+\nu\frac{\partial N}{\partial y_0}+\rho\frac{\partial P}{\partial y_0}=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7_1)$$

$$\mu\frac{\partial M}{\partial z_0}+\nu\frac{\partial N}{\partial z_0}+\rho\frac{\partial P}{\partial z_0}=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7_2)$$

(*) Serret établit assez péniblement cette équivalence, en s'appuyant sur le principe insuffisamment démontré, que nous avons signalé au n° 105 en note. Il est facile de corriger ce petit défaut comme on l'a fait au numéro cité. Mais cette vérification à posteriori de la méthode de Cauchy est inutile, puisque tous les calculs de Cauchy peuvent se faire en sens inverse. C'est pour la même raison que nous avons supprimé la vérification à postériori de la méthode de Pfaff modifiée par Jacobi et donnée dans les *Vorlesungen*, pp. 364-369. Voir aussi n° 109, V.

Il est clair que l'on a, d'après ces relations :

$$\pi = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial p}} = -\frac{\mu}{\nu},$$

c'est-à-dire, d'après la dernière des équations (7) :

$$\pi = -\frac{\mu}{\nu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial z_0}}{\frac{\partial M}{\partial z_0}} + \frac{\rho}{\nu}\frac{\frac{\partial P}{\partial z_0}}{\frac{\partial M}{\partial z_0}} = \frac{\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0}}{\frac{\partial M}{\partial z_0}} + \frac{\rho}{\nu}\frac{\frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0}}{\frac{\partial M}{\partial z_0}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\log\frac{\partial M}{\partial z_0} + \frac{\rho}{\nu}\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{\partial M}{\partial z_0}.$$

Remarquons maintenant que pour calculer l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} \pi dx,$$

nous devons supposer π exprimé en x seul, par le moyen des équations (3) ou des équations (4), (5), (6). Nous pouvons donc nous servir de celles-ci pour transformer π. Or, l'équation (6) qui est équivalente à (3_1), mise sous la forme :

$$-q_0 = \frac{\frac{\partial M}{\partial y_0}}{\frac{\partial M}{\partial z_0}},$$

donne

$$\frac{\partial M}{\partial z_0}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial y_0 \partial x} + \frac{\partial^2 M}{\partial y_0 \partial y}\frac{dy}{dx}\right) - \frac{\partial M}{\partial y_0}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial z_0 \partial x} + \frac{\partial^2 M}{\partial z_0 \partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Cette équation est vérifiée si l'on y fait :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho}{\nu}.$$

En effet, elle devient, par cette substitution :

$$\frac{\partial M}{\partial z_0}\left(\frac{\partial N}{\partial y_0}+\frac{\partial P}{\partial y_0}\frac{\rho}{\nu}\right)-\frac{\partial M}{\partial y_0}\left(\frac{\partial N}{\partial z_0}+\frac{\partial P}{\partial z_0}\frac{\rho}{\nu}\right)=0,$$

ou encore, après multiplication par ν, à cause des équations (7) :

$$\frac{\partial M}{\partial z_0}\left(-\mu\frac{\partial M}{\partial y_0}\right)-\frac{\partial M}{\partial y_0}\left(-\mu\frac{\partial M}{\partial z_0}\right)=0.$$

On peut donc remplacer $\frac{\rho}{\nu}$ par $\frac{dy}{dx}$ dans la valeur de π, qui devient ainsi :

$$\pi=\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{\partial M}{\partial z_0}+\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{\partial M}{\partial z_0}\times\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\log\frac{\partial M}{\partial z_0}\cdot$$

Par conséquent,

$$I=I_0e^{\int_{x_0}^{x}\pi dx}=I_0e^{\log\frac{\partial M}{\partial z_0}-\log\left(\frac{\partial M}{\partial z_0}\right)_{x=x_0}}=I_0\frac{\partial M}{\partial z_0};$$

car $M=z=z_0$ pour $x=x_0$, et, par suite, $\left(\frac{\partial M}{\partial z_0}\right)_{x=x_0}=1$.

114. *Examen du cas critique.* La formule précédente nous permettra de discuter le cas où la forme de la fonction φy, à laquelle z doit se réduire pour $x=x_0$, est telle que l'intégrale $\int_{x_0}^{x}\pi dx$ a une valeur infinie et positive, telle par conséquent que

$$-\log\frac{\partial M}{\partial z_0}=\infty,\quad\text{ou}\quad\frac{\partial M}{\partial z_0}=0,$$

quand $x=x_0$. Dans ce cas, on n'est plus sûr, à priori, que

$$I=0,$$

quoique $I_0=0$. On devra donc vérifier, à posteriori, si l'on a vraiment $I=0$. Quand il en sera ainsi, il existera encore une solution $z=M$, se réduisant à $z=\varphi y$, pour $x=x_0$, mais chose remarquable, elle est fournie par *la solution complète*, comme l'a montré Serret. Les raisonnements de ce géomètre s'appliquent, non-seulement au cas où

$$-\log\frac{\partial M}{\partial z_0},$$

est infini, mais encore à tous les cas, où cette expression, pour $x = x_0$, prend une valeur différente de zéro, $\left(\frac{\partial M}{\partial z_0}\right)$ étant différent de l'unité, pour $x = x_0$.

Soit, en effet, pour $x = x_0$,

$$\frac{\partial M}{\partial z_0} = \text{constante différente de l'unité},$$

et supposons que $z = M$, pour $x = x_0$, devienne $z = \varphi y$, ou encore que pour $x = x_0$, $y = y_0$, on ait $z_0 = \varphi y_0$. Les équations (5), ou les équations (4) (5) (6), doivent donc être identiquement satisfaites pour ces valeurs. Or, si l'on suppose

$$x = x_0,\quad y = y_0,\quad z_0 = \varphi y_0,$$

dans l'équation (6), celle-ci ne peut pas être satisfaite, à moins qu'elle ne le soit déjà pour

$$x = x_0,\quad z_0 = \varphi y_0,$$

quelque soit y. En effet, s'il en était autrement, on tirerait de (6) la valeur $y = y_0$, après substitution de

$$x = x_0,\quad z_0 = \varphi y_0,$$

Or, pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait, pour $x = x_0$, $\frac{\partial M}{\partial z_0} = 1$, ce qui est contraire à l'hypothèse (*).

(*) Ce raisonnement n'est vrai qu'en général. On admet que la fonction M est telle, que l'on ne puisse y faire $x = x_0$, $y = y_0$, sans que l'on ait, non-seulement $M = z_0$, mais aussi $\frac{\partial M}{\partial z_0} = 1$. La valeur de $\frac{\partial M}{\partial z_0}$ est donnée par l'équation (6); donc l'équation (6) doit conduire à la relation $\frac{\partial M}{\partial z_0} = 1$, pour $x = x_0$, $y = y_0$, sauf les cas où y_0 n'existe pas dans cette équation. Serret est peu précis dans les raisonnements qui se rapportent à ce cas critique, qui a besoin encore d'être étudié plus à fond.

Ainsi y_0 disparaît de l'équation (6) quand on fait $x = x_0$. Mais l'équation (6) est la dérivée de l'équation (4) par rapport à y_0. Donc y_0 disparaît aussi de l'équation (4) quand on fait $x = x_0$, puisque la dérivée du premier membre de (4), c'est-à-dire le premier membre de (6) est identiquement nul pour $x = x_0$. Mais nous savons que l'équation (4), pour $x = x_0$, $y = y_0$ donne $z_0 = \varphi y_0$; donc pour $x = x_0$ simplement, elle donne $z = \varphi y$. Dans le cas actuel, la fonction $z_0 = \varphi y_0$ est donc telle que la solution

$$z = \mathrm{M}$$

donne $z = \varphi y$, pour $x = x_0$, sans qu'il soit nécessaire d'éliminer y_0 entre cette équation et l'équation (6); ce qu'il fallait démontrer.

Autrement : dans le cas, le seul important, pour la théorie qui nous occupe, où $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z_0} = 0$ pour $x = x_0$, on a aussi, à cause de l'équation (6), $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y_0} = 0$, et, par suite, pour $x = x_0$, y_0 n'entre plus dans l'équation (4). Ce raisonnement est plus simple que celui de Serret, et s'applique à des fonctions qui, pour $x = x_0$, $y = y_0$, ne donneraient pas $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z_0} = 1$.

115. Exemple. Soit l'équation

$$pqy - pz + aq = 0,$$

a étant une constante. Les équations auxiliaires

$$\frac{-pdx}{aq} = \frac{qdy}{pz} = \frac{dz}{pqy} = \frac{dp}{p^2} = \frac{dq}{0},$$

ont pour intégrale

$$q = q_0, \quad p = aq_0\mathrm{R},$$

$$z = \mathrm{R}\left[z_0(z_0 - qy_0) + aq_0(x - x_0)\right],$$

$$y = \mathrm{R}\left[y_0(z_0 - qy_0) - a(x - x_0)\right],$$

R étant défini par la rélation :

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \sqrt{(z_0 - qy_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}.$$

On en déduit, pour l'intégrale complète :

$$z = \frac{y}{y_0}\left[z_0 - \frac{a}{y_0}(x - x_0)\right] + \sqrt{\left(\frac{y^2}{y_0^2} - 1\right)(x - x_0)\left[-2a\frac{z_0}{y_0} + \frac{a^2}{y_0^2}(x - x_0)\right]} = \mathrm{M}.$$

D'ailleurs,

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z_0} = \mathrm{R}\,(z_0 - q_0 y_0).$$

Si l'on suppose $z_0 - q_0 y_0 = 0$, on a :

$$z_0 = \alpha y_0, \quad q = \alpha, \quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z_0} = 0,$$

α étant une constante. Or, si l'on introduit ces valeurs de z_0 et de q_0 dans l'intégrale complète, on trouve que, pour $x = x_0$, il vient $z = \alpha y$, ce qui est le résultat indiqué par le théorème de Serret.

§ 31. *Équations à n variables.*

116. *Forme donnée à l'intégrale générale dans les recherches de Serret.* L'équation

$$f(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

conduit aux équations auxiliaires :

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial f}{\partial p_1}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{\partial f}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\sum p\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{-\,dp_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial f}{\partial z}} = \dots = \frac{-\,dp_n}{\frac{\partial f}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial f}{\partial z}}, \quad (2)$$

dont nous représentons les intégrales par les équations :

$$x_i = f_i\,(x_n, x_{10}, \dots, x_{n-1,0}, z_0, p_{10}, \dots, p_{n-1,0}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3_i)$$

$$z = f_n\,(x_n, x_{10}, \dots, x_{n-1,0}, z_0, p_{10}, \dots, p_{n-1,0}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3_n)$$

$$p_i = f_{n+i}\,(x_n, x_{10}, \dots, x_{n-1,0}, z_0, p_{10}, \dots, p_{n-1,0}) \quad . \quad . \quad . \quad (3_{n+i})$$

I. Soit

$$\mathrm{F}\,(z, x_1, \dots, x_n, z_0, x_{10}, \dots, x_{n-1,0}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

l'intégrale complète, obtenue par élimination des p_0 entre les n premières équations (3). On pourra remplacer n des équations (3), par les suivantes qui donnent les valeurs des p :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

II. Veut-on avoir l'intégrale générale, on posera (n° 10) :

$$z_0 = \varphi\,(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n-1,0}),$$

$$p_{10} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{10}}, \ldots, p_{n-1,0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1,0}},$$

et on éliminera les x_0 entre les n premières équations (3), ou entre (4) et les équations suivantes déduites de (4) :

$$\frac{\partial F}{\partial x_{10}} + p_{10} \frac{\partial F}{\partial z_0} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_{n-1,0}} + p_{n-1,0} \frac{\partial F}{\partial z_0} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Les équations (4) (5) (6) sont équivalentes aux équations (3).

III. On trouve des intégrales moins générales si l'on suppose,

$$z = \varphi\,(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}),$$

$$p_{10} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{10}}, \ldots, p_{n-1,0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1,0}},$$

et, en outre, que les x_0 soient liés entre eux par des équations :

$$x_{m+1,0} = \varphi_1\,(x_{10}, \ldots, x_{m0}), \ldots, x_{n-1,0} = \varphi_{n-m-1}\,(x_{10}, \ldots, x_{m0}).$$

Les intégrales moins générales dont il s'agit, ou intégrales mixtes, sont donnéespar les équations (n° 10) :

$$F\,(z, x_1, \ldots, x_n, z_0, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_{10}} + \frac{\partial F}{\partial z} p_{10} + \sum_{m+1}^{n-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_{i0}} + \frac{\partial F}{\partial z_0} p_{i0} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{10}} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (7_1)$$

. . . .

$$\frac{\partial F}{\partial x_{m0}} + \frac{\partial F}{\partial z} p_{m0} + \sum_{m+1}^{n-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_{i0}} + \frac{\partial F}{\partial z_0} p_{i0} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{m0}} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (7_m)$$

Remarque. Dans ce dernier cas, on emploie, au fond, m variables auxiliaires $x_{10}, \ldots, x_{m0}$ et $(n - m)$ fonctions arbitraires;

dans le cas de la solution générale, on emploie $(n-1)$ variables auxiliaires et une fonction arbitraire.

117. *Nouvelle forme de la valeur de* I, *trouvée par Serret.* Occupons-nous, en premier lieu, du cas où

$$\mathrm{D}\frac{f_1, \dots, f_{n-1}}{p_{10}, \dots, p_{n-1,0}}$$

n'est pas nul. Nous pouvons, dans ce cas, supposer l'équation (4) mise sous la forme :

$$z = \mathrm{M}(x_1, \dots, x_n, z_0, x_{10}, \dots, x_{n-1,0}), \quad \dots \dots \quad (8)$$

et les équations (5) et (6) sous la suivante :

$$p_1 = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_1} = \mathrm{N}_1, \dots; p_n = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_n} = \mathrm{N}_n, \quad \dots \dots \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_{10}} + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z_0} p_{10} = 0, \dots, \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_{n-1,0}} + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z_0} p_{n-1,0} = 0 \quad \dots \quad (10)$$

L'ensemble de ces équations, qui est équivalent au système (3), va nous permettre de calculer I.

On peut obtenir la différentielle totale df du premier membre de $f=0$, en ajoutant la différentielle de l'équation (8) et celle des équations (9), après les avoir multipliées par des facteurs $\mu, \nu_1, \dots, \nu_n$, propres à faire disparaître dz_0, $dx_{10}, \dots, dx_{n-1,0}$. On a donc :

$$df = \sum_1^n \left(\mu \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial x} + \dots + \nu_n \frac{\partial \mathrm{N}_n}{\partial x}\right) - (\mu dz + \nu_1 dp_1 + \dots + \nu_n dp_n),$$

les facteurs $\mu, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ devant satisfaire aux n relations :

$$\mu \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z_0} + \nu_1 \frac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial z_0} + \dots + \nu_n \frac{\partial \mathrm{N}_n}{\partial z_0} = 0, \quad \dots \quad (11_1)$$

$$\mu \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_{10}} + \nu_1 \frac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial x_{10}} + \dots + \nu_n \frac{\partial \mathrm{N}_n}{\partial x_{10}} = 0, \quad \dots \quad (11_2)$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\mu \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_{n-1,0}} + \nu_1 \frac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial x_{n-1,0}} + \dots + \nu_n \frac{\partial \mathrm{N}_n}{\partial x_{n-1,0}} = 0. \quad \dots \quad (11_n)$$

D'après la valeur de df et la premiere de ces équations, on a :

$$\pi = -\frac{\frac{\delta f}{\delta z}}{\frac{\delta f}{\delta p_n}} = -\frac{\mu}{\nu_n} = \frac{\nu_1}{\nu_n}\frac{\frac{\delta \mathrm{N}_1}{\delta z_0}}{\frac{\delta \mathrm{M}}{\delta z_0}} + \cdots + \frac{\nu_{n-1}}{\nu_n}\frac{\frac{\delta \mathrm{N}_{n-1}}{\delta z_0}}{\frac{\delta \mathrm{M}}{\delta z_0}} + \frac{\frac{\delta \mathrm{N}_n}{\delta z_0}}{\frac{\delta \mathrm{M}}{\delta z_0}}.$$

On devrait éliminer $x_1, \ldots, x_{n-1}$ de cette valeur de π, au moyen des équations (10); mais on peut auparavant transformer cette expression, au moyen des équations (10) elles-mêmes mises sous la forme :

$$-p_0 = \frac{\frac{\delta \mathrm{M}}{\delta z_0}}{\frac{\delta \mathrm{M}}{\delta x_0}}.$$

On tire de celle-ci, en dérivant par rapport à x_n :

$$\frac{\delta \mathrm{M}}{\delta z_0}\left(\frac{\delta \mathrm{N}_1}{\delta x_0}\frac{dx_1}{dx_n} + \cdots + \frac{\delta \mathrm{N}_{n-1}}{\delta x_0}\frac{dx_{n-1}}{dx_n} + \frac{\delta x_0}{\delta \mathrm{N}}\right) -$$
$$\frac{\delta \mathrm{M}}{\delta x_0}\left(\frac{\delta \mathrm{N}_1}{\delta z_0}\frac{dx_1}{dx_n} + \cdots + \frac{\delta \mathrm{N}_{n-1}}{\delta x_0}\frac{dx_{n-1}}{dx_n} + \frac{\delta \mathrm{N}_n}{\delta z_0}\right) = 0.$$

Ces équations, à cause de (11), sont identiquement satisfaites par

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{\nu_1}{\nu_n}, \ldots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{\nu_{n-1}}{\nu_n}.$$

Donc la valeur de π peut s'écrire

$$\pi = \frac{\frac{\delta \mathrm{N}_1}{\delta z_0}}{\frac{\delta \mathrm{M}}{\delta z_0}}\frac{dx_1}{dx_n} + \cdots + \frac{\frac{\delta \mathrm{N}_{n-1}}{\delta z_0}}{\frac{\delta \mathrm{M}}{\delta z_0}}\frac{dx_{n-1}}{dx_n} + \frac{\frac{\delta \mathrm{N}_n}{\delta z_0}}{\frac{\delta \mathrm{M}}{\delta z_0}} = \frac{d}{dx_n}\log\frac{\delta \mathrm{M}}{\delta z_0}.$$

Par conséquent, en se rappelant que, pour $x_n = x_{n0}$,

$$\frac{\delta \mathrm{M}}{\delta z_0} = 1,$$

on a :

$$I = I_0 e^{\int_{x_{n0}}^{x_n} \pi dx} = I_0 \frac{\partial M}{\partial z_0},$$

ce qui est la formule de SERRET.

118. *Examen du cas critique par Serret.* Supposons que la fonction φ ait été choisie de telle sorte que

$$\frac{\partial M}{\partial z_0} = \text{constante différente de l'unité} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

pour $x_n = x_{n0}$. Il se peut qu'il existe une solution de l'équation (1), telle néanmoins que pour $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, \ldots, x_n = x_{n0}$, on ait $z = z_0 = \varphi(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n-1,0})$. Dans ce cas, je dis que cette solution n'est pas l'intégrale générale correspondant aux équations (8) (9) (10), mais est l'intégrale complète, ou une autre solution intermédiaire entre l'intégrale générale et l'intégrale complète.

En effet, lorsque les circonstances précédentes se présentent, les équations (10), à cause de l'équation (12), ne peuvent pas donner $x_1 = x_{10}, \ldots, x_{n-1} = x_{n-1,0}$ quand $x_n = x_{n,0}$, car cela présuppose, en général, $\frac{\partial M}{\partial z_0} = 1$. On doit donc admettre que pour $x_n = x_{n0}$, ces équations sont identiquement satisfaites, quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, soit en restant distinctes, soit en se réduisant à un nombre m moindre que $(n-1)$.

Considérons d'abord le premier cas. Supposons identiquement nuls, pour $x_n = x_{n0}$, les premiers membres des équations (10). Il faut en conclure, que $(z - M)$ ne contient pas $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n-1,0}$ quand $x_n = x_{n0}$, car les premiers membres des équations (10) sont les dérivées de $(z - M)$, par rapport à $x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}$. Cependant $z - M = 0$, pour $x_1 = x_{10}, \ldots, x_{n-1} = x_{n-1,0}$, donne $z = z_0 = \varphi(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0})$ si $x_n = x_{n0}$. Donc, pour $x_n = x_{n0}$, on a

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Considérons maintenant le cas où les équations (10) se réduisent à $k=(n-1-m)$ équations distinctes, quand on fait $x_n = x_{n0}$. Tirons-en les valeurs de k d'entre les constantes :

$$x_{m+1,0} = \varphi_1(x_{10}, \ldots, x_{m0}), \ldots, x_{n-1,0} = \varphi_k(x_{10}, \ldots, x_{m0}),$$

et substituons-les dans les équations (10), et dans (8). Après cette substitution, il est clair que les équations (10) deviennent des identités. Il en est de même, par conséquent, des équations suivantes qui sont des combinaisons linéaires des équations (10) :

$$\frac{\partial M}{\partial x_0} + \frac{\partial M}{\partial z_0}\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} + \sum_{m+1}^{n-1}\left(\frac{\partial M}{\partial x_{i0}} + \frac{\partial M}{\partial z_0}\frac{\partial \varphi}{\partial x_{i0}}\right)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_0} = 0; \quad . \; . \; . \quad (13)$$

par suite, $z - M = 0$, dont les équations (13) sont les dérivées identiquement nulles, par rapport à $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0}$, ne contient aucune de ces constantes arbitraires. Mais, par hypothèse, pour $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, \ldots, x_{n-1} = x_{n-1,0}$ quand $x_n = x_{n0}$, $z - M = 0$ donne

$$z = z_0 = \varphi(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}).$$

Donc, enfin pour $x_n = x_{n0}$, la solution mixte, définie par les équations (8) (9) (13), est telle que

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

ce qui démontre le théorème annoncé plus haut.

On arrive au même résultat, au moyen du raisonnement plus simple du n° 114. Le cas d'exception est caractérisé par

$$\left(\frac{\partial M}{\partial z_0}\right)_{x_n = x_{n0}} = 0.$$

On a, par suite, à cause des équations (10) :

$$\frac{\partial M}{\partial x_{10}} = 0, \ldots, \frac{\partial M}{\partial x_{n-1,0}} = 0,$$

ce qui conduit aux conclusions précédentes.

119. *Cas des équations semi-linéaires.* Occupons-nous, en second lieu, du cas des équations semi-linéaires. Les relations (3), par élimination des p_0, donnent m relations entre les variables et leurs valeurs initiales (n° 14, III et 109, IV). On peut alors considérer comme intégrale les relations en question, que nous supposons mises sous la forme :

$$x_{10} = \psi_1(z, x_1, \dots, x_n, x_{m0}, \dots, x_{n-1,0}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14_1)$$

. . . .

$$x_{m-1,0} = \psi_{m-1}(z, x_1, \dots, x_n, x_{m0}, \dots, x_{n-1,0}), \quad . \quad . \quad . \quad (14_{m-1})$$

$$z_0 = \psi_m(z, x_1, \dots, x_n, x_{m0}, \dots, x_{n-1,0}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14_m)$$

On peut remplacer (n° 15) cette intégrale par la suivante :

$$\lambda_1\psi_1 + \dots + \lambda_{m-1}\psi_{m-1} - \psi_m = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ étant des constantes arbitraires, ou encore par

$$F(z, x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, x_{m0}, \dots, x_{n-1,0}) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

en représentant le premier membre par un seul signe fonctionnel. Les valeurs des p sont données par les équations :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

où

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda_1\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \dots + \lambda_{m-1}\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial x} - \frac{\partial \psi_m}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \lambda_1\frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \dots + \lambda_{m-1}\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial z} - \frac{\partial \psi_m}{\partial z}.$$

On trouve une intégrale générale, en égalant à 0, la dérivée de F par rapport aux constantes x_0. On trouve ainsi les équations suivantes :

$$\lambda_1\frac{\partial \psi_1}{\partial x_0} + \dots + \lambda_{m-1}\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial x_0} - \frac{\partial \psi_m}{\partial x_0} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Les équations (14), (17), (18) remplacent complétement le système (3) et permettent de calculer π, comme l'a montré Serret, en employant toutefois, au lieu de la relation (15), celle que l'on déduit des équations (14) et d'une relation arbitraire

$$z_0 = \varphi(x_{10}, \dots, x_{n-1,0}),$$

qui remplace l'équation dont nous supposons l'existence :

$$z_0 = \varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, x_{m0}, \dots, x_{n-1,0}) \quad \dots\dots \quad (19)$$

Il n'y a de modification dans les calculs qu'en ce que $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$; sont remplacés par $p_{10}, \dots, p_{m-1,0}$, comme on le voit facilement.

Posons, comme Serret,

$$\omega \frac{\partial F}{\partial z} = 1, \quad \dots\dots \quad (20)$$

de manière que les équations (17) deviennent

$$p_1 + \omega \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \dots, p_n + \omega \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \quad \dots\dots \quad (17')$$

On reproduira la différentielle totale df du premier membre de l'équation donnée $f = 0$, en ajoutant les différentielles totales des équations (20) et (17'), après les avoir multipliées par des facteurs $\mu, \nu_1, \dots, \nu_n$ propres à faire disparaître les différentielles des n quantités $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, x_{m0}, \dots, x_{n-1,0}$ et ω. On aura

$$\pi = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\dfrac{\partial f}{\partial p_n}} = -\frac{\omega}{\nu_n}\left(\mu \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial z} + \dots + \nu_n \frac{\partial^2 F}{\partial z_n \partial z}\right).$$

A cause de l'équation (20),

$$\omega \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -\frac{\partial \log \omega}{\partial z}, \quad \omega \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial \log \omega}{\partial x},$$

et, par conséquent, la valeur de π devient :

$$\pi = \frac{1}{\nu_n}\left(\mu \frac{\partial \log \omega}{\partial z} + \nu_1 \frac{\partial \log \omega}{\partial x_1} + \dots + \nu_n \frac{\partial \log \omega}{\partial x_n}\right).$$

On peut mettre cette valeur sous une forme plus simple, en en faisant disparaître les facteurs auxiliaires. En exprimant que les différentielles des λ disparaissent de df, il vient :

$$\mu \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \nu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \cdots + \nu_n \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu \frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial z} + \nu_1 \frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial x_1} + \cdots + \nu_n \frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial x_n} = 0.$$

Le multiplicateur de $d\omega$ devant aussi être nul, on a, en outre,

$$\mu \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} + \nu_1 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1} + \cdots + \nu_n \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_n} = 0,$$

égalité, qui se réduit, à cause des précédentes, à :

$$\mu \frac{\partial \psi_m}{\partial z} + \nu_1 \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} + \cdots + \nu_n \frac{\partial \psi_m}{\partial x_n} = 0,$$

Enfin, à cause de la disparition des différentielles $dx_{m0}, \ldots, dx_{n-1,0}$:

$$\mu \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial z \partial x_{m0}} + \nu_1 \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_1 \partial x_{m0}} + \cdots + \nu_n \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_n \partial x_{m0}} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial z \partial x_{n-1,0}} + \nu_1 \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_1 \partial x_{n-1,0}} + \cdots + \nu_n \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_n \partial x_{n-1,0}} = 0.$$

Toutes ces égalités entre les μ sont vérifiées, si l'on pose

$$\frac{dx_1}{\nu_1} = \cdots = \frac{dx_n}{\nu_n} = \frac{dz}{\mu},$$

à cause des équations (14) et (18). Donc enfin

$$\pi dx_n = \frac{d \log \omega}{dx_n} dx_n.$$

Pour $x_1 = x_{10}, \dots, x_n = x_{n0}, z = z_0$, on a $\omega = 1$. Donc

$$I = I_0 e^{\int_{x_{n0}}^{x_n} \pi dx} = I_0 \omega.$$

Dans le cas où l'on a $\omega = \infty$, au lieu de $\omega = 1$, pour $x_n = x_{n0}$, on n'est plus sûr que $I = 0$, en même temps que I_0. Dans le cas où I est nul malgré cette circonstance, il y a encore une solution. On reconnaît, comme dans les cas précédents, qu'elle est donnée par l'intégrale complète, ou une intégrale intermédiaire entre celle-ci et l'intégrale générale, et non par l'intégrale générale même (*).

[Remarque. Si l'équation

$$\frac{dz}{dt} + H(t, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0 \quad \dots \dots \quad (21)$$

conduit à des équations auxiliaires ayant pour solutions les relations (14), on trouvera, par le n° 111, II, pour intégrale de cette équation semi-linéaire (21) :

$$z = z'_0 + p_{10}\psi_1 + \dots + p_{m-1,0}\psi_{m-1} + V, \quad \dots \dots \quad (22)$$

V étant la valeur de z déduite de (14_m). Dans le cas actuel z n'entre pas dans les équations (14_1), ..., (14_{m-1}). L'intégrale (22) a été signalée par Darboux (voir n° 111, II).]

(*) Comme on le voit, la méthode générale de Cauchy est préférable à celle de Serret dans l'exposition de ce cas remarquable, surtout quand on introduit dans cette théorie les idées de Lie sur les équations semi-linéaires.

CHAPITRE III.

MÉTHODE DE LIE, CONSIDÉRÉE COMME UNE EXTENSION DE CELLE DE CAUCHY.

§ 32. *Exposition de Mayer* (*).

120. *Moyen de déduire d'une intégrale complète, une intégrale qui, pour* $x_n = x_{n0}$, *soit une fonction donnée des autres variables* (**). Soit

$$z = z_0 + F(x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_{n-1}) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

(*) Nous empruntons ce qui suit à deux notices de Mayer insérées dans les Nachrichten de Göttingen de 1872, n° 21, pp. 405-420 et n° 24, pp. 467-472. La première est entièrement consacrée à la théorie des transformations des équations aux dérivées partielles. Mayer fait remarquer que les diverses recherches de Jacobi sur ce sujet, tant dans la *Nova methodus* que dans les *Vorlesungen*, doivent être soumises à une révision sévère. De son côté, Lie (Nachrichten de 1872, p. 484) dit, à propos des recherches de Mayer, que sa propre méthode permet de traiter facilement la théorie générale des transformations. Nous avons cru, après ces déclarations, devoir laisser de côté toutes les recherches sur ce sujet, parce qu'elles n'ont pas un caractère définitif. Nous n'empruntons à Mayer que le strict nécessaire. [Notre travail était entre les mains de M. Quetelet, quand Mayer a publié tout au long (Math. Ann., t. VI, pp. 162-191) son exposition de la méthode de Lie sous le titre : *Die* Lie'*sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen.* Dans les §§ 1 et 2, pp. 162-166, il donne la démonstration directe des conditions d'intégrabilité d'un système d'équations aux dérivées partielles, seul emprunt qu'il fait dans son exposition à la méthode de Jacobi.]

(**) Mayer, Nachrichten, 1872, n° 21, théorème Ier, pp. 407-409. Le mode de démonstration est emprunté au mémoire déjà cité du même auteur (Mathematische Annalen, t. III, pp. 449-450). Toute la fin de ce mémoire, pp. 449-452, est consacrée à la théorie des transformations. [Même théorème, dit théorème Ier, mais spécialisé, dans l'exposition complète de Mayer (Math. Ann., t. VI, § 3, pp. 166-169). L'auteur énonce explicitement les conditons algébriques relatives à la résolubilité des équations utilisées. Toutes les conditions de ce genre ont été laissées de côté dans notre exposition.]

une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles, où z n'entre pas explicitement. Posons :

$$Z = z'_0 + F - F_0 + F'_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$F_0 = F(x_{10}, \ldots, x_{n0}, c_1, \ldots, c_{n-1}),$$

$$F'_0 = F'(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}).$$

Tirons les valeurs de $c_1, \ldots, c_{n-1}, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}$ des $2(n-1)$ équations :

$$\frac{\partial F}{\partial c_1} = \frac{\partial F_0}{\partial c_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial c_{n-1}} = \frac{\partial F_0}{\partial c_{n-1}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\frac{\partial F'_0}{\partial x_{10}} = \frac{\partial F_0}{\partial x_{10}}, \ldots, \frac{\partial F'_0}{\partial x_{n-1,0}} = \frac{\partial F_0}{\partial x_{n-1,0}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

substituons-les dans la valeur de Z et nous aurons une nouvelle intégrale de l'équation. En effet, dans cette hypothèse, on a :

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial c} - \frac{\partial F_0}{\partial c}\right)\frac{dc}{dx} + \Sigma\left(\frac{\partial F'_0}{\partial x_0} - \frac{\partial F_0}{\partial x_0}\right)\frac{dx_0}{dx},$$

ou, d'après les équations (3) et (4),

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dz}{dx}.$$

Z est donc une solution de l'équation.

Faisons $x_n = x_{n0}$ dans les équations (3); il est clair qu'elles seront satisfaites par les valeurs $x_1 = x_{10}, \ldots, x_{n-1} = x_{n-1,0}$. Donc si l'on fait $x_n = x_{n0}$, dans (2) il vient

$$Z_{x_n = x_{n0}} = z'_0 + F'_0(x_1, \ldots, x_{n-1}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Ainsi, on peut déduire de l'intégrale complète, une intégrale qui se réduit à la forme (5) pour $x_n = x_{n0}$.

Cas particulier. Soit

$$F'_0 = b_1 x_{10} + \cdots + b_{n-1} x_{n-1,0},$$

les équations (4) deviennent

$$b_1 = \frac{\partial F}{\partial x_{10}}, \ldots, b_{n-1} = \frac{\partial F}{\partial x_{n-1,0}},$$

et l'intégrale nouvelle, pour $x_n = x_{n0}$, doit se réduire à

$$z'_0 + b_1 x_1 + \cdots + b_{n-1} x_{n-1}.$$

Remarque. Les équations (3), (4) peuvent donner plusieurs valeurs pour $x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}$. Il faut choisir, pour les substituer dans (2), celles de ces valeurs qui peuvent devenir infiniment peu différentes de $x_1, \ldots, x_{n-1}$, quand x_n approche indéfiniment de x_{n0}, sans quoi, la démonstration donnée plus haut serait insuffisante.

121. *Transformation d'une équation en une autre équivalente* (*). Soit considérée une fonction

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_{n-1}),$$

de n variables x, et de $(n-1)$ variables x'. Posons :

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x'_1} = \frac{dz'}{dx'_1}, \cdots, \frac{\delta\varphi}{\delta x'_{n-1}} = \frac{dz'}{dx'_{n-1}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

et tirons de ces relations (6) les valeurs de

$$x_1, \ldots, x_{n-1}, \text{ en fonction de } x'_1, \ldots, x'_{n-1}, x_n, \frac{dz'}{dx'_1}, \cdots, \frac{dz'}{dx'_{n-1}}.$$

Soit ensuite, à cause de ces valeurs :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\delta\varphi}{\delta x_n} + \mathrm{H}\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\delta\varphi}{\delta x_1}, \cdots, \frac{\delta\varphi}{\delta x_{n-1}}\right) \\ &= -\mathrm{H}'\left(x'_1, \ldots, x'_{n-1}, x_n, \frac{dz'}{dx'_1}, \cdots, \frac{dz'}{dx'_{n-1}}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Je dis que les équations :

$$\frac{dz}{dx_n} + \mathrm{H}\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{dz}{dx_1}, \cdots, \frac{dz}{dx_{n-1}}\right) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$\frac{dz'}{dx_n} + \mathrm{H}'\left(x'_1, \ldots, x'_{n-1}, x_n, \frac{dz'}{dx'_1}, \cdots, \frac{dz'}{dx'_{n-1}}\right) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

(*) Mayer, Nachrichten, n° 21, pp. 414-417, théorème IV, énoncé sans démonstration. [Math. Ann., t. VI, pp. 169-173, § 3, théorème II.]

seront telles, qu'en général, de toute intégrale complète de l'une, l'on pourra déduire une intégrale complète de l'autre et réciproquement.

Soit, en effet,

$$z = z_0 + F(x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_{n-1}), \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

une intégrale complète de (8). Posons :

$$z' = z'_0 + F_0 - F + \varphi, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

en appelant F_0 l'expression :

$$F(x_{10}, \ldots, x_{n0}, c_1, \ldots, c_{n-1}),$$

et éliminons de l'expression (11), $c_1, \ldots, c_{n-1}, x_1, \ldots, x_{n-1}$, au moyen des relations :

$$\frac{\delta F_0}{\delta c_1} = \frac{\delta F}{\delta c_1}, \ldots, \frac{\delta F_0}{\delta c_{n-1}} = \frac{\delta F}{\delta c_{n-1}}, \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

$$\frac{\delta F}{\delta x_1} = \frac{\delta \varphi}{\delta x_1}, \ldots, \frac{\delta F}{\delta x_{n-1}} = \frac{\delta \varphi}{\delta x_{n-1}}. \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

La valeur de z' dans ce cas satisfera à l'équation (9).

En effet, on a, pour $x' = x'_1, \ldots, x'_{n-1}$:

$$\frac{dz'}{dx'} = \Sigma \left(\frac{\delta F_0}{\delta c} - \frac{\delta F}{\delta c}\right) \frac{dc}{dx'} - \Sigma \left(\frac{\delta F}{\delta x} - \frac{\delta \varphi}{\delta x}\right) \frac{dx}{dx'} + \frac{\delta \varphi}{\delta x'},$$

ou, à cause des équations (12) et (13),

$$\frac{dz'}{dx'} = \frac{\delta \varphi}{\delta x'}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Ensuite :

$$\frac{dz'}{dx_n} = \Sigma \left(\frac{\delta F_0}{\delta c} - \frac{\delta F}{\delta c}\right) \frac{dc}{dx_n} - \Sigma \left(\frac{\delta F}{\delta x} - \frac{\delta \varphi}{\delta x}\right) \frac{dx}{dx_n} - \frac{\delta F}{\delta x_n} + \frac{\delta \varphi}{\delta x_n},$$

ou, puisque F est une solution de (8), et à cause de (12) et (13),

$$\frac{dz'}{dx_n} = H + \frac{\delta \varphi}{\delta x_n}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

En substituant les valeurs (14) et (15) dans (9), il vient à cause des équations (6) identiques à (14), et de (7) :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} + \mathrm{H} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} + \mathrm{H}\right) = 0,$$

ce qui démontre la première moitié du théorème énoneé.

Soit maintenant

$$z' = z'_0 + \mathrm{F}'(x'_1, \ldots, x'_{n-1}, x_n, c'_1, \ldots, c'_{n-1}) \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

une intégrale complète de (9). Posons :

$$z = z_0 + \mathrm{F}'_0 - \mathrm{F}' + \varphi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

en appelant F'_0 l'expression

$$\mathrm{F}'(x'_{10}, \ldots, x'_{n-1,0}, x_{n0}, c'_1, \ldots, c_{n-1}).$$

Éliminons ensuite, de la valeur de z, les quantités $c'_1, \ldots, c'_{n-1}$, $x'_1, \ldots, x'_{n-1}$, au moyen des équations :

$$\frac{\partial \mathrm{F}'_0}{\partial c'_1} = \frac{\partial \mathrm{F}'}{\partial c'_1}, \ldots, \frac{\partial \mathrm{F}'_0}{\partial c'_{n-1}} = \frac{\partial \mathrm{F}'}{\partial c_{n-1}},$$
$$\frac{\partial \mathrm{F}'}{\partial x'_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial x'_1}, \ldots, \frac{\partial \mathrm{F}'}{\partial x'_{n-1}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x'_{n-1}}.$$

La valeur de z, après cette élimination, sera une intégrale de l'équation (8). En effet, on trouve, comme plus haut, pour $x = x_1, \ldots, x_{n-1}$,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

et ensuite

$$\frac{dz}{dx_n} = -\frac{\partial \mathrm{F}'}{\partial x_n} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = \mathrm{H}' + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (8), elle est satisfaite identiquement.

Remarques. I. Si l'on fait $x_n = x_{n0}$ dans les solutions précédentes on trouve, comme au numéro précédent, que les solutions z et z' déduites de F′ et F, se réduisent respectivement à

$$z_0 + \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, x'_{10}, \ldots, x'_{n-1,0}),$$
$$z'_0 + \varphi(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, x_{n0}, x'_1, \ldots, x'_{n-1}).$$

II. Si φ est une solution de l'équation (8), $x'_1, \ldots, x'_{n-1}$ étant $(n-1)$ constantes arbitraires, l'équation (7) donnera :

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x_n} + \mathrm{H}\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\delta\varphi}{\delta x_1}, \ldots, \frac{\delta\varphi}{\delta x_{n-1}}\right) = 0,$$

c'est-à-dire que $\mathrm{H}' = 0$. La seconde équation, c'est-à-dire (9), sera donc :

$$\frac{\delta z'}{\delta x_n} = 0.$$

III. Si H et φ contenaient, outre les variables x et x', d'autres variables $y_1, \ldots, y_m$, elles se comporteraient comme des constantes dans tous les calculs précédents et il serait inutile d'y rien changer.

122. *Transformation d'un système de deux équations* (*). Considérons maintenant deux équations, à $(n+1)$ variables indépendantes *ayant, par hypothèse, une solution commune avec* n *constantes arbitraires :*

$$\frac{dz}{dy} + \mathrm{K}\left(x_1, \ldots, x_n, y, \frac{dz}{dx_1}, \ldots, \frac{dz}{dx_{n-1}}\right) = 0, \quad \ldots . \quad (18)$$

$$\frac{dz}{dx_n} + \mathrm{H}\left(x_1, \ldots, x_n, y, \frac{dz}{dx_1}, \ldots, \frac{dz}{dx_{n-1}}\right) = 0. \quad \ldots . \quad (19)$$

Soit

$$z = z_0 + \varphi(x_1, \ldots, x_n, y, x'_1, \ldots, x'_{n-1}), \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

une solution de la première, avec n constantes arbitraires. On la

(*) Mayer, Nachrichten de Göttingen, 1872, p. 467, dit seulement que l'on peut faire disparaître y de (19), si l'on connaît une solution complète de (18). Il cite le travail de Korkine que nous avons analysé ci-dessus, § 24. Nous essayons de reconstruire la démonstration de Mayer. Si elle ne semble pas rigoureuse au lecteur, qu'il veuille bien admettre comme un postulat la disparition de y de l'équation (22), en attendant que Mayer publie sa démonstration. Il importe de remarquer que l'idée fondamentale de Mayer, savoir de faire $y = y_0$, ne se trouve ni chez Korkine, ni chez Bour. [Notre démonstration est précisément celle de Mayer, mémoire cité, § 4 (Math. Ann., t. VI, pp, 173-176); seulement il donne une démonstration analytique de la non-existence de y dans l'équation (22), tandis que notre démonstration est synthétique.]

trouvera en regardant x_n dans (18) comme une constante. Servons-nous de la fonction φ, pour transformer les précédentes en deux autres, d'après la règle donnée au n° 121. La première deviendra (121, Remarque II)

$$\frac{dz'}{dy}=0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

la seconde :

$$\frac{dz'}{dx_n}+\mathrm{H}'\left(x'_1,\ldots,x'_{n-1},x_n,y,\frac{dz'}{dx'_1},\ldots,\frac{dz'}{dx'_{n-1}}\right)=0. \quad . \quad . \quad (22)$$

Il est clair qu'à la solution commune des équations (18), (19), correspondra une solution commune des équations (21) et (22); or (21) exprime que cette solution ne contient pas y. Dans le cas où les deux équations sont quelconques, on peut faire deux hypothèses relativement à l'équation (22): ou bien, elle contient explicitement y, ou bien y en a disparu. Dans le dernier cas, la solution complète de (22), avec n constantes arbitraires, est une solution commune des équations (21) et (22), et de cette solution commune, on peut déduire une solution commune des équations (18) et (19) avec n constantes arbitraires. Si, au contraire, l'équation (22) contient y, son intégrale complète sera de la forme

$$z'=z'_0+\Phi\left(x'_1,\ldots,x'_{n-1},x_n,y,c_1,\ldots,c_{n-1}\right),$$

les constantes contenant y. Pour trouver une solution commune des équations (21) et (22), on devra exprimer que

$$\frac{dz'}{dy}=0,$$

équation qui déterminera une relation entre les n constantes, arbitraires, z'_0, c_1, ..., c_{n-1}. Par conséquent, contrairement à l'hypothèse, il n'y aura pas de solution commune aux équations (18) et (19) et contenant n constantes arbitraires.

Donc enfin, l'équation (22) ne contient pas y, dans le cas où les équations (18) et (19) ont une solution commune contenant n constantes arbitraires.

123. *Simplification de la transformation précédente. Méthode générale de Lie, pour les systèmes simultanés* (*). On peut simplifier la transformation précédente, au moyen de la remarque suivante. Puisque y n'entre pas dans l'équation (22), on peut, pour faire la transformation, supposer que y reçoive une valeur quelconque. D'autre part (n° 120), d'une intégrale quelconque de l'équation (18), on peut déduire une autre intégrale qui prenne, pour $y = y_0$, telle forme que l'on voudra. Donc enfin, pour faire la transformation de l'équation (19), on peut prendre, au lieu de la relation (20), la suivante

$$z = z_0 + \varphi(x_1, \ldots, x_n, y_0, x'_1, \ldots, x'_{n-1}),$$

ou même, ψ étant quelconque, comme y_0,

$$z = z_0 + \psi(x_1, \ldots, x_n; y_0, x'_1, \ldots, x'_{n-1}).$$

On choisira la fonction ψ, de telle manière que les calculs soient les plus simples possibles.

On peut donc, au moyen de l'intégration complète de l'équation (18), puis, par une transformation, où entre une fonction ψ quelconque, ou bien l'intégrale complète que l'on vient de trouver, ramener la recherche de l'intégrale complète contenant n constantes arbitraires et commune à deux équations (18) et (19), à celle de l'intégrale complète d'une équation (22), contenant une variable de moins.

De même, on ramène successivement l'intégrale de $(q+1)$ équations à $(n+q)$ variables indépendantes, et ayant une solution commune avec n constantes arbitraires, à celles de q, $(q-1)$, $(q-2)$, ..., 2 équations, contenant respectivement $(n+q-1)$, $(n+q-2)$, $(n+q-3)$, ..., $(n+1)$ variables indépendantes, et enfin à celle d'une équation contenant n variables indépendantes.

Remarque. C'est au moyen de la méthode de Bour que l'on constate que le système a une solution contenant un nombre de constantes arbitraires égal au nombre des variables moins celui

(*) [Mayer appelle la remarque de ce numéro théorème IV, et en donne la démonstration dans le mémoire cité, § 4 (Math. Ann., pp. 176-177).]

des équations. Si le système ne jouit pas de cette propriété, Bour a précisément indiqué le moyen d'ajouter au système donné les équations nécessaires, pour qu'il l'a possède.

124. *Seconde simplification. Théorème fondamental de Lie.* Considérons les $(m+1)$ équations :

$$\frac{dz}{dy}+\mathrm{K}\left(x_1,\ldots,x_{n-1},\,y,\,t_1,\ldots,t_m,\frac{dz}{dx_1},\cdots,\frac{dz}{dx_{n-1}}\right),\,.\,.\quad(23)$$

$$\frac{dz}{dt_1}+\mathrm{H}_1\left(x_1,\ldots,x_{n-1},\,y,\,t_1,\ldots,t_m,\frac{dz}{dx_1},\cdots,\frac{dz}{dx_{n-1}}\right),\,.\,.\quad(24_1)$$

. . . .

$$\frac{dz}{dt_m}+\mathrm{H}_m\left(x_1,\ldots,x_{n-1},\,y,\,t_1,\ldots,t_m,\frac{dz}{dx_1},\cdots,\frac{dz}{dx_{n-1}}\right),\,.\,.\quad(24_m)$$

Effectuons d'abord un changement de variables. Soient :

$$t_1=t_{10}+(y-y_0)\,u_1,$$

. . . .

$$t_m=t_{m0}+(y-y_0)\,u_m.$$

On aura pour les nouvelles dérivées de z, que nous mettrons entre parenthèses, pour les distinguer du système primitif :

$$\left(\frac{dz}{du_1}\right)=\frac{dz}{dt_1}(y-y_0),$$

. . . .

$$\left(\frac{dz}{du_m}\right)=\frac{dz}{dt_m}(y-y_0),$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)=\frac{dz}{dy}+\frac{dz}{dt_1}u_1+\frac{dz}{dt_2}u_2+\cdots+\frac{dz}{dt_m}u_m.$$

Les équations données peuvent donc être remplacées par le système suivant :

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)+\mathrm{K}+u_1\mathrm{H}_1+\cdots+u_m\mathrm{H}_m=0,\quad.\,.\,.\,.\,.\quad(25)$$

$$\left(\frac{dz}{du_i}\right)+(y-y_0)\,\mathrm{H}_i=0.\quad.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(26_i)$$

Soit maintenant

$$z = z_0 + \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, u_1, \ldots, u_m, x'_1, \ldots, x'_{n-1}) \ldots \quad (27)$$

une solution complète de (25), quand on regarde les u comme des constantes. Transformons, par la règle du n° 121, chacune des équations (26), en nous servant de la fonction φ qui entre dans (27). Une quelconque de ces équations prendra la forme :

$$\frac{dz'}{du} + H' = 0, \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

H′ étant déterminé par l'équation :

$$\frac{\delta \varphi}{\delta u} + (y - y_0) H = - H',$$

$x_1, \ldots, x_{n-1}$ étant remplacés par leurs valeurs déduites des équations :

$$\frac{\delta \varphi}{\delta x'_1} = \frac{dz'}{dx'_1}, \ldots, \frac{\delta \varphi}{\delta x'_{n-1}} = \frac{dz'}{dx'_{n-1}}.$$

Nous savons que nous pouvons faire $y = y_0$ dans H′. Dans ce cas, — H′ se réduit à $\frac{\delta \varphi}{\delta u}$ où l'on a fait $y = y_0$. On sait, par la remarque du n° 121, que φ, pour cette valeur, se réduit à l'expression

$$\varphi(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, y_{10}, u_1, \ldots, u_m, x'_1, \ldots, x'_{n-1}),$$

que nous appelons φ_0. Donc enfin, la transformée (28) devient

$$\frac{dz'}{du} = \frac{\delta \varphi_0}{\delta u}.$$

Par conséquent, la tranformation, dans le cas actuel, remplace les équations (26) par les suivantes :

$$\frac{dz'}{du_1} = \frac{\delta \varphi_0}{\delta u_1}, \ldots, \frac{dz'}{du_m} = \frac{\delta \varphi_0}{\delta u_m}, \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

dont la solution commune est :

$$z'_1 = z'_0 + \varphi(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, y_0, u_1, u_2, \ldots, u_m, x'_1, \ldots, x'_{n-1}), \quad (30)$$

qui contient n constantes arbitraires.

Comme on le voit, l'intégration du système (23) (24) est ramené à celle de l'équation unique (25), puisque de son intégrale (27), on déduit l'intégrale (30) du système transformé (29). De l'intégrale (30) on déduit une autre intégrale quelconque, par le n° 120, puis l'intégrale des équations données par le n° 121 (*).

125. *Mode d'application de la méthode de Lie.* Étant donné un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à intégrer, on le ramène par la théorie précédente à une équation unique, $H_1 = 0$. On cherchera, comme dans la méthode de Jacobi, une fonction H_2 des x et des p telle que $(H_2, H_1) = 0$. Au moyen de $H_2 = a_2$, on pourra ramener H_1 à contenir un p de moins. On traitera cette nouvelle équation comme la première, en profitant, à chaque nouvelle intégration, de la remarque suivante : chaque fois que l'on rencontre le cas le plus défavorable de la méthode de Jacobi, on emploie celle de Cauchy, et l'intégration est immédiatement terminée (**).

Comme on le voit, la méthode de Lie ramène sans cesse l'intégration à celle d'une équation unique, la methode de Cauchy et celle de Jacobi servent ensuite à effectuer l'intégration avec le plus de facilité possible.

126. [*Démonstration directe du théorème fondamental de Lie, par la méthode de Cauchy* (***). Le théorème du n° 124 revient à

(*) Mayer énonce sans démonstration le théorème de ce numéro, dans le cas ou $m = 1$, Nachrichten de Göttingen, 1872, pp. 469 et 472. [Démonstration dans le mémoire cité (Math. Ann. t. VI, pp. 185-189), § 7, théorèmes VIII et IX. Mayer applique la méthode aux équations linéaires homogènes, § 8, pp. 189-192. Les §§ 4 et 5, pp. 179-183, sont consacrés au cas de deux équations, dont il est inutile de s'occuper spécialement.]

(**) Lie, *ibid.*, pp. 488-489. Il est étonnant qu'une remarque aussi simple ait échappé à tous les géomètres, avant Lie.

(***) Mayer, *Directe Ableitung des Lie'schen Fundamentaltheorems durch die Methode von Cauchy* (Math. Ann., t. VI, pp. 192-196) et § I de la note plus générale, intitulée : *Zur Integration der partieller Differentialgleichung erster Ordnung* (Nachrichten de Göttingen, 1873, pp. 299-310). Mayer se sert de la valeur de z_0 indiquée au n° 111 pour éviter les cas d'exception. Il laisse quelques points de son exposition sans démonstration explicite.

ceci : il existe une solution de l'équation (25) qui est en même temps une solution des équations (26). On peut établir directement ce théorème par la méthode de Cauchy.

Écrivons comme suit les équations (25) et (26) :

$$q + f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, u_1, \ldots, u_m, p_1, \ldots, p_{n-1}) = 0, \quad . \quad . \quad (25')$$

$$\frac{dz}{du_i} + f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, u_1, \ldots, u_m, p_1, \ldots, p_{n-1}) = 0, \quad . \quad . \quad (26'_i)$$

Parmi les conditions d'intégrabilité simultanée de ce système, se trouvent m équations qui sont représentées par la suivante :

$$\frac{\delta f}{\delta u_i} - \frac{\delta f_i}{\delta y} + \Sigma\left(\frac{\delta f}{\delta x_k}\frac{\delta f_i}{\delta p_k} - \frac{\delta f}{\delta p_k}\frac{\delta f_i}{\delta x_k}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

La méthode de Cauchy appliquée à l'équation (25′) conduit à la considération du système auxiliaire :

$$dy = \cdots = \frac{dx_k}{\frac{\delta f}{\delta p_k}} = \cdots = \frac{dz}{\Sigma p_k \frac{\delta f}{\delta p_k} - f} = \cdots = \frac{-dp_k}{\frac{\delta f}{\delta x_k}} = \cdots . \quad . \quad (32)$$

On déduit de là le système intégral :

$$x_k = \chi_k(y, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, p_{10}, \ldots, p_{n-1,0}, u_1, \ldots, u_m), \quad . \quad . \quad (33)$$

$$p_k = \varphi_k(y, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, p_{10}, \ldots, p_{n-1,0}, u_1, \ldots, u_m), \quad . \quad . \quad (34)$$

$$z = z_0 + \int_{y_0}^{y}\left(\Sigma p_k \frac{\delta f}{\delta p_k} - f\right) dy, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

$x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, p_{10}, \ldots, p_{n-1,0}$ étant les valeurs initiales des variables pour $y = y_0$, et z_0 étant une fonction quelconque des u qui contient une constante arbitraire z'_0. Sous le signe d'intégration, on suppose les p_k et les x_k remplacés par leurs valeurs (33) et (34).

Éliminons $p_{10}, \ldots, p_{n-1,0}$ entre les équations (33) et (35). Nous trouverons une solution

$$Z = z'_0 + F(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, u_1, \ldots, u_m) \quad . \quad . \quad (36)$$

de l'équation (25'). Je dis que, si la fonction z_0 des u est convenablement choisie, cette solution (36) satisfera également aux équations (26'). Pour cela, il suffira que z_0 ne contienne pas les u.

Pour le montrer, nous devons dériver Z, par rapport à un u quelconque. Cela ne peut se faire qu'indirectement de la manière suivante : substituons dans l'équation (36) à $x_1, \ldots, x_{n-1}$, les valeurs (33), on retombera sur la fonction z de y donnée par la relation (35), sous la forme :

$$Z = z'_0 + F(\chi_1, \ldots, \chi_{n-1}, y, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, u_1, \ldots, u_m) = z'_0 + F^*. \quad (37)$$

On arrive au but cherché en égalant les dérivées des expressions (35) et (37) de z, par rapport à u. On déduit d'abord de (37)

$$\frac{dz}{du_i} = \frac{\partial F^*}{\partial u_i} + \Sigma \frac{\partial F^*}{\partial \chi_k} \frac{\partial \chi_k}{\partial u_i}.$$

Soit, en éliminant les p_0,

$$p_k = P_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, u_1, \ldots, u_m)$$

la valeur de p_k, déduite de l'équation (34). On aura identiquement

$$\varphi_k = P_k(\chi_1, \ldots, \chi_{n-1}, y, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, u_1, \ldots, u_m).$$

Puisque Z est une solution de l'équation (25'), on aura :

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = P_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, u_1, \ldots, u_m),$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial F^*}{\partial \chi_k} = P_k(\chi_1, \ldots, \chi_{n-1}, y, x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, u_1, \ldots, u_m) = \varphi_k.$$

Donc la valeur précédente de $\frac{dz}{du_i}$ peut s'écrire :

$$\frac{dz}{du_i} = \frac{\partial F^*}{\partial u_i} + \Sigma \varphi_k \frac{\partial \chi_k}{\partial u_i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Cherchons maintenant la même quantité, au moyen de l'expression (35) de z. Il viendra, en supprimant sous le signe d'intégration les termes qui se détruisent,

$$\frac{dz}{du_i} = \frac{dz_0}{du_i} + \int_{y_0}^{y} \Sigma \left(\varphi_k \frac{d\frac{\delta f}{\delta p_k}}{du_i} - \frac{\delta f}{\delta x_k} \frac{\delta \chi_k}{\delta u_i} \right) - \int_{y_0}^{y} \frac{\delta f}{\delta u_i} dy.$$

On peut effectuer les deux intégrations ici indiquées, en se servant des conditions d'intégrabilité (31) et exprimant que les équations (33) et (34) satisfont aux équations (32). On a, en effet,

$$\frac{\delta \chi_k}{\delta y} = \frac{\delta f}{\delta p_k}, \quad \frac{\delta \varphi_k}{\delta y} = - \frac{\delta f}{\delta x_k}.$$

Par suite,

$$\varphi_k \frac{d\frac{\delta f}{\delta p_k}}{du_i} - \frac{\delta f}{\delta x_k} \frac{\delta \chi_k}{\delta u_i} = \varphi_k \frac{d\frac{\delta \chi_k}{\delta y}}{du_i} + \frac{\delta \varphi_k}{\delta y} \frac{\delta \chi_k}{\delta u_i} = \frac{d}{dy} \left(\varphi_k \frac{\delta \chi_k}{\delta u_i} \right);$$

et la condition d'intégrabilité (31) devient, en se servant de la notation f^*, pour f où l'on a substitué les valeurs (33) et (34), des x et des p :

$$\frac{\delta f}{\delta u_i} = \frac{\delta f_i}{\delta y} + \Sigma \left(\frac{\delta f_i}{\delta p_k} \frac{\delta \varphi_k}{\delta y} + \frac{\delta f_i}{\delta x_k} \frac{\delta \chi_k}{\delta y} \right)$$
$$= \frac{d}{dy} f_i (\chi_1, \dots, \chi_{n-1}, y, u_1, \dots, u_m, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = \frac{df_i^*}{dy}.$$

Effectuons les intégrations indiquées plus haut. Il vient :

$$\frac{dz}{du_i} = \frac{dz_0}{du_i} + \Sigma \varphi_k \frac{\delta \chi_k}{\delta u_i} - \left(\Sigma \varphi_k \frac{\delta \chi_k}{\delta u_i} \right)_0 - f_i^* + f_{i0}^*.$$

Pour $y = y_0$, f_i, qui contient $(y - y_0)$ en facteur, s'annule et $\frac{\delta \chi_k}{\delta u_i}$ aussi, parce que χ_k se réduit à x_{k0}, pour $y = y_0$. Donc enfin

$$\frac{dz}{du_i} = \frac{dz_0}{du_i} + \Sigma \varphi_k \frac{\delta \chi_k}{\delta u_i} - f_i^*.$$

Comparant cette valeur à la valeur (38), on trouve

$$\frac{\delta F^*}{\delta u_i} + f_i^* = 0, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (39)$$

si l'on suppose z_0 indépendant de u_i, ou

$$\frac{dz_0}{du_i} = 0. \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (40)$$

L'équation (39) doit être une identité par rapport à

$$\chi_1, \dots, \chi_{n-1}, y, x_{10}, \dots, x_{n-1,0}, u_1, \dots, u_m,$$

parce que les fonctions $\chi_1, \dots, \chi_{n-1}$, contenant, en général, $(n-1)$ constantes arbitraires $p_{10}, \dots, p_{n-1,0}$, sont indépendantes les unes des autres. On a donc aussi, à cause de cette équation (39)

$$\frac{\delta F}{\delta u} + f_i = 0.$$

Donc la solution Z de l'équation (25′) satisfait aux équations (26′), pourvu que z_0, dans l'équation (35), ne contienne pas les u.

127. *Remarques sur la méthode précédente.* I. Si l'on applique la méthode précédente aux équations (23) et (24), on trouve pour déterminer z_0, les équations suivantes :

$$\frac{dz_0}{du_i} + H_i(x_{10}, \dots, x_{n-1,0}, y_0, u_1, \dots, u_m, p_{10}, \dots, p_{n-1,0}) = 0$$

qui ne sont intégrables que si l'on a :

$$\frac{\delta H_i}{\delta u_l} = \frac{\delta H_l}{\delta u_i} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (41)$$

On ne peut donc pas appliquer la méthode précédente directement aux équations (23) et (24). On voit, en même temps, que les conditions de réussite de la méthode résident dans les égalités

$$f_{10} = 0, \dots, f_{m0} = 0,$$

ou dans les équations plus générales (41). La méthode est donc susceptible, en pratique, de diverses modifications.

II. Les conditions d'intégrabilité (31), écrites au moyen des fonctions K et H, prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial K}{\partial t_i}-\frac{\partial H_i}{\partial y}+\Sigma\left(\frac{\partial K}{\partial x_k}\frac{\partial H_i}{\partial p_k}-\frac{\partial K}{\partial p_k}\frac{\partial H_i}{\partial x_k}\right)\\ &+\Sigma u_l\left\{\frac{\partial H_l}{\partial t_i}-\frac{\partial H_i}{\partial t_l}+\Sigma\left(\frac{\partial H_l}{\partial x_k}\frac{\partial H_i}{\partial p_k}-\frac{\partial H_l}{\partial p_k}\frac{\partial H_i}{\partial x_k}\right)\right\}=0.\end{aligned}$$

Si l'on fait décroître indéfiniment vers zéro, dans ces équations, les quantités u, ou si l'on fait converger chaque quantité t vers la valeur arbitraire t_0, on verra que l'on peut égaler à zéro, dans l'équation précédente, l'expression qui ne contient aucun u en facteur, et le coefficient de chacun des u. On a donc :

$$\frac{\partial K}{\partial t_i}-\frac{\partial H_i}{\partial y}+\Sigma\left(\frac{\partial K}{\partial x_k}\frac{\partial H_i}{\partial p_k}-\frac{\partial K}{\partial p_k}\frac{\partial H_i}{\partial x_k}\right)=0,$$

$$\frac{\partial H_l}{\partial t_i}-\frac{\partial H_i}{\partial t_l}+\Sigma\left(\frac{\partial H_l}{\partial x_k}\frac{\partial H_i}{\partial p_k}-\frac{\partial H_l}{\partial p_k}\frac{\partial H_i}{\partial x_k}\right)=0.$$

Toutes les conditions d'intégrabilité du système des équations (23) et (24) sont donc équivalentes aux conditions (31) et réciproquement. Ainsi s'explique ce paradoxe, que les équations (31), parmi les conditions d'intégrabilité du système des équations (25') et (26'), soient seules utilisées dans ce qui précède.

III. D'après la remarque II du n° 55, le système intégral des équations (32) peut être représenté par les relations suivantes :

$$z=z'_0+F,\quad \frac{\partial F}{\partial x_i}=p_i,\quad \frac{\partial F}{\partial x_{i0}}=a_i,$$

$a_1, \ldots, a_{n-1}$ étant des constantes, respectivement égales à $p_{10}, \ldots, p_{n-1,0}$, comme il est facile de le voir. Sous cette forme, on voit que le système intégral des équations (32) est aussi celui des équations analogues, obtenues en remplaçant y par u_i, et f par f_i. Cette remarque est très-importante dans l'exposé de la méthode de Lie, d'après les écrits du géomètre norwégien lui-même.]

APPENDICE.

LA MÉTHODE DE LIE, COMME SYNTHÈSE DES MÉTHODES ANTÉRIEURES.

§ 33. *Exposition de Lie* (*).

128. *Définition des caractéristiques.* Les éléments d'une équation aux dérivées partielles :

$$f(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0\,, \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

sont en nombre ∞^{2n}. Si l'on cherche une figure qui en contienne ∞^n, les coordonnées de chacun de ces éléments devront s'exprimer en fonction de n variables, par exemple, $u_1, \dots, u_{n-1}$, x_n. Si, de plus, ces éléments constituent une intégrale, ils satisfont (nº 5) à la condition

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n\,, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

(*) Cet exposé est fait d'après les écrits de Lie dont les titres suivent : A. *Kurzes Resumé mehrerer neuer Theorien* (Vorgelegt der Academie zu Christiania, 3 mai 1872) (4 pages). B. *Neue Integrations methode partieller Gleichungen erster Ordnung zwischen* n *Variabeln* (*ibid*, 10 mai 1872) (7 p.). C. *Ueber eine neue Integrationsmethode partieller Differentialgleichungen erster Ordnung* (Nachrichten de Göttingen, 1872, pp. 321-326). D. *Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung insbesondere über eine Classification derselben* (*ibid.*, 1872, pp. 473-489). Nous n'avons pas utilisé les écrits plus récents de Lie parce que cela nous aurait conduit à faire une exposition complète des transformations tangentielles. Voici la liste de ces autres mémoires de Lie, rangés dans l'ordre où ils doivent être lus. 1. *Zur analytischen Theorie der Berührungs-Transformationen* (Ac. de Ch., 1873; pp. 237-262). 2. *Ueber eine Verbesserung der Jacobi-Mayerschen Integrations-Methode* (*ibid.*, août 1873; p. 282-288). 3. *Ueber partielle Differential-*

c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\frac{dz}{dx_n} = p_1 \frac{dx_1}{dx_n} + \cdots + p_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{dx_n} + p_n, \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$$\frac{dz}{du} = p_1 \frac{dx_1}{du} + \cdots + p_{n-1} \frac{dx_{u-1}}{du} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

En partant de ces relations, Cauchy a ramené l'intégration de l'équation (1) à celles des équations précédentes et des suivantes :

$$\sum_1^{n-1} \left\{ \left(\frac{\delta f}{\delta x_i} + p_i \frac{\delta f}{\delta z} + \frac{\delta f}{\delta p_n} \frac{dp_i}{dx_n} \right) \frac{dx_i}{du} + \left(\frac{\delta f}{\delta p_i} - \frac{\delta f}{\delta p_n} \frac{dx_i}{\delta x_n} \right) \frac{dp_i}{du} \right\} = 0, \quad (5)$$

$$\left(\frac{\delta f}{\delta x_n} + \frac{\delta f}{\delta z} \frac{dz}{dx_n} \right) + \sum_1^{n-1} \left\{ \frac{\delta f}{\delta x_i} \frac{dx_i}{dx_n} + \frac{\delta f}{\delta p_i} \frac{dp_i}{dx_n} \right\} = 0 \quad \ldots \quad (6)$$

pourvu que l'on suppose, entre les valeurs initiales des coordonnées de l'élément, la relation suivante :

$$f(z_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}, p_{10}, \ldots, p_{n0}) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Parmi les éléments de toutes les intégrales qui contiennent l'élément initial, il y en a une infinité simple (∞^1), qui sont communs à toutes ces intégrales. Ce sont les éléments qui sont tels que les coefficients des dérivées de x_i et p_i, dans l'équation (5), soient nuls, quelle que soit la valeur de ces dérivées, ces

Gleichungen 1. O. (*ibid.*, mars 1873; pp. 16-51). 4. *Partielle Differential-Gleichungen 1. O., in denen die unbekannte Funktion explicite vorkommt* (*ibid.*, mars 1873, pp. 52-85). 5. *Neue Integrations-Methode eines* 2n-*gliedrigen Pfaffschen Problems* (*ibid.*, octobre 1873; pp. 320-343). Avec les précédents ces divers écrits forment un total de 175 pages in-8°, presque entièrement nouvelles, sur la question de l'intégration des équations aux dérivées partielles. [Depuis que cette note a été écrite, ont encore paru les écrits suivants : Lie, *Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen* (Math. Ann., t. VIII, pp. 215-303). Mayer, *Directe Begründung der Theorie der Berührungstransformationen* (ibid., pp. 304-312). *Ueber eine Erweiterung der* Lie'*schen Integrationsmethode* (ibid., pp. 313-318). Ces deux écrits de Mayer ont déjà été publiés, avec moins de développements, dans les Nachrichten de Göttingen, 1874, pp. 317 et suiv., 1873, n° 11, à l'endroit indiqué dans la note du n° 126.]

éléments satisfaisant d'ailleurs à l'équation (4). C'est en exprimant les conditions que nous venons d'énoncer que Cauchy a été conduit aux équations différentielles de cette série d'éléments, savoir :

$$\cdots = \frac{dx_i}{\frac{\partial f}{\partial p_i}} = \cdots = \frac{dz}{\Sigma p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}} = \cdots = \frac{-dp_i}{\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z}} = \cdots \quad . \; . \; . \quad (8)$$

Parmi ces éléments doit se trouver l'élément initial :

$$(z_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}, p_{10}, \ldots, p_{n0}) . \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Nous représentons les intégrales du système (8) par les équations

$$z = f_n, \quad x_i = f_i, \quad p_i = f_{n+i}, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

les fonctions f dépendant de x_n, et des valeurs initiales des variables. Il faut remarquer que x_{n0} est une constante supplémentaire et que p_{n0} est une fonction des autres valeurs initiales, donnée par la relation (7).

Nous pouvons donc énoncer ce théorème: *Toutes les intégrales de l'équation* (1) *qui ont en commun l'élément* (9), *ou qui se touchent au point*

$$z_0, x_{10}, \ldots, x_{n0},$$

ont en commun une série d'éléments donnés par les équations (8) *ou* (10); autrement dit, *elles se touchent le long d'une ligne représentée par les* n *premières équations* (10). Lie a appelé *caractéristique* de f, l'ensemble de ces éléments communs (*).

Corollaire. *Deux solutions*

$$z = \mathrm{F}, \quad z = \Phi,$$

d'une même équation $\mathrm{f} = 0$, *ont une caractéristique commune.* En effet, des relations

$$\mathrm{F} = \Phi, \quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-1}},$$

(*) Mémoire B, théorème Ier; mémoire C, théorème *a*, p. 325.

qui, à cause de $f=0$, entraînent celle-ci :

$$\frac{\partial F}{\partial x_n}=\frac{\partial \Phi}{\partial x_n},$$

on conclut qu'il y a au moins un système de valeurs des quantités x, qui rendent égales les quantités z et p, déterminées par les deux solutions. Ces solutions ont donc un élément commun et par suite aussi une caractéristique commune (*).

129. *Méthode de Cauchy.* On déduit des équations (10) une solution de (1), comme on l'a vu (nº 108), en assujettissant les valeurs initiales, considérées comme fonctions de $(n-1)$ variables u, à satisfaire aux relations :

$$\frac{dz_0}{du}=p_{10}\frac{dx_{10}}{du}+\cdots+p_{n-1,0}\frac{dx_{n-1,0}}{du}, \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Il suffit, pour cela, de supposer z_0, x_{10}, ..., $x_{n-1,0}$ constants. Éliminant alors les quantités p_0 entre les équations (10), on trouve la solution :

$$z=\mathrm{F}(x_1,\ldots,x_n,z_0,x_{10},\ldots,x_{n-1,0}),\quad p_i=\frac{\partial F}{\partial x}. \quad \ldots \quad (10)$$

On peut énoncer ce résultat comme suit : *Toutes les caractéristiques de* f *qui passent par un point* (z_0, x_{10}, ..., x_{n-1},) *engendrent une intégrale de* f (**).

On satisfait encore aux équations (11) en posant

$$z_0=z'_0+p_{10}x_{10}+\cdots+p_{m0}x_{m0},$$

et supposant que z'_0, p_{10}, ..., p_{m0}, $x_{m+1,0}$, ..., x_{n0} soient des constantes (nº 111), ce qui conduit à un théorème corrélatif du précédent, quand $m=n-1$.

On voit, d'après ce qui précède, qu'en employant la théorie des caractéristiques, l'on peut donner une forme très-simple : 1º à la méthode de Cauchy, ou à celle de Pfaff modifiée par Jacobi,

(*) Cette remarque est nouvelle, mais n'est pas utilisée dans la suite.

(**) Mémoire B, remarque relative au théorème premier ; mémoire C, remarque relative au théorème *a*, p. 325.

qui n'en diffère pas essentiellement; 2° à la modification apportée par MAYER à l'une et à l'autre.

130. *Propriétés de deux éléments infiniment peu différents* (*). Soit

$$z = \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n),$$

une solution de l'équation $f = 0$, de sorte que l'on a, entre deux éléments infiniment voisins, la relation

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n;$$

autrement dit, l'on a :

$$p_1 = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1}, \ldots, p_n = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_n}.$$

Si l'on fait varier infiniment peu $x_1, \ldots, x_n$, les quantités $z, p_1, \ldots, p_n$ varient aussi infiniment peu. Donc *deux éléments infiniment voisins d'une intégrale,* ou *passant par des points infiniment voisins, ont des coordonnées tangentielles infiniment peu différentes, ou sont infiniment peu inclinés l'un sur l'autre.*

La réciproque de ce théorème est vraie : *deux éléments infiniment voisins et infiniment peu inclinés l'un sur l'autre sont tels que l'on a*

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n.$$

Soient, en effet, A et B deux éléments infiniment voisins et infiniment peu inclinés l'un sur l'autre :

$$(z, x_i, p_i) \quad \text{et} \quad (z + \Delta z, x_i + \Delta x_i, p_i + \Delta p_i),$$

Δz, Δx_i, Δp_i étant infiniment petits. Appelons a et b les points

$$(z, x_i) \quad \text{et} \quad (z + \Delta z, x_i + \Delta x_i)$$

Par le point a passe une solution de Cauchy, formée de toutes les caractéristiques contenant ce point, et rencontrant en un point

(*) Nous n'avons pas rencontré explicitement cette propriété dans les écrits de LIE. Le théorème corrélatif de Mayer (n° 129, fin) peut fournir une démonstration dans les cas où ne subsiste pas le théorème équivalent à la méthode de Cauchy.

c la caractéristique qui passe par B. Appelons C l'élément de cette caractéristique qui passe par c. Si l'élément B converge vers l'élément A, c converge vers a, dont il est, par suite, infiniment rapproché, ainsi que de b. Il en résulte que les coordonnées de l'élément C ne peuvent différer qu'infiniment peu de celles de B ou de A. Représentons-les par

$$(z + \Delta' z,\ x_i + \Delta' x_i,\ p_i + \Delta' p_i),$$

et posons

$$\Delta z = \Delta' z + \Delta'' z, \quad \Delta x_i = \Delta' x_i + \Delta'' x_i.$$

Puisque A et c appartiennent à une même solution, on a

$$\Delta' z = p_1 \Delta' x_1 + \cdots + p_n \Delta' x_n + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit du second ordre. De même

$$\Delta'' z = (p_1 + \Delta' p_1)\, \Delta'' x_1 + \cdots + (p_n + \Delta' p_n)\, \Delta'' x_n + \varepsilon',$$

ε' étant aussi du second ordre, parce que B et C appartiennent à une même caractéristique. Ajoutons ces deux relations, il viendra

$$\Delta z = p_1 \Delta z_1 + \cdots + p_n \Delta x_n + \varepsilon'',$$

ε'' étant infiniment petit du second ordre. Donc, enfin, en prenant la différentielle de z,

$$dz = p_1 \Delta x_1 + \cdots + p_n \Delta x_n,$$

ou

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Nous appellerons *éléments infiniment peu différents* ceux qui jouissent de la propriété dont il est question ici.

Il résulte de là que, *pour trouver une intégrale de* $\mathrm{f} = 0$, *il faut et il suffit de trouver* ∞^n *éléments* infiniment peu différents (n° 5).

131. *Congruence caractéristique; variété caractéristique* (*). Considérons deux équations aux dérivées partielles

$$f=0, \quad \varphi=0,$$

ayant des solutions communes, et un élément A, commun à ces solutions et aux équations données. D'après le n° 128, les solutions communes et, par suite, les équations données, contiendront la caractéristique de f qui passe par A; ensuite, pour la même raison, les solutions communes et les équations données contiendront les ∞ caractéristiques de φ, qui passent par les éléments de cette caractéristique de f. Donc *si des solutions communes de deux équations ont un élément commun, elles en ont une infinité double* (∞^2). L'ensemble de ces éléments communs s'appelle une *congruence caractéristique* des équations données, par rapport à l'élément considéré.

Si l'on exprime analytiquement la génération des congruences caractéristiques, on reconnaît que les fonctions f et φ jouent un rôle symétrique dans ces calculs. On en conclut que l'on peut considérer la congruence caractéristique de $f=0$ et $\varphi=0$, passant par A comme l'ensemble des ∞ caractéristiques de φ qui passent par les éléments de la caractéristique de f contenant l'élément A; ou, comme l'ensemble des ∞ caractéristiques de f qui passent par les éléments de la caractéristique de φ, contenant l'élément A.

On peut étendre ce qui précède à un nombre quelconque d'équations

$$f=0, \quad \varphi=0, \quad \psi=0, \ldots$$

ayant des solutions communes, qui se touchent en un élément A. Par cet élément A, passe une caractéristique de f, qui est dans toutes les solutions communes et dans les équations elles-mêmes. Par chaque élément de cette caractéristique, passe aussi une caractéristique de φ, située dans les diverses solutions communes

(*) Mémoire B, première partie du théorème II; mémoire C, première partie des théorèmes *b* et *c*.

considérées. Par chaque élément de la congruence caractéristique ainsi obtenue, passe une caractéristique de ψ, située dans toutes les solutions communes et dans toutes les équations, et ainsi de suite. Donc enfin, *si* m *équations ont des solutions communes passant par un élément* A, *elles ont* ∞^m *éléments communs à toutes ces solutions communes.* L'ensemble de ces éléments communs s'appelle la *variété caractéristique* de ces équations.

Corollaire I. On prouverait aisément, comme au n° 128, que deux solutions communes d'un système ont en commun une variété caractéristique.

Corollaire II. Considérons deux équations simultanées $f=0$, $\varphi=0$, ayant une solution commune. Les caractéristiques de f et de φ, en un élément commun à cette solution et aux équations données, doivent se trouver respectivement parmi les éléments de $\varphi=0$, et de $f=0$. Il en résulte que $\varphi=0$ doit être une solution des équations (8), et $f=0$, une solution des équations analogues où φ remplace f. On a donc

$$\Sigma\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p_i}\right\}=0,$$

relation que nous écrirons simplement $f\varphi=0$. C'est la condition d'intégrabilité simultanée de Jacobi et de Bour. La remarque précédente s'appliquant à autant d'équations que l'on veut, permet de compléter tout système d'équations simultanées, comme on l'a vu (n° 79).

132. *Méthode de Lie* (*). *Si deux équations* $\mathrm{f}=0$, *satisfont à la condition* $\mathrm{f}\varphi=0$, *le lieu des congruences caractéristiques qui passent par un point commun constitue une solution commune.* En effet, d'abord, ce lieu se compose de ∞^{n-2} congruences caractéristiques contenant chacune ∞^2 éléments, donc, en tout ∞^n éléments. Pour le prouver, il suffit de remarquer que par le point donné (z_0, x_{i0}), passent ∞^{n-2} éléments communs aux deux équa-

(*) Mémoire B, seconde partie du théorème II; mémoire C, seconde partie des théorèmes *b* et *c*.

tions, que l'on obtient, en faisant varier de toutes les manières possibles $p_{10}, \ldots, p_{n-2,0}$, et déterminant $p_{n-1,0}$, p_{n0}, au moyen des équations données. Or, par chaque élément commun passe une congruence caractéristique; donc il y en a, en tout, ∞^{n-2}, contenant ∞^n éléments.

Ensuite, deux éléments infiniment voisins A, B parmi ce groupe de ∞^n éléments, sont infiniment peu différents. En effet, il est clair que deux éléments infiniment voisins ne peuvent pas, en général, se trouver sur deux congruences caractéristiques passant par des éléments non infiniment peu différents. Nous devons donc supposer les deux éléments voisins en question sur une même congruence caractéristique ou sur deux caractéristiques déterminées par des éléments

$$(z_0, x_{i0}, p_{i0}), \quad (z_0, x_{i0}, p_{i0} + \Delta p_{i0}),$$

infiniment peu inclinés l'un sur l'autre. 1° Considérons d'abord deux éléments A, B situés sur une même congruence caractéristique. La caractéristique de f passant par A, qui est une variété à une dimension, rencontrera la caractéristique de φ passant par B, sur la congruence, qui est une variété à deux dimensions, en un élément C, infiniment voisin, en général, de A et de B, et par suite infiniment peu différent de l'un et de l'autre. Donc A et B diffèrent aussi infiniment peu, comme il fallait le démontrer. 2° Supposons maintenant que A et B soient sur les deux congruences caractérisées par les éléments initiaux (z_0, x_{i0}, p_{i0}), $(z_0, x_{i0}, p_{i0} + \Delta p_{i0})$. Les coordonnées de A sont exprimées en fonction de x_{n-1}, x_n, z_0, x_{i0}, p_{i0}. Si l'on change dans les expressions de ces coordonnées, p_{i0} en $p_{i0} + \Delta p_{i0}$, on obtiendra sur la seconde congruence, un élément C, infiniment voisin de A, et par suite de B. Puisque p_{i0} a varié infiniment peu en passant de A en C, C est infiniment peu différent de A; il est aussi infiniment peu différent de B, puisqu'il est infiniment voisin de B et sur la même congruence. Donc enfin, A et B, sont, dans tous les cas, infiniment peu différents, et le lieu des congruences caractéristiques qui passent par un point commun, contenant ∞^n éléments infiniment peu différents les uns des autres, est une intégrale (n° 130).

On démontre de même que *le lieu des variétés caractéristiques de* m *équations satisfaisant aux conditions d'intégration simultanée et passant par un point, est une solution commune.*

Nous avons indiqué plus haut (n^{os} 124, 126 et remarque finale du n° 127) comment on peut donner aux équations une forme telle que l'on puisse trouver leur variété caractéristique et par suite leur intégrale commune. Dans le cas de deux équations seulement, on ne doit pas transformer les équations données (*).

133. *Méthode de Jacobi.* Considérons m équations aux dérivées partielles :

$$f_1 = 0, \dots, f_m = 0,$$

satisfaisant aux conditions d'intégrabilité. Supposons que l'on ait trouvé, en outre, $k = (n + 1 - m)$ fonctions $f_{m+1}, \dots, f_{n+1}$, qui satisfassent avec les précédentes et entre elles aux conditions $f_i f_k = 0$. Je dis que les équations

$$f_1 = 0, \dots, f_m = 0, f_{m+1} = a_1, \dots, f_{n+1} = a_k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

ou celles que l'on en déduit, en les résolvant par rapport à $z, p_1, \dots, p_n$,

$$z = \mathrm{F}, \quad p_1 = \mathrm{F}_1, \dots, p_n = \mathrm{F}_n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{F})$$

représentent les ∞^{2n+1-m} éléments du système primitif, quand $a_1, \dots, a_k$ sont des constantes arbitraires, et que, de plus, $z = \mathrm{F}$ est l'intégrale complète commune du système donné.

Considérons, en effet, le système

$$f_1 = 0, \dots, f_m = 0, \quad f_{m+1} = a_1.$$

Si l'on donne à a_1 une valeur spéciale, il ne représentera plus que ∞^{2n-m} éléments du système primitif, mais si on laisse a_1 arbitraire, il représentera de nouveau ∞^{2n+1-m} éléments; ces élé-

(*) Nous avons cité au n° 127, le petit mémoire où Mayer indique les calculs à faire pour établir algébriquement la méthode de Lie, sous sa forme la plus générale. Comparez mémoire B de Lie, théorème III et IV.

ments seront les mêmes qu'avant l'adjonction de $f_{m+1} = a_1$, puisque cette relation, prise à part, est satisfaite par les coordonnées d'un élément quelconque de l'espace, a étant arbitraire.

On peut adjoindre, de la même manière, au système primitif les autres équations $f = a$, et obtenir ainsi le système (f) ou (F), à la place du système primitif. Si l'on fait varier, dans les équations (F), $x_1, \ldots, x_n$, de quantités infiniment petites, en laissant les quantités a constantes, z, $p_1, \ldots, p_n$ varient aussi infiniment peu. Donc les éléments infiniment voisins du système (F) sont infiniment peu différents et constituent une intégrale pour chaque valeur des quantités a. Donc $z = \mathrm{F}$ est l'intégrale complète commune et l'on a

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i} = \mathrm{F}_i,$$

ou

$$d\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 dx_1 + \cdots + \mathrm{F}_n dx_n.$$

Il résulte de la dernière observation, que l'on peut trouver la première équation (F) en intégrant l'équation

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n,$$

où les quantités p sont remplacées par leurs valeurs déduites des n premières équations f. Ceci suppose toutefois que l'on sache qu'il y a réellement une intégrale complète commune avec k constantes arbitraires, ce qu'apprend la méthode de Lie.

Remarque. Ce qui précède contient essentiellement la méthode de Jacobi, c'est-à-dire le mode de détermination de z, au moyen des fonctions f; le théorème de Poisson et Jacobi, et les méthodes de Weiler, de Boole et de Mayer donnent les moyens de trouver les fonctions f, avec plus ou moins de facilité.

134. *Conclusion.* Les diverses méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles se groupent autour des méthodes de Cauchy, de Lie et de Jacobi. On vient de voir que la dernière consiste essentiellement en une transformation du système donné en un autre contenant une équation de plus. Si l'on pousse cette transformation à bout, on trouve l'intégrale sans autre calcul. Mais on peut l'arrêter quand on veut, et, comme on l'a vu au n° 125, se servir de la méthode de Lie, pour réduire le système à une équation, que l'on peut intégrer par la méthode de Cauchy, chaque fois que la méthode de Jacobi n'est pas plus favorable (voir n^{os} 125 et 70, III).

La théorie des lignes, des congruences et des variétés caractéristiques permet donc de *fondre en une seule* toutes les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

(283)

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE I.

Méthode de Lagrange et de Pfaff.

LIVRE II.

Méthode de Jacobi.

LIVRE III.

Méthode de Cauchy et de Lie.

APPENDICE.

LA MÉTHODE DE LIE, COMME SYNTHÈSE DES MÉTHODES ANTÉRIEURES.

(1)

RÉSUMÉ

DE

QUELQUES OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES

ET MÉTÉOROLOGIQUES

FAITES DANS LA ZONE SURTEMPÉRÉE

ET ENTRE LES TROPIQUES;

PAR

J.-C. HOUZEAU,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

(Présenté à la classe des sciences le 10 octobre 1874.)

---

(2)

RÉSUMÉ

DE

QUELQUES OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES

ET MÉTÉOROLOGIQUES

FAITES DANS LA ZONE SURTEMPÉRÉE

ET ENTRE LES TROPIQUES.

Je vais extraire d'un journal d'observations tenu pendant un certain nombre d'années, et qui embrasse des sujets d'une grande variété, les annotations qui peuvent avoir le plus d'intérêt pour les astronomes et les météorologistes. Je ne me bornerai pas d'ailleurs à rapporter les observations elles-mêmes. Je m'appliquerai à en faire ressortir les conséquences, et je me servirai de ces données soit pour établir quelques faits nouveaux, soit du moins pour montrer dans quel sens il serait utile de diriger, sur certains sujets, les recherches ultérieures. Un observateur réduit à ses propres forces ne doit pas, en effet, se borner à enregistrer mécaniquement des faits. La somme d'observations qu'il peut réunir est trop limitée, pour qu'il espère de ce moyen mécanique une moisson réellement fructueuse. Mais en multipliant les recherches à certains moments et selon certaines vues, en accordant une attention spéciale aux particularités qui se révèlent, enfin en discutant lui-même des observations dont les détails, les difficultés et le degré d'exactitude lui sont mieux connus qu'à tout autre, il pourra parvenir à quelques résultats utiles.

Le travail qui suit est divisé en deux parties, selon qu'il concerne l'astronomie ou la météorologie.

CHAPITRE I.

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES.

Les observations de la Lumière Zodiacale et celles des Étoiles Filantes étant de celles qui peuvent se faire sans instruments, attirèrent naturellement mon attention dès mon arrivée dans les solitudes du Nouveau Monde. Je fus étonné que la Lumière Zodiacale fût presque aussi difficile à observer dans le Texas occidental qu'elle l'est sous le ciel de l'Europe moyenne. Les étoiles étaient cependant d'une grande clarté; et celles voisines les unes des autres, comme dans le groupe des Pléiades, par exemple, se séparaient et se détachaient beaucoup mieux qu'en Belgique; elles perdaient cette espèce de nébulosité générale qui, dans notre pays, et dans l'observation à l'œil nu, rend cet amas stellaire un peu confus. Mais si les étoiles étaient plus nettes, la vision sans instruments ne portait pas cependant jusqu'à des astres d'une grandeur moindre; et comme en Europe, la Lumière Zodiacale ne paraissait qu'accidentellement. D'autre part, les déplacements fréquents auxquels je fus bientôt assujetti, m'empêchèrent de poursuivre alors, avec régularité, les observations de cette Lumière. J'en obtins cependant quelques positions qui, comme on le verra plus loin, sont précieuses, lorsqu'on les relie à la série d'une certaine importance que je réussis à faire plus tard.

Cette série a été exécutée à la Jamaïque. Elle s'étend de décembre 1868 à juin 1869, embrassant un intervalle complet de six mois, dans lequel l'écliptique passe d'une situation extrême à l'autre par rapport à l'horison. Elle a été faite dans une plaine découverte à Hope Tollgate, au nord de Kingston, par 18° 2′ de latitude septentrionale, et dans une atmosphère assez favorable pour permettre l'observation régulière, suivie, et pour ainsi dire journalière de cet intéressant phénomène. On verra en effet que dans une durée de 179 jours consécutifs, j'ai pu observer la Lumière Zodiacale dans 56 soirées, ce qui est énorme si l'on tient compte des nuages et des clairs de Lune. Ces observations n'étaient pas ici aléatoires comme dans d'autres climats; on était à peu près certain de voir la Lumière Zodiacale se dessiner au ciel, pourvu que celui-ci fût serein et que la Lune ne jetât pas un éclat trop vif. Dans cette même durée j'ai cherché la Lumière Zodiacale le matin, avant le lever du Soleil, dans presque toutes les nuits claires et sans Lune. Mais avant l'aube, la visibilité du phénomène était beaucoup moins assurée, moins fréquente, lors même que la transparence de l'air permettait d'apercevoir des étoiles aussi faibles que celles visibles dans les heures du soir. Il ne reste aucun doute dans mon esprit que le fuseau du matin ne soit plus court et sensiblement plus faible que celui du soir. Un certain nombre de positions ont pourtant été obtenues dans la série du matin, et ces positions ont leur prix en ceci, que comparées aux observations du soir elles fournissent la situation simultanée des deux fuseaux, celui à l'Ouest et celui à l'Est du Soleil. Cette série d'observations a été interrompue par mon départ pour les montagnes, où j'habite une vallée trop encaissée pour être à même de la continuer.

La position de la Lumière Zodiacale sur la sphère céleste était déterminée en examinant par quelles étoiles, ou entre quelles étoiles, passait l'axe, ou plus exactement la ligne d'éclat maximum. Ces comparaisons sont sujettes sans doute à une certaine incertitude. On trouvera dans le texte même des observations des remarques qui feront apprécier ces difficultés. Mais on reconnaîtra aussi, par la discussion de ces évaluations, que les erreurs vont rarement à 2° ou même 1° dans la position assignée des points. Des comparaisons faites le même soir, par rapport à des étoiles différentes, donnent souvent pour des points divers de l'axe, des latitudes ou distances à l'écliptique qui concordent à 1° près. Le 31 décembre 1868 au soir, on a pu prolonger l'observation de la Lumière Zodiacale pendant une heure et demie, ce qui est peut-être la plus longue durée consécutive pendant laquelle cette Lumière s'est trouvée sous l'œil d'un observateur. Or, dans tout cet intervalle, la position du fuseau lumineux, par rapport aux étoiles, n'a pas paru subir de changement appréciable; le jugement que l'on forme sur la position de l'axe n'est donc pas aussi vague, aussi incertain, aussi sujet à amendement, que quelques astronomes ont pu le supposer.

Par de semblables comparaisons avec les étoiles, nous avons réuni, dans les 179 jours cités, 125 déterminations de points, c'est-à-dire 125 observations individuelles de la position de la Lumière, tant le matin que le soir. C'est, croyons-nous, la série la plus considérable, et surtout la plus régulièrement continue qui ait encore été faite. Nous ne voulons pas anticiper sur les résultats qui en ressortent, et que l'on trouvera exposés plus loin. Qu'il nous soit permis cependant d'indiquer qu'ils tendent manifestement à faire abandonner l'hypothèse que la Lumière Zodiacale soit située autour du Soleil et dans l'équateur de cet astre, ainsi que celle d'après laquelle cette Lumière serait répandue sur l'orbite de la Lune. C'est probablement encore plus près de nous qu'il faut chercher le siége de ce phénomène, dans une sorte de barbe ou aigrette dirigée de la Terre vers le Soleil, et présentant la forme d'un secteur dont notre globe occupe le sommet. Ce qui nous paraît irrécusable, à la suite de la discussion de nos mesures présentée au § 9, c'est que la Lumière Zodiacale est dans le plan même de l'écliptique, et ne prend pas d'inclinaison, permanente ni périodique, de part ni d'autre de ce plan.

§ 1. — OBSERVATIONS DE LA LUMIÈRE ZODIACALE.

Je vais commencer par rapporter les observations, telles que mon journal les contient. Lorsque je les ai commencées je ne prévoyais pas qu'elles prendraient une importance suffisante pour être un jour publiées. De là, la forme un peu trop concise et parfois peu élégante du langage. Je crois cependant qu'il est préférable, en présence des résultats que la discussion fournit, de présenter d'abord les observations elles-mêmes, dans leur teneur originelle, sans une seule modification. Des notes expliqueront le petit nombre de passages qui exigent des éclaircissements.

1861. — Au Texas.

(Temps moyen de San Antonio.)

1 février, 7^h0^m soir. — Lumière Zodiacale belle, rougeâtre. Pointe sur o Piscium.

4 février, 7^h0^m soir. — La pointe de la Lumière Zodiacale me paraît à $\frac{1}{3}$ de π à o Piscium [1].

10 février, 7^h15^m soir. — Vu la Lumière Zodiacale. Sa pointe est peu nette; elle semble à $\frac{1}{3}$ de o à π Piscium.

10 avril, 7^h35^m soir. — Pointe de la Lumière Zodiacale à 0,4 de ξ à β Tauri.

1868 et 1869. — A la Jamaïque.

(Temps moyen de Kingston).

1868.

12 décembre, de 7^h à $7\frac{1}{2}^h$ soir. — L'axe [2] de la Lumière Zodiacale paraît passer sous β Capricorni, à une distance égale à 1,5 de celle de α à β Capricorni; à $\frac{1}{4}$ de λ à μ Capricorni; sur 919 *Mayer*.

13 décembre, 7^h30^m soir. — L'axe de la Lumière Zodiacale passe: sous β Capricorni, à 1,0 de α à β; sur A Aquarii; sur θ Aquarii.

[1] On nomme toujours la première l'étoile à partir de laquelle il faut compter la fraction indiquée de la distance totale.

[2] Ainsi que nous l'avons dit, nous avons appliqué le nom d'axe, peut-être improprement, à la ligne d'éclat maximum. Cette ligne se confond d'ordinaire avec l'axe de figure. Mais nous avons observé plus tard que parfois elle en diffère sensiblement.

17 décembre, 7^h30^m soir. — La Lune dans la Lumière Zodiacale au Sud de ε Aquarii. Cette Lumière plus intense à l'Ouest qu'à l'Est de la Lune. Son axe passe plutôt au Nord qu'au Sud de θ Aquarii.

18 décembre, 5^h15^m matin. — Lumière Zodiacale difficile à voir, à cause de l'éclat de Vénus. L'axe me paraît passer à $\frac{1}{4}$ de β à δ Scorpii, et à $\frac{1}{3}$ de α à β Librae.

21 décembre 5^h 10^m matin. — Lumière Zodiacale confuse et fort faible entre β et δ Scorpii.

22 décembre, 5^h0^m matin. — Lumière Zodiacale à peine soupçonnée, bien que le ciel soit remarquablement clair et les petites étoiles bien visibles. Vénus est dans cette Lumière, mais Vénus n'est pas aussi brillante que la Lune de quatre jours du 17 décembre au soir, qui était bien loin d'effacer la Lumière Zodiacale. Vénus est entre la tête du Scorpion et le carré de la Balance. Si l'on soupçonne la Lumière Zodiacale ce matin, elle passerait à $\frac{1}{3}$ de ι à γ Librae.

24 décembre, 5^h10^m matin. — Vénus un peu à l'Ouest de β Scorpii. Lumière Zodiacale incertaine, à peine visible. On soupçonne cependant un peu de lumière passant sur g Ophiuchi. Cette lumière est blanche, tandis que celle du soir est rouge.

25 décembre, 6^h55^m soir. — Lumière Zodiacale assez visible, malgré le clair de lune. L'axe paraît passer à environ $\frac{1}{4}$ de θ Capricorni à ε Aquarii, et à $\frac{1}{3}$ de δ Capricorni à β Aquarii.

26 décembre, 7^h0^m soir. — Ciel à cumulus et clair de Lune. On voit très-bien cependant, au sud de β Capricorni et plus à l'Est, la plaque rouge de la Lumière Zodiacale, mais les nuages empêchent de déterminer sa situation exacte.

27 décembre, 5^h0^m matin. — Ciel clair à l'Orient; cependant il est impossible de distinguer même une vague lueur de Lumière Zodiacale. La Lune est couchée, Vénus à l'Est de β Scorpii. Il n'y a pas encore de trace de l'aube du jour.

30 décembre, 7^h10^m soir. — La Lumière Zodiacale a beaucoup faibli depuis les précédentes observations du soir, mais elle est encore rougeâtre. Elle est aussi moins longue. La Lune n'est pas encore levée. L'axe passe à peu près à $\frac{1}{3}$ de β Aquarii à δ Capricorni, et à $\frac{1}{2}$ de α à θ Aquarii.

31 décembre, 5^h15^m matin. — Lumière Zodiacale à peine soupçonnée à l'Est de α Scorpii, sous Vénus. Blanche comme les matins précédents.

— — 6^h45^m soir. — La Lumière Zodiacale a manifestement changé de place, d'éclat et de teinte. Elle est beaucoup moins rouge que les soirs précédents et tend maintenant au blanc rougeâtre. Elle a repris de la force; elle est plus étroite et plus lenticulaire, plus pointue; et elle s'est manifestement portée au Midi [1]. L'axe passe 10′ ou 15′ au Nord de θ Capricorni, à $\frac{1}{4}$ de σ à θ Aquarii, et presque exactement sur λ Aquarii, mais peut-être quelques minutes à son Nord.

— — 7^h30^m soir. — Pas de changement appréciable.

— — 8^h15^m soir. — Pas de changement appréciable. Le crépuscule de la Lune levante commence à être sensible à l'Orient.

1869.

1 janvier, 5^h0^m matin. — Clair de Lune; Vénus au Nord de α Scorpii. Pas de traces de Lumière Zodiacale. On a vu celle du soir, très-manifestement, dans des conditions de Lune semblables.

— — 7^h25^m soir. — La Lumière Zodiacale a repris un peu de largeur et un peu de rougeur. L'axe passe à $\frac{1}{4}$ de δ Capricorni à β Aquarii; à $\frac{1}{5}$ de σ à θ Aquarii; et à quelques minutes au Nord de λ Aquarii. C'est à très-peu près la même position qu'hier soir.

2 janvier, 4^h40^m matin. — Clair de Lune; pas de traces de la Lumière Zodiacale.

— — 5^h5^m matin. — Vénus levée. Pas de traces de la Lumière Zodiacale. Il est vrai que la Lune est brillante et près du zénit.

[1] Avant de se prononcer sur le caractère et la signification de ces changements, il est bon de recourir à la discussion des observations, et surtout à l'examen des effets qu'on peut attribuer à l'inégale transparence de l'air à différentes hauteurs (§ 9).

2 janvier, 7^h20^m soir. — Base de la Lumière Zodiacale couverte par des stratus. Pointe bien visible; va peut-être un peu plus haut qu'hier. Axe sur ou quelques minutes Nord λ Aquarii [1].

3 janvier, 7^h10^m soir. — Lumière Zodiacale faiblement rougeâtre. Pointe manifestement de plusieurs degrés au delà de λ Aquarii. Axe à $\frac{1}{3}$ de δ Capricorni à β Aquarii; à $\frac{1}{2}$ de σ à θ Aquarii; à quelques minutes au Nord de λ Aquarii.

4 janvier, 4^h45^m matin. -- La Lune brille fortement. Pas de traces de la Lumière Zodiacale.

— — 7^h40^m soir. — La Lumière Zodiacale est beaucoup plus faible que la veille, mais toujours rougeâtre. Ne monte pas à λ Aquarii. Axe passe à $\frac{1}{4}$ de σ à θ Aquarii. Quelques cumulus dans le voisinage.

5 janvier, 4^h45^m matin. — Pas de traces de la Lumière Zodiacale. Clair de Lune. Vénus pas encore visible.

— — 7^h0^m soir. — La Lumière Zodiacale s'est manifestement transportée au Nord. Axe passe à $\frac{1}{8}$ de θ à σ Aquarii (presque sur θ), et à $\frac{1}{3}$ de λ à η Aquarii.

6 janvier, 4^h55^m matin. — Clair de Lune; Vénus levée. Pas de traces de la Lumière Zodiacale.

— — 7^h0^m soir. — Lumière Zodiacale revenue un peu Sud. Axe à $\frac{1}{4}$ de θ à σ Aquarii, et à $\frac{1}{3}$ de $\varkappa$ à λ Aquarii.

— — 8^h0^m soir. — On ne voit plus que la pointe, dont l'axe semble encore plus Sud qu'il y a une heure, et à peine à $\frac{1}{2}$ de λ à $\varkappa$ Aquarii. Ces déplacements sont-ils dus à la difficulté de bien juger?

7 janvier, 5^h0^m matin. — La Lune proche [2] et brillante; Vénus présente. Traces douteuses de Lumière Zodiacale dans l'espace entre ε Scorpii et θ Ophiuchi.

— — 7^h0^m soir. — La Lumière Zodiacale semble un peu

[1] On comprend qu'il faut lire : Axe sur λ Aquarii, ou quelques minutes au Nord de cette étoile.

[2] Le mot « proche » signifie dans le voisinage de la région qu'occupe la Lumière Zodiacale.

plus Nord qu'hier soir. Axe à 0,6 de β Aquarii à δ Capricorni ; à $\frac{1}{8}$ de θ à σ Aquarii; et à $\frac{1}{8}$ de $\varkappa$ à λ Aquarii.

8 janvier, 5^h15^m matin. — La Lune entre dans Scorpius, mais le croissant se rétrécit. Horizon clair; les étoiles du Scorpion magnifiquement visibles. Pas de traces de la Lumière Zodiacale.

9 janvier, 5^h10^m matin. — La Lune et Vénus dans le Scorpion, jetant assez de lumière sur cette partie du ciel. Pas de traces de la Lumière Zodiacale.

10 janvier, 7^h50^m soir. — Par une éclaircie on trouve l'axe de la Lumière Zodiacale à 0,5 de $\varkappa$ à λ Aquarii. Un peu douteux.

12 janvier, 7^h25^m soir. — L'axe de lumière [1] diffère manifestement de l'axe de figure. Il est plus Sud que celui-ci. La lueur s'étend donc plus loin au Nord en s'affaiblissant. L'axe de lumière passe à 0,4 de δ Capricorni à β Aquarii ; à $\frac{1}{3}$ de θ à ι Aquarii, à $\frac{1}{3}$ de θ à δ Aquarii ; environ 45′ Nord de λ Aquarii ; et 20′ $\mp$ au Nord de φ Aquarii.

13 janvier, 4^h50^m matin. — Pas de traces de la Lumière Zodiacale ; ni Lune ni Vénus.

— — 5^h10^m matin. — Vénus levée ; queue du Scorpion visible jusqu'à ξ. Pas de traces de la Lumière Zodiacale.

— — 7^h15^m soir. — Lumière Zodiacale belle. La position des bords varie en quelques minutes. J'ai remarqué précédemment que ces bords s'altèrent par l'approche de nuages. Ces changements sont donc dus probablement à des inégalités dans la pellucidité de l'air. Il est toutefois manifeste ce soir que l'axe de lumière est au Sud de l'axe de figure, comme si une seconde lentille brillante était placée dans la partie Sud de la première. Les bords comprennent δ Capricorni et β Aquarii, et la lueur s'étend 1° environ au delà de chacune de ces étoiles. L'axe de lumière semble passer à 0,5 de δ Capricorni à β Aquarii ; à $\frac{1}{2}$ de ι Aquarii à θ Aquarii ; à $\frac{1}{2}$ de σ à θ Aquarii ; à 15′ $\mp$ au Nord de λ Aquarii ; à $\frac{1}{6}$ de φ Aquarii à β Piscium.

[1] L'expression est vicieuse, mais on en a défini le sens plus haut ; c'est la ligne de plus grand éclat.

14 janvier, 5^h30^m à 5^h40^m matin. — Toute la queue du Scorpion levée. Vénus présente; pas de traces quelconques de la Lumière Zodiacale. A 5^h35^m premières traces de l'aube du jour. Ciel parfaitement pur.

— — 6^h55^m soir. — La Lumière Zodiacale apparaît [1] avec les étoiles de 4e à 5e grandeur de cette partie du ciel. La Lune dans la base de la Lumière.

— — 7^h30^m soir. — Lumière Zodiacale comme hier soir. L'axe de lumière passe aux mêmes places. La Lune est un peu au Sud de cet axe, et par conséquent encore plus au Sud de l'axe de figure. Pointe apparente dans la longitude de λ Piscium ou même au delà.

15 janvier, 7^h10^m soir. — La Lumière Zodiacale a son axe de lumière en apparence beaucoup plus au Nord qu'hier; mais cela est dû sans doute à ce que la Lune, qui est dans cette Lumière, et bien au Sud de son axe de figure, fait pâlir davantage la partie méridionale. Axe de lumière apparent à $\frac{1}{2}$ de λ à η Aquarii; et à 0,4 de φ Aquarii à γ Piscium.

16 janvier, 5^h30^m matin. — Pas de traces de la Lumière Zodiacale, même en cachant Vénus.

17 janvier, 5^h25^m matin. — Pas la moindre trace de la Lumière Zodiacale. Ciel clair au Levant.

18 janvier, 5^h20^m matin. — Pas de traces de la Lumière Zodiacale.

19 janvier, 5^h15^m matin. — Ciel très-pur. Traces d'une lueur blanche, confuse. Vénus levée. Cette lueur n'est pas lenticulaire, mais oblongue, mal définie. Axe (incertain) à $\frac{1}{3}$ de θ Ophiuchi à ξ Serpentis.

20 janvier, 5^h30^m matin. — Ciel très-pur. Les traces de Lumière Zodiacale, si elles existent, sont si vagues qu'il est impossible de les définir [2]. Ce serait entre θ Ophiuchi et ξ Serpentis.

[1] On entend par « apparaît » que la Lumière Zodiacale commence à devenir visible par suite de l'affaiblissement du crépuscule.

[2] C'est-à-dire qu'il est impossible de définir la situation de cette lueur incertaine.

21 janvier, 5^h30^m matin. — Pas de Lumière Zodiacale. Ciel pur.

22 janvier, 5^h0^m matin. — Le haut du Scorpion couvert par un nuage, mais le bas de la queue bien libre. Pas de Lumière Zodiacale.

23 janvier, 4^h10^m matin. — Pas de traces de la Lumière Zodiacale; ciel très-pur; Vénus pas encore levée.

— — 5^h30^m matin. — Vénus levée. Ciel parfaitement pur; pas de traces de la Lumière Zodiacale.

— — 5^h35^m matin. — Premières traces de l'aube du jour.

24 janvier, 5^h15^m matin. — Vénus levée. Pas de traces de la Lumière Zodiacale.

25 janvier, 5^h0^m matin. — Pas de traces de la Lumière Zodiacale; ciel clair.

31 janvier, 7^h40^m soir. — Lumière Zodiacale, mais déjà un peu basse. Il est visible cependant qu'elle a perdu de son éclat depuis la Lune précédente [1]. Elle a toujours sa teinte rougeâtre. L'axe de lumière, qui ne paraît guère différer maintenant de l'axe de figure, passe à 0,4 de λ à r Piscium, ou à 0,6 de λ à p Piscium. La pointe va plus haut, mais mal définie, le ciel n'étant pas parfaitement pur.

1 février, 7^h25^m soir. — Lumière Zodiacale assez belle, mais décidément moins forte qu'à la lunaison précédente; pointe plus mousse et plus indécise. L'axe de lumière passe à 0,2 de φ Aquarii à γ Piscium; et à 0,5 de p à λ Piscium. La teinte est peut-être un peu moins rouge qu'hier.

2 février, 7^h0^m soir. — Lumière Zodiacale assez belle, un peu mieux définie qu'hier. L'axe de lumière, qui est comme le mois passé un peu au Sud de l'axe de figure, passe à 0,3 de φ Aquarii à γ Piscium; et à 0,45 de p à λ Piscium.

10 février, 7^h20^m soir. — Après plusieurs soirées nuageuses, soirée découverte. Lumière Zodiacale un peu pâle, mal définie; pointe émoussée et douteuse, base épanouie. En un mot c'est une masse allongée assez informe, plutôt qu'une

[1] C'est-à-dire depuis que le clair de Lune a interrompu les observations du soir.

lumière lenticulaire. L'axe d'éclat passe à environ 0,6 de λ à *p* Piscium. Si on assimile l'éclat de la Lumière Zodiacale à celui des étoiles voisines, j'estime qu'elle paraîtrait et disparaîtrait avec les étoiles de la grandeur 4,5 [1].

11 février, 5^h20^m matin. — Ni Lune ni Vénus. Pas de traces appréciables de la Lumière Zodiacale. Il semble cependant y avoir une vague blancheur sur la région du ciel dont *p* et O Sagittarii sont le centre, et notablement au Sud de l'écliptique.

— — 7^h30^m soir. — Lumière Zodiacale bien visible; éclat 5 environ. Il était au moins 4 le mois précédent [2]. Ce soir des cumulostratus couvrent sa base. La partie supérieure passe à 0,4 de δ Piscium à *m* Ceti. La pointe va plus haut, où est Jupiter, mais elle est émoussée.

12 février, 5^h20^m matin. — L'horizon de l'Est est clair. Pas de traces de la Lumière Zodiacale. Vénus n'est pas levée. Pas de restes de la blancheur qu'on croyait voir hier dans le Sagittaire.

— — 5^h30^m matin. — Traces sensibles de l'aube du jour.

13 février, 8^h15^m soir. — Après la disparition des nuages et le coucher de la Lune on voit la Lumière Zodiacale, mais faible, à peine éclat 5. Pointe très-mal définie, vers Jupiter. L'axe d'éclat passe à 0,4 de δ Piscium à *m* Ceti.

14 février, 7^h55^m soir. — La Lune efface la Lumière Zodiacale plus qu'elle ne le faisait certainement en janvier. On distingue *m* Ceti et d'autres étoiles de 5^e^ grandeur dans le voisinage de la Lune, qui n'a que deux jours et demi. Donc l'éclat de la Lumière Zodiacale est à peine 5.

15 février, 7^h30^m soir. — Malgré la Lune on voit quelques traces de la Lumière Zodiacale, surtout à la base. Ce soir *m* Ceti est effacée [3], mais non δ Piscium. La Lumière Zodiacale s'élève

[1] Cette notation de l'éclat de la Lumière Zodiacale est expliquée plus loin, § 3.

[2] « Au moins 4 » veut dire que cet éclat égalait pour le moins celui des étoiles de 4e grandeur, et aurait été représenté par un chiffre plutôt inférieur que supérieur à 4 unités.

[3] Par le clair de lune.

dans l'espace entre ces deux étoiles. Son éclat est donc au moins 5, tendant vers 4,5; soit 4,7.

16 février, 5^h20 matin. — Beau ciel; Vénus pas levée. Pas de traces de la Lumière Zodiacale.

— — 7^h40^m soir. — Lumière Zodiacale effacée par la Lune. Celle-ci ayant grandi, les étoiles de 5^e grandeur, et même beaucoup de celles de 4^e grandeur de cette région, sont effacées. On peut donc conclure seulement que la lumière Zodiacale est d'un éclat inférieur à 4.

17 février, 5^h0^m matin. — Horizon clair; Vénus pas levée. Examiné le Sagittaire avec grand soin. Pas de traces de la Lumière Zodiacale.

18 février, 5^h10^m matin. — Légère lueur blanchâtre vers β Capricorni; Vénus n'est pas levée. Cette blancheur est mal définie et non lenticulaire.

— — 5^h25^m matin. — La lueur dont il vient d'être parlé se confond avec l'aube, et probablement n'était que les premières traces de l'aube.

19 février, 5^h10^m matin. — Faible lueur blanchâtre, mal définie, dont le centre, ou plus exactement l'axe, paraît au Sud de β Capricorni, à une distance égale à celle de α à β Capricorni. Cette lueur est bien un peu prolongée dans le sens de l'écliptique. Je lui donne au plus l'éclat 5,5. L'aube du jour la suit bientôt, et semble comme se confondre avec elle.

20 février, 5^h0^m matin. — Faible lueur blanchâtre, d'éclat 5 au plus, faisant légèrement saillie à l'Ouest. L'axe à environ 0,5 de e à h Sagittarii.

22 février, 5^h15^m matin. — L'horizon Est est clair. Vénus n'est pas levée. Rien qui indique la présence de la Lumière Zodiacale.

24 février, 4^h50^m matin. — Pas de traces de la Lumière Zodiacale.

28 février, 5^h0^m matin. — Beau ciel; pas de traces de la Lumière Zodiacale.

— — 8^h0^m soir. — Lumière confuse, visible à l'Ouest, malgré le clair de lune.

2 mars, $8^h 15^m$ soir. — Lumière Zodiacale bien visible, mais pas excessivement brillante [1] : éclat estimé, 4 au plus. Étroite, pointue. L'axe passe à 0,5 de o à η Piscium; à 0,3 de μ Ceti à α Arietis; à peine 1° Sud de δ Arietis.

3 mars, $7^h 40^m$ soir. — Lumière Zodiacale belle; sa teinte rougeâtre à la base. Étroite, lenticulaire. Éclat estimé 3,5. L'axe passe à 0,5 de o à η Piscium; à 0,45 de ξ_1 Ceti à 4 Arietis; à 0,3 de μ Ceti à α Arietis; à environ $1\frac{1}{2}$° au Sud de δ Arietis.

4 mars, $7^h 30^m$ soir. — Malgré quelques nuages qui en couvrent une partie à la base, on voit bien la Lumière Zodiacale. L'axe paraît à 0,5 de o à η Piscium; à 0,4 de ξ_1 Ceti à γ Arietis; à 0,35 de ξ_2 Ceti à α Arietis; 1° ou pas beaucoup plus au Sud de δ Arietis.

5 mars, $8^h 30^m$ soir. — Des cumulostratus ont occupé l'horison Ouest toute la soirée. Ils sont bas maintenant, et laissent à découvert une partie de la Lumière Zodiacale, qui près de ces nuages n'a guère que l'éclat 5. L'axe paraît passer à 0,4 de μ Ceti à α Arietis; et à 0,2 de δ Arietis à f Tauri.

6 mars, $7^h 40^m$ soir. — Lumière Zodiacale vive (éclat 4); large à la base, mais se rétrécissant bientôt et terminée en lance comme ci-contre. L'axe passe à 0,5 de o à η Piscium; à 0,4 de μ Ceti à α Arietis; sur π Arietis; à 0,15 de δ Arietis à f Tauri.

7 mars, $7^h 30^m$ soir. — Lumière Zodiacale comparativement faible (éclat 5). Elle s'est visiblement portée au Sud. Étroite à la base, et pointue au sommet. Le ciel est bien clair et il n'y a pas de nuages. Le vent souffle fort du Nord. L'axe passe à 0,4 de o à μ Piscium, à 0,3 de μ Ceti à α Arietis; à 0,3 de δ Arietis à f Tauri.

9 mars, $7^h 50^m$ soir. — Nuages vers l'horizon Ouest. On voit cependant la Lumière Zodiacale entre ces bandes de cumulostratus. Éclat 4,5. Passe sur π Arietis; et à 0,2 de δ Arietis à f Tauri.

10 mars, $8^h 20^m$ soir. — Quelques nuages à l'Ouest; la Lumière

[1] Bien entendu, « excessivement » est employé ici par comparaison.

Zodiacale paraît faible (éclat 5). Passe à 0,35 de A Tauri à λ Tauri.

11 mars, 5^h10^m matin. — Horizon Est clair; pas de Lune ni Vénus; pas de traces de la Lumière Zodiacale.

— — 7^h40^m soir. — Quelques nuages sont restés tard à l'Ouest. On voit maintenant la Lumière Zodiacale, mais faible (éclat 5), bien que les petites étoiles de cette région soient très-visibles. L'axe passe à 0,3 de μ Ceti à α Arietis; et à 0,3 de A Tauri à λ Tauri.

12 mars, 4^h0^m matin. — Pas de traces de la Lumière Zodiacale. Horizon clair à l'Est.

— — 5^h5^m matin. — Ciel pur; pas de Lune ni Vénus; pas de traces de la Lumière Zodiacale.

— — 8^h30^m soir. — Lumière Zodiacale faible (éclat 5); s'est portée un peu Nord. L'axe passe à 0,2 au plus de δ Arietis à f Tauri.

13 Mars, 4^h30^m matin. — Pas de traces de la Lumière Zodiacale.

— — 7^h30^m soir. — Lumière Zodiacale assez belle; éclat 4,5. L'axe passe à 0,3 de η à o Piscium; à 0,6 de α Arietis à μ Ceti; à 0,25 de ζ Arietis à f Tauri.

14 mars, 4^h30^m matin. — Ciel serein; ni Lune ni Vénus; pas de traces de la Lumière Zodiacale.

17 mars, 5^h5^m matin. — Pas de traces de la Lumière Zodiacale.

18 mars, 5^h0^m matin. — Pas de traces de la Lumière Zodiacale.

— — 8^h0^m soir. — La Lune efface entièrement la Lumière Zodiacale.

22 mars, 4^h0^m matin. — Horizon Est bien clair; ni Lune ni Vénus. Pas de traces de la Lumière Zodiacale.

24 mars, 5^h0^m matin. — Horizon Est serein; ni Lune ni Vénus; pas de traces de la Lumière Zodiacale.

29 mars, 8^h15^m soir. — Lumière Zodiacale bien pâle; la Lune n'est pas encore levée. Le ciel à l'Ouest était couvert de cirrhostratus après le coucher du Soleil. Les traces qu'on en voit passent sur A Tauri.

1 avril, 8^h15^m soir. — Lumière Zodiacale très-faible (éclat 6), bien qu'il n'y ait pas de Lune. Elle est aussi beaucoup plus

courte; à peine passe-t-elle les Pléiades. On soupçonne la pointe sur A Tauri et υ Tauri. Il est remarquable combien cette Lumière a pâli depuis janvier et février.

2 avril, 8^h0^m soir. — Lumière Zodiacale éclat 6. Passe plutôt au Nord qu'au Sud de A Tauri.

4 avril, 8^h10^m soir. — Lumière Zodiacale bien faible (éclat 6 à peine); difficile à voir. Semble se diriger sur A et υ Tauri.

5 avril, 7^h50^m soir. — Lumière Zodiacale éclat 6. A 0,5 entre A et η Tauri. Partie supérieure très-incertaine.

6 avril, 7^h35^m soir. — Lumière Zodiacale éclat 5. Base assez belle et rougeâtre. Il est vrai que l'horizon Ouest est tout à fait sans nuages ce soir. Pointe peu nette; semble passer exactement sur A Tauri, et ne va guère au delà de υ Tauri. Donc cette Lumière est beaucoup plus courte qu'elle n'a été en janvier et février.

— — 8^h0^m soir. — On ne voit plus la base, qui est couchée. La pointe est peu distincte; on donnerait seulement l'éclat 6 à ce qui se voit à cette heure.

9 avril, 7^h30^m soir. — Lumière Zodiacale éclat 5,5. Axe sur A Tauri; se prolonge peu au delà.

10 avril, 4^h25^m matin. — Ni Lune, ni Vénus, ni Jupiter. Horizon net et clair. Pas la moindre trace de la Lumière Zodiacale.

— — 8^h10^m soir. — Lumière Zodiacale peu brillante; éclat 5,0 ou 5,5. Passe sur υ Tauri, et n'est guère visible au delà.

11 avril, 3^h55^m matin. — Ni Lune ni planète. Pas de traces de la Lumière Zodiacale.

— — 4^h50^m matin. — Ni Lune ni planète. Pas de traces de la Lumière Zodiacale.

— — 8^h0^m soir. — Lumière Zodiacale éclat faible, à peine 6; beaucoup moins visible que la Voie Lactée. Ne s'élève guère au delà des Pléiades, en sorte qu'elle est non-seulement plus faible, mais beaucoup plus courte qu'en janvier. Sa pointe, peu distincte, paraît au Nord de A Tauri. La Lune nouvelle est couchée.

12 avril, 4^h30^m matin. — Horizon Est bien clair. Une faible lueur blanchâtre, à peine distincte, vers θ Aquarii. Ni Lune ni planète.

12 avril, 7^h45^m soir. — Lumière Zodiacale éclat 5,5. Pas de Lune. Passe sur υ Tauri, et monte jusque vers τ Tauri.

13 avril, 7^h40^m soir. — Lumière Zodiacale éclat 5 environ; la partie supérieure assez visible, malgré le voisinage de nuages qui couvrent la base. Axe à $\frac{1}{2}°$ environ au Nord de υ Tauri. Monte à τ Tauri et au delà. La Lune nouvelle est couchée.

14 avril, 4^h20^m matin. — Horizon Est serein. Pas de planète. Pas de traces de la Lumière Zodiacale.

— — 7^h30^m soir. — Une Lune de trois jours efface la Lumière Zodiacale, qui supportait plus autrefois. Les étoiles de 5e grandeur sont visibles à quelques degrés de la Lune.

15 avril, 4^h20^m matin. — Horizon Est bien clair; ni Lune ni planète. Pas la moindre trace de la Lumière Zodiacale.

20 avril, 4^h30^m matin. — Premiers symptômes de l'aube. Horizon Est clair. Pas de traces de la Lumière Zodiacale.

22 avril, 4^h0^m matin. — Horizon serein; pas de Lune ni planètes; pas de traces de la Lumière Zodiacale.

23 avril, 4^h20^m matin. — Horizon Est serein. Pas de traces de la Lumière Zodiacale.

28 avril, 7^h45^m soir. — Avant le lever de la Lune; Lumière Zodiacale éclat 5 environ. Terne, montrant peu de rougeur. Mal définie. Axe à $\frac{1}{3}$ de ξ à β Tauri.

29 avril, 7^h50^m soir. — Pas de Lune. Lumière Zodiacale éclat 4,5 et peut-être davantage [1]. A repris quelque rougeur. Est bien visible malgré des cumulostratus qui la coupent en deux places. Passe à environ $\frac{1}{3}$ de ξ à β Tauri.

30 avril, 7^h25^m soir. — Pas de Lune. La Lumière Zodiacale paraît avec les étoiles de 4e grandeur de la même région du ciel. Donc éclat 4. Passe à 0,45 de ξ à β Tauri.

1 mai, 7^h30^m soir. — Lumière Zodiacale éclat 4 au plus. Passe à $\frac{1}{2}$ de ξ à β Tauri; et sur 139 Tauri. Pointe mal définie.

3 mai, 7^h50^m soir. — Lumière Zodiacale éclat 5 à peine. Passe à $\frac{1}{2}$ de ξ à β Tauri. Pointe au delà incertaine.

4 mai, 7^h35^m soir. — Lumière Zodiacale éclat 5 au plus. Passe à $\frac{1}{3}$ de β à ξ Tauri. La pointe n'est qu'une masse informe.

[1] C'est-à-dire plus brillante peut-être.

6 mai, 7^h30^m soir. — Lumière Zodiacale éclat 5,5; informe, peu distincte. Axe (?) passe à 0,3 de β à ξ Tauri.

13 mai, 4^h15^m matin. — Pas de traces de la Lumière Zodiacale. La Lune est nouvelle; elle n'est donc pas présente le matin.

15 mai, 4^h0^m matin. — Pas de traces de la Lumière Zodiacale. Ni Lune ni planètes.

17 mai 4^h0^m matin. — Ciel parfaitement pur, Voie Lactée superbe; pas de Lune. Lumière confuse, nullement pointue vers δ Piscium. Cette Lumière, très-faible, se confond bientôt avec l'aube. Je ne la regarde pas comme la Lumière Zodiacale, mais comme les premières traces de l'aube elle-même.

27 mai, 8^h10^m soir. — Lumière Zodiacale éclat 4,5 ou même 4,0. La Lune n'est pas encore levée. Blanchâtre, avec fort peu de rouge; assez mal définie. L'axe passe à $\frac{1}{4}$ de $\varkappa$ à β Geminorum, et à $\frac{1}{2}$ de δ à γ Cancri. En somme elle est plus belle que je ne l'ai vue depuis quelque temps.

28 mai, 8^h15^m soir. — Lumière Zodiacale éclat 6; fort faible; il est vrai que le ciel n'est pas absolument pur. Passe sur $\varkappa$ Geminorum. Il fait des éclairs, et par ces éclairs la Lumière Zodiacale semble se détacher mieux du fond du ciel.

30 mai, 8^h20^m soir. — Quelques nuages à l'horizon Ouest. Lumière Zodiacale très-peu visible; éclat 6 à peine. Vers $\varkappa$ Geminorum.

2 juin, 8^h20^m soir. — Lumière Zodiacale éclat 5. L'axe passe à environ $1\frac{1}{2}°$ Nord de δ Cancri. Nuages bas à l'horizon Ouest. Éclairs lointains dans cette direction. Ces éclairs ne font pas apparaître la Lumière Zodiacale [1].

4 juin, 8^h25^m soir. — Quelques nuages à l'horizon Ouest. L'éclat de la Lumière Zodiacale est 5,5 à peine. L'axe passe sur δ Cancri.

[1] Cette dernière remarque est une allusion à l'observation du 28 mai, dans laquelle on avait cru que la Lumière Zodiacale se détachait mieux du fond du ciel pendant les éclairs. Cet effet n'est pas confirmé par l'observation du 2 juin.

§ 2. — LE FUSEAU DU MATIN EST PLUS FAIBLE QUE CELUI DU SOIR.

Un premier fait paraît ressortir immédiatement des observations qui précèdent, c'est que le fuseau du matin a moins d'éclat que celui du soir. Lorsqu'on en assigne la position, avant l'aube du jour, c'est presque toujours avec peu d'assurance, et en mentionnant des difficultés dont il est rarement question le soir. Mais ce qui est décisif c'est le nombre considérable des matinées durant lesquelles il est absolument impossible de distinguer la lueur. Sur cinquante-quatre matinées d'observation, il y en a trente-cinq qui donnent un résultat nettement négatif, sans compter sept autres durant lesquelles l'insuccès pourrait être attribué au clair de Lune; tandis qu'après le coucher du Soleil, sur cinquante-six soirées propres à l'observation, il n'y en a pas une seule dans laquelle la Lumière Zodiacale soit absente.

Il ne faut pas croire d'ailleurs qu'on puisse attribuer cette différence à l'état de l'atmosphère. Le ciel était généralement aussi clair le matin que le soir. On voyait les petites étoiles jusqu'au même ordre de grandeur. Le journal mentionne expressément cette transparence. Ainsi c'est le cas en particulier le 8, le 21 et le 23 janvier. A la première de ces dates, la transparence était en quelque sorte à son maximum; le 21 janvier la pureté du ciel ne laissait rien à désirer; et le 23 du même mois cette pureté est indiquée comme parfaite. Pourtant ce dernier jour, pendant un intervalle d'une heure vingt-cinq minutes, on ne voit pas de traces de la Lumière Zodiacale, ni avant ni après le lever de Vénus.

Les observations des 11 et 12 février offrent un autre exemple très-digne d'attention. Le 11 février au matin, par un ciel constellé où ne brillent ni la Lune ni Vénus, on ne voit pas de « traces appréciables de la Lumière Zodiacale, » si ce n'est « une vague blancheur » au sud de l'écliptique, sur l'existence même de laquelle il reste des doutes. Le lendemain matin, 12 du mois, l'horizon est noté comme « clair; » Vénus n'est pas encore levée, et il n'y a pas de traces de la Lumière Zodiacale, pas même la blancheur douteuse du jour précédent. Mais entre ces deux observations négatives, dans le milieu de cet intervalle de vingt-quatre heures, se place l'observation du 11 février au soir, où la Lumière Zodiacale se voit aisément, malgré des nuages près de l'horizon, qui couvrent sa base.

Un autre fait vient à l'appui des mêmes conclusions : c'est que le matin on ne peut définir qu'avec peine la figure de la Lumière Zodiacale, tandis que le soir le fuseau se dessine presque toujours assez nettement. Le soir on en distingue la pointe, finissant dans le ciel comme un large fer de lance, plus ou moins émoussé. Tandis que le matin les observations ne parlent pas de la forme allongée, pointue, de la partie extrême. Il n'y a guère alors qu'une tache vague, plus ou moins étendue en longueur, mais dont on ne distingue pas nettement la figure.

Enfin ces considérations sont encore appuyées par les estimations de l'éclat (comparé à celui des étoiles). Le soir cette estimation était relativement facile, et donne souvent 4,0 ou 4,5, avec une moyenne générale peu différente de 5, comme on va le voir tout à l'heure. Le matin c'est à peine si l'on a les éléments de comparaisons semblables. Deux fois seulement, les 19 et 20 février, on a hasardé un chiffre; le 20 l'éclat paraissait au plus 5,0, et le 19... 5,5 ou même plus faible encore. Pourtant ces deux matinées étaient des plus favorables, puisqu'elles figurent parmi celles dans lesquelles on a pu déterminer la situation du fuseau.

Il nous semble indubitable, en présence de ces rapprochements, que la Lumière du matin est éminemment plus faible que celle du soir. Cette infériorité est réelle, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas d'une différence dans la transparence de l'air.

§ 5. — ÉCLAT ABSOLU DE LA LUMIÈRE ZODIACALE.

C'est seulement le 10 février que j'ai commencé à noter l'éclat de la Lumière Zodiacale, par comparaison avec les étoiles de la même région du ciel. Il s'agissait de comparer cette lueur aux étoiles qui paraissent en même temps qu'elle à mesure que l'obscurité de la nuit se prononce davantage, ou bien à celles qui disparaissent en même temps que cette Lumière, par l'effet soit des brumes, soit du clair de Lune. Nous n'entendons pas dire par là que la Lumière Zodiacale soit égale, photométriquement, à une plaque qui aurait partout l'éclat spécifique des étoiles de tel ou tel ordre. Il s'agit seulement d'établir avec quelle grandeur d'étoiles la lueur paraît et disparaît, par suite de l'impression générale qu'elle fait sur nos yeux.

J'ai réuni des évaluations de ce genre dans trente-six soirées différentes. C'est seulement après avoir commencé ces annotations que j'ai cherché à établir, par mes souvenirs, quel avait été l'éclat général en janvier [1]. Le chiffre relatif à ce mois est donné seulement par comparaison avec les chiffres du mois suivant, après que la Lumière Zodiacale avait, à mon jugement, sensiblement faibli. Voici du reste les moyennes par mois des évaluations rapportées dans le journal des observations :

Lumière Zodiacale du soir.

	Mois.	Éclat moyen.	Remarques.
1869.	Janvier. . .	4,0	Sous les réserves présentées plus haut.
	Février. . .	4,5	
	Mars . . .	4,6	
	Avril . . .	5,0	
	Mai	5,1	
	Juin. . . .	5,2	

L'éclat paraissait donc faiblir d'une manière continue. Avec le chiffre 5,2, les déterminations de la situation du fuseau, par rapport aux étoiles voisines, étaient pourtant encore très-praticables, et passablement sûres.

On trouve seulement deux mesures d'éclat le matin; non que j'aie négligé ce genre de recherches, mais à cause de la faiblesse ou de l'absence totale de la lueur. On a cité ces deux mesures

[1] Voir plus haut, § 1er, au 11 février 1869.

plus haut [1], en faisant remarquer que, dans ces deux cas, malgré son peu d'intensité, la Lumière se voyait assez pour assigner sa situation sur la sphère céleste. On peut en inférer que quand cette observation devient impossible, la Lumière Zodiacale doit être plus faible que 5,5, ce qui confirme la conclusion tirée des observations du soir.

Que la Lumière Zodiacale est sujette à des changements réels d'intensité, c'est ce que les observateurs qui nous ont précédé ont presque tous affirmé. Les différences entre les notations 4 et 6, qui forment les chiffres extrêmes dans nos estimations, sont trop considérables pour être entièrement erronées. Elles représentent le passage d'une étoile de la 4e grandeur à la 6e. Mais les remarques inscrites dans mon journal, au temps même des observations, confirment l'existence de ces changements. J'avais plus de peine à assigner la situation du fuseau en avril et mai qu'en décembre et janvier. Je citerai notamment les remarques présentées sous la date du 1 avril, quand la Lumière était non-seulement plus faible, mais plus courte; et celles du 27 mai, moment où la lueur reprend subitement de l'intensité. Ces changements sont trop considérables, trop bien accusés, trop limités à la Lumière Zodiacale, pour être l'effet des brumes et des nuages, dont on verra tout à l'heure le caractère et l'importance. Ce sont à nos yeux, comme à ceux des autres observateurs, des fluctuations réelles de l'éclat.

La teinte rougeâtre paraît d'autant mieux appréciable que cet éclat est plus vif. Ce serait donc une teinte propre et permanente.

§ 4. — EFFET DES NUAGES.

L'influence des brumes, et en général de tous les défauts de transparence de l'air, est sans doute considérable, lorsqu'il s'agit d'une lumière si faible, qui approche souvent de la limite de visibilité. Cependant nos observations contiennent d'assez nombreux

[1] Au § 2.

exemples dans lesquels on voyait la Lumière Zodiacale à côté des nuages, ou même la pointe libre lorsque la base était couverte par eux. Mais ces nuages ont souvent de l'influence, même à distance, et paraissent alors rejeter la Lumière du côté qui leur est opposé. De là peut-être la plus grande irrégularité des situations apparentes, et la plus grande importance des erreurs accidentelles dans les latitudes assignées à la pointe, que présentent les observations faites dans nos climats boréaux.

L'influence des nuages à distance m'a laissé une impression plus profonde et plus nette que celle qui résulterait des notes de mon journal. Cependant ces observations sont suffisantes pour l'établir. Ainsi le fait est très-clairement indiqué le 13 janvier. Le 5 mars des cumulostratus très-bas couvrent la partie inférieure de la Lumière Zodiacale, et la pointe, bien que dans un ciel en apparence serein, est plus faible qu'à l'ordinaire. Le 10 mars il y a des nuages à l'Ouest, et la Lumière Zodiacale est affaiblie, l'éclat qui lui est attribué se trouvant au-dessous de la moyenne de ce mois. Le 11 mars des nuages qui occupaient l'horizon Ouest viennent seulement de disparaître; on voit bien les petites étoiles dans cette région du ciel, et pourtant la Lumière Zodiacale est notée « faible. » Enfin le 4 juin il y a des nuages à l'horizon du Couchant, et la Lumière Zodiacale, dans sa partie beaucoup plus élevée, ne se voit qu'avec une certaine difficulté.

Les effets de l'inégale pellucidité de l'air peuvent aussi être mis en évidence d'une autre manière. La lueur s'étend parfois, en apparence du moins, plus loin au Nord de l'axe que du côté du Sud. Ce défaut de symétrie n'est probablement qu'un effet optique : on voit plus distinctement et plus complétement la partie supérieure du fuseau, tandis qu'il est plus difficile de distinguer la partie inférieure, qui se trouve plus rapprochée de l'horizon. Le bord de celle-ci s'arrête et s'efface plus vite. Nous renvoyons, particulièrement, à cet égard, aux observations du 12 et du 13 janvier.

Mais quelle que soit l'influence des brumes, et celle que les nuages exercent parfois jusqu'à une certaine distance de leur corps apparent, la Lumière Zodiacale a pu cependant être observée, bien des fois, non loin de ces nuages mêmes. Il n'y a donc là qu'un effet secondaire, entraînant au plus l'application d'une certaine correction [1].

§ 5. — ÉTOILES DE COMPARAISON.

Pour réduire les observations rapportées au § 1er, il faut d'abord former un tableau des longitudes et des latitudes des étoiles qui ont servi de termes de comparaison. Nous avons employé à cet effet les données du dernier catalogue de la Société Astronomique de Londres. Les calculs ont été effectués en tenant compte des dixièmes de minute (d'arc); mais on se contente ci-dessous de présenter les résultats à la minute entière. Ce degré de précision est plus que suffisant dans des observations de ce genre.

La précession est calculée pour l'époque moyenne où chaque étoile a été observée. Quelques-unes de ces étoiles forment des groupes binaires à grand espacement. Pour α Librae on a employé la position de α_2, qui doit faire la principale impression sur l'œil nu. Pour A et υ Tauri, ι Librae, *h* et *e* Sagittarii, α et β Capricorni, on a pris la moyenne entre les deux composantes.

ÉTOILES.	ÉPOQUE.	LONGITUDE.	LATITUDE.
m Ceti.	1869, 12	9°59′	- 6°19′
δ Piscium	25	12.14	+ 2.13
η Piscium	18	24.59	+ 5.22
π Piscium	1861, 11	24.59	+ 1.53
o Piscium	10	25.48	- 1.38
	1869, 18	25.55	
4 Arietis	17	29.20	+ 5.25

[1] Nous revenons sur ce sujet au § 9.

ÉTOILES.	ÉPOQUE.	LONGITUDE.	LATITUDE.
γ Arietis	1869, 17	31°21′	+ 7° 9′
ξ_1 Ceti	17	32.13	− 4.17
ξ_2 Ceti	17	33.38	− 5.32
α Arietis	18	35.50	+ 9.58
μ Ceti	18	40. 6	− 5.35
π Arietis	18	43.18	+ 1. 7
δ Arietis	18	49. 1	+ 1.49
ζ Arietis	20	50. 7	+ 2.53
f Tauri	19	51.46	− 3.56
♉ Tauri	26	58.10	+ 4. 2
λ Tauri	19	58.48	− 7.59
A Tauri	23	61.40	+ 1.13
υ Tauri	26	66.48	+ 1.10
τ Tauri	28	70.20	+ 0.42
β Tauri	1861, 28 1869, 33	80.38 80.45	+ 5.22
ζ Tauri	1861, 28 1869, 33	82.51 82.57	− 2.13
139 Tauri	33	87.43	+ 5.13
β Geminorum	40	111.25	+ 6.40
$\varkappa$ Geminorum	40	111.50	+ 3. 4
γ Cancri.	40	125.43	+ 3.11
δ Cancri	41	126.54	+ 0. 4
α Librae	1868, 96	223.16	+ 0.21
β Librae	96	227.33	+ 8.31
ι Librae	97	229.17	− 1.43
γ Librae	97	233.18	+ 4.24
δ Scorpii	97	240.44	− 1.58
β Scorpii	98	241.22	+ 1. 2
g Ophiuchi	98	246.36	− 1.44
α Scorpii	1869, 00	247.56	− 4.33
ε Scorpii	02	253.32	−11.42
θ Ophiuchi	04	259.34	− 1.49

ÉTOILES.	ÉPOQUE.	LONGITUDE.	LATITUDE.
ξ Serpentis	1869, 05	262°43′	+ 7°38′
p Sagittarii	12	286.51	− 5.46
O Sagittarii	12	287. 6	− 7.42
h Sagittarii	14	289.33	− 3. 5
e Sagittarii	14	292.35	+ 5. 8
α Capricorni	04	301.59	+ 6.59
β Capricorni	05	302.11	+ 4.37
ε Aquarii	1868, 97	309.54	+ 8. 6
θ Capricorni	99	312. 1	− 0.34
A Aquarii	95	317.31	+ 2.16
β Aquarii	1869, 00	321.34	+ 8.38
δ Capricorni	01	321.42	− 2.34
λ Capricorni	1868, 95	323.11	+ 1.57
μ Capricorni	95	323.59	− 0.40
ι Aquarii	1869, 04	326.53	− 2. 4
919 *Mayer*.	1868, 95	331. 0	+ 1.32
θ Aquarii	1869, 14	331.26	+ 2.43
α Aquarii	00	331.32	+10.40
σ Aquarii	02	333.34	− 1.13
κ Aquarii	02	337.36	+ 4. 7
η Aquarii	03	338.34	+ 8.10
λ Aquarii	02	339.45	− 0.23
φ Aquarii	06	345.19	− 1. 2
β Piscium	04	346.46	+ 9. 4
γ Piscium	07	349.36	+ 7.16
λ Piscium	08	355.10	+ 4.20
r Piscium	09	356.13	− 5.42
p Piscium	10	356.27	− 3. 7

§ 6. — RÉDUCTION DES OBSERVATIONS.

Il est facile maintenant, d'après les indications du § 1er, de déterminer la longitude et la latitude des points observés, situés dans la ligne de plus grand éclat de la Lumière Zodiacale. Nous rangeons en deux séries distinctes les observations du soir et celles du matin. Parmi ces dernières, le signe : : marque celles qui sont présentées comme douteuses.

On a joint immédiatement, à côté de chaque observation, la distance du point déterminé au Soleil, telle qu'elle résulte de la simple différence des longitudes.

[A]. *Observations du soir.*

NUMÉRO.	DATE.	POSITION DES POINTS OBSERVÉS DANS LA LIGNE DE PLUS GRAND ÉCLAT.	LONGITUDE.	LATITUDE.	DISTANCE au Soleil.
		1861.			
1	1 févr., $7^h 0^m$ s.	o Piscium	25°48′	− 1°38′	72°33′
2	4 — 7.0	$\frac{1}{3}$ π à o Piscium.	25.15	+ 0.45	68.58
3	10 — 7.15	$\frac{1}{3}$ o à π Piscium.	25.32	− 0.28	63. 9
4	10 avril, 7.35	0,4 ξ à β Tauri	81.58	+ 0.49	60.47
		1868.			
5	12 déc., 7.15	Sud de β Capric., à 1,5 de α à β Capr.	302.11	+ 1. 5	40.46
6	»	$\frac{1}{4}$ λ à μ Capricorni.	323.25	+ 1.35	61.58
7	13 — 7.30	Sud de β Capric., à 1,0 de α à β Capr.	302.11	+ 2.14	39.45
8	»	A Aquarii	317.31	+ 2.16	55. 5
9	»	θ Aquarii	331.26	+ 2.45	69. 0
10	17 — 7.15	Un peu Nord θ Aquarii.	331.26	+ 2.50‡	64.56

NUMÉRO.	DATE.	POSITION DES POINTS OBSERVÉS DANS LA LIGNE DE PLUS GRAND ÉCLAT.	LONGITUDE.	LATITUDE.	DISTANCE au Soleil.
11	25 déc., $6^h 55^m$s.	$\frac{1}{4}$ θ Capricorni à ε Aquarii.	311°29′	+ 1°36′	36°52′
12	»	$\frac{1}{5}$ δ Capricorni à β Aquarii	321.39	+ 1.10	47. 2
13	30 — 7.10	$\frac{1}{3}$ β Aquarii à δ Capricorni	321.37	+ 4.54	41.53
14	»	$\frac{1}{2}$ α à θ Aquarii	331.29	+ 6.41	51.45
15	31 — 6.45	12′ Nord θ Capricorni	312. 1	− 0.22	31.18
16	»	$\frac{1}{4}$ σ à θ Aquarii	333. 2	− 0.14	52 19
17	»	5′ (?) Nord λ Aquarii	339.45	− 0.18	59. 2
		1869.			
18	1 janv., 7.25	$\frac{1}{4}$ δ Capricorni à β Aquarii	321.40	+ 0.14	39.56
19	»	$\frac{1}{5}$ σ à θ Aquarii	333. 8	− 0.26	51.24
20	»	5′ (?) Nord λ Aquarii	339.45	− 0.18	58. 1
21	2 — 7.20	2′ (?) Nord λ Aquarii	339.45	− 0.21	57. 0
22	3 — 7.10	$\frac{1}{5}$ δ Capricorni à β Aquarii	321.39	+ 1.10	37.53
23	»	$\frac{1}{2}$ σ à θ Aquarii	332.30	+ 0.45	48.44
24	»	5′ (?) Nord λ Aquarii	339.45	− 0.18	55.59
25	4 — 7.10	$\frac{1}{4}$ σ à θ Aquarii	333. 2	− 0.14	48.15
26	5 — 7. 0	$\frac{1}{8}$ θ à σ Aquarii	331.42	+ 2.13	45.54
27	»	$\frac{1}{3}$ λ à η Aquarii	339.21	+ 2.28	53.33
28	6 — 7. 0	$\frac{1}{4}$ θ à σ Aquarii	331.58	+ 1.44	45. 9
29	»	$\frac{1}{3}$ $\varkappa$ à λ Aquarii	338.19	+ 2.37	51.30
30	8. 0	$\frac{1}{2}$ λ à $\varkappa$ Aquarii	338.40	+ 1.52	51.49
31	7 — 7. 0	0,6 β Aquarii à δ Capricorni . . .	321.39	+ 1.55	33.49
32	»	$\frac{1}{8}$ θ à σ Aquarii	331.42	+ 2.13	43.52
33	»	$\frac{1}{3}$ $\varkappa$ à λ Aquarii	338. 2	+ 3.13	50.12
34	10 — 7.50	0,3 $\varkappa$ à λ Aquarii	338.15	+ 2.46	47.19
35	12 — 7.25	0,4 δ Capricorni à β Aquarii. . . .	321.39	+ 1.55	28.42

NUMÉRO.	DATE.	POSITION DES POINTS OBSERVÉS DANS LA LIGNE DE PLUS GRAND ÉCLAT.	LONGITUDE.	LATITUDE.	DISTANCE au Soleil.
36	12 janv., 7h25m s.	$\frac{1}{3}$ θ à ι Aquarii	329°55′	+ 1° 7′	36°58′
37	»	$\frac{1}{8}$ θ à σ Aquarii	332. 9	+ 1.25	39.12
38	»	45′ Nord λ Aquarii	339.45	+ 0.22	46.48
39	»	20′ Nord φ Aquarii	345.19	− 0.42	52.22
40	13 — 7.13	0,3 δ Capricorni à β Aquarii. . . .	321.40	+ 0.48	27.43
41	»	$\frac{1}{2}$ ι à θ Aquarii	329.10	+ 0.20	35.13
42	»	$\frac{1}{2}$ σ à θ Aquarii	332.30	+ 0.45	38.33
43	»	15′ Nord λ Aquarii.	339.45	− 0. 8	45.48
44	»	$\frac{1}{6}$ φ Aquarii à β Piscium	345.33	− 0.39	51.36
45	15 — 7.10	$\frac{1}{2}$ λ à η Aquarii	339.10	+ 3.54	43.10
46	»	0,4 φ Aquarii à γ Piscium.	347. 2	+ 1. 2	51. 2
47	31 — 7.40	0,4 λ à r Piscium	353.35	+ 0.19	43.19
48	»	0,6 λ à p Piscium	355.56	− 0. 8	43.40
49	1 févr., 7.25	0,2 φ Aquarii à γ Piscium.	346.10	+ 0.38	32.53
50	»	0,5 p à λ Piscium	355.48	+ 0.36	42.31
51	2 — 7. 0	0,3 φ Aquarii à γ Piscium	346.36	+ 1.27	32.19
52	»	0,45 p à λ Piscium	355.52	+ 0.14	41.35
53	10 — 7.20	0,6 λ à p Piscium.	355.56	− 0. 8	33.32
54	11 — 7.30	0,4 δ Piscium à m Ceti.	11.20	− 1.12	47.56
55	13 — 8.15	0,4 δ Piscium à m Ceti.	11.20	− 1.12	45.52
56	2 mars, 8.15	0,5 o à η Piscium	25.27	+ 1.52	42.53
57	»	0,3 μ Ceti à α Arietis	38.49	− 0.55	56.15
58	»	1° Sud δ Arietis.	49. 1	+ 0.49	66.27
59	3 — 7.40	0,5 o à η Piscium	25.27	+ 1.52	41.55
60	»	0,45 ξ_1 Ceti à 4 Arietis.	30.55	+ 0.15	47.25
61	»	0,3 μ Ceti à α Arietis	38.49	− 0.55	55 17
62	»	1°30′ Sud δ Arietis	49. 1	+ 0.19	65 29

NUMÉRO.	DATE.	POSITION DES POINTS OBSERVÉS DANS LA LIGNE DE PLUS GRAND ÉCLAT.	LONGITUDE.	LATITUDE.	DISTANCE au Soleil.
63	4 mars, 7^h30^ms.	0,5 o à η Piscium	25°27′	+ 1°52′	40°55′
64	»	0,4 ξ_1 Ceti à γ Arietis	31.52	+ 0.17	47.20
65	»	0,35 ξ_2 Ceti à α Arietis.	35.42	- 0.20	51.10
66	5 — 8.30	0,4 μ Ceti à α Arietis.	38.24	+ 0.38	52.50
67	»	0,2 δ Arietis à f Tauri	49.34	+ 0.16	64. 0
68	6 — 7.40	0,5 o à η Piscium	25.27	+ 1.52	38.55
69	»	0,4 μ Ceti à α Arietis.	38.24	+ 0.38	51.52
70	»	π Arietis.	43.18	+ 1. 7	56.46
71	»	0,15 δ Arietis à f Tauri.	49.26	+ 0.39	62.54
72	7 — 7.30	0,4 o à η Piscium	25.33	+ 1.10	38. 1
73	»	0,3 μ Ceti à α Arietis	38.49	- 0.55	51.17
74	»	0,3 δ Arietis à f Tauri	49.50	- 0.30	62.18
75	9 — 7.50	π Arietis.	43.18	+ 1. 7	53.46
76	»	0,2 δ Arietis à f Tauri	49.34	+ 0.16	60. 2
77	10 — 8.20	0,35 A à λ Tauri	60.40	- 2. 0	70. 7
78	11 — 7.40	0,3 μ Ceti à α Arietis	38.49	- 0.55	47.18
79	»	0,3 A à λ Tauri.	60.48	- 1.35	69.17
80	12 — 8.30	0,2 δ Arietis à f Tauri	49.34	+ 0.16	57. 0
81	13 — 7.30	0,3 η à o Piscium	25.16	+ 3.16	31.45
82	»	0,6 α Arietis à μ Ceti	38.24	+ 0.38	44.55
83	»	0,25 ξ Arietis à f Tauri	50.32	+ 0.41	57. 1
84	29 — 8.15	A Tauri	61.40	+ 1.13	52 15
85	1 avril, 8.15	A Tauri	61.40	+ 1.13	49.18
86	»	υ Tauri	66.48	+ 1.10	54.26
87	2 — 8. 0	5′ (?) Nord A Tauri	61.40	+ 1.18	48.20
88	4 — 8.10	A Tauri	61.40	+ 1.13	46 22
89	»	υ Tauri	66.48	+ 1.10	51.30

NUMÉRO.	DATES.	POSITION DES POINTS OBSERVÉS DANS LA LIGNE DE PLUS GRAND ÉCLAT.	LONGITUDE.	LATITUDE.	DISTANCE au Soleil.
90	5 avril, 7h50m s.	$\frac{1}{2}$ A à ν Tauri.	59°55′	+ 2° 37′	43°38′
91	6 — 7.35	A Tauri	61.40	+ 1.13	44.25
92	»	υ Tauri [voir § 1 à cette date]. . .	66.48	?	49.33
93	9 — 7.30	A Tauri	61.40	+ 1.13	41 28
94	10 — 8.10	υ Tauri	66.48	+ 1.10	45.36
95	11 — 8. 0	10′ (?) Nord A Tauri.	61.40	+ 1.23	39.29
96	12 — 7.45	υ Tauri	66.48	+ 1.10	43.59
97	»	τ Tauri	70.20	+ 0.42	47.11
98	13 — 7.40	30′ N υ Tauri.	66.48	+ 1.40	42.40
99	»	τ Tauri	70.20	+ 0.42	46.12
100	28 — 7.45	$\frac{1}{3}$ ζ à β Tauri.	82.13	+ 0.19	43.27
101	29 — 7.30	$\frac{1}{3}$ ζ à β Tauri.	82.13	+ 0.19	42.29
102	30 — 7.25	0,45 ζ à β Tauri	82. 1	+ 1.11	42.20
103	1 mai, 7.30	$\frac{1}{2}$ ζ à β Tauri.	81.51	+ 1.34	40.12
104	3 — 7.30	$\frac{1}{2}$ ζ à β Tauri.	81.51	+ 1.34	38.15
105	4 — 7.35	$\frac{1}{3}$ β à ζ Tauri.	81.29	+ 2.50	36.56
106	6 — 7.50	0,3 β à ζ Tauri	81.25	+ 3. 6	34.55
107	27 — 8.10	$\frac{1}{4}$ κ à β Geminorum	111.44	+ 3.58	45. 1
108	»	$\frac{1}{2}$ δ à γ Cancri	126.18	+ 1.37	59.55
109	28 — 8.15	κ Geminorum.	111.50	+ 3. 4	44. 9
110	30 — 8.20	κ Geminorum.	111.50	+ 3. 4	42.14
111	2 juin, 8.20	1°30′ Nord δ Cancri	126.54	+ 1.34	54.26
112	4 — 8.25	δ Cancri.	126.54	+ 0. 4	52.31

NUMÉRO.	DATES.	POSITION DES POINTS OBSERVÉS DANS LA LIGNE DE PLUS GRAND ÉCLAT.	LONGITUDE.	LATITUDE.	DISTANCE au Soleil.
		[B]. *Observations du matin.*			
		1868.			
113	18 déc., $5^h 15^m$m.	$\frac{1}{4}$ β à δ Scorpii	241°14′	+0°17′	23°42′
114	»	$\frac{1}{3}$ α à β Libræ.	224.42	+3. 4	42.14
115	22 — 5. 0	$\frac{1}{3}$ ι à γ Libræ : :	230.37	+0.19	40.22
116	24 — 5.10	g Ophiuchi : :	246.36	-1.44	26.25
		1869.			
117	7 janv., 5. 0	$\frac{1}{2}$ ε Scorpii à θ Ophiuchi : :	256.53	-6.45	30.42
118	19 — 5.15	$\frac{1}{3}$ θ Ophiuchi à ξ Serpentis	260.57	+1.27	38.53
119	20 — 5.30	$\frac{1}{2}$ θ Ophiuchi à ξ Serpentis : : . . .	261. 8	+3. 4	39.23
120	11 févr., 5.20	p et O Sagittarii : :	286.58	-6.44	33.51
121	18 — 5.10	β Capricorni : :	302.11	+4.37	27.41
122	19 — 5.10	Sud de β Capric., à 1,0 de β à α Capr.	302.11	+2.14	28.42
123	20 — 5. 0	0,3 e à h Sagittarii	291.40	+2.40	40.13
124	12 avril, 4.30	θ Aquarii : :	331.26	+2.43	51. 3
125	17 mai, 4. 0	δ Piscium (?).	12.14	+2.13	44.13

Il reste maintenant à examiner quels sont les faits qui paraissent ressortir de ces observations.

§ 7. — LA LUMIÈRE ZODIACALE EST-ELLE SITUÉE DANS L'ÉQUATEUR DU SOLEIL?

Voilà déjà plus de trente ans que j'ai examiné cette question à l'aide des observations que l'on possédait alors, particulièrement les anciennes observations de Dominique Cassini [1]. Les comparaisons n'étaient nullement favorables à l'hypothèse de cet illustre astronome. Ce résultat de nos recherches paraît avoir été remarqué par Humboldt, car celui-ci renvoie à notre travail dans deux endroits différents de son *Cosmos* [2]. Jones, en proposant une nouvelle théorie, admet que l'idée de Cassini n'est pas soutenue par le témoignage des faits. Pourtant il m'a paru utile de comparer encore à l'hypothèse cassinienne mes observations nouvelles. Cette série ininterrompue de six mois, exécutée dans le même lieu et dans les mêmes circonstances, s'y prêtait éminemment. Or, on va voir qu'après cette discussion il ne peut plus rester le moindre doute sur la discordance complète entre l'hypothèse de Cassini et les faits.

Mettons d'abord en regard les latitudes des points observés dans l'axe de la Lumière Zodiacale, et les latitudes qu'aurait montrées, au même moment et sous la même longitude, l'axe d'une lentille disposée selon l'équateur solaire. Je prends pour cet équateur l'inclinaison et la longitude du nœud déterminées par Laugier.

[1] Mon travail est publié dans les *Astronomische Nachrichten*; Bd. XXI; nº 492.

[2] AL. DE HUMBOLDT, *Cosmos.*, t. I, note 96 (éd. franç.), note 66 (éd. allem.), aussi t. III, part. ij, chap. 4.

[A]. *Observations du soir.*

NUMÉRO.	DATE.			Latitude d'un point dans l'axe de la Lumière Zodiacale.	Latitude correspondante de l'Équateur solaire.	Différences. (Calcul — Observation.)	Moyenne des écarts par groupes.
1	1861.	Février.	1	- 1°38′	- 3°38′	- 2° 0′	- 2°39′
2	—	—	4	+ 0.43	- 3.14	- 3.57	
3	—	—	10	- 0.28	- 2.29	- 2. 1	
4	—	Avril.	10	+ 0.49	+ 3.38	+ 2.49	+ 2.49
5	1868.	Décembre.	12	+ 1. 3	- 4.39	- 5.42	- 7.49
6	—	—	»	+ 1.33	- 6.16	- 7.49	
7	—	—	13	+ 2.14	- 4.32	- 6.46	
8	—	—	»	+ 2.16	- 5.48	- 8. 4	
9	—	—	»	+ 2.43	- 6.36	- 9.19	
10	—	—	17	+ 2.50	- 6.22	- 9.12	
11	—	—	25	+ 1.36	- 4. 2	- 5.38	- 5.51
12	—	—	»	+ 1.10	- 4.55	- 6. 5	
13	—	—	30	+ 4.54	- 4.21	- 9 5	- 5.43
14	—	—	»	+ 6.41	- 5. 7	-11.48	
15	—	—	31	- 0.22	- 3.22	- 3. 0	
16	—	—	»	- 0.14	- 5. 7	- 4.53	
17	—	—	»	- 0.18	- 5.32	- 5.14	
18	1869.	Janvier.	1	+ 0.14	- 4. 7	- 4.21	
19	—	—	»	- 0.26	- 5. 0	- 4.34	
20	—	—	»	- 0.18	- 5.25	- 5. 7	
21	—	—	2	- 0.21	- 5.20	- 4.59	
22	—	—	3	+ 1.10	- 3.53	- 5. 3	
23	—	—	»	+ 0.43	- 4.44	- 5.29	
24	—	—	»	- 0.18	- 5.14	- 4.56	

NUMÉRO.	DATE.			Latitude d'un point dans l'axe de la Lumière Zodiacale.	Latitude correspondante de l'Équateur solaire.	Différences (Calcul — Observation.)	Moyenne des écarts par groupes.
25	1869.	Janvier .	4	− 0° 14′	− 4° 38′	− 4° 24′	
26	—	—	5	+ 2.13	− 4.26	− 6.39	
27	—	—	»	+ 2.28	− 4.57	− 7.25	
28	—	—	6	+ 1.44	− 4.19	− 6. 3	
29	—	—	»	+ 2.37	− 4.46	− 7.23	− 6° 27′
30	—	—	»	+ 1.32	− 4.47	− 6.39	
31	—	—	7	+ 1.55	− 3.22	− 5.17	
32	—	—	»	+ 2.13	− 4.11	− 6.24	
33	—	—	»	+ 3.13	− 4.38	− 7.31	
34	—	—	10	+ 2.46	− 4.17	− 7. 3	
35	—	—	12	+ 1.55	− 2.43	− 4.38	
36	—	—	»	+ 1. 7	− 3.24	− 4.31	
37	—	—	»	+ 1.25	− 3.35	− 5. 0	
38	—	—	»	+ 0.22	− 4. 7	− 4.29	
39	—	—	»	− 0.42	− 4.29	− 3.47	
40	—	—	13	+ 0.48	− 2.36	− 3.24	− 4.43
41	—	—	»	+ 0.20	− 3.14	− 3.34	
42	—	—	»	+ 0.45	− 3.29	− 4.14	
43	—	—	»	− 0. 8	− 4. 1	− 3.53	
44	—	—	»	− 0.39	− 4.23	− 3.44	
45	—	—	15	+ 3.54	− 3.43	− 7.37	
46	—	—	»	+ 1. 2	− 4.14	− 5.16	
47	—	—	31	+ 0.19	− 2.41	− 3. 0	
48	—	—	»	− 0. 8	− 2.42	− 2.34	
49	—	Février .	1	+ 0.38	− 2. 4	− 2.42	− 2.53
50	—	—	»	+ 0.36	− 2.34	− 3.10	
51	—	—	2	+ 1.27	− 1.59	− 3.26	
52	—	—	»	+ 0.14	− 2.27	− 2.41	

NUMÉRO.	DATE.			Latitude d'un point dans l'axe de la Lumière Zodiacale.	Latitude correspondante de l'Équateur solaire.	Différences. (Calcul — Observation.)	Moyenne des écarts par groupes.
53	1869.	Février .	10	- 0° 8′	- 1°33′	- 1°25′	- 0°35′
54	—	—	11	- 1.12	- 2. 0	- 0.48	
55	—	—	13	- 1.12	- 1.45	- 0.33	
56	—	Mars .	2	+ 1.52	- 0.15	- 2. 7	- 0.47
57	—	—	»	- 0.55	- 0.19	+ 0.36	
58	—	—	»	+ 0.49	- 0.21	- 1.10	
59	—	—	3	+ 1.52	- 0.10	- 2. 2	
60	—	—	»	+ 0.15	- 0.11	- 0.26	
61	—	—	»	- 0.55	- 0.12	+ 0.43	
62	—	—	»	+ 0.19	- 0.14	- 0.33	
63	—	—	4	+ 1.52	- 0. 5	- 1.57	
64	—	—	»	+ 0.17	- 0. 6	- 0.23	
65	—	—	»	- 0.20	- 0. 6	+ 0.14	
66	—	—	5	+ 0.38	0. 0	- 0.38	- 0.27
67	—	—	»	+ 0.16	0. 0	- 0.16	
68	—	—	6	+ 1.52	+ 0. 4	- 1.48	
69	—	—	»	+ 0.38	+ 0. 6	- 0.32	
70	—	—	»	+ 1. 7	+ 0. 6	- 1. 1	
71	—	—	»	+ 0.39	+ 0. 6	- 0.33	
72	—	—	7	+ 1.10	+ 0. 9	- 1. 1	
73	—	—	»	- 0.55	+ 0.12	+ 1. 7	
74	—	—	»	- 0.30	+ 0.13	+ 0.43	
75	—	—	9	+ 1. 7	+ 0.24	- 0.43	+ 0.24
76	—	—	»	+ 0.16	+ 0.26	+ 0.10	
77	—	—	10	- 2. 0	+ 0.35	+ 2.35	
78	—	—	11	- 0.55	+ 0.32	+ 1.27	
79	—	—	»	- 1.33	+ 0.41	+ 2.14	
80	—	—	12	+ 0.16	+ 0.44	+ 0.28	

NUMÉRO.	DATE.			Latitude d'un point dans l'axe de la Lumière Zodiacale.	Latitude correspondante de l'Équateur solaire.	Différences. (Calcul — Observation.)	Moyenne des écarts par groupes.
81	1869.	Mars. .	13	+ 3°16′	+ 0°31′	− 2°45′	
82	—	—	»	+ 0.38	+ 0.42	+ 0. 4	
83	—	—	»	+ 0.41	+ 0.50	+ 0. 9	
84	—	—	29	+ 1.13	+ 2.18	+ 1. 5	
85	—	Avril . .	1	+ 1.13	+ 2.26	+ 1.13	
86	—	—	»	+ 1.10	+ 2.36	+ 1.26	
87	—	—	2	+ 1.18	+ 2.29	+ 1.11	+ 1° 9′
88	—	—	4	+ 1.13	+ 2.34	+ 1.21	
89	—	—	»	+ 1.10	+ 2.46	+ 1.36	
90	—	—	5	+ 2.57	+ 2.51	− 0. 6	
91	—	—	6	+ 1.13	+ 2.38	+ 1.25	
93	—	—	9	+ 1.13	+ 2.41	+ 1.28	
94	—	—	10	+ 1.10	+ 2.58	+ 1.48	
95	—	—	11	+ 1.23	+ 2.42	+ 1.19	
96	—	—	12	+ 1.10	+ 3. 0	+ 1.50	+ 1.49
97	—	—	»	+ 0.42	+ 3.11	+ 2.29	
98	—	—	13	+ 1.40	+ 3. 1	+ 1.21	
99	—	—	»	+ 0.42	+ 3.12	+ 2.30	
100	—	—	28	+ 0.19	+ 3.56	+ 3.37	
101	—	—	29	+ 0.19	+ 3.56	+ 3.37	
102	—	—	30	+ 1.11	+ 3.53	+ 2.42	
103	—	Mai . .	1	+ 1.34	+ 3.50	+ 2.16	+ 2.16
104	—	—	3	+ 1.34	+ 3.45	+ 2.11	
105	—	—	4	+ 2.50	+ 3.41	+ 0.51	
106	—	—	6	+ 3. 6	+ 3.34	+ 0.28	
107	—	—	27	+ 3.58	+ 5. 0	+ 1. 2	
108	—	—	»	+ 1.37	+ 6. 5	+ 4.28	

NUMÉRO.	DATE.			Latitude d'un point dans l'axe de la Lumière Zodiacale.	Latitude correspondante de l'Équateur solaire.	Différences. (Calcul — Observation.)	Moyenne des écarts par groupes.
109	1869.	Mai . .	28	+ 3° 4′	+ 4°56′	+ 1°52′	+ 3°19′
110	—	—	30	+ 3. 4	+ 4.48	+ 1.44	
111	—	Juin . .	2	+ 1.34	+ 5.49	+ 4.15	
112	—	—	4	+ 0. 4	+ 5.41	+ 5.37	
[B]. *Observations du matin.*							
113	1868.	Décembre.	18	+ 0.17	+ 3. 3	+ 2.46	+ 3.20
114	—	—	»	+ 3. 4	+ 4.43	+ 1.39	
115	—	—	22	+ 0.19	+ 4.28	+ 4. 9	
116	—	—	24	- 1.44	+ 3. 2	+ 4.46	
117	1869.	Janvier. .	7	- 6.45	+ 3.24	+10. 9	+10.9
118	—	—	19	+ 1.27	+ 3.14	+ 1.47	+ 0.58
119	—	—	20	+ 3. 4	+ 3.12	+ 0. 8	
120	—	Février .	11	- 6.44	+ 1.37	+ 8.21	+ 0.25
121	—	—	18	+ 4.37	+ 0.54	- 3.43	
122	—	—	19	+ 2.14	+ 0.52	- 1.22	
123	—	—	20	+ 2.40	+ 1. 6	- 1.34	
124	—	Avril. .	12	+ 2.45	- 3.20	- 6. 3	- 6. 3
125	—	Mai. . .	17	+ 2.15	- 4.45	- 6.56	- 6.56

Les écarts moyens des groupes, présentés dans la dernière colonne, offrent une allure éminemment systématique, dont il est impossible de méconnaître le caractère un seul instant. Les observations du matin, malgré toute l'incertitude qui les affecte, présentent elles-mêmes un résultat analogue. On va d'ailleurs juger encore mieux de cette allure en réunissant dans un tableau concis les écarts moyens de chaque groupe, vis-à-vis de la date moyenne des observations.

[A]. *Observations du soir.*

ANNÉES.	MOYENNE de la date annuelle.	Nombre d'observations.	MOYENNE des écarts.	ANNÉES.	MOYENNE de la date annuelle.	Nombre d'observations.	MOYENNE des écarts.
1868	Décem. 13	6	- 7°49′	1869	Mars . 3	10	- 0°47′
»	— 25	2	- 5.51	»	— 6	9	- 0.27
1869	Janv. 1	12	- 5.43	»	— 11	9	+ 0.24
»	— 6	9	- 6.27	»	Avril. 3	8	+ 1. 9
»	— 13	13	- 4.43	1861	— 10	1	+ 2.49
»	Févr. 1	6	- 2.55	1869	— 11	7	+ 1.49
1861	— 5	3	- 2.39	»	— 30	7	+ 2.16
1869	— 11	3	- 0.55	»	Mai. 30	6	+ 3.19
			[B]. *Observations du matin.*				
1868	Décem. 20	4	+ 3°20′	1869	Févr. 17	4	+ 0°25′
1869	Janv. 7	1	+10. 9	»	Avril. 12	1	- 6. 5
»	— 20	2	+ 0.58	»	Mai. 17	1	- 6.56

Il est remarquable que les observations de 1861, intercalées à leur date annuelle, rentrent également dans l'allure générale, et confirment la loi des écarts. En présence de ce tableau, il est impossible de croire à des erreurs accidentelles. Ainsi l'hypothèse de Cassini ne représente pas les observations. Les maxima de la dernière colonne reproduisent pour ainsi dire, en grandeur, le chiffre de l'inclinaison de l'équateur solaire (qui est 7°9′), en sorte qu'on pourrait retrouver par la discussion des écarts la valeur employée pour cette inclinaison. Quel signe plus visible que les écarts sont le produit de l'hypothèse elle-même, et que celle-ci ne représente les faits avec aucun degré appréciable d'approximation !

Cette hypothèse doit donc cesser définitivement d'occuper les astronomes. Si l'on veut trouver une explication à la Lumière Zodiacale, il faut évidemment la chercher ailleurs.

§ 8. — LA LUMIÈRE ZODIACALE EST-ELLE SITUÉE DANS L'ORBITE DE LA LUNE ?

Jones a supposé que la Lumière Zodiacale pourrait être située dans l'orbite lunaire [1]. Mes nouvelles observations, discutées à ce point de vue, sont aussi peu favorables à cette hypothèse qu'à l'ancienne théorie de Cassini. Cette circonstance ne diminue pas d'ailleurs le mérite des observations de la Lumière elle-même, recueillies durant l'expédition américaine par cet investigateur zélé.

Je présente ci-dessous les latitudes des points observés dans la ligne de plus grand éclat (tels qu'ils résultent du § 6), en les comparant aux latitudes des points correspondants de l'orbite de la Lune, c'est-à-dire des points de cette orbite placés dans la même longitude. Les calculs sont faits avec les éléments de Hansen.

[A]. *Observations du soir.*

NUMÉRO.	DATE.			Latitudes de points dans l'axe de la Lumière Zodiacale.	Latitudes des points correspondants de l'orbite de la Lune.	Différences. (Calcul — Observation.)	Moyenne des écarts par groupes.
1	1861.	Février. .	1	− 1°38′	+ 5° 7′	+ 6°45′	+ 5°35′
2	—	—	4	+ 0.43	+ 5. 7	+ 4.24	
3		—	10	− 0.28	+ 5. 7	+ 5.35	

[1] Son travail forme le volume III de l'ouvrage américain : *Expedition to Japan.* Il en avait paru un extrait dans *Silliman's American Journal of Sciences*, 1855.

NUMÉRO.	DATE.			Latitudes de points dans l'axe de la Lumière Zodiacale.	Latitudes des points correspondants de l'orbite de la Lune.	Différences. (Calcul — Observation.)	Moyenne des écarts par groupes.
4	1869.	Avril. .	10	+ 0°49′	+ 2°16′	+ 1°27′	+ 1°27′
5	1868.	Décembre.	12	+ 1. 3	+ 1.33	+ 0.30	
6	—	—	»	+ 1.33	- 0.18	- 1.51	
7	—	—	13	+ 2.14	+ 1.33	- 0.41	- 1.58
8	—	—	»	+ 2.16	+ 0.11	- 2. 5	
9	—	—	»	+ 2.43	- 1. 3	- 3.46	
10	—	—	17	+ 2.50	- 1. 4	- 3.54	
11	—	—	23	+ 1.36	+ 0.40	- 0.56	- 1.10
12	—	—	»	+ 1.10	- 0.14	- 1.24	
13	—	—	30	+ 4.54	- 0.16	- 5.10	
14	—	—	»	+ 6.41	- 1. 7	- 7.48	
15	—	—	31	- 0.22	+ 0.37	+ 0.59	
16	—	—	»	- 0.14	- 1.16	- 1. 2	
17	—	—	»	- 0.18	- 1.51	- 1.33	
18	1869.	Janvier. .	1	+ 0.14	- 0.16	- 0.30	- 2. 0
19	—	—	»	- 0.26	- 1.17	- 0.51	
20	—	—	»	- 0.18	- 1.51	- 1.33	
21	—	—	2	- 0.21	- 1.52	- 1.31	
22	—	—	3	+ 1.10	- 0.17	- 1.27	
23	—	—	»	+ 0.45	- 1.14	- 1.59	
24	—	—	»	- 0.18	- 1.52	- 1.34	
25	—	—	4	- 0.14	- 1.17	- 1. 3	
26	—	—	5	+ 2.13	- 1.11	- 3.24	
27	—	—	»	+ 2.28	- 1.50	- 4.18	
28	—	—	6	+ 1.44	- 1.12	- 2.56	
29	—	—	»	+ 2.37	- 1.46	- 4.23	- 3.22

NUMÉRO.	DATE.			Latitudes de points dans l'axe de la Lumière Zodiacale.	Latitudes des points correspondants de l'orbite de la Lune.	Différences. (Calcul — Observation.)	Moyenne des écarts par groupes.
30	1869.	Janvier. .	6	+ 1°52′	− 1°47′	− 3°39′	
31	—	—	7	+ 1.55	− 0.17	− 2.12	
32	—	—	»	+ 2.13	− 1.12	− 3.25	
33	—	—	»	+ 3.13	− 1.45	− 4.58	
34	—	—	10	+ 2.46	− 1.46	− 4.32	
35	—	—	12	+ 1.55	− 0.18	− 2.13	
36	—	—	»	+ 1. 7	− 1. 3	− 2.10	
37	—	—	»	+ 1.25	− 1.15	− 2.40	
38	—	—	»	+ 0.22	− 1.53	− 2.15	
39	—	—	»	− 0.42	− 2.20	− 1.38	
40	—	—	13	+ 0.48	− 0.19	− 1. 7	− 2°31′
41	—	—	»	+ 0.20	− 1. 0	− 1.20	
42	—	—	»	+ 0.45	− 1.18	− 2. 3	
43	—	—	»	− 0. 8	− 1.53	− 1.45	
44	—	—	»	− 0.39	− 2.22	− 1.43	
45	—	—	15	+ 3.54	− 1.52	− 5.46	
46	—	—	»	+ 1. 2	− 2.30	− 3.32	
47	—	—	31	+ 0.19	− 3.11	− 3.30	
48	—	—	»	− 0. 8	− 3.13	− 3. 5	
49	—	Février. .	1	+ 0.38	− 2.30	− 3. 8	
50	—	—	»	+ 0.36	− 3.13	− 3.49	− 3.29
51	—	—	2	+ 1.27	− 2.32	− 3.59	
52	—	—	»	+ 0.14	− 3.13	− 3.27	
53	—	—	10	− 0. 8	− 3.15	− 3. 7	
54	—	—	11	− 1.12	− 4.11	− 2.59	− 3. 2
55	—	—	13	− 1.12	− 4.12	− 3. 0	

NUMÉRO.	DATE.			Latitudes de points dans l'axe de la Lumière Zodiacale.	Latitudes des points correspondants de l'orbite de la Lune.	Différences. (Calcul — Observation.)	Moyenne des écarts par groupes.
56	1869.	Mars.	2	+ 1°52′	- 4°51′	- 6°44′	
57	—	—	»	- 0.55	- 5. 6	- 4.11	
58	—	—	»	+ 0.49	- 5. 8	- 5.57	
59	—	—	3	+ 1.52	- 4.51	- 6.43	
60	—	—	»	+ 0.15	- 4.59	- 5.14	
61	—	—	»	- 0.55	- 5. 6	- 4.11	- 5°31′
62	—	—	»	+ 0.19	- 5. 8	- 5.27	
63	—	—	4	+ 1.52	- 4.51	- 6.43	
64	—	—	»	+ 0.17	- 5. 0	- 5.17	
65	—	—	»	- 0.20	- 5. 5	- 4.45	
66	—	—	5	+ 0.38	- 5. 6	- 5.44	
67	—	—	»	+ 0.16	- 5. 7	- 5.23	
68	—	—	6	+ 1.52	- 4.51	- 6.43	
69	—	—	»	+ 0.38	- 5. 6	- 5.44	
70	—	—	»	+ 1. 7	- 5. 8	- 6.15	- 5.36
71	—	—	»	+ 0.39	- 5. 7	- 5.46	
72	—	—	7	+ 1.10	- 4.51	- 6. 1	
73	—	—	»	- 0.55	- 5. 6	- 4.11	
74	—	—	»	- 0.30	- 5. 7	- 4.37	
75	—	—	9	+ 1. 7	- 5. 8	- 6.15	
76	—	—	»	+ 0.16	- 5. 7	- 5.23	
77	—	—	10	- 2. 0	- 4.58	- 2.58	
78	—	—	11	- 0.55	- 5. 6	- 4.11	
79	—	—	»	- 1.33	- 4.58	- 3.25	- 5.15
80	—	—	12	+ 0.16	- 5. 7	- 5.23	
81	—	—	13	+ 3.16	- 4.51	- 8. 7	
82	—	—	»	+ 0.38	- 5. 6	- 5.44	
83	—	—	»	+ 0.41	- 5. 7	- 5.48	

NUMÉRO.	DATE.			Latitudes de points dans l'axe de la Lumière Zodiacale.	Latitudes des points correspondants de l'orbite de la Lune.	Différences. (Calcul — Observation.)	Moyenne des écarts par groupes.
84	1869.	Mars. .	29	+ 1°15′	− 4°54′	− 6° 7′	
85	—	Avril. .	1	+ 1.15	− 4.54	− 6. 7	
86	—	—	»	+ 1.10	− 4.44	− 5.54	
87	—	—	2	+ 1.18	− 4.54	− 6.12	− 6°15′
88	—	—	4	+ 1.15	− 4.54	− 6. 7	
89	—	—	»	+ 1.10	− 4.44	− 5.54	
90	—	—	5	+ 2.57	− 4.57	− 7.54	
91	—	—	6	+ 1.15	− 4.54	− 6. 7	
93	—	—	9	+ 1.15	− 4.54	− 6. 7	
94	—	—	10	+ 1.10	− 4.44	− 5.54	
95	—	—	11	+ 1.23	− 4.54	− 6.17	
96	—	—	12	+ 1.10	− 4.44	− 5.54	− 5.55
97	—	—	»	+ 0.42	− 4.35	− 5.17	
98	—	—	13	+ 1.40	− 4.44	− 6.24	
99	—	—	»	+ 0.42	− 4.35	− 5.17	
100	—	—	28	+ 0.19	− 3.58	− 4.17	
101	—	—	29	+ 0.19	− 3.58	− 4.17	
102	—	—	30	+ 1.11	− 3.58	− 5. 9	
103	—	Mai. . .	1	+ 1.34	− 3.58	− 5.32	− 5.32
104	—	—	3	+ 1.34	− 3.58	− 5.32	
105	—	—	4	+ 2.50	− 3.59	− 6.49	
106	—	—	6	+ 3. 6	− 3.59	− 7. 5	
107	—	—	27	+ 3.58	− 1.42	− 5.40	
108	—	—	»	+ 1.37	− 0.26	− 2. 3	
109	—	—	28	+ 3. 4	− 1.41	− 4.45	− 3.15
110	—	—	30	+ 3. 4	− 1.41	− 4.45	
111	—	Juin. . .	2	+ 1.34	− 0.21	− 1.55	
112	—	—	4	+ 0. 4	− 0.21	− 0.25	

NUMÉRO.	DATE.	Latitudes de points dans l'axe de la Lumière Zodiacale.	Latitudes des points correspondants de l'orbite de la Lune.	Différences. (Calcul — Observation.)	Moyenne des écarts par groupes.
	[B]. *Observations du matin.*				
113	1868. Décembre. 18	+ 0°17′	+ 5°21′	+ 5° 4′	+ 4°38′
114	— — »	+ 3. 4	+ 5. 7	+ 2. 3	
115	— — 22	+ 0.19	+ 5. 8	+ 4.49	
116	— — 24	- 1.44	+ 4.54	+ 6.38	
117	1869. Janvier. 7	- 6.45	+ 4.32	+11.17	+11.17
118	— — 19	+ 1.27	+ 4.19	+ 2.52	+ 2. 5
119	— — 20	+ 3. 4	+ 4.18	+ 1.14	
120	— Février. 11	- 6.44	+ 2.32	+ 9.16	+ 1. 5
121	— — 18	+ 4.37	+ 1.14	- 3.23	
122	— — 19	+ 2.14	+ 1.14	- 1. 0	
123	— — 20	+ 2.40	+ 2. 7	- 0.33	
124	— Avril. . . 12	+ 2.43	- 1.39	- 4.22	- 4.22
125	— Mai. . . 17	+ 2.13	- 4.30	- 6.43	- 6.43

Si nous formons un résumé des groupes, comme nous l'avons fait pour l'hypothèse cassinienne, nous trouvons :

[A]. *Observations du soir.*

ANNÉES.	MOYENNE de la date annuelle.	Nombre d'observations.	MOYENNE des écarts.	ANNÉES.	MOYENNE de la date annuelle.	Nombre d'observations.	MOYENNE des écarts.
1861	Févr. 5	3	+ 5°35′	1869	Févr. 1	6	- 3°29′
»	Avril. 10	1	+ 1.27	»	— 11	3	- 3. 2
				»	Mars. 3	10	- 5.31
				»	— 6	9	- 5.36
1868	Décem. 13	6	- 1 58	»	— 11	9	- 5.15
»	— 25	2	- 1.10	»	Avril. 3	8	- 6.15
1869	Janv. 1	12	- 2. 0	»	— 11	7	- 5.53
»	— 6	9	- 3.22	»	— 30	7	- 5.32
»	— 13	13	- 2.31	»	Mai. 30	6	- 3.15

[B]. *Observations du matin.*

ANNÉES.	MOYENNE de la date annuelle.	Nombre d'observations.	MOYENNE des écarts.	ANNÉES.	MOYENNE de la date annuelle.	Nombre d'observations.	MOYENNE des écarts.
1868	Décem. 20	4	+ 4°58′	1869	Févr. 17	4	+ 1° 5′
1869	Janv. 7	1	+11.17	»	Avril. 12	1	- 4.22
»	— 20	2	+ 2. 3	»	Mai. 17	1	- 6.43

On ne peut en aucune manière regarder ces écarts comme des erreurs accidentelles. Ce qui est bien digne de remarque, c'est que les observations de 1861, qui sont séparées de celles de 1869 par un intervalle de huit ans, presque égal à une demi-révolution des nœuds de la Lune, donnent des écarts à peu près égaux, mais de signe contraire, à ceux de la dernière série, pour des époques correspondantes de l'année. C'est une preuve manifeste que la Lumière Zodiacale ne s'est pas déplacée, dans ce laps de huit années, avec l'orbite de notre satellite.

On ne voit nulle part que cette Lumière affecte, par rapport à l'écliptique, une inclinaison qui approche de celle de l'orbite lunaire. Des écarts moyens de 4 ou de 5°, se continuant pendant plusieurs mois, comme ceux que le dernier tableau signale, ne peuvent être d'ailleurs attribués aux observations. En effet, on voit celles-ci donner, dans une même nuit et dans des nuits voisines, des nombres qui souvent concordent à 1 ou à 2°, pour les simples déterminations individuelles. L'hypothèse de Jones ne nous paraît donc pas mieux étayée par les faits que l'ancienne hypothèse de Cassini.

§ 9. — LA LUMIÈRE ZODIACALE A-T-ELLE UNE INCLINAISON SUR L'ÉCLIPTIQUE ?

Dans la note insérée aux *Astronomische Nachrichten,* dont j'ai parlé plus haut, j'avais déjà fait remarquer que les anciennes observations étaient représentées d'une manière sinon précise, au moins plus satisfaisante, lorsqu'on s'abstenait de supposer une inclinaison. Les observations que je soumets dans ce mémoire montrent pleinement qu'en effet la Lumière Zodiacale ne peut être placée que dans le plan de l'écliptique. Ce que je soupçonnais il y a trente ans, me paraît aujourd'hui un fait établi. Les erreurs des anciennes observations, erreurs portant d'ailleurs dans tous les sens, dépendaient sans doute de l'imperfection de ces observations mêmes. L'idée que la Lumière Zodiacale est constamment dans l'écliptique laissera peu de doutes, croyons-nous, après que l'on aura examiné le tableau qui suit :

[A]. *Observations du soir.*

NUMÉRO.	DATE.	Latitudes de points dans l'axe de la Lumière Zodiacale.	Inclinaison sur l'écliptique du grand cercle qui joint ces points au Soleil.	NUMÉRO.	DATE.	Latitudes de points dans l'axe de la Lumière Zodiacale.	Inclinaison sur l'écliptique du grand cercle qui joint ces points au Soleil.
1	1861. Fév., 1	-1°38′	+1°43′	5	1868. Déc., 12	+1° 3′	+1°36′
2	— 4	+0.43	+0.46	6	— »	+1.33	+1.45
3	— 10	-0.28	-0.31	7	— 13	+2.14	+3.29
				8	— »	+2.16	+2.46
				9	— »	+2.43	+2.55
	Moy. .	-0.28	-0.29	10	— 17	+2.50	+3. 8
4	1861. Avril, 10	+0.49	+0.56		Moy. .	+2. 6	+2.36

NUMÉRO.	DATE.	Latitudes de points dans l'axe de la Lumière Zodiacale.	Inclinaison sur l'écliptique du grand cercle qui joint ces points au Soleil.
11	1868. Déc., 25	+1° 36′	+2° 40′
12	— »	+1.10	+1.36
	Moy. .	+1.23	+2. 8
13	1868. Déc , 30	+4.54	+7.18
14	— »	+6.41	+8.29
15	— 31	-0.22	-0.42
16	— »	-0.14	-0.18
17	— »	-0.18	-0.21
18	1869. Janv., 1	+0.14	+0.22
19	— »	-0.26	-0.33
20	— »	-0.18	-0.21
21	— 2	-0.21	-0.25
22	— 3	+1.10	+1.54
23	— »	+0.45	+1. 0
24	— »	-0.18	-0.22
	Moy. .	+0.57	+1.20
25	1869. Janv., 4	-0.14	-0.19
26	— 5	+2.13	+3. 5
27	— »	+2.28	+3. 4
28	— 6	+1.44	+2.25
29	— »	+2.37	+3.20
30	— »	+1.52	+2.22
31	— 7	+1.55	+3.26
32	— »	+2.13	+3.12
33	— »	+3.13	+4.12
	Moy. .	+2. 0	+2.45
34	1869. Janv., 10	+2° 46′	+3° 46′
35	— 12	+1.55	+3.59
36	— »	+1. 7	+1.51
37	— »	+1.25	+2.14
38	— »	+0.22	+0.30
39	— »	-0.42	-0.53
40	— 13	+0.48	+1.43
41	— »	+0.20	+0.35
42	— »	+0.45	+1.12
43	— »	-0. 8	-0.11
44	— »	-0.39	-0.50
45	— 15	+3.54	+5.42
46	— »	+1. 2	+1.20
	Moy. .	+1. 0	+1.37
47	1869. Janv., 31	+0.19	+0.28
48	— »	-0. 8	-0.11
49	Févr., 1	+0.38	+1.10
50	— »	+0.36	+0.53
51	— 2	+1.27	+2.45
52	— »	+0.14	+0.21
	Moy. .	+0.32	+0.54
53	1869. Févr., 10	-0. 8	-0.14
54	— 11	-1.12	-1.37
55	— 13	1.12	-1.40
	Moy. .	-0.57	-1.10

NUMÉRO.	DATE.	Latitudes de points dans l'axe de la Lumière Zodiacale.	Inclinaison sur l'écliptique du grand cercle qui joint ces points au Soleil.
56	1869. Mars, 2	+1° 52′	+2° 45′
57	— »	-0.55	-1. 6
58	— »	+0.49	+0.54
59	— 3	+1.52	+2.47
60	— »	+0.15	+0.20
61	— »	-0.55	-1. 7
62	— »	+0.19	+0.21
63	— 4	+1.52	+2.51
64	— »	+0.17	+0.23
65	— »	-0.20	-0.26
	Moy. .	+0.31	+0.46
66	1869. Mars, 5	+0.38	+0.48
67	— »	+0.16	+0.18
68	— 6	+1.52	+2.58
69	— »	+0.38	+0.48
70	— »	+1. 7	+1.20
71	— »	+0.39	+0.44
72	— 7	+1.10	+1.54
73	— »	-0.55	-1.10
74	— »	-0.30	-0.34
	Moy. .	+0.33	+0.47
75	1869. Mars, 9	+1. 7	+1.25
76	— »	+0.16	+0.18
77	— 10	-2. 0	-2. 8
78	— 11	-0.55	-1.15
79	— »	-1.33	-1.39

NUMÉRO.	DATE.	Latitudes de points dans l'axe de la Lumière Zodiacale.	Inclinaison sur l'écliptique du grand cercle qui joint ces points au Soleil.
80	1869. Mars, 12	+0° 16′	+0° 19′
81	— 13	+3.16	+6.11
82	— »	+0.38	+0.54
83	— »	+0.41	+0.49
	Moy. .	+0.12	+0.30
84	1869. Mars, 29	+1.13	+1.32
85	Avril, 1	+1.13	+1.36
86	— »	+1.10	+1.26
87	— 2	+1.18	+1.45
88	— 4	+1.13	+1.41
89	— »	+1.10	+1.29
90	— 5	+2.37	+3.47
91	— 6	+1.13	+1.44
	Moy. .	+1.23	+1.52
93	1869. Avril, 9	+1.13	+1.50
94	— 10	+1.10	+1.38
95	— 11	+1.25	+2.11
96	— 12	+1.10	+1.41
97	— »	+0.42	+0.57
98	— 13	+1.40	+2.28
99	— »	+0.42	+0.58
	Moy. .	+1. 9	+1.40

NUMÉRO.	DATE.	Latitudes de points dans l'axe de la Lumière Zodiacale.	Inclinaison sur l'écliptique du grand cercle qui joint ces points au Soleil.	NUMÉRO.	DATE.	Latitudes de points dans l'axe de la Lumière Zodiacale.	Inclinaison sur l'écliptique du grand cercle qui joint ces points au Soleil.
100	1869. Avril, 28	+0° 19′	+0° 28′	107	1869. Mai, 27	+3° 58′	+5° 36′
101	— 29	+0.19	+0.28	108	— »	+1.37	+1.52
102	— 30	+1.11	+1.47	109	— 28	+3. 4	+4.24
103	Mai, 1	+1.34	+2.26	110	— 30	+3. 4	+4.33
104	— 3	+1.34	+2.32	111	Juin, 2	+1.34	+1.56
105	— 4	+2.50	+4.43	112	— 4	+0. 4	+0. 5
106	— 6	+3. 6	+5.24				
	Moy. .	+1.33	+2.32		Moy. .	+2.13	+3. 4
		[B]. *Observations du matin.*					
113	1868. Déc., 18	+0.17	+0.39	120	1869. Fév., 11	+6.44	-11.25
114	— »	+3. 4	+4.33	121	— 18	+4.37	+9.52
115	— 22	+0.19	+0.29	122	— 19	+2.14	+4.38
116	— 24	-1.44	-3.54	123	— 20	+2.40	+4. 8
	Moy. .	+0.29	+0.27		Moy. .	+0.42	+1.49
117	1869. Janv., 7	-6.45	-13.3	124	1869. Avril, 12	+2.45	+3.29
118	1869. Janv., 19	+1.27	+2.18				
119	— 20	+3. 4	+4.49	125	1869. Mai, 17	+2.13	+3.11
	Moy. .	+2.15	+3.33				

On a donné partout à l'inclinaison le signe de la latitude, le signe + quand la Lumière Zodiacale paraissait au Nord de l'écliptique, et le signe — lorsqu'elle semblait au Sud.

On forme à l'aide de ce tableau le résumé suivant :

[A]. *Observations du soir.*

ANNÉE.	MOYENNE de la DATE ANNUELLE.		NOMBRE d'observations.	MOYENNE des LATITUDES.	MOYENNE des INCLINAISONS.	MOYENNE des INCLINAISONS par mois.
1868	Décembre,	13	6	+ 2° 6′	+ 2° 36′	+ 2° 29′
—	—	25	2	+ 1.25	+ 2. 8	
1869	Janvier,	1	12	+ 0.57	+ 1.20	
—	—	6	9	+ 2. 0	+ 2.45	+ 1.49
—	—	13	13	+ 1. 0	+ 1.37	
—	Février,	1	6	+ 0.52	+ 0.54	
1861	—	5	3	- 0.28	- 0.29	+ 0. 2
1869	—	11	3	- 0.57	- 1.10	
—	Mars,	3	10	+ 0.51	+ 0.46	
—	—	6	9	+ 0.53	+ 0.47	+ 0.41
—	—	11	9	+ 0.12	+ 0.50	
—	Avril,	3	8	+ 1.23	+ 1.52	
1861	—	10	1	+ 0.49	+ 0.56	+ 1.58
1869	—	11	7	+ 1. 9	+ 1.40	
—	—	30	7	+ 1.53	+ 2.52	
—	Mai,	30	6	+ 2.15	+ 3. 4	+ 3. 4
	[B]. *Observations du matin.*					
1868	Décembre,	20	4	+ 0.29	+ 0.27	+ 0.27
1869	Janvier,	7	1	- 6.45	-13. 3	- 1.59
—	—	20	2	+ 2.15	+ 3.53	
—	Février,	17	4	+ 0.42	+ 1.49	+ 1.49
—	Avril,	12	1	+ 2.43	+ 3.29	+ 3.29
—	Mai,	17	1	+ 2.13	+ 3.11	+ 3.11

Il n'y a pas lieu de s'étonner de la concordance entre les inclinaisons et les latitudes, puisque les premières ne sont guère qu'une forme différente d'exprimer les secondes. Mais un fait frappe d'abord, c'est la petitesse des unes et des autres, même dans des parties différentes de l'année, et aussi bien le matin que le soir. Il n'y a dans les moyennes mensuelles aucun chiffre qui soit comparable soit à l'inclinaison de l'équateur solaire (7° 9′), soit à celle de l'orbite de la Lune (5° 9′). On est étonné de voir combien les observations de 1861 rentrent bien, à leur date annuelle, dans la marche générale. La dernière colonne, où les moyennes sont prises en tenant compte du nombre des observations, indique peut-être une légère variation périodique, à demi voilée par les erreurs accidentelles, mais d'après laquelle la Lumière Zodiacale aurait un peu plus de Sud en février que dans les autres mois de l'année. Nous allons revenir sur ce point dans un instant. Remarquons pour le moment que l'inclinaison est presque toujours du même signe le matin et le soir, ce qui entraînerait cette conclusion assez invraisemblable que les deux segments du fuseau sont situés non dans le prolongement l'un de l'autre, mais selon les deux branches d'un V dont le Soleil occuperait le sommet. Enfin les petites latitudes signalées par les observations sont presque toujours boréales, même à six mois de distance; indiquant ainsi une situation constante et nullement une oscillation.

L'idée se présente alors très-naturellement que cette faible prépondérance vers le Nord n'est qu'un effet de l'imparfaite transparence de l'air. Les observations sont faites dans l'hémisphère boréal. Nous avons vu que les variations dans la pellucidité de l'atmosphère rejettent, en apparence, la Lumière Zodiacale du côté le plus clair. Or le côté le plus clair c'est le côté supérieur, c'est-à-dire, pour l'observateur placé dans l'hémisphère boréal, le côté septentrional. Et cet effet doit être d'autant plus prononcé que la Lumière Zodiacale est plus couchée sur l'horizon du lieu. Il doit s'effacer au contraire quand elle se dresse par rapport à ce cercle.

Eh bien, c'est en février que cette Lumière est le plus dressée. Et en février le déplacement de l'axe lumineux vers le Nord est aussi le moindre, et s'efface même presque entièrement, aussi bien en 1861 au Texas qu'en 1869 à la Jamaïque. Cette remarque ne donne-t-elle point quelque probabilité à l'explication proposée?

Ce qui vient encore à l'appui de ces idées, c'est l'observation du 31 janvier au soir, dans laquelle on a spécialement noté que ce jour-là l'axe d'éclat coïncidait avec l'axe de figure. Cette circonstance semblerait indiquer qu'à ce moment l'inégale transparence de l'air à différentes hauteurs n'avait pas d'influence sensible [1]. Eh bien ce soir-là aussi, l'axe est trouvé presque exactement dans l'écliptique.

Mais il y a un moyen de soumettre à une nouvelle épreuve l'explication qui vient d'être proposée. Groupons les inclinaisons d'après la distance des points observés au centre du Soleil. Nous obtenons ainsi, en nous bornant aux observations du soir, qui sont plus sûres :

DISTANCE des POINTS OBSERVÉS au centre du Soleil.	NOMBRE D'OBSERVATIONS.	MOYENNES des INCLINAISONS.
20° à 30°	2	+ 2°31′
30 à 40	20	+ 2.20
40 à 50	43	+ 1.46
50 à 60	31	+ 1. 1
60 à 70	13	+ 0.40
70 à 80	2	− 1.55

L'allure des chiffres est d'une régularité remarquable. La Lumière Zodiacale paraît avoir d'autant plus de Nord qu'on l'observe plus près du Soleil, et par suite d'autant plus de Sud qu'on se rapproche davantage de sa pointe. Celle-ci, dans ses plus grandes longueurs, est très-sensiblement dans l'écliptique.

Maintenant on remarquera que la pointe est toujours plus haut sur l'horizon que la base, et que par conséquent si le déplacement vers le Nord n'est qu'un effet apparent des brumes voisines de

[1] Voir plus haut, § 4.

l'horizon, cet effet doit porter surtout sur les parties les moins élevées. Plus la hauteur apparente à laquelle on observe augmente, plus la Lumière Zodiacale se range exactement dans l'écliptique. Il deviendrait alors inutile de supposer les deux segments (du matin et du soir) dans une ligne brisée, fait qui manque de simplicité, et qu'on pourrait seulement admettre après une démonstration rigoureuse, pour laquelle, comme nous venons de le voir, il n'y a point de base suffisante.

De la coïncidence constante de la Lumière Zodiacale avec l'écliptique, on conclurait aussi que cette Lumière n'est pas affectée d'une parallaxe. Il ne faut cependant se prononcer sur ce point qu'avec une extrême réserve. Notre série du matin ne permet pas, sous le rapport du nombre des observations ni sous celui de leur certitude, d'aborder l'examen d'une pareille question. Dans la série du soir, nos observations appartiennent aux mois de l'année durant lesquels l'écliptique était, dans sa partie considérée, fort incliné sur l'horizon. Ainsi, dans ces observations, la composante de la parallaxe en latitude ne pouvait être qu'une fraction presque toujours fort petite de la parallaxe de hauteur, laquelle était elle-même sensiblement moindre que la parallaxe horizontale. Il n'est donc pas établi, à nos yeux, que celle-ci n'existe point. Il nous paraît même qu'une parallaxe horizontale plusieurs fois supérieure à celle de la Lune aurait pu passer inaperçue, puisqu'elle se serait presque toujours réduite à quelques minutes sur la latitude. Il faudrait réunir des observations du soir dans les mois d'automne, quand la parallaxe a, sous les tropiques, des effets plus sensibles, avant de se croire autorisé à décider cette importante question.

§ 10. — CONCLUSIONS SUR LA LUMIÈRE ZODIACALE.

Nous pouvons conclure, croyons-nous, de ce qui précède :

I. Que la Lumière Zodiacale ne se montre pas sous des inclinaisons à l'écliptique qui approchent de celles de l'équateur solaire ni de l'orbite de la Lune.

II. Qu'elle ne passe en aucune manière par les oscillations apparentes qu'elle devrait présenter, si elle se trouvait située dans l'un ou l'autre de ces plans.

III. Qu'elle paraît au contraire demeurer constamment dans l'écliptique.

IV. Que les seuls écarts entre les observations et cette dernière hypothèse, non seulement sont faibles et peu supérieurs aux erreurs dont ces observations délicates sont nécessairement entachées, mais qu'ils s'expliquent de la manière la plus satisfaisante par l'inégale transparence de l'air à différentes hauteurs apparentes.

Ceci admis, on se demande en quoi consiste la Lumière Zodiacale. Si elle est dans le plan de l'écliptique, elle dépend de la Terre, et l'on ne peut plus en reculer le siége à des distances considérables de notre globe. Si c'était un anneau, comme l'anneau pâle de Saturne, tournant autour de notre planète, il est extrêmement probable qu'il serait situé non dans le plan de notre orbite, mais dans celui de notre équateur. Au surplus, la considération de la figure de la Lumière Zodiacale permet de résoudre les doutes à cet égard. Un anneau placé assez loin pour ne pas être atteint par l'ombre de la Terre paraîtrait continu, et les bandes du soir et du matin s'étendraient assez pour se rejoindre, ce qui n'est pas le cas de la nature. Si, au contraire, l'ombre de la Terre atteignait l'anneau, celui-ci ne finirait pas en pointe comme la Lumière Zodiacale, mais sa partie éclairée serait limitée par une courbe transversale analogue à la courbe crépusculaire. La Lumière Zodiacale affecterait alors quelque ressemblance avec un crépuscule tardif.

La figure lenticulaire atteste, au contraire, que le corps a une terminaison réelle, en s'amincissant sur ses bords. On peut se le représenter, au moins provisoirement, comme un secteur, disposé sur l'orbite terrestre, du côté du Soleil, ayant son sommet à la Terre, et sa plus grande épaisseur à peu près dans le rayon vecteur de notre globe. Ce serait (sans préjuger les analogies) un appendice placé comme la barbe des comètes. Ce secteur paraît s'étendre dans un arc de 40° environ à partir du rayon vecteur, du côté où la Terre se meut, et dans un arc de 60 ou 70° du côté qu'elle quitte dans sa translation. Cette partie postérieure est aussi notablement plus brillante que l'autre. Ces remarques donnent lieu de penser que le mouvement de transport de la Terre dans son orbite n'est pas sans exercer une influence sur la Lumière Zodiacale, influence dirigée dans le sens de ce mouvement.

Quelques observations, notamment celles du 15 janvier 1869 au soir, permettent d'estimer la largeur du fuseau, par le travers du Soleil, à 25° environ. Le sommet de l'aigrette, reposant sur la Terre, ne prendrait donc pas d'un pôle à l'autre du globe. L'effluve (si on l'appelle ainsi pour simplifier le langage et sans rien préjuger sur la valeur réelle de ce terme) partirait seulement d'une zone de notre globe comparable en largeur à la zone des tropiques, mais disposée des deux côtés du plan de l'orbite et non des deux côtés de l'équateur.

§ 11. — ÉTOILES FILANTES.

Les observations isolées de ces météores ont perdu une partie de leur intérêt depuis qu'on est parvenu à connaître leur élévation et les principales circonstances de leur marche. Je me bornerai donc à rapporter ici l'observation d'un cas particulier qui a peut-être une certaine valeur pour les théories sur la formation de la traînée. C'est à cette observation que j'ai fait allusion dans un ouvrage publié précédemment [1].

« Le 15 juillet 1859, étant sur la route de San-Antonio à Seguin (Texas), l'aube du jour commençait à peine à être soupçonnée à l'Orient. L'air était fort calme; le ciel portait de nombreux cumulus légers, et un épais cumulostratus couvrait la Lune au Sud-Ouest. On ne voyait qu'imparfaitement les constellations.

» A $4^h\ 0^m$ mat. (temps moyen de San-Antonio), une étoile

[1] *Le Ciel mis à la portée de tout le monde*, p. 147.

filante de l'éclat de Vénus passa en droit chemin de Cassiopée vers le corps du Serpent, et entra ensuite sous le cumulostratus du Sud-Ouest, qui la cacha. Elle avait traversé plusieurs des cumulus légers sans être sensiblement affaiblie. Sa course était lente, et prit environ 10 secondes. Elle laissait une traînée de 8 à 10°.

» A environ $\frac{3}{4}$° derrière le corps de ce météore, et dans la ligne étroite que marquait la traînée, suivait un plus petit noyau, de l'écla t d'uneprimaire, mais d'un diamètre qui paraissait beaucoup plus petit que le noyau principal. La traînée en recevait un nouvel éclat, de manière à ne laisser aucun doute que ce second météore ne contribuât pour sa part à la formation de cette traînée, mais exactement dans le même sillon.

» J'ai aperçu les deux noyaux en cet état, et je n'ai pas remarqué que leur espacement variât sensiblement. Mais au bout de 6 à 7 secondes, le plus petit noyau s'éteignit subitement, et la traînée n'eut plus qu'un générateur, comme dans les étoiles filantes ordinaires. »

CHAPITRE II.

OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES.

Les observations météorologiques que je vais résumer se composent, pour la plus grande partie, d'une série de cinq années faite à la Jamaïque, et que je continue assidûment. Le lieu d'observation se nomme Ross' View, dans la vallée de Mammee River, au bord même de la rivière. La direction générale de cette vallée est du Nord-Ouest au Sud-Est. On peut prendre pour les coordonnées de la station :

Latitude septentrionale.	18° 5′,
Longitude à l'Ouest de Greenwich . .	$76.44 = 5^h 6^m,9$,
Altitude.	290 mètres.

Cette position géographique est déduite de celle du Fort Charles, à l'entrée de la baie de Kingston, déterminée par les officiers de la marine britannique. La distance de ce Fort à ma station n'est en ligne droite que de 16 kilomètres, dans la direction du Nord-Est.

Le Soleil passe au zénit du lieu deux fois dans l'année, le 11 mai et le 1er août, restant au Nord pendant quatre-vingt-deux jours, ou les deux neuvièmes de l'année.

Du 1er janvier au 15 juin 1869, les observations avaient été commencées dans une station provisoire, à 4 kilomètres à l'Ouest-Sud-Ouest de la station définitive, et 140 mètres plus bas.

On a rendu les nombres comparables en faisant aux observations thermométriques de ces cinq mois et demi la correction constante — 1°,9.

Ce chiffre est le résultat d'un grand nombre de comparaisons entre les deux stations. Il en résulterait pour la diminution de la température avec la hauteur, 1° centigrade pour 74 mètres d'élévation. Cette loi de décroissance paraîtra rapide. Mais il faut faire attention que dans l'intervalle entre les deux stations, non seulement on s'élève, mais on se rapproche presque en droite ligne du massif des Blue Mountains, qui dépasse 2 200 mètres d'altitude, et qui est pour l'île comme un pôle de froid. En appliquant la même proportion à la température moyenne générale 22°,0 établie plus loin pour notre station définitive, il en résulterait pour la moyenne au niveau de la mer, par 18° de latitude Nord, sur la côte de Kingston...... 25°,9.

Nos observations sont faites régulièrement et sans interruption trois fois par jour : à six heures du matin, à midi, et à six heures du soir, temps moyen du lieu. Elles ne comprenaient pas d'abord la quantité d'eau tombée. C'est seulement au 1er janvier 1872 qu'on a établi l'udomètre, et qu'on a commencé à noter les crues et les troubles de la rivière. Le coefficient de sérénité a été inscrit depuis le 1er janvier 1870; la forme des nuages fait partie des données recueillies depuis l'origine. Nous n'avons pas cru cependant que cette dernière particularité présentât un intérêt suffisant pour la comprendre dans les résumés qui vont suivre.

§ 12. — TEMPÉRATURE A LA JAMAÏQUE.

Température moyenne par mois, en degrés centigrades.

MOIS.	6 heures du matin.						Midi.						6 heures du soir.					
	1869	1870	1871	1872	1873	MOY.	1869	1870	1871	1872	1873	MOY.	1869	1870	1871	1872	1873	MOY.
Janvier. .	17°,8	17°,1	17°,2	17°,7	17°,9	17°,5	24°,2	24°,6	24°,9	24°,2	24°,3	24°,5	23°,4	22°,8	22°,8	22°,7	22°,3	22°,8
Février. .	18,1	17,8	17,3	17,3	17,3	17,6	24,6	24,8	25,0	25,4	24,9	24,9	23,6	22,8	23,1	23,6	22,8	23,2
Mars . .	17,7	18,4	17,9	18,6	17,9	18,1	25,4	25,2	26,2	26,3	24,6	25,5	23,6	23,7	24,2	24,0	23,2	23,7
Avril . .	19,4	18,6	19,4	18,9	18,7	19,0	26,7	26,6	26,7	26,7	27,2	26,8	24,2	24,5	25,1	24,8	24,9	24,7
Mai . . .	20,3	20,4	20,6	20,0	19,8	20,2	27,1	26,4	27,1	27,1	27,4	27,0	24,4	24,8	25,3	25,3	25,3	25,0
Juin . .	21,5	20,4	21,0	20,7	20,2	20,8	29,5	28,4	29,4	29,0	28,7	29,0	27,2	26,1	27,3	26,8	26,7	26,8
Juillet . .	21,5	20,6	20,4	20,7	20,8	20,8	30,7	27,3	28,5	28,8	28,9	28,8	28,2	25,9	26,6	26,5	27,4	26,9
Août . .	20,9	20,8	20,7	20,2	20,2	20,6	28,2	28,0	28,7	27,9	27,6	28,1	26,5	25,9	26,8	25,7	25,7	26,1
Septembre	20,8	21,3	20,6	20,4	20,1	20,6	28,9	27,8	27,4	28,3	26,4	27,7	26,3	26,0	25,7	25,8	24,7	25,7
Octobre .	20,7	21,1	20,3	20,0	19,1	20,2	27,7	24,6	26,1	27,6	24,8	26,2	25,6	23,6	24,4	24,9	23,5	24,4
Novembre.	19,6	19,8	19,6	19,4	18,7	19,4	26,2	25,1	25,6	26,4	25,0	25,7	24,1	23,7	23,7	24,3	23,8	23,9
Décembre.	17,3	19,1	18,3	18,1	17,2	18,0	24,7	24,8	25,0	24,9	24,1	24,7	22,8	23,3	23,1	23,1	22,5	23,0
Année . .	19,6	19,6	19,4	19,3	19,0	19,4	27,0	26,1	26,7	26,9	26,2	26,6	25,0	24,4	24,8	24,8	24,4	24,7

A l'inspection du tableau qui précède, on est frappé de l'uniformité du climat. La marche annuelle est pourtant bien indiquée, avec un seul minimum, en janvier, et un seul maximum, en juin ou juillet. Si l'on prend pour moyenne générale celle des heures homonymes du matin et du soir, c'est-à-dire la moyenne de toutes les observations de six heures du matin et de six heures du soir, on trouve :

En 1869	22°,3
En 1870	22,0
En 1871	22,1
En 1872	22,0
En 1873	21,7
Moyenne générale. . . .	22°,0

Les plus grands écarts annuels sont seulement 0°,3 au-dessous ou au-dessus de cette moyenne. Avril est comme dans nos climats tempérés, le mois qui représente le mieux la température moyenne de l'année.

Les moyennes mensuelles ne varient, durant le cycle annuel, entre le mois le plus chaud et le mois le plus froid, que de 3°,3 à six heures du matin, 4°,5 à midi, et 4°,1 à six heures du soir.

Mais les maxima et les minima absolus présentent naturellement des écarts plus considérables. Nous en donnons ci-dessous le tableau :

Minima et maxima absolus de la température à la Jamaïque.

MINIMA ABSOLUS.		MAXIMA ABSOLUS.	
DATE.	MINIMA.	DATE.	MAXIMA.
1869. . Mars, 2	16°,9	1869 . Septembre, 24	31°,7
1870. . Janvier, 30	12,5	1870 . Août, 13	31,7
1871. . Janvier, 18	13,3	1871 . Juin, 17	32,6
1872. . Février, 24	13,8	1872 . Juin, 28	32,3
1873. . Décembre, 13	13,9	1873 . Juillet, 27	33,2

En cinq années, la plus grande course du thermomètre a été de 20°,7. Elle est seulement, année commune, de 17°,4. Les époques des maxima et des minima absolus sont assez variables pour montrer le peu d'importance du cycle annuel.

La régularité et la constance de ce climat, au point de vue de la température, sont attestées par une circonstance qui ne sera pas sans étonner les observateurs météorologistes du Nord. C'est que bien des fois, non seulement chaque année, mais pour ainsi dire chaque mois, les lectures thermométriques de deux jours consécutifs, à la même heure du jour, sont identiques au dixième de degré centigrade. Ayant remarqué ce fait, et afin d'éviter toute influence sur le jugement, j'ai toujours lu le thermomètre, à partir du milieu de 1869, avant d'ouvrir le livre où les observations sont inscrites. J'ai persisté invariablement dans cette habitude, et j'exige la même chose du jeune noir, qui de temps à autre me supplée. Or je trouve que dans la seule année 1873 les lectures relatives à deux dates consécutives, à la même heure du jour, étaient identiques au dixième de degré centigrade :

A 6 heures du matin	21 fois.
A midi	13 »
A 6 heures du soir	14 »
TOTAL	48 fois,

ce qui est environ 1 fois sur 23.

§ 13. — VENTS A LA JAMAÏQUE.

Les vents, comme on va le voir, sont aussi réguliers que la température. Ils sont notés d'après les nuages, toutes les fois qu'il y en a au ciel, et dans les autres cas, d'après la girouette. Ils soufflent plus directement de l'Est que dans la plupart des autres localités entre les tropiques. Ils ont même beaucoup plus d'Est dans ma station qu'au poste militaire de Newcastle, peu distant à mon Nord-Est, mais beaucoup plus élevé, où quelques observations sont faites sous la direction des officiers médicaux de l'armée. C'est sans doute à la direction de la vallée que j'habite, et peut-être à l'influence générale de l'arrête des Blue Mountains, dirigée du Levant au Couchant, qu'il faut attribuer cette prédominance des vents d'Est dans les localités inférieures.

Voici, du reste, les résultats :

Vents par mois (*les trois observations de chaque jour réunies*).

VENTS.	Janv.	Fév.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juill.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.	TOTAL.
1869.													
N.	2	4	8	2	0	3	0	6	1	3	5	8	42
NE.	8	22	27	14	7	2	11	19	20	9	9	16	164
E.	53	44	39	56	36	37	25	17	30	24	23	17	421
SE.	23	12	17	17	27	36	34	18	16	21	15	14	250
S.	7	2	0	0	2	9	18	28	17	29	34	24	170
SO.	0	0	0	0	0	2	5	3	5	7	3	8	33
O.	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	5	10
NO.	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	5
1870.													
N.	4	1	5	3	1	3	1	3	3	6	0	2	32
NE.	11	7	18	24	9	7	9	11	6	7	7	14	130
E.	40	40	42	52	53	64	65	71	66	65	78	59	695
SE.	13	11	14	7	13	13	10	6	10	4	1	13	115
S.	21	14	9	2	7	0	5	1	3	6	1	3	72
SO.	4	7	3	0	4	2	0	0	1	2	1	1	25
O.	0	1	1	0	3	1	0	0	0	2	1	0	9
NO.	0	3	1	2	3	0	3	1	1	1	1	1	17

VENTS.	Janv.	Fév.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juill.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.	TOTAL.
							1871.						
N.	4	3	6	1	3	1	3	5	2	1	1	2	32
NE.	16	12	13	13	13	12	12	14	12	17	11	9	154
E.	60	64	56	42	49	53	62	65	57	58	61	66	693
SE.	7	4	12	21	11	15	9	6	9	8	7	8	117
S.	2	0	2	2	2	3	0	0	1	2	2	2	18
SO.	2	0	2	2	5	0	3	0	2	3	0	1	20
O.	0	0	1	5	6	3	1	0	2	2	4	1	25
NO.	2	1	1	4	4	3	3	3	5	2	4	4	36
							1872.						
N.	2	7	7	1	1	1	0	1	0	2	5	3	30
NE.	14	14	11	27	22	12	15	19	9	10	22	16	191
E.	55	53	58	42	38	52	48	40	62	50	46	44	588
SE.	8	6	8	11	7	4	11	5	9	16	8	8	101
S.	0	0	2	1	10	12	7	11	6	8	3	12	72
SO.	3	2	2	3	12	6	10	8	1	3	5	9	64
O.	6	3	2	0	2	0	0	5	1	3	0	1	25
NO.	5	2	3	5	1	3	2	4	2	1	1	0	29
							1873.						
N.	0	1	2	0	0	1	3	4	3	8	2	2	26
NE.	13	18	17	19	10	16	10	15	8	11	13	26	176
E.	32	43	50	46	58	52	58	60	57	43	43	21	563
SE.	18	7	6	9	13	8	9	8	8	9	12	17	124
S.	10	8	9	11	6	9	7	1	4	2	2	7	76
SO.	19	3	7	4	6	4	2	2	4	3	4	12	70
O.	0	1	1	1	0	0	2	0	4	12	8	6	35
NO.	1	3	1	0	0	0	2	3	2	5	6	2	25

Nous avons formé de ces tableaux le résumé général qui suit :

VENTS.	TOTAUX.
N.	162
NE.	815
E.	2960
SE.	707
S.	408
SO.	212
O.	102
NO.	112

Il n'est pas impossible que, dans les années les plus sèches, les vents ne prennent un peu plus de Sud que de coutume. L'exemple de l'année 1869 viendrait à l'appui de cette opinion.

§ 14. — SÉRÉNITÉ A LA JAMAÏQUE.

Le ciel entièrement serein est indiqué par le chiffre 1, le ciel entièrement couvert par 0; les degrés intermédiaires, ou dixièmes, sont estimés à vue. On n'a commencé par observer la sérénité qu'en 1870. Les quatre années ne présentent pas, dans les moyennes mensuelles, de très-grandes discordances, bien qu'il y ait moins de régularité que pour la température et les vents.

Coefficient de sérénité.

MOIS.	6 heures du matin.					Midi.					6 heures du soir.				
	1870	1871	1872	1873	MOY.	1870	1871	1872	1873	MOY.	1870	1871	1872	1873	MOY.
Janvier	0,78	0,78	0,82	0,80	0,79	0,36	0,47	0,34	0,43	0,40	0,72	0,56	0,53	0,57	0,59
Février	0,70	0,89	0,97	0,84	0,85	0,37	0,36	0,46	0,41	0,40	0,30	0,56	0,54	0,68	0,52
Mars	0,82	0,92	0,76	0,76	0,81	0,37	0,38	0,32	0,35	0,36	0,50	0.56	0,64	0,59	0,57
Avril	0,91	0,82	0,83	0,82	0,84	0,34	0,26	0,34	0,36	0,32	0,47	0,45	0,53	0,64	0,53
Mai	0,71	0,67	0,83	0,88	0,77	0,24	0,18	0,27	0,34	0,26	0,48	0,29	0,54	0,44	0,44
Juin	1,00	0,78	0,83	0,94	0,89	0 23	0,37	0,42	0,39	0,33	0,67	0,56	0,53	0,65	0,60
Juillet	0,79	0,86	0,82	0,86	0,83	0,28	0,31	0,36	0,37	0,33	0,58	0,44	0,63	0,60	0,57
Août	0,92	0,82	0,82	0,85	0,85	0,30	0,41	0,26	0,27	0,31	0,51	0,63	0,58	0,39	0,53
Septembre	0,87	0,73	0,85	0,74	0,80	0,27	0,30	0,35	0,28	0,30	0,46	0,52	0,60	0,55	0,54
Octobre	0,23	0,58	0,92	0,69	0,61	0,14	0,26	0,40	0,46	0,31	0,13	0,49	0,73	0,53	0,47
Novembre	0,55	0,60	0,83	0,70	0,67	0,28	0,44	0,42	0,48	0,40	0,33	0,52	0,60	0,55	0,50
Décembre	0,67	0,78	0,86	0,79	0,77	0,43	0,41	0,46	0,47	0,44	0,55	0,60	0,63	0,62	0,60
ANNÉE	0,74	0,77	0,84	0,81	0,79	0,30	0,35	0,37	0,38	0,35	0,48	0,51	0,59	0,57	0,54

Si nous considérons le cours de la journée, la sérénité est au maximum à 6 heures du matin; ce fait est une conséquence de la pureté du ciel durant les nuits. Mais pendant la matinée, les nuages se forment, pour augmenter bientôt graduellement. On les voit souvent commencer sur les parties les plus hautes de l'île, peu après le lever du Soleil. Ils s'étendent généralement de l'Est à l'Ouest. A midi, le Soleil qui a brillé jusque-là dans ma vallée, est bien souvent obscurci subitement, immédiatement avant l'observation méridienne. C'est dans l'après-midi, comme on le verra plus loin, que tombent la plupart des pluies. Le soir le temps se rétablit, et le ciel se découvre de nouveau, pour nous donner des nuits presque toutes sereines.

Par rapport au cycle annuel le résumé ci-dessous montre que la sérénité a deux maxima, l'un en juin, l'autre en décembre, avec des minima dans les époques intermédiaires.

Moyenne de la sérénité, par les trois observations de chaque jour réunies, et pour les quatre années.

MOIS.	SÉRÉNITÉ.
Janvier	0,59
Février	0,59
Mars	0,58
Avril	0,56
Mai.	0,49
Juin	0,61
Juillet.	0,58
Août	0,56
Septembre	0,55
Octobre	0,47
Novembre	0,42
Décembre	0,60
Année	0,56

J'ai voulu juger de l'influence de la sérénité sur le thermomètre. J'ai pris à cet effet les observations de midi de l'année 1871, et je les ai groupées, comme on va le voir, d'après le coefficient de sérénité.

Température à midi (1871).

SIX MOIS D'HIVER. (Janvier à mars et octobre à décembre.)			SIX MOIS D'ÉTÉ. (Avril à septembre.)		
SÉRÉNITÉ.	TEMPÉRATURE.	NOMBRE d'observations.	SÉRÉNITÉ.	TEMPÉRATURE.	NOMBRE d'observations.
0,0	23°,9	47	0,0	26°,3	62
0,1 et 0,2	25,1	21	0,1 et 0,2	27,9	28
0,3 et 0,4	25,8	36	0,3 et 0,4	29,2	36
0,5 et 0,6	26,1	28	0,5 et 0,6	28,4	25
0,7 et 0,8	26,3	39	0,7 et 0,8	29,2	25
0,9 et 1;0	26,5	11	0,9 et 1,0	30,8	7

Il est visible que le thermomètre est d'autant plus haut que le ciel est plus découvert, et cet effet est plus marqué en été qu'en hiver, quand le Soleil a plus de puissance. Toutefois la différence entre les extrêmes ne répond pas à celle qu'on serait tenté de conclure de l'impression produite sur l'économie animale. Elle est seulement de 3°,5 entre le ciel entièrement couvert et le ciel entièrement serein, par la moyenne générale de l'année.

Suivant le dernier tableau, l'influence des nuages ne commence à devenir vraiment sensible qu'après que le ciel est couvert à un demi ou même à deux tiers. Mais cette circonstance n'offre rien d'extraordinaire. En effet, en notant la proportion d'espace découvert que nous voyons au ciel, nous considérons les nuages d'un point placé au-dessous de la couche qu'ils occupent, et voisin de cette couche. Les seules trouées à travers lesquelles nous pouvons distinguer l'azur ne sont presque toujours que celles situées immédiatement au-dessus de notre tête. Plus bas, à distance du zénit, les nuages se projettent les uns sur les autres. Les rayons du Soleil à midi, sous les tropiques, pénètrent partout au contraire à peu près normalement dans les intervalles de la couche nuageuse. La proportion du sol éclairé au sol dans l'ombre est donc toujours plus grande que celle de l'espace bleu à l'espace nuageux du ciel (observé d'un point donné). Les deux échelles sont fort différentes. Ces remarques expliquent, d'une manière qui nous paraît très-naturelle, pourquoi le thermomètre ne baisse pas aussi vite que l'aire nuageuse apparente s'étend à notre ciel.

§ 15. — PLUIES A LA JAMAÏQUE.

A la Jamaïque, les pluies sont plus variables encore que les nuages. Il y a des années sèches et des années pluvieuses. Ces différences portent toutefois principalement sur la quantité d'eau tombée, tandis que le nombre de jours de pluie n'est pas sujet à de très-grandes variations. Ainsi ce nombre est presque le même en 1872 et en 1873, bien que la quantité d'eau recueillie ait varié dans le rapport de 3 à 5.

Nombre de jours de pluie.

MOIS.	1869	1870	1871	1872	1873	TOTAL.
Janvier	13	7	9	14	17	60
Février	7	13	10	10	7	47
Mars	9	12	11	15	17	64
Avril	7	12	12	11	5	47
Mai.	14	12	14	16	15	71
Juin	5	10	8	7	11	41
Juillet	10	14	16	13	10	63
Août	22	15	14	19	19	89
Septembre.	17	16	15	17	21	86
Octobre	16	26	23	18	25	108
Novembre	8	17	16	16	12	69
Décembre	6	8	15	19	14	62
Année	134	162	163	175	173	162

Il y a deux maxima, en mai et octobre, qui correspondent aux minima de la sérénité.

En présentant la quantité d'eau tombée nous distinguons entre les pluies du jour et celles de la nuit. On verra ainsi combien ces dernières sont relativement faibles, fait général d'ailleurs entre les tropiques. En outre, la grande majorité des pluies du jour tombent dans l'après-midi. Nous n'avons pas besoin de dire qu'il n'y a jamais de neige, et jusqu'ici je n'ai pas vu de grêle, bien que les orages ne soient pas sans être fréquents.

L'eau recueillie dans l'udomètre est mesurée tous les jours à 6 heures du matin et à 6 heures du soir.

Quantité de pluie tombée.

(En millimètres.)

MOIS.	1872.					1873.				
	EAU TOMBÉE,			RIVIÈRE.		EAU TOMBÉE,			RIVIÈRE.	
	de jour.	de nuit.	TOTAL.	Crues.	Troubles.	de jour.	de nuit.	TOTAL.	Crues.	Troubles.
Janvier. .	61,3	0,0	61,3	»	»	173,3	33,0	206,3	7	5
Février. .	40,5	21,7	62,2	»	»	13,9	0,4	14,3	»	»
Mars. . .	55,4	3,2	58,6	»	»	106,6	14,9	121,5	2	4
Avril. . .	67,6	0,0	67,6	1	2	5,2	0,6	5,8	»	»
Mai. . . .	53,3	5,1	58,4	1	5	102,7	0,0	102,7	3	4
Juin . . .	42,6	10,8	53,4	»	1	44,7	0,0	44,7	»	4
Juillet . .	92,7	0,0	92,7	1	5	24,9	2,0	26,9	»	3
Août. . .	128,1	8,8	136,9	1	8	195,6	67,2	262,8	5	5
Septemb.	121,7	9,3	131,0	2	10	449,7	39,4	489,1	6 *	6
Octobre .	151,5	0,0	151,5	3 *	8	185,4	106,4	291,8	3	4
Novembre	37,6	31,7	69,3	»	3	71,5	17,9	89,4	1	1
Décembre	92,4	0,7	93,1	»	5	57,7	7,6	65,3	1	3
Année . .	944,7	91,3	1036,0	9	47	1431,2	289,4	1720,6	28	39

* Le 19 octobre, crue très-forte.

* Le 30 septembre, crue très-forte.

La quantité d'eau tombée dans les heures de nuit ne forme, en 1872, que... 0,09 du total, et en 1873... 0,17.

Les mois éminemment pluvieux sont août, septembre et octobre, pendant que la plus grande sécheresse arrive au printemps. Mais il n'y a rien dans le climat de la Jamaïque qui puisse faire distinguer les différentes parties de l'année en une suite de saisons tour à tour humides et sèches. Sous le rapport des pluies c'est un climat variable et peu régulier.

Il y a dans la manière dont les pluies tombent, au moins dans la vallée que j'habite, quelque chose qui mérite d'être signalé. Ces pluies se déclarent en général par vent Ouest, ce qui marque une inversion du courant régulier. On les voit souvent tomber à verse dès le début, avec un bruit sur le feuillage qui les annonce d'une certaine distance. Après un temps plus ou moins long il arrive, dans un grand nombre de cas, que cette ondée copieuse s'arrête subitement; les gouttes finissent de tomber et le bruit cesse. Il y a en ce moment un calme complet, qui contraste avec la scène animée interrompue si brusquement. Mais ce n'est qu'un instant de suspens. Après un intervalle qui varie, dans les observations que j'ai recueillies, de 6 à 40 secondes, la pluie reprend tout d'un coup avec la même violence, cette fois par un vent d'Est. Il arrive qu'il y ait ainsi plusieurs interruptions dans une même pluie, chaque fois avec virement du vent. Le plus souvent cependant il n'y a qu'un seul repos, et la pluie, après être tombée quelque temps de l'Est, diminue graduellement et cesse.

Il nous semble qu'on pourrait comparer cette intermittence au passage d'un vaisseau par la zone des calmes. Il est extrêmement vraisemblable qu'il s'agit dans les deux cas de causes analogues. L'intermittence dans les averses de la Jamaïque marque sans doute l'instant où la bande calme, entre les deux courants en lutte, passe par le point d'observation.

§ 16. — TONNERRE ET PHÉNOMÈNES DIVERS A LA JAMAÏQUE.

Les orages suivent jusqu'à un certain point l'allure générale des pluies. Mais ils conservent, sous ce parallèle de 18°, un caractère remarquablement boréal. Ainsi ils sont très-rares dans les mois d'hiver, bien que la température ne soit alors que de quelques degrés plus basse qu'en été. Dans cette dernière saison, au contraire, ils se multiplient.

Dans leurs caractères extérieurs ils n'offrent rien de particulier.

Nombre de jours de tonnerre.

MOIS.	1869	1870	1871	1872	1873	TOTAL.
Janvier	0	1	0	0	3	4
Février	2	1	0	0	0	3
Mars	0	0	1	0	1	2
Avril	1	.1	0	0	0	2
Mai	5	1	4	10	8	28
Juin	5	9	6	9	2	31
Juillet	4	14	10	9	5	42
Août	3	12	9	11	15	50
Septembre	6	8	12	17	16	59
Octobre	1	0	2	10	10	23
Novembre	3	2	1	2	1	9
Décembre	0	2	5	7	2	16
ANNÉE	30	51	50	75	63	54

Les halos lunaires sont beaucoup moins rares à la Jamaïque que ne le supposeraient ceux qui attribuent à ce phénomène un caractère polaire. Souvent, dans les nuits où les nuages du genre cirrhus se montrent au ciel, on peut observer sur ces nuages légers un halo ou partie de halo autour de la Lune. J'ai noté également assez fréquemment ce phénomène au Texas et dans le Nord du Mexique.

Il y a eu, à la Jamaïque, pendant la durée de mes observations, une aurore boréale, le 4 février 1872. C'était une rougeur assez forte et assez haute, qui dura depuis 6 heures et demie jusqu'à 9 heures du soir. J'avais vu au Texas la belle aurore de la nuit du 1 au 2 septembre 1859, qui s'est montrée également en Europe, et qui a été l'occasion d'une publication importante de De la Rive. Les détails de mon observation du Texas n'auraient plus aujourd'hui d'intérêt particulier.

§ 17. — TREMBLEMENTS DE TERRE A LA JAMAÏQUE.

Les tremblements de terre ont été si bien et si complétement décrits, que je ne trouve dans ces phénomènes aucune particularité qui soit digne d'une mention nouvelle. Ils n'ont pas produit sur moi cet effet d'étonnement, attribué au renversement des notions habituelles reçues par les sens, dont parle un illustre voyageur.

Le premier tremblement de terre que j'aie ressenti, quelques jours après mon arrivée dans l'île, le 8 juin 1868, a été aussi de beaucoup le plus notable. La durée du bruit est ce qui m'a le plus vivement frappé, en ce qu'elle excède très-sensiblement la durée de la trépidation. Elle devance celle-ci, et elle se prolonge après elle.

Voici la liste des tremblements de terre que j'ai ressentis pendant mes cinq années régulières d'observations. J'y joins l'âge de la Lune à l'époque du phénomène, et l'angle horaire ou distance de cet astre au méridien supérieur du lieu au moment de la secousse. Le signe + désigne le côté Ouest du méridien, et le signe — le côté Est.

NUMÉRO.	DATE.	HEURE. (Temps moyen du lieu.)	DURÉE en secondes.	DIRECTION	AGE DE LA LUNE.	ANGLE HORAIRE de la Lune.	DESCRIPTION.
	1869						Aucun tremblement de terre.
1	1870, Févr. 3	7h m.	»	»	4j	− 8h	Assez faible; bruit bien sensible.
2	1871, Août, 20	9.23m s.	»	»	5	+ 6	Faible; bruit perceptible.
3	Oct. 27	9.10 s.	»	»	14	− 2	Faible.
4	Nov. 5	8.31 s.	»	»	23	−10	Faible; bruit faible.
5	Déc. 3	9.34 m.	»	»	22	+ 6	Bien sensible; bruit.
6	» 9	4.58 s.	12 à 15	»	28	+ 7	Faible. La durée indiquée est celle du bruit.
7	1872, Janv. 20	9.40 s.	»	»	11	+ 1	Faible; bruit faible.
8	Août, 1	7.37 s.	»	»	27	− 3	Faible; bruit très-court.
9	1873, Mars, 3	8.31 m.	12	N à S	5	− 7	Faible, mais bruit assez durable.
10	Juin, 29	11.46 s.	6	NE à SO	6	+ 8	Très-sensible, mais peu de bruit. Au milieu de la trépidation on ressent un soulèvement bien marqué, qui ressemble à certains égards à l'exhaussement d'un vaisseau sur le dos d'une vague, et qui fait craquer faiblement la charpente de la maison. Je représente ainsi le mouvement de trépidation :  Le même jour, tremblement de terre de Belluno et des provinces Vénitiennes.
11	Août, 20	4.4 s.	4	NO à SE	28	+ 6	Faible; peu de bruit.
12	Sept. 26	1.39 m.	8	NE à SO	5	+10	Faible; bruit cependant.

§ 18. — PLUIE PAR CIEL SEREIN.

Les annales de la météorologie contiennent un certain nombre d'exemples de pluies, généralement composées d'assez grosses gouttes, qui tombent par un ciel entièrement serein. Par les temps les plus chauds de l'été, dit Descartes, de larges gouttes de pluie tombent parfois avant que les nuages paraissent au ciel [1]. Tel est l'aspect le plus commun de ce phénomène; dans la plupart des cas, en effet, les nuages ne tardent pas à se former, et la pluie prend tous les caractères d'une pluie ordinaire. La plus longue pluie par un ciel bleu dont j'ai trouvé la mention, dans des recherches que je ne présente pas cependant comme complètes [2], est une pluie assez forte arrivée à Philadelphie le 23 avril 1800, entre 9 et 10 heures du matin, laquelle dura au moins vingt minutes [3].

J'ai eu l'occasion d'observer, à la Jamaïque, une pluie par ciel serein, qui a duré treize heures consécutives, depuis le 7 mars 1873 à 4 heures du soir, jusqu'au lendemain à 5 heures du matin. J'étais alors dans un lieu nommé Abbey Green, par environ 1150 mètres d'altitude, au pied Sud-Ouest du Blue Mountain Peak. J'ai passé cette nuit dans la plantation de M. Henry Coppard, juge de paix, qui comme moi, et comme mes compagnons de voyage et les habitants du hameau, a été témoin du phénomène que je vais relater.

La pluie était d'abord une pluie très-fine, qui se formait selon toute apparence autour de nous; c'est-à-dire que nous étions si près de la surface supérieure du nuage que le bleu du ciel n'était pas sensiblement altéré. Le Soleil brillait de tout son éclat à travers cette pluie, et l'arc-en-ciel se voyait au-dessous de nous, à travers les vallées, n'ayant que la moitié inférieure, comme si l'eau vésiculaire eût fait défaut aux régions supérieures sereines. Un nuage, ou si l'on préfère un brouillard, enveloppait tous nos environs, au-dessous de nous. Mais il était seulement local, car par delà ce nuage qui couvrait l'île à nos pieds, l'on apercevait la côte méridionale (à 18 kilomètres) brillamment éclairée, et une grande étendue de mer où se reflétait un ciel pur. Cette vue

[1] Descartes, *Meteora;* cap. VI, sect. 16.

[2] Ce n'est pas, on le comprend, dans un pays à peu près sans bibliothèques, surtout sans bibliothèques scientifiques, comme la Jamaïque, qu'on peut exécuter de pareilles recherches.

[3] Rapportée dans le *New-York Spectator* du 3 mai 1800, cité dans *Silliman's American Journal of Sciences;* 1st series, vol. XXXVI, p. 178.

de la mer dans le lointain, par-dessus les nuages sur lesquels nous étions pour ainsi dire posés, et au milieu de cette pluie qui nous mouillait, formait une scène d'un caractère étrange, et d'une intéressante nouveauté.

Bien que la pluie ne cessât point, le Soleil se coucha avec son éclat ordinaire; je pus suivre parfaitement son disque lorsqu'il s'enfonça derrière les montagnes où il disparut. Le vent s'éleva ensuite, et souffla bientôt par rafales, dans lesquelles la pluie nous fouettait au visage. Les gouttes étaient maintenant un peu moins fines, et la quantité d'eau paraissait plus abondante dans l'unité de temps. A sept heures du soir je disposai un vase pour la mesurer; j'y trouvai le lendemain matin 22 millimètres d'eau (qui ne font peut-être pas beaucoup plus des trois quarts de la quantité tombée), recueillis entièrement par ciel serein.

En effet, quand la nuit fut venue, nous pûmes distinguer les étoiles non-seulement jusqu'à la 5^e grandeur, mais dans la plupart des cas jusqu'à la 6^e. Le spectacle de la Croix du Sud, dominant l'horizon de la mer, pendant que la pluie battait sur les vitres comme dans nos climats du Nord, avait quelque chose d'extraordinaire. Les étoiles ne faiblirent pas un seul instant de la nuit, et la pluie ne s'arrêta point.

Ce fut seulement vers cinq heures du matin qu'elle cessa presque subitement; et le ciel quelques heures plus tard se chargea de nuages, peut-être les mêmes nuages qui s'élevaient.

A ma connaissance cet exemple est unique jusqu'ici, soit pour la durée extraordinaire du phénomène, soit pour le caractère que lui assigne la finesse de la pluie. C'est ce qui m'a engagé à relater minutieusement les circonstances dans lesquelles cette observation a eu lieu.

§ 19. — PLUIE PÉRIODIQUE.

On a souvent mentionné la régularité avec laquelle la saison pluvieuse se déclare, dans certaines parties de la zone des tropiques. Al. de Humboldt a consacré un article à « l'influence de la déclinaison du Soleil sur le commencement des pluies équatoriales [1]. » Mais je ne crois pas qu'on ait encore signalé l'existence de pluies isolées périodiques. Il y a pourtant, dans le bassin de la mer Caraïbe et du golfe du Mexique, un exemple au moins d'une pluie abondante, qui revient sinon précisément à jour fixe, au moins avec une périodicité qu'on pourrait comparer à celle de certains essaims d'étoiles filantes. Cette pluie persiste pendant plusieurs heures, ou même une grande partie de la journée, et tranche assez sur le caractère du mois ou de la saison entière où elle se produit, pour se faire remarquer des observateurs attentifs.

La périodicité de cette chute de pluie m'avait frappé d'abord pendant mon séjour dans le Texas occidental. Le climat de cette région est d'une grande sécheresse, et une pluie torrentielle, qui dure une partie de la journée, y attire vivement l'attention. Or je fus surpris de trouver qu'une de ces pluies, souvent l'averse la plus copieuse de toute l'année, se répétait à une époque fixe de l'été. Je ne recueillais pas alors l'eau tombée, les déplacements auxquels j'étais sujet ne m'ayant pas permis d'instituer des observations météorologiques continues. Mais mon journal suffit pour constater le fait. J'en reproduis ici les extraits qui se rattachent à ce phénomène. Pendant plusieurs mois, avant et après les dates citées, il n'est fait mention que de pluies légères ou d'ondées peu durables, qui n'approchaient pas de la pluie dont je vais parler.

« 1 septembre 1858. — Pluie abondante. »

« 4 septembre 1859. — Pluie torrentielle pendant une partie de la journée, continuant pendant la nuit du 4 au 5. Cette pluie rappelle celle qui eut lieu vers la même époque l'année passée, mais elle est plus copieuse encore. S'agirait-il d'un phénomène périodique marquant le déclin de l'été? »

« 26 août 1860. — Une pluie très-forte prend dans l'après-midi, et dure pendant la nuit du 26 au 27. »

[1] *Annales de Chimie et de Physique*, publiées par Gay-Lussac et Arago; 1818, t. VIII, p. 179.

« 26 août 1861. — Orage à cinq heures du matin; pluie copieuse une partie de la journée. »

En 1862 j'étais au Mexique, et je trouve dans mon journal cette mention, datée de Matamoros :

« 24 août 1862. — Pluie abondante, à peine interrompue par intervalles, pendant toute la journée. Cette pluie se prolonge pendant la journée du 25. »

Dans tout cet intervalle il n'existe d'autres mentions de pluies torrentielles et prolongées, comparables à celles que je viens de citer, qu'aux dates :

« 25 avril 1860 et nuit suivante, pluie froide très-forte, par un *norther.* »

« 23 avril 1861. — Grande pluie qui continue pendant la nuit, avec *norther.* »

Or il est assez piquant de remarquer que ces deux dates sont encore presque identiques entre elles.

Mes observations du Texas pourront d'ailleurs être contrôlées et complétées, par les météorologistes du « Service des Signaux » aux États-Unis, à l'aide du registre d'observations qu'on tient à l'Hôpital militaire de San Antonio, mais qui malheureusement n'est pas publié. Ajoutons pour le moment que dans les observations du professeur C. G. Forshey, faites dans la vallée du Colorado près de Lagrange, on lit ce qui suit [1] :

« 7 septembre 1857. — Première pluie abondante de l'année : deux pouces (51 millimètres). »

En 1865, 66 et 67 j'habitais New Orleans, où je notai que les derniers jours d'août sont marqués par une très-grosse pluie qui dure plusieurs heures. Toutefois comme il y a, dans la Louisiane, d'autres pluies fortes dans la même saison, cette coïncidence n'est pas suffisante pour démontrer l'extension du phénomène dont nous venons d'entrevoir la périodicité. Mais lorsque j'examinai dernièrement le relevé de mes observations de l'udomètre à la Jamaïque, le retour de cette même pluie périodique, marqué par la quantité d'eau tombée, me frappa vivement.

[1] *Texas Almanac;* 1861, p. 196.

Ainsi je trouve pour l'eau recueillie à six heures du soir et tombée depuis six heures du matin :

Le 23 août 1872 . . . . 22,1 millimètres.
Le 24 août 1873 . . . . 41,2 —
Le 26 août 1874 . . . . 26,5 —

Pour juger à quel point le phénomène est tranché, je donne ci-dessous la moyenne de l'eau recueillie en douze heures, pendant le mois d'août, dans mon udomètre.

ANNÉE.	MOYENNE de l'eau recueillie en 12 heures pendant le mois d'août.	MOYENNE de la quantité d'eau tombée en 12 heures pendant lesquelles il a plu.	EAU TOMBÉE dans les 12 heures citées.	REMARQUES sur la date citée.
	Millim.	Millim.	Millim.	
1872	2,2	6,2	22,1	
1873	4,4	13,1	41,2	La rivière a ce jour-là la plus forte crue du mois, et presque la plus forte de toute l'année.
1874	5,2	13,3	26,5	Première crue très-forte de l'année.

Avant 1872 je ne recueillais pas l'eau de la pluie. Mais mon registre météorologique porte, pour les années antérieures, les mentions suivantes, auxquelles on trouvera certainement quelque intérêt :

« 25 août 1871. — Pluie très-forte dans la journée. »
« 25 août 1870. — Pluie très-forte, accompagnée d'orage. »
« 22 août 1869. — Pluie toute la journée. » [Les journées entièrement pluvieuses sont extrêmement rares à la Jamaïque].

Enfin j'ajouterai que les annales de l'île transmettent le souvenir de trois ouragans terribles, qui ont causé de grands malheurs. Or tous les trois tombent vers cette même époque du mois d'août, savoir :

DATE		ÉCART DE LA DATE par rapport à la moyenne.
	20 août 1722	− 2j
	17 août 1775	− 5
	28 août 1785	+ 6
DATE MOY.	22 août.	

L'église protestante de la Jamaïque célèbre tous les ans, par des prières publiques, l'anniversaire des deux derniers de ces désastres.

En se bornant à nos seules observations, on trouverait pour la date du phénomène :

[A]. *Dans le Texas occidental et dans le Nord du Mexique.*		[B]. *A la Jamaïque.*	
ANNÉE.	ÉCART DE LA DATE par rapport à la moyenne.	ANNÉE.	ÉCART DE LA DATE par rapport à la moyenne.
1 sept. 1858.	+ 3j	22 août 1869.	− 2j
4 sept. 1859.	+ 6	25 août 1870.	+ 1
26 août 1860.	− 3	25 août 1871.	+ 1
26 août 1861.	− 3	23 août 1872.	− 1
24 août 1862.	− 5	24 août 1873.	0
		26 août 1874.	+ 2
MOY. 29 août, par 5 années d'observ.		MOY. 24 août, par 6 années d'observ.	

Le sens de la différence dans les dates moyennes, entre les séries [A] et [B], s'accorderait avec l'idée que cette grande pluie se produit à la suite d'un « vent d'aspiration. »

On conclura, je pense, de ce qui précède, qu'il y a dans le phénomène cité une périodicité réelle. Il y a un moment, après la plus chaude partie de l'été, auquel un refroidissement subit et très-général se produit, dans l'atmosphère qui repose sur le bassin de la mer Caraïbe et du Golfe du Mexique; et ce refroidissement détermine la chute d'une pluie torrentielle, une sorte de petit déluge, presque à jour fixe. Il sera intéressant de rechercher si ce fait météorologique se manifeste au delà de la région indiquée, et dans l'affirmative de déterminer jusqu'où il s'étend.

Ce qui permet au phénomène d'une pluie périodique d'être si bien caractérisé, si visible, dans le Texas occidental, c'est la rareté des chutes d'eau atmosphériques dans cette contrée. Dès la seconde fois que j'avais été témoin du phénomène, l'idée de sa périodicité m'avait frappé, comme une possibilité. Il n'y avait, en effet, rien de comparable pendant toute l'année. La pluie notée le 7 septembre 1857 par M. Forshey était, dit cet observateur, « la première pluie de quelque abondance (*the first good rain*) de toute l'année. » Dans ce climat l'averse périodique a donc des caractères tellement tranchés qu'il est impossible de la confondre avec d'autres pluies.

Ainsi prévenu, nous avons pu ensuite démêler ce phénomène à la Jamaïque, où, sans la circonstance du Texas, il aurait peut-être passé longtemps inaperçu. Sans dégager cette grande pluie d'une manière aussi nette, nous avons pu cependant la reconnaître, par l'importance qu'elle prend parmi les autres pluies. Cette circonstance est de nature à nous encourager dans cette voie de recherche. Serait-ce maintenant sans espoir de succès qu'on examinerait, par exemple, s'il n'existe rien de semblable dans les zones tempérées? Dans ces zones, les pluies sont, il est vrai, beaucoup plus fréquentes, et par conséquent moins distinctes les unes des autres; mais la quantité d'eau tombée en vingt-quatre heures révélerait peut-être certains cas anologues de périodicité annuelle.

§ 20. — PHÉNOMÈNES PÉRIODIQUES NATURELS, AU TEXAS.

Quelques observations des phénomènes périodiques naturels, au Texas, sur le Colorado moyen [en latitude 30° Nord] ont été publiées par le professeur C. G. Forshey. Celles qui suivent, faites entre le Nueces et le Colorado, sont simplement destinées à donner une idée générale des phénomènes les plus frappants, ou les plus intéressants pour les colons. Les journées de temps chaud n'y sont pas marquées par égard seulement au thermomètre, mais surtout par l'impression produite sur l'économie animale.

1859.	1860.	1861.
	Janvier. 25. — Le crapaud siffle.	Janvier, 7. — Journée chaude. — nuit du 24 au 25. — Neige [mentionnée § 21].
Février, 17. — Première journée de temps chaud.	Février, 15. — Première journée de temps chaud [continu ou presque continu].	Février, 20. — Première journée de temps chaud. — 21. — Quelques espèces de fourmis reprennent le travail. — 23. — Les oies (*Anser canadensis*) repassent du Sud vers le Nord [1].
Mars, 1. — Pleine feuillaison des buissons [2].	Mars, 20. — Pleine feuillaison des buissons de mezquitte. (*Prosopis glandulosa*).	Mars, 23. — Feuillaison générale du mezquitte.
Avril, 14 à 17. — Grande migration des oiseaux. — 27. — Apparition des mouches phosphorescentes (*Elater*).	Avril, 13. — Apparition des mouches phosphorescentes.	Avril, 6. — Les mouches phosphorescentes se montrent.
	Juin, 3. — Première pastèque (*citrulla vulgaris* = *Cucurbita citrullus*) au marché de San Antonio. — 5. — Floraison du mezquitte.	

[1] En 1862 elles ont repassé dès le 18 janvier, volant du Sud-Est au Nord-Ouest.

[2] Il s'agit des buissons de *Prosopis glandulosa*, qui par leur profusion donnent l'aspect à la contrée.

1859.	1860.	1861.
Novembre, 15 à 20.— Défeuillaison générale.		Novembre, 21. — Défeuillaison du mezquitte terminée.
Décembre, 1. - Dernière journée de temps chaud [continu].	Décembre, 1 à 4. — Défeuillaison générale du mezquitte.	Décembre 19. — Dernière journée de temps chaud.
— 2. — Fourmis cessent le travail.	— 9. — Journée chaude [sporadique].	
	— 18. — Journée chaude.	
	— 29. — Neige [mentionnée plus loin].	

Ces indications, bien que très-générales, suffisent cependant pour donner une idée du climat de cette importante région. Ainsi l'on voit dès l'abord qu'il ne s'agit pas encore d'un été perpétuel, mais de deux saisons — un été très-long qui dure de la mi-février à la première moitié de décembre, et un hiver de deux mois, pendant lequel de grandes variations se produisent. Durant cet hiver, il y a des journées assez chaudes pour que l'artisan travaille en plein air sans habit, et il y a des coups de Nord qui forment de la glace, mais qui s'effacent du reste en quelques jours. On entrevoit pour ainsi dire l'hiver du Nord, dont on ne ressent que quelques attaques violentes, toutes passagères.

La verdure cependant n'est pas perpétuelle. Les espèces au feuillage persistant, comme le chêne vert (*Quercus virens*), ne sont pas très-nombreuses ni très-répandues, au moins au Nord du Nueces. L'algarobe mezquitte est au contraire aussi commun que la bruyère dans nos landes. Il forme la végétation buissonneuse qui entrecoupe en tous sens les immenses prairies vierges. Or il perd ses feuilles au 15 novembre ou quelques jours plus tard, et ne les reprend que dans la première quinzaine de mars.

Les oiseaux émigrants sont loin de s'arrêter tous dans le pays; on en voit un grand nombre, au contraire, continuer leur route, en automne, vers le Sud, pour repasser au printemps, à peu près comme ils le font dans les zones tempérées. Et c'est aussi très-sensiblement à la même date de l'année, fait qu'explique la rapidité avec laquelle se font les voyages des oiseaux.

Les reptiles sont silencieux en hiver [1]; les élatères n'ont qu'une saison, qui commence à la mi-avril. Et les fourmis suspendent leurs travaux comme dans les latitudes septentrionales, mais c'est seulement du commencement de décembre jusqu'à la mi-février.

Ces faits suffisent pour peindre clairement à l'esprit la cessation du travail naturel. On n'est pas encore dans la zone où l'activité se continue sans interruption, et l'on ne doit pas compter par conséquent de cultiver indistinctement toutes les plantes tropicales. Les seules, en effet, qui réussissent sont les espèces annuelles, ou celles qui donnent leur produit à courte échéance; et celles-là même ne peuvent se comparer à ce qu'on les voit sous les tropiques. Le jus de la canne, par exemple, ne contient qu'une proportion réduite de sucre, et le fruit du bananier manque de saveur.

§ 21. — NORTHERS, GIVRE, NEIGE, AU TEXAS.

Le trait le plus spécial du climat dans la région du golfe du Mexique, depuis la Floride et la Géorgie jusqu'aux États mexicains de Tamaulipas et de Nuevo Leon, et même au delà, ce sont les *Northers*, en espagnol *Norteros*. Ainsi que leur nom l'indique, ce sont des vents du Nord, d'ailleurs passagers, qui amènent un refroidissement subit et considérable de l'air, comme si l'on était transporté pour deux ou trois jours dans la zone sub-arctique. Cette variation soudaine produit un effet d'autant plus sensible que les habitants, sachant combien elle sera passagère, ne sont pas préparés à y résister. Ainsi, dans les campagnes du Nord du Mexique, il est rare que les fenêtres des maisons soient garnies de vitres, et il n'y a point de cheminée dans les chambres; en

[1] Sauf toutefois quelques grenouilles.

sorte que quand le *Nortero* se déclare, il faut tenir les volets fermés, et s'envelopper dans la couverture de laine que le Mexicain porte alors sur lui comme un manteau.

L'existence et l'importance des *Northers* n'avaient pas échappé à Humboldt, bien que cet illustre voyageur ne soit pas venu dans le Nord du Mexique. Il décrit sous le nom également espagnol de *Nortes* ces irruptions subites du courant polaire [1]. La soudaineté avec laquelle ces attaques se produisent est faite pour étonner. Par une douce température, parfois supérieure à 20 ou même 25°, on aperçoit tout d'un coup les arbres s'agiter à distance, dans la direction du Nord-Ouest. On suit au mouvement du feuillage le progrès rapide de la rafale. En quelques instants, les premières bouffées vous atteignent, produisant un sentiment de fraîcheur. Mais bientôt la poussière se lève en abondance, les bouffées sont extrêmement puissantes et serrées, et la température baisse avec une rapidité extraordinaire. Ainsi le 1er décembre 1859, à quatre heures de l'après-midi, le thermomètre marquait 25°,5, lorsqu'un *Norther* se déclara avec une extrême violence; la température tomba rapidement; dès le milieu de la nuit on avait atteint le point de congélation, et au lever du Soleil le thermomètre marquait —3°,5, descendant de vingt-neuf degrés en quatorze heures. Un second *Norther* ayant suivi celui-ci à peu de jours de distance, le froid fut cette fois de —9° (le 7 décembre 1859), le point le plus bas qu'on ait jamais observé dans la zone d'Austin et de San Antonio (par 200 à 250 mètres d'altitude).

Les *Northers* sont parfois accompagnés de pluies froides. Ils se terminent en passant au Nord-Est, pour faire place, par cette transition régulière, au retour du courant tropical.

J'ai noté pendant plusieurs années ceux des *Northers* qui faisaient impression sur les hommes et sur la végétation, c'est-à-dire principalement ceux des mois d'hiver. On en trouvera ci-après le tableau :

[1] Al. de Humboldt, *Essai sur la Nouvelle Espagne*, t. I, p. 310.

MOIS.	NOMBRE DE NORTHERS.			
	1859	1860	1861	1862
Janvier	3	3	2	4
Février	0	1	1	2
Mars	1	1	2	1
Avril	2	1	2	0
. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .
Septembre	0	1*	1	0
Octobre	0	1*	2	3
Novembre	2	2	0	1
Décembre	5	1	2	1
TOTAL	13	11	12	12

* Léger.

Les observations qui précèdent ont été inscrites à différents points, dans l'espace entre le Brazos et le Rio-Grande.

La formation du givre pendant la nuit, et les chutes (très-rares d'ailleurs) de neige, se rattachent si intimement aux *Northers* que j'en joindrai ici le relevé.

Dans le Texas occidental, entre le Nueces et le Colorado, j'ai observé du givre, et parfois de la glace plus ou moins solide :

Dans l'hiver de 1858-59. . . 10 fois, du 10 novembre au 23 janvier;
— — 1859-60. . . 11 fois, du 12 novembre au 27 mars;
— — 1860-61. . . 11 fois, du 1 novembre au 5 février.

La neige est notée :

Hiver de 1858-59. . . . . nulle;
— — 1859-60. . . . . nulle;
— — 1860-61. . . . . le 29 décembre [2 centimètres par vent ONO, fondant le lendemain matin]; nuit du 24 au 25 janvier [6 centimètres par vent ONO, fondant dans le jour].

Ainsi, dans cette région, la neige est extrêmement rare, tombe par vent ONO, qui est le début des *Northers*, et ne résiste pas un grand nombre d'heures aux rayons du Soleil.

§ 22. — ORAGE REMARQUABLE, AU TEXAS.

Je terminerai ces extraits par la description d'un orage remarquable, dont j'ai été témoin au Texas. C'est la seule circonstance dans laquelle j'aie vu la décharge électrique se ramifier et se fractionner pour ainsi dire, de manière à toucher chacun des nuages d'un ciel moutonné. Il y avait dans cette communication en détail des temps perdus, fort courts il est vrai, qui permettaient de mieux suivre la propagation des changements électriques que chaque décharge déterminait.

L'observation a été faite près de San Antonio.

« Le mercredi 6 juin 1860, vers 6 heures du soir, le vent était Sud, le ciel serein, quand un orage se forma rapidement au Nord-Ouest. Bientôt le vent frais du Nord se déclara, et amena un brouillard épais rasant la terre. Ce brouillard, qui obscurcissait tout à la ronde, passait par bouffées, entre lesquelles on pouvait voir les nuages du zénit se mouvoir en sens contraire (du Sud au Nord). Le brouillard n'amenait pas de pluie. Lorsqu'il fut tout passé, on vit à l'Ouest-Nord-Ouest du zénit un gros nuage noir, et le reste du ciel était pommelé, avec un voile général. De ce nuage sortaient, de moment en moment, vingt ou trente lances de foudre à la fois, montant vers le zénit, dans un secteur d'expansion d'environ 120° autour du nuage. Elles passaient les pommelures, en se répétant au delà, comme des ricochets, et montraient des formes crochues, entortillées, ramifiées, bizarres. Elles étaient étroites, courtes, fort passagères; on eût dit chaque fois un bouquet de fusées instantanées. Jamais je n'ai vu tant d'étincelles électriques à la fois. Leur course paraissait horizontale ou à peu près. Le temps était très-menaçant. Cependant, l'orage ne gronda pas longtemps, et il tomba peu de pluie. A 9 heures du soir, les derniers éclairs se montraient sur six ou huit points de l'horizon. »

ESSAI CRITIQUE

SUR LA

PHILOSOPHIE DE S. ANSELME

DE CANTORBÉRY;

PAR

M. l'abbé A. VAN WEDDINGEN,

DOCTEUR EN PHILOSOPHIE ET EN THÉOLOGIE, AUMÔNIER DE LA COUR.

Devise :

« Aliter... quam priores tradituri, fatemur ea
» quoque illorum esse muneris, qui primi quae-
» rendi vias demonstraverunt. »

PLINE, *Hist. Natur.*, II, 13 (15).

(Couronné par la classe des lettres de l'Académie le 4 mai 1874.)

AVANT-PROPOS.

La classe des lettres de l'Académie royale de Belgique avait inscrit la question suivante à son programme de concours de 1874 : « Exposer avec détails la Philosophie de S. Anselme de Cantorbéry, en faire connaître les sources et en montrer l'influence dans l'histoire des idées. »

Ce n'est pas sans quelque appréhension que je présente à l'Académie cette étude sur la Philosophie de S. Anselme de Cantorbéry. Peut-être serai-je accusé de témérité, pour avoir osé reprendre une matière traitée déjà par des critiques éminents. Mais en l'inscrivant dans son programme, l'Académie nous avertit que l'œuvre philosophique d'Anselme garde encore assez d'intérêt, pour qu'il soit permis d'y chercher des enseignements, sans encourir le blâme de présomption. Dans ce travail, nos devanciers ont été nos guides, et c'est pour nous une joie et une obligation de reconnaître tout ce que nous leur devons.

Me permettra-t-on cet aveu? Si je réponds à la question de l'Académie, c'est que j'ai cru qu'en la posant, la savante Assemblée a voulu engager les jeunes écrivains de notre pays à ne pas négliger les labeurs âpres mais utiles de la philosophie critique. Nous sommes préparés, par l'éducation et l'esprit de race, à profiter des travaux des trois grands peuples européens auxquels appartient l'empire de la pensée. Pourquoi leurs œuvres philosophiques nous laisseraient-elles plus indifférents que leurs productions scientifiques ou littéraires?

Tout le monde le sait : il y a une différence profonde de formes et de procédés entre la Philosophie du XI[e] siècle et la nôtre. La psychologie et l'idéologie ont pris le pas sur la Dialectique et l'Ontologie abstraites. Aux problèmes qui passionnaient nos pères se sont ajoutés des problèmes nouveaux. — L'esprit même de la science s'est modifié. Ce n'est pas seulement une Doctrine, une Théorie absolue que l'on demande au passé. La méthode moderne, au moins aussi historique que spéculative, se préoccupe avant tout le reste d'établir et d'interpréter le sens général de la tradition philosophique. Elle l'envisage, dans ses dogmes universels et primitifs, comme la spontanée et infaillible manifestation de la raison humaine. Elle cherche à en constater la signification, les défaillances et le progrès, parmi les vicissitudes des institutions et des idées. C'est de ce point de vue que nous voudrions qu'on jugeât ce Mémoire.

L'aspect sous lequel se présentait la Philosophie à un lettré du XI^e siècle nous est bien connu maintenant, grâce aux beaux travaux des érudits français et allemands. Dans la première période du moyen âge, les régents des Écoles cathédrales et monastiques expliquaient les *Catégories* et l'*Interprétation* d'Aristote, non selon le texte original, mais d'après l'*Introduction* de Porphyre, la version et les gloses de Boèce, et l'abrégé des Prédicaments du pseudo-Augustin. Ils élucidaient en outre des problèmes isolés de Dialectique et d'Ontologie. L'audacieux Jean Scot Érigène est le seul écrivain antérieur à Anselme qui rédigea une œuvre de longue haleine, conçue en dehors de la manière classique.

Considérée en elle-même, la philosophie de S. Anselme de Cantorbéry n'a guère beaucoup à nous apprendre aujourd'hui. Mais elle inaugure une ère d'une haute importance. Elle marque le moment où le génie franco-germain associe l'Ontologie à la Dialectique, et les conceptions d'ensemble aux Monographies de l'âge précédent. C'est surtout comme symbole de cette féconde renaissance intellectuelle que le nom d'Anselme a conservé une si glorieuse auréole. — Partout, d'ailleurs, le Docteur de l'abbaye de S^{te}-Marie se montre un spéculatif élevé, un métaphysicien supérieur à son siècle, allant d'instinct aux sommets de la science. Si parfois sa pensée s'égare, c'est à force d'originalité. S'il paye tribut à la dialectique excessive de son temps, presque toujours sa haute nature le ramène à de meilleures voies. — Ses historiens ont très-justement noté que c'est à propos des mystères sacrés que son intelligence prend un plus libre essor. Le programme de l'Académie nous interdit de le suivre sur ce domaine réservé. Il a été suffisamment exploité par des écrivains distingués. Nous n'avons, pour notre compte, qu'à nous occuper de ses œuvres philosophiques. Le bilan en est assez considérable, et il suffit d'y jeter les yeux, pour voir combien Anselme a su élargir l'horizon de la science. Elles se composent d'un Fragment d'Introduction à *la Dialectique*, concernant la vraie signification des noms de Qualité et intitulé : *du Grammairien ;* du Dialogue *de la Vérité*, comprenant les principes fondamentaux de l'Ontologie ; de quelques renseignements épars en divers traités sur *la nature de la substance physique ;* d'une double théodicée ou théologie rationnelle, le *Monologue* et le *Prosloge* [1].

Nous parcourrons successivement ces matières qui touchent aux principales questions de la Philosophie. Une dernière étude sera consacrée à l'exposition des vues du S. Docteur sur les rapports généraux de la Foi et de la Raison. En comprenant cette discussion dans la philosophie d'Anselme, nous ne faisons que suivre l'exemple de la plupart des critiques.

L'Académie prescrit aux concurrents d'indiquer les sources de la philosophie d'Anselme et d'apprécier son influence sur le mouvement des idées. De fait, il n'est possible de bien pénétrer les vues de notre Docteur qu'à condition de connaître l'état où il trouva la philosophie et les maîtres qui la lui avaient enseignée. Auprès de ceux qui nous reprocheraient d'insister à l'excès sur ses devanciers et ses contemporains, que ce soit là notre excuse.

La Dialectique est en un sens l'exorde naturel de la Philosophie. Nous nous conformerons à la nature et à l'usage, en traitant d'abord du Fragment logique de S. Anselme, le premier traité sorti de sa plume, mais, certes, son moindre titre à la gloire littéraire. Il suffira

[1] Nous ne comptons pas, parmi les œuvres philosophiques de S. Anselme, les traités où il parle du libre arbitre. Presque tout entiers, ils se rapportent à la Théologie.

d'élargir un peu ce cadre, pour y trouver l'Introduction obligée d'un Mémoire qui se rapporte aux premiers temps de la Scolastique. Depuis Alcuin et la restauration des lettres sous Charlemagne jusqu'à Anselme, la Dialectique domina presque toute la Philosophie. Indiquer à grands traits la direction de ce mouvement de l'esprit humain, et montrer en quel sens il se rattachait à la doctrine d'Aristote, dont il se réclamait, voilà la préface que l'objet même de notre travail suggère.

Dois-je parler de la forme de cette étude? Je demande seulement de pouvoir user, dans l'exposition des idées d'Anselme, de la même liberté qu'on a accordée à mes prédécesseurs. Tantôt nous reproduirons les textes eux-mêmes; tantôt nous en donnerons le fidèle résumé. En tout cas, un système continu de notes permettra au lecteur un facile contrôle. C'est la manière suivie par MM. Hasse, Billroth, de Rémusat. Nous croyons que c'est la seule possible en un semblable sujet. Une certaine latitude peut être accordée au rapporteur de théories dont l'expression s'éloigne si fort de nos habitudes littéraires. Son grand souci doit être de rester exact. En m'attachant à la scrupuleuse analyse des doctrines d'Anselme, je devrai, presque à tout moment, me plier à une manière de raisonner et de parler qui n'est plus dans nos mœurs. Rien n'aurait été aussi facile que d'épargner cet ennui au lecteur et à moi-même. Il eût suffi pour cela de prendre le sujet par les hauts côtés, et de substituer ce qu'on est convenu d'appeler les vues d'ensemble à l'étude minutieuse des textes. Seulement ce procédé aurait l'inconvénient de nous donner les vues fondamentales d'Anselme, tout en dissimulant leur physionomie. J'ai préféré sacrifier l'élégance à la vérité, mais j'oserai alléguer, pour mon excuse, le bénéfice des circonstances. Le XI^{e} siècle est l'*époque de transition* de la philosophie, et, pour une grande part, Anselme en a été l'instrument. L'Académie, sans nul doute, entend que je conserve à ses spéculations tout leur caractère original.

SOURCES PRINCIPALES.

S. Anselmi ex Beccensi Abbate Cantuariensis Archiepiscopi Opera, nec non Eadmeri Monachi Cantuariensis Historia Novorum et alia opuscula, labore ac studio D. Gabrielis Gerberon, Monachi Congregationis S. Mauri. Ed. II, correcta et aucta. Lutetiae, apud Montalant, 1721. — Gerberon fut le treizième éditeur des œuvres d'Anselme. La 1re édition parut à Nuremberg en 1491. La meilleure, après celle du savant Bénédictin, est celle du Jésuite Théophile Raynaud (Lyon, 1630). Feu M. le Professeur Ubaghs a donné une édition et une traduction du *Monologue* et du *Prosloge*, d'après le beau manuscrit de l'Université de Louvain (fin du XIIe siècle). D'ordinaire, nous suivrons cette traduction.

R. Veder, Roterodamensis, *Dissertatio de Anselmo Cantuariensi.* Lugduni Batavorum, ap. Haak, 1832. — Point de vue positif.

Billroth, *Dissertatio historico-critica de Anselmi Cantuar. Proslogio et Monologio.* Lipsiae, 1832. — Point de vue critique.

Hasse, Profr der Theol. zu Bonn, *Anselm von Canterbury.* I. Theil : Das Leben Anselms. — II. Theil : Die Lehre Anselms. Leipzig, 1843-52. Point de vue expositif. — Hasse, *De ontologico Anselmi pro existentia Dei argumento.* Bonnae, 1849.

De Rémusat, *S. Anselme.* Paris, 1854. Point de vue historico-critique.

Franck, *Anselm von Canterbury.* Tubingen, 1842, ap. Oseander. — Point de vue critique.

Möhler, *Anselm von Canterbury, Jüb. Quartalschrift,* Jahrg. 1827-1828. *Gesammt. Schrift. herausgegeb.* von Döllinger. Regensburg, 1839, I B., p. 32, seq. — Point de vue apologético-critique.

Abroell, *De mutuo fidei ac rationis consortio.* Diss. inaug. Wirceburgi, 1864.

Hoehne, *Anselmi Cantuariensis philosophia cum aliorum illius aetatis decretis comparatur ejusdemque de satisfactione doctrina dijudicatur.* Diss. inaug. Lipsiae, 1867 (Mémoire couronné par la faculté de théol. de Leipzig). — Point de vue critique et surtout théologique.

Bouchitté, *Le Rationalisme chrétien à la fin du XI^e siècle.* Monologium et Proslogium de S. Anselme, archevêque de Cantorbéry, traduits et précédés d'une Introduction. Paris, Amyot, 1842. A ces monographies, il faut joindre le grand commentaire théologique et philosophique du cardinal J. d'Aguirre: *S. Anselmi theologia commentariis et Disputationibus, tum dogmaticis tum scholasticis illustrata,* auctore Josepho Saënz de Aguirre, Benedictinae congregationis Hispaniarum et Angliae generali Magistro, in Salmanticensi Academia Doctore theologo. Salmanticae, ap. Perez, 1685, III vol. in-fol. Ce profond et savant ouvrage est le meilleur commentaire général du Monologue de S. Anselme.

Les autres ouvrages moins spéciaux qui nous ont servi seront cités dans le cours de notre travail.

Touchant l'authenticité des œuvres attribuées à S. Anselme, voyez : Gerberon, *Censura operum S. Anselmi,* en tête de son édition. Théophile Raynaud, S. J., t. XI, Éd. Lugd., *Syntaxis operum S. Anselmi.* — *Acta Sanctorum,* 21 aprilis. M. A. Charma, *S. Anselme; notice biographique, littéraire et philosophique.* Paris, 1853.

(1)

ESSAI CRITIQUE

SUR LA

PHILOSOPHIE DE S. ANSELME

DE CANTORBÉRY.

CHAPITRE I.

DIALECTIQUE DE S. ANSELME DE CANTORBÉRY.

De l'usage de la Dialectique dans l'Église d'Occident jusqu'à Anselme de Cantorbéry. — Analyse et appréciation de son Fragment d'Introduction à la Dialectique ou du Dialogue : *de Grammatico*. — Sources et forme de la Dialectique, pendant la première période scolastique.

On a nommé S. Anselme de Cantorbéry l'Augustin du moyen âge. La postérité a confirmé ce titre. Elle honore dans l'abbé de Sainte-Marie du Bec le restaurateur des études métaphysiques en Occident, et le glorieux disciple du Docteur d'Hippone.

Nouvelle coïncidence entre deux hommes qui se ressemblent par tant de côtés! S. Augustin nous apprend, en ses Confessions, qu'il s'adonna de bonne heure aux catégories d'Aristote. Avec une candeur charmante, il rappelle qu'il les comprit sans le secours d'un maître [1]. Sa réputation de logicien était si bien établie qu'on lui attribua longtemps un résumé des dix Prédicaments. Aujour-

[1] *Confess.*, IV; 16, 28.

d'hui encore, des critiques excellents lui font honneur d'un traité sur les principes de la Dialectique [1]. — Comme son illustre maître, Anselme s'occupa avec zèle de l'art de disputer : il composa un Dialogue assez étendu sur la signification des *noms de qualité*. Ces deux génies si ardents à la spéculation, si enthousiastes de l'Idée, commencèrent par être de fervents et subtils logiciens.

On le conçoit aisément : aux premiers siècles de l'Église, la Dialectique fut loin d'avoir dans les écoles chrétiennes le rang qu'elle y obtint plus tard. — Ce qui importait aux Pères et aux Docteurs, c'était d'exposer la notion des dogmes sacrés, de les défendre contre les attaques des païens et des hérétiques. La nature même de ces assauts ne pouvait que nuire à la culture de la logique. Le gnosticisme, en suscitant à la foi primitive un péril imminent, jeta quelque ombre sur les théories de Platon dont il prétendait s'inspirer. Les Ariens et les semi-Ariens, si affolés de catégories et de définitions, furent loin d'augmenter le crédit d'Aristote, le prince des dialecticiens. A coup sûr, jamais les Pères n'interdirent aux Chrétiens l'étude de la logique. Mais à leurs yeux c'était démence et impiété que de faire des maîtres Gentils les arbitres du symbole. Que l'on parcoure le diffus plaidoyer du Dr Launoy *Sur la fortune d'Aristote en l'École de Paris* (De varia Aristotelis in Academia Parisiensi fortunâ); qu'y lit-on ? Trente-sept anathèmes contre la fausse sagesse des superbes s'ingéniant à appliquer à la parole évangélique les syllogismes et les règles de l'Organon ! L'érudit polémiste en conclut à la proscription du péripatétisme dans les écoles chrétiennes ! Pour l'honneur de la Religion, les Pères lui eussent répondu que son impatience contre Aristote l'entraînait un peu loin. S. Basile reproche à Eunomius de décider de la divinité du Fils sur la foi du stoïcien Chrysippe [2], mais cela ne l'empêche pas d'appeler la Dialectique le boulevard des Dogmes [3]. Grégoire de Nanzianze ne veut pas qu'on opine

[1] Cf. Prantl, *Geschichte der Logik*, t. I, pp. 666 sqq.

[2] *Adv. Eunom.*, I.

[3] *In c. II Isaiæ.* Ἡ γὰρ τῆς διαλεκτικῆς δύναμις τεῖχός ἐστι τοῖς δόγμασιν....

sur les mystères d'après Pyrrhon, Chrysippe et Aristote [1] : en revanche, il loue très-fort la rare habileté de S. Basile, son ami, dans l'art de la discussion, et sa connaissance de la logique [2]. Ces Pères, aussi bien que Clément l'Alexandrin, SS. Grégoire de Néocésarée, Grégoire de Nysse, Cyrille d'Alexandrie, Eusèbe, Théodoret, blâment chez les sectaires la manie de préférer leurs arguties à l'Évangile et d'altérer par une technologie vaine la simplicité de la Foi [3]. Tous d'ailleurs raisonnent beaucoup et très-subtilement, alors même qu'ils rabaissent les prétentions de leurs adversaires. En plusieurs occurrences, S. Cyrille d'Alexandrie et S. Basile remontrent à Eunomius qu'il s'égare en ses concepts logiques [4]; et S. Augustin reproche au Pélagien Julien d'Eclane de dénaturer la notion de la substance [5]. Il fallait l'érudition un peu partiale de Launoy pour trouver dans les réserves des Pères une accusation contre la méthode d'Aristote!

Il est vrai : la philosophie de Platon compta plus de partisans, aux premiers temps du christianisme, que celle de son rival. Les spéculations du chef de l'Académie, son spiritualisme ardent, sa théodicée pleine d'essor le signalaient d'avance à la sympathie des maîtres chrétiens. En cette époque d'initiation convaincue et enthousiaste, les esprits devaient naturellement s'enchanter des élévations du divin Philosophe : ils se plaisaient moins aux rigides démonstrations de son disciple, préoccupé surtout de la nature, accusé de se séparer de Platon par dépit autant que par persuasion, et de protéger ses conclusions, par d'habiles équivoques, contre les démentis de l'avenir. — Mais les Pères les plus dévoués à Platon avouaient sans détour l'insuffisance de sa philosophie. S. Justin estime que dans chaque doctrine, il y a une part de

[1] *Or.* 26.

[2] *Or.* 20.

[3] Voyez, à ce sujet, les textes mêmes qu'allègue le Dr Prantl, reprenant la thèse de Launoy sur l'hostilité des Pères à la dialectique Aristotélicienne : *Geschichte der Logik in Abendlande*, t. II, p. 6.

[4] *Thesaur.* Asser. XI cont. Eum. — *Cont. Eunom.*, passim.

[5] *Cont. Jul.*, liv. V, 14; VI, 18.

vérité [1] : à son avis, Platon est le premier entre les philosophes; il a emprunté à Moïse, aux Égyptiens quelques principes divinement inspirés au chef du peuple hébreu [2]. Mais éloigné du foyer direct de la sagesse, il n'a pu en recueillir que de lointains rayons. C'est dans l'enseignement révélé seul que s'en trouve la plénitude [3]. — Clément comble la philosophie d'éloges. Il ne veut pas de ces esprits chagrins, entêtés à n'y voir que des erreurs, à n'y trouver aucun avantage [4]. La vérité complète cependant est le prix de la foi au Christ : la sagesse profane ne va pas au delà des choses temporelles : elle ne fournit que la moitié de sa carrière, si elle n'est couronnée par la croyance [5]. Au contraire, la Révélation n'a pas, à la rigueur, besoin de la philosophie : elle suffit au salut, bien que la culture de la science soit nécessaire au croyant parfait, au *Gnostique* [6]. — Eusèbe et Théodoret trouvent le couronnement de la philosophie dans le christianisme : toutes les nobles traditions des Platoniciens ont été des pressentiments de la révélation du Christ [7]. — Ces déclarations précisent, justifient la pensée des premiers Docteurs. L'un ou l'autre d'entre eux a mêlé quelque enflure à son discours, à propos des subtilités d'Aristote, de l'excellence de Platon ou de l'insuffisance de la philosophie : quel censeur sérieux voudrait s'en froisser? Les aspérités de la controverse, le goût de l'époque, le tempérament littéraire expliquent ces jugements. Ils ne peuvent préjudicier à l'ensemble des témoignages.

De bonne heure on avait compris dans l'Église comme dans le monde laïque, qu'au point de vue de l'enseignement, les traités du Stagyrite surpassaient les dialogues sublimes de Platon [8].

[1] *Apol.*, I, chap. 44.

[2] *Ad Graec. cohort.*, chap. 3-9.

[3] *Apol.*, II, chap. 13. — *Dial. cum Tryphone*, chap. 8.

[4] *Strom.*, I, chap. 7, 13.

[5] *Ibid.*, I, chap. 2.

[6] *Ibid.*, chap. 6, 7, 20.

[7] *Preparat. évang.*, liv. XI, XIII. — *Graec. affect. curat.* — *Serm.* I et V.

[8] Les modernes rendent hommage à ce jugement de l'antiquité : « Connaître Aristote, connaître l'Aristotélisme, c'est mieux connaître, non pas seu-

A l'école d'Alexandrie même, S. Anatole, contemporain d'Ammonius Saccas, et Hieroclès expliquent ses doctrines. Déjà vers le milieu du IV^e siècle, l'Isagoge de Porphyre, cette officielle Introduction à l'Organon, est vulgarisé dans le monde latin par Marius Victorinus. Vraisemblablement à la même époque, Albinus commente le traité de l'*Interprétation;* un peu plus tard, Vegetius Prætextatus et Tullius Marcellus écrivent des explications sur la logique aristotélicienne; S. Grégoire de Nazianze abrége l'Organon; S. Jérôme traduit les excellents Commentaires d'Alexandre d'Aphrodise; S. Augustin rédige un manuel de Logique, et Marcianus Capella (470) compose le traité des *Arts libéraux* qui fut classique jusqu'à la fin du X^e siècle. — Au siècle suivant, Boèce met en latin l'Organon et la Métaphysique d'Aristote, traduit et commente à deux reprises l'Isagoge, et dote les maîtres d'école d'une foule de traités de logique formelle; Simplicius et Philopon consacrent à Aristote d'érudits Commentaires; Cassiodore écrit son livre *de Artibus ac disciplinis liberalium litterarum* qu'Isidore de Séville ne fit que résumer au livre II de ses *Étymologies.* A son tour, Jean de Damas enrichit l'Église grecque d'un manuel de Dialectique, qui exerça une influence considérable jusque sur les premières écoles de l'Occident.

La fortune d'Aristote dans l'Église fut, pour la plus grande part, due au caractère méthodique et rigoureux de ses écrits. Comme professeur, nul maître ne l'égalait. Certes, la doctrine profonde qui partout se cache sous les formes un peu austères était bien digne de lui assurer un crédit universel. Mais quand il n'aurait composé que l'Organon, sa *manière* lui eût conquis le

lement le passé de l'esprit humain, mais son état actuel.. Il a fait la logique et fondé la science de la pensée de telle sorte que, depuis lui, comme le dit Kant, elle n'a fait ni un pas en avant ni en arrière .. Il n'est point de philosophe qui pût aujourd'hui même remplacer Aristote : Descartes, Leibnitz, Kant n'y suffiraient pas. » — *Dict. des sciences phil.* — *Art.* ARISTOTE, par M. Barthélemy de Saint-Hilaire.— Je ne fais que rappeler cet éloge du savant traducteur d'Aristote. On le trouvera un peu enthousiaste peut-être! Mais il explique mieux que tout ce que nous pourrions dire là-dessus la faveur du Stagyrite au moyen âge.

monopole des classes et des Académies. Des circonstances exceptionnelles vinrent le lui assurer pour une longue suite de siècles. Indiquons-les rapidement. Il faut s'en souvenir sans cesse, dès qu'on aborde une œuvre dialectique de la première période du moyen âge.

Les grandes invasions des barbares avaient été beaucoup moins préjudiciables à la culture des sciences que celle des Francs. Avec ces conquérants farouches, les écoles et les lettres, honorées et glorieuses sous les rois Bourguignons et Visigoths, entrèrent dans une décadence prolongée. Les Mérovingiens n'étaient pas faits pour ranimer les arts et la civilisation. Dans l'Église même, des hommes mélancoliques, gagnés par la commune contagion, désespèrent de l'avenir, estiment qu'il faut s'en tenir aux leçons des ancêtres. Mais en général les évêques, les abbés, les moines résistent à l'apathie funeste. Des conciles veillent à l'érection des écoles : les paroisses elles-mêmes en auront, non-seulement les résidences épiscopales. Les abbayes de Lijugé, de Lérins restent des foyers de lumière. Au VI^{e} siècle, l'école d'Arles, dirigée par l'évêque Césaire, et celle de Reims conservent, propagent le feu sacré, un instant si menacé. S'il faut en croire Thomassin, en 540, les élèves d'Orléans reçurent le roi Gontran avec des acclamations écrites en latin, en grec, en hébreu. Malgré ces efforts, la culture générale diminuait dans les Gaules, où elle avait été si florissante. Négligées d'abord, les lettres deviennent maintenant suspectes. Ceux qu'on vante pour leur intelligence sont des chercheurs avides, mais mal secondés.

Au VIII^{e} siècle, l'ignorance et la barbarie régnaient presque sur tout le continent. Charlemagne fit servir sa puissance à remédier à un fléau que lui seul pouvait conjurer. Il voulut donner à ses sujets des maîtres capables d'inaugurer une ère nouvelle. Le couvent irlandais de Bangor, l'école épiscopale d'York, les abbayes de Weremouth et de Rhutscelle étaient restés fidèles aux traditions littéraires de l'archevêque Théodore et de l'abbé Adrien, ces moines érudits que le pape Vitalien avait envoyés, en 668, dans la Bretagne insulaire. On y cultivait les sciences des Hellènes, et ce fut sans doute dans ces nobles asiles que les Bretons puisèrent l'amour des langues classiques, qui les distingue encore aujourd'hui. En Italie, les Lombards protégeaient les lettres. Le roi Didier avait comblé d'honneurs Paul Warnefried de Fréjus, littérateur illustre, qui préféra la solitude du Mont-Cassin aux faveurs du monarque. Ce fut de là qu'en 782 Charlemagne le ramena en France pour y travailler à la restauration scientifique qu'il méditait. Mais à Alcuin surtout, le docte recteur d'York, revient le titre d'instituteur des premières écoles franques. Il amena avec lui des lettrés de son pays dont les noms et les travaux ne sont qu'imparfaitement connus. La méthode d'enseignement d'Alcuin allait pour longtemps fixer l'avenir de l'enseignement académique. Dès lors la prédominance de la Dialectique fut décidée.

De fait, Alcuin adopta comme programme des classes la division célèbre des Arts libéraux connue sous le nom de *Trivium* et *Quadrivium*. Empruntée probablement à Martianus Capella, elle avait été indiquée déjà par Cassiodore et Isidore de Séville. Tout le monde sait que le *Trivium* comprenait les *Arts :* la Grammaire, la Rhétorique, la Dialectique ; le *Quadrivium* embrassait les *Sciences* libérales : la Musique, l'Astrologie, l'Arithmétique, la Géométrie [1]. — La logique d'Alcuin était celle d'Isidore de Séville et de Cassiodore dont quelques écrits lui ont été longtemps attribués. Son Manuel de Dialectique est emprunté en grande partie à l'écrivain espagnol : ce n'est qu'un ensemble de règles verbales, de divisions et de sentences de logique formelle. — Son élève Frédégise est un esprit d'une trempe différente. L'abbé de S. Martin de Tours aime les problèmes ontologiques. Mais il les résout selon la méthode nominale qu'une culture extrême de la formule avait déjà inoculée aux esprits. Très-sérieusement, il prononce que les noms privatifs, les ténèbres, par exemple, expriment *un être substantiel!* Ne sont-elles pas, dit-il, susceptibles *du plus et du moins?* L'Écriture n'en parle-t-elle pas à l'instar d'une essence? — Ce n'est là qu'un détail; mais au début d'une institution, ces premiers linéaments présagent l'avenir. Le Dr Prantl

[1] Voyez sur l'origine du *Trivium* et du *Quadrivium* la discussion intéressante de M. Hauréau, *Hist. de la Phil. scol.*, nouv. édit., I, chap. II. Paris, 1872.

ne consent pas à voir dans la préoccupation de Frédégise un pressentiment de la querelle des Universaux. Assurément! Mais ce que nous trouvons chez le premier disciple influent d'Alcuin, c'est la manie d'objectiver les notions de l'esprit, les catégories logiques, comme les noms de privation. Qui l'ignore? C'est de cette disposition que naîtront les développements compliqués de la fameuse controverse! — Dès l'origine la logique formelle, à son insu sans doute, préjugea les plus profondes questions de l'ontologie. Trop souvent dans la suite ce sera son rêve et sa folie!

Raban-Maur, l'élève de l'abbaye de S. Martin de Tours, et le maître de Fulde, s'occupa plus de doctrine générale et de théologie que de Dialectique. Mais il entend que les jeunes clercs s'exercent avec soin à cette *science des sciences,* au syllogisme surtout : ils apprendront ainsi à confondre l'hérésie, à défendre le dogme. Du reste, s'il faut approfondir Aristote, il veut qu'on n'oublie pas Platon [2]. — Par Raban, par Haimon d'Halberstadt, son collègue, la Dialectique, après avoir pris possession des écoles de Bretagne et de Gaule, fit son entrée dans celles de la Germanie. Nul doute qu'en Belgique elle n'ait été accueillie par Francon de Lobbes (855-903). L'aventureux et spirituel Rathère de Liége fut réputé le premier des philosophes de l'académie palatine d'Othon le Grand. Notger passe pour avoir traduit l'Interprétation d'Aristote; l'Écolâtre Adelman de Liége eut le nom d'un dialecticien hors de pair.

Quand on parle de Dialectique au IX[e] siècle, peut-on nommer Jean Scot Erigène? Véritable signe du temps! Ce métaphysicien, ce réaliste sans égal, si emporté contre la Logique formelle, lui consacre des développements extrêmes, très-fastidieux, malgré de fines remarques. Fort longuement il disserte sur les figures et les modes du syllogisme, les échappatoires de la discussion, les instances et les divisions! Avec cela, le sens qu'il attache à la Dialectique n'est pas bien clair. Il y voyait autre chose que la

[1] *Hist. de la phil. scol.*, t. I, p. 129.
[2] *De Instit. cleric.*, liv. III, pp. 20 sqq. Cf. *Hist. littér.*, vol. V, p. 156.

science des formes du concept. — Cet art de la dispute, dit-il, que les Grecs ont nommé Dialectique, n'a-t-il pas pour objet véritable la substance, d'où émanent toutes les divisions qui servent ensuite de sujet à ses thèses, et cela en passant par les genres les plus communs, par les genres moyens et jusque par les espèces les plus particulières, et en remontant ensuite selon les règles de la régression les mêmes degrés, jusqu'à la substance d'où ces formes sont dérivées, pour retourner en ce terme de leur éternelle tendance [1] ? — Ce discours est un peu embrouillé, mais il se comprend : par Dialectique, Scot entend surtout celle de Platon; le procédé d'analyse et de synthèse qui s'élève du relatif à l'absolu, pour redescendre de l'universel aux individus. Les vues du hardi Irlandais, nouvelles au IX^e siècle, étaient une réminiscence du Timée. Mais n'avait-il pas traduit le Faux-Denis, disciple des Néoplatoniciens, et ceux-ci n'avaient-ils pas ajouté la théorie de l'émanatisme au système de Platon? D'excellents arbitres estiment que Scot fut panthéiste. La définition que nous avons rappelée est équivoque, comme sa métaphysique toute entière. Peut-être le réaliste irlandais ne voyait-il dans le *procès dialectique* que le dédoublement subjectif des formes de l'Être, dans son évolution progressive, éternelle. Ce serait l'extrême conséquence de l'émanatisme, le rigoureux corollaire du dogme de l'unité de substance. En ce cas, entre la logique d'Hégel et celle de Scot, la ressemblance serait grande : elle pourrait aller jusqu'à l'identité. — Ce qui nous intéresse, c'est de rencontrer chez le métaphysicien de la cour de Charles le Chauve le même goût de subtilisme, la même profusion de formules que chez ses devanciers. — C'est qu'il avait

[1] « Nonne ars illa quae a Graecis dicitur Dialectica et definitur bene dispu-
» tandi scientia, primo omnium circa οὐσίαν veluti circa proprium sui princi-
» pium versatur, ex qua omnis divisio et multiplicatio eorum, de quibus ars
» ipsa disputat, inchoat per genera generalissima mediaque genera usque ad
» formas et species specialissimas descendens et iterum complicationis regulis
» per eosdem gradus, per quos degreditur, donec ad ipsam οὐσίαν, ex qua
» egressa est, perveniat, non desinit redire in eam, qua semper appetit
» quiescere. » — *De divis. naturae,* liv. V, p. 4. — Cf. PRANTL, *op. cit.*, t. II, p. 28.

été, comme eux, élevé dans la discipline du *Trivium*. L'Isagoge, les Catégories, l'Interprétation étaient les manuels de toutes les écoles. On en subissait l'influence, même lorsqu'on sortait des routes battues et que l'on connaissait le Timée. — Aussi bien que leurs prédécesseurs, le pseudo-Raban ; l'élégant psychologue Éric d'Auxerre en ses Gloses sur les catégories ; Remi d'Auxerre, l'une des premières gloires de l'Académie de Paris et le commentateur de Martianus Capella ; Odon de Cluny, son élève ; Abbon de Fleury dans son *Traité des conclusions* ; les régents de la célèbre école de S^t^-Gall, et avec eux, Gunzo de Navarre, Gautier de Spire s'occupent avec prédilection des Prédicaments et des règles de la discussion.

Gerbert lui-même consacre une Dissertation à montrer que le terme *Rationnel* est d'une signification plus large que la formule : *se servir de la Raison.* Il est vrai que ce thème logique de la *puissance* et de *l'acte*, le conduit au seuil d'importants problèmes d'ontologie. D'autres maîtres, en cela, furent moins heureux. Adalbert de Laon dans un *Traité sur l'art de bien argumenter,* pose gravement que rien ne se fait sans cause ; c'est un principe tenu par les philosophes ! Or, voici une mule boiteuse, inutile : il faut trouver la cause de son inutilité. Il semble qu'Adalbert, et son *objectant* supposé, Foulques d'Amiens, n'y parviennent point. Le Docteur finit par conclure que ce pourrait bien être la malice du diable qui a rendu la mule inutile ! Mais quant à l'ami qui, dans un tournoi dialectique a consenti à servir d'adversaire officieux, celui-là, s'exclame-t-il, est d'une incontestable utilité [1] ! — Il est permis de trouver qu'Adalbert entend étrangement la recherche des causes. Mais après un trait pareil, on ne s'étonnera pas de rencontrer, au XI^e^ siècle, un poëte inconnu chantant les Catégories en hexamètres latins ! La prédiction de Martianus Capella s'est véri-

[1] Ap. Prantl, t. II, p. 59. « Philosophi nihil sine causa tradunt fieri. — » Ergo quoniam hujus mulae inutilitas solertia daemonum effecta est, absque » ulla contradictione omnimodis inutilis est. Hac re mula probatur inutilis, » non amicus qui sibi ipsi adversarius vice functus est alterius. » — *De modo recte argumentandi et praedicandi Dialogus.* S. Pez, *Thes. Anecd.*, 1, p. xxiii.

fiée : la Logique est la suzeraine du *Trivium ;* tous les arts libéraux, ses vassaux désormais, s'unissent à reconnaître, à proclamer sa gloire.

Celle-ci néanmoins devait éprouver quelque amoindrissement. Béranger, archidiacre de Tours, avait attaqué la transubstantiation du corps du Seigneur dans la sainte Eucharistie. Sur quelles raisons s'appuyait-il pour combattre le dogme chrétien? En grande partie sur les plus ineptes chicanes logiques. — Après la consécration, le pain et le vin restent présents sur l'autel : sans cela, comment se vérifierait la proposition : *le pain et le vin sont la matière du Sacrement?* N'est-il pas de l'essence des propositions d'être éternelles? Comment attribuer quelque chose à un sujet, si ce sujet a cessé d'exister? De quelle façon enfin le pain, le vin cesseraient-ils d'exister dans la divine Eucharistie? *Par corruption du sujet préexistant?* Mais les accidents inséparables de la substance demeurent sur l'autel! On tient que le pain et le vin sont le corps et le sang du Christ : ils *existent* par conséquent, loin d'avoir été détruits! Dira-t-on qu'un nouveau sujet *est produit surnaturellement* par la consécration? Mais le corps et le sang du Sauveur existent depuis longtemps : on ne peut donc soutenir qu'ils sont engendrés par l'action sacramentelle[1]! — Ainsi argumente l'Archidiacre.

L'adversaire principal de Béranger fut Lanfranc, premier Régent de l'École de Sainte-Marie du Bec, et prédécesseur d'Anselme de Cantorbéry en cette charge. Lanfranc lui-même passait pour un maître consommé en l'art de disputer. Il s'y était exercé à Bologne, déjà célèbre par ses professeurs de droit. Lorsqu'il vint au Bec oublier ses rêves de gloire humaine, il y fut bientôt nommé Écolâtre, et son habileté valut au monastère naissant une brillante renommée. Dans sa Monographie sur les écoles de la Gaule, Launoy récite quelques témoignages qui en font foi : « La réputation de Lanfranc, écrit Guillaume de Malmesbury, qui le nomme le troisième Caton, se répandit jusqu'aux confins extrêmes du

[1] *De S. Cœna, tractat. adv. Lanfrancum,* pp. 66, 67, 70, 79. Édit. Vischer. Berol., 1834.

monde latin, et le Bec devint une illustre et considérable Académie... Depuis son entrée dans la vie monastique, ses disciples n'avaient que Dialectique à la bouche [1]... » D'autres chroniqueurs assurent que, pour l'entendre, les clercs, les fils des grands seigneurs, les maîtres vantés, de puissants laïcs et toute espèce de nobles gens accouraient de la Gascogne, de la Bretagne, de la Flandre à l'abbaye normande [2]. « Lorsqu'il interprète saint Paul, écrit Sigebert de Gembloux, en toute opportunité, il propose la thèse d'après les règles dialectiques, fait instance et tire ses conclusions [3]. » D'après Milon Crispin, contemporain de S. Anselme, Lanfranc contribua pour une large part à la renaissance des lettres [4]. Guillaume de Poitiers et Mathieu Paris vantent sa dextérité aux affaires à l'égal de son savoir [5]. Aussi l'épitaphe de Lanfranc composée par Philippe de Bonne-Espérance lui promet-elle, dans un latin barbare, une glorieuse immortalité :

Per te florentes artes valuere latinae,
Gratia de vobis ecce triumphat ovans!

Volontiers les chroniqueurs décernaient ces éloges pompeux ! C'est pour avoir été le maître d'Anselme que Lanfranc est surtout illustre. Quelques-unes de ses œuvres recommandent sa mémoire; mais elle s'éclipse devant le souvenir du grand métaphysicien qui fut son élève, et lui voua une gratitude éternelle. Toutefois, Lanfranc se devait à lui-même, il devait à l'Église de rétorquer les subtilités de Béranger. Il lui rappelle que les mys-

[1] « Publicas scholas de dialectica professus est... ubique discipuli inflatis » buccis dialecticam ructabant. » — GUILL. MALMESB., *De Gestis reg. Angl.*, liv. I, fol. 116; liv. III, fol. 61.

[2] *Orderic. Vital.* ad ann. 1069. AP. HAURÉAU, 2e édit., ouv. cit., p. 237. — MABILLON, *Ann.*, liv. LVIII, n° 44.

[3] « ... ubicumque opportunitas locorum occurrit, proponit, assumit, concludit. » *De scriptor. eccl.*, chap. CLV. Édit. Fabric., p. 112.

[4] *Vit. Lanfr.*, chap. I, dans l'édition des œuvres de Lanfranc de Dom d'Achéry.

[5] *De Gestis Guillelmi Ducis*, p. 198. — *Vit. Abbat. S. Albani.* Cf. d'Achéry, p. 21.

tères de la foi veulent être décidés par voie d'autorité, non par des raisons dialectiques [1]. Mais il le suivit sur son terrain; et Guitmond, son élève, nous apprend qu'il confondit honteusement son adversaire, à propos d'une vétille logique [2] !

Ainsi, jusqu'au XIe siècle, la prépondérance de la Dialectique est le phénomène le plus éclatant de la vie littéraire. Les métaphysiciens, comme Érigène; les rares psychologues eux-mêmes, comme Héric et Gerbert, sont de zélés classificateurs de concepts. — Le savant historien de la Philosophie scolastique croit qu'au temps de Béranger l'Église changea d'attitude à l'égard de la Dialectique. Il en trouve la preuve dans les condamnations sévères qui frappèrent l'Archidiacre, et dans le jugement d'incompétence lancé contre les Logiciens par Lanfranc et saint Pierre Damien. Au fond, rien n'avait changé ! L'Église primitive condamnait, nous le savons, l'abus de la Philosophie : elle n'entendait pas qu'on demandât aux syllogismes des Péripatéticiens la décision des vérités de la Foi. Mais cet excès évité, les Pères honoraient les Logiciens. C'est la même règle qu'on suit au XIe siècle, qu'on suivra toujours. Lanfranc blâme la frivolité d'un Docteur appliquant aux mystères les principes de l'*Herméneia* sur la signification des propositions : voilà tout! N'allons pas signaler dans une si juste plainte le commencement d'une période de réaction contre la raison! — En tout cas, cette période fut courte! Anselme, aux yeux des plus prévenus, passe pour un très-hardi métaphysicien. Nul, autant que lui, n'aimait la raison, la philosophie. Mais il voulait qu'elles reconnussent la Raison absolue, leur règle naturelle.

Nous avons dit que la prédominance de la Logique dans les classes de Philosophie s'explique par le caractère didactique de cette discipline, telle que l'avait formulée Aristote. La forme nominale, artificielle qu'elle présente dans les écrits des premiers maîtres a une autre cause encore. Les seuls traités de l'Organon connus de ces Docteurs étaient les *Catégories* et l'*Interprétation*,

[1] Cf. *De corp. et sang. Domini*; Ed. Giles, II, p. 160. Oxon, 1854.

[2] Cf. *Bibl. partr. Lugd.*, t. XVIII, p. 441 : *De corp. et sang. Domini.*

le dernier dans la traduction de Boèce, l'autre dans le résumé du pseudo-Augustin. M. Hauréau pense, sur la foi de Richer, auditeur de Gerbert à Reims (985), que ce maître y commentait déjà les premiers livres de la logique aristotélicienne, selon la version de Victorinus ou de Boèce[1]. Le même critique, après Muratori et Jourdan, signale dans le catalogue de la bibliothèque de l'abbaye sarde de Bobbio, le texte grec des Prédicaments. Il est avéré que Gerbert cite les catégories dans son traité *De Rationali et ratione uti.* La traduction du fameux traité en allemand ancien [2], faite par les moines de S[t]-Gäll, reproduit également le texte latin de Boèce; mais celui-ci était peu répandu. C'est encore le savant conservateur de la Bibliothèque nationale qui nous informe que la plus-ancienne copie de la vraie traduction de Boèce, conservée dans ce riche dépôt littéraire, remonte au XII[e] siècle.

Nous apprenons d'Abélard que, même de son temps, les deux premiers traités de l'Organon étaient seuls aux mains des Latins [3]. Vers 1128, il est vrai, le clerc Jacques de Venise traduisit les deux Analytiques, les Topiques et les Sophistiques : sa version, cepen-

[1] Voici ce texte, tel que nous le communique M. Hauréau: « Dialecticam » ordine librorum percurrens, dilucidis sententiarum verbis enodavit (Gerbertus). In primis enim Porphyrii Isagogas, id est, Introductiones, secundum Victorini rhetoris translationem; inde etiam easdem secundum Manlium » explanavit. Cathegoriarum, id est, Praedicamentorum, librum Aristotelis » consequenter enucleans, Peri Ermeneias vero, id est de Interpretatione, » librum cujus laboris sit aptissime monstravit. Inde etiam Topica, id » est argumentorum sedes, a Tullio de Graeco in latinum translata, et a » Manlio consule sex commentariorum libris dilucidata, suis auditoribus » intimavit. » (*Hist.*, liv. III, chap. XLVI.) — Hauréau, *Hist. de la phil scol.*, 2[e] édit, pp. 97-98; 1872.

[2] Voir la remarque du D[r] Prantl, t. II, p. 62.

[3] « Sunt autem tres, quorum septem codicibus omnis in hac arte » eloquentia latina armatur. *Aristotelis* duos tantum, Praedicamentorum » scilicet et Peri Ermeneias libros usus adhuc latinorum cognovit, *Porphyrii* » vero unum qui videlicet de quinque vocibus conscriptus, *genere* scilicet, » *specie*, *differentia*, *proprio* et *accidente*, introductionem parat ad ipsa » praedicamenta; *Boethii* autem quatuor in consuetudinem duximus libros, » videlicet Divisionum et Topicorum cum Syllogismis tam categoricis quam » hypotheticis. » — Ap. Cousin, Ouv. inéd. d'Abélard, p. 228.

dant, ne paraît pas avoir trouvé grand accueil. D'après le Dr Prantl, un Anonyme de cette époque mentionne l'ensemble de la traduction de Boèce; de fait M. Ravaisson, auquel nous devons tant de renseignements précieux, a trouvé dans un catalogue de livres du même siècle, le nom des *Analytiques* [1]. Toutefois, les deuxièmes Analytiques n'étaient pas bien connus des Régents: la Métaphysique d'Aristote, quoique traduite par Boèce, ne fut lue dans les chaires de Paris qu'au commencement du XIIIe siècle. De la sorte, privés de la Métaphysique, où plus d'une fois le Stagyrite établit le fondement objectif de la théorie de la connaissance; n'ayant pas même pour s'orienter les Analytiques postérieurs, cette partie capitale de la Dialectique, les premiers Maîtres étaient-ils bien coupables en donnant une importance souvent risible à la Logique formelle? Les *Catégories* et le traité presque grammatical de l'*Interprétation* ne les poussaient-ils pas d'eux-mêmes à la formule, aux distinctions de mots? Le *Timée* de Platon, à la vérité, avait été traduit par Chalcide; mais il n'était pas entré fort avant dans la circulation littéraire. Jean Scot Erigène le connaît, l'invoque; ce n'est qu'au XIIe siècle que Guillaume de Conches en fait l'objet d'un commentaire. Il serait injuste de ne pas faire la part de ces circonstances, aussi graves que fâcheuses.— Il arriva néanmoins, malgré la Logique, parfois à son occasion, que les recherches des Régents prirent un caractère ontologique. Dès le seuil du Trivium, le problème de la *substance* qui en soulève cent autres, ouvrait aux penseurs les horizons de la Métaphysique, encore couverts de nuages. Les spéculations de Scot Érigène avaient dû laisser une impression profonde aux fervents chercheurs, et un secret désir de s'aventurer dans les régions explorées par cet audacieux. Le souvenir des grandes spéculations patristiques si capables d'enthousiasmer des âmes neuves, ardentes et pleines de foi; et plus que tout le reste, l'essence même des Dogmes chrétiens ne pouvaient manquer de mêler presque à chaque instant l'Ontologie à la Logique. Les nombreux travaux sur la Christologie à propos de l'Adoptianisme, sur

[1] Voir la savante discussion du Dr Prantl, t. II, pp. 99-108, et M. Ravaisson, *Rapport sur les bibliothèques de l'Ouest*, p. 404.

l'Eucharistie à l'occasion de Béranger accéléraient ce mouvement des idées. C'est ainsi qu'en des siècles peu favorisés, une providentielle compensation rétablit l'équilibre de l'esprit humain : là où les Glossateurs et les interprètes posaient, sans le vouloir, la borne de la formule, la Religion, d'un doigt triomphant, montrait l'au-delà, la Nature, l'Infini.

Nous avons rappelé les causes de la prépondérance de la Dialectique dans les premières écoles du moyen âge. Ajoutons seulement que, sans nul doute, les formes de la pensée pouvaient parfaitement entrer dans le cercle des recherches philosophiques. La parole étant le véhicule de l'idée, et l'idée le calque des êtres, qui voudrait blâmer un penseur de s'occuper des mots? Alors même que des causes fortuites feraient laisser dans l'ombre leur portée objective, sous les signes, sous le langage ne peut manquer de se présenter la réalité. « Dans une bonne classification, dit M. de Rémusat, la Dialectique, comme science, ne devrait s'appliquer qu'à la Dialectique même ; partout ailleurs, elle n'est que procédé et instrument; elle ne devrait pas même comprendre la Logique proprement dite, dont elle n'est que la suite ou la dernière partie. Mais s'il plaît de l'appliquer à tout, de tout encadrer dans ses formes, de chercher dans les notions qu'elle emploie et dans les règles qu'elle pose, les éléments de toute science, de se servir enfin d'elle comme d'un *critère* universel, on le peut faire, et elle devient alors, au lieu et place de la philosophie, la reine des sciences, la science universelle; elle obtient les titres de *disciplina disciplinarum, dux universae scientiae, sola dicenda scientia.* Sera-ce que la philosophie aura été réduite en essence à la seule dialectique? Non, c'est qu'elle aura été exclusivement ramenée aux procédés et au langage de la dialectique. Elle en aura sans doute souffert; la réalité ne peut, sans violence et sans dommage, passer comme par le laminoir d'une méthode exclusive; ce qui est artificiel est toujours étroit, et le fond n'échappe jamais aux vices de la forme. Mais pourtant, ainsi contrainte, la science n'aura pas été supprimée. La scolastique n'a donc pas été la philosophie réduite à la dialectique, mais aux formes de la dialectique [1]. » Nous

[1] *Abélard*, t. I, p. 303, édit. 1845.

croyons que la philosophie scolastique, dans sa période la plus glorieuse, n'a pas besoin de cette justification. Les Docteurs du XIII[e] siècle surent parfaitement retrouver dans Aristote, et dans leur propre génie, les fondements de l'objectivité de la connaissance. Mais les paroles de M. de Rémusat s'appliquent, dans une juste mesure, à de nombreux Régents des premières Académies, alors que les conditions de la vie scientifique étaient si précaires. Venant d'un critique très-familier avec le moyen âge, elles devraient du moins inspirer quelque réserve aux hommes de notre temps, si ardents à décrier le passé sans le connaître [1].

Ces remarques faites, nous pouvons aborder la partie dialectique de la philosophie de saint Anselme de Cantorbéry.

Nous avons prononcé plus haut le nom de Lanfranc, le premier Régent de l'École du Bec. Disciple de ce maître célèbre, Anselme de Cantorbéry pouvait-il manquer de s'adonner à la Dialectique? C'est en étendant ses investigations à l'ensemble des grandes vérités de la Philosophie et de la Religion qu'il a mérité l'immortalité. La nature l'avait fait métaphysicien. Il nous apprend lui-même que les questions de mots, comme les recherches grammaticales, lui donnaient beaucoup d'ennui [2]. Ce profond esprit fut conduit à devenir dialecticien à la manière d'Alcuin et de Lanfranc. Nul doute : on l'exerça si fort aux subtilités du *Trivium*, qu'il se donna une passion artificielle pour l'art du raisonnement! Il mêle des antithèses dialectiques jusqu'à sa correspondance familière. C'est ainsi que se plaignant à son maître de ce que celui-ci l'avait appelé du nom de *Père*, il écrit ces paroles que nous n'essayerons pas de traduire : « Cur quod des- » truere non potestis *per oppositam negationem*, subvertere

[1] Pour la connaissance et l'appréciation du mouvement dialectique dans la première partie du moyen âge, nous nous permettons d'indiquer au lecteur le II[e] volume de l'ouvrage du D[r] Prantl, *Geschichte der Logik in Abendlande*, pp. 1-160. Seulement il est bon d'avertir que le savant critique de Munich se montre d'une sévérité excessive envers les premiers régents des écoles.

[2] *Ép.*, liv. I, Ép. 55.

» tentatis *per relativam oppositionem?* Precor itaque ut quoties
» litteras dignationis vestrae suscepero aut videam *cui* scribitis,
» aut non videam *cui non* scribitis [1]? »

Devenu le successeur de Lanfranc dans la charge d'Écolâtre et de Prieur, plus tard élevé à la dignité abbatiale, Anselme aura enseigné en son couvent les matières du Trivium [2]. Il nous a laissé un souvenir de ses leçons dans le *Dialogue du Grammairien* ou, si l'on veut, *du Dialecticien;* car au XI^e^ siècle on assimilait fréquemment ces deux appellations. Autre signe de ce temps-là! Sigebert de Gembloux assure que le Dialogue n'était que le commencement d'une *Introduction à la Dialectique* [3]. Nous devons nous arrêter à l'examen de cet écrit. Il est le premier, selon toute apparence, que composa notre Docteur, mais aussi le moindre en mérite et en importance. Sous la forme dialoguée, ordinaire

[1] *Ép.*, liv I, Ép. 48.

[2] D'après don Gerberon, Anselme devint Prieur en 1063, et abbé en 1079. — Ce fut durant son priorat qu'il écrivit le Dialogue : *De Grammatico*, le Monologue, le Prosloge, la Réponse à Gaunilon, les Dialogues *de Veritate, de Casu Diaboli, de Libertate arbitrii* et la plupart des Méditations. — Il fut sacré Archevêque de Cantorbéry en 1093. Un an auparavant, il avait composé le traité : *De Incarnatione Verbi* qu'il acheva plus tard. Les livres *Cur Deus Homo, De Conceptu Virginali, De Processione Spiritus Sancti,* enfin les traités *De Voluntate, De Concordia praescientiae divinae et liberi arbitrii,* les Épîtres *De Azymo* et *De numero Sacramentorum* furent les fruits littéraires de son archiépiscopat. Le saint mourut en 1109, à l'âge de 76 ans. Il était entré au Bec en 1060, à l'âge de 27 ans.

[3] Dans la préface des Dialogues contemporains *De Veritate, De libertate arbitrii, De Casu Diaboli,* écrite durant les premières années de son priorat, Anselme dit : « Quartum (dialogum) edidi, non inutilem, ut puto, » introducendis ad Dialecticam, cujus initium est *De Grammatico.* » Édit. Gerberon, p. 109. — On connaît le témoignage de Sigebert : « Scripsit... » alium librum introducendis ad Dialecticam admodum utilem cujus initium » est : *De Grammatico.* » — *De Script. Eccl.*, p. 168, ap. Fabric., *Bib. Eccl.*, p. 114. — Cf. EADMERUM, *Vit. S. Anselmi,* liv. I, p. 6 : « Scripsit et quartum » (dialogum), quem intitulavit *De Grammatico.* In quo cum discipulo quem » secum disputantem introducit disputans, cum multas quaestiones dialecticas » proponit et solvit, tum *qualitates et qualia,* quomodo sint discrete acci- » pienda exponit et instruit. » — *Chronic. Becc.*, p. 6, ap. d'Achéry.

aux leçons de l'époque, il offre l'image fidèle d'un cours de Logique au XI[e] siècle. C'est un curieux échantillon de la Dialectique pseudo-péripatéticienne, interprétée dans les classes, par les maîtres du Trivium.

Transportons-nous par l'imagination dans la salle scolastique de l'Abbaye du Bec. Elle est modeste, pauvre même, car le monastère est d'assez récente fondation; et l'on sait que lorsque le juriste Lanfranc y vint sacrifier ses espérances de renommée mondaine, le Bec passait pour le plus misérable de la contrée. — Là se rencontraient, comme auditeurs ou comme hôtes, Lanfranc, neveu du maître d'Anselme [1]; Osberne, son enfant de prédilection, conquis au Christ au prix de bien des larmes et de douces remontrances [2]; Maurice qui sera plus tard le correspondant littéraire du laborieux Docteur [3]; Gislebert qui fera pénétrer la méthode de Lanfranc et d'Anselme dans son abbaye de Westminster [4]; Guidon, auquel sera confiée bientôt la surveillance des jeunes élèves [5]; Riculphe, sacristain du couvent et le témoin des miracles du Saint [6]; Anselme de Laon, l'honneur d'Anselme, et l'un des futurs fondateurs de l'*Université des nations* de Paris ([7]). Tout près du maître, ce moine au front chargé de pensées est le clerc Boson, dont l'âme troublée a trouvé tant de charmes dans l'amitié d'Anselme qu'il ne peut plus se séparer de lui [8]. Ceux-là et toute la nombreuse couronne d'élèves et d'amis qui entourent le maître apportent à la leçon une attention, une ardeur extrêmes [9].

D'après l'exposé de l'élève, le thème du Dialogue est, selon

[1] Cf. *Ép.*, liv. I, ép. 22, 31.
[2] Ib., *Ép.* 31.
[3] *Ép.*, liv. I, ép. 33, 51; liv. II, ép. 8.
[4] Cf. Hasse, *Anselm von Canterbury*, t. I, p. 57.
[5] *Ép.*, liv. I, ép. 31.
[6] Eadmer, *Vit. Ans.*, p. 6, ap. Gerberon.
[7] *Hist. litt. de la France*, t. X, pp. 182 sq.
[8] Eadmer, *l. c.*, p. 12.
[9] « Unde bona fama ejus (Anselmi) non modo Normannia tota est repersa,
» verum etiam Francia tota, Flandria tota contiguaeque his terrae omnes :

l'habitude, tiré des Catégories, c'est-à-dire de la version boétienne de ce traité. Ce fut très-probablement un texte des Catégories annoté par le Commentateur qui a donné occasion au Dialogue. Quoi qu'il en soit, il s'agit, entre les interlocuteurs, de déterminer si un Nom qualificatif, celui de *Grammairien*, par exemple, désigne formellement, c'est-à-dire d'*une façon immédiate et première*, la substance ou plutôt la qualité. Le disciple a l'esprit en suspens à ce sujet. Il lui semble qu'il y a des arguments d'égale valeur pour les deux alternatives [1]. Le maître, désireux de faire apercevoir à son élève la différence et le rapport entre le *sujet substantiel* et ses *qualités* (*inter quale et qualitatem*, pour parler avec Eadmer), l'invite à produire ses raisons. — L'élève commence ainsi : Tout Grammairien (conservons l'exemple, il est de Boèce), tout Grammairien est un homme, et tout homme est une substance. Tout ce qu'il y a d'être substantiel dans le Grammairien lui vient uniquement de ce qu'il est homme. Il semble donc que le qualificatif : Grammairien désigne avant tout la substance. — Mais, d'autre part, que le Grammairien désigne la qualité, c'est ce que déclarent expressément les philosophes qui se sont occupés de ces matières, et ce serait impudence que de mépriser en ce sujet leur autorité! Or, continue le disciple, il y a d'évidence erreur dans l'une des deux opinions. Je prie le maître de me la montrer [2].

Nous voilà, dès le début, en pleine dispute logique. Que le lec-

» quin et mare transiit Angliamque replevit. Exciti sunt quoque gentium » multi nobiles, prudentes clerici, strenui milites atque ad eum confluxere, » seque et sua in ipsum monasterium servitio Dei tradidere. » — Eadmer, *op. cit.*, p 8.

[1] *Discip.* « De Grammatico peto, ut me certum facias utrum sit *substantia*, an *qualitas*; ut hoc cognito, *quid de aliis quae similiter denominative dicuntur*, sentire debeam, agnoscam. — *Magist*... Dic primum, » cur dubites! — *D.* Ideo, quia videtur utrumque posse probari neces» sariis rationibus, esse scilicet et non esse. — *M.* Proba ergo. » Chap. I. Édit. Gerberon, t. II, p. 143.

[2] « Ut quidem Grammaticus probetur esse *substantia*, sufficit quia omnis » Grammaticus homo, et omnis homo substantia... Quod vero Grammaticus » sit *Qualitas* aperte fatentur Philosophi qui de hac re tractaverunt : quo-

teur me pardonne si j'ose l'y introduire! Marcianus Capella a peint la Dialectique de son temps sous les traits d'une Furie au front livide, amaigrie jusqu'aux os et les cheveux entortillés de couleuvres. Hélas! si funèbre que soit le portrait de la Muse du Trivium, qui oserait dire que Capella l'a fait trop fidèle? — Mais indiquons, sans plus de retard, l'origine de la discussion. Tout aride qu'elle est, elle touche à des questions dont se préoccupera plus d'un siècle!

Aux yeux d'Aristote, l'être réel, la première substance est *l'individu*, « *ce qui n'est pas dans un sujet, ni ne s'affirme d'un sujet.* » L'essence, ou si l'on veut la notion spécifique, *universelle* s'affirme des types individuels : dans la réalité elle ne subsiste qu'en eux. Ceux-ci, au contraire, ne peuvent ni s'affirmer d'aucun autre, ni subsister ailleurs qu'en eux-mêmes. L'*individu*, le type particulier est seul le terme concret de l'expérience et de la perception : seul il s'offre à l'esprit comme *l'unité réelle*, subsistant dans sa totale et complète réalité; c'est pour cette raison qu'il est nommé par Aristote *la première substance* et le dernier sujet [1]. Le maître ajoute dans les Catégories, que si les premières substances venaient à disparaître, toutes les autres réalités disparaitraient avec elles [2]. Cependant outre l'individu, il y a *l'espèce, le genre*. Sans doute ceux-ci ont leurs caractères distinctifs aussi bien que les

» rum auctoritatem de his rebus est impudentia improbare. Item, quoniam
» necesse est ut Grammaticus sit aut substantia aut qualitas, et quodlibet
» horum sit alterum non sit, et quodlibet non sit, alterum necesse est esse :
» quidquid valet ad instruendam unam partem, destruit alteram; et quidquid unam debilitat, alteram roborat. » Chap. I.

[1] *Οὐσία δὲ ἐστιν ἡ κυριώτατά τε καὶ πρώτως καὶ μάλιστα λεγομένη ἣ μήτε καθ' ὑποκειμένου τινος λέγεται μήτε ἐν ὑποκειμένῳ τινί ἐστιν, οἷον ὁ τὶς ἄνθρωπος ἢ ὁ τὶς ἵππος. Categ.*, chap. III, n° 1.

Τὸ ὑποκείμενον ἔσχατον, ὁ μηκέτι κατ' ἄλλου λέγεται. Met., liv. V (al. IV) chap. 8.

Μὴ οὐσῶν τῶν πρώτων οὐσιῶν, ἀδύνατον τῶν ἄλλων τί εἶναι. Categ., chap. 5.

[2] *Τῶν δὲ τῶν δευτέρων οὐσιῶν φαίνεται μὲν ὁμοίως τῷ σχήματι τῆς προσηγορίας τόδε τι σημαίνειν, ὅταν εἴπῃ ἄνθρωπον ἢ ζῶον· οὐ μὴν ἀληθές γε· ἀλλὰ*

types individuels. Aristote lui-même en fait la remarque. Mais c'est pour noter que l'Espèce et le Genre ne sont pas à proprement parler des substances (τόδε τι). La notion universelle, s'affirmant de plusieurs êtres, se dit d'un sujet et existe dans un sujet. Elle est en un sens plutôt *une qualité* qu'une réalité subsistant par soi (ποιόν τι). Les Dialecticiens lui ont donné le nom de *substance seconde.* Toutefois les critiques notent qu'Aristote a reconnu une grande différence entre cette qualité substantielle ou l'espèce, et les simples modes de l'être. La substance première, l'individu ne peut se concevoir sans la substance seconde : *cet homme-ci* ne peut être pensé *à part de l'humanité.* Au contraire, les déterminations modales, celle du Grammairien, par exemple, n'ont pas avec les individus un rapport nécessaire et déterminé. C'est pourquoi Aristote les nomme des *qualités adhérentes et extrinsèques,* en opposition avec l'espèce qu'il appelle la *qualité inhérente et intrinsèque* [1].

On aperçoit déjà ce qui a pu brouiller l'élève d'Anselme. — Le

μᾶλλον ποιόν τι σημαίνει. *Categ.*, chap. 3, n° 16. — Je ne puis m'empêcher, en transcrivant ce texte, de rappeler les paroles qu'écrit à ce propos le Dr Prantl : « Man sieht hier handgreiflich, wie gewisse Grundzüge, welche » tief ontologisch bei Aristoteles gedacht waren, in der Schule verknöcherten und » *nur mehr formale bedeutung* hatten. Der Ausdruck δεύτεραι οὐσίαι kömmint » den gesammten schriften der Aristoteles auf nich ein einziges mal vor » (t. I, p. 243). — C'est le lieu de dire que le critique de Munich doute très-fort de l'authenticité du fameux Traité. Toutefois ses arguments reposent plutôt sur des conjectures internes que sur des raisons tout à fait convaincantes. — Voyez M. Barthélemy de St-Hilaire, *Logique d'Ar.*, t. I, Préface.

[1] M. de Rémusat écrit à ce sujet : « La substance qu'Aristote refuse au genre, c'est la substance première ou proprement dite, car il appelle les Genres et les Espèces *substances secondes*, parce qu'ils expriment des attributs subtantiels (et non accidentels) de l'individu. » (*Abélard*, t. I, p. 335.) — Nous venons d'apprendre de M. Prantl qu'il n'est pas certain que l'appellation de *substance seconde* soit d'Aristote lui-même. Mais, entendue comme le veut M. de Rémusat, elle est conforme à ses idées. — Voir dans M. Hauréau, t. I, pp. 55 et suiv. les développements sur la doctrine générale d'Aristote concernant la substance. — On doit également consulter le Dr Prantl, vol. I, pp. 187 et suiv., 217 et suiv.

Grammairien semble d'évidence un *nom de qualité*. Mais en même temps il désigne un individu, c'est à dire une *substance première*. Dans le Trivium cette équivoque pouvait causer quelque émotion!

Ce n'est pas tout. Le Grammairien implique un être très-réel. Or, la Qualité est la troisième des *catégories;* et les Catégories, de l'aveu répété du maître, n'expriment pas de *vraies réalités :* elles sont simplement la formule *verbale* des manières d'être de la substance. Il est vrai qu'Aristote range aussi la *substance* parmi les Catégories. Par là, il aura simplement voulu avertir que tous les êtres complets de la nature sont des substances premières, des individus [1]. Néanmoins, dès qu'on les envisage au point de vue de l'espèce, c'est-à-dire de la *substance seconde*, ces mêmes êtres ne sont plus qu'un type abstrait, un universel logique. Sous ce dernier rapport, l'affirmation d'Aristote sur le concept purement conceptuel des Catégories se vérifie aussi de la Substance. — Seulement, c'est la remarque de MM. Barthélémy de S[t]-Hilaire et Hauréau, en ce qui concerne la signification des noms de qualité, le langage du maître et des Glossateurs est loin d'être explicite. Ceux qui ont lu l'Organon et la Métaphysique savent si l'observation est exacte! Quoi d'étonnant qu'un Professeur du XI[e] siècle ait voulu simplifier, à la manière de son temps, l'exposition d'un point encore embrouillé aujourd'hui, et qu'on estimait très-grave?

Boèce, l'auteur classique des Écoles venait accroître cet embarras. Dans son interprétation des Catégories, à l'occasion des *termes qualificatifs*, il explique celui de Grammairien par le nom d'une personne, d'une *substance première :* celui d'Aristarque. Ailleurs, il apporte ce même terme de Grammairien comme exemple de la Catégorie *de la qualité*. Nous croyons, avec le D[r] Prantl, que cette équivoque fut l'occasion de la présente dispute, qui troublait fort régents et écoliers, au témoignage d'Anselme [2]. — Enfin dans ses notes sur Porphyre, Boèce insinue que le Stagyrite distribue les êtres en deux grandes classes, l'une comprenant les

[1] Cf. DE RÉMUSAT, *Abélard*, I, p. 334.

[2] *De Grammatico*, chap. XXI.

substances, l'autre les accidents, auxquels il subordonne les neuf Catégories. Or parmi celle-ci, la *Qualité* occupe le second rang. — En présence de toutes ces ambiguïtés au moins apparentes, on pouvait s'informer, dans un cours de Logique formelle si le titre de *Grammairien* désignait une substance ou bien un accident, à l'instar des autres noms de qualité !

Il est temps de résumer, avec la patience qu'elle exige, l'aride discussion.

L'élève d'Anselme doute s'il faut considérer les noms *adjectifs* en genéral comme *des noms de substance* ou comme *de simples noms de qualité.* Nous avons entendu les motifs de son scrupule. — Vos premières conclusions, lui répond le maître, ont été déduites de leurs prémisses en toute rigueur. Vous vous trompez uniquement en ce que vous croyez que les deux énonciations, — l'une: le Grammairien est un homme et par conséquent une substance; l'autre: le Grammairien désigne la qualité, — ne peuvent être vraies en même temps. Je voudrais vous montrer qu'elles peuvent très-bien coexister [1]. Avant tout, ne pourriez-vous pas indiquer vous-même ce qui paraît vicieux dans votre précédente argumentation? Là-dessus, après d'assez longs circuits, s'adressant à son élève, il fait ce raisonnement : nul homme ne peut être conçu à part de la rationalité. En concluez-vous que nul homme n'est un animal? C'est pourtant une semblable argumentation que vous avez faite à propos du Grammairien (chap. III) [2].

[1] « Argumenta, quae ex utraque parte posuisti *necessaria* sunt; nisi quod » dicis, si alterum est, alterum esse non posse. Quare non debes a me exi- » gere, ut alteram partem esse falsam ostendam, quod ab ullo fieri non » potest : sed quomodo sibi invicem non repugnent aperiam, si a me fieri » potest : sed vellem ego prius a te ipso audire quid his probationibus tuis » objici posse opineris. » Chap. II.

[2] « *M.* Dic ergo in ipsa propositione quod intelligis. — *D.* Omnis homo » potest intelligi homo sine Grammatica. — *M.* Concedo : assume. — *D.* Nullus » Grammaticus potest intelligi Grammaticus sine Grammatica. — *M.* Junge.. » Vide ergo utrum habeant communem terminum : sine quo nihil efficiunt. — » *D.* Video eas non habere communem terminum, et idcirco nihil ex eis con- » sequi (chap. IV). — *M.* Conficitur ergo quia esse Grammatici non est esse » Hominis, id est, non esse eamdem definitionem utriusque... Non tamen inde » consequitur Grammaticum non esse hominem, sicut tu intelligebas. » (Chap. V.)

Cette observation conduit l'élève à exposer d'une manière plus complète ses prémisses qui reviennent à celles-ci : nul Grammairien, *en tant que Grammairien*, ne peut être pensé à part de la Grammaire. L'homme, *en tant qu'homme*, n'implique d'aucune façon le concept de Grammairien (chap. IV-V). Anselme montre ensuite en quel sens la qualité de *Grammairien* ne s'affirme pas de l'homme, ainsi que l'avait dit l'élève. L'homme, en tant qu'homme, ne peut certes être considéré comme un Grammairien. Suit-il de là que le Grammairien n'est pas un homme? (Chap. VI.) La conclusion de cette observation est que le nom qualificatif *Grammairien* et les adjectifs en général ne signifient pas *simplement* la substance, mais bien *la qualité spéciale qu'ils énoncent* (chap. VII) [1]. — Hélas! ces trop abondants détails n'ont pas persuadé l'élève. Si l'essence du Grammairien n'est pas celle de l'homme, objecte-t-il, comment répondre à celui qui tiendrait que le Grammairien n'est pas un homme? (Chap. VIII.) C'est précisément la doctrine d'Aristote qui brouille son esprit [2]. Selon le Stagyrite, *le Grammairien se dit d'un sujet.* Com-

[1] « Non enim dici potest quia nullus Grammaticus intelligi valet *aliquo* » *modo* sine Grammatica; aut omnis homo valet *quolibet modo* intelligi sine » Grammatica : nam omnis homo qui Grammaticus est, potest intelligi homo » sine Grammatica, et nullus homo potest intelligi Grammaticus sine Gram- » matica. Quapropter non possunt conficere Grammaticum nequaquam esse » hominem. » (Chap. VII.) — « Quare intelligi debet illa tua argumentatio hoc » modo : si esse Grammatici non est *simpliciter* esse hominis; qui habet » essentiam Grammatici, non ideo sequitur, ut habeat *simpliciter* essentiam » hominis. Similiter intelligendum est quia *simpliciter* homo non sequitur » Grammaticum, id est, si Grammaticus est, non sequitur ut sit simpliciter » homo; ita vero nihil aliud sequitur, nisi nullus *Grammaticus est simpliciter* » *homo*, *D.* Nihil clarius. » (Chap. VIII)

[2] « *D.* Aristoteles ostendit *Grammaticum* eorum esse quae sunt in sub- » jecto : et nullus homo est in subjecto : quare nullus Grammaticus est » homo. *M.* Noluit Aristoteles hoc consequi e suis dictis : nam idem Aristo- » teles dicit *quemdam hominem*, et *hominem*, et *animal Grammaticum.* — » Responde mihi : cum *loqueris* mihi de *Grammatico*, unde te intelligam » loqui; de hoc *nomine*, an de *rebus quas significat?* — *D.* De rebus. — » *M.* Quas ergo *res* significat? *D. Hominem* et *Grammaticam*... *M.* Dic ergo :

ment le Grammairien signifierait-il dès lors la substance dont Aristote affirme qu'elle n'est pas dans un sujet, ni ne se dit d'un sujet? — Vous oubliez, réplique le maître, qu'Aristote décompose logiquement le Grammairien dans *l'homme*, *l'animal* et *la qualité de Grammairien*. Le Grammairien n'est pas dans un sujet; il est *substance première* en tant qu'il désigne *un certain individu humain;* il est dans un sujet non *comme substance seconde*, mais comme simple accident intrinsèque, c'est-à-dire en tant précisément que *Grammairien* (chap. IX).

Quant aux formules d'Aristote, elles ne prouvent pas que le Grammairien ne soit pas une substance. Car, en une certaine manière (*secundum quid*), le Grammairien n'est pas dans un sujet; il désigne un *genre* ou une *espèce* et il se dit de *la nature commune*. C'est un *homme*. Sous ce rapport, il appartient à l'*espèce*. C'est encore un *animal* et en cela il appartient au *genre*. — Enfin le Grammairien, en réalité, est un être individuel. Socrate est homme, animal et Grammairien (chap. X) [1]. — Le disciple ne peut rejeter l'argumentation du maître : pourtant il ne se rend pas encore. Il note que les Manuels de Dialectique, à propos de la

» Homo est *substantia*, an *in subjecto*? *D.* Non est in subjecto, sed est sub-
» stantia. *M.* Grammatica, est *qualitas* et *in subjecto? D.* Utrumque est
» *M.* Quid ergo mirum, si quis dicat quia Grammaticus est substantia, et non
» est in subjecto, *secundum hominem*, et : Grammaticus est qualitas et in
» subjecto, *secundum Grammaticam.* » (Chap. IX.)

[1] « *M.* Memento dictorum Aristotelis, quae paulo ante dixi, quibus dicit
» Grammaticum et *primam* et *secundam substantiam;* quia et hominem
» quemdam, et hominem et animal, Grammaticum dici testatur : sed tamen.
» unde probat, Grammaticum non esse primam, aut secundam substantiam?
» *D.* Quia est in subjecto, quod nulla substantia est : et dicitur de pluribus,
» quod primae non est : nec est genus, aut species, nec dicitur in eo quod quid;
» quod est secundae. *M.* Nihil horum, si bene meministi quae jam diximus,
» aufert Grammatico substantiam : quia *secundum aliquid* Grammaticus non
» est in subjecto, et ut genus et species; et dicitur in eo quod quid : quia est
» et homo, qui species est; et animal quod est genus; et haec dicuntur in eo
» quod quid. Est etiam individuus, sicut homo et animal : quia quemadmo-
» dum quidam homo est (D. Gerberon a lu mal : et) quoddam animal; ita qui-
» dam Grammaticus est individuus. Socrates enim et homo et animal est et
» Grammaticus. » (Chap. X.)

Catégorie de la *qualité*, en donnent pour exemple *le Grammairien*, tandis qu'ils n'apportent jamais cet exemple en parlant de la substance. En outre, le Grammairien, selon le Maître, est tout ensemble un nom de *qualité* et un nom de *substance*, puisqu'il exprime l'*homme* et de plus *la Grammaire!* Mais le terme *homme* exprime également et la substance humaine et toutes ses différences, par exemple la sensibilité et la mortalité. Jamais cependant, comme exemple d'un nom de *qualité*, on n'apportera le nom d'*homme* (chap. XI) [1]. — Anselme répond en faisant ressortir la différence des deux cas allégués. *Par concomitance*, dit-il, le nom d'homme désigne, dans leur ensemble, toutes les notes essentielles de l'être humain, mais *directement* ce mot porte sur la substance. C'est, ajoute-t-il avec un sens plus profond cette fois, que la substance est le principe des autres attributs qui ne peuvent exister sans elle [2], tandis qu'elle-même peut être

[1] « *D.* Nullatenus itaque credam sine aliqua alia ratione tractatores Dialecticae tam saepe et tam studiose in suis libris scripsisse quod idem ipsi colloquentes dicere erubescerent : saepissime namque cum volunt ostendere qualitatem, aut accidens subjungunt : ut Grammaticus et similia : cum Grammaticum magis esse substantiam quam qualitatem aut accidens, usus omnium loquentium attestetur; et cum volunt aliquid docere de substantia, nusquam proferunt, ut Grammaticus, aut aliquid hujusmodi. » (Chap. XI).

[2] « *M.* Nempe nomen hominis per se, *et ut unum*, significat ea ex quibus constat *totus homo*, in quibus substantia principalem locum tenet, quoniam est causa aliorum, et habens ea non ut indigens illis, sed ut se indigentia. Nulla enim est differentia substantiae sine qua substantia inveniri non possit, et nulla differentiarum ejus, sine illa potest existere. Quapropter, quamvis omnia simul velut unum totum, sub una significatione uno nomine appellentur homo : sic tamen principaliter hoc nomen est significativum et appellativum substantiae... Grammaticus vero non significat hominem et Grammaticam, ut unum; sed Grammaticam per se et hominem per aliud significat : et hoc nomen quamvis sit *appellativum* hominis, non tamen proprie dicitur ejus *significativum*, et licet sit significativum Grammaticae, non tamen proprie est ejus appellativum. Appellativum autem nomen cujuslibet rei nunc dico quo res ipsa usu loquendi dicitur : nullo enim usu loquendi dicitur : *Grammatica est Grammaticus*, aut *Grammaticus est Grammatica;* sed *homo est Grammaticus* et *Grammaticus est homo.* » (Chap. XII)

conçue sans les différences modales (chap. XI). Sur une nouvelle instance de l'élève, Anselme ajoute : Pour vous faire toucher du doigt votre erreur, supposons qu'un être différent de l'homme ait connaissance de l'art grammatical. En maintenant votre sentiment, vous devez nécessairement le tenir pour *un être différent de l'homme*, mais dont la définition soit néanmoins : *un homme sachant la Grammaire* (chap. XIII)! D'eux-mêmes, les noms qualificatifs impliquent uniquement *la possession de la qualité.* Mais par concomitance ils indiquent *son sujet.* C'est pour cette raison qu'instinctivement nous les rapportons à celui-ci, et que nous prenons aisément un nom de qualité pour un nom de substance. En pure dialectique, c'est là une erreur. Aristote a vu et indiqué ce rapport, lorsqu'il a rapporté le nom de Grammairien à la Catégorie de la *qualité* (chap. XIV-XV-XVI) [1]. — Et à propos de Caté-

[1] « *M.* Ponamus quod sit animal aliquod rationale, non tamen homo, quod et » sciat Grammaticam, sicut homo... Est igitur aliquis non homo sciens Grammaticam. — *D.* Consequitur. *M.* Sed tu dicis in Grammatico intelligi hominem. *D.* Dico. — *M.* Quidam ergo *non-homo* est *homo*, quod falsum est. » *D.* Ad hoc ratio deducitur. *M.* Non ergo vides, quia *Grammaticus* non ob » aliud magis videtur significare hominem quam *albus;* nisi quia Grammatica » soli homini accidit, albedo vero non soli homini? (Chap. XIII.) *D.* Satis mihi » probasti Grammaticum non *significare* Hominem... Exspecto ut Grammaticum ostendas *significativum esse Grammaticae..* quoniam dixisti Grammaticum significare *Grammaticam per se* et *hominem per aliud*, peto ut » aperte mihi has duas significationes distinguas, ut intelligam quomodo » Grammaticus non sit significativum ejus quod aliquo modo significat ; aut » quomodo sit appellativum ejus cujus significativum non est... Nomen equi » (v. g.), etiam priusquam sciam ipsum equum album esse, significat mihi » equi substantiam per se, et non per aliud. Nomen vero *albi* (v. g.), equi » substantiam significat non per se, sed per aliud ; id est, per hoc quod scio » equum esse album ; cum enim nihil aliud significet hoc nomen quod est » *albus* quam haec oratio quae est *habens albedinem;* sicut haec oratio per » se constituit mihi intellectum albedinis, et non ejus rei quae habet albedinem, ita et nomen. (Chap. XIV.) — Cum enim in definitione nominis vel » verbi dicitur, quia est vox *significativa;* intelligendum est non alia significatione quam ea quae *per se* est (chap. XV)... Cum vero dicitur quod » Grammaticus est *qualitas*, non recte nisi secundum tractatum Aristotelis » de Categoriis dicitur. » (Chap. XVI.)

gories, le maître rappelle à l'élève que leur but direct est d'exprimer la signification formelle des modes de l'être fini, mais nullement l'être qu'ils présupposent (chap. XVII)[1]. C'est la spécialité des Dialecticiens de s'en tenir à cette signification directe *des mots* (chap. XVIII)[2]. Cette réflexion amène enfin Anselme à remarquer qu'un même mot peut appartenir à plusieurs Catégories. Le

[1] « Non fuit principalis intentio Aristotelis, hoc in illo libro ostendere (scilicet, quia omne quod est aut *est* substantia, aut qualitas, aut quantitas, etc.), » sed quoniam omne nomen, vel verbum aliquid horum *significat :* non enim » intendebat ostendere quid *sint* singulae res, nec quarum rerum sint *appellativae* singulae voces, sed quarum *significativae* sunt. Sed quoniam *voces* » non significant nisi *res*, dicendo quid sit quod voces significant, necesse » fuit dicere quid *sint res.* » (Chap. XVII.)

[2] « Quare quia constat Grammaticum non significare, secundum hanc » divisionem, *hominem*, sed *Grammaticam*, incunctanter respondebo, si » quaeris *de voce*, quia est vox *significans* qualitatem ; si vero quaeris » de *re*, quia *est* qualitas... Non enim movere nos debet quod Dialectici » aliter scribunt de vocibus, secundum quod sunt *significativae ;* aliter » eis utuntur, secundum quod sunt *appellativae ;* si et Grammatici aliud » dicunt secundum formam vocum, aliud secundum rerum naturam. (Chap. » XVIII.) *M.* Rem quidem unam et eamdem non puto sub diversis aptari posse » praedicamentis, licet in quibusdam dubitari possit... Unam autem vocem » plura significantem non ut unum non video quid prohibeat pluribus ali- » quando supponi praedicamentis, ut si albus dicitur *qualitas* et *habere.* — » *D.* Cur autem non *est* homo, secundum divisionem Aristotelis, substantia » et qualitas, quia utrumque *significat :* quemadmodum est *albus qualitas* » et *habere*, propter utriusque significationem? *M.* Aestimo huic interro- » gationi illud posse sufficere quod supra dixi, quia est *principaliter* signifi- » cativum substantiae et quia illud unum, quod significat, substantia est; et » non *qualiter* sed *quale :* albus vero nihil principalius, sed *pariter* significat » *qualitatem* et *habere ,* nec sit unum ex his, quod magis sit hoc vel illud, » cujus sit *albus* significativum. (Chap. XIX.) *M.* Unum non fit ex pluribus » nisi aut compositione partium quae sunt ejusdem praedicamenti, ut animal » constat ex corpore et anima; aut convenientia generis et differentiae unius » vel plurium; ut corpus et homo; aut specie et proprietatum collectione; ut » Plato. Illa vero quae (v. g.) *albus* significat... sunt accidentia ejusdem sub- » jecti; quod tamen subjectum *albus* non significat quia omnino nihil signi- » ficat aliud, quam *habere* et *qualitatem.* Quare non fit unum ex his quae » *albus* significat. (Chap. XX.) *M.* Non agitur utrum omnis qui est *albus* sit

mot *Blanc,* par exemple, est réductible aux Catégories de la *qualité* et de celui qui la possède. Le terme homme appartient à la seule catégorie de la *substance.* C'est que l'homme individuel est un tout organique, concentrant tous les éléments qui le constituent, dans l'unité de son être. Le qualificatif *Blanc,* au contraire, n'implique pas une unité pareille, car il n'a de réalité qu'en la substance qui possède la Blancheur (chap. XIX) [1]. Si l'adjectif *Blanc,* par exemple, signifiait directement *quelque chose de blanc,* qui ne voit que l'expression *quelque chose de blanc* se ramènerait logiquement à : *Quelque chose de Blanc-blanc,* et ainsi à l'infini? — Cette fois, on le pense bien, l'élève est dûment persuadé! Le maître termine sa dispute, en rappelant les débats que son objet provoquait entre les graves Dialecticiens. Dussent-ils renverser son argumentation, elle n'aurait pas été sans fruit. N'aurait-elle pas fourni matière à une discussion sur les Catégories?

» aliquid, aut sit qui habet (albedinem); sed utrum hoc *nomen* sua *significatione* contineat id quod dicitur aliquid, aut qui habet, sicut homo *continet* » *animal :* ut quomodo homo est animal rationale mortale, ita albus sit » aliquid habens albedinem, aut qui habet albedinem... *Albus* ergo non est » aliud quam *qui* albedinem habens *est? D.* Non aliud... *M.* Idem est igitur » albus, quam *qui albus est. D.* Sic sequitur. *M.* Ubicunque itaque ponitur » *albus,* recte pro eo accipitur *qui albus est? D.* Non possum negare. *M.* Si » ergo albus est qui albus est; est etiam : qui qui albus albus est est; et si » hoc, est etiam qui, qui, qui-albus-est, est, est; et sic in infinitum. *D.* Non » hoc minus consequens, nec minus absurdum est, quam ut *saepe* sit aliquid » aliquid... Satis apparet quia per *album* non *significatur aliquid habens* » *albedinem,* nec *qui habet albedinem,* sed tantum *habens albedinem;* id » est, *qualitas* et *habere*... Quam rationem in omnibus quae sine complexione dicuntur, et similiter significant quaelibet plura, ex quibus non fit » unum, valere video : nec aliquid his, quae in hac disputatione asseruisti, » objici recte posse existimo. *M.* Nec mihi nunc videtur : tamen quoniam scis » quantum nostris temporibus Dialectici certent de quaestione a te proposita, » nolo te sic his, quae diximus, inhaerere, ut ea pertinaciter teneas; si quis » validioribus argumentis haec destruere et diversa valuerit adstruere : quod » si contigerit, saltem ad exercitationem disputandi nobis haec profecisse » non negabis. » (Chap. XXI.)

[1] Cet exemple tiré de la *blancheur* est *classique :* il se retrouve partout chez Aristote d'où il passa aux Glossateurs : Voyez, entre autres, l'*Hermeneia,* chap. IX et chap. XII. — *Métaph.,* liv. VII, chap. IV.

Nous avons dû reproduire les principales parties du Dialogue *de Grammatico*, le seul traité où Anselme s'occupe de Dialectique. Si rapide que soit notre analyse, elle nous a paru trop longue encore : elle le paraîtra surtout au lecteur. Nous ne surprendrons personne, en ajoutant que le premier Traité de notre Docteur a été l'objet de jugements contradictoires. Les doctes écrivains de l'*Histoire littéraire de France* estiment que le Dialogue inaugura en Occident une ère de progrès pour la science logique [1]! Avec une urbanité exquise, M. de Rémusat l'appelle un bon livre sur un point de Dialectique [2]! Le Dr Hasse de Bonn, en général fort complaisant pour son auteur, admire l'habileté magistrale avec laquelle S. Anselme y traite des Catégories [3]! M. Cousin déclare que le Dialogue n'a pas plus de valeur que le morceau aussi ennuyeux, aussi insignifiant de Gerbert : *de rationali et ratione uti* [4]. Le Dr Prantl en est encore plus mécontent : C'est un jeu prolongé et sans esprit, dit-il, basé sur des textes empruntés à Boèce, où l'on se donne le stérile labeur de soulever, puis de résoudre à fond des difficultés qui n'en sont pour aucun homme sensé. Le Dialogue restera une preuve de l'impuissance du réalisme jusque dans la sphère de la logique [5]. — Je n'aperçois pas trop ce que le réalisme vient faire ici. Mais j'ai hâte de confesser que le Dialogue serait, par lui seul, une bien médiocre recommandation pour la mémoire d'Anselme. Si tous ses écrits eussent présenté un caractère pareil, ils n'auraient eu pour la postérité qu'un intérêt purement archéologique, comme les traités de Frédégise et des autres Glossateurs.

Sous ce rapport du moins, notre Dialogue offre quelques curiosités. Il nous apprend mieux que nul document antérieur ou contemporain, sous quelle forme apparaissait aux premiers Docteurs du moyen âge, la Dialectique d'Aristote. Pour eux les *Catégories* avec leur appendice de l'*Interprétation* étaient tout

[1] T. VII, p. 131.
[2] *Saint Anselme*, p. 102.
[3] *S. Ans. von Cant.*, t. II, p. 76.
[4] *Op. ined. Abæl.*, p. 102.
[5] T. II, p. 89.

Aristote. Ils ignoraient que c'était là le moins important des livres de l'Organon : il n'avaient pas le moindre doute au sujet de son authenticité [1]. Comme les gentilshommes d'un seul quartier, ils n'avaient garde de scruter curieusement ses origines. Beaucoup d'entre eux prenaient pour une vraie traduction des Prédicaments le court résumé du pseudo-Augustin. Déjà Andronicus (50 av. J.-C.), le premier interprète d'Aristote après Tyrannion l'éditeur de ses œuvres; déjà Adraste (150 ap. J.-C.) avaient opiné que la première partie seulement (chap. I-IX) était l'œuvre du Maitre. Les Régents du Trivium l'ignoraient. Ah! s'ils avaient pu du moins se renseigner sur la portée du trop fameux Traité! Aux yeux du Stagyrite, les Catégories étaient les attributions les plus générales de *la substance première*, c'est-à-dire de l'Être individuel. Celui-ci ne peut subsister, dans la réalité, qu'avec des formes déterminées; les déterminations dont il est susceptible peuvent se ramener à certains types dont le nombre est fixe, limité. Ces prédicables généraux de la substance, Aristote les a nommés *les Catégories* (Κοινῇ κατηγορούμενα). Il en énumère trois principales : la *Substance* (οὐσία), la *Passion* (πάθος) et la *Relation* (πρός τι). Ailleurs, il y ajoute les six déterminations suivantes : la *Qualité* (ποιόν), la *Quantité* (ποσόν), le *Lieu* (ποῦ), le *Temps* (ποτέ), l'*Action* (ποιεῖν). Il compte encore parmi les catégories la *Position* (κεῖσθαι) et la *Possession* (ἔχειν). Le Dr Prantl estime que le caractère peu circonscrit des Catégories de la *Possession* et de la *Position*, réductibles à celles de la *substance* et du *Lieu*, montre assez qu'Aristote n'a pas entendu dresser un inventaire rigoureux des Prédicaments. Il n'aura voulu qu'indiquer les principales déterminations de l'être, *au point de vue du discours*, du jugement énoncé. — C'est ce qu'il déclare en plusieurs endroits de la Métaphysique [2]. La signification formelle, *verbale* des Catégories était insinuée dans la version

[1] Voir dans le Dr Prantl les motifs de ses doutes touchant l'authenticité des Catégories; t. I, pp. 90-91.

[2] Voir les preuves de ce point dans Prantl, t. I, pp. 185 et suiv.; p. 205 sqq.

de Boèce [1]; Anselme y a trouvé ce renseignement. Mais sur le rapport ultérieur des prédicables avec la réalité, l'Organon restait muet. Le traducteur latin ne suppléait pas à ce silence. Il connaît le vrai sens des catégories [2], mais il oublie par malheur d'indiquer le lien qui rattache la Dialectique et le concept à la nature, à la réalité. — De la sorte isolés des autres parties de l'Organon, les Prédicaments poussaient d'eux-mêmes les esprits dans la voie des abstractions verbales. La subtile terminologie dont la seconde partie du Traité contenait tant d'exemples, et plus encore, la forme vague des trois dernières Catégories qui devaient donner tant de soucis à Abélard, à Gilbert de la Porrée et même à Leibnitz, renforçait ce péril. Il avait été préparé de longue main par l'enthousiasme de Boèce lui-même pour la dizaine catégorique! Ne l'avait-il pas *nommée* « la pléiade sacrée des sciences, la clef de la Philosophie, le nombre auquel il est interdit de rien ajouter? »

Le Dialogue *de Grammatico* est presque en totalité inspiré par le classique consulaire. La manière dont Anselme y expose la catégorie de la qualité et jusqu'aux termes où il la décrit (chap. II; VI); la décomposition du concept de Grammairien en *substance individuelle :* un homme déterminé, Aristarque, par exemple, en *genre* Animal; et en *différence spécifique :* Grammairien (chap. IX); la définition qu'il donne de la seconde substance (*in eo quod quid*) (chap. X); la division des mots en *significatifs* et en *appellatifs* (chap. XII); les remarques sur le rapport de la qualité *de Grammairien* avec la substance (chap. XIII), et sur la signification pre-

[1] « Eorum quae secundum nullam complexionem dicuntur singulum aut » substantiam *significat*, aut quantitatem, aut qualitatem, aut ad aliquid » aut ubi, aut quando, aut situm esse, aut habere, aut agere, aut pati. » *Categ. IV*, in Boeth. Versione.

[2] « Decem praedicamenta quae dicimus infinitarum in vocibus significatio» num genera sunt; sed quoniam omnis vocum significatio *de rebus* est, quae » voce significantur, in eo quod significantes sunt, genera rerum necessario » significabunt. — Non de rerum generibus neque de rebus, sed *de sermo*» *nibus* rerum genera significantibus in hoc opere tractatus habetur. » — Praef. *Boëthii ad Com. in Categor.*

mière et immédiate des noms de qualité (chap. XIII ; XVI); tout cela est emprunté à Boèce. C'est à la même source qu'il faut rapporter les oppositions, les conversions, les jeux de mots dialectiques, les dilemmes apparents, enfin les nombreuses alternatives logiques, l'une des particularités du Dialogue.

S. Augustin aussi a pu fournir occasion au Dialogue. On rencontre, dans le traité *de Quantitate animæ*, un passage où le docteur d'Hippone parle du « Grammairien », en des termes que l'on ne saurait lire sans penser à Anselme. — Augustin cherche la définition du Grammairien. Voyons, dit-il, si celle-ci est correcte : Le Grammairien est un animal raisonnable mortel qui est Grammairien. Il est certes erroné de dire : tout homme raisonnable mortel est Grammairien. Et cependant si nous faisons subir à la proposition une simple conversion, nous obtenons ce sens-ci qui est exact : Tout animal raisonnable et mortel qui est Grammairien est un homme [1]. Il serait superflu d'insister sur l'analogie de ce passage avec le principal objet du dialogue de S. Anselme. Si le disciple de Lanfranc eût ramené ses longues explications à la remarque d'Augustin, en l'étayant de quelques exemples, la Philosophie y aurait perdu assez peu, et nous aurions pu épargner au lecteur de trop longs ennuis! Mais ce laconisme n'était pas dans les mœurs. Ne fallait-il pas apprendre aux élèves du Trivium à raisonner *selon les règles?* Dans une classe de Logique, il n'était pas

[1] « Sed tentemus eam, si placet (definitionem hominis), utrum vitio non » vacillet, quo illa hominis, cui Grammaticum est additum, esse hominem » dictum est animal rationale mortale Grammaticum : eo que peccare istam » definitionem, quod conversione vera est, cum prima enunciatione sit falsa. » Namque falsum est : omnis homo animal rationale mortale Grammaticum » est ; quamvis verum sit : omne animal rationale mortale Grammaticum » homo est. Ergo ideo vitiosa est haec definitio, quod nihil quidem praeter » hominem sed non omnem hominem tenet. » — *De Quantitate animae*, chap XXV. — Notons ici l'adjectif *mortel* qui peut paraître étrange dans la définition de l'homme, et que nous retrouvons presque partout au moyen âge. Ce terme venait à Augustin de Platon. Les Scolastiques purent le tirer aussi de l'*Isagoge* (p. 16 de la trad. de M. de Saint-Hilaire), ou de Boèce, *in Top. Cicer.*, p. 804. — *De Consol. phil.*, liv. I, p. 898. — Voir de Rémusat, *Abélard*, t. I, q. 379.

plus permis aux disciples d'aller à la vérité tout droit, qu'au malade de Molière de guérir sans l'avis de la Faculté.

Je n'ai garde de faire l'apologie des longueurs et des raffinements logiques du *Grammairien.* Ils ne se rencontrent pas uniquement dans ce premier traité. Les Dialogues théologiques, le Monologue et le Prosloge n'en sont pas tout à fait exempts; nous le verrons en son lieu. Mais il faut le dire : c'est à Porphyre et aux glossateurs, en partie aussi aux circonstances, de porter la responsabilité de ces défauts qui choquent si fort nos habitudes d'esprit Pour peu qu'on se rappelle les exemples de ses devanciers, l'on est même obligé d'avouer que le Dialogue d'Anselme accuse un certain progrès. D'après le Dr Prantl, si sévère pour le Fragment dialectique, ce fut l'erreur d'un grand nombre de maîtres de logique d'assimiler les énoncés catégoriques aux déterminations *réelles* de la substance, et de confondre absolument la notion, l'expression verbale et la réalité objective. Eh bien! cette aberration, du moins ici, Anselme ne l'a pas commise. Il déclare, au chapitre XVII, que l'intention d'Aristote, en ce traité, a été uniquement d'énoncer la signification formelle et immédiate des mots.

Le croirait-on? La question des noms de qualité, qui a paru si oiseuse à M. Cousin et qui l'est en effet, exerça le zèle du fameux dialecticien du Pallet. Elle était bien vraiment à l'ordre du jour! — « Soit posée la question, dit M. de Rémusat : un nom signifie-t-il tout ce qui est dans la chose à laquelle le nom a été imposé, ou bien seulement ce que le mot même dénote et ce qui est contenu dans l'idée qu'il exprime? Abélard se décide pour cette dernière opinion, qui était celle d'un certain Garmond contre Guillaume de Champeaux... Chacun de ces noms ne signifie que l'idée qu'il excite dans l'esprit. » A ce propos Abélard entre dans des détails fort semblables à ceux de notre Dialogue. Le savant critique ajoute : « Il y a dans cette opinion de Garmond, adoptée par Abélard, contre le sens apparent de quelques mots d'Aristote et de Boèce, une tendance louable à subordonner la Dialectique à la psychologie [1]. » Accordons cela : seulement,

[1] *Abélard*, t. I, p. 595.

avant l'inconnu qui s'appelle Garmond, et avant le Palatin, Anselme avait écrit un traité exprès dans le même esprit. Que ce soit là encore une excuse du Dialogue!

Nous avons entendu nommer tout à l'heure Guillaume de Champeaux auquel on se complaît à assimiler Anselme. M. de Rémusat vient de rappeler que sur le point capital *de la signification des mots*, il était en désaccord complet avec Garmond, avec Abélard, et avec Anselme par conséquent. Guillaume, le patriarche des réalistes, tient pour la signification *réelle* des noms de qualité; Anselme, malgré les obscurités de Boèce, tient pour la *formelle*, et il prélude en cela au chef de l'école conceptualiste! La néfaste réputation d'ultra-réalisme qu'on a faite à notre Docteur serait-elle un vain épouvantail?

Notre Dialogue, presque entièrement négligé des critiques français, contient quelques renseignements à cet égard. On a été jusqu'à accuser Anselme de prêter une existence réelle à toutes les abstractions de l'esprit, et même aux qualités accidentelles des êtres. « Il n'hésite pas plus, a dit de lui M. Hauréau, à compter parmi les substances, c'est-à-dire parmi les choses qui vivent et les êtres qui pensent, la couleur en soi que l'homme en soi [1]. » Le docte académicien avait écrit ailleurs : « L'humanité, la sagesse, la couleur, sont, à proprement parler, des substances universelles [2]. » M. Rousselot n'avait pas été moins sévère : « Il faut le dire, écrit ce savant dans l'étude qu'il consacre à notre Docteur, Anselme est le promoteur de cette ridicule tendance des philosophes du moyen âge à réaliser des abstractions : il est pour beaucoup dans le mauvais côté de la scolastique [3]. » Nous examinerons l'idéalisme d'Anselme quand il sera question de sa métaphysique et de sa doctrine sur la substance physique. Il ne sera pas inopportun cependant de montrer, dès à présent, qu'à tenir compte de ses principes dialectiques, l'anathème dont on l'accable ne peut tomber sur le fond de sa doctrine.

[1] *Athenæum français*, 18 fév. 1854.

[2] *Hist. de la Phil. scol.*, I, p. 204.

[3] *Études sur la phil. dans le moyen âge*, chap. VII.

Au chapitre XIX, le naïf disciple demande au maître pourquoi le mot *Homme* ne désigne pas immédiatement la substance et la qualité, tandis que l'adjectif *Blanc* implique les Catégories de la *qualité* et de la *possession ?* A cette question Anselme répond que le sujet *Homme* désigne de soi l'être substantiel dans son unité complète : le *quale* et non *la qualité.* L'adjectif *Blanc,* au contraire, désigne directement la qualité de l'être; il n'emporte pas un sujet invariable. Or, pour comprendre la valeur de cette explication, il faut se souvenir qu'au chapitre XIX, S. Anselme oppose le concept de la substance, de l'être individuel et complet à celui des autres catégories, au nombre desquelles *la Qualité* tient le premier rang. N'eût-il pas dès lors été absurde qu'il prît la couleur et les qualités pour des substances [1] ? Cela ressort mieux du chapitre XX. Là Anselme affirme que le qualificatif *Blanc* ne signifie pas de soi la substance. Comment après cela aurait-il enseigné que la « couleur en soi » est un être substantiel; bien plus, que c'est un être vivant et pensant, une sorte de monade, si l'on veut? — A ce même ordre d'idées appartient un passage du chapitre XVI. L'élève objecte au Maître qu'il ne peut se rallier au sentiment de ceux qui rangent l'appellation *le Grammairien* dans la Catégorie de la qualité. On ne répondra jamais, dit-il, à celui qui demanderait : Qu'est-ce qu'un Grammairien? *C'est un nom de qualité.* Anselme établit qu'il est parfaitement exact que le Grammairien seul implique la connaissance de la Grammaire. La Grammaire, dit-il dans son archaïque langage, ne possède ni par soi, ni même en tant qu'elle est unie à l'homme, la connaissance de la Grammaire! Et il cite à cette occasion l'exemple du guide précédant un voyageur. Sans doute le premier seul devance l'autre. D'autre part, le guide ne peut être considéré comme le premier qu'à condition d'avoir derrière lui quelqu'un qui le suive. Celui-ci toutefois n'a avec le premier qu'une relation purement accidentelle [2].

[1] Voir les citations plus haut, pp. 29-30.

[2] « *M.* Grammatica namque, nec sola, nec *cum homine* habet Gramma-
» ticam, sed homo solus, id est, absque Grammatica, non est Grammaticus,
» quia absente Grammatica, nullus esse Grammaticus potest; sicut qui prae-

Cette explication donne beaucoup d'hilarité à M. Prantl. Elle y prête. Le critique de Munich dénonce avec une ironie amère la façon superficielle dont Anselme envisage ici les rapports des êtres. Il aurait dû voir cependant qu'il y avait un certain motif de se réclamer dans l'occurrence d'un accident *purement extrinsèque.* Quelle est la notion qui se dégage de la trop candide comparaison? Qu'aucune qualité ne subsiste en soi comme un tout complet et séparé, mais seulement dans le sujet qu'elle informe. Voilà pourquoi Anselme la compare à celui qui est guidé par un chef de file. Celui-ci seul précède les autres; mais afin qu'il puisse les précéder, il faut qu'un second le suive. Ainsi de la qualité, de l'accident. Ils n'existent pas à part de leur sujet. Ces détails sont étranges! Un homme moderne n'entend qu'avec une stupeur irritée de semblables remarques. Mais quand il s'agit de Logique formelle, au XI^{e} siècle comme en tout temps, il ne faut s'étonner de rien! Il se trouva, dit-on, des maîtres qui prêtèrent quelque entité mystérieuse aux qualités, aux accidents. Anselme était vanté comme le fondé de pouvoir de ces excès. Eh bien! son sentiment est que les accidents n'existent que dans la substance, nullement en eux-mêmes. C'est en ce sens qu'il écrit ailleurs : « Il y a beaucoup de choses ou pour mieux dire d'essences qui ne sont pas simplement des substances. Qui voudrait nier, dit-il, que la volonté et les changements de la volonté soient des réalités, bien que ce ne sont pas des substances? Car il y a beaucoup *d'êtres* (de non-néants), en outre de celui qui est, à proprement parler, *la substance* [1]. » — Dans son premier traité, le Docteur a professé la même doctrine qu'il tiendra dans le Dialogue *de la Vérité,* où il écrit qu'il y a une grande différence entre le rapport de la vérité

» cedendo ducit alium, et solus est praevius; quia qui sequitur non est » praevius, nec separatim, nec sic ut ex illis duobus unus fiat praevius; et » solus, non est praevius, qui nisi sit qui sequatur, praevius esse non » potest. »

[1] « Nec voluntatem, nec voluntatis conversionem puto negari posse aliquid » esse. Nam etsi non sunt *substantiae*, non tamen probari potest eas non » esse *essentias* : quoniam multæ sunt *essentiae* praeter illam quae proprie » dicitur substantia. — *De Casu Diaboli*, chap. VIII.

idéale avec son expression et celui de la couleur avec le corps. — Car, assure-t-il, le corps est pour la couleur la condition de l'existence. Si le corps lui-même existe, la couleur existe. Le corps vient-il à périr, il est impossible que la couleur lui survive [1]. C'est encore conformément à ces vues que dans le Monologue, Anselme nomme, sans plus d'équivoque, les *couleurs* des *accidents* et établit un rapport assez étroit entre elles et les relations purement extrinsèques de la substance [2]. — Tout cela n'empêche pas l'historien de la Philosophie scolastique d'avancer qu' « après avoir posé en principe que les noms des qualités et des essences sont des noms univoques, S. Anselme a dû nécessairement considérer la blancheur et l'humanité comme des substances universelles ! » Une pareille extravagance a pu être professée par quelques ultra-réalistes : il paraît injuste d'en accuser Anselme.

Certes, pour sa gloire, on souhaiterait qu'il eût moins sacrifié à la Dialectique outrée, aux frivoles difficultés nominales dont s'enchantaient les hommes de son temps. Anselme était privé des œuvres d'Aristote, qui aurait pu l'éclairer sur la portée réelle de la Dialectique; il n'avait entre les mains que les fragments les mieux faits pour égarer sa pensée!

Que manqua-t-il aux maîtres de la première période du moyen âge, que manqua-t-il à Anselme pour atteindre complétement au véritable sens de l'Organon et des Catégories? En saisir, en dégager *l'élément objectif*, et trouver en lui le principe générateur de toute la philosophie du Stagyrite. Il faut indiquer sommairement ce point : c'est le meilleur moyen de compléter, selon le vœu de l'Académie, l'appréciation critique du morceau que nous venons

[1] « Quapropter (veritas) per *significationem* habet esse, et per eam mu-
» tatur ejus rectitudo : quemadmodum color per corpus habet esse et non
» esse. Existente namque corpore, colorem ejus necesse est esse; et pereunte
» corpore colorem ejus manere impossibile est. » — *De Veritate*, chap. XIII.

[2] « Omnium quippe quae *accidentia* dicuntur, alia non nisi cum aliqua
» participantis variatione adesse et abesse posse intelliguntur, *ut omnes*
» *colores;* alia omnino nullam vel accidendo vel recedendo mutationem circa
» id de quo dicuntur, efficere noscuntur, ut quaedam relationes. » (*Monol.*, chap. XXV.)

d'analyser, si étrange de forme et de fond pour un homme moderne.

La Logique d'Aristote a été, de nos jours, l'objet d'une véritable restauration. Des critiques consciencieux, en France aussi bien qu'en Allemagne, ont montré sa portée objective, et le lien étroit qui, dans la pensée du Maître, la rattachait à l'ontologie, à la psychologie.

Trop souvent on s'est complu à ne chercher dans l'Organon que les règles de la discussion verbale. Que de disputes roulèrent sur la question : La logique est-elle une science; n'est-elle qu'un art? M. Barthélemy de S. Hilaire note qu'Aristote n'avait pas laissé le problème indécis. Il rappelle à ce sujet l'exorde des *premiers Analytiques* qui sont l'âme de la logique aristotélicienne : « D'abord nous dirons le sujet et le but de cette étude : le sujet, c'est la démonstration; le but, c'est *la science démontrée.* » Cette déclaration est tout un système. — La science, *l'assimilation de l'être par l'esprit* implique un rapport direct de la raison avec la réalité. Elle s'appuie sur ce double fondement : les formes *nécessaires* de la pensée et les objets eux-mêmes. En tant que ces formes s'expriment par le langage, par la *proposition*, la démonstration scientifique s'assure un nouvel élément d'objectivité. « La logique, dit le savant traducteur d'Aristote, n'est pas pure de tout empirisme : le langage est la source où elle a puisé tous les éléments primitifs dont elle a bâti plus tard son solide édifice. L'étymologie même de son nom en fait foi, et l'esprit humain n'a jamais su mieux discerner, ni mieux exprimer le rapport de deux choses indissolubles, qu'il ne l'a fait dans la langue grecque, en rattachant grammaticalement la logique au langage, soit du dedans, soit du dehors [1]. » Ainsi selon Aristote, la Logique se fonde avant tout sur la constatation des formes et des lois de la pensée, du « verbe interne, » pour parler le langage des *derniers Analytiques*. Par là, elle se relie à la psychologie, et trouve dans le fond de l'âme sa raison, sa lumière. Le *concept* dégagé par *l'esprit* des multiples phénomènes, la perception de l'être substantiel, en un mot, voilà

[1] *Œuvres d'Aristote*, t. I, p. 11.

son principe générateur [1]. Le principe *d'identité ou de contradiction* fournit la formule de l'unité essentielle que renferme chaque concept particulier. La réalité ne nous offre que des êtres individuels ; aussi le sujet immédiat de tout concept complet est *l'individu*, la substance première. — Mais en présence des êtres individuels, l'entendement, l'intellect actif, en vertu de sa loi constitutive, se sent spontanément poussé à négliger les attributs contingents, accidentels, pour fixer son regard sur l'essence coexistant aux individus. Cette abstraction primitive le conduit à former la notion universelle, en laquelle se rencontre la réalité

[1] « La substance, dans l'acception la plus exacte, la substance première, la substance par excellence, est celle qui ne se dit point d'un sujet, et ne se trouve point dans un sujet : par exemple, *un* homme, *un* cheval. » — *Catég.*, chap. V. — « De l'expérience, ou bien de tout l'universel qui s'est arrêté dans l'âme, *unité qui, par delà les objets multiples, subsiste toujours*, et qui est une et identique dans tous ces objets, vient le principe de l'art et de la science : de l'art, s'il s'agit de produire des choses; de la science, s'il s'agit de connaître les choses qui sont... Au moment où l'un de ces concepts qui n'offrent aucune différence entre eux, vient à s'arrêter dans l'âme, aussitôt l'âme a l'universel ; l'être particulier est bien senti, mais la sensibilité s'élève jusqu'au général. C'est la sensation de l'homme, par exemple, et non pas de tel homme individuel, de Callias. Ces concepts servent ainsi de points d'arrêt jusqu'à ce que s'arrêtent enfin *dans l'âme* les idées indivises, c'est-à-dire universelles. Ainsi, par exemple, s'arrête l'idée de *tel animal* jusqu'à ce que se forme l'idée d'*animal*, qui elle-même sert aussi de point d'arrêt à d'autres idées. » — *Deux Analyt.*, liv. II, chap XIX. — De ces passages nous rapprochons celui-ci qui clôt le XIII[e] livre de la *Métaphysique :* « La science et le savoir sont doubles en quelque sorte : il y a la science en puissance et la science en acte. La *puissance* étant, pour ainsi dire, la matière de l'universel et l'indétermination actuelle, appartient à l'universel et à l'indéterminé, mais l'acte est déterminé : tel acte déterminé porte sur tel objet déterminé. Cependant l'œil voit accidentellement la couleur universelle, parce que telle couleur qu'il voit est une couleur en général. Cet A particulier qu'étudie le Grammairien est un A en général. » — Et encore : « Le sujet est une essence, soit qu'on le considère comme *matière*... soit qu'on le considère comme la forme et la figure de l'être, c'est-à-dire cette essence qui est *séparable* de l'être, mais séparable seulement par la conception. » *Mét*, t. VIII, p. 1. — « Tous les raisonnements ont pour principe l'*essence*, tout raisonnement part, en effet, de l'*être déterminé*. » *Ibid.*, t. VII, p. 9.

nécessaire et les notes accidentelles, l'immuable et le changeant. l'un et le multiple. — De la sorte, le problème d'Héraclite, désespérant de retrouver l'élément stable, permanent des choses parmi le flux incessant des apparences, semble résolu. Par delà les objets de sensation, l'esprit atteint les formes intelligibles de l'être, c'est-à-dire l'universel, le genre et l'espèce auxquels se ramène, en dernier ressort, la multiplicité des choses. Il est clair d'ailleurs que la démonstration fondée sur l'élément universel seule fonde la science ; la vraie philosophie s'occupe de la substance, non de ses accidents [1]. — Le concept, tel qu'Aristote l'entend, est donc le produit d'une double *réalité :* de la nature et de l'esprit [2]. Mais afin que les concepts soient féconds, il ne suffit pas qu'ils soient classifiés, réunis ou séparés par la *Proposition.* — Les jugements ne nous mènent à la vérité, à la certitude qu'à la condition de montrer le lien nécessaire des conclusions avec leurs *prémisses* ou leurs principes. Pour cela, il est besoin de fixer leur mutuel rapport, au moyen d'un terme commun, appelé pour cette raison le *moyen terme,* ou la cause de la conclusion. Voilà le but du *syllogisme démonstratif* ou de la Démonstration proprement dite, à laquelle Aristote consacre de si prolixes développements. — N'est-ce pas là, en résumé, tout le sujet de l'Organon? Classification des concepts (*Catégories*); énonciation des concepts (*Interprétation*); démonstration évidente, ou lois et combinaisons du syllogisme, et analyse des fondements de la Démonstration (*Premiers et Deuxièmes Analytiques.* C'est la

[1] « Il n'y a pas de démonstration pour les choses périssables. Pour elles, il n'y a pas non plus de science proprement dite. » *Dern. Anal.*, t. I, p 8.

[2] Le rapport des mots aux idées, des idées aux choses est exprimé au commencement de l'*Herméneia :* « Les mots dans la parole ne sont que l'image des modifications de l'âme; et l'écriture n'est que l'image des mots, que la parole exprime. De même que l'écriture n'est pas identique pour tous les hommes, de même les langues ne sont pas non plus semblables. Mais les modifications de l'âme, dont les mots sont les signes immédiats, sont identiques pour tous les hommes, comme les *choses*, dont ces modifications sont *la représentation fidèle,* sont aussi les mêmes pour tous. » (Chap. I.) — Notons-le : pour confirmer cette déclaration si nette sur l'*objectivité* de la science, Aristote renvoie à sa Physique, c'est-à-dire à l'étude directe de la réalité.

partie strictement scientifique de la Logique, ou l'*Apodictique*, comme l'appelle Aristote, aboutissant aux déductions nécessaires, absolument certaines. — La *Dialectique*, selon lui, s'occupe de la démonstration simplement probable : elle est surtout exposée dans les *Topiques* et dans les *Sophistiques* [1].

Envisagée de la sorte, la Logique d'Aristote n'est autre chose que le développement méthodique du *concept humain*, dans toute sa vivante réalité. C'est l'expression de son plus récent interprète, le Dr Prantl, et c'est la vraie [2]. La science, pour Aristote, n'a pour objet que les êtres réels : et à ses yeux, nous le savons, la Logique est une science. Les *causes* ou sources de démonstration dont elle s'occupe sont les éléments de la réalité même : la *matière* des êtres et la *forme* qui l'actualise, le *principe*

[1] Sur l'importance de la division de la Logique en *Apodictique* ou démonstration nécessaire, et en *Dialectique* ou démonstration simplement probable, voyez le Dr Prantl, t. I, pp. 96 et suiv. — M Barth. de Saint-Hilaire, *Mémoire sur la Logique d'Arist*, t. II, pp. 59 et suiv. — Aristote lui-même indique la distinction au premier chapitre des *Prem. Analytiques*, et au chap. II des *Dern. Anal.*

[2] Qu'on nous permette de citer ces paroles du Dr Prantl : « Die Apodeiktik » sucht und entwickelt das καθόλου der menschlichen Denkens (c'est-à-dire le » concept universel). Hierin beruht das verhältniss der Logik zur πρώτη » φιλοσοφία, insoferne die erstere von der letzteren getrennt eine einige dis- » ciplin bildet, und zugleich in so tiefer uebereinstimmung mit jener sich » entwickelt, dass sie schlechtin aus keinerlei anderen grundsätzen beruht, » als auf jenen, welche eben die sogenannten metaphysischen sind. Getrennt » ist die Logique, insoweit das menschliche denken etwas anderes ist, als die » objective wesenheit überhaupt; insoweit aber letztere nur durch das » denken der menschen als eigenthum und produkt wird und hiemit die » erkenntniss als die identität des subjectiven und objectiven auftritt, ist » Erkenntniss-princip und Seins-princip ein und das nemliche. Wir werden » sehen, dass bei Aristoteles, der « Begriff » das princip der aristotelischen » Logik ist; dieser aber *vermittelt* materiell das erkennen und formell das » denken, er enthalt als schopferischer begriff den aristotelischen Grundsatz » der entwicklung, das heisst der Ueberganger vom Potenziellen zum » Actuellen, und hierin steht er als unentreissbare einheit von Logik und » Metaphysik fest, er ist die Grundsäule beider, und vermittelst seiner tritt » auch die Logik selsbt als lebendiger entwicklungs-process auf. »

efficient et la *raison finale*. C'est la réalité qui nous fournit les concepts de ces causes. Lorsque, dans ses raisonnements, l'esprit garde les lois imposées par la nature à la pensée de l'homme, lorsqu'il part de prémisses démontrées, ses conclusions sont certaines, véritables. En ce cas, « savoir ce que *c'est* une chose, se confond avec savoir *pourquoi* elle est. » Certes, ce n'est pas directement à la Logique qu'il appartient de décider de la vérité objective de nos jugements : c'est le rôle des sciences particulières de prononcer sur les thèses qui sont de leur compétence. Mais les règles fixées par l'Apodictique pour tirer de ces principes spéciaux, préalablement constatés, de légitimes conclusions, ont dans l'essence même de la raison leur base, et aussi leur valeur immuable, absolue. Dans l'acte de la connaissance, la réalité externe et l'esprit s'unissent pour engendrer la notion; le monde externe se représente aux sens et à l'entendement. Aristote tient que « l'esprit ressemble à l'œil corporel [1] » atteignant les êtres du dehors; qu'il embrasse tout ensemble, en ses aperceptions, et les vérités sensibles, contingentes, et les principes immuables, éternels [2]. Selon lui, il y a identité entre l'intelligence en acte et l'intelligible, puisque la faculté de percevoir les essences est l'intelligence même, et qu'en cela consiste le caractère transcendant, divin de la raison [3]. — C'est conformément à ces théorèmes qu'il appelle les conclusions du syllogisme démonstratif des vérités nécessaires qui ne peuvent être autrement qu'elles sont [4]. De fait, les notions que la Logique reçoit de la Physique, de la Psychologie, de l'Ontologie, elle apprend à l'esprit à se les assimiler; elle les coordonne et les enchaîne d'après les lois constitutionnelles de l'intellect, organe de toute science. Elle ramène les conclusions particulières aux principes nécessaires, immédiats, indémontrables [5], et par-dessus tous les autres au principe de contradiction [6]. « Ces axiomes

[1] *Eth. Nicom.*, liv. I, p. 4.
[2] *Ibid.*, liv. VI, p. 12.
[3] *Mét.*, liv. XII, p. 7.
[4] *Dern. Anal.*, liv. I, p 4.
[5] *Dern. Anal.*, liv. I, pp. 8, 9.
[6] Voir *Dern. Anal.*, liv. I, pp. 11, 32, et surtout *Mét.*, liv. IV. - Voici en quels

eux-mêmes, dit Aristote en terminant ses Derniers Analytiques, ne dérivent pas de connaissances plus notoires qu'eux; ils ne sont pas en nous dès l'origine, cachés en quelque sorte dans les profondeurs de la conscience [1]. Certes, « nous avons en nous la faculté de les acquérir; » mais ils n'en sont pas moins le produit de la sensation et de l'induction, puisque celles-ci seules nous

termes Aristote montre le fondement de ce principe dans la nature, en rattachant ainsi à la question des *Principes évidents* déduits par l'entendement, le grave problème de l'objectivité de la science: « Admettre un pareil principe (la possibilité simultanée des contraires), c'est détruire toute substance et toute essence. On est forcé alors de prétendre que tout est accident; il faut nier l'existence de ce qui constitue l'existence de l'homme et l'existence de l'animal... Alors il faut ou bien que tout ce qu'on affirme, en même temps on le nie, et que tout ce qu'on nie, en même temps on l'affirme; ou bien (n. b.) que d'un côté, tout ce qu'on affirme, en même temps on le nie, tandis que de l'autre, au contraire, tout ce que l'on nie, on ne l'affirmerait pas en même temps. Mais, dans ce dernier cas, il y aurait quelque chose n'existant réellement pas. Et ce serait là une opinion certaine. Or si le non-être est quelque chose de certain et de connu, l'affirmation du contraire doit être plus certaine encore... Si tous les hommes disent également vrai et faux, de tels êtres ne peuvent ni articuler un son ni discourir, car en même temps ils disent une chose et ne la disent pas. S'ils n'ont conception de rien, s'ils *pensent* et ne pensent pas tout à la fois, en quoi diffèrent-ils des plantes? » — Tout le monde voit qu'en rapprochant ces raisonnements du principe de la légitimité et de l'objectivité des facultés, on peut les opposer à Kant aussi bien qu'à Protagoras.

[1] *Der. Anal.*, t. II, p. 19. — Nous nous permettons de rappeler encore quelques autres explications d'Aristote sur le double élément de la connaissance. — « La démonstration se tire de principes universels, et l'induction de cas particuliers. Mais il est impossible de connaître les universels autrement que par induction; c'est par l'induction, en effet, que sont connues même les choses abstraites, quand on veut faire comprendre que certaines d'entre elles sont dans chaque genre, choses d'ailleurs dites abstraites, bien qu'elles ne soient pas séparées, en tant que chacune d'elles forme un objet distinct. Or induire est impossible pour qui n'a pas la sensation: car la sensation s'applique aux objets particuliers; et *pour eux, il ne peut y avoir de science,* puisqu'on ne peut pas du tout la tirer d'universels sans induction, ni l'obtenir par l'induction sans la sensibilité. » *Ibid.*, t. I, p. 18. — « Ce qui rend bien évidente la supériorité de la démonstration universelle, c'est que quand de deux propositions, on sait la supérieure, on sait aussi en quelque façon la

mettent en rapport avec l'universel, virtuellement contenu dans les types particuliers. Mais le jugement sur la vérité des principes ainsi obtenus relève en dernier ressort *des facultés de l'intelligence.* « Parmi celles-ci, écrit le Stagyrite, la science et l'entendement sont éternellement vrais, et comme il n'y a que l'entendement qui puisse être plus vrai que la science même, c'est l'entendement qui s'applique aux principes. C'est l'entendement qui est le principe de la science [1]. »

Nous nous trompons fort, ou ces dernières applications achèvent de montrer toute la portée objective et l'élément spiritualiste de la Logique Aristotélienne. La Démonstration a pour facteurs

proposition inférieure, et on la possède en puissance... La proposition universelle est toute d'entendement; la proposition particulière n'aboutit qu'à la sensation. » *Ibid.*, p. 24. — « La science ne s'acquiert pas non plus par la sensation, car bien que la sensation se rapporte à telle qualité générale et non pas seulement à tel objet particulier, il n'y en a pas moins nécessité de sentir une chose spéciale, dans tel lieu et dans tel moment. » *Ibid.*, chap. XXXI. — Cf. *Mét.*, t. I : « Aucune des notions sensibles n'est à nos yeux le vrai savoir, bien qu'elles soient le fondement de la connaissance des choses particulières. Mais elles ne nous disent le *pourquoi* de rien. » — *Ibid.*, t. III, p. 4. — « Dirons-nous qu'il n'y a rien en dehors des choses particulières ? Alors il n'y aurait rien d'intelligible, il n'y aurait plus que les objets sensibles, il n'y aurait science de rien, à moins qu'on ne nomme science la connaissance sensible. Il n'y aurait même rien d'éternel, ni d'immobile, car tous les objets sensibles sont sujets à destruction et sont en mouvement. Or, s'il n'y a rien d'éternel, la production elle-même est impossible. » — Sur l'accusation de sensualisme mise au compte du Stagyrite par quelques intuitifs, notamment par quelques ontologistes modernes, voyez PRANTL. t I, p. 114; BARTH. DE SAINT-HILAIRE, *Mém. sur la Log. d'Arist.*, t. II, pp. 15 et suiv., et *Préface à la Logique d'Arist.* Pour quiconque a lu Aristote, il est trop clair que Leibnitz n'avait pas besoin de corriger l'axiome faussement attribué au Stagyrite : « Nihil est in intellectu quod non prius fuerit in sensu : *excipe intellectum!* » L'exception avait été faite par Aristote. — Le Dr Prantl note, non sans une fine ironie, qu'il est très-vrai qu'Aristote compare l'intellect, dans son élément *potentiel,* à une tablette enduite de cire, mais encore vierge de caractères. Seulement ceux qui de là arguent contre son sensualisme oublient qu'il compare l'intellect *agent* à la lumière rendant visibles les couleurs. (*De l'Ame*, t. III, p. 4.)

[1] *Dern. Anal.*, liv. II, chap. XIX. Ce chapitre ne peut être assez médité. C'est l'âme de l'Apodictique d'Aristote.

les *concepts de l'intellect,* engendrés par l'abstraction des types individuels, et l'*expression* de ces concepts : son objet, ce sont les *conclusions nécessaires.* Son but suprême, c'est de conduire l'esprit, par l'induction et la sensation, jusqu'aux *premiers principes indémontrables,* terme de l'évidence immédiate et de la lumière *supérieure de l'entendement.* La Logique est de la sorte rattachée à la nature et à l'ordre réel, à la Métaphysique et à la Psychologie, par sa double base, qui est l'*être individuel* et la faculté aperceptive de l'esprit: elle trouve son couronnement dans l'entendement, la réalité par excellence, le Critère irréductible.

Ces considérations sont empruntées surtout à l'Organon : si l'on en rapproche les raisons prises dans les autres traités du Maître, le côté positif de sa doctrine apparaîtra dans un plus grand jour encore. Quel est le principe qui domine toute la philosophie d'Aristote? Nous n'hésitons pas à dire que c'est celui de la *légitimité et de la portée objective des facultés et des tendances primitives, innées des êtres.* Implicitement, ce principe inspire tous ses traités. C'est à l'entendement, *éternellement vrai,* qu'il subordonne les axiomes premiers de toute science. Voilà, en propres termes, la conclusion de sa Logique. Sa Métaphysique s'ouvre par la constatation de la *spontanée* et naturelle aspiration de l'homme vers la connaissance et la vérité. Son Économie politique repose toute entière sur notre besoin instinctif de vivre dans l'état de société. Sa Physique consacre cette vue féconde par la loi de *la finalité progressive des êtres de la nature.* Qu'est-ce que cette finalité universelle, si ce n'est l'infaillible mouvement des êtres vivants vers leur fin propre? Ainsi l'ont jugée Götz, Biese, Brandis. Rappelons enfin la thèse fondamentale de l'action motrice de la première Cause sur les causes secondes où nous trouvons, avec des juges célèbres, le dernier mot de l'idéologie, de la morale et de la théodicée d'Aristote. De tout cela, nous avons, ce semble, le droit de conclure que sa Philosophie et sa Logique, au premier chef, présentent à l'esprit une portée réelle et un caractère objectif qu'on a vainement tenté de méconnaître [1].

[1] L'ouvrage de ce siècle qui rappelle le plus l'Organon est bien, à notre avis, le traité complet de Logique du Dr Hoppe (*Die Gesammte Logik Pader-*

En même temps, elles sauvegardent les droits et la suprématie de l'entendement; la conclusion des Derniers Analytiques, aussi bien que sa Métaphysique, absolvent à jamais Aristote de l'accusation de sensualisme qu'on a tant de fois et si légèrement articulée contre lui. Certes, on peut regretter qu'il se soit montré si avare de développements sur la partie transcendante du problème de la connaissance. Le censeur de Platon voulait-il éviter de fournir lui-même un prétexte à des doctrines séduisantes, récentes encore et contraires à sa nature sévère et très-peu enthousiaste? Ce qui est sûr, c'est que sa réserve a laissé une lacune dans son œuvre : lui-même nous a fourni des matériaux pour la combler, mais elle servira longtemps de thème aux récriminations de ceux-là qui préfèrent l'idéologie mystique de Platon à la méthode expérimentale, mais parfois un peu trop réservée de son glorieux disciple. — Platon fut un écrivain d'une inimitable éloquence; Aristote, dans tous ses ouvrages, se montre surtout professeur. Ses livres, véritables traités *ésotériques*, supposent les développements de l'école et l'enseignement du Maître. De là, l'exactitude, la solidité, mais aussi la sécheresse, la concision des sentences, et surtout, leurs détails souvent excessifs, obscurs parfois.

born, 1868). Nous osons signaler cet ouvrage aux amis de la philosophie sérieuse. Voici, en deux mots, la définition de la Logique selon Hoppe, et tout son point de vue : « Die Logik ist die lehre von der that der Denkens.
» Form ist das eigne product der Seele selbst, und diese ist stets das Abbild
» eines gegebenen Products. Die Logik reift mit der Psychologie und mit der
» Naturkunde (p. 5)... In vier worten liegt der thatbestand der geistigen
» thätigkeit, die Sich mit dem Uebersetzen dessen beschäftigt, das in der
» Wirklichkeit vorliegt. Diese vier worte sind : Object, Eindruck, Bild,
» Kennzeichnung. Die Dinge treffen mittelst der nerven unsere im Gehirn
» wohnende Seele und machen einen eindruck. In folge dieses eindrucks
» entsteht ein Bild in der Seele, und dieses Bild wird gefasst, indem wir uns
» Kennzeichen an demselben merken. Das gekennzeichnete bild is das Speci-
» tische product der Seele, der begriff, auf verschiedener stufe der vollen-
» dung, von anderen auch Vorstellung oder Idee, am Zweckmassigsten
» jedoch Begriff genannt, weil in dem Kennzeichniss des Bildes ein Erfassen,
» Ergreifen, Besitznehmen liegt. » (P. 28). — Voyez aussi Dr Dürning de Berlin : *Natürliche Dialektik*. Berlin, 1865, *passim*.

C'est la fortune des œuvres magistrales d'être vouées à l'exploitation des esprits vulgaires qui trop souvent les déflorent, en les abaissant à leur médiocrité. Le Dr Prantl a montré d'une manière saisissante comment un Aristotélisme bâtard sortit de la méprise des commentateurs du Stagyrite, entêtés à perdre de vue l'élément objectif de sa Logique [1]. S'il faut en croire Ammon et Diogène Laërce, les plus anciens Péripatéticiens Théophraste et Eudème auraient déjà rédigé bon nombre de traités de Logique formelle. Andronicus de Rhodes, celui-là même qui publia les livres d'Aristote transportés à Rome par Sylla, fut probablement aussi un Dialecticien. Pour Herminus, Aspasius et Galène, la Logique n'est plus que l'*art* de discuter avec méthode. Les Catégories, et le classement des notions, voilà désormais son thème principal, sa fin suprême. On sait tout le bruit que l'on fit à propos de la figure du syllogisme que Galène prétendit ajouter aux trois formes trouvées par Aristote ! En vain Boéthus de Sidon, pour ramener les esprits à l'étude de la réalité, tenta de mettre la Physique à la tête du programme philosophique et se distingua par des vues larges et sérieuses. En vain Alexandre d'Aphrodise signala le rapport qui unit l'Apodictique à l'Ontologie, et mérita le titre d'Interprète par excellence que la postérité lui a conservé. Ce ne furent là que des éclairs au milieu des ténèbres du formalisme d'école. Les Stoïciens, malgré l'esprit positiviste de leur philosophie, ne virent dans la Logique que les Catégories et les détails de l'argumentation. Parmi les Syncrétistes, rêvant de concilier Platon et Aristote, Apulée écrivit dans le même esprit son traité *Sur l'Interprétation*, vraisemblablement traduit du grec. Porphyre s'ingénia à *introduire* les jeunes disciples dans les *Catégories*, par le livre *des Cinq voix* appelé à devenir le Manuel classique du moyen âge. L'historien philosophe de Munich va jusqu'à avancer qu'il eût mieux valu pour la Logique de ne pas être cultivée du tout que de tomber dans la poussière où le traité de Porphyre l'ensevelit ! Il est certain que son Introduction fonda pour longtemps la suprématie de la Dialectique nominale.

[1] Ouv. cit., t. I, pp. 346, 377.

Proclus, Ammonius, Marius Victorinus, Marcianus Capella, et plus que tous les autres Boèce l'affermirent de plus en plus. Des nombreux livres du Consul, les premiers Docteurs ne possédaient que ses commentaires et ses traités de Logique formelle. Boèce l'éclectique devint l'un des instituteurs du pseudo-Péripatétisme!

Personne du moins ne le niera : à peine Aristote fut-il mieux connu en Europe, par ses Analytiques et sa Métaphysique, que les maîtres chrétiens donnèrent à sa doctrine une interprétation plus digne d'elle. Albert le Grand fut l'initiateur de ce mouvement. Grâce surtout à cet encyclopédique génie, l'Ontologie revendique ses droits et la réalité réclame la place des vaines distinctions. Son disciple, S. Thomas d'Aquin, poursuit l'œuvre commencée. La valeur objective des principes et des causes, en logique et en métaphysique; l'infaillibilité des tendances primitives des êtres et le concours de la Raison absolue avec l'esprit de l'homme comme facteurs de la certitude; et, chose remarquable! la connaissance directe et habituelle du moi ou du principe pensant, base de la Psychologie moderne; tous ces points graves sur lesquels la plèbe des Glossateurs s'était depuis des siècles si étrangement égarée, sont maintenant compris et signalés aux penseurs à venir. Phénomène commun à toutes les rénovations fécondes: la Scolastique est à peine en possession des éléments qui jusqu'alors lui avaient manqué qu'elle s'élève à son apogée. Comme représentants de l'alliance de la Raison et de la Foi, S. Thomas d'Aquin et S. Bonaventure ne seront plus dépassés : on peut douter s'ils eurent des égaux. D'emblée, ils associèrent en une synthèse grandiose les principes générateurs de l'Académie et du Lycée, en lesquels l'esprit humain avait personnifié sa double faculté : l'intuition et la raison [1]. Par leurs soins à restituer le vrai texte d'Aristote, les Docteurs devancent leur époque. Mais arrivé à ce point, le génie scientifique rencontre de nouveau l'ancien obstacle : il décrit une

[1] La portée *objective* de la méthode scolastique a été supérieurement traitée, au point de vue des objections d'Hermès, par H. Kleutgen, S. J. *Phil. der Vorzeit.* Édit. Munster, t. II, *passim.* — Voir aussi l'Introduction.

courbe rentrante qui le ramène aux plus mauvais jours de la Logique formelle. Les maîtres avaient discerné avec un tact surprenant les fondements objectifs de la Logique, de l'Idéologie, de la Métaphysique. Ils n'eurent pas le temps d'achever, de vulgariser la restauration de la science. — Un contemporain de saint Anselme, Psellus le Byzantin, avait écrit sur l'Organon d'Aristote des gloses dont le formalisme superficiel surpassait tout ce qu'avaient connu les âges précédents [1]. Au temps même de saint Thomas d'Aquin, Guillaume de Shyreswood, Docteur en Sorbonne, et plus tard Pierre d'Espagne, utilisèrent ces commentaires dans leurs Sommes logiques dont l'Europe fut inondée. Ces Recueils n'étaient pas sans mérite, mais on s'attacha trop souvent à leur partie purement dialectique. Ce fut une calamité! Il n'est pas douteux que les *Summae logicales*, réimprimées jusqu'au XVI^{e} siècle et à leur tour commentées, n'aient donné occasion au retour de la formule nominale dans les écoles. On a beaucoup vanté, de nos jours, la réaction de Guillaume d'Occam contre la philosophie de son siècle. Un sceptique, un agresseur des Papes devait apparaître comme le héraut du progrès aux hommes de ce temps-ci! D'Ockam est un psychologue perspicace : le génie de la critique lui est familier; fort habilement, il montre les défauts de la méthode ultra-réaliste, ardente à créer des entités imaginaires, à reconnaître une réalité à toutes les abstractions de l'esprit. Mais s'il chasse ces chimères, il en rappelle d'autres, aussi vaines et plus odieuses. Le croirait-on de ce fier ennemi des rêveries métaphysiques? Son goût pour les puérilités de la dispute va au delà de tout ce que toléreraient ses admirateurs. Faiblesse bien faite pour enseigner la modestie, pour conseiller l'indulgence! Très-souvent ses fastidieuses subtilités rappellent celles que nous avons détestées dans les Régents de la première période. Est-ce la faute de son nominalisme extrême, exagéré encore par ses successeurs? Je ne sais, mais à partir de l'apologiste fougueux de Louis de Bavière,

[1] Sur Psellus et l'esprit de la Logique Byzantine, voyez Prantl, t. II, p. 265.

la Logique devient de plus en plus verbale et frivole. Jean Buridan, Albert de Saxe, Paul de Venise et la foule de leurs imitateurs remplissent leurs épais volumes de dissertations touchant les syllogismes hypothétiques, la conversion et le développement des propositions, les recettes mnémotechniques. — La décadence de l'esprit est ainsi toujours marquée par la recrudescence de la formule. C'est une loi de l'esprit humain. Quand il n'y a plus de philosophie, quand la science est négligée ou méconnue, il reste les Régents de Logique. Ne sachant penser, ils tiennent à s'en donner au moins l'apparence : alors, avec un aplomb qui n'a d'égal que leur médiocrité, ils analysent, décomposent, combinent les formes du raisonnement. Incapables de trouver un objet à la raison, ils dissèquent et anatomisent l'instrument, ils classifient les facultés. Puis, ne soupçonnant rien des rapports de la nature et de l'intelligence, ils prononcent que leurs Catégories sont la réalité, et que ceux-là sont des téméraires ou des rêveurs qui la cherchent par delà !

Ç'avait été l'erreur des premiers exégètes d'Aristote : ce fut celle des derniers Glossateurs du moyen âge. On sait l'issue de ces aberrations. Après y avoir eux-mêmes sacrifié avec ferveur, Pierre d'Ailly et Gerson finirent par se lasser d'une discipline devenue si indigne d'Aristote et des traditions du XIIIe siècle! Les protestations devinrent unanimes surtout, lorsque la Renaissance eut répandu en Italie et en France le goût des lettres et l'amour de la beauté esthétique tant dépréciée par les incultes glossateurs. Pétrarque flagelle ces philosophes dont la dialectique fait toute la science, voilant de leur toge solennelle et d'un pédantisme inouï leurs risibles disputes. Boccace, Léonard l'Arétin, Pléthon, Laurent Valla déplorent que la philosophie se voie transformée en une exégèse sans esprit, portant sur les mots et sur les combinaisons des mots. L'un des prélats les plus distingués de ce temps, Énée Sylvius, résume le vice de l'enseignement académique en signalant la manie des écoliers de s'adonner aux Glossateurs, au lieu d'étudier Aristote et les maîtres dans l'original [1].

[1] « Maximum autem hujus (Viennensis) vitium est, quod nimis diutinam operam in dialecticis nimiumque temporis in re non magni fructus ferunt;

On commentait les Commentaires des Commentaires! Cependant les lettrés de l'Italie fouettaient de leur verge satyrique les hommes de la glose. De leur chaire où se pressait la jeunesse de l'avenir, les humanistes grecs et latins lisaient à leurs auditeurs charmés les textes des anciens apportés en Europe par les nobles exilés de Constantinople. Une deuxième fois, maintenant avec la faveur des Pontifes, la Grèce vaincue apportait à l'Occident ses lettres et sa sagesse. La conscience humaine en appela comme d'abus contre la Logique formelle. Mais, comme il a coutume d'arriver dans les réactions violentes, la Scolastique fut, par malheur, enveloppée dans sa ruine. L'ancienne méthode vit commencer son agonie entre les invectives polies des maîtres italiens, les sarcasmes de Vivès et d'Érasme, et les premiers grondements de la Réforme. François Bacon rendit son échec plus imminent en montrant qu'elle était aussi funeste à la connaissance de la nature qu'à celle de l'esprit. On pardonna à Bacon ses exagérations, ses erreurs, son injustice de confondre l'Aristotélisme et la grande Scolastique avec la Logique dégénérée. On n'entendit que ses dénonciations, on les acclama. Malgré ces anathèmes, nous retrouvons la Dialectique abâtardie et les leçons qu'elle inspirait dans l'école averroïste de Padoue. Elle ne s'éteignit officiellement qu'en l'année 1631, où mourut Crémonini, le dernier et l'un des plus habiles représentants de cette école [1]. Qui oserait dire qu'elle est tout à fait morte?

Les esprits étaient trop fascinés par le charme des œuvres littéraires pour revenir sérieusement aux doctrines d'Aristote et des Docteurs du XIII^e siècle. Les premières discussions philosophiques inspirées par la Renaissance mirent en question, il est vrai, la prééminence des deux chefs de la philosophie

» qui magisterii artium titulo decorantur, hac una in arte maxime examinantur... Qui libros Aristotelis et aliorum philosophorum habeant, raros » invenies, *commentariis* plerumque utuntur. » ÆNEAS SYLVIUS, *Ép.*, p. 165; AP. PRANTL, t. IV, p. 160. Sur l'extension de l'abus, voir toute la première partie de ce volume.

[1] Cf. M. RENAN, *Averroès et l'Averroïsme*, 3^e édit., p. 408.— Sur l'attitude des humanistes de la Renaissance à l'égard de la Logique, voyez les textes rapportés par PRANTL, t. IV, pp. 159-172.

grecque. Mais il y avait trop d'animosité chez les combattants pour aboutir à un résultat sérieux. L'œuvre qui consacra l'avénement de la science nouvelle fut, à proprement parler, le Discours sur la méthode de Descartes. Si le réformateur s'était borné à faire, dans les études philosophiques, la part plus large à la psychologie, à l'étude de la conscience, il n'eût fait que ramener les chercheurs aux voies fécondes qu'avaient déjà ouvertes Albert le Grand et saint Thomas. Mais Descartes compromit dès le début son système en frappant de suspicion les facultés humaines et les tendances primitives de la raison dont Aristote et les Scolastiques avaient maintenu les droits avec un soin jaloux. Quoi que l'on ait dit, il fonda l'école psychologique et lui donna une vive impulsion. Seulement, pour avoir enveloppé d'un doute illégitime jusqu'aux principes de la connaissance il ruina la base même de la certitude. Étrange vicissitude de la pensée humaine : la philosophie du XVe et du XVIe siècle était tombée pour avoir méconnu l'élément objectif de la connaissance et s'être perdue en de folles querelles de mots : l'école nouvelle fut frappée, dès l'origine, d'une incurable faiblesse, pour avoir, à son tour, oublié le lien qui relie les facultés humaines à la réalité, la Psychologie à l'Ontologie.

Faut-il le noter en terminant cette première étude? Après la réforme de Descartes, qui dédaignait la Logique; après les déclamations des Écossais, si ignorants d'Aristote qu'ils dénigraient, la tentative de Kant, qui voulut refaire la Dialectique « comme science, » ne fut pas plus heureuse. M. Barthélemy de Saint-Hilaire estime que Kant n'a connu l'Organon qu'à travers des souvenirs bien effacés! Il est possible qu'il l'ait ainsi connu. Mais la façon dont il en parle semble trahir plus qu'une mémoire vacillante! Quoi qu'il en soit, la ruine de la logique Kantiste fut due à la même cause que la chute des méthodes précédentes? Kant prétendit instituer la Logique *pure,* comme il rêvait une Métaphysique pure, affranchie de tout rapport avec les contingences de l'observation, avec la réalité. C'était méconnaître la nature, et retourner par une autre voie aux errements des Glossateurs. Kant, aussi bien que Descartes et dans une plus large mesure, fournit dans ses contradictions insignes la preuve de l'inanité de son système. Les critiques ont observé que ce novateur si dédaigneux de l'ordre objectif lui emprunte presque naïvement une foule d'éléments : la conscience de l'identité personnelle; les concepts du temps et de l'espace; les formes mêmes de la pensée et le langage extérieur, expression du verbe interne; les Catégories fondamentales de sa Logique, la Quantité, la Qualité, la Relation, la Modalité qu'il justifie précisément au nom de l'absolue nécessité avec laquelle elles s'imposent à la raison [1]! Est-il étonnant que la gigantesque tentative du penseur de Königsberg, malgré ses mérites de détail, n'ait pas répondu à son programme? — Les meilleurs esprits retournent chaque jour davantage aux fortes doctrines de l'Aristotélisme complété et élargi par les travaux des grands Docteurs chrétiens, et confirmé en ses points essentiels par les découvertes de la science moderne.

[1] Voyez l'*Histoire de la Philosophie* du Dr Ueberweg, vol. III, art. Kant, et l'Introd. de M. Barth. de Saint-Hilaire, à la *Logique d'Aristote*, pp. xxxi et suivantes.

(56)

CHAPITRE II.

PRINCIPES DE MÉTAPHYSIQUE GÉNÉRALE ET D'IDÉOLOGIE DE S. ANSELME DE CANTORBÉRY.

---

§ 1.

Analyse du Dialogue *de Veritate* et des principes fondamentaux de la Métaphysique d'Anselme. — Doctrine de la *Vérité absolue*, raison dernière de la *Vérité relative;* Exemplarisme. — Critique; sources et influences de ces doctrines. — Idéologie d'Anselme. Implique-t-elle l'Ontologisme?

Nous savons déjà que la Métaphysique d'Aristote ne fut expliquée dans les écoles de Paris qu'au commencement du XIII^e siècle, où elle y fut apportée d'Orient. Le Maître lui avait donné des noms divers. Il l'appelle Première Philosophie et lui assigne pour objet les notions transcendantes, communes aux diverses branches des sciences, et l'étude de la Cause première des êtres. Considérée sous ce dernier aspect, la Métaphysique reçut aussi d'Aristote le nom de *Théologie naturelle* [1]. On le voit : elle ne comprenait pas uniquement, ainsi que son nom semblait l'indiquer, les matières que le Maître avait placées *après les recherches de physique;* elle s'offrait surtout à l'esprit comme la connaissance des principes généraux de la raison, et de la suprême Cause du monde. La Métaphysique présentait dans l'antiquité une extension assez différente de celle que lui ont attribuée les modernes, depuis la classification introduite dans les études par Christian Wolff.

[1] Sur l'authenticité de la Métaphysique d'Aristote, voyez l'intéressante Introduction des traducteurs, MM. Pierron et Zévort, de l'École normale, p. XCIII. Édit. Paris, 1840. — Les savants auteurs y résument, avec une judicieuse et sobre critique, les travaux de Brandis, Bekker, Ravaisson. etc.

Mais bien avant le XIII^e siècle, la nature même des Dogmes et les travaux des Pères avaient rappelé la Métaphysique dans les écoles cathédrales et monastiques. Par la forme et le nombre de ses écrits, le Docteur d'Hippone était naturellement destiné à devenir le maître par excellence de l'Ontologie chrétienne. « Sa philosophie, a pu dire Ozanam, renfermait en germe tout le travail de la scolastique. » Cela seul indique déjà le genre des premières recherches spéculatives du moyen âge. Aussitôt qu'elle fut cultivée d'une manière sérieuse, la Métaphysique embrassa surtout l'analyse du concept général de la Vérité, la détermination de l'essence idéale des êtres, enfin l'étude de la Cause première et de ses rapports avec l'univers. C'étaient les sujets préférés des contemplations d'Augustin, le disciple de Platon et des Alexandrins. Parmi les régents des écoles, Anselme de Cantorbéry fut le premier qui étendit ses méditations à cet ensemble de problèmes. Il ne les réunit pas encore en une synthèse unique; il n'écrivit pas une *Somme*. Mais il les approfondit tour à tour, avec une liberté d'esprit et un élan que ses devanciers n'avaient jamais portés à un si haut degré. Partout il se montre élevé, hardi même, sans alarmer les droits d'une orthodoxie scrupuleuse. En métaphysique pure, il inaugure les contemplations sur *la Vérité en soi*, cette source féconde où viendront puiser sur ses pas, Albert le Grand, Thomas d'Aquin, tous les penseurs des âges de foi. En théodicée, il trouve la démonstration fameuse qui a gardé son nom et qui préoccupa les scolastiques, Descartes, Leibnitz, Kant, Hégel et jusqu'à nos contemporains eux-mêmes. Ceux qui ont pratiqué ses études théologiques sur la très-sainte Trinité et l'incarnation du Verbe, sur la concordance du libre Arbitre et de la Grâce savent qu'en ces difficiles sujets, Anselme fut loin de suivre l'ornière de la routine. Un homme du XI^e siècle, capable d'élargir de la sorte les frontières de la science devait être un penseur d'une puissante initiative. C'est avec émotion que l'on salue cette grande et douce figure, ce moine fervent enivré des délices de l'extase, mais préoccupé jusqu'à son dernier souffle de montrer à la raison tout ce qu'il lui est donné d'entrevoir ici-bas de la vérité, des mystères, de l'Absolu !

Nous allons, sans plus de retard, entendre la doctrine d'Anselme sur *la vérité en soi*, sur *la forme intelligible des êtres*, et sur le *rapport des vérités et des essences finies avec la Vérité absolue*..

Au chapitre XVIII^e du Monologue, S. Anselme avait déduit l'éternité de Dieu de *l'éternité de la Vérité.* — Les propositions *vraies,* avait-il observé, doivent avoir été telles de tout temps. Dieu *qui est la Règle suprême de toute Vérité* ne peut être lui-même circonscrit à un point déterminé de la durée. *Il doit être éternel.* — Le fond de cet argument est emprunté à S. Augustin. Parlant des connaissances *de faits* dont notre esprit perd souvent le souvenir, ce Père écrit : « Mais si la vérité est effacée de notre intelligence par l'oubli de ce que nous savions auparavant, elle n'en demeure pas moins *dans la Vérité.* Car il sera toujours vrai que ce qui fut et n'est plus à présent a été : et là (dans la vérité supérieure), il est vrai que cela a été d'avance qui plus tard a existé de fait; et que ce qui n'existait pas encore existait là comme une chose future [1]. » Entendons maintenant le raisonnement d'Anselme lui-même : « Que celui qui peut le faire, dit-il, se représente par la pensée, à quelle époque de la durée ceci n'a pas *été* vrai, savoir : qu'il y *aurait* quelque chose dans l'avenir, ou quand elle finira; et à quelle époque ceci ne *sera* pas vrai, savoir : qu'il y *a eu* quelque chose dans le passé. Que si ces deux négations extrêmes ne peuvent être admises, et si ces affirmations, au contraire, vraies toutes deux, ne peuvent être vraies *sans la vérité,* il est impossible même de penser que la vérité ait un commencement ou une fin. D'ailleurs, si la vérité a eu un commencement ou doit avoir une fin, avant qu'elle commençât d'être, *il était vrai* que la vérité n'était pas; et lorsqu'elle aura cessé d'exister, *il sera vrai* qu'il n'y a plus de vérité. Or, le vrai ne peut être sans la vérité; la vérité aurait donc été avant la vérité et la

[1] « Sed et si de animo nostro ablata fuerit, cum id quod scimus obliti fuerimus, manet in ipsa veritate. Semper enim verum erit fuisse illud quod erat, et non est : et ibi verum erit jam fuisse quod erat, ubi verum erat. antequam fieret, futurum esse, quod non erat. » — *Cont. Faust Manich.*. liv. XXVI, chap. V.

vérité serait donc encore après que la vérité ne serait plus : conclusion absurde et contradictoire. Soit donc que l'on dise que la vérité a un commencement et une fin; soit que l'on tienne qu'elle n'a ni l'un ni l'autre, elle ne peut être limitée ni par un commencement ni par une fin. La même conséquence s'applique à la nature suprême, puisqu'elle est la suprême vérité [1]. »

Cette argumentation, tout à fait dans le genre de S. Augustin, devint l'occasion du Dialogue *de Veritate* que nous allons avant tout examiner. Très-fastidieux dans le développement des détails, ce traité n'en est pas moins d'une réelle importance pour l'interprétation de la philosophie d'Anselme. Les vues qu'il y développe sont d'un caractère tout à fait général : c'est par elles qu'il convient de commencer l'examen de sa métaphysique. — Un disciple a demandé au maître, si de la conclusion précitée du Monologue, il suit que partout où l'on dit qu'il y a *vérité,* il faut entendre par ce mot Dieu lui-même? En d'autres termes, le concept de la Divinité et celui de la Vérité sont-ils au fond identiques, et quelle idée faut-il se faire de leur mutuel rapport? N'est-il pas curieux d'entendre le successeur de Lanfranc énoncer un de ces problèmes qui charmèrent Platon, et dont la solution devait passionner, cinq siècles plus tard, Bossuet, Malebranche et Arnauld?

« Pour satisfaire à la question, répond Anselme à son élève, cherchons ensemble la définition de la Vérité, *car je ne me souviens pas de l'avoir rencontrée jusqu'ici.* » — Nous allons suivre Anselme dans cette recherche. Mais ne l'oublions pas : la forme esthétique, en philosophie comme en histoire, est une conquête de l'esprit moderne qui l'a redemandée à l'antiquité. Souvent dans la première période du moyen âge surtout, les détails doi-

[1] « Cogitet qui potest quando incepit, aut quando non fuit hoc verum,
» scilicet, quia futurum erat aliquid, aut quando desinet aut non erit hoc
» verum, scilicet, quia praeteritum erit aliquid. Quod si neutrum horum
» cogitari potest, et utrumque hoc verum sine veritate esse non potest, im-
» possibile est vel cogitare quod veritas principium aut finem habet. » (*Mon.*, chap. XVIII.)

vent être excusés au nom de l'idée. Cela est particulièrement vrai des traités écrits pour les écoles.

Le Docteur de Sainte-Marie du Bec procède par induction dans la recherche qu'il vient d'annoncer. — Il se demande avant tout ce qu'est la *vérité* dans le *Discours* ou dans la *Proposition*. Après ce que nous savons de la prédominance de l'élément *verbal* dans la Dialectique du Trivium, quoi de surprenant qu'un Maître du XI^{e} siècle commence son analyse par l'examen des mots? — La vérité du *Discours*, observe Anselme, ne dépend évidemment pas de l'énonciation matérielle. Les mots en eux-mêmes ont toujours et nécessairement leur sens naturel. D'autre part, *l'objet* du Discours n'est pas inhérent à celui-ci : il ne peut constituer par conséquent que le terme extrinsèque de la vérité. Pour être vraie, il faut que la proposition *participe de la vérité*, c'est-à-dire qu'il y ait en elle un élément intrinsèque, en vertu duquel elle soit dénommée vraie. Ni l'énonciation en soi, ni aucun de ses éléments ne peuvent d'eux-mêmes lui communiquer la vérité. Elle sera vraie, lorsqu'elle exprimera l'être de ce qui est en réalité : elle sera vraie, quand elle exprimera ce qu'elle doit exprimer, en vertu de sa destination naturelle. Dans la proposition, la parole, la phrase, il importe de distinguer ce qu'elles expriment de fait (*id ad quod significandum facta est*), et ce qu'elles *doivent* exprimer, en raison de leur nature, eu égard à la fin pour laquelle l'homme a été doué du langage (*id quod accepit significare*). La parole a été instituée pour signifier la vérité. Le Discours l'exprime-t-il en réalité? il répond à sa destination formellement, complétement. Ne rend-il pas l'être des choses? il n'a qu'une vérité matérielle, extérieure. Cette dernière forme de vérité ne peut être absente du Discours, car il est de l'essence des mots de signifier leur objet. La première forme, au contraire, implique que l'homme fasse bon usage de la parole, et se serve des expressions pour construire des phrases correspondant à la réalité. C'est cette vérité que nous entendons, quand nous disons : *la Proposition est vraie*. La vérité libre du Discours ne se rencontre pas, à proprement parler, dans les propositions qui ont pour objet la définition ou la simple énonciation d'une essence, indépendante de toute manière de nos jugements personnels (Chap. II) [1].

Mais si la *rectitude*, pour parler avec Anselme, ou le rapport de la parole et de son objet fonde la vérité du Discours, elle la constitue également pour *l'opinion*, pour *la pensée*. Celle-ci est vraie, quand elle est conforme à la réalité. Et de ce chef encore, nous pensons vrai, quand nous pensons *ce que nous devons* (Chap. III) [2].

[1] « *M.* Quando est enuntiatio vera? *D.* Quando est quod enunciat, sive » affirmando, sive negando... *M.* An ergo tibi videtur quod res enuntiata sit » veritas enuntiationis? *D.* Non. *M.* Quare? *D* Quia nihil est verum nisi par- » ticipando veritatem, et ideo veri veritas in ipso vero est; res vero enun- » ciata non est in enunciatione vera, unde non ejus veritas, sed causa veri- » tatis ejus dicenda est. Quapropter non nisi in ipsa oratione quaerenda mihi » videtur ejus veritas. *M.* Vide ergo an ipsa oratio, aut ejus significatio, aut » aliquid eorum, quae sunt in definitione enuntiationis sit quod quaeris? » *D.* Non puto... Quia si hoc esset, semper esset vera; quoniam eadem ma- » nent omnia, quae sunt in enuntiationis definitione; et cum est quod enun- » tiat, et cum non est : eadem est enim oratio, et eadem significatio, et » caetera similiter. *M.* Quid igitur tibi videtur ibi veritas? *D.* Nihil aliud scio, » nisi cum significat esse quod est; tunc est in ea veritas, et est vera... » *M.* At cum significat quod debet, *recte* significat? *D* Ita est... *M.* Ergo non » est illi aliud veritas, quam rectitudo. *D.* Aperte nunc video veritatem hanc » esse rectitudinem. *M.* Similiter est, cum enuntiatio significat non esse quod » non est... Alia igitur est rectitudo et veritas enuntiationis quia significat ad » quod significandum facta est; alia vero, quia significat, quod accepit signi- » ficare. Quippe ista immutabilis est ipsi orationi (sc. significatio materialis » verborum); illa vero mutabilis (sc. sensus formalis) : hanc namque semper » habet; illam vero non semper; istam enim naturaliter habet, illam vero, » accidentaliter et *secundum usum*... Cum vero eadem oratione significo esse » quod non est; *non ea recte utor* : quia non ad hoc facta est : et idcirco » tunc non recta ejus significatio dicitur : quamvis in quibusdam enuntiatio- » nibus inseparabiles sint istae duae rectitudines, seu veritates : ut cum » dicimus : homo animal est; homo lapis non est. De veritate significationis » de qua incaepimus, interim ista sufficiant. Eadem enim ratio veritatis, » quam in propositione vocis perspeximus, consideranda est in omnibus » signis, quae fiunt ad significandum aliquid esse, vel non esse, ut sunt » scripturae, aut digitorum loquela. *D.* Ergo transi ad alia. » (Chap II.)

[2] « Qui *putat* esse quod est, putat quod *debet*, atque ideo recta est cogi- » tatio. Et ergo vera et recta est cogitatio, nec ob aliud, quam quia putamus » esse quod est, aut non esse quod non est, non est aliud ejus veritas quam » *rectitudo.* » (Chap. III.)

Dans ce même sens, il est permis d'affirmer *la vérité de la volonté*, au cas où celle-ci répond à sa fin, et se soumet aux obligations qui lui sont essentielles. — Le péché, la faute sont dans l'ordre moral ce que l'erreur est dans l'orde métaphysique : un écart du libre arbitre, déviant de sa voie naturelle, de *la vérité de son être*. — Ce qui vient d'être dit de la volonté donne à entendre en quoi consiste *la vérité de l'action*. N'est-il pas écrit de l'Esprit déchu et infidèle aux lois de la justice qu'il n'a point persévéré dans la *vérité*. Et encore : celui qui *fait la vérité*, vient à la lumière? Les causes physiques, ajoute Anselme, agissant avec nécessité et sans choix, participent de *la vérité* : répondant à la destination que leur a assignée la première cause, elles font *ce qu'elles doivent*, et ne peuvent manquer de cette forme de vérité. Mais la volonté ou *la vérité libre* peut seule produire des actes moraux méritoires (Chap. V) [2].

Les *perceptions des sens* participent aussi, à leur façon, de la

[1] « *M.* Sed et in *voluntate* dicit ipsa Veritas veritatem esse, cum dicit diabolum non stetisse in veritate... Dic ergo quid *ibi* intelligas veritatem? *D.* Non nisi rectitudinem. Nam si quamdiu voluit quod debuit, ad quod scilicet voluntatem acceperat, in rectitudine et veritate fuit; et cum voluit quod non debuit, rectitudinem et veritatem deseruit; non aliud potest ibi intelligi veritas *quam rectitudo.* » (Chap. IV.)

[2] « *M.* — Verum in *actione* quoque nihilominus veritas credenda est, » sicut Dominus dicit : Quia « *qui male agit odit lucem, et qui facit veritatem, venit ad lucem...* » Unde sequitur quod *rectitudinem facere*, est » *facere veritatem.* — Inspice an omnis actio quae facit quod debet, veritatem » facere convenienter dicatur. Est quippe actio *rationalis*, ut dare eleemosynam; et est *irrationalis actio*, ut actio ignis qui calefacit. Vide ergo » an convenienter dicamus ignem facere veritatem? *D.* Si ignis ab eo a quo » habet esse, accepit calefacere, cum calefacit, facit quod debet. Igitur non » video quae inconvenientia sit ignem facere veritatem et rectitudinem cum » facit quod debet. *M.* Mihi quoque non aliter videtur. Unde animadverti » potest rectitudinem seu veritatem actionis aliam esse necessariam, aliam » non necessariam. Ex necessitate namque ignis facit veritatem et rectitudinem, cum calefacit, et non ex necessitate facit homo rectitudinem cum » bene facit. — Cum ergo constet actionis veritatem aliam naturalem esse, aliam » non naturalem; sub naturali ponenda est illa veritas orationis quam sup a » vidimus ab illa non posse separari. Sicut enim ignis, cum calefacit, veri-

vérité. Appliqués comme ils le doivent, nos organes, dans leur état normal, sont les sincères et infaillibles rapporteurs des impressions sensibles. L'erreur qu'occasionne parfois leur témoignage ne peut leur être imputée. Elle est le fait de l'intellect trop pressé de métamorphoser les apparences en réalités, et de précipiter ses jugements, avant d'avoir suffisamment éclairci toutes les circonstances qui accompagnent la perception. On connait ces exemples : les lentilles colorées montrant les objets teints de leurs nuances diverses; le bâton apparaissant coudé à l'endroit où il est plongé dans l'eau. L'œil qui contemple ce dernier rend témoignage de la courbure apparente, mais c'est l'intellect qui, par une conclusion injustifiée, décide que le bâton est tronqué en réalité. D'autres fois l'erreur, dans les perceptions sensibles, naît de ce que l'on ne se met point dans les conditions requises pour le bon emploi des organes. D'eux-mêmes les sens représentent *ce qu'ils doivent :* donc ils sont vrais. (Chap. VI) [1].

Mais, continue Anselme, et ceci est plus important — existe-t-il une chose *qui n'ait reçu de la vérité suprême tout ce qu'elle possède de réalité,* ou qui ne corresponde point à son idée dans

» tatem facit, quia ab eo accepit, a quo habet esse : ita et haec oratio, scilicet : dies est, vertitatem facit, cum significat diem esse, sive dies sit, sive dies non sit; quia hoc naturaliter accepit facere. *D.* Nunc primum video in falsa oratione veritatem. » (Chap. V.)

[1] « *D.* Est quidem in sensibus corporis veritas, sed non semper: nam fallunt » nos aliquando. Nam cum video aliquando per medium vitrum aliquid, fallit » me visus; quia aliquando nuntiat mihi corpus, quod video ultra vitrum » ejusdem esse corporis, cujus est et vitrum; cum alterius sit coloris : ali- » quando vero facit me putare vitrum habere colorem rei, quam ultra video, » cum non habeat. Multa sunt alia in quibus visus et alii sensus fallunt. *M.* Non » mihi videtur haec veritas, vel falsitas in sensibus esse, sed in opinione. » Ipse namque sensus interior se fallit, non illi mentitur exterior... Cum fustis » integer, cujus pars est intra aquam, et pars extra, putatur fractus : aut » cum putamus quod visus noster vultus nostros inveniat in speculo : et cum » multa alia nobis aliter videntur visus et alii sensus nuntiare quam sint; non » culpa sensuum est, qui renuntiant quod possunt, quoniam ita posse acce- » perunt, sed judicio animae imputandum est quod non bene discerint, quid » possint illi, aut quid debeant. » (Chap. VI.)

la vérité immuable? Évidemment non! Tout ce qui existe *participe de la vérité,* puisque toutes choses sont conformes à cette règle primitive. Elles sont vraies parce qu'elles expriment, dans le monde des phénomènes, le type intelligible qui leur correspond dans l'infinie Pensée. Il n'y a dans les essences des êtres aucune fausseté, car leurs attributs reproduisent nécessairement leur exemplaire incréé. Les créatures ne sauraient s'écarter de ce modèle. Elles sont encore une fois *ce qu'elles doivent être.* — Voilà non plus simplement la vérité *représentative* de la perception de la pensée, de la parole, des actes, mais la vérité des espèces, la *vérité constitutive de l'être* (Chap. VII) [1].

Nous verrons plus loin l'importance capitale de ce point pour l'intelligence de l'Idéologie d'Anselme et de la Doctrine scolastique sur la certitude, en général. Nous savons dès maintenant ce qu'entend notre Docteur par l'axiome où la vague phraséologie du Platonisme s'est comme incarnée : *Les choses doivent participer de la vérité pour être vraies.* — « *Omne verum veritate verum est* » avait déjà dit en ce sens son maître Augustin! Mais poursuivons.

Quand nous disons que la vérité des êtres consiste à *être de fait ce qu'ils doivent être*, il faut bien entendre ces paroles, et distinguer avec soin l'ordre de la *réalité physique* de *l'ordre moral* [2]. Dans son éternelle sagesse, Dieu a décrété de respecter la liberté essentielle des êtres humains, et d'empêcher qu'aucune violence, aucune influence extérieure ni interne ne rompît l'équi-

[1] « *M.* Jam considera an praeter summam veritatem, in aliqua re veritas » sit intelligenda, exceptis his quae supra conspecta sint... An putas aliquid » esse aliquando, aut alicubi, quod non sit in summa veritate, et quod inde » non acceperit quod est, in quantum est; aut quod possit aliud esse quam » quod ibi est? *D.* Non est putandum. *M.* Est igitur veritas *in omnium quae* » *sunt essentia:* quia hoc sunt quod in summa Veritate sunt. *D.* Video ita ibi » esse veritatem, ut nulla ibi possit esse falsitas : quoniam quod falso est, non » est. *M.* Bene dicis. Sed dic an aliquid aliud debeat esse, quam quod est in » summa Veritate? *D.* Non. *M.* Si ergo omnia *hoc sunt, quod ibi sunt,* sine » dubio hoc sunt quod debent... Quicquid vero est quod debet esse, recte » est... Igitur omne quod est, recte est. » (Chap. VII.)

[2] « *D.* Secundum rei veritatem, quomodo possumus dicere quia *quicquid est* » *ut debet esse;* cum sint multa opera mala quae certum est esse non debere...

libre de la volonté. Dès lors, beaucoup de crimes et de délits *devront exister* en fait, bien qu'ils soient condamnés par la loi. Mais ce n'est là qu'une nécessité dans le sens impropre du mot, une *nécessité de conséquence* comme les philosophes l'appellent. — La *vérité morale* n'existe pas dans les actions coupables. Elles *doivent être cependant :* leur existence se justifie et s'explique dès qu'on les juge du point de vue supérieur de la responsabilité humaine et de l'ordre moral. Tout en les prohibant, Dieu doit les permettre pour sauvegarder notre liberté dont il a résolu l'inaliénable maintien, et qui constitue le plus noble attribut de la création. — D'ailleurs une foule d'effets mauvais ou nuisibles à certains êtres ne sont qu'une suite des influences naturelles des agents créés. Il arrive fréquemment qu'une force physique, dans le déploiement de son activité, contrarie ou neutralise une force parallèle. De même, il y a des faits qui pourront être physiquement vrais, ou conformes à la nature, et moralement faux, c'est-à-dire s'écartant de la Loi supérieure qui les règle. Cent exemples divers ne prouvent-ils pas qu'un même objet est susceptible d'attributs opposés, selon qu'il est envisagé sous des aspects différents [1] ? (Chap. VIII.)

Jusqu'ici, ajoute Anselme, nous avons parlé de la vérité telle qu'elle se trouve dans les *signes des idées :* dans les représentations sensibles, la pensée, le Discours. J'y ai ajouté la considération de la vérité des Essences : c'est que je trouve la plupart des philosophes indifférents à l'égard de cette question. Mais les *actes extérieurs* eux-mêmes peuvent devenir, en certains cas, les signes de la vérité. Dans un champ où les plantes vénéneuses se mêlent aux herbes salubres, je vois un homme cueillir des simples

[1] « *M.* Scio te non dubitare quia nihil omnino est, nisi Deo aut faciente, aut » permittente... *Debet igitur esse* pariter, et quod faciente, et quod permit- » tente Deo fit... Idem igitur debet esse et non esse. Debet enim esse; quia » bene et sapienter ab eo, quo non permittente fieri non posset, permittitur : » et non debet esse, quantum ad illum, cujus iniqua voluntate concipitur... » Multis enim modis eadem res suscipit diversis considerationibus contraria... » Potest igitur contingere ut debeat esse secundum naturam actio vel passio; » quae secundum agentem vel patientem esse non debet; quoniam nec ille » agere, nec iste debet pati. » (Chap. VIII.)

et en manger. N'est-il pas évident que je serai cent fois plus persuadé par ce seul fait de l'innocuité de ces aliments que par tout ce qu'il pourrait me dire là-dessus? — Celui qui aurait tout ensemble l'intuition des actes et celle de la volonté qui les inspire, pénétrerait du même coup leur signification et leur valeur morale. En un mot, les *actions* peuvent aussi devenir *signes de la vérité* et principe de connaissance (chap. IX) [1].

Les principes que nous venons de rappeler d'après S. Anselme, et dans l'ordre un peu bizarre où il les énonce, embrassent l'universalité des choses. — Mais par delà les êtres créés qui ne sont vrais que parce qu'ils sont *ce qu'ils doivent être,* l'esprit aperçoit la Vérité suprême, la vérité éternelle et absolue, ou, pour parler avec plus d'exactitude, l'Intelligence infinie. Est-elle *Vérité* parce qu'elle est ce qu'elle *doit* être? — Incontestablement, toutes choses doivent lui être conformes, et répondre au plan qu'elle a ordonné de toute éternité. Mais elle ne *doit* se conformer qu'à elle-même. Son *Essence* est sa *Règle.* Les choses créées sont les *effets* libres de cette Vérité absolue; et, à leur tour, elles deviennent la *cause de la vérité* dans l'esprit qui les conçoit et dans la parole qui les exprime.

Or, la Doctrine où s'embarrassait le disciple, à savoir que *toute énonciation et toute formule vraies n'ont ni commencement, ni fin,* semble trouver son explication dans ces dernières remarques.

[1] « *M.* Omnes de veritate significationis loquuntur, *veritatem vero quae est* » *in rerum essentia* pauci considerant. *D* Profuit mihi, quia hoc ordine me » duxisti. *M* Videamus ergo quam lata sit veritas significationis. Namque non » solum in his quae *signa* solemus dicere; sed et in aliis omnibus quae diximus, est significatio vera vel falsa. Si esses in loco ubi scires esse salubres » herbas et mortiferas, sed nescires eas discernere, et esset ibi aliquis de » quo non dubitares, quin illas discernere sciret, tibique interroganti quae » salubres essent et quae mortiferae, alias vero salubres esse diceret esse, et » alias comederet, cui magis crederes verbo an actioni ejus? D. Non tantum » crederem verbo quantum operi. *M...* Quod si ita deberet, verum diceret; » sin autem, mentiretur. In rerum quoque existentia est similiter vera » vel falsa significatio; quia eo ipso quia est, dicit se debere esse. » (Chap. IX.)

Par cette assertion, dit Anselme, je n'ai pas voulu poser l'éternité de la proposition, moins encore assimiler la vérité qu'elle contient à Dieu lui-même. J'ai seulement entendu indiquer par là le rapport transcendant de toutes les vérités particulières avec la vérité suprême. Toute vérité relative doit avoir sa cause et sa source dans l'intelligence du premier Être. Les formules diverses, dans leur complexe multiplicité, subsistent éternellement dans sa prescience. A l'égard d'un certain terme de la durée, il a toujours été vrai qu'un nombre déterminé de faits ou d'êtres cesseraient d'exister, qu'ils appartiendraient *au passé;* tandis qu'un certain nombre d'autres commenceraient à exister et seraient *futurs* par rapport aux premiers. Ces contingences diverses, tirant de la cause nécessaire toute leur part de réalité, sont présentes dès l'origine à la divine Raison, ou, pour parler le langage d'Anselme, à la Vérité substantielle. Là elles subsistent en leur formule éternelle, idéale. Dans l'ordre intelligible pur, toute créature, qu'elle soit conçue dans le passé, le présent ou l'avenir, toute énonciation vraie impliquent une relation nécessaire avec l'Intelligence absolue. *En ce sens*, l'esprit peut légitimement conclure de la vérité éternelle des énonciations à l'éternité de leur principe suprême qui est Dieu (chap. X) [1]. Voilà comment, conclut

[1] « *M.* Summam autem Veritatem non negabis esse rectitudinem? *D.* Imo » nihil aliud illam possum fateri. *M.* Considera quia cum omnes supra dictae » rectitudines ideo sunt rectitudines, quia illa in quibus sunt aut sunt aut » faciunt quod debent; summa Veritas non ideo est rectitudo quia debet ali- » quid. Omnes enim illi debent : ipsa vero nulli quicquam debet : nec ulla » ratione est quod est, nisi quia est *D.* Intelligo. *M.* Vides etiam quomodo ista » rectitudo causa sit omnium aliarum veritatum et rectitudinum : et nihil sit » causa illius? *D.* Video et animadverto, in aliis quasdam esse tantum *effecta :* » quasdam vero esse *causas* et *effecta;* ut cum veritas quae est in rerum exis- » tentia sit effectum summae Veritatis; ipsa quoque causa est veritatis quae » cogitationis est, et ejus quae est in propositione; et istae duae veritates nul- » lius sunt causa veritatis. *M.* Bene consideras : unde jam intelligere potes » quomodo summam Veritatem in meo Monologio probavi non habere princi- » pium vel finem, per Veritatem orationis. Cum enim dixi, quando non fuit » verum quia futurum erat aliquid, non ita dixi, ac si absque principio *ista* » *oratio* fuisset, quae assereret futurum aliquid esse, aut *ista* veritas esset

Anselme, j'ai pu démontrer, dans le Monologue, l'éternité du premier Être par l'analyse de la vérité dans les énonciations et dans les Discours. Et c'est de la même manière que nous pouvons appeler la vérité des choses leur *rectitude,* ou, pour expliquer ce mot, leur conformité avec leur destination essentielle, conformité appréciable à la seule raison (chap. XI) [1].

De ces données, Anselme déduit ultérieurement qu'en définitive la *Justice* et la *Vérité* sont des concepts mutuellement réductibles. Seulement il répète que la conformité d'un être avec son type idéal ne devient la Justice que si elle est le résultat de la liberté, ou, pour parler son langage, de la *spontanéité.* — Vouloir ce qu'elle doit, et le vouloir *parce qu'*elle le doit et qu'elle reconnaît cette fondamentale obligation, voilà pour la créature, la loi du Bien moral. La raison a certes sa part dans l'accomplissement des actions vertueuses; mais c'est la volonté qui les range définitivement dans la catégorie des actes bons. Tout cela envisagé, conclut Anselme, définissons la Justice *la rectitude de*

» Deus : sed quoniam non potest intelligi quando, *si oratio ista esset, veritas* » *illi deesset;* ut per hoc quia non intelligitur, *quando* ista veritas *esse non* » *potuerit,* si esset oratio in qua esse posset, intelligatur illa veritas sine prin- » cipio fuisse, *quae prima causa est hujus veritatis.* Quippe veritas orationis » non semper potest esse, si ejus causa non semper esset. Etenim non est » vera oratio quae dicit futurum esse aliquid, nisi reipsa sit aliquid futurum; » neque aliquid est futurum, si non sit in summa Veritate. Similiter de illa » intelligendum est oratione quae dicit quia praeteritum est aliquid. Nam si » nullo intellectu veritas orationi huic, si facta fuerit, deesse poterit; necesse » est ut ejus veritatis, quae summa causa est istius, nullus finis intelligi » possit. Idcirco namque vere dicitur praeteritum esse aliquid, quia ita est » in re : et ideo est aliquid praeteritum, quia sic est in Veritate summa. Qua- » propter si nunquam potuit non esse verum : futurum esse aliquid; et nun- » quam poterit non esse verum, praeteritum aliquid esse; impossibile est » principium summae Veritatis fuisse, aut finem futurum esse. » (Chap. X.)

[1] « *M.* Possumus igitur, ni fallor, diffinire quia *veritas est rectitudo sola* » *mente perceptibilis. D.* Nullo modo hoc dicentem falli video. Nempe nec plus, » nec minus continet ista definitio veritatis, quam expediat : quoniam nomen » *rectitudinis* dividit eam ab omni re, quae rectitudo non vocatur. Quod vero » sola mente percipi dicitur, separat eam ab rectitudine visibili. » (Chap. XI.)

la volonté recherchée pour elle-même. Cette définition, ajoute le saint Docteur, est la traduction de celle de l'Écriture qui appelle les justes *les droits de cœur* [1].

Avant de quitter ce sujet, Anselme se demande si dans les vérités multiples qu'atteint l'esprit de l'homme, il n'y a pas au fond *une seule et identique vérité?* Celle-ci serait-elle multiple parce qu'elle se trouve en plusieurs êtres ? Mais tout ce que nous avons dit plus haut montre que c'est un seul et même rapport qui réunit les choses diverses dans l'unité de la vérité : et ce rapport n'est autre que *la conformité des êtres avec leur destination essentielle.* Serait-ce l'énonciation, la formule matérielle qui constitue la vérité? Mais la vérité des choses, la justice des actions sont-elles contemporaines de leur expression? Naissent-elles ou périssent-elles avec celle-ci, comme la couleur disparaît avec son sujet? En suit-elle les multiples changements ? Toutes ces suppositions sont d'une égale fausseté ! La rectitude, la vérité des signes représentatifs, quels qu'ils soient, idées, paroles, propositions, ne dépend pas absolument de ceux-ci. Bien plutôt faut-il dire que les signes sont vrais, parce qu'ils sont conformes à la Vérité qui est toujours et qui ne périt point, quand même son expression viendrait à faillir. Dans toutes les choses justes, comme dans tous les signes vrais, se trouve un même principe constitutif. Les créatures participent de cette justice et de cette vérité, en la mesure où elles réalisent *la fin de leur être.* Ce n'est que par un certain abus de langage qu'on dit : la vérité de la pensée, du discours, de l'action, etc. De la même manière, nous disons : le temps de

[1] « *M.* Quoniam de rectitudine sola mente perceptibili loquimur; invicem » sese diffiniunt veritas et rectitudo et justitia; ut qui unam earum noverit, » et alias nescierit, per notam ad ignotarum scientiam pertingere possit; » imo qui noverit unam, alias nescire non possit... Constat quia illa justitia » non est in ulla natura quae rectitudinem non agnoscit... D. Scio quia homo » sponte, lapis naturaliter et non sponte facit. Quapropter omnis voluntas » habet *quid* et *cur* : omnino namque nihil volumus, nisi sit *cur* velimus... » Voluntas ergo *recta* illa justa dicenda est, quae sui rectitudinem servat propter ipsam rectitudinem. Justitia igitur *est rectitudo voluntatis propter se* » *servata.* » (Chap. XII.)

tel ou tel acte, de telle ou telle chose. Il n'y a qu'un seul temps auquel participent tous les êtres renfermés dans l'univers. Il n'y a qu'une seule Vérité *substantielle* et *nécessaire*, et elle n'est l'attribut d'aucun être fini. Elle est l'Intelligence absolue, type transcendant des substances créées, principe suprême de leur réalité et de leurs forces, en un mot, de toute la vérité de leur être. Tout ce qui est conforme à ce principe devrait, en rigueur, s'appeler SA vérité, SA justice (chap. XIII) [1].

Que l'on se rappelle maintenant la question qui donna occasion au laborieux Dialogue : Dieu est-il dans chaque vérité particulière? Son concept est-il aussi universel que celui de la vérité, et possède-t-il la même extension ? et l'on comprendra le sens de ces dernières conclusions. Non, les idées, les énonciations vraies n'impliquent point, comme s'en informait le disciple, je ne sais quelle communauté *de nature* avec l'Essence infinie, avec la Raison éternelle. D'autre part néanmoins, nul être contingent n'est en état d'engendrer sa notion dans l'esprit, si ce n'est en vertu de sa conformité à son type idéal dans l'Intelligence de Dieu : toute proposition, pour être vraie, doit correspondre à l'Idée absolue; et la raison, à son tour, ne peut posséder la vérité, qu'à condition de vérifier, dans ses opérations spirituelles, l'image

[1] « *M.* Quaeramus an sit una sola veritas in omnibus istis, in quibus veri- » tatem dicimus esse, an ita sint veritates plures sicut plura sunt in quibus » constat esse veritatem... Si plures sunt veritates secundum plures res, plures » quoque sunt rectitudines... et sicut res ipsae in quibus sunt variantur, sic » quoque certitudines varias esse necesse est... Dico quia si rectitudo signifi- » cationis ideo est alia quam voluntatis rectitudo, quia ista in voluntate, illa in » significatione est : habet suum esse rectitudo *propter significationem, et se-* » *cundum eam mutatur*,... quemadmodum color per corpus habet esse, et non » esse. Existente namque corpore, colorem ejus necesse est esse; et pereunte » corpore, colorem ejus manere impossibile est .. Ergo non existente signifi- » catione, non perit rectitudo, qua rectum est et qua exigitur, ut quod signi- » ficandum est significetur... Quia non ideo est rectitudo in significatione, » quia tunc incipit esse, cum significatur esse quod est, vel non esse quod non » est; sed quia significatio tunc fit *secundum rectitudinem*, *quae semper est* : » nec ob hoc abest a significatione quia perit, cum non sic ut debet, aut cum » nulla sit significatio : sed quoniam tunc significatio deficit a non deficiente

qu'a conçue d'elle l'auteur des choses, et qui constitue son essence incréée. — C'est à ce prix que les êtres divers sont *ce qu'ils doivent être*, et qu'ils présentent la *rectitude*, la *convenance supérieure* dont Anselme fait, dans notre Dialogue, la formule générale de la Vérité.

Le problème soulevé dans la dernière partie du Dialogue *de la Vérité* nous conduit naturellement à rechercher le sentiment de notre Docteur sur la Vérité première envisagée *dans son rapport avec les êtres de la nature.* A cet effet, nous allons grouper ici l'ensemble des considérations éparses sur ce point dans le Monologue, le Prosloge et les autres traités d'Anselme.

Notons avant tout que, dans ses investigations sur ce sujet, Anselme présuppose constamment *la contingence des êtres créés.* Il suffit de parcourir le Dialogue *de Veritate* pour se convaincre qu'aucun maître avant lui n'a marqué, avec une insistance pareille, la subordination des vérités particulières à la Vérité nécessaire et immuable, et, d'une manière plus générale, le rapport du *relatif* à l'*Absolu.* Comme il oppose d'une manière saisissante la Vérité qui ne doit être *qu'elle-même* à la vérité des créatures qui ne sont que la représentation terrestre et lointaine des idées divines ! Ce n'est qu'en tenant compte de ce point de vue que l'on comprend bien le sens de sa définition : « Une chose

» rectitudine ?... Si rectitudo non est in rebus illis quae debent rectitudinem,
» nisi cum sunt *secundum quod debent;* et hoc solum est illis rectas esse :
» manifestum est earum omnium unam solam esse rectitudinem... *Una igitur*
» *in omnibus illis est veritas...* Improprie hujus vel illius rei esse dicitur :
» quoniam illa non in ipsis rebus, aut ex ipsis, aut per ipsas, in quibus esse
» dicitur, habet suum esse : sed cum res ipsae secundum illam sunt, quae
» semper praesto est his, quae sunt sicut debent : tunc dicitur hujus vel illius
» rei veritas : ut veritas vocis, actionis, voluntatis : quemadmodum dicitur
» tempus hujus vel illius rei; cum unum et idem sit tempus omnium quae
» sunt in eodem tempore simul. Et si non esset haec vel illa res; non minus
» esset idem tempus : non enim dicitur ideo tempus hujus vel illius rei, quia
» tempus est in ipsis rebus; sed quia ipsae sunt in tempore. Et sicut tempus,
» per se consideratum, non dicitur tempus alicujus; sed cum res, quae in
» illo sunt, consideramus, dicimus tempus hujus vel illius rei : ita *summa*
» *Veritas per se subsistens* nullius rei est; sed cum aliquid secundum illam
» est; tunc ejus dicitur veritas vel rectitudo. » (Chap. XIII.)

est *vraie* quand elle est ce qu'elle *doit être.* » Le principe de la vérité, dans chaque être, est *sa conformité à sa destination essentielle,* à la loi de son être, à sa tendance instinctive. — Mais il faut entendre comment il explique cette conformité, au point de vue de la considération *idéale, métaphysique* des choses.

Les êtres créés, enseigne Anselme, bien que tirés du néant, ont néanmoins, avant leur apparition à l'être, une certaine existence dans la cause créatrice [1]. Ils subsistent dans la Vérité, dans la Raison infinies. Cette existence peut être comparée au langage, au verbe intérieur par lequel l'artisan se représente les conceptions de son génie. Seulement, la Raison divine ne puise qu'en elle-même la forme des êtres qu'elle appelle à l'existence : de plus, pour les réaliser, elle n'a pas besoin, comme l'homme, d'un secours étranger : sa toute-puissante volonté lui suffit. Laissé à lui-même, l'homme ne pourrait même commencer son œuvre : le Créateur consomme la sienne sans nulle aide du dehors. Enfin, ce qui est la conséquence de son absolue autonomie, ses œuvres lui appartiennent de la façon la plus complète [2]. Le langage de la Raison suprême ne peut être un phénomène accidentel : il est l'Essence même de Dieu se représentant à soi-même avec une parfaite science de sa perfection infinie. L'Être

[1] « Nullo pacto fieri potest aliquid rationabiliter ab aliquo, nisi in facientis » ratione praecedat aliquod rei faciendae quasi exemplum, sive ut aptius » dicatur, *forma* vel similitudo aut regula. Patet itaque quoniam priusquam » fierent universa, erat in ratione summae Naturae quid, aut qualia, aut quomodo futura essent. Quare cum ea quae facta sunt, clarum sit nihil fuisse » antequam fierent, quantum ad hoc quia non erant quod nunc sunt, nec » erat ex quo fierent, *non tamen nihil erant quantum ad rationem facientis,* » *per quam et secundum quam fierent.* » (*Mon.* IX.)

[2] « Illa autem rerum forma quae in Ejus ratione res creandas praecedebat, » quid aliud est quam rerum quaedam in ipsa ratione locutio, veluti faber » facturus aliquod suae artis opus, prius illud intra se dicit mentis concep- » tione. (*Ib.* X.) — Multam tamen in hac similitudine intueor dissimilitudinem. » Illa namque (summa Natura) nihil omnino aliunde assumpsit, unde vel » eorum quae factura erat formam in se ipsa compingeret, vel ea ipsa id quod » sunt perficeret; faber vero penitus nec mente potest aliquid corporeum » imaginando concipere nisi id quod aut totum simul aut per partes ex aliqui-

infini ne produit rien que par lui-même. Reste donc que sa Parole créatrice n'est d'aucune façon une créature. C'est l'Intelligence de Dieu, l'unique et ineffable Parole qui est *le Verbe*. Règle première de toutes choses, elle constitue de fait la suprême et immuable Vérité, où se trouvent éternellement présentes les essences des créatures. Elle est la Sagesse et la Raison supérieures, dans lesquelles les choses préexistent, non dans leur forme concrète et éphémère, mais selon leur type idéal dans l'Essence première et la première Vérité. N'est-il pas vrai qu'en l'homme vivant se rencontre la vérité ou plutôt la réalité même de l'homme, tandis que son portrait n'en exprime que la similitude. Les créatures sont une imitation des perfections infinies. Plus les êtres finis se rapprochent de ce divin Idéal, plus grande est leur noblesse. Rien n'eût été créé, que l'Être créateur n'en eût pas moins possédé et la compréhension de sa propre Essence, et celle des êtres distincts de lui. L'Esprit, le Verbe sont donc aussi nécessaires que Dieu lui-même [1]. L'acte par lequel il pénètre les profonds abîmes de son être est aussi celui par lequel il connaît les créatures qui

» bus rebus *aliquo modo jam didicit*, nec opus mente conceptum perficere, si
» desit aut materia, aut aliquid sine quo opus praecogitatum fieri non possit...
» Quare in hoc differunt ab invicem illae in creatrice Substantia et in fabro
» suorum operum faciendorum intimae locutiones, quod illa nec assumpta,
» nec adjuta aliunde, sed prima et sola causa sufficere potuit suo artifici ad
» suum opus *perficiendum;* ista vero nec prima, nec sola, nec sufficiens est
» ad suum *incipiendum*. Quapropter ea, quae per illam creata sunt, omnino
» non sunt aliquid quod non sunt per illam; quae vero per istam fiunt, penitus
» non essent nisi essent aliquid quod non sunt per ipsam. » (*Ib.*, chap. XI.)

[1] « Sed cum pariter, ratione docente, sit certum quia quidquid summa
» Substantia facit, non fecit per aliud quam per se ipsam, et quidquid fecit,
» per suam intimam locutionem fecit, sive singula singulis verbis, sive po-
» tius uno verbo omnia simul dicendo, quid magis necessarium videri potest,
» quam *hanc summae Essentiae locutionem non esse aliud quam summam*
» *Essentiam?* » (*Ib.*, chap. XII.)

« Asserunt utique inexpugnabiliter ea quae jam inventa sunt, quia nihil
» omnino potuit unquam aut potest subsistere praeter creantem spiritum et
» ejus creaturam. Hanc vero ejusdem spiritus locutionem impossibile est inter
» creata contineri; quoniam quidquid creatum subsistit per illam factum est,
» illa vero per se fieri non potuit. — Relinquitur itaque, ut haec Summi Spi-

en sont les éphémères reflets [1]. Il s'atteint lui-même dans l'infinie personnalité du Verbe : et il connaît les êtres distincts de lui, non par une image empruntée d'elles, mais dans sa propre raison. N'est-ce pas de cette manière que les œuvres de l'artiste subsistent dans son esprit, avant comme après leur réalisation [2]? Certes, la science de l'homme est impuissante à pénétrer le secret de ce langage éternel. Les choses créées subsistent plus véritablement dans leur essence que dans notre science; elles ont également une plus parfaite subsistance dans la suprême Raison, leur principe et leur cause première. Celle-ci est cette Vérité sans commencement et sans vicissitude dont Anselme nous a parlé dans le Dialogue *de Veritate*. Cette Vérité ne se cache à aucun esprit, bien qu'elle ne

» ritus locutio, cum creatura esse non possit, non sit aliud quam Summus
» Spiritus! Denique haec ipsa locutio nihil aliud potest intelligi, quam ejus-
» dem Spiritus intelligentia qua cuncta intelligit. Quid enim est aliud illi rem
» loqui aliquam, hoc loquendi modo, quam intelligere? Nam non, ut homo,
» non semper dicit quod intelligit. Si igitur summe simplex Natura non est
» aliud quam quod est sua intelligentia, quemadmodum est idem quod est sua
» sapientia, necesse est ut similiter *non sit aliud quam quod est sua locu-*
» *tio*... Non constat pluribus verbis (ista locutio) sed est *unum Verbum*, per
» quod facta sunt omnia. » (*Ib.*, chap. XXIX.)

[1] « ... Quemadmodum in vivo homine veritas hominis esse dicitur, in picto
» vero similitudo sive imago illius veritatis, sic existendi veritas intelligitur
» in verbo, cujus essentia sic summe est, ut quodammodo illa sola sit; in his
» vero quae in ejus comparatione quodammodo non sunt, et tamen per illud
» et secundum illud facta sunt aliquid, *aliqua imitatio* illius summae Essen-
» tiae perpendatur. Sic quippe verbum summae veritatis quod et ipsum est
» summa veritas, nullum augmentum vel detrimentum sentiet, secundum hoc
» quod magis vel minus creaturis sit simile; sed potius necesse erit, omne
» quod creatum est tanto magis esse et tanto esse praestantius, quanto simi-
» lius est illi quod summe est et summe magnum est. Satis itaque manifestum
» est in Verbo, per quod facta sunt omnia, non esse eorum similitudinem, sed
» veram simplicemque Essentiam; in factis vero *non esse simplicem absolu-*
» *tamque Essentiam, sed verae illius Essentiae vix aliquam imitationem.*
» Unde necesse est non idem verbum secundum rerum creatarum similitudi-
» nem magis vel minus esse verum, sed omnem creatam naturam eo altiori
» gradu essentiae dignitatisque consistere, quo magis illi appropinquare
» videtur. » (*Ib.*, chap. XXXI.)

[2] « Verbum quo (Deus) creaturam dicit, nequaquam similiter est verbum

se manifeste pas également à tous. L'esprit qui s'élève jusqu'à elle voit en quelque manière Dieu lui-même, puisqu'elle est identique à l'Essence infinie, et celui qui ne connaît point Dieu ne connaît point complétement la Vérité ni la vraie lumière. Cette Vérité ne trompe personne. Elle est au regard de l'âme ce qu'est le soleil à l'œil du corps. Elle ne saurait être fixée par l'esprit : son éclat est trop vif. N'en est-il pas de même du soleil? — Elle peut être nommée l'inaccessible lumière où habite la Divinité [1]. Considérée dans son identité essentielle avec l'Essence de Dieu, elle est tout ensemble la vie, la sagesse, la bonté, la béatitude, l'éternité,

» creaturae; quia non est ejus similitudo, sed *principalis Essentia;* conse-
» quitur igitur ut ipsam creaturam non dicat verbo creaturae... Si nihil aliud
» dicit quam se aut creaturam, nihil dicere potest nisi aut suo aut ejus verbo.
» Si ergo nihil dicit verbo creaturae, quidquid dicit, verbo suo dicit. Uno igitur
» eodemque verbo dicit se ispum et quaecumque fecit. (*Ib.*, chap. XXXIII.) —
» Quemadmodum opus quod fit secundum aliquam artem, non solum quando
» fit, verum et antequam fiat et postquam dissolvatur, semper est in ipso arte,
» non aliud quam quod est ipsa ars. Idcirco, cum ipse summus Spiritus dicit
» seipsum, dicit omnia quae facta sunt. Nam et antequam fierent, et
» cum jam facta sunt, et cum corrumpuntur seu aliquo modo variantur, sem-
» per in ipso sunt, non quod sunt in se ipsis, sed quod est idem ipse. Etenim
» in se ipsis sunt essentia mutabilis secundum immutabilem rationem
» creata; in ipso vero sunt ipsa prima Essentia et prima existendi veritas,
» cui prout magis utcumque illa similia sunt, ita verius et praestantius
» existunt. (*Ib.*, chap. XXXIV.) Quidquid igitur factum est, sive vivat sive
» non vivat, aut quomodocumque sit in se, in illo est ipsa vita et veritas... »
(*Ib.*, chap. XXXV.)

[1] « Cum ergo et hoc constet quia omnis creata substantia tanto verius
» est in Verbo, id est, in intelligentia Creatoris quam in seipsa, quanto verius
» existit creatrix quam creata essentia; quomodo comprehendat humana
» mens, cujusmodi sit illud dicere et illa scientia, quae sic longe superior
» et verior est creatis substantiis; si nostra scientia tam longe superatur
» ab illis, quantum earum similitudo distat ab earum essentia? — Summa
» autem Essentia non est nisi una, quae sola creatrix et solum principium
» est omnium quae facta sunt. Ipsa namque sola fecit, non per aliud quam
» per se, omnia ex nihilo... (*Ib.*, chap. XXXVI.) Cum constet quia sicut per-
» tinet ad Ejus essentiam scientia et intelligentia, sic ejus scire et intelligere
» non est aliud quam dicere, id est semper praesens intueri quod scit et
» intelligit. » (*Ib.*, chap. LXIII.)

la synthèse de toutes les perfections divines, l'indivisible unité de l'Être absolu [1].

Ainsi la *Vérité* et la *Bonté*, qui n'est que le rapport de la Vérité avec la volonté, sont les attributs par excellence de l'Être absolu. Le *mal*, privation ou absence de l'Être et de la Justice, n'a aucun type exemplaire qui lui corresponde dans l'intellect divin ; il n'a point d'essence positive. Les choses auxquelles le vulgaire donne le nom de *Mal* ne sont que les êtres ou les actes dénués de leurs qualités naturelles. Il en est ainsi des maux que nous concevons comme des *privations* proprement dites, la cécité par exemple ; et aussi de ceux qui nous apparaissent avec un certain caractère *plus positif*, comme la tristesse [1]. L'erreur est une

[1] « Si non invenisti Deum tuum, quomodo est ille hoc quod invenisti, et » quod illum tam certa veritate et vera certitudine intellexisti? Si vero inve- » nisti, quid non sentis quod invenisti? Cur non te sentit Domine Deus, anima » mea, si invenit te? An non invenit, quem invenit esse lucem et veritatem? » Quomodo namque intellexit hoc, nisi videndo lucem et veritatem? Aut » potuit omnino aliquid intelligere de te, nisi per lucem tuam et veritatem » tuam? Si ergo vidit lucem et veritatem, vidit te; si non vidit te, non vidit » lucem et veritatem. An veritas et lux est quod vidit, et tamen nondum te » vidit, quia vidit te aliquatenus, et non vidit te sicuti es?... Cur hoc, Do- » mine, cur hoc? Tenebratur oculus ejus infirmitate sua, aut reverberatur » fulgore tuo? Sed certe et tenebratur in se et reverberatur a te... Quanta » namque est lux illa de qua micat omne verum, et extra quam non nisi nihil » et falsum est! Quam immensa est, quae unico intuitu videt quaecumque » facta sunt, et a quo et per quam et quomodo de nihilo facta sunt! Quid » puritatis, quid simplicitatis, quid certitudinis et splendoris ibi est! Certe, » plus quam a creatura valeat intelligi? (*Proslog.*, chap. XIV.) Vere ideo hanc » non video, quia nimia mihi est; et tamen quidquid video, per illam video; » sicut infirmus oculus quod videt, per lucem solis videt, quam in ipso sole » nequit aspicere. Non potest oculus meus ad illam; nimis fulget, non capit » illam, nec suffert oculus animae meae diu intendere in illam... O summa et » inaccessibilis lux ! O tota et beata veritas, quam longe es a me, qui tam » prope tibi sum! Quam remota es a conspectu meo, qui sic praesens sum » conspectui tuo ! (Chap. XVI.) — » Et vita es, et lux, et sapientia, et beati- » tudo et aeternitas, et multa hujus modi bona et tamen non es nisi unum » et summum bonum, tu tibi omnino sufficiens, et nullo indigens, quo omnia » indigent ut sint et ut bene sint. » (Chap. XXII.)

[1] *Discip.* « Sicut percipio in privatione mali aliquid aliud fieri quod bonum

sorte de mal intellectuel. A vrai dire, l'erreur ne peut être perçue avec une véritable évidence, ni subsister dans la pleine lumière d'une rigoureuse déduction. Elle peut seulement être l'objet d'une perception imaginaire ou de quelque déviation du raisonnement.

» dicimus, ita animadverto in privatione boni aliquid aliud fieri, quod malum » nominamus. Quapropter licet quibusdam argumentis malum nihil esse pro- » betur : quoniam malum non nisi vitium aut corruptio est quae nullo modo » sunt nisi in aliqua essentia; et, quanto magis ibi sunt, tanto magis illam » redigunt in nihilum,... licet, inquam, sic aut alio modo probetur nihil esse » malum, non potest animus meus, nisi sola fide acquiescere (*de casu Diab.*, » chap. X.) — *Mag.* Multa... dicuntur aliquid, secundum formam loquendi, » quae non sunt aliquid: quoniam sic loquimur de illis, sicut de rebus existen- » tibus. Hoc ergo modo *malum* et *nihil* significant aliquid; et quod significatur » est aliquid, non secundum rem, sed secundum formam loquendi... Malum » non est aliud quam non bonum aut absentia boni, ubi debet et expedit esse » bonum. (*Ib.*, chap. XI.) — Nulla essentia, quamvis *mala* dicatur, est nihil; nec » *malam esse* ut *ulli esse aliquid.* Nulli enim essentiae est malam esse quam » deesse illi bonum, quod debet habere. Deesse vero bonum quod debet adesse, » non est aliquid esse. Quare malum esse, non est ulli essentiae aliquid esse. » » (*de conc. Virginis*, chap. V.) Non est injustitia qualitas, aut actio, aut » aliqua essentia, sed tantum absentia debitae justitiae... Malum vero esse vel » injustum, est non habere justitiam quam debet habere : quod non est » aliquid . Est autem aliud bonum quod dicitur commodum, cujus contrarium » est malum, quod est incommodum. Hoc malum aliquando nihil est, ut cae- » citas : aliquando est aliquid, ut dolor. Sed hoc malum, cum aliquid est, » Deum facere non negamus... Itaque de illo tantum malo, quod est injustitia, » per quam dicitur injustum, certum est quia nunquam est aliquid; nec alicui » rei est esse aliquid, injustam esse. » (*De conc. praescientiae Dei cum lib. arb.*, chap. VII) — S. Anselme répète ces explications, en termes identiques, dans la VIII^e^ lettre du II^e^ livre de sa correspondance, adressée à son cher Maurice qui lui avait demandé *si le mal est une entité positive.* Elle se termine ainsi : « Quod autem non est aliud quam absentia ejus quod est » aliquid, itaque non est aliquid. Malum igitur vere est nihil, et nihil non est » aliquid : tamen quodammodo sunt aliquid (res malae); quia sic loquimur de » his, quasi sunt aliquid, cum dicimus *nihil* vel *malum fecit :* aut *nihil*, vel » *malum est quod fecit;* sicut dicimus, *aliquid* vel *bonum fecit*, aut *aliquid* » vel *bonum est quod fecit.* » — Il dit ailleurs : « Quomodo, inquam, conve- » niant, et *falsa intelligi*, et intelligere esse : *scientia* comprehendere *existere* » *ailquid*, nihil ad me, tu videris. » (*Contra Insipientem*, chap. VI, coll. *Lib. dro Insip*, § 6, passim.)

Nous avons exposé la pensée d'Anselme touchant la Vérité considérée en soi et dans son rapport avec les êtres de la nature. Nous devons à présent rechercher les sources de sa doctrine, sa valeur intrinsèque et sa part d'influence sur le mouvement des idées.

Le lecteur l'aura observé déjà : le Dialogue *de Veritate*, quoique postérieur au Monologue, se ressent beaucoup, malgré ses intentions métaphysiques, de la formation qu'Anselme avait reçue de Lanfranc. C'est un traité à l'usage des élèves du *Trivium*, et il faut en tenir compte. Mais à côté de l'élément pseudo-péripatéticien, ce qui domine en notre Dialogue, ce sont les spéculations sur la *Vérité en soi*. Voilà précisément la conception métaphysique que notre Docteur eut la gloire de rappeler dans les Écoles. Le contraste de cette partie avec les endroits où reparaît la dialectique pure est extrêmement curieux. Si nous le signalons, c'est qu'Anselme est le premier Docteur orthodoxe qui associa, dans une aussi large mesure, l'esprit du Lycée et celui de l'Académie. — Il y a, dans le Dialogue *de Veritate*, des distinctions, des divisions qui rappellent trop Porphyre et Cassiodore ! Est-il question de la Vérité suprême, de l'Exemplarisme ou du rapport idéal des êtres créés avec l'Intelligence créatrice, l'on croit entendre des échos affaiblis d'Augustin. Anselme a dû être vivement impressionné à la lecture de ce puissant penseur. Rien d'émouvant, à coup sûr, comme les élévations du Docteur d'Hippone sur les plus hauts problèmes de la métaphysique, écrites dans un style vigoureux et coloré, où se reflète toute l'exubérance de la nature africaine. Peut-être ces éloquents transports, ces métaphores hardies ne sont-elles pas toujours le langage le mieux approprié à l'analyse philosophique ! Quoi qu'il en soit, pour quiconque aime le fond des choses, quel plaisir de reconnaître, sous les contours encore un peu indécis de l'ontologie du Docteur de Cantorbéry les premiers traits de l'idéologie scolastique. Pourquoi n'éprouverions-nous pas à ce spectacle la joie que ressent l'artiste en présence de ces monuments contemporains d'Anselme, où l'on pressent déjà, dans l'arcade qui commence à fléchir, la grâce de l'ogive et les promesses de l'architecture gothique ?

Nous savons la définition de la Vérité qu'Anselme nous a laissée : *Rectitudo sola mente perceptibilis.* D'elle-même, elle est obscure. Le mot *Rectitudo* est loin d'être heureux. Il appartient à l'Éthique plus qu'à l'Ontologie. Qui sait si le désir de montrer l'identité essentielle de la *Justice* et de la *Vérité* n'a pas conduit le disciple de Lanfranc à les réunir en une formule commune? Le goût de l'époque allait volontiers à ces assimilations! La clarté et la précision de l'idée en ont souffert. Une doctrine féconde s'y cache néanmoins, sous des termes ambigus, et Anselme l'a rendue assez claire par la suite du Dialogue. Nous devons pénétrer dans sa pensée.

Les Catégories d'Aristote ne définissaient pas la Vérité *en soi :* elles portaient cependant que la proposition est vraie ou fausse *selon que la chose exprimée est ou n'est pas* [1]. En sa Métaphysique, le Stagyrite tenait qu'il y a *entre la vérité et l'être* un invariable rapport [2], mais Anselme ne connaissait pas la version boétienne de cet ouvrage. L'explication des Catégories ne pouvait suffire à un spéculatif, à un amateur de l'absolu. Le traité de l'Interprétation, sorte de Grammaire philosophique, devait encore moins le satisfaire. Ce qu'Anselme voulait, c'était une définition objective, générale de la Vérité. Il ne l'a pas encore rencontrée, assure-t-il. Cependant son maître S. Augustin s'était ouvert à plusieurs reprises sur ce sujet, dans les *Soliloques*, dans les livres *de la vraie Religion* et du *Libre Arbitre.* Un disciple aussi diligent que l'Écolâtre du Bec n'avait pu négliger ces passages. Au fond, la définition d'Anselme ne diffère pas de celles de son maître. — Augustin s'arrêtait de préférence à *l'élément ontologique* du concept de la vérité, c'est-à-dire à la considération de *l'essence des êtres*, considérée comme fondement de leur représentation dans l'esprit. Il rejette dans les *Soliloques* l'opinion de ceux qui confondent la vérité avec les perceptions sensibles ou avec la vraisem-

[1] *Τῳ γὰρ εἶναι τὸ πρᾶγμα ἢ μὴ, ἀλήθὴς ὁ λόγος ἢ ψευδὴς λέγεται.* — *Catég.*, chap. XII, § 7 ; Cf. chap. V, § 24. — Notons encore une fois la portée objective qu'Aristote assigne ici, en passant, à la vérité.

[2] Met., IX, 10. — Cf. liv. V, 29.

blance. « Ce qui existe, dit-il, cela est vrai [1]. » Dans le traité de la *vraie Religion*, il écrit que les choses sont vraies pour autant qu'elles participent de l'être; or, selon lui, « elles participent de l'être dans la mesure de leur ressemblance avec la première Cause [2]. « Dieu est la Vérité-principe » avait dit encore Augustin en ses *Sermons*. C'est en cette Vérité que se trouvent les raisons ou Essences de tous les êtres créés. Il est vrai que, dans ce même livre de la *vraie Religion* que nous citions tout à l'heure, Augustin touche l'aspect psychologique du problème. — Nous y lisons cette définition : La vérité est l'*expression* de l'être [3]. Elle est presque identique à celle que donnera plus tard Isaac, fils du traducteur arabe de la version syriaque d'Aristote, et que S. Thomas rapporte en ces termes : *Isaacus dicit in libro de Definitionibus, quod veritas est adæquatio rei et intellectus* [4]. — La génèse de cette définition célèbre est bien connue. Déjà Parménide d'Élée avait identifié la vérité et la réalité, l'idée et l'être. « L'Être et la Pensée sont une seule et même chose [5] », voilà la maxime métaphysique qu'il a apprise de la Muse. Mais nul n'avait établi le rapport de l'être et de la vérité avec autant d'éloquence que le divin Philosophe, en sa *République* : « Celui qui connaît, demande Platon à son disciple, connaît-il *quelque chose* ou rien? — Je réponds qu'il connaît quelque chose. — Qui est ou qui n'est pas? — *Qui est*, car comment ce qui n'est pas, pourrait-il être connu?... Nous tenons ceci pour certain... que ce qui est de toute manière est entiè-

[1] « Verum esse id quod est, non autem id quod videtur, aut quod tale est » quod videtur, quia etiamsi res non videatur, neque conformitatem habeat » cum aliqua cognitione, nihilominus vera est. » (*Soliloq. II*, chap. V.)

[2] « Vera in tantum vera sunt, in quantum sunt : in tantum autem sunt, in » quantum principalis unius similia sunt. » (*De vera Relig.*, chap. XXXVI.)

[3] « Veritas est quâ ostenditur id quod est. » (*De vera Relig.*, chap. XXXVI.)

[4] *Summ.*, I, q. 16, a. 2.

[5] Τὸ γὰρ αὐτὸ νοεῖν ἐστίν τε καὶ εἶναι. — Ap. Clem. Alex. Strom., VI, p. 627 et Plotin, *Enn.* V, 1, 8. — Pour le sens de ces paroles, voyez Ueberwegg, *Geschichte der phil.*, p. 59, et aussi Bergk, *Index lect. Hal.*, 1867-1868

rement cognoscible, et que ce qui n'est pas du tout n'est pas du tout cognoscible? — Rien de plus certain [1]. » — Les Néo-Platoniciens ne pouvaient qu'accepter avec enthousiasme cette vue de leur Maître. Plotin, en particulier, insista sur le lien de l'être et de la vérité [2]. Les Alexandrins communiquèrent cette doctrine à leur disciple S. Augustin. On peut assurer que ce fut Anselme qui la transmit aux Maîtres des Écoles scolastiques. — Les choses sont vraies, nous a dit le docteur de S[te]-Marie du Bec, pour autant qu'elles répondent à leur fin, à leur loi essentielle, à leur tendance instinctive. Tel est bien le sens de la formule : *Res sunt veræ quando sunt ut debent.* Au fond, voilà la vérité transcendentale, comme l'appelleront les scolastiques, identique à l'être des choses [3]. *Esse, et verum, et bonum convertuntur.* Voulez-vous toucher le fond de cette définition obscure à première vue? Appliquez-la à l'esprit humain! N'allons pas chercher dans la doctrine d'Anselme l'optimisme de Leibnitz, comme le veut Henri Ritter. Mais n'est-il pas exact que pour participer à la vérité et réaliser sa fin, la raison, dans le déploiement de son activité, doit se conformer à ses lois immanentes, constitutionnelles [4]? En répondant à ses tendances primitives et innées, en observant dans son exercice les conditions que lui dicte d'instinct la nature, l'esprit atteint son objet et vérifie le plan de Dieu. Pour parler avec Anselme, *il est ce qu'il doit;* et en même temps, il pose *entre l'intelligible et lui* l'équation d'où résulte la connaissance. De la sorte, *la vérité ontologique* embrasse, aux yeux de notre Doc-

[1] L. V, p. 476.

[2] *Ennead.* V, 1, 7.

[3] Albert le Grand n'est pas très-clair dans son appréciation de la théorie du Dialogue : *De veritate.* Il semble l'entendre d'une perception confuse de la vérité produite par les créatures : — « Dicendum quod in ordine primae Veri- » tatis, non acceptat (res creata) significare *vaga* tantum significatione, sed » significare rem sicut est ratione rei, significatione rei adaequata, et hoc » dico salva fide Anselmi. » (*In Praedicamentis,* l. II, c. XIII.) — Albert a raison, mais Anselme aussi, car il dit la même chose. On voit par cette citation comment le métaphysicien du Bec menait à l'ontologie les plus forts esprits du siècle scolastique.

[4] Cf. Tennemann, *Gesch. der Phil.,* t. VIII, p. 151.

teur, la *vérité psychologique* ou l'assimilation idéale des êtres. En notre sujet, cette observation est capitale; tous ceux qui l'ont pénétré le savent. Mais j'ai hâte de le déclarer : cette manière d'envisager la question y jette quelque ombre. En s'informant de la nature de la vérité, c'est avant tout le rapport *représentatif* et le rôle assimilateur de l'esprit à l'égard des réalités qu'on cherche à fixer. L'usage a consacré cette manière de voir, et l'on étonnerait fort aujourd'hui un amateur de philosophie, si l'on s'avisait de lui annoncer que les choses sont vraies quand *elles sont ce qu'elles doivent être.* La conception d'Anselme est profonde, mais imparfaitement formulée. — Les maîtres de la seconde période scolastique s'en aperçurent. La *vérité des jugements* tient une plus large place dans leur analyse philosophique que la *vérité des essences.* Souvent, ils laissent trop celle-ci au second plan. Les circonstances y aidaient, il est vrai. Aristote, désormais mieux connu, recherchait surtout la vérité non dans les choses, mais dans l'esprit [1]. Les Gloses des Arabes, notamment la doctrine d'Averroës sur l'*intellect agent*, récemment introduites en France par les professeurs juifs des écoles de Montpellier et de Marseille poussaient activement les maîtres vers la psychologie. A l'instar des modernes, c'est la vérité *subjective* que considèrent les Docteurs. Mais les élévations d'Anselme sur la vérité des Essences ne seront plus oubliées! Sous ce rapport, il est curieux de comparer avec notre Dialogue la *Question* de S. Thomas d'Aquin intitulée également *De Veritate*, ou mieux encore le traité de la *Somme théologique* qui en reproduit les principales thèses. C'est là qu'on peut apprécier l'influence qu'Anselme a exercée sur les maîtres postérieurs, malgré leur prédilection pour les considérations psychologiques. Chose assez rare ailleurs! Son nom revient plusieurs fois dans le texte du Docteur angélique que nous venons de citer. Résumons-en rapidement la doctrine.

L'être intelligible, dit S. Thomas, se dit par rapport à l'intelligence. Ce rapport est double : il est *essentiel*, s'il implique l'intelligence d'où l'être *tire son essence;* il est *accidentel*, s'il

[1] Cf. *Metaph.*, VI, 3. — Cf. Th. Aq., *De Veritate*, art. 2, 3, 8.

implique simplement l'intelligence qui *le conçoit*... D'où il suit qu'*à parler rigoureusement*, les choses sont dénommées vraies, par rapport à l'intelligence dont elles dépendent. C'est de cette Vérité essentielle, poursuit S. Thomas, que se vérifie la définition de S. Anselme de Cantorbéry, dans le Dialogue *De Veritate*. Il faut discerner, ajoute-t-il, les *êtres de la nature* des *œuvres de l'art* et des *signes de convention* par lesquels l'homme a coutume de représenter la vérité à son esprit. Ceux-ci sont nommés *vrais* par rapport *à notre esprit* : la maison peut être dite vraie, si elle répond au type qu'en a conçu l'artisan dans son imagination : la parole est vraie, lorsqu'elle exprime une conception juste, et ainsi des autres signes. Mais la vérité des *êtres de la nature* se tire de la Raison de Dieu. Envisagée de cette dernière manière, elle implique l'Intelligence qui est le principe des êtres. Or, c'est là ce qu'a entendu dire le Docteur de Cantorbéry dans sa définition du Dialogue *sur la vérité* [1]. — S. Thomas tient avec Anselme que la vérité considérée au point de vue des choses est *unique*, en ce sens que, bien qu'il y ait

[1] « Res intellecta ad intellectum aliquem potest habere ordinem vel per se, » vel per accidens. Per se quidem habet ordinem ad intellectum *a quo dependet secundum suum esse*; per accidens autem ad intellectum *a quo* » *cognoscibilis est*. Sicut si dicamus, quod domus comparatur ad intellectum » artificis per se, per accidens autem comparatur ad intellectum a quo non » dependet. Judicium autem de re non sumitur secundum id quod inest ei per » accidens, sed secundum id quod inest ei per se. Unde unaquaeque res » dicitur vera absolute secundum ordinem ad intellectum a quo dependet. » Et inde est quod res artificiales dicuntur verae per ordinem ad intellectum » nostrum, dicitur enim domus vera quae assequitur similitudinem formae » quae est in mente artificis, et dicitur oratio vera, in quantum est signum » intellectus veri. Et similiter res naturales dicuntur esse verae, secundum » quod assequuntur similitudinem specierum quae sunt in mente divina; » dicitur enim verus lapis, qui assequitur propriam lapidis naturam, secun- » dum praeconceptionem intellectus divini. Sic ergo veritas principaliter est » in intellectu, secundario vero in rebus, secundum quod comparantur ad » intellectum, ut ad principium .. — Ad veritatem rei secundum ordinem ad » intellectum pertinet... definitio Anselmi, in dial. de veritate, cap. XII, » talis : veritas est rectitudo sola mente perceptibilis : nam rectum est quod » cum principio concordat. » *Sum. th.* I, q. 16, *De veritate*, art. 1, *in concl.*

plusieurs essences ou formes dans les choses, cependant il n'y a qu'une seule Vérité selon laquelle elles sont dénommées *vraies*, et c'est celle qui préexiste dans la Raison divine. Et voilà encore ce qu'a professé S. Anselme en tenant qu'il y a dans toutes les choses vraies une seule vérité [1]. — La vérité suppose *le rapport de l'être à une intelligence :* s'il n'y avait aucune intelligence éternelle, il n'y aurait aucune vérité éternelle... Au sujet des choses actuellement existantes, il a toujours été vrai qu'elles existeraient un jour : dans leur cause dernière qui est Dieu, préexistait éternellement la connaissance de leur *futurition*. Quant aux énonciations (et à tous les signes conventionnels en général), elles sont dites vraies en un sens *spécial*, pour autant qu'elles présupposent la vérité du jugement, c'est-à-dire l'équation de la chose et de l'esprit. Tout cela nous fait comprendre comment Anselme a pu définir la vérité *une certaine conformité*, en entendant par là la conformité des êtres à leur type exemplaire, dans la divine Raison [2]. « Ainsi, dit ailleurs le Docteur Dominicain, la *vérité se trouve, à proprement parler, dans l'esprit;* elle est quelquefois attribuée aux *choses*, en ce sens que chacune d'elles réalise la loi de sa nature. Aussi Avicenna dit-il en sa Mé-

[1] « Si loquamur de veritate secundum quod est in rebus, sic omnes sunt » verae una prima veritate, cui unumquodque assimilatur secundum suam » entitatem. Et sic licet plures sint essentiae vel formae rerum, tamen una est » veritas divini intellectus, secundum quam omnes res denominantur verae... » — Dictum Anselmi veritatem habet secundum quod res dicuntur verae per » comparationem ad divinum intellectum. » (*Ibid.* art. 6, *in concl.*) — *De Verit.*, art. 4, *in concl.*

[2] « Res denominantur verae a veritate intellectus. Unde si nullus intel- » lectus esset aeternus, nulla veritas esset aeterna... Illud quod nunc est, ex » eo futurum fuit, antequam esset, quia in causa sua erat ut fieret... Sola » autem causa prima est aeterna Unde ex hoc non sequitur quod ea quae » sunt, semper verum fuerit ea esse futura, nisi quatenus in causa sempi- » terna fuit ut essent futura; quae quidem causa solus Deus est. (*Ibid.*, » art. 7, *concl.*, ad. 3.) — Propositio non solum habet veritatem, sicut res » aliae veritatem habere dicuntur, in quantum implent *id quod de eis ordi- » natum est ab intellectu divino;* sed dicitur habere veritatem quodam *spe- » ciali* modo, in quantum significat veritatem intellectus; quae quidem con- » sistit in conformitate intellectus et rei. » — *Ibid.*, art. 8, ad. 3.

taphysique, que la vérité n'est que la propriété inhérente aux êtres d'engendrer dans l'esprit leur véritable concept, comme elles, de leur côté, correspondent à leur type incréé subsistant en la Raison divine [1]. — Dans la Question *De Veritate*, S. Thomas appelle cette propriété des êtres « le fondement de leur vérité [2]. »

D'après S. Thomas, le concept de la vérité emporte donc avant tout la conformité du jugement avec son objet; mais cette conformité est, en suprême ressort, fondée sur l'Idée divine, type transcendant de toute réalité créée : de la nature aussi bien que de l'esprit de l'homme, prédestiné à la concevoir. Anselme, le métaphysicien, l'homme des causes premières, s'est surtout attaché à cette dernière considération. Ce ne sont pas les formes multiples de la vérité qui passionnent son esprit : c'est le lien qui les réunit dans la pensée infinie. C'est encore l'un des traits caractéristiques de son génie. — Nous permettra-t-on de dire à ce sujet toute notre pensée? Il y aura toujours un fond épais d'obscurité dans les conceptions du genre de celles que nous venons d'exposer. La vérité psychologique y est comme enchevêtrée à la vérité ontologique. Une grande contention d'esprit doit être dépensée à démêler cette toile de Pénélope. Nous l'avons éprouvé chez S. Anselme. Écoutons un passage analogue de S. Augustin, son maître, son initiateur à cette manière de philosopher? « L'âme est l'œuvre de Dieu, dit le Docteur d'Hippone [3]... Car toute chose vraie est vraie par sa participation à la vérité, et l'âme n'est ce qu'elle

[1] « Licet verum proprie non sit in rebus, sed in mente, res tamen interdum vera dicitur secundum quod *proprie actum propriae naturae* consequuntur (c'est le *faciunt quod debent* d'Anselme). Unde Avicenna dicit in sua Metaphysica, quod veritas rei est proprietas uniuscujusque rei, quod stabilitum est ei, in quantum talis res nota est de se facere veram aestimationem, et in quantum propriam sui rationem quae est in mente divina imitatur. » — *Sum. cont. Gent.*, l. I, c. LX.

[2] Art. 1, *in conclus.*

[3] » Credendum itaque est et intelligendum, neque ullo modo dubitandum, » quod recta fides habet, animam sic esse a Deo tanquam rem quam fecerit, » non tanquam de natura cujus est ipse, sive genuerit, sive quoquo modo

est que *parce qu'elle est une âme véritable.* Toute âme doit donc *à la vérité* d'être *en réalité* une âme... Or la vérité est Dieu. » — Sans contredit, voilà des antithèses et des rapprochements qui causent quelque surprise! Cependant, cette forme de considérations eut un rare crédit. En l'Être nécessaire, la *vérité* n'est que l'Essence absolue se comprenant elle-même. Toutes les perfections divines sont Dieu lui-même. S. Augustin avait mis dans un puissant relief cette théorie si belle. Il ne fit que l'appliquer en substituant, en mainte occurrence, la formule *abstraite* des attributs au nom *concret* de la Divinité. En soi, ontologiquement, rien de plus exact. Mais de pareilles substitutions qu'imitèrent après Anselme des maîtres nombreux, présentèrent quelque danger à de moins fermes esprits. Cette habitude, en se généralisant, engendra la manie de prêter une sorte de réalité aux notions de l'esprit. En un temps où la Dialectique formelle rendait déjà ce péril imminent; à la veille de la dispute sur les Universaux, on pressent tout ce qu'une semblable coutume réservait de mécomptes, d'embarras. Les formules n'avaient pas mené l'esprit à la réalité, aux choses : bientôt l'on s'imaginera que les abstractions psychologiques sont, à quelque degré du moins, les choses mêmes. Ce sera contraire à Aristote, à Augustin, à Anselme! Mais une Logique excessive et incomplète a préparé les maîtres à cette méprise funeste. Ils ne l'éviteront pas. Demandez à Guillaume de Champeaux, à Bernard de Chartres, à Gilbert de la Porrée! — Ainsi Nominalisme et Réalisme, voilà le Charybde et le Scylla où s'en va pour longtemps rouler la pensée. Elle n'en échappera qu'au jour où elle s'avisera de chercher dans la nature et dans l'histoire la base et le contrôle de toute philosophie qui tient à ne pas être une chimère. Ce ne sera pas de sitôt!

Ce n'est pas seulement la *vérité* et l'*Essence divine* qu'Augustin identifia : il affirma en outre l'identité fondamentale de la *vérité* et de la *justice.* « Il a été dit à Dieu, écrit-il dans sa *lettre à Consentius* :

» protulerit. Omne quippe verum a veritate verum est; et omnis anima eo » anima est, quo vera anima est. Omnis igitur anima a veritate habet ut » omnino anima sit .. Non igitur cum a veritate anima est, a seipsa est. Est » autem veritas Deus. » — Lib. 83, Quaest. q. 1.

Ta loi est la vérité. Qui ne voit par cette parole que tout ce qui est conforme à la vérité est en même temps juste? » Nous avons déjà reconnu l'affinité de la doctrine générale d'Augustin sur la vérité avec celle d'Anselme. Se tromperait-on beaucoup en signalant dans les paroles précitées la source du rapprochement des notions de *justice* et de *vérité* que nous avons admiré dans le Dialogue?

Mais, ce qui domine les vues du Docteur de Cantorbéry, ce qui en fait volontiers oublier les obscurités, c'est sa tentative de montrer *le lien de la vérité ontologique avec la vérité subjective de l'esprit.* Nous approfondirons la portée de cette doctrine si grave. Anselme a tenté d'écrire la démonstration classique d'une théorie dont S. Augustin avait indiqué les principes. Nous l'avons vu; à l'époque où le génie grec était à l'apogée, Aristote signala le rapport de la Dialectique et de la nature. L'humble moine du XI^e siècle qui osait établir le trait d'union de l'idéologie avec l'ontologie et la théodicée, la relation fondamentale *de la vérité et de l'être,* a pour cela seul mérité l'immortalité! C'est d'après ces intuitions puissantes, non d'après les détails, qu'il faut juger sa philosophie. Qu'en un essai, où nul ne le précéda, sa plume ait oscillé quelquefois; qu'il y ait gardé les procédés imparfaits d'une époque presque barbare, ces taches fâcheuses ne peuvent nuire à sa gloire!

La doctrine de la vérité ontologique qu'Anselme ramena dans les Écoles n'en sortira plus. Nous avons déjà remarqué que les Docteurs de la seconde période scolastique s'adonnèrent d'une manière plus spéciale à l'étude de l'élément subjectif de la connaissance, que notre Docteur avait trop négligé. Après la réaction de la Renaissance contre la Dialectique dégénérée, les penseurs du XVII^e siècle revinrent, en France surtout, aux spéculations de leurs devanciers sur *la vérité en soi.* Tout le siècle de Louis le Grand est plein de ces vues! Nul, en cette époque, ne les résuma avec plus d'éloquence que l'Évêque de Meaux. Que l'on nous permette de reproduire ici une page de son livre *De la connaissance de Dieu et de soi-même.* Ce ne sera pas un hors-d'œuvre. Elle est le magnifique commentaire de la Doctrine d'Augustin et d'Anselme.

« Toutes ces vérités, dit ce grand homme en parlant des principes absolus, et toutes celles que j'en déduis par un raisonnement certain, subsistent indépendamment de tous les temps; en quelque temps que je mette un entendement humain, il les connaîtra, mais en les connaissant, il les trouvera vérités, il ne les fera pas telles : car ce ne sont pas nos connaissances qui font leurs objets : elles les supposent. Ainsi ces vérités subsistent devant tous les siècles, et devant qu'il y ait un entendement humain : et quand tout ce qui se fait par les règles des proportions, c'est-à-dire tout ce que je vois dans la nature, serait détruit, excepté moi, ces règles se conserveraient, dans ma pensée, et je verrais clairement qu'elles seraient toujours bonnes et toujours véritables, quand moi-même je serais détruit, et quand il n'y aurait personne qui fût capable de les comprendre. Si je cherche maintenant, où et en quel sujet elles subsistent éternelles et immuables, comme elles sont, je suis obligé d'avouer un être, où la vérité est éternellement subsistante, et où elle est toujours entendue; et *cet Être doit être la Vérité même, et doit être toute Vérité;* et c'est de lui que la vérité dérive dans tout ce qui est et ce qui s'étend hors de lui... Il y a donc nécessairement quelque chose qui est avant tous les temps et de toute éternité : et c'est dans cet éternel que ces vérités éternelles subsistent... Ces vérités éternelles que tout entendement aperçoit toujours les mêmes, par lesquelles tout entendement est réglé, sont quelque chose de Dieu, ou plutôt sont Dieu lui-même. Car toutes ces vérités ne sont au fond qu'une seule vérité [1]. » A cinq siècles de distance, ne croirait-on pas entendre un écho ennobli du Dialogue *de Veritate?*

Mais nous devons plus spécialement étudier la doctrine de notre S. Docteur sur *les rapports de la Vérité absolue avec les êtres de la nature qui en sont l'expression diverse.* Cet examen nous ramène à la théorie des *Idées divines.* Il faut montrer qu'en cette importante matière, Anselme a repris au seuil du moyen âge les vues de S. Augustin qui lui-même avait enrichi la Philosophie chrétienne des plus nobles conceptions de Platon.

[1] *Connaissance de Dieu et de soi-même*, c. IV.

En dépit de leur époque, de leur culture si différente, ces trois penseurs avaient entre eux une singulière affinité d'esprit : tous les trois médiocrement intéressés aux contingences du monde sensible ; tous également avides de saisir les éléments supérieurs de la science, et par dessus tout le reste, la source de l'universelle harmonie. Rappelons sommairement le système général du fondateur de l'Académie. C'est le meilleur moyen d'apprécier dans quelle mesure S. Anselme, et avant lui S. Augustin, se sont rapprochés de sa doctrine.

Pour Platon, aussi bien que pour Aristote, la science digne de ce nom, doit manifester à l'esprit les principes absolus, l'essence même des choses. Les sensations ne nous révèlent que des phénomènes passagers, des réalités contingentes. Les perceptions organiques varient d'ailleurs, avec les dispositions du sujet qui les éprouve. La connaissance sensible ne peut nous donner qu'une simple opinion conjecturale (*δόξα*) touchant les êtres de la nature. Les atomistes Ioniens et les disciples d'Héraclite en concluaient que la science était impossible. Platon, qui avait le sentiment de la vérité trop vif pour la nier, attribua à l'esprit la faculté d'atteindre, dans ses intuitions, les essences mêmes des êtres, stables et permanentes parmi le flux incessant des formes extérieures [1]. La Raison, d'après lui, saisit par delà les types particuliers « l'*Idée* unique (*κατ' ἰδέαν μίαν*) à laquelle nous rapportons les choses, et d'après laquelle nous les nommons [2]. » Par l'Idée, le divin Philosophe semble entendre l'exemplaire éternel et immuable des êtres. Dans

[1] Cf. sur le point de vue de Platon le beau travail de M. H. Martin : *Étude sur le Timée*, t. Ier, le commencement surtout. — M. Martin insiste sur les rapports de la philosophie de Platon avec la doctrine pythagoricienne. « Suivant les Pythagoriciens, dit ce critique, quelque chose de fixe et que la science pouvait saisir, dominait sur les objets passagers : c'étaient les *nombres*. Par une heureuse transformation, Platon en fit des *idées*, c'est-à-dire des types génériques, dont les images multiples se reproduisent suivant lui, dans les choses périssables. Ainsi Platon trouva moyen de ne pas nier les changements perpétuels des objets sensibles, et cependant de proclamer en même temps l'existence de cet élément stable dont il sentait la nécessité. »

[2] *République*, l. VI, vers la fin.

le *Parménide*, l'Idée « est la forme naturelle des êtres, subsistant par elle-même[1]. » Il ajoute, dans le *Timée*, qu'il est nécessaire de poser *l'espèce* (l'idée spécifique) comme immuable, sans fin, ni commencement, comme n'accueillant en soi aucun élément venu du dehors, et ne s'ajoutant elle-même à aucun autre être, inaccessible d'ailleurs aux perceptions des sens, et ne relevant que du seul intellect. — La substance des êtres physiques, considérée dans sa généralité, *l'espèce* en un mot, n'est qu'une copie, une représentation participant d'une certaine manière, que malheureusement Platon n'a pas assez déterminée, des archétypes supérieurs : de leur union et de la matière naissent les réalités contingentes et individuelles qui constituent l'univers. Celles-ci ne peuvent par elles-mêmes nous élever à la science : elles nous provoquent néanmoins à la réminiscence des Idées que l'âme a connues dans une vie antérieure. Ce réveil intellectuel est produit dans l'esprit tantôt par la conformité de forme des êtres sensibles avec les Idées, tantôt par leur dissemblance [2]. C'est par *induction* (ἐπαγωγή) que nous nous élevons du contingent au nécessaire, des types individuels aux catégories générales et aux notions absolues. Les idées, selon Platon, s'étendent à toutes choses : aux genres, aux espèces, aux substances, aux qualités accidentelles, aux figures, aux nombres, et peut-être aux privations elles-mêmes [3]. Elles constituent pour l'intelligence une hiérarchie progressive; les degrés de celle-ci sont les diverses notions universelles; ces termes suprêmes consistent dans les idées-mères du Vrai, du Bon et du Beau en soi, convergeant dans l'idée du *Bien* [4]. L'induction intellectuelle qu'il expose dans le

[1] *Τὰ μὲν εἴδη ταῦθ' ὥσπερ παραδείγματα ἑστάναι εν τῇ φύσει, τὰ δ' ἄλλα τούτοις ἐοικεναι καὶ εἶναι ὁμοιώματα.* — VI.

[2] *Phédon*, p. 74, sqq.

[3] *Parménide*, p. 130.

[4] *République*, l. VII; p. 517. « Dans le monde intelligible, la dernière Idée est l'Idée du Bien, *qu'on voit à peine*, mais une fois qu'on l'a aperçue, on doit conclure qu'elle est la cause de tout ce qu'il y a de bien et de beau; que, dans le monde visible, elle produit la lumière et le roi de la lumière; et que dans le monde intelligible, dont elle est elle-même la souveraine, elle produit la

Philèbe, Platon l'appelle *la marche dialectique de l'esprit* (πορεία διαλεκτική).— Les développements qu'il a donnés en divers passages de ses œuvres à cette Trilogie idéale forment, avec la conception des Idées, l'élément caractéristique de sa Philosophie. C'est par là qu'il a complété le cycle métaphysique inauguré par ses devanciers. Parménide avait mis en lumière les rapports essentiels de *l'Être* et de la *Vérité.* Socrate avait montré le lien de l'*Être* et de la *Bonté.* Son illustre disciple reprit les vues de ces Maîtres et les compléta, en établissant les relations de l'Essence avec la *Beauté* essentielle, aussi bien qu'avec la *Vérité* et la *Bonté* [1].

A l'induction synthétique, Platon fait succéder le procédé de *déduction* (διανοία). Celui-ci consiste dans le groupement des idées déjà acquises, dans l'analyse de leurs rapports et des conséquences qui en découlent. L'induction est le côté ontologique de la science : la déduction en est la partie logique ou formelle. Les deux facteurs s'unissent d'ailleurs, sans se confondre, dans toutes les opérations rationnelles. Mais la déduction suppose l'induction comme le raisonnement implique la raison [2], et la raison la nature. — Les idées ont elles été conçues par Platon comme douées d'une existence séparée ainsi que l'affirment Aristote, et de nos jours MM. Staudenmaier et Martin, ou bien les a-t-il regardées comme identiques avec l'Essence divine elle-même, voilà un point que les interprètes débattent encore [3]. Quoi qu'il en soit, c'est

vérité et l'intelligence. » — « Considère cette idée comme le principe de la science et de la vérité; tu ne te tromperas pas en pensant que l'idée du Bien en est distincte et les surpasse en beauté. »

[1] « Si nous ne pouvons saisir le *Bien* sous une seule idée, saisissons-le sous trois idées: celles de la *Beauté,* de la *Proposition* (convenance) et de la *Vérité* » — *Phileb.*, II, p. 461. — Sur la place du *Beau* dans la doctrine platonicienne des idées, voir les belles études de M. Charles Levêque : *La science du Beau,* vol. II, p. 311, sqq.

[2] Voir sur tous ces points le travail hors de pair de M. Janet : *Essai sur la dialectique de Platon,* surtout pp. 110 et suiv.

[3] Cf Nourrisson, *Quid Plato senserit de Ideis?* Thèse pour le Doctorat. — M. Hauréau, I, p. 49. — Laforêt, *Hist. de la phil. ancienne.* — Martin, *Études sur la Timée,* I, au commencement. — Staudenmaier, *Philosophie des Christenthums,* p. 82, sqq. — H. Ritter, *Geschichte der Phil.,* l. VIII, c. III, coll. J. Brucker, *Histor. doctrinae de Ideis,* sect. 1, § 3.

dans la contemplation des idées (Νοῦς) que se trouve le but de la sagesse et la vraie philosophie. Le divin Philosophe explique cette contemplation par l'influence du Logos ou de l'Ame du monde répandue dans l'univers. C'est elle qui guide et élève l'esprit de l'homme jusqu'à la vue du pur intelligible, comme elle meut les autres êtres à leurs opérations propres. En cela, Platon reste conséquent à un principe vrai en soi, mais qu'il exagère au profit d'un idéalisme excessif : d'après lui, la connaissance n'est possible qu'à condition que les propriétés de l'objet se communiquent en réalité au sujet lui même (γιγνώσκεσθαι τῷ ὁμοίῳ τὸ ὅμοιον) [1].

L'esprit de ces vues fondamentales de Platon se retrouve chez le Docteur du Bec. Dans le Dialogue *de Veritate,* nous l'avons entendu, par delà la vérité du discours, de l'opinion, de la sensation, s'enquérir avec une prédilection marquée, *de la vérité de l'Essence des choses* (chap. VII), que les philosophes négligeaient trop, à son avis ; il nous avertit que la raison supérieure de la vérité n'est visible qu'au seul regard de l'intelligence (chap. XI). Là encore, il enseigne qu'il est du sage de ne pas s'arrêter aux formes multiples de la vérité, mais de fixer l'esprit sur la Vérité en soi, principe unique, dont participent toutes les choses vraies, persistant malgré leur altération ou leur ruine, immuable parmi le flux des phénomènes (chap. XIII). Nous le verrons en traitant de la Théodicée : la notion du Bien absolu est aussi tout à fait prépondérante pour Anselme : elle constitue à ses yeux la synthèse harmonique du Beau, du Vrai, de toutes les perfections de l'être.

Mais la ressemblance de la philosophie de Platon et d'Anselme est bien plus frappante encore, en ce qui concerne les rapports de la Vérité substantielle avec les êtres de la nature. — Perfectionnant les vues incomplètes d'Anaxagore de Clazomène qui, le premier, attribua à une intelligence supérieure au monde l'harmonie de ses lois, Platon voulait que l'univers soit l'œuvre d'un Être souverainement sage. « Oui, dit-il, dans le *Sophiste*, les autres animaux, les éléments dont se composent les corps,

[1] Cf. Dr Heinze, *Die Lehre vom Logos in der griechischen Philosophie*, p. 69. — Oldenburg, Schmidt, 1872.

le feu, l'eau et tous les êtres frères de ceux-là, nous savons que Dieu en est *l'artisan* et le père, et qu'ainsi, ce *sont les ouvrages d'un art divin* [1]. » — « Mais quoi! s'écrie-t-il ailleurs, nous persuadera-t-on aisément qu'en réalité le mouvement, la vie, l'âme, l'intelligence ne conviennent pas à l'Être absolu? Que cet Être ne vit ni pense et qu'il demeure immobile, immuable, sans avoir part à l'auguste et sainte intelligence? [2] » Dans le *Timée*, il compare la Cause suprême à l'artiste qui, l'œil toujours fixé sur l'être immuable, et se servant d'un tel modèle, en reproduit l'idée et la vertu. — Si le monde est beau, si celui qui l'a fait est excellent, il l'a fait évidemment *d'après un modèle éternel* [3]. — Dieu, dit-il, pense à produire *une certaine image mobile de l'éternité,* et en même temps mettant l'ordre dans le ciel, il forme sur le modèle de l'éternité immuable dans l'unité, *l'image de l'éternité se mouvant d'après le nombre,* c'est ce que nous appelons le temps [4]. » — Voilà la Raison ordonnatrice des choses, identique à Dieu. Mais outre ce principe, Platon en a reconnu un autre immanent à la nature elle-même. Bien que ce point reste obscur, la seconde Cause semble se confondre avec le Démiurge, l'Idée du Bien, peut-être même avec *l'Unité* ou la Monade embrassant *toutes les Idées* [5]. — Quel est le rôle de ce second principe dans la Cosmologie platonicienne? D'après le divin Philosophe, la matière est éternelle comme Dieu, mais indéterminée à recevoir n'importe quelle forme. Dans la matière première flottent au hasard les éléments des choses. Platon les appelle l'air, l'eau, la terre, le feu. Ces germes sont la matière seconde de l'univers. D'elle-même, celle-ci est dans une agitation confuse produite par une âme déréglée et aveugle. Au sein de ce chaos, la Raison divine introduisit l'harmonie. Pour cela, elle engendra d'abord l'âme du monde en lui communiquant une parcelle de sa divine Essence, une parcelle de l'âme élémentaire du Chaos, et un troisième facteur composé

[1] *Sophiste*, trad. Cousin, pp. 317-318.

[2] *Ibid.*, p. 248.

[3] *Timée*, p. 116.

[4] *Timée*, p. 37.

[5] Cf. Heinze, *Op. cit.*, p. 66.

des deux autres principes. De la sorte, l'âme du monde est le lien qui relie la matière désordonnée et *l'Idée divine.* Car Platon le note avec soin : les formes qui constituent l'âme du monde sont les imitations des êtres éternels ou des Idées. — Exempt d'envie, dit-il, le suprême ordonnateur a voulu que toutes choses fussent autant que possible semblables à lui. En conséquence, il mit l'intelligence dans l'âme, l'âme dans le corps, et il organisa l'univers de manière qu'il fût, par sa constitution même, l'ouvrage le plus beau et le plus parfait [1]. — On voit comment, en cette théorie, le monde peut être regardé comme un être vivant (ζῶον ἔμψυχον ἔννουν τε), une image du Dieu intelligible, un Dieu devenu accessible aux sens. L'homme, il est vrai, n'a pas été formé par Dieu, mais par les divinités secondaires. Seulement la Cause suprême a recommandé à celles-ci d'imiter les dispositions qu'il avait observées lui même dans la production des dieux inférieurs [2].

Sous ces explications, en grande partie fantaisistes, se rencontre partout la doctrine de l'Intelligence suprême, principe ordonnateur et type harmonieux de toutes les réalités et de toutes les vérités relatives. Est-il besoin d'en signaler l'accord avec les enseignements d'Anselme? — Le plan idéal de l'univers subsistant de toute éternité dans la pensée divine; les *formes*, pour parler avec Anselme, ou les Idées de tous les êtres créés concentrées dans le Verbe, comme tous les types, d'après le langage de Platon, subsistent dans le Démiurge; et jusqu'à la notion des quatre principes élémentaires et de la matière première, voilà autant de dogmes de la métaphysique platonicienne que nous retrouvons chez S. Anselme.

Ce n'est pas que le Docteur chrétien se soit certainement inspiré du divin philosophe. Il ne le cite nulle part, et M. de Rémusat estime qu'il a très-bien pu l'ignorer [3]. Il n'est pas im-

[1] *Timée*, 29, passim.

[2] Sur la cosmologie de Platon en général, voyez l'analyse de M. Laforêt, *Hist. de la philos. ancienne*, I, p. 427, sqq. — Ueberwegg, *Zeitschrift. fur Philos.*, vol. XLII, 1863, p. 177, sqq. — Henri Martin, *Op. cit.*, t. II, passim. — Boeckh, *Gesamm. Kleiner schrift.*, vol. III, p. 294, sqq., 1866.

[3] *S. Anselme de Cantorbéry*, p. 458.

possible cependant qu'il ait lu la traduction du *Timée* par Chalcide. Mais Anselme s'était formé à l'école du Docteur d'Hippone.

Au début de sa carrière philosophique, Augustin avait signalé, dans l'instinctive tendance de nos facultés vers la science et dans la joie que celle-ci nous procure, le premier fondement de la certitude de nos connaissances [1]. Tant de siècles avant Descartes, il avait montré que le doute implique la pensée et l'existence, et que le scepticisme se réfute par les considérations qu'il invoque pour se légitimer [2]. Il avait consacré à l'analyse de la conscience, du *moi*, des développements d'une sagacité surprenante. Anselme ne s'arrête pas à ces préliminaires qui accusaient une époque plus exercée à la réflexion philosophique. Mais Augustin devait lui servir de maître dans la féconde doctrine des Idées divines qui touche à tous les sommets de la science. « L'*Idée*, a dit un Platonicien célèbre, par rapport à Dieu est sa connaissance; par rapport à nous, le premier intelligible; par rapport à la matière, sa forme; par rapport au monde sensible, l'exemplaire; et en elle-même, elle est l'essence des êtres [3]. » Les Idées étaient tout cela dans l'Académie!

De fait, les contemplations de Platon sur le monde intelligible avaient causé au Docteur africain une vive admiration. Les travaux

[1] « Ex *naturali instinctu* beatos esse velle inest omnibus. » (*De Trinit.*, l. XIII.) — « Hanc vitam beatam omnes volunt; hanc vitam quae sola beata est » omnes volunt; *gaudium de veritate omnes volunt*.... Et cum amant beatam » vitam, quod non est aliud quam de veritate gaudium, *utique amant etiam* » *veritatem.* » (*Confess.*, l. X, c. XXIII.) — Ailleurs il avait écrit ces significatives paroles : « (Ad beatitudinem) *natura* compellit cui summe bonus et » immutabiliter beatus Creator indidit hoc. » (*De civ. Dei,* l. XIX, c. XIII.)

[2] « Tu vis te nosse, scis esse te? — Scio. — Unde scis? — Nescio. — Simplicem » te sentis, an multiplicem? — Nescio. — Moveri te scis? — Nescio. — Cogitare te » scis? — Scio. » (*Solil.*, II, 1) — « Omnis qui *se dubitantem* intelligit, verum » intelligit, et de hac re quam intelligit, certus est. Omnis igitur qui utrum sit » veritas, dubitat, in se ipso habet verum, unde non dubitet, nec ullum verum » nisi veritate verum est. Non itaque oportet eum *de veritate* dubitare qui potuit » undecunque dubitare. » (*De vera Relig.*, 73.) Cf. *De civ. Dei,* l. XI, c. XXVI.

[3] *Ἔστι δὲ καί ἡ ἰδέα ὡς μὲν πρὸς θεὸν νόησις αὐτοῦ· ὡς δὲ πρὸς ἡμᾶς, νοητὸν πρῶτον· ὡς δὲ πρὸς τὴν ὕλην, μέτρον· ὡς δὲ πρὸς τὸν αἰσθητὸν κόσμον, παράδειγμα· ὡς δὲ πρὸς αὑτὴν ἐξεταζομένη, οὐσία.* — ALCINOUS, *Intr. in Plat*, c. IX.

de Plotin et de Porphyre l'avaient rempli pour leur spiritualisme mystique d'une admiration dont il s'accusa, aux derniers jours de sa vie, avec une candeur digne de son génie. Augustin, tout en adaptant les spéculations de l'Académie à l'Ontologie chrétienne, corrigea leurs erreurs. Il réfuta la doctrine de la réminiscence des Idées connues par l'âme dans une vie antérieure [1]. Cette chimère acceptée non-seulement par Platon, mais par Philon, les Esséniens, les disciples de Manès et le brillant Origène, ne fut jamais accueillie dans l'Eglise. Clément l'Alexandrin[2], le maître d'Origène; les deux Grégoire [3], S. Cyrille d'Alexandrie [4], Tertullien [5], Théodoret [6], S. Jerôme [7], la combattirent avec éclat. Augustin en montra à plusieurs reprises le vide et le ridicule. Outre les raisons théologiques qu'il lui oppose, il montre qu'en ce point Platon s'est contredit, puisqu'il tient ce monde pour l'ouvrage le plus parfait de la Divinité, tout en le considérant comme un lieu d'expiation, où l'âme ne parvient qu'au prix de pénibles efforts, à reconquérir ses connaissances précédentes [8]. Mais en délivrant la philosophie Platonicienne d'une compromettante entrave, Augustin travaillait à son succès. Il l'assura tout à fait, en établissant que les idées ou formes éternelles des êtres n'ont pas une existence séparée, mais qu'elles subsistent dans l'Intelligence créatrice elle-même.

« La première et suprême Vie, écrit Augustin, est remplie des Idées (*rationum*) vivantes et immuables de toutes choses. En elle, toutes ces idées existent dans l'unité... C'est là cette unique sagesse, dans laquelle existent les immenses et infinis trésors des choses intelligibles, les invisibles et stables raisons des êtres visibles et éphémères qui peuvent être réalisés par Elle... » Toutes

[1] *De civ. Dei*, l. X, c. XXX, XXXI.

[2] *Strom.*, VIII.

[3] Greg. Naz., *Orat.*, 37, c. XV. — Greg. Nyss., *De opif. homin.*, c. XXVIII.

[4] *In Joann.*, I, 6.

[5] *De anima*, c. XV, XXV, etc.

[6] *Haeret. fab. compend.*, l. V, c. IX.

[7] *Epist.*, 38.

[8] *De haeresibus*, haer. 70, *De peccat. orig.*, c. XXXI. — *De anima et ejus origine*, l. I, c. XIX.

les créatures, toutes les espèces ont été produites d'après leur idée propre. Or, ces Idées où subsistent-elles, si ce n'est dans l'intelligence du Créateur? Certes, il n'a pas eu besoin de quelque chose de distinct de lui-même, pour produire d'après elle ses œuvres [1]. — Voilà la thèse fondamentale de l'Exemplarisme d'Augustin. Comme il y prend soin d'établir la parfaite simplicité de la raison divine! Mais il faut entendre les développements principaux qu'il donne à sa théorie : ils sont la véritable source où puisa Anselme de Cantorbéry.

« C'est Platon, écrit le Docteur d'Hippone, qui paraît le premier s'être servi de ce nom d'*Idées* (à propos des formes intelligibles des êtres). Mais si la dénomination n'existait pas avant qu'il l'eût mise en usage, il ne s'ensuit pas que la chose même n'ait pas existé, ni qu'elle n'ait fixé l'esprit de personne. Seulement il arriva que les philosophes lui donnèrent des noms différents... Est-il vraisemblable qu'il n'y ait pas eu de sages avant Platon, ou que les choses qu'il appela Idées ne leur aient été connues? Ne sont-elles pas un objet d'une importance si haute, que sans les connaître, nul ne peut prétendre à la sagesse? Nous pouvons appeler les Idées en latin *formes* ou *espèces*, si nous tenons à une traduction littérale. Celui qui les nommerait *Raisons* (rationes) s'écarterait des lois de l'interprétation. Celles-ci, en effet, sont nommées en grec λόγοι, et non Idées. Toutefois, en faisant usage de ce terme, on ne se trompe pas sur les choses mêmes [2]. —

[1] (*De civ. Dei*, l. XI, c. X.) — « Dictus est in Scripturis Sanctis Spiritus » sapientiae multiplex, eo quod multa in se habeat... et ea *omnia unus est*, » neque enim multae sed una sapientia est, in qua sunt immensi quidam » atque infiniti thesauri rerum intelligibilium, in quibus sunt omnes invi- » sibiles atque incommutabiles rationes rerum etiam visibilium et mutabilium » quae per ipsam factae sunt. » (*De civ. Dei*, l. XI, c. X.) — « Quamobrem » quod plurimorum hominum ibi ratio est, non ad ipsum hominem pertinet, » quanquam miris rursum modis ad unum omnia redigantur. » (*Ep. ad Hebrid.*, c. XIV. — « Has rationes ubi arbitrandum est esse, *nisi in ipsa* » *mente Creatoris?* Non enim intra se quidquam positum intuebatur, ut » secundum id constitueret, quod constituebat; nam hoc opinari sacrilegum » est. » (*Lib. 83 quaest. q.* 46.)

[2] « Ideas Plato primus appellasse perhibetur, non tamen si hoc nomen,

Nous tenons donc que les Idées sont les formes par excellence, et les raisons fixes et immuables des choses : elles ne sont pas produites dans le temps, mais éternelles et toujours les mêmes, et leur siége est l'intelligence divine. Et bien qu'elles n'aient ni commencement ni fin, elles sont la règle de tout ce qui est susceptible de commencer et de finir, et tout ce qui commence ou finit est formé d'après elles [1]. »

Mais Augustin élucide la manière dont les Idées des choses subsistent en l'Intelligence créatrice, sans aucune trace de division, sans aucun fractionnement de l'Idée divine. — Dieu ne les voit pas au dedans de lui, dit-il, comme nous voyons dans notre esprit les fantômes des corps, absents de nos yeux, ni comme nous les représentons à l'imagination, d'après des choses aperçues autrefois... Comment les voit-il ?... D'une manière propre à Lui seul. Toutes choses sont en Dieu, par la science de l'ineffable sagesse, concentrée dans le Verbe, et le Verbe est tout. Comment cela ? Il est « l'art de la toute-puissante sagesse de Dieu... et en elle tout est un, comme elle-même est une, et procède de l'unité, avec laquelle elle constitue l'unité. Là (dans ce Verbe), Dieu connaît tout

» antequam institueret, non erat, ideo vel res ipsae non erant, quas ideas
» vocavit, vel a nullo intellectae, sed alio fortasse atque alio nomine ab aliis
» atque aliis nuncupatae sunt. Licet enim cuique rei incognitae, quae nullum
» habeat usitatum nomen, quodlibet nomen imponere. Nam non est verisimile,
» sapientes aut nullos fuisse ante Platonem : aut istas quas Plato, ut dictum
» est, ideas vocat, quaecumque res sint, non intellexisse. Siquidem tanta in
» eis vis constituitur, ut nisi his intellectis, sapiens esse nemo possit... *Ideas*
» latine possumus vel *formas* vel *species* dicere, ut verbum a verbo trans-
» ferre videamur. Si autem *rationes* eas vocemus, ab interpretandi quidem
» proprietate discedimus. *Rationes* enim Graece *Λόγοι* appellantur, non *ideae ;*
» sed tamen quisquis hoc vocabulo uti voluerit, a re ipsa non errabit. »
(*Ibid.*)

[1] « Sunt *ideae* principales formae quaedam, vel rationes rerum sta-
» biles atque incommutabiles, quae ipsae formatae non sunt, ac per hoc
» aeternae, ac semper eodem modo sese habentes, quae in divina intelligentia
» continentur, et cum ipsae neque oriantur, neque intereant ; secundum eas
» tamen formare dicitur omne quod oriri et interire potest, et omne quod
» oritur, et interit. » (*Ibid.*)

ce qu'il produit par sa sagesse. Les temps passent et se succèdent, mais dans la science divine, il n'y a ni changement, ni succession. » — « Qui donc, ajoute le S. Docteur, pourvu qu'il soit religieux et pénétré d'une piété véritable, et bien qu'il ne puisse encore contempler en elles-mêmes les Idées, qui oserait nier et ne professe pas plutôt que tout ce qui existe, c'est-à-dire tout ce qui dans son espèce subsiste en sa réalité propre, a été produit par l'action de Dieu, et que c'est par cette action que vit tout ce qui de fait participe à la vie? La conservation stable de l'univers, et l'ordre lui-même dans lequel toutes les choses éphémères accomplissent en une harmonie réglée leurs mouvements naturels, ne sont-ils pas dirigés par les lois du Dieu suprême? Cela établi et accordé, qui donc oserait soutenir que Dieu a tout créé d'une façon aveugle? Si cela ne peut être ni dit ni pensé, il reste que tout a été créé d'*après sa raison;* chaque chose a donc été formée d'après sa forme propre. Or, où faut-il penser que ces raisons subsistent, si ce n'est dans l'intelligence du Créateur [1]? » — « En effet, continue Augustin corrigeant encore une fois la doctrine de Platon, Dieu ne fixe son esprit sur rien de distinct de soi, pour or-

[1] « Nec tamen intra seipsum ista cernebat, sicut animo cernimus phantasias corporum, quae non praesto sunt oculis, sed ea quae vidimus, vel ex » eis quae videmus imaginando cogitamus... Quo ergo modo ista cernebat » (Deus) ut ita disponeret? Quo nisi isto quo solus potest. » (*De Gen. ad litt.* IV, c. VI.) — « Quis tam sit demens ut dicat non ea Deum fecisse quae » noverat? Porro si noverat, ubi nisi apud ipsum, apud quem Verbum erat, » per quod facta sunt omnia?... » (*Ibid.*, V, c. XIII.) — Quis autem religiosus et » vera religione imbutus, quamvis nondum possit haec intueri, negare tamen » audeat, imo non etiam profiteatur, omnia quae sunt; id est, quaecumque in » suo genere propria quadam natura continentur, ut sint, Deo auctore esse » procreata, eoque auctore omnia quae vivunt vivere, atque universam rerum » incolumitatem, ordinemque ipsum quo ea quae mutantur, suos temporales » cursus certo moderamine celebrant, summi Dei legibus contineri et guber- » nari? Quo constituto atque concesso, non opinor eum qui noverit vel » inconcusse credat, quod Deus haec omnia fecerit, esse tam excordem ut » Deum *quae non noverat* fecisse arbitretur... Quis igitur audeat dicere Deum » omnia irrationabiliter condidisse? Quod si recte dici et credi non potest, » restat ut omnia ratione sint condita... Singula igitur propriis sunt creata » rationibus. » (*Lib. 83 quaest. q.* 46.)

donner d'après cela son œuvre : ce serait là une opinion sacrilége! Donc les types de toutes les choses créées et créables sont contenues dans l'Intelligence divine, et dans la divine Intelligence, il ne peut rien subsister qui ne soit éternel et immuable. Si Platon appelle ces raisons supérieures des choses *les Idées*, celles-ci non-seulement existent, mais elles existent éminemment, parce qu'elles sont éternelles, et que de cette manière elles persévèrent immuablement. *Tout ce qui existe à quelque degré, existe en vertu de sa participation à ces Idées* [1]. » — « Avant leur production, écrit-il ailleurs, certes les créatures n'existaient point [2]. » — Comment donc Dieu a-t-il connu ce qui n'existait pas? « Il ne produit rien sans en avoir connaissance. » Il a donc créé des êtres dont il avait connaissance : il connaissait ceux qu'il n'avait pas encore produits. Par conséquent, « *avant leur création, elles étaient et elles n'étaient pas*. Elles étaient dans la science de Dieu : elles n'étaient point encore dans leur nature [3]. » — « L'artisan fait une boîte, dit Augustin en son naïf langage. D'abord celle-ci existe dans sa connaissance de l'art. Car si là il n'y avait pas (l'image de) la boîte, il n'y aurait aucun moyen de la fabriquer... Dans l'art elle existe invisiblement : visiblement, dans l'œuvre produite... La boîte façonnée n'est pas vie : la boîte *selon l'art* est vie, parce que l'esprit de l'ouvrier est vivant, et c'est là que se trouvent toutes ses œuvres avant leur réalisation. De la même façon, mes bien-aimés frères, la sagesse divine par qui toutes choses ont été créées, contient selon l'art tous les êtres avant leur

[1] « Novit omnia Deus Pater in seipso... tanquam seipsum, et in Filio tanquam Verbum suum, quod est de his omnibus, quae sunt in seipso. » (*De Trin.*, XV, c. XIV.) « Nam si hae rerum omnium creandarum creatarumve » rationes in divina mente continentur, neque in divina mente quidquam nisi » aeternum atque incommutabile potest esse; atque has rerum rationes prin- » cipales appellat ideas Plato : non solum sunt *ideae*, sed ipsae sunt verae, » quia aeternae sunt; et ejusmodi atque incommutabiles manent, quarum » participatione fit, ut sit quidquid est, quoquomodo est. » (*Lib. 83 q.* ubi supra.)

[2] « Haec antequam fierent non erant. » (*De Gen. ad litt.*, V, c. XVIII.)

[3] « Proinde antequam fierent, et erant et non erant. Erant in Dei scientia, » non erant in sua natura. » (*Ibid.*)

création. D'où il suit que, bien que toutes les œuvres de cet art divin ne soient pas douées de vie, néanmoins en Dieu toutes sont vie [1]. — Aussi l'ange saint connaît-il plus excellemment les créatures dans la sagesse de Dieu, dans l'art divin d'après lequel elles sont créées qu'en elles-mêmes. L'Ange a été fait par Dieu de manière à connaître les choses sous leur double aspect : et en Dieu, et en elles-mêmes, en Dieu, par une connaissance lumineuse (*diurna*), en elles-mêmes, par une connaissance crépusculaire (*nocturna*) [2]. »

C'est assez de citations. L'Académie nous interrogeait sur les sources de la métaphysique de S. Anselme. Nous pouvons conclure que si Platon a été le précurseur de notre Docteur, S. Augustin fut son véritable instituteur dans la théorie des Idées divines. Nous avons retrouvé, dans la célèbre Question XLVI, dans les livres de la Trinité et dans le traité sur S. Jean, non-seulement les traits généraux, mais encore chaque détail de la doctrine d'Anselme.

Il eut un autre maître. Un contemporain du Docteur d'Hippone avait formulé, lui aussi, la doctrine de l'exemplarisme, dans un langage dont l'élévation fait plus d'une fois songer à Platon. Faut-il nommer le pseudo-Denys, surnommé l'Aréopagite, qui vécut probablement vers le milieu du V^e siècle? Déjà commentées dès le VII^e siècle par S. Maxime de Constantinople, le champion des

[1] « Faber facit arcam Primo in arte habet arcam : si enim in arte non » haberet, non esset unde fabricando illam proferret. Sed arca sic est in arte, » ut non ipsa arca sit quae videtur oculis. In arte invisibiliter est, in opere » visibiliter erit... : Arca in opere non est vita, arca in arte vita est : quia » vivit anima artificis, ubi sunt ista omnia, antequam proferantur. Sic ergo » fratres carissimi, quia sapientia Dei, per quam facta sunt omnia, secundum » artem continet omnia, antequam fabricet omnia : hinc quae fiunt per ipsam » artem, non continuo vita sunt, sed quidquid factum est, vita in illo est. » (*Tract. I in Ev. Joan.*) — « In illo (Deo) erant, non sicut creatura, quam fecit, » sed sicut vita et lux hominum, quod est ipsa sapientia et ipsum Verbum Uni- » genitus Dei Filius. — (*De Gen. ad litt.*, V, c. XIV.) Haec omnia priusquam » fierent, erant in notitia facientis. Et utique ibi meliora, ubi aeterna et » incommutabilia. » (*Ibid.*, c. XV.)

[2] « Quomodo ergo Deo nota erant quae non erant?... Erant in Dei scientia.. » » Ac per hoc factus est dies cui utroque modo quae facta sunt innotescerent, » et in Deo et in seipsis : illa veluti *matutina* sive *diurna cognitione*, hâc » velut *vespertina*. » (*De Gen. ad litter.* V, c. XVIII.)

croyances orthodoxes contre les erreurs monothélites, les œuvres du faux Denys avaient été traduites au IXe siècle par J. Scot Erigène, à la demande de Charles le Chauve. On sait que Scot y prit plus d'une vue panthéistique. — Le style du faux Denys est plein de la poésie familière aux Platoniciens. Il s'énonce correctement sur la nature des trois personnes de la très-Sainte Trinité. Contrairement aux erreurs des Néoplatoniciens, il enseigne la divinité du Fils et sa consubstantialité avec le Père. Mais il se rapproche du langage de la nouvelle Académie, dans ses explications sur l'origine des choses. Sa doctrine de l'émanatisme n'est peut-être pas dans sa pensée; elle est à coup sûr dans ses paroles. Quant à la conception des Idées divines et des rapports de la Vérité première avec les choses créées, il l'énonce avec une rare netteté. Anselme nomme Denys dans ses *Méditations* avec une vénération très-grande [1] : l'influence de l'Alexandrin sur le Docteur du Bec fut considérable.

L'un des maîtres du faux Aréopagite, Plotin, avait rappelé que pour Platon *l'Idée du Bien* et Dieu sont identiques. Pour lui, il mettait au-dessus des Idées et de l'Intelligence qui les conçoit l'*Un* transcendant, principe commun de l'ordre réel et de l'ordre intelligible. Le faux Denys considère également Dieu comme le *Bien en soi*. Mais c'est sur *l'Unité divine* qu'il s'appesantit de préférence. Aucun Docteur n'a concilié avec autant de clarté la simplicité du premier Être avec l'infinie compréhension de sa science. « Nos théologiens sacrés, dit-il, en célébrant le Bien, disent qu'il est beau et la Beauté même. Or le beau et la beauté se confondent dans cette Cause qui embrasse tout dans l'unité, tandis qu'ils se distinguent, au contraire, en quelque chose qui reçoit et quelque chose qui est reçu : nous nommons beau ce qui participe de la beauté, et nous nommons beauté la participation de la cause qui fait toutes les causes belles... La beauté et les choses belles préexistent, comme dans leur cause, dans la simplicité et l'unité de cette Nature si éminemment féconde. C'est d'elle que tous les êtres ont reçu la beauté dont ils sont susceptibles : c'est par elle que tous se coordonnent, sympathisent et s'allient, c'est en elle que tous ne font qu'un. Elle est leur principe, car elle les produit, les

[1] *Hom. IV in Matth.*

meut et les conserve par amour pour leur bonté relative. Elle est leur fin, et ils la poursuivent comme leur cause finale, car c'est pour elle que tout a été fait. Elle est leur exemplaire, car tout est arrêté et conçu sur ce modèle [1]. » — Il écrit ailleurs : Nous disons que les *Idées* sont en Dieu les raisons exemplaires et prédéterminantes des êtres. La théologie les nomme des *préordinations*, ou encore les saints et divins conseils, les formes archétypes, d'après lesquelles le Dieu suprême prédestine et ordonne toutes les choses créées [2]. L'intelligence divine contient toutes choses dans sa science transcendante, et dans cette raison qui est la cause de tout, portant en soi la science des êtres avant leur apparition, connaissant les Anges avant leur existence et produisant de son fonds intime tous les autres êtres, les ayant présents dès l'origine, et les conduisant à l'existence... Ce n'est point par les réalités visibles que l'intelligence divine a appris à connaître les choses présentes, mais par elle-même et d'elle-même selon cette science qui est la cause de tout, et qui possède d'avance la connaissance et l'être lui-même, tient tout dans l'unité, ne se portant pas vers les choses particulières d'après cet exemplaire, mais plutôt connaissant tout et contenant tout selon sa dignité de principe... En se connaissant elle-même, la divine sagesse connaît tout; sans matière, elle connaît les choses matérielles; indivisiblement, les choses divisées, les choses multiples en un seul acte, et les choses qui actuellement existent par sa volonté, et celles qui ont existé déjà. Elle ne tire pas sa science des choses présentes de celles-ci, mais elle-même leur accorde, ainsi qu'à celles qui existeront un jour, la connaissance qu'elles auront de leur propre être. Dieu n'a donc pas une connaissance particulière par laquelle il se comprend, et une autre connaissance par laquelle il comprend généralement le reste des êtres : mais, cause universelle, dès qu'il se connaît, il ne saurait ignorer ce qu'il produit lui-même. Ainsi Dieu connaît les êtres, non par la connaissance empruntée des êtres, mais par la connaissance de soi [3]. »

[1] *Des noms divins*, c. XIII, § 7. Trad Darboy.

[2] *Ibid.*, c. V, § 8.

[3] *Ibid.*, c. VII, § 2.

Deux siècles avant Anselme, le traducteur du faux Denys développa à son tour l'Exemplarisme ou la doctrine des Idées dans le style de son maître. Selon J. Scot Erigène, les Idées en Dieu sont les archétypes primitifs des choses. On les nomme *Formes* ou *Notions*, parce qu'en elles subsistent les immuables essences et les relations des êtres avant leur création. Elles sont la règle stable, éternelle, d'après laquelle est gouverné le monde visible et invisible. Rien n'est produit dans la nature, si ce n'est selon ces idées. En ce sens, on peut les nommer les Principes de toutes choses, puisque tout ce qui est susceptible d'être connu ou senti n'existe que par sa ressemblance à ces Idées. Elles-mêmes subsistent par leur participation à la Cause première des êtres. Dans leur immuable existence, elles sont la cause d'autres causes qui en dérivent, jusque dans les extrêmes confins de la création, parmi l'infinie multiplicité des êtres. C'est pourquoi les sages leur ont donné le nom d'Êtres en soi, de Bonté, de Beauté, de Vérité, de Justice en soi [1].

On ignore si Scot, suspect de bonne heure et anathématisé par l'Église, inspira de fait Anselme de Cantorbéry, mais après ce que nous avons rapporté des doctrines de ses devanciers, il est clair que la théorie des Idées fut reprise par notre Docteur à S. Augustin et au faux Denys. — Cela est vrai d'une manière toute spéciale des vues d'Anselme *sur les rapports de la Vérité absolue ou de l'Intelligence divine avec la raison humaine.*

Nous l'avons entendu plus haut mentionner l'élément supérieur de la connaissance, lorsqu'il montrait cette lumière éclairant toutes les intelligences, et par laquelle, à l'instar du soleil, l'homme saisit tout ce qu'il atteint dans l'ordre intelligible. Il insistait sur la lumière et la vérité supérieure, où s'aperçoit tout ce que l'esprit sait de Dieu, et montrait dans l'Être absolu la Cause toujours agissante, soutenant et dirigeant vers leur Fin toutes les créatures, et par-dessus tout la raison de l'homme, *par sa présence conservatrice.* — Anselme avait pu lire dans les livres de S. Augustin, spécialement dans le Traité de la Trinité, les magnifiques développements de cette doctrine.

[1] Cf. *De divis. natur.*, l. II, c. II, etc.

Le Docteur d'Hippone rappelle à plusieurs reprises que l'esprit humain est perfectible, variable et sujet à l'erreur [1]. Toutes les intelligences néanmoins portent, selon leur capacité, des jugements sur l'ordre des phénomènes, les lois des nombres, les règles de la justice, les principes et les applications de la beauté et de l'harmonie. Or, la faculté qui juge des choses leur est manifestement supérieure. — D'autre part, notre esprit perçoit comme d'instinct l'élément immuable, essentiel, nécessaire des choses. La recherche de cette unité, par delà les contingences éphémères, est l'objet de la sagesse [2]. Augustin en conclut que l'esprit a reçu de la première Cause qui l'a appelé à l'être, la faculté de *remonter des types individuels, jusqu'à la forme universelle, jusqu'à l'essence des êtres, copie de l'Idée divine, d'après laquelle ils ont été créés.* — Oui, j'étais tout à fait certain, écrit-il, que, dès la création du monde, vos invisibles perfections, ô mon Dieu, sont révélées à l'intelligence par les

[1] « (Res mundi adspectabilis) quisquis ita dilexerit, ut jactare se inter im-
» peritos velit, et non potius quaerere, unde sint vera quae tantummodo vera
» esse persenserit, et inde quaedam non solum vera, sed etiam incommuta-
» bilia esse comprehenderit, ac sic a specie corporum usque ad humanam
» mentem perveniens, cum et ipsam mutabilem invenerit, *quod nunc docta,*
» *nunc indocta sit*, constituta tamen inter incommutabilem supra se verita-
» tem, et mutabilia infra se caetera, ad unius Dei laudem atque dilectionem
» convertere, *a quo cuncta esse cognoscit*, doctus videri potest, sapiens
» autem esse nullo modo. » (*De doct. Christ*, II, c. XXXVIII.) — Augustin passe en revue tous les êtres créés, et *partout il constate des degrés dans leur perfection.* Il continue ainsi : « Quod recipit majus et minus, sine dubi-
» tatione mutabile est. Unde ingeniosi et docti et in his exercitati homines
» facile collegerunt, non esse in eis rebus primam speciem, ubi mutabilitas
» esse convincitur. Cum igitur in eorum conspectu et corpus et animus magis
» minusque speciosa essent, si autem omni specie carere possent, omnino
» nulla essent, viderunt esse aliquid ubi prima esset et incommutabilis spe-
» cies, et ideo nec comparabilis : atque ibi esse rerum principium rectissime
» crediderunt, quod factum non esset, et ex quo facta cuncta essent. »

[2] « Quid igitur aliud agimus, cum studemus esse sapientes, nisi quanta
» possumus alacritate ad id quod mente contingimus, totam animam nos-
» tram quodammodo colligamus, et ponamus ibi atque stabiliter infigamus, ut
» jam non privato suo gaudeat quod implicavit *rebus transeuntibus,* sed
» omnibus temporum et locorum affectionibus apprehendat, *id quod unum*
» *atque idem semper est?* » (*De civ. Dei,* VIII, c. VI.)

êtres mêmes qui ont été produits et, avec eux, se révèlent votre puissance et votre Divinité. Car, en cherchant en moi-même en vertu de quel principe je louais *la beauté* des corps célestes et terrestres, et quelle règle m'aidait à juger *d'une manière complète* des choses *périssables* d'ici-bas et à prononcer que telles d'entre elles *devaient être* de telle façon et non autrement; cherchant, dis-je, à juger de ces conclusions, j'étais arrivé à trouver au-dessus de ma raison changeante l'immuable et réelle éternité de la vérité. Et ainsi, m'élevant de ce monde des corps jusqu'à l'âme qui reçoit ses impressions au moyen des sens, et de là à sa force intérieure, j'arrivai à la faculté intellective à laquelle il appartient de juger les sensations des organes corporels. Mais celle-ci même se reconnut *perfectible :* elle s'éleva à sa *notion idéale* et se dégagea de ses représentations diverses, afin d'atteindre l'*élément intelligible* qui s'y trouve mêlé... Et ainsi elle parvint jusqu'à ce degré supérieur où le regard vacille. Alors j'ai compris, Seigneur, vos invisibles attributs au moyen des choses créées, mais je n'ai pu en soutenir l'éclat [1]. — L'esprit de l'homme, dit encore le grand Docteur, observe d'abord, *au moyen des organes du corps*, les

[1] « Eram certissimus quod invisibilia tua a constitutione mundi per ea » quae facta sunt intellecta conspiciuntur, sempiterna quoque virtus et divi- » nitas tua. Quaerens enim, unde approbarem pulchritudinem corporum sive » caelestium sive terrestrium, et quid mihi praesto esset integre de mutabi- » libus judicanti et dicenti : *Hoc ita debet esse*, *illud non ita :* hoc ergo » quaerens unde judicarem, inveneram incommutabilem et veram veritatis » aeternitatem, supra mentem meam commutabilem. Atque ita gradatim a » corporibus ad sentientem per corpus animam, atque inde ad ejus interiorem » vim, cui sensus corporis interiora annuntiaret, et quousque possunt bes- » tiae; atque inde rursus ad ratiocinantem potentiam, ad quam refertur judi- » candum quod sumitur a sensibus corporis. Quae si quoque in me comperiens » mutabilem erexit se ad intelligentiam suam et obduxit cognitionem a con- » suetudine, subtrahens se contradicentibus turbis phantasmatum ut inve- » niret, quo lumine aspergerentur, cum sine ulla dubitatione clamaret incom- » mutabile praeferendum esse mutabili; unde nosset ipsum incommutabile. » quod nisi aliquo modo nosset, nullo modo illud mutabili certo praeponeret. » Et pervenit ad id quod est in ictu trepidantis aspectus. Tunc vero invisibilia » tua per ea quae facta sunt, intellectu conspexi, sed aciem figere non » evalui. » (*Confess*, VII, c. XVII; coll., c. X.) — « Intravi in intima mea,

choses créées et en acquiert la connaissance selon la mesure de l'humaine faiblesse. Ensuite il recherche leurs causes et s'efforce de parvenir *à leurs raisons immuables et supérieures*, renfermées dans le Verbe de Dieu, et de cette manière il tâche de comprendre par l'intelligence les perfections cachées de la Divinité au moyen de ses créatures [1]. — Selon Augustin, il y a donc dans l'âme un *instinct rationnel* qui la porte à rechercher le type commun des êtres individuels. Le raisonnement, lui, découvre dans ces formes essentielles la représentation des archétypes éternels. Certes, arrivé à ce haut sommet où s'entrevoit le rapport idéal de la Cause créatrice et de la Nature, l'esprit mortel se sent incapable de s'y arrêter longtemps. Mais la lumière qu'il aperçoit sur ces hauteurs se découvre assez à lui pour qu'il puisse affirmer que les principes universels des êtres, leurs lois et leurs rapports sont perçus par tous les esprits, invariables, indépendants de la pensée des hommes [2]. Ces vérités constituent la règle supérieure à laquelle doit se soumettre la raison, si elle ne veut pas s'égarer. Tous ceux qui ont souci de les scruter peuvent la reconnaître [3].

» intravi et vidi qualicumque oculo animae meae, supra eumdem oculum » animae meae, supra mentem meam lucem Domini incommunicabilem, non » hanc vulgarem et conspicuam omni carni. » (*Ibid.*)

[1] « Mens humana prius haec quae facta sunt, per sensus corporis experi- » tur, eorumque notitiam pro infirmitatis humanae modulo capit; et deinde » quaerit eorum causas, si quomodo possit ad eas pervenire principaliter » atque incommutabiliter manentes in Verbo Dei, ac sic invisibilia ejus per ea » quae facta sunt, intellecta conspicere. » (*De Gen. ad litter.*, IV, c. XXXII.)

[2] « Judicamus haec secundum illas interiores regulas veritatis quas com- » muniter cernimus : de ipsis vero nullo modo quis judicat... Si autem esset » aequalis mentibus nostris haec veritas, mutabilis etiam ipsa esset. Mentes » enim nostrae aliquando eam minus, aliquando plus vident, et ex eo fatentur » se esse mutabiles; cum illa in se manens nec proficiat, cum plus a nobis » videtur, nec deficiat cum minus; sed integra et incorrupta et conversos » laetificet lumine et aversos puniat caecitate. » (*De lib. arb*, II, c. XII.)

[3] « Quid quod etiam de mentibus nostris judicamus, cum de illa (incom- » mutabili veritate) nullo modo judicare possimus? Dicimus enim, minus » intelligit quam debet, aut tantum quantum debet intelligit. Tantum autem » mens debet intelligere, quantum propius admoveri atque inhaerere potuerit » incommutabili veritati. Quare si nec inferior nec aequalis est, restat ut sit » superior atque excellentior. » (*Ibid.*)

La connaissance de cette vérité n'est le patrimoine d'aucune intelligence particulière, mais la lumière à la fois publique et secrète de toutes les raisons créées [1]. Celles-ci étant produites d'après l'idée qui leur correspond dans la suprême intelligence, il est clair que les lois de leurs facultés sont calquées sur ce type éternel. Envisager à ce point de vue la nature de l'âme, les principes immuables de la science, des arts et des mœurs, c'est remonter jusqu'au Verbe, jusqu'à Dieu [2]. C'est porter le regard vers le Livre où sont écrits les principes de l'équité, qui ne se trouvent dans notre cœur que parce que la Vérité les y a imprimés comme un cachet sur la cire [3]. Cette Vérité n'est autre que Dieu,

[1] « Quapropter nullo modo negaveris, esse incommutabilem veritatem » haec omnia quae incommutabiliter vera sunt continentem, quam non possis » dicere tuam vel meam vel cujusquam hominis, sed omnibus incommuta- » bilia vera cernentibus, tanquam miris modis secretum et publicum lumen » praesto esse ac se praebere communiter. » (*Ibid.*)

[2] « Sublimioris rationis est judicare de istis corporalibus, secundum ra- » tiones incorporales et sempiternas : quae nisi supra mentem humanam » essent, incommutabiles profecto non essent; atque in his nisi subjunge- » retur aliquid nostrum, non secundum eas judicare possemus de corpora- » libus. Judicamus autem de corporalibus ex ratione dimensionum atque » figurarum, quam incommutabiliter manere mens novit. » (*De Trin.*, XII, c. II.) — Cf. *Ibid.*, XII, c. VII : « Ex qua parte conspectam consulit veri- » tatem, imago Dei est (mens); ex qua vero intenditur in agenda inferiora, » non est imago Dei; ut non maneat imago Dei nisi ex qua parte mens hominis » aeternis rationibus conspiciendis vel consulendis adhaerescit. » — « Satis est » quod istas tanquam regulas et quaedam lumina virtutum et vera et incom- » mutabilia, et sive singula, sive omnia communiter adesse ad contemplan- » dum eis, qui haec valent sua quisque ratione ac mente conspicere, pariter » mecum vides, certissimumque esse concedis... (*De lib. arb.*, II, c. X; XII.)

[3] « Neque enim in sua natura, cum procul dubio mente ista videantur, » eorumque mentes constet esse mutabiles, has vero regulas immutabiles » videat, quisquis in eis et hoc videre potuerit : nec in habitu suae mentis, » cum illae regulae sint justitiae, mentes vero eorum (hominum malorum) » constet esse injustas. Ubinam sunt istae regulae scriptae, nisi in libro lucis » illius quae veritas dicitur ? Unde omnis lex justa describitur, et in cor homi- » nis qui operatur justitiam, non migrando sed tanquam imprimendo trans- » fertur, sicut imago ex annulo et in ceram transit, et annulum non relin- » quit. » (*De Trin.*, XIV, c. XV.)

en qui, de qui, et par qui subsistent toutes les Vérités finies, comme Il est lui-même la vie, la félicité, la bonté, la beauté et la lumière universelles [1].

Mais, dit Augustin, la lumière de la Vérité, identique à Dieu, est incessamment active dans nos esprits. La créature contingente a besoin, pour chacun de ses actes, du concours et de l'assistance de la Cause première. Sans ce continuel secours, notre raison serait inerte et impuissante, à l'instar d'un œil très-bien organisé, mais privé de lumière. Tout ce que l'homme, suivant sa capacité individuelle, peut savoir sur Dieu et les choses intelligibles, il le doit à cette influence. Quoique immatérielle et intelligente, l'âme a besoin d'être éclairée par une lumière invisible, comme l'air, pour être lucide, a besoin de la lumière corporelle. C'est surtout à cette clarté qu'il faut rapporter toutes les vérités que nos raisonnements atteignent. Notre raison est aussi une lumière, mais une raison illuminée, dépendante de la lumière illuminatrice : ainsi notre être tout entier dépend de Celui qui est à la fois le principe de notre existence, la force de notre esprit et la loi de notre volonté [2]. Lui seul est la lumière par

[1] « Si enim natura nostra esset a nobis, profecto et nostram nos genuissemus » sapientiam, nec eam doctrina, id est aliunde discendo percipere curaremus ; » et noster amor a nobis profectus et ad nos relatus, ad beate vivendum » sufficeret, nec bono alio quo frueremur, ullo indigeret. Nunc vero, quia » natura nostra, *ut esset Deum habet auctorem*, procul dubio ut vera sapia- » mus, ipsum debemus habere doctorem. » (*De civ. Dei*, l. XI, c. XXV.) « Sicut nemo a seipso *esse* potest, ita etiam nemo a seipso *sapiens* esse » potest, sed ab illo illustrante, de quo scriptum est : Omnis sapientia a Deo » est. » (*Enchirid. ad Laurent*, c. I.)

[2] » Oculi nostri lumina dicuntur... Quae lumina, si lumina sunt, desit » lumen in cubiculo tuo clauso, pateant et luceant tibi : non utique possunt! » Quomodo ergo ista in facie quae habemus et lumina nuncupamus, et quando » sana sunt et quando patent, indigent extrinsecus adjutorio luminis : quo ablato » et non illato, sana sunt, aperta sunt, nec tamen vident : sic mens nostra quae » est oculus animae nisi veritatis lumine radietur, et ab illo... nec illuminatur, » mirabiliter illustretur, nec ad sapientiam, nec ad justitiam poterit perve- » nire. » (*Tract. 14 in Joan.*) — « Lumen autem illuminans a se ipso lumen » est, et sibi lumen est et non indiget alio lumine, ut lucere possit, sed ipso » indigent caetera ut luceant. » (*Ibid.*) — « (Deus) incommutabili voluntate,

soi, la Raison absolue qui n'a pas besoin d'une autre lumière, mais sans laquelle nulle autre lumière ne peut éclairer. Ç'a été l'honneur des Platoniciens, s'écrie Augustin, d'avoir compris que toute science vient de Dieu, comme toute réalité découle de sa plénitude [1].

Ainsi la connaissance rationnelle est le résultat, *non certes d'une vue directe de l'absolu*, mais de son concours incessant avec l'intelligence contingente de l'homme. Formés par la Vérité, créés à sa propre image, nous lui sommes unis immédiatement. Entre elle et notre âme, il n'y a aucune créature d'interposée. Un Ange peut tout au plus servir de médiateur entre elles et nous, en ce sens, qu'il dispose nos facultés à la recevoir. Les Platoniciens ont cru à tort que l'âme humaine est gouvernée par des esprits inférieurs. Dieu lui-même, conservateur et règle de notre raison, est la lumière qui nous éclaire. Il est le Maître qui enseigne au dedans, et sans lequel tout autre enseignement est infécond [2]. Son immuable Sagesse habite en nous et préside à la connaissance [3]; l'âme est illuminée par la lumière de la Raison éternelle. Cette Raison est le lieu des Idées, comme l'espace est le lieu

» veritate, aeternitate persistit, et inde nobis est initium existendi, ratio » cognoscendi, lex amandi. » (*Cont. Faust.*, XX, c. VII.)

[1] *De civ. Dei*, VIII, c. V.

[2] *De Magistro*, c. XII, XIV.

[3] « Deus intelligibilis lux, in quo, a quo et per quem intelligibiliter lucent » quae intelligibiliter lucent omnia. » (*Solil. I*, c. I.) — « Aliud autem est ipsum » lumen quo illustratur anima ut omnia vel in se vel in alio veraciter intel- » lecta conspiciat : nam illud ipse Deus est, haec autem creatura, quamvis » rationalis et intellectualis ad ejus imaginem facta, quae cum conatur lumen » illud intueri, palpitat infirmitate, et minus valet. Inde est tamen quidquid » intelligit sicut valet. (*De Gen. ad litt.* XII, c. XXXI.) — « De universis » quae intelligimus, non loquentem qui personat foris, sed intus ipsi menti » praesidentem consulimus veritatem, verbis fortasse, ut consulamus, ad- » moniti. » (*De Magistro*, c. XI.) — « Spiritus ad imaginem Dei nullo » dubitante factus accipitur, in quo est intelligentia veritatis : haeret enim » veritati, nulla interposita creatura... (*De lib. arb.* III, c. 16 et 17.) Eam » sic illuminat de se ipso, ut non solum illa quae a veritate monstrantur, sed » ipsam quoque proficiendo perspiciat veritatem. » (*In Ps. 118, serm. 8*)

des corps [1]. Sa lumière nous apparaît dans son entier éclat lorsque l'esprit, au-dessus même des lois immuables et des vérités générales, se tourne vers la Vérité par essence, où toutes les autres ont leur source et dont elles diffèrent plus encore que le ciel ne diffère de la terre [2].

N'avons-nous pas entendu Anselme de Cantorbéry reproduire, avec moins d'ampleur, il est vrai, la plupart des principes de l'idéologie augustinienne? C'est sans contredit des textes que nous venons de rappeler qu'il s'est inspiré.

L'Académie demande que nous émettions un jugement critique sur cette doctrine, comme nous l'avons fait précédemment à l'égard des vues d'Anselme sur la vérité en soi. C'est le lieu d'avouer que la doctrine des Idées en Dieu est loin d'avoir conquis la faveur de tous les historiens de la philosophie. Déjà l'auteur du Traité *des Genres et des Espèces* opposait à l'Exemplarisme le dilemme connu : « Les universaux sont ou créés ou incréés, engendrés ou non engendrés. S'ils ne sont ni créés ni engendrés, il n'y pas eu de création [3]. » En cela, comme l'a dit M. Rousselot, il raisonnait comme si les idées avaient été données pour

[1] « In natura incorporali sic intelligibilia praesto sunt mentis aspectibus, » sicut ista in locis visibilia et contrectabilia corporis sensibus. « (*De Trin.*, XII, c. XIV.) — « Sed quemadmodum illi qui in luce solis eligunt quod » libenter aspiciant et eo aspectu laetificantur, in quibus si forte fuerint vegeteoribus sanisque et fortissimis oculis praediti, nihil libentius quam ipsum » solem contuentur, qui etiam caetera quibus infirmiores oculi delectantur, » illustrat : sic fortis acies mentis et vegeta, cum multa vera et incommutabilia certa ratione conspexerit, dirigit se in ipsam veritatem *qua cuncta* » *monstrantur*, eique tanquam inhaerens, obliviscitur caetera, et in illa simul » omnibus fruitur. » (*De lib. arb.*, II, c. XIII.)

[2] « Adducorque ut assentiar quantum in suo genere a caelo terram tantum » ab intelligibili Dei majestate spectamina illa disciplinarum vera et certa » differre. » (*Solil.*, l. I, c. V.) — Cf. M. Nourrisson, *Phil. de S. August.*, t. I, pp. 88-115 et t. II, pp. 291-305.

[3] « Sunt autem qui... illam divisionem... sic faciendam esse dicunt : Quidquid est, aut genitum est aut ingenitum; universalia autem ingenita dicuntur, et ideo coaeterna, et sic secundum eos qui hoc dicunt,... non Deus aliquorum factor est. » (Éd. Cousin, p. 517.)

des êtres éternels comme Dieu, et distincts de lui. C'est très-vrai. Mais, aujourd'hui encore, le dilemme du dialecticien anonyme semble brouiller plus d'un penseur. Notons avant tout que *l'unité supérieure des Idées dans la raison divine et leur identité avec l'Essence absolue* sont établies par Anselme de la façon la plus explicite. Il professe, sous ce rapport, la doctrine de son maître, S. Augustin : *Omnia in Deo unum sunt* [1]. « Les choses sont en Dieu, affirme Anselme, selon un certain langage de l'intelligence, semblable à celui de l'artisan qui, voulant faire un ouvrage de son art, le conçoit d'abord dans son esprit et s'en entretient avec lui-même. — Par ce langage intérieur, j'entends ici, non ce qu'on fait en pensant aux *mots* qui expriment les choses, mais ce que l'on fait lorsqu'on voit *par la force de la pensée* les choses mêmes, soit futures, soit déjà existantes [2]. » Or, ce type des êtres créés qu'atteint la science divine, ne lui est pas fourni par la créature; Dieu le trouve dans sa propre intelligence, une et simple comme son essence elle-même. « Le Verbe par lequel (la Sagesse suprême) parle la créature n'est pas le Verbe (l'image) de la créature, puisqu'il n'en est pas la ressemblance, mais l'essence première. Il s'ensuit que l'Esprit suprême ne parle pas par la créature, par le Verbe de la créature. Par quel Verbe parle-t-elle donc la créature, si elle ne le fait pas par le Verbe de la créature même... S'il ne parle rien d'autre que lui-même ou la créature, il ne peut rien parler que par son Verbe ou par celui de la créature. S'il ne parle rien par le Verbe de la créature, tout ce qu'il parle, il le parle par son Verbe. C'est donc *par un seul et même Verbe qu'il se parle lui-même et tout ce qu'il a fait* [3]. » — Le langage d'Anselme est quelque peu embarrassé en cet endroit, parce

[1] *De Trin.* VI, c. X.

[2] « Illa autem *rerum forma*, quae in ejus ratione res creandas praecedebat, » quid aliud quam rerum quaedam in ipsa ratione *locutio*, veluti faber facturus aliquod suae artis opus, prius illud intra se dicit mentis conceptione? » Mentis autem sive rationis locutionem hic intelligo, non cum voces rerum » significativae cogitantur, sed cum res ipsae vel futurae vel jam existentes » acie cogitationis in mente conspiciuntur. » (*Monol.*, c. X.)

[3] *Monol.*, c. XXXIII.

qu'il y assimile absolument la compréhension que Dieu a de son Essence à *une locution immanente.* Il n'en revendique pas moins à l'acte par lequel il connaît les êtres créés la même simplicité qu'à la science directe qu'il possède de lui-même. C'est encore ce que notre Docteur donne clairement à entendre lorsqu'il dit : « De la façon que dans un homme vivant est la *vérité de l'homme,* et dans un homme peint, la ressemblance ou l'image de cette vérité, ainsi on doit concevoir la vérité de l'existence dans le Verbe [1]. » Les archétypes, les Idées n'ont pas plus en Dieu une existence séparée de son Essence, que la vérité ou l'essence de l'homme vivant n'est en rien distincte de l'individu humain. Après cela, Anselme a pu écrire ceci : « Jamais absolument rien n'a pu exister outre l'Esprit créateur et sa créature. Or, il est impossible que le langage de cet Esprit soit au nombre des choses créées, car tout ce qui a été créé a été fait par ce langage, lequel n'a pu être fait par lui-même... Reste donc que ce langage de l'Esprit suprême, ne pouvant être une créature, n'est pas autre chose que cet Esprit lui-même. Il n'y a qu'une Essence suprême, qui seule est créatrice et l'unique principe de tout ce qui a été fait [2]. » — Pour Anselme, il n'y a pas de multiplicité réelle d'idées dans l'Intelligence divine : celle-ci est aussi indivisible et aussi simple que l'Essence de l'Absolu elle-même. Entre les types increés des choses et Dieu, entre ces types eux-mêmes, il n'y a qu'une distinction virtuelle. Les Idées divines ne sont que les différents modes de représentabilité de l'Essence divine, conçue comme l'exemplaire transcendant des êtres de la nature. Que les idéologues qui ont fait du *Logos* une hypostase de second ordre, aient mérité l'accusation d'altérer la simplicité divine, cela se conçoit.

[1] *Monol.*, c. XXXI.

[2] « Asserunt utique inexpugnabiliter ea quae jam inventa sunt, [illegible] nihil
» omnino potuit unquam aut potest subsistere praeter creantem Spiritum et
» ejus creaturam. Hanc vero ejusdem Spiritus locutionem, impossibile est
» inter creata contineri ; quoniam quidquid creatum subsistit per illam factum
» est, illa vero per se fieri non potuit... Relinquitur itaque, ut haec summi
» Spiritus locutio, cum creatura esse non possit, non sit aliud nisi summus
» Spiritus ? » (*Monol.*, c. XXIX.)

Platon, dont le vrai sentiment à ce sujet est resté douteux, semble placer l'unité des Idées dans le *Démiourge*, distinct peut-être du Bien suprême [1]. Philon paraît refuser aux Idées l'existence éternelle et les explique par une sorte de fractionnement des la Raison divine [2]. Selon Plotin et tous les Néoplatoniciens, le *Nous*, ou l'Esprit ordonnateur, apparaît comme un principe distinct de la première hypostase, de l'Unité absolue [3]. Des vues semblables se retrouvent chez les Gnostiques, chez les Valentiniens en particulier. Chalcide, le traducteur latin du Timée, distingue en la divinité l'Agent et l'Exemple ou Prototype de l'univers, auquel on croit qu'il assigna une subsistance séparée [4]. A l'entrée du moyen âge, Jean Scot Erigène poussa aux mêmes erreurs. On sait qu'il distribuait les êtres en quatre espèces. La première comprenait l'Essence créatrice increéée (*Dieu*); la deuxième était créée et créatrice tout ensemble (*les Idées exemplaires des choses*); la troisième, créée et non créatrice (*les êtres de l'univers*); la quatrième enfin, non créatrice et non créée (*Dieu comme Fin dernière et But suprême de la création*)[5]. — De l'avis presque unanime des critiques, Scot aurait considéré les Idées comme existant en soi, et formant des types distincts, localisés en dehors de l'essence divine. Henri de Gand, assez obscur sur ce point, semble admettre des Espèces idéales, qui jouiraient d'une forme réelle et nécessaire, *à part de l'Essence infinie* [6]. Un certain nombre de théosophes de la Renaissance se rapprochèrent de ce sentiment, en supposant entre Dieu et la nature un médiateur increé. Mais les grands Scolastiques ne furent jamais complices d'aberrations pareilles. Duns Scot, le plus enclin de tous à reconnaître droit

[1] Cf. Dr Heinze, *Lehre vom Logos in die griechischen Philosophie*, p. 66.

[2] Cf. *Quis rerum divinarum haeres.*, Éd. Mang., I, p. 491. — Voir la critique de Heinze, *Lehre vom Logos*, p. 227, sqq.

[3] Kirchner, *Die Phil. des Plotin*, p. 53.

[4] Cf. Hauréau, I, p. 101.

[5] *De div. nat.*, l. I, c. I, III, XII, XIV, XVI; l. II, c. II, XIX; l. III, c. II, XIX, XXV.

[6] Voir sa *Somme*, art. 11, q. 23, 25.

de cité aux abstractions, renverse d'un mot ces rêveries renouvelées des Alexandrins. La subsistance que certains Docteurs assignent aux Idées, dit-il, et qu'ils estiment nécessaire afin que Dieu parvienne à les connaître, doit, certes, être connue elle-même de la suprême Intelligence. Si celle-là peut être perçue par Dieu sans le secours de ces entités, pourquoi n'affirmerait-on pas la même chose des Idées? [1] — Un grave interprète des Scolastiques, Suarez, s'écrie avec quelque humeur qu'il ne peut venir à l'esprit d'aucun chrétien qu'il existe un être *nécessaire* quelconque qui soit distinct de Dieu [2]. — C'est très-vrai. Mais nul Docteur n'a exprimé plus franchement cette doctrine qu'Anselme, qui la résume dans l'énergique formule : « Il n'existe rien, en dehors de l'Essence créatrice et sa créature. » Le reproche d'avoir altéré le vrai concept des Idées divines ne peut lui être adressé [3].

Ces explications pourraient suffire si la théorie des Idées divines n'était devenue l'occasion d'un malentendu persistant chez les critiques. Il y en a, et des plus considérables, qui s'irritent dès qu'on parle d'*exemplaires des choses*, d'*archétypes divins*, alors même qu'on se garde de les séparer de Dieu.

Écoutons à cet égard les paroles de M. Hauréau touchant les textes d'Anselme allégués plus haut : « Ce n'est plus ici, dit-il, la thèse de Jean Scot et de Gerbert, localisant hors de la substance

[1] *In I Dist.*, 36.

[2] « Neque potuit in mentem alicujus doctoris catholici venire, quod *essen-* » *tia creaturae* ex se et *absque efficientia libera Dei* sit aliqua vera res, ali- » quod verum esse reale habens, distinctum ab esse Dei. » (*Metaph.*, disp. 31, sect. 2.)

[3] Furieux contre les ultra-réalistes qui avaient mérité leurs fureurs, les nominalistes tombèrent en un excès opposé. Biel va jusqu'à atténuer les explications d'Anselme, pour qu'on n'y cherche pas un appui aux doctrines de D. Scot : « Ad Anselmum, cum inquit : Creatura in Deo est creatrix essentia — » illa de rigore est falsa : sed hoc complexum : creatura *in Deo* valet : causa » productiva creaturae quae est in Deo est creatrix essentia. » (*In I*, *D. III*, q. V.) — Si Biel, au lieu de censurer une ligne isolée, se fût souvenu de l'ensemble des considérations d'Anselme, il n'eût pas incriminé sa doctrine pour dire, après cela, la même chose que lui.

divine les exemplaires éternels des choses; c'en est une autre qui se rapproche plus peut-être de celle de Platon, et qui semble braver avec moins d'arrogance la critique du sens commun. Elle sera reproduite au XII^e siècle; au XIII^e elle jouira de la plus grande faveur, et nous aurons occasion de la faire mieux connaître, quand nous parlerons d'Albert le Grand et de S. Thomas. Nous ne pouvions négliger de noter en passant qu'elle se trouve déjà clairement exposée dans le *Monologium* [1]. »

Sans doute, il est impossible de trouver dans les écrits d'Anselme la moindre trace d'une *localisation des Idées* en dehors de la Pensée divine! Le docte auteur de l'Histoire de la Scolastique le reconnaît. Mais à part cette erreur, nous avons quelque intérêt à juger la théorie de l'exemplarisme elle-même. Un juge éminent nous avertit, et rien n'est plus exact, qu'Anselme l'accrédita dans les écoles. Lorsqu'elle paraîtra dans les livres de ses successeurs, ceux qui l'estimaient presque inoffensive chez le Régent du Bec, lui décerneront de sévères épithètes. Celles-ci, dès qu'elles sont méritées, doivent retomber sur le prieur de S^{te} Marie du Bec. Que faut-il penser de leur justesse?

Après avoir analysé la doctrine du réaliste Robert de Melun sur les archétypes divins, M. Hauréau écrit ceci : « Les nominalistes disent simplement : Dieu ayant voulu le monde, sa volonté s'est faite : le monde a été créé. La foi n'enseigne pas autre chose. C'est la métaphysique platonicienne qui va plus loin. Celle-ci distingue la volonté de Dieu de son intelligence, son intelligence de ses idées : elle partage même ses idées en deux catégories, les idées universelles et les idées particulières, et les combine à sa fantaisie pour produire ses effets divers. Jeu frivole de l'imagination qu'elle appelle la science de Dieu [2]. » Plus loin, à propos du Docteur Angélique, le même savant assure qu'il n'a « rien de plus pressé que de réaliser en Dieu toutes les règles de sa fausse idéologie, de telle sorte qu'il voit dans l'entendement divin comme éternelles, comme universellement multiples, toutes les idées qui sont venues

[1] Ouv. cité, I, p. 280.
[2] *Ibid.*, p. 498.

à l'intelligence humaine de la considération des choses nées [1]. »
Voilà sans ambages ce que pense M. Hauréau de la théorie transmise par Anselme à Albert le Grand et à S. Thomas, et complétée par ces deux Docteurs. Ce jugement est grave : il appelle l'examen. Si nous insistons sur ce point, c'est précisément parce que parmi les maîtres de la philosophie séparée, il n'en est peut-être aucun qui expose la doctrine scolastique avec autant de profondeur et de justesse que M. Hauréau.

Le philosophe qui admet l'acte créateur doit reconnaître qu'il s'accomplit avec une infinie sagesse. Nous ne connaissons Dieu que par analogie : dans l'analyse de l'intellection divine, la philosophie nous prescrit une circonspection modeste. Est-ce s'en départir que d'affirmer le rapport intelligible des êtres avec leur cause libre et éternelle? Y a-t-il de la présomption à se représenter le Créateur sous le symbole d'un artiste n'exécutant ses chefs-d'œuvre que d'après leur immuable idée [2]? Peut-on voir en cela « le Dieu de l'anthropomorphisme... les illusions de la fausse sagesse? » Que l'on se garde, au vœu de Kant, d'outrer les analogies entre la création des choses et nos humaines opérations, c'est un excellent conseil : il aurait pu profiter à plus d'un réaliste. Albert le Grand, après avoir écrit, comme Anselme, que les Idées sont une même chose avec l'Essence divine, insinue qu'il vaut mieux parler d'une seule Idée en Dieu que de l'idée de plusieurs êtres [3]. Mais lorsqu'on établit, avec S. Thomas, que les types exemplaires ne constituent pas le principe *déterminant* de la connais-

[1] Ouv. cité, 1re édit., t. II, p. 212.

[2] Kant lui-même s'exprime sur l'ordonnance harmonique du monde d'une manière assez semblable à celle des partisans de l'exemplarisme. Voir *Kants sämmtl. kleine Schriften.*—Konigsberg und Leipzig, 1797, 1 vol., p. 437, seq. — *Kritik der Urtheilskraft*, § 77, p. 344, 3e éd., 1799.

[3] « ... Dicendum quod ideae sunt in mente divina, secundum quod ars est » omnium creatorum : sic enim praehabet et simpliciter habet species et ra- » tiones omnium creatorum, quae sunt idem quod ipsa mens divina. » (*Sum.*, p. 1, *Tr.*, 13, q. 15, *Membr.*, 2, a. 1). — « Dicendum est ergo quod licet rationes » in Deo et ideae sunt una virtus et una lux et essentia, dicuntur tamen plures » rationes et ideae propter *pluralitatem ideatorum.* » (*Comp. theol. veritatis*, l. I, c. XXV.)

sance divine; que la Pensée divine, en son acte simple, éternel se représente par une vue simultanée toutes les réalités capables d'imiter, à quelque degré, l'Essence absolue : qu'y a-t-il d'irrationnel en cette conception? Dieu, se connaissant parfaitement, ne saurait ignorer les formes diverses d'après lesquelles ses créatures peuvent refléter sa perfection souveraine? Il s'atteint ainsi, du même coup, et comme l'Essence infinie, et comme l'Exemplaire transcendant de toutes les réalités. C'est encore M. Hauréau qui a écrit : « Dieu a pensé le monde sans aucun doute *avant* de le faire : il l'a voulu tel qu'il l'a fait, mais cette reconnaissance de la volonté libre, intelligente de Dieu suffit pour rendre un compte raisonnable et orthodoxe de l'ineffable mystère de la création : qu'importe-t-il ensuite de localiser dans l'entendement divin une multitude *d'entités idéales* dont on ne saurait définir ni l'origine, ni la nature; sans altérer par cette définition l'idée pure de l'essence de Dieu [1]? » Certes, cela n'importe guère. Qu'on nous dise cependant en quoi Anselme, Albert, Thomas d'Aquin ont excédé cette vue! Le Docteur Angélique, très-justement accusé de reproduire en ce point la pensée d'Anselme, enseigne que l'Essence divine renferme en soi les perfections de tous les êtres, non « *par manière de composition*, mais par manière de perfection... L'Intelligence divine, dit-il, peut comprendre ce qu'il y a de perfection en toute chose, en comprenant comment chaque être imite sa propre perfection, et aussi dans quelle mesure il s'en éloigne... L'essence propre d'une chose différant de l'essence propre d'une autre chose, et la distinction étant principe de pluralité, il faut bien mettre dans l'intelligence divine une distinction et une pluralité *de formes*, en ce sens que les archétypes de la suprême Intelligence sont l'essence propre des diverses créatures.» — Mais il faut l'entendre expliquer cette multiplicité : « Puisque, dit-il, c'est de cette façon que Dieu connaît le rapport d'assimilation de chaque créature avec son essence, il s'ensuit que les diverses Idées en Dieu *sont multiples et distinctes* pour autant que Dieu voit que les créatures peuvent lui ressembler de plusieurs ma-

[1] Tome Ier, p. 375.

nières. C'est là le sens d'Augustin, quand il dit que Dieu crée *d'après une forme différente* l'homme et le cheval, par exemple, et qu'il affirme que les choses sont multiples en la suprême raison. C'est encore en ce sens qu'on peut en une certaine manière soutenir l'opinion de Platon, enseignant que toutes les choses corporelles sont faites d'après les Idées [1]. » Aussi S. Thomas ajoute qu'*en toute hypothèse,* il n'est pas possible que les Idées aient en Dieu une distinction vraiment réelle, *même à titre d'entités idéales.* S'il en était ainsi, dit-il, « ou bien ces formes seraient une seule et même chose avec Dieu, et dans ce cas, il y aurait en lui une certaine pluralité, ce que nous avons réfuté plus haut : ou bien, elles seraient surajoutées à l'Essence divine, et alors il y aurait en elle quelque accident [2]. » Il y a plus : dans les notes marginales de la *Somme philosophique,* il écrit : « La pluralité des idées ne pose en Dieu aucune composition réelle : car *les idées ne sont pas*

[1] « ... Divina Essentia in se nobilitates omnium entium comprehendit, *non » per modum compositionis, sed per modum perfectionis...* Intellectus igitur » divinus id quod est proprium unicuique in essentia sua comprehendere » potest, intelligendo in quo ejus essentia imitatur et in quo a sua perfec- » tione deficit unumquodque... Quia vero propria ratio unius distinguitur a » propria ratione alterius, (distinctio autem est pluralitatis principium), » oportet in intellectu divino distinctionem quamdam et pluralitatem ratio- » num intellectarum considerare, secundum quod id quod est in intellectu » divino, est propria ratio diversorum. Unde quum hoc sit secundum quod » Deus intelligit proprium respectum assimilationis, quam habet unaquaeque » creatura ad ipsum, relinquitur quod rationes rerum in intellectu divino » *non sint plures* nisi secundum quod Deus cognoscit res pluribus et » diversis modis esse assimilabiles sibi. Et secundum hoc Augustinus dicit » quod Deus alia ratione fecit hominem et equum; et rationes rerum plura- » liter in mente divina esse dicit... In quo etiam salvatur aliqualiter Platonis » opinio ponentis ideas, secundum quas formantur omnia quae in rebus ma- » terialibus existunt. » (*Cont. Gent.*, I, c. LIV.)

[2] « Non autem haec multitudo (idearum) sic intelligi potest, quasi *multa » intellecta habeant esse distinctum* in Deo; ista enim intellecta aut essent » idem quod essentia divina, et sic in essentia Dei poneretur aliqua multitudo, » quod supra multipliciter est remotum; aut essent superaddita essentiae » divinae, et sic esset in Deo aliquod accidens, quod supra impossibile esse » ostendimus. » (*Cont. Gen.*, I, c. LI.)

comme des entités subsistant en lui, ni les termes de ses perceptions diverses [1]. » Dans sa *Somme de théologie,* le Docteur Angélique se demande comment les multiples concepts des créatures n'altèrent point l'infinie simplicité de Dieu? Il répond qu'à la vérité la distinction et l'ordonnance des effets impliquent la préexistence de leurs formes exemplaires dans l'Esprit créateur. Seulement, le fondement de cette distinction est l'Absolu se concevant comme la source et la règle de toute réalité. Ce ne sont pas les créatures, c'est Dieu seul qui est le principe de sa science des choses possibles. L'Infini connaît celles-ci en se connaissant soi-même, non-seulement en tant qu'Essence infinie, mais aussi en tant que Cause toute-puissante et sage, capable d'évoquer du néant une multitude d'êtres offrant quelque vestige de son illimitée perfection [2]. La diversité des Idées est purement *virtuelle.* Elles sont *le terme extrinsèque* de l'unique Pensée qui révèle à Dieu le plan et les détails de l'œuvre créé. Le Docteur Dominicain enseigne qu'elles forment une partie intégrante de la vie divine [3]. S'imagine-t-on que, dans l'immuable Essence, ce grand génie ait localisé, comme autant de termes séparés, les archétypes des créatures? — M. Hauréau connaît ces explications : elles

[1] « Multitudo intellectorum a Deo non inducit compositionem in Deo neque » realem, *cum in intellectu non sint quasi res quaedam* apud ipsum exis- » tentes neque habitualem sicut habitus scientiae nostrae mixtus est ex mul- » titudine objectorum. » (Ap. Migne, c. LIII.)

[2] « Hoc quomodo divinae simplicitati non repugnet facile est videre, si quis » consideret ideam operati esse in mente operantis sicut *quod* intelligitur, » non autem sicut species *quâ* intelligitur, quae est forma faciens intellec- » tum in actu... Non est autem contra simplicitatem divini intellectus » quod multa intelligat, sed contra ejus simplicitatem esset, si per plures » species ejus intellectus formaretur... Sic igitur in quantum Deus cognoscit » suam essentiam ut sic imitabilem a tali creatura cognoscit eam ut propriam » rationem et ideam hujus creaturae... Unde *secundum quod* sunt plures » rationes intellectae ex una essentia, secundum hoc dicuntur plures ideae... » Respectus multiplicantes ideas non sunt *reales respectus...*, sed sunt res- » pectus intellecti a Deo. » (*Summ. th.*, I, q. XV, a. 7, *concl.* — Ad 4m.)

[3] « Cum omnia quae facta sunt a Deo sint in ipso ut intellecta, sequitur quod omnia in ipso sunt ipsa vita divina » (*Ibid.*, q. XVIII, a. 4.)

montrent que les exemplaires divins n'ont pu être assimilés par S. Thomas aux espèces conceptuelles de la psychologie scolastique. Celles-ci sont la cause au moins partielle de notre science; elles sont de toute façon distinctes les unes des autres; elles opèrent la transition de la faculté à l'acte de la connaissance; elles suivent les phases et les progrès de notre intellection. — Nous ne sommes pas de ceux qui tiennent l'idéologie de S. Thomas pour fausse. Ni les remarques du Dr Reid ni celles de Kant n'ont pu nous faire apercevoir cette fausseté; mais quand elles l'auraient démontrée, nous nierions hardiment que l'Ange de l'École ait appliqué à l'intelligence infinie son analyse de la raison humaine, de manière à compromettre le mystère de l'Unité absolue.

Veut-on mieux s'en convaincre? Qu'on nous dise ce qui sépare le Docteur Angélique du chancelier de Paris, Godefroid des Fontaines, justement loué par M. Hauréau pour la sobriété et le bon goût de son idéologie. « En Dieu, écrit ce ferme et judicieux esprit, il ne faut rien mettre qui soit comme un élément temporaire de la production des choses : il suffit de la forme intelligible qui est elle-même la raison efficiente, dès que s'y ajoute le concours de la volonté. Et c'est là la cause formelle exemplaire, tout à fait comme pour l'homme l'art de la médecine, et la maison dans l'esprit (de l'artisan). Avant que les choses existent de fait, elles n'ont d'autre essence *que leur essence connue* (de Dieu)... Personne ne pourra s'aviser d'établir cette division dans l'acte créateur; savoir, d'abord l'existence d'une idée, et puis, au moyen de cette idée, la constitution de l'existence [1]! » — D'Occam, le plus ardent censeur des superfluités psychologiques, ne s'éloigne au fond ni de Godefroid des Fontaines, ni de S. Thomas. A ses yeux l'Idée divine n'est pas autre chose que la créature de Dieu en tant qu'elle lui est présente avant sa production. Les Idées sont en Dieu, non comme des entités physiques, mais comme les effets connus de sa puissance. Entre elles et les idées de l'homme, il y a cette différence que chez celui-ci l'idée suit son objet, tandis qu'elle le précède en Dieu. En ce sens Occam

[1] Cf. M. Hauréau, ouv. cit., II, p. 308.

avoue que les Idées sont en Dieu virtuellement. Quant à expliquer la distinction des archétypes par des entités douées au sein de l'intelligence divine de toutes les attributions de sujets réels, selon lui, c'est imaginer de pures chimères [1]. — Les Princes de la philosophie scolastique peuvent souscrire à ces explications. Elles sont contraires aux exagérations de quelques ultra-réalistes. Henri de Gand séparant vraisemblablement dans les créatures l'être d'essence de l'être d'existence, et leur reconnaissant une forme intelligible et éternelle, distincte des Idées divines [2]; quelques Scotistes entichés de distinctions y trouvent un juste anathème. Mais dans leur signification sérieuse, elles ne sont pas contraires à S. Thomas, à Albert le Grand, à Anselme. — D'Occam ne voulait voir dans les Idées que le terme de la préscience créatrice. En réalité cette assertion, présentée avec la nuance d'exagération familière au bouillant agitateur, ne peut bien s'entendre qu'à condition de reconnaître, dans le concept divin, la règle même de son opération. Qu'on nous dise comment les créatures peuvent exister dans la préscience du Créateur, autrement que dans leurs idées exemplaires! Celui qui se donnera la peine de lire sur ces points les réflexions de Suarez, s'apercevra bien vite que tout ce débat est secondaire, s'il n'est tout à fait oiseux [3]. Valait-il la peine qu'on se donna à l'éclaircir? Que d'autres en décident! Mais hâtons-nous de le remarquer : les philosophes sensés qui s'y arrêtèrent étaient loin d'affirmer que les formes exemplaires ont dans l'Intelligence absolue une distinction réelle, à la manière des espèces intelligibles. Ils tenaient qu'en réalité il n'y en Dieu qu'un seul concept réel, embrassant la totalité de tous les individus susceptibles d'exister, partant qu'il n'y a en Dieu qu'une seule Idée. — Les Idées qu'on nous représentait comme, « universellement multiples, » éternellement distinctes les unes des autres, » correspondant aux abstractions venues « de la considération des choses nées, » n'ont qu'une pluralité purement virtuelle, fondée

[1] *Ibid.*, p. 449.
[2] Voir sa *Summ. theol.*, art. 2, 9, 23, 25.
[3] *Metaphys.*, disp. XXV, sect. 1.

sur le rapport transcendant de l'Absolu avec les réalités finies, capables d'en exprimer, dans le monde des phénomènes, une pâle et lointaine imitation. Voilà ce que déclare, avec le Docteur subtil lui-même, Suarez, le fidèle rapporteur des doctrines de l'École [1]. Après les paroles que nous avons entendues de la bouche de S. Thomas, nous n'en serons pas surpris. Aussi M. Hauréau louant cette fois en Richard de Middleton un psychologue fin et prudent, avoue-t-il que son analyse de la divine Intelligence revient à la thèse de S. Thomas « ingénieusement, mais librement interprétée. » Eh! qu'enseigne donc le *Doctor solidus* de l'École franciscaine? « Si la pensée divine n'est, avant le temps, qu'une seule pensée, cette unique pensée renferme la diversité qui, dans le temps, doit se produire, hors de sa cause; en ce sens, on peut dire que toutes les choses furent éternellement pensées par Dieu [2]. » Quelle différence y a-t-il entre l'unique Pensée comprenant l'infinie variété des êtres, et entre la pluralité logique des formes terminant l'unique Idée, dans laquelle la cause créatrice embrasse dès l'origine les effets successifs de sa libre activité? — Ainsi, la théorie de l'exemplarisme, en sa portée sérieuse, finit par triompher d'une querelle plus spécieuse que redoutable! Dès l'aurore du moyen âge, Anselme l'avait énoncée avec une remarquable précision, en la ramenant à cette formule dont s'inspirèrent ses successeurs : « Le langage de l'Esprit suprême, comme il ne peut être une créature, n'est pas autre chose que cet Esprit lui-même. » Rarement on lui a fait un honneur de sa sagacité : nous avons dû le revendiquer pour lui.

Nous connaissons à présent les idées de notre Docteur sur les principes fondamentaux de l'Ontologie, l'esprit de sa philosophie

[1] « Atque eodem modo et ratione, esse, quod appellant essentiae, ante » effectionem aut creationem divinam, solum est *esse potentiale* objectivum, » ut multi loquuntur, seu per denominationem extrinsecam a potentia Dei, » et non repugnantiam ex parte essentiae creabilis. Neque potuit in mentem » alicujus Doctoris catholici venire, quod essentia creaturae ex se, et absque » efficentia libera Dei sit aliqua vera res, aliquod verum esse reale habeat » distinctum ab esse Dei. » (*Metaph.*, d. 31, s. 1.)

[2] Cf. M. Hauréau : ouv cit., II, p 279.

et les sources principales qu'il a pu mettre à profit. Mais veut-on pénétrer plus avant en la pensée du rénovateur de la Métaphysique chrétienne dans les Écoles du XI^e siècle? Nous croyons qu'il est très-possible de reconstruire sur des textes empruntés à ses divers ouvrages une doctrine à peu près complète de la connaissance, telle que l'entendait le Docteur de Cantorbéry, et avec lui, la plupart de ses contemporains. Nous allons le tenter. Cet essai d'Idéologie rationnelle nous offrira une vue d'ensemble de leur idéologie. Il sera le couronnement naturel de nos précédentes observations. Les scolastiques se souciaient assez peu de codifier leurs idées avec l'esprit de synthèse qui distingua leurs successeurs. Cela est surtout vrai d'Anselme qui ne songea jamais à rédiger un Traité méthodique de Métaphysique ou d'Ontologie. C'est dans quelques textes, égarés dans l'ensemble de ses écrits, qu'il faut chercher les éléments d'une doctrine générale. Que ce soit une excuse pour l'aspect fragmentaire, pour l'aridité de notre analyse.

Aujourd'hui, le premier problème qu'on pose au seuil de la Philosophie, c'est l'examen de la faculté de connaître. Ne semble-t-il pas très-naturel de se renseigner sur la puissance d'un instrument, avant que de s'en servir? Si Descartes n'eût fait qu'inviter la raison à s'interroger sur ses titres à la certitude, sans compromettre d'avance cette recherche, en isolant systématiquement nos facultés de la réalité et l'esprit de la nature, qui donc l'eût blâmé pour cela? Mais la question de l'aptitude de la raison à saisir la vérité objective se posait autrement devant l'esprit des scolastiques que devant celui des hommes modernes. Ils la résolvaient d'une manière plus directe. Ils en appelaient avant tout à la loi instinctive de l'intelligence, à sa tendance spontanée à savoir, à connaître, ou ce qui revient au même, à réaliser sa fin propre : (le *facere quod debent* d'Anselme). Au fond, c'était la méthode de leur maître Aristote. En outre, ils rattachaient la solution du problème à la théorie de l'Exemplarisme, au rapport des êtres contingents avec l'Intelligence Absolue. Anselme s'est rallié à cette doctrine, déjà préconisée par S. Augustin.

Il est clair que la plus universelle loi de la nature est celle de la *légitimité et de l'infaillibilité des instincts primitifs des êtres*. Chacun d'entre eux porte en soi, avec des aptitudes et des facultés distinctes, une tendance originelle et irrésistible vers un but et des actes déterminés. Ce *mouvement spontané*, comme l'appelle Aristote, est tout ensemble la loi et la fin immédiate des êtres vivants, la condition de leur perfectionnement, l'expression vivante de leur activité. Il constitue l'élément le plus objectif et le plus certain de l'observation scientifique [1].

Eh bien! quel est, à l'envisager sous sa forme la plus générale, l'objet primitif des aspirations de l'intelligence, de l'*instinct rationnel* de l'homme, pour me servir d'une expression consacrée dans les sciences et adoptée par les meilleurs critiques? N'est-ce pas la possession actuelle de la vérité? Sans doute, la vérité, dans son développement complet, n'est pas une abstraction. Nous l'avons vu : avec Platon et Augustin, Anselme est arrivé bien vite à la concevoir sous le symbole d'un Être Infini et personnel. Mais il n'en est pas moins certain que la loi primordiale, la tendance spontanée de l'espèce humaine, c'est le progrès par l'acquisition de la vérité. Dans sa théorie de la connaissance, Platon montre que la science présuppose cette aptitude de nos facultés. A la différence des Sophistes, il ne discute pas ce préliminaire : il le

[1] Entendons ici les paroles si précises de M. Henri Martin en sa *Philosophie spiritualiste de la nature*, p. 165. « Toute critique de nos facultés intellectuelles, écrit le savant Doyen de la Faculté de Rennes, suppose la croyance à la légitimité de ces facultés. Si nous doutons de l'autorité de quelques-unes, il n'y a pas plus de raison de croire à celle des autres, même de la conscience de soi. A moins de vouloir se jeter dans un nihilisme impossible, il faut donc, de toute nécessité, attribuer une valeur absolue aux idées *à priori*, comme celles de cause, de substance, de temps, d'espace, de possibilité, de nécessité, de réalité, qui sont les formes invariables de la pensée, et aux principes nécessaires qui en sont les lois, par exemple, au principe de causalité, à celui de substance, à celui d'identité, à celui de contradiction et à celui de raison suffisante. Il faut croire que ces formes sont en rapport constant avec la réalité, et que ces lois sont les lois de l'être. » — L'ouvrage si exact en général et toujours si consciencieux de l'infatigable écrivain devrait être le Manuel d'Introduction d'une philosophie sérieuse. La valeur prépondérante des tendances instinctives y éclate à chaque page.

signale comme impliqué dans le désir inné de connaître. « L'éducation, dit-il, ne se fait pas de la manière que certaines gens le prétendent. Ils se vantent de faire entrer la science dans une âme où elle n'est point, comme on donnerait la vue à des yeux aveugles. Le discours présent montre que chacun a dans son âme la *faculté* et l'*organe* par lequel il apprend. Cet organe, il faut en faire ce qu'on ferait de l'œil, s'il était impossible de le tourner des ténèbres à la lumière, autrement qu'avec tout le corps : il faut, dis-je, tourner cet organe avec l'âme tout entière, de la vue de ce qui *naît* vers la contemplation de ce qui *est* (ἐκ τοῦ γιγνομένου εἰς τὸ ὄν) [1]. »

La capacité de l'esprit pour la vérité est donc, pour le fondateur de l'Académie, un principe premier. Aristote n'eut pas en cela d'autre sentiment que son maître. « L'homme, dit-il, à la première page de sa Métaphysique, est destiné par sa nature à connaître la vérité. » On le sait : c'est à l'expérience, au fait, à l'histoire que s'adresse ce sévère et positif génie, pour fonder la science de la pensée. — Il ne trouve le fondement de la certitude, écrit un de ses plus récents interprètes, ni dans la conscience immédiate de la loi naturelle, comme Socrate, ni dans la vision des Idées divines avec Platon, mais bien dans l'universelle et instinctive tendance de l'âme à connaître et à atteindre la vérité [2]. C'est

[1] *Rép.*, VII, p. 518.

[2] *Der Aristotelische Gottesbegriff mit Beziehung auf die christliche Gottesidee*, van Dr Götz. — Leipzig, 1871. — Voir surtout, p. 11. — « Aber » schon hier tritt der empirische standpunkt offen vor Augen, den Aristoteles bei seiner betrachtung über die eigenthümlichen und ursprünlichen » Merkmale des Menschenwesens, und inbesondere des Menschengeestes einnimmt. Wahrend Socrates und Plato von ummitelbar gegebenen Thatsachen » des Bewustseins ausgehen und der eine die eigene Vernunft als ein Theilweisen der Gottheit, der andere die richtige Meinung als Grundlage alles » Wissens, und namentlich den besitz der Ideen als Erbtheil aus einem vorweltlichen Dasein betrachtet, so fasst Aristoteles den Menschen zunächst » nur nach seinem aüssern geschichtlichen Dasein auf, und das characteristiche und ursprünliche, das er an ihm findet, is weder ein unmittelbares » *Sichselbtsbewissen*, noch ein gegebenes Gottesbewusstsein, sondern eben » nur ein dem Menschen von Natur *inwohnender Trieb zum Wissen.* » — Cf. H. Martin, *op. cit.*, p. 115.

en ce sens que le Maître nomme l'*étonnement* la source de la science, puisqu'il suppose tout ensemble et la faculté d'être impressionné par les phénomènes, et le désir naturel de s'expliquer la cause des effets observés [1]. Tout le procès rationnel, le passage de la sensation à l'aperception des caractères essentiels des êtres, la combinaison méthodique des multiples vérités acquises par l'induction reposent sur la prédestination de l'homme à la certitude, à la science. — Cette première assise de la philosophie d'Aristote, que nous retrouverons chez Anselme, est toute prise dans la réalité. Pour l'entendre complétement, il faut la rapprocher d'une autre vue importante de sa Métaphysique. Les *formes* (ενεργειαι) qu'Aristote considère comme les *principes actifs* à l'égard de l'*élément passif* des êtres (δύναμις) [2], sont à ses yeux des Types innés, se développant dans la nature : ils constituent la Fin immédiate, la Loi immanente des êtres de l'univers.

L'évolution harmonique, la finalité interne des choses est le dogme fondamental de la Cosmologie d'Aristote [3]. La légitimité des tendances instinctives de nos facultés en est l'expression dans le monde intelligible. Sans conteste, cette doctrine est l'un des plus considérables progrès qu'il ait fait réaliser à la Philosophie. Elle présuppose la véracité de nos facultés aperceptives. La nature n'inspire jamais un besoin absolu et cependant impossible à satisfaire. Une expérience toujours fidèle a fait de ce principe la moins douteuse des lois du monde organisé. Ce serait forfaire au déterminisme scientifique que d'en excepter l'homme, le plus parfait des êtres vivants.

Nous l'avons dit : ce premier fondement de la connaissance

[1] *Met.*, I, 2, 15.

[2] *De Anima*, III, 5.

[3] Voyez là-dessus la savante étude du Dr Heinze : *Die Lehre vom Logos*, p. 71. — L'auteur y rappelle surtout les textes suivants : ἡ δὲ φύσις οὐθὲν ἀλόγιος, οὐθὲν μάτην ποιεῖ. (*De cœlo*, II, 11.) — ἡ δέ φύσις ἐκ τῶν ἐνδεχομένων ποιεῖ τὸ βέλτιστον. (*De part. an*, IV, 10.) — ὅτι τὴν φύσιν ὁρῶμεν ἐν πᾶσιν ἐκ τῶν δυνατῶν ποιοῦσαν τὸ κάλλιστον. (*De vit. et mort.*, 4. — Voir aussi Ritter, III, 264; 297, etc.

rationnelle, les Docteurs chrétiens l'insinuent plutôt qu'ils ne l'analysent. Augustin nous a signalé sans trop s'y arrêter *l'instinct naturel*, ainsi qu'il l'appelle, qui pousse l'homme à rechercher le bonheur et la science, et fait donner des réponses justes aux ignorants eux-mêmes. Avec son maître préféré Anselme présuppose comme avérée l'aptitude originelle de l'esprit pour la vérité. Écoutons ces paroles du chapitre LXVIII du Monologue. « Il suit (de nos précédentes observations), dit-il, que la créature raisonnable ne doit s'appliquer à rien autant qu'à exprimer par des actes libres l'image qui lui a été imprimée *par la force de la nature*. En effet, par cela que, d'une part, elle doit au Créateur ce qu'elle est, et parce que, d'autre part, sa plus noble faculté est de se rappeler, de connaître et d'aimer *le Souverain Bien*, il s'ensuit qu'elle ne doit rien désirer avec une telle ardeur. Il est clair que l'âme humaine est une créature raisonnable. Il faut en conclure qu'*elle a été faite pour aimer au-dessus de tout l'Essence suprême* [1]. »

« L'homme, dit le S. Docteur en la XIX^e^ Méditation, est composé de deux éléments, d'un élément spirituel et d'un élément corporel. L'âme, parce qu'elle est spirituelle, *tend d'elle-même vers les choses supérieures.* » — Nous le savons : tout le Dialogue *de la vérité* se réduit à signaler le lien de la vérité avec la loi innée des êtres et leur conformité à leur tendance originelle. Aucun Docteur n'avait insisté, à l'égal d'Anselme, sur ce principe. Il est vrai que, dans son application à la perception de la vérité, il le rappelle sans le démontrer. Un scrupule pareil ne pouvait

[1] « Consequi itaque videtur, quod rationalis creatura nihil tantum debet » studere quam hanc imaginem, *sibi per naturalem potentiam impressam*, » per *voluntarium* effectum exprimere. Etenim praeter hoc quia creanti se » debet hoc ipsum quod est, huic quoque, quia nihil tam praecipuum posse » quam reminisci et intelligere, et amare summum bonum cognoscitur, nimi- » rum nihil tam praecipue debere velle convincitur.... Hinc itaque satis pa- » tenter videtur, omne rationale *ad hoc existere*, ut sicut ratione discretionis » aliquid majus vel minus bonum sive non bonum judicat, ita magis vel minus » id amet aut respuat. Nihil enim apertius quam rationalem creaturam ad hoc » esse factam, ut summam Essentiam amet super omnia bona. »

venir à un homme du XI^e^ siècle, moins encore à un contemplatif, à un mystique aussi fervent que le vénérable Maître du Bec.

Mais il est manifeste que la science ne peut être qu'*objective;* elle représente à l'esprit non de pures modifications, mais la réalité des choses. Loin de s'identifier avec des perceptions simplement relatives ou contingentes, la vérité constitue la règle, la loi absolue de nos jugements. C'est à elle, comme le disait Anselme dans le Dialogue *de Veritate,* que toutes nos pensées doivent être conformes afin d'être vraies. — Le Stagyrite avait signalé en un mot l'objectivité des principes. Il enseigne qu'en dernière analyse, la connaissance se ramène à quelques axiomes certains et évidents de l'ordre spéculatif et de l'ordre pratique. Par là, il maintient, d'une part, le principe générateur de toute sa philosophie : l'infaillibilité des tendances primitives des êtres, qui ne sont que l'expression vitale de leur nature : et d'autre part, il rejette à l'avance le sentiment des fidéistes de toutes nuances, ne voyant dans les aspirations primordiales des facultés humaines qu'un instinct aveugle, fatal. Ces principes, ces axiomes, il les nomme évidents par eux-mêmes; non-seulement ils sont vrais en soi, mais ils manifestent immédiatement leur vérité à l'esprit qui les conçoit. Ils relèvent, d'une façon directe, de la lumière supérieure de l'entendement. *L'impossibilité évidente d'être autrement*, voilà, selon Aristote, le critère des démonstrations scientifiques [1]. — De fait, l'esprit ne se sent-il pas dominé irrésistiblement par les vérités-principes? Ne percevons-nous pas les essences métaphysiques des choses, et par-dessus tout les lois essentielles du Vrai, du Bon, du Beau, comme autonomes, comme indépendantes de l'appréciation de tout esprit créé, comme empreintes d'une nécessité sans exception? Leur indépendance à l'égard de nos jugements personnels n'est-elle pas aussi réelle que celle de nos sensations à l'égard de notre volonté, que Kant et Fichte eux-mêmes

[1] Τὸ δ' ἐπιστητὸν καὶ ἐπιστήμη διαφέρει τοῦ δοξας τοῦ καὶ δόξης, ὅτι ἡ μὲν ἐπιστήμη καθόλου καὶ δὶ ἀναγκαίων τὸ δ' ἀναγκαῖον οὐκ ἐνδέχεται ἄλλως ἔχειν. — *Anal. post.*, I, 38.

ont fini par avouer [1]? Ce sont ces vérités qu'Augustin appelait *les principes innés.* S'expliquant là-dessus dans ses *Rétractations,* il assure que par cette appellation il a voulu désigner les vérités supérieures, que tout esprit bien dirigé aperçoit à la lumière de la Vérité immuable qui l'assiste et le guide dans la connaissance. — Ces axiomes et ces lois, connus de leurs violateurs eux-mêmes, sont en quelque sorte imprimés dans notre âme par la première Cause. Le regard de l'esprit les atteint par une intuition si prompte qu'on peut dire, par métaphore, qu'ils nous sont innés [2].

Le Docteur du Bec ne pouvait, en son temps, entrer dans ces détails, mais au fond il se rallie à cette doctrine. C'est le caractère irréductible d'évidence objective qu'il signale dans les démonstrations qu'il nomme des *arguments nécessaires,* pleins de *raison vraie* et de *lumière* [3]. C'est l'objectivité des propositions évidentes qu'il consacre dans les nombreux passages du Dialogue *de Veritate* et du Monologue, où nous l'avons entendu poser dans la Vérité suprême la règle à laquelle doivent se conformer les opinions et les jugements [4].

[1] Voyez là-dessus des aveux peu suspects et très-curieux chez le Dr Von Hartmann, *Philosophie der Unbewusste*, p. 293.

[2] « Illud quod dixi omnes artes animam secum attulisse mihi videri : nec
» aliud quidquam esse, id quod dicitur discere quam recordari ac reminisci;
» non sic accipiendum est quasi ex hoc approbetur anima vel hic in alio cor-
» pore, vel alibi sive in corpore, sive extra corpus aliquando vixisse... Fieri
» enim potest, sicut jam in hoc opere supra diximus, ut hoc ideo possit, *quia*
» *natura intelligibilis est*, et connectitur non solum intelligibilibus, verum
» etiam immutabilibus rebus, eo ordine facta, ut cum se ad eas res movet
» *quibus connexa est*, vel ad seipsam, in quantum eas videt, in tantum de
» his vera respondeat... Item dixi quod disciplinis liberalibus eruditi, sine
» dubio in se illas oblivione obrutas eruunt discendo, et quodam modo refo-
» diunt. Sed hoc improbo. Credibilius est enim propterea vera respondere de
» quibusdam disciplinis, etiam imperitos earum, quando bene interrogantur,
» quia praesens est eis, quantum id capere possunt lumen rationis aeternae,
» ubi haec immutabilia vera conspiciunt. » — *Retract.*, I, c. VIII, p. 4.
— Cf. *De Trin.*, XIV, c. XV.

[3] *Rationis necessitas* (préf. du Monol.) — *probationibus necessariis* — (c. LXIV); *vera ratione* explicare (c. LXV).

[4] *Lib. 83 Quaest.*, q. 32.

Anselme lui-même a fait l'application de ces principes. Aucun Docteur n'avait, avant lui, mis en une telle lumière le caractère de l'évidence rationnelle, comme critère fondamental de certitude. — Augustin, son maître, avait écrit ceci : « L'esprit qui comprend une chose *autrement qu'elle n'est* en réalité, ne la comprend pas. Car rien ne peut être véritablement compris que de la manière qu'il existe véritablement [1]. » — Déjà dans le Dialogue *de Veritate*, Anselme avait enseigné que la Vérité est dans la pensée, *lorsqu'elle atteint l'être des choses*. Mais il va plus loin. Toute sa fameuse preuve de l'existence de l'Infini *tirée de son idée* repose sur le principe de l'évidence objective. En ce point, Anselmé s'exagérait la portée de sa doctrine. Je fais uniquement observer qu'il y avait pénétré plus avant qu'aucun de ses contemporains. Certes, enseigne notre Docteur dans sa dispute avec Gaunilon, il est très-possible que l'homme *conçoive* des idées fausses ou qu'il s'enchante de chimères. Mais lorsque de fait il *comprend* une vérité en se démontrant avec une pleine évidence sa nécessité, il n'est pas admissible que l'erreur se mêle à une pareille démonstration. Cette distinction est développée au chapitre IV de la *Réponse à l'Insensé*. Nous aurons à l'examiner plus tard. Le langage où Anselme l'exprime est fort obscur : quoi d'étonnant? c'est la première fois qu'un homme formé par la dialectique pseudo-péripatéticienne formule la loi de l'évidence [2]! « Si j'avais dit, écrit notre Docteur, que cet Être (celui qui ne peut être pensé que sous le symbole de *l'Être le plus grand*) ne peut être conçu comme n'existant pas, vous-même peut-être

[1] *De Gen. ad litt.*, XII, c. XXV.

[2] « Si enim dixissem, *rem ipsam* non posse *intelligi* non esse, fortasse tu » ipse, qui dicis quia secundum proprietatem verbi istius *falsa nequeunt* » *intelligi*, objiceres, nihil quod est posse *intelligi* non esse; falsum est enim » non esse quod est : quare non esset proprium Dei non posse intelligi non » esse. Quod si aliquid eorum quae certissime sunt potest intelligi non esse, » similiter et alia certa non esse posse intelligi. Sed hoc utique non potest » objici *de cogitatione*, si bene consideretur. Nam etsi nulla quae sunt possunt » *intelligi* non esse, omnia tamen possunt *cogitari* non esse, praeter id *quod* » *summe est.* »

qui soutenez que, dans le sens propre du mot, *les choses fausses ne peuvent pas se concevoir*, m'objecteriez-vous que rien de ce qui est ne peut *se concevoir* comme n'étant pas, puisqu'il est faux que ce qui est ne soit pas, et que par conséquent il ne serait pas exclusivement propre à Dieu de ne pas pouvoir être *conçu* comme n'étant pas; que si quelqu'une des choses qui sont certainement peut *être conçue* comme n'étant pas, d'autres choses *certaines* peuvent également être *conçues* comme n'étant pas. — Mais certes cette objection ne saurait être faite *à l'égard de la pensée,* si l'on y réfléchit bien. Car quoique *aucune des choses qui sont* ne puisse être *conçue comme n'étant pas,* toutes cependant peuvent être *pensées* comme n'étant pas, excepté l'Être qui est au-dessus de tout. » — Le lecteur remarquera sans peine cette distinction entre le *concept* et la *pensée.* La *pensée,* pour Anselme, est la formule absolue qui ne touche que l'ordre métaphysique. Le concept est la notion concrète saisissant l'être dans sa réalité physique actuelle. Mais la règle qui, selon lui, gouverne la pensée aussi bien que le concept, c'est la grande loi de *l'évidence objective.* Voilà la vérité que cachent les expressions tourmentées, ambiguës que nous venons d'entendre. Notre Docteur l'exprime par l'application du *principe de contradiction*, le plus simple, le plus évident mais aussi le moins fécond des axiomes. En cela, il se conformait à l'habitude de son temps.

Anselme ajoute qu'il y a une différence essentielle entre les représentations fausses et les vérités certaines : « Quant à l'objection que vous me faites, dit-il à Gaunilon, que les choses fausses et douteuses de tout genre peuvent être *conçues* et *être dans l'intelligence* aussi bien que l'Être que j'ai défini, je suis surpris de vous voir ici en opposition avec moi, qui voulais prouver une chose encore problématique et qui me contentais de démontrer d'abord que cet être se conçoit et est dans l'intelligence *comme une chose quelconque,* afin de pouvoir examiner ensuite s'il est dans l'intelligence seulement comme les choses fausses, ou bien s'il y *est* de plus en réalité (in re), *comme les choses vraies* [1]. »

[1] « Quod autem objicis, quaelibet falsa vel dubia similiter posse intelligi et

Si nous réfléchissons qu'Anselme appelle les démonstrations certaines et légitimes des *arguments nécessaires* et que Boëce, après Aristote, avait répété à satiété que le caractère propre de ceux-ci est de montrer à l'esprit leur absolue certitude, on tombera d'accord que, sous la forme encore vague et mal définie des premiers essais métaphysiques, le Docteur de Cantorbéry a, le premier, dans les écoles du moyen âge, appliqué le critère de l'évidence objective des propositions. L'irrécusable et immédiate intuition de la réalité, manifestée par l'expérience et la raison, a été professée par lui comme le signe suprême de la connaissance et de la vérité.

Mais il est temps d'indiquer comment, dans l'idéologie des Scolastiques, et d'Anselme en particulier, la certitude objective de nos connaissances est le corollaire naturel de la doctrine de l'Exemplarisme, c'est-à-dire des rapports essentiels de l'intelligence créée avec la Cause première.

Il n'est pas admissible que le plus parfait des êtres organisés ait été produit par Dieu au hasard, ou créé d'après un type défectueux. Comme toutes les autres créatures, il réalise dans tout son être l'une des multiples imitations de l'Absolu. Pour ne pas être, dans l'universelle harmonie, une anomalie désavouée par l'expérience et la raison, il doit porter en soi les facultés capables de lui faire atteindre la vérité, *l'être des choses,* où le portent avec une invincible force, ses tendances innées, ses intimes aspirations. Ce serait ébranler la stabilité et l'uniformité générale des lois de la nature que d'assigner pour objet à l'esprit la perception de formes purement subjectives, auxquelles ne répondrait aucune réalité. Seul de tous les êtres vivants, l'homme est doué de raison : c'est en ce sens surtout qu'il est *l'image de Dieu,* comme Anselme l'enseigne après Augustin. Cette raison doit avoir un objet réel : cette image, en ses traits

» esse in intellectu, quemadmodum illud quod dicebam : miror quod hic sensisti
» contra me dubium probare volentem, cui primum hoc sat erat, ut quolibet
» modo illud intelligi et esse in intellectu ostenderem; quatenus consequenter
» consideraretur utrum esset in solo intellectu, an et re ut vera. » (C. VI.)

vraiment essentiels, ne peut offrir avec son auguste original une monstrueuse difformité. La connaissance de la vérité en soi, la connaissance de la réalité est, dans ses limites naturelles, l'inaliénable lot de l'esprit humain.

Ce n'est pas tout. Les êtres distincts de l'homme sont, comme lui, des représentations de la Substance infinie. Ces imitations partielles ne subsistent sans doute que dans les individus. Toutefois, les types individuels présentent à l'analyse un double élément : l'un nécessaire et unique, qui est l'essence commune; l'autre accidentel et divers, constitué par les attributs particuliers. Par là, ils prêtent un légitime fondement à l'abstraction et à l'efformation des *notions générales,* dont les multiples combinaisons forment l'une des plus considérables parties de la science. Quant aux *Idées transcendantes et absolues,* elles sont fournies à l'esprit de l'homme, d'abord par l'analyse de sa tendance instinctive à saisir l'essence des êtres et la cause des phénomènes (*Vérité*); — puis, par la constatation de la loi anthropologique, de l'*impératif catégorique,* comme parlait Kant, ordonnant à la volonté créée de *se conformer à la volonté suprême et d'obéir* aux lois essentielles que la raison lui découvre (*Bonté morale*)*;* enfin, par le sentiment de l'harmonie et de la splendeur des choses (*Beauté*). Ces trois idées-mères, sources des sciences et des arts, nous apparaîtront dans toute leur réalité, lorsque nous nous serons élevés jusqu'à la Substance suprême, en laquelle subsiste, dans sa vivante unité, la plénitude de l'être. — N'est-il pas vrai qu'interprétée avec discrétion, la théorie de l'exemplarisme fournit une base assurée à la perception de la vérité objective [1] ?

En rattachant l'objectivité de nos connaissances à la théorie de l'Exemplarisme, et en dégageant cette théorie des erreurs qui, si

[1] Voyez sur ce point la dernière partie de l'ouvrage *: De la connaissance intellectuelle* de M. LIBERATORE, S. J. p. 536, et SUAREZ, *Metaph.*, D. VIII, S. VII, p. 29. — « Quia intellectus creatus est quaedam participatio divini intel-
» lectus *cui natus est conformari in intelligendo,* si vere intelligit; ergo hoc
» ipso quod esse dicitur verum, quia est conformabile intellectui divino, poterit
» etiam dici verum, quia est conformabile intellectui creato *vere intelligenti.*

souvent, s'y étaient glissées, notre Docteur imprima aux esprits une direction d'une extraordinaire importance. Peu de temps après lui, un Maître célèbre, auquel il n'a manqué que la mesure dans l'audace, pour être l'un des plus grands métaphysiciens du moyen âge, exposa avec une vivacité singulière le lien de la Vérité objective et de l'Exemplarisme. Nous voulons parler de Gilbert de la Porrée. Écoutons l'excellente analyse de son Idéologie que nous donne M. Hauréau : « La raison voit d'abord, par l'intermédiaire des sens, les *formes nées* unies aux corps; ensuite, elle les sépare intellectuellement de ces corps et les conçoit comme permanentes, mais, qu'on le remarque bien, cette conception n'est pas conforme à la nature des choses, *puisqu'elle vient de l'abstraction*, c'est-à-dire de la disjonction de ce qui est uni dans la nature. Est-ce donc là que s'arrête la raison? S'en tient-elle à cette science conceptuelle, qui lui fournit, il est vrai, une notion, *mais une notion purement subjective de la forme, de l'idée*. Non, sans doute : de l'idéalisme critique (j'aimerais mieux : *psychologique*), la raison s'élève à l'idéalisme transcendantal (c'est le mot propre dont Gilbert fait usage : *nativa omnia transcendens*); après avoir recueilli les idées, elle veut contempler ces idées, et les contemple en effet, dans leur principe, dans leur exemplaire éternel. Parvenue à ce degré suprême de la connaissance, la raison est enfin satisfaite. Les sens l'avaient informée de ce que c'est que le périssable : elle avait acquis, au moyen de l'abstraction, l'idée intellectuelle de la forme concrète; et elle ne s'est élevée jusqu'à la vérité pure, jusqu'à la vérité vraie, si l'on peut ainsi parler, qu'en franchissant la limite du contingent, pour atteindre le nécessaire, l'absolu, l'éternel [1]. »

Avec sa magistrale précision, S. Thomas d'Aquin expose des idées pareilles dans ses deux Sommes [2]. « Que l'on demande,

[1] Ouv. cit., I, p. 305.

[2] « Cum quaeritur utrum anima humana in rationibus aeternis omnia cognoscat, dicendum est, quod aliquid in aliquo dicitur cognosci dupliciter. Uno » modo *sicut in objecto cognito*, sicut aliquis videt in speculo ea quorum » imagines in speculo resultant : et hoc modo anima in statu praesentis vitae » non potest videre omnia in rationibus aeternis; sed sic in rationibus aeternis

dit-il, *si l'âme humaine connaît toutes choses dans les idées éternelles,* il faut répondre qu'on peut de deux façons connaître quelque chose dans une autre. D'abord, *comme dans un objet déjà connu,* par exemple, lorsque quelqu'un voit dans un miroir les choses dont les images s'y réfléchissent. De cette manière-là, l'âme, en l'état de la vie présente, ne peut voir tout dans les Idées éternelles, mais les Bienheureux connaissent tout en ces Idées, puisqu'ils voient Dieu et toutes choses en lui. Mais, d'une autre façon, on dit qu'une chose est connue dans une autre, *comme dans le principe de sa connaissance.* C'est ainsi que nous disons que nous voyons *dans le soleil* les choses que nous voyons par la lumière du soleil. Et dans ce sens, il faut dire nécessairement que nous voyons tout dans les Idées divines, en tant que nous connaissons toutes choses par la participation à ces Idées. Car la lumière intellectuelle qui se trouve en nous, n'est pas autre chose qu'une *certaine ressemblance que nous participons de la lumière incréée,* dans laquelle sont contenues les Idées éternelles. » Et il ajoute ces paroles qui semblent inspirées par le Dialogue *de Veritate* : De même que toutes les raisons intelligibles des créatures existent primitivement en Dieu et sont dérivées de Lui dans les autres intelligences, pour qu'elles parviennent de fait à comprendre, ainsi elles sont aussi dérivées dans les êtres pour qu'ils puissent subsister. — Dans la *Somme philosophique,* S. Thomas écrit : L'âme et les autres créatures sont *vraies* dans

» cognoscunt omnia Beati qui Deum vident et omnia in ipso. — Alio modo,
» dicitur aliquid cognosci in aliquo sicut in cognitionis principio, sicut si dica-
» mus, quod *in sole* videntur ea quae videntur *per solem.* Et sic necesse est
» dicere quod anima humana omnia cognoscat in rationibus aeternis, per
» quarum participationem omnia cognoscimus. Ipsum enim lumen intellec-
» tuale quod est in nobis, nihil est aliud quam quaedam participata similitudo
» luminis increati, in quo continentur rationes aeternae. Unde in Ps. IV, 6,
» dicitur : Multi dicunt : Quis ostendit nobis bona ? Cui quaestioni Psalmista
» respondet, dicens : Signatum est super nos lumen vultus tui, Domine :
» quasi dicat, per ipsam sigillationem divini luminis in nobis omnia demons-
» trantur. » — *Sum.*, I, q. 84, a. 5.

[1] « Sicut igitur animae et res aliae verae quidem dicuntur in suis naturis
» secundum quod similitudinem illius summae Naturae habent, quae est ipsa

leur espèce respective, selon qu'elles portent en elles la ressemblance de la Cause suprême qui est aussi la suprême Vérité, puisque son être et son intelligence sont identiques : de même *la connaissance de l'âme est vraie* selon qu'il y a en elle une ressemblance avec la Vérité que Dieu lui-même possède... C'est pour ces raisons, ajoute le Docteur Angélique, que la Glose expliquant les paroles du Psaume II, v. 2 : *Diminutae sunt veritates a filiis hominum* dit que de même qu'une seule figure produit de multiples représentations dans un miroir, ainsi de la seule Vérité première résultent les multiples vérités dans l'esprit humain. Il y a certes des vérités desquelles on juge différemment. Mais il y a des vérités sur lesquelles tous les hommes sont d'accord, comme les premiers principes de l'intellect tant spéculatif que pratique, précisément parce que (en ces points) *la ressemblance de la divine Vérité se communique universellement à tous les esprits*. Ainsi, tout ce qu'une intelligence connaît d'une manière certaine, tout ce qu'elle voit en ces principes d'après lesquels elle juge (toutes) choses, en les ramenant à ces premiers axiomes, tout cela *elle le voit dans la Vérité divine, dans les*

» veritas, cum sit suum intellectum esse : ita id quod per animam cognitum
» est, manifestum est in quantum illius divinae veritatis quam Deus cognoscit
» similitudo quaedam existit in ipsa. Unde et Glossa super illud psalmi (XI, 2) :
» *Diminutae sunt veritates a filiis hominum*, dicit quod sicut ab una facie
» resultant multae facies in speculo, ita ab una prima veritate resultant multae
» veritates in mentibus hominum. Quamvis autem diversa a diversis cognos-
» cantur et credantur vera, tamen quaedam sunt vera in quibus omnes
» homines concordant, sicut sunt prima principia intellectus tam speculativi
» quam practici, secundum quod universaliter in mentibus omnium divinae
» veritatis quasi quaedam imago resultat. In quantum ergo quaelibet mens
» quidquid per certitudinem cognoscit, in his principiis intuetur secundum
» quod de omnibus judicatur, facta resolutione in ipsa, dicitur omnia in
» divina veritate, vel in rationibus aeternis videre, et secundum eas de omni-
» bus judicare. Et hunc sensum confirmant verba Augustini in libro *Solilo-
» quiorum* (l. I, c. VIII) qui dicit, quod scientiarum spectamina videntur in
» divina veritate sicut visibilia in lumine solis, quae constat non videri in ipso
» corpore solis, sed per lumen quod est similitudo solaris claritatis in aere et
» similibus corporibus relicta. » (*Cont. Gent*, l. III, c. XLVII.) — Cf. *De verit.*, q. X, art. 11 et 12. — Op. 70, *De Spirit. creat.*

raisons éternelles, et de la sorte, elle juge tout d'après ces principes. Et ce sens du Psaume est confirmé par ces paroles de S. Augustin dans les Soliloques, l. I, chap. VIII, où il assure que les principes des sciences sont perçus dans la Vérité divine, comme les choses visibles dans la lumière du soleil. Certes, les objets ne sont pas aperçus dans le corps même du soleil, mais dans la lumière qui est un vestige de la clarté de l'astre répandu dans l'air et sur les autres corps. — Écoutons encore cette formule devenue célèbre : Les choses créées, dit le S. Docteur, sont la règle de l'esprit humain, et elles sont réglées par l'intelligence de Dieu. Sous le premier rapport, elles sont le principe de notre science qui doit se conformer à elles. Sous le deuxième rapport, elles sont le terme de la Raison divine dont elles doivent exprimer les Idées [1].

Le Docteur Séraphique ne se sépare en rien, sur la présente matière, de son glorieux ami. Dans un opuscule longtemps inédit, mais dont quelques fragments viennent d'être publiés, Bonaventure combat l'assertion de certains platoniciens de son temps, qui prétendaient que toute connaissance est puisée dans les Idées divines. Voici comment il conclut contre eux : L'Idée éternelle, dit-il, est requise, dans la science humaine, et comme règle et comme agent, non en ce sens qu'elle en soit le facteur unique dans sa clarté absolue, mais bien le co-facteur de la raison créée, selon une perception conforme à la condition terrestre....... La connaissance certaine est l'attribut de l'âme, en tant que celle-ci est l'*image de Dieu*, et voilà pourquoi elle y atteint les raisons éternelles des choses.... Mais notre âme n'est pas une image complète de la Divinité : en même temps qu'elle perçoit ces raisons, elle saisit les formes engendrées par l'abstraction des attributs accidentels, comme son objet

[1] « Divina veritas est mensura omnis veritatis. Veritas enim nostri intel-
» lectus mensuratur *a re* quae est extra animam. Ex hoc enim intellectus noster
» verus dicitur, quod consonat rei. Veritas autem rei mensuratur ad intellec-
» tum divinum qui est causa rerum... sicut veritas artificiatorum ab arte
» artificis... Divina igitur veritas est prima summa et perfectissima veritas. »
(*Ibid.*, l. I, c. LXII.)

propre et déterminé; et sans ce secours, elle ne saurait, dans la vie présente, s'élever à la connaissance par la seule lumière des Idées divines [1]. »

Ce serait une chose infinie de rapporter les principaux textes des Docteurs qui consacrent le lien de la certitude objective et de la doctrine de l'Exemplarisme; ils démontrent l'impression profonde que les vues d'Anselme avaient causée aux penseurs. Rappelons seulement, pour finir, ce passage du célèbre Cusa. Nous citons ce philosophe, parce qu'il touche à l'aurore de l'âge moderne et qu'il est curieux de l'entendre témoigner de la persistance de cette théorie féconde que le Docteur de Cantorbéry eut le mérite de rajeunir et de transmettre aux écoles chrétiennes. — Après avoir montré dans l'abstraction le procédé propre de l'esprit, Cusa continue ainsi : La raison est comme une semence divine, s'*assimilant intellectuellement les exemplaires des choses.* Elle doit à Dieu, en même temps que cette faculté, d'avoir été jetée dans une terre où elle peut fructifier et parvenir à la connaissance des divers êtres. Sa force primitive lui eût été donnée en vain, si elle n'eût pas reçu également le moyen de passer à l'acte. — Dans sa nature rationnelle, dit-il encore, l'âme a reçu de son Créateur ce privilége et cette puissance, car *elle exerce ses actes à la ressemblance de son Créateur.* Et comme le Créateur, par la création, produit les choses réellement existantes, ainsi l'intelligence *qui est son image* engendre par son opération l'image des choses réelles. Selon Cusa, pour Dieu, créer, c'est produire

[1] « Ad certitudinalem cognitionem necessario requiritur ratio aeterna ut » regulans et ratio motiva, non quidem ut sola et in sua omnimoda claritate, » sed cum ratione creata, et ut ex parte a nobis contuita secundum statum » viae... Quoniam igitur certitudinalis cognitio competit spiritui, secundum » quod est Imago Dei, ideo in hac cognitione aeternas rationes attingit. — » Rursus, quia non ex se tota est anima imago, ideo cum his (rationibus) » intelligit rerum similitudines abstractas a phantasmate tanquam proprias » et distinctas cognoscendi rationes, sine quibus non sufficit sibi ad cognos- » cendum lumen rationis aeternae quamdiu est in statu viae. » — *Quaestio anecdota :* « An rationes aeternae sint ratio cognoscendi in omni certitudinali » cognitione? » Ap. R. P. Fidelem a Fanna, *Ratio novae collectionis operum S. Bonaventurae.* — Taurini, 1874, p. 228; *Conclus.*

les Essences, et pour l'esprit, comprendre, c'est se les assimiler.

Mais d'après Anselme, la certitude et l'objectivité de nos connaissances résulte encore du concours continuel de la première Cause avec l'être raisonnable, dans l'acte de la perception intellectuelle. — Laissée à elle-même, la créature tirée du néant y retomberait incontinent : sans cesse elle doit être soutenue par la première Cause. Or, cette dépendance originelle implique l'assistance active, ou pour parler avec notre Docteur, « *la présence conservatrice* » et le concours non interrompu de la Divinité avec l'esprit de l'homme. « Il n'y a qu'un insensé, dit Anselme, qui puisse douter que toutes les choses qui ont été faites ne se conservent et ne continuent à exister par l'assistance de Celui-même par l'action duquel elles ont reçu de rien l'existence qu'elles ont. — Il serait absurde de dire que puisque rien de créé ne peut exister hors de l'immensité du Créateur et du Conservateur, de même le Créateur et le Conservateur ne sauraient d'aucune manière dépasser l'universalité des choses créées : il est clair aussi que l'Essence suprême soutient et surpasse, enferme et pénètre tous les autres êtres [2]. » — C'est à la même doctrine qu'il faut rapporter

[1] « Unde quia mens est quoddam divinum semen sua vi complicans omnium » rerum exemplaria notionaliter; tunc a Deo a quo hanc vim habet, eo ipso » quod esse recipit, et simul et in convenienti terra locatum, ubi fructum » facere possit, et ex se rerum universitatem notionaliter explicare, alioqui » haec vis seminalis frustra data ipsi esset, si non fuisset addita opportunitas » in actum prorumpendi. » (*De mente*, c. V.) — « At quoniam intellectualis » natura hoc et hanc nobilitatem non habet, nisi a Creatore suo (nam operatur in similitudine Creatoris sui), sicut creando veras res producit; ita intellectus imago ejus, operando producit similitudines verarum rerum. Creare » enim est essentiare, et intelligere est assimilare. » (*Cribat. Alcor.*, II, c. III.)

[2] « Dubium autem non nisi irrationabili menti esse potest, quod cuncta quae » facta sunt, *eodem ipso sustinente*, vigent et perseverant esse quamdiu » sunt, quo faciente de nihilo habent esse quod sunt. — Quod quoniam esse » aliter non potest, nisi ut ea quae sunt facta *vigeant* per aliud et id a quo » facta sunt vigeat per seipsum, necesse est ut, sicut nihil factum est nisi » per creatricem praesentem essentiam, ita nihil vigeat nisi per ejus *servatricem praesentiam.* » (*Mon.*, c. XIII.) — « At quoniam absurdum est,

les éloquentes élévations du Prosloge sur la Vérité et la Lumière divines, critère et loi de la science humaine. Dieu, comme cause première, aide donc ses créatures à déployer leur activité essentielle, et les guide à leurs opérations. Il serait impie autant qu'erroné d'admettre dans l'intelligence divine un exemplaire défectueux, et dans la réalité, un être dont les tendances primitives pussent être déçues. Mais il serait cent fois plus absurde de supposer un concours de la première Cause avec l'esprit humain, conduisant celui-ci à l'erreur, ou ce qui revient au même, l'induisant à prêter à de simples formes de l'entendement, une réalité objective. Cette conclusion est d'autant plus rigoureuse dans la philosophie d'Anselme, qu'il nous a signalé la perception de la vérité comme la fin propre de la créature raisonnable.

En mettant en relief l'influx perpétuel de la Raison absolue sur l'intelligence de l'homme dans le phénomène de la connaissance, Anselme adoptait à son insu l'un des plus féconds enseignements de la sagesse antique. — Platon, dont le génie se rapproche en bien des points du sien, donne pour fondement à la science la présence active de l'idée du Bien (*τὸ ἱκανὸν*), ou de Dieu dans notre âme. « Tiens pour certain, dit-il à son élève, que ce qui répand la lumière de la vérité sur les objets de la connaissance, ce qui donne à l'âme la faculté de connaître, c'est *l'Idée du Bien*. Comprends qu'*elle est la cause de la science* et de la vérité, en tant qu'elle peut être connue [1]. » Il ajoute, dans le *Premier Alcibiade,* que le haut sommet de l'âme est habité par la sagesse, et qu'elle a un caractère divin [2]. En son poétique langage, le divin Philosophe compare les âmes à des plantes célestes, se mouvant dans une atmosphère divine, aspirant la vie de Dieu et s'épanouissant dans sa lumière [3]. Malgré les tendances

» ut scilicet, quemadmodum nullatenus aliquid creatum potest exire creantis
» et foventis immensitatem, sic creans et fovens nequaquam valeat aliquo
» modo excedere factorum universitatem, liquet quoniam ipsa est quae cuncta
» alia portat et superat, claudit et *penetrat.* » (*Ibid.*, c. XIV.)

[1] *Républ.,* VI, p. 508.

[2] *Alcib.*, I, pp. 133-134.

[3] *Timée*, pp. 89, 90.

si différentes de son austère génie, Aristote se rallie à son maître sur le point qui nous occupe. Il n'est pas aisé de déterminer tous les détails de sa doctrine sur les facteurs de la connaissance. Aristote s'étend, en général, fort peu sur la part de l'intervention divine dans les choses d'ici-bas. Il loue néanmoins Anaxagore, pour avoir, le premier, reconnu comme la cause du monde un Esprit Intelligent. Il blâme Empédocle, qui dénia à Dieu la connaissance des événements terrestres [1]. Un critique contemporain avertit que s'il parle presque à chaque page de la finalité de la nature, il associe la Divinité à ce développement harmonique [2]. On concilierait toutes les vues du Stagyrite en notant que, selon lui, l'action du premier Moteur sur les causes secondes n'implique que le simple déploiement de son activité, sans aucun changement dans son essence [3]. Du sein de son immuable éternité, l'Absolu exerce sa féconde influence sur tous les mondes. Par une sorte d'harmonie préétablie, si l'on veut, toute la nature tend vers le Souverain Bien, comme vers la Fin Universelle, vers le Désirable sans désir. « L'Être immobile, écrit Aristote en sa Métaphysique, meut comme objet de l'amour. Il est un Être nécessaire et, en tant que nécessaire, il est le Bien... Tel est le Principe auquel sont attachés le Ciel et la Terre [4]. » Conformément à l'esprit général de sa philosophie, le Stagyrite veut que le *principe matériel* de la connaissance ou l'*intellect passif* (νοῦς παθητικός) est mû et mis en acte par le *principe formel* ou l'*intellect actif* (ὢν ἐντελεχείᾳ ποιητικός). L'intellect actif est séparé du premier, impassible, immortel. Aristote l'appelle l'élément divin dans l'homme [5]. Il a si fort insisté sur son rôle dans la

[1] *Met.*, l. III, (al. II), c. IV.

[2] *De cœlo*, l. I, c. IV. — Cf. Kleutzen, *Phil. der Vorzeit*, III, p. 823.

[3] *De an.*, III, 5 : Ὁ νοῦς (ποιητικός) χωριστὸς καὶ ἀπαθὴς καὶ ἀμιγὴς τῇ οὐσίᾳ ὢν ἐνέργεια — Καὶ ἔστιν ὁ μὲν τοιοῦτος νοῦς (παθητικός) τῷ πάντα γίγνεσθαι.

[4] L. XII, c. VII.

[5] Le traité *du Monde* rappelle les mêmes pensées. Les critiques allemands tiennent, en général, ce livre pour supposé. Leurs raisons ne nous paraissent pas convaincantes. En tout cas, le *Monde* est si plein des idées de la métaphy-

connaissance que, selon d'excellents critiques, il a paru l'identifier avec le premier Moteur lui-même *pensant dans l'âme humaine.* Avec des nuances diverses, c'est le sentiment de Trendelenburg [1], de Tiedemann [2], de M. Ravaisson [3], auxquels se rallie aussi M. Renan [4]. Ces interprètes avouent que cette sorte de Raison impersonnelle ne rentre guère dans le cadre de la philosophie aristotélicienne, si expérimentale et si sévère. Avec Götz [5], Biese [6], Heinze [7], nous

sique d'Aristote que nous voulons le citer. « De tout ce que la nature renferme, dit-il, Dieu est le conservateur: il est l'auteur de tout ce qui s'y accomplit; mais non à la façon d'un ouvrier ou d'un être vivant exposé à la lassitude ou accessible à la peine: sa puissance ne connaît point d'obstacle; par elle il soumet toutes choses à son empire, celles-là même que leur distance semble éloigner le plus de lui... Nous croyons que c'est là la meilleure doctrine et la plus digne de Dieu, que de reconnaître la puissance céleste pour le principe de l'universelle intégrité... Par un seul et simple mouvement, Dieu étend sa force aux êtres les plus voisins de lui, et par ceux-ci elle se transmet aux plus éloignés jusqu'à ce qu'elle pénètre toutes choses... Lui-même, malgré son invisible nature, se fait ainsi connaître par ses œuvres à la créature mortelle... Il retient et affermit le vaste agrégat de l'univers, il lui assure sa durée, il le conserve : non certes par une présence locale sur cette terre imparfaite, mais à la manière d'une *pure Essence dans l'espace pur*... Au résumé, ce qu'est au navire le pilote, au char le conducteur, au chœur le chef, ce qu'est la loi à la cité et le général à l'armée, voilà ce qu'est Dieu pour le monde. Toute la différence est que ceux-là sont exposés au labeur, aux multiples agitations, aux soucis nombreux. Lui réussit à tout sans peine, sans trouble, sans infirmité. De sa stable demeure, sans se mouvoir soi-même, il meut et ordonne toutes choses à son gré, de la façon qu'il juge opportune suivant les diverses formes et les diverses natures. En cela il ressemble à la Loi immobile en elle-même, mais réglant à l'égard de ceux qui s'y conforment, les différents intérêts de la chose publique... (C. VI.) Ce Dieu unique a été nommé de noms divers d'après les effets qu'il produit ici-bas... Le grand Platon tient que toutes ces appellations désignent le même Être, et cela est évident... C'est avec lui que doit entrer en rapport dès le principe, celui qui aspire à une vie heureuse et fortunée ! »

[1] Voir sa savante édition du *Traité de l'Ame*, p. 175.
[2] *Geist der specul. phil.*, t. IV, p. 147.
[3] *Essai sur la Mét. d'Arist.*, I, p. 585, sqq.
[4] *Averroès et l'Averroïsme*, p. 155.
[5] *Die Arist. Gottes idee*, p. 18.
[6] *Die phil. der Arist.*, I, 357.
[7] *Die lehre vom Logos*, p. 72, sqq.

croyons qu'Aristote a enseigné le *concours* de la Cause première avec l'esprit humain dans l'acte de la connaissance, et non le dogme de la Raison divine, apparaissant passagèrement dans l'âme. Il assure bien, écrit le Dr Heinze, que l'intellect actif ressemble au plus haut point à la Raison suprême, et qu'il est l'élément divin de la connaissance; mais, nulle part, il n'affirme clairement leur identité. Cette identification, ajoute ce savant, serait une contradiction manifeste avec le principe capital de la Théodicée d'Aristote : l'immutabilité absolue du premier Moteur et l'unité de la vie de l'âme. — Disons encore que, dans ses *deuxièmes Analytiques,* Aristote envisage constamment l'intellect actif comme la partie supérieure de l'intelligence, élevant à l'universalité les faits de la sensation [1]. Ce qui reste certain parmi les obscurités de détail, c'est qu'Aristote, aussi bien que Platon, reconnaît hautement l'influx du premier Être dans le phénomène de la connaissance. — Quant aux Stoïciens, ils considéraient l'activité supérieure de la créature comme un développement de la Force essentielle, du *Logos* s'incarnant dans la raison de l'homme [2]. Philon et les Néo-platoniciens tinrent au fond la même doctrine. Pour ceux-ci, le Démiourge, émanation et image de l'Unité suprême, se représentait à son tour dans les phénomènes. Les Germes des choses (λόγοι σπερματικοὶ), sources de leurs énergies, sont subordonnés, dans leur évolution, à la direction du Logos. L'esprit participe à cette universelle Loi. C'est la doctrine de Plotin et surtout de Porphyre. D'une part, expression des idées divines dans les êtres du monde; de l'autre, concours positif et direct du Logos avec la raison humaine en chacune de ses opérations, voilà le double fondement qu'ils assignaient à la science [3]. Leur vues à cet égard entrèrent dans la philosophie chrétienne, grâce surtout à

[1] Voir les textes cités plus haut à propos de la dialectique d'Aristote.

[2] Cf. Ravaisson, t. II, p. 302, sqq. — Voir aussi M. Barthélemy S. Hilaire : *de l'Ame*, p. xl.

[3] Voir la belle étude du Dr Heinze sur le Logos. Ouv cit., pp 80-176, *passim.* Voir encore Heinze, pp. 296-332. Le savant écrivain expose les vues néo-platoniciennes avec une profondeur et une érudition qui font de son ouvrage l'une des plus riches sources pour l'étude de l'Idéologie critique.

saint Athanase [1], à saint Justin [2] et à Origène [3]. — Le premier enseigne que le Verbe conduit et dirige tous les êtres créés à leur fin, au Bien. L'univers est dirigé et conduit en toutes choses avec raison (Λογῳ), sagesse et prévoyance. Athanase déclare que la Raison ordonnatrice n'est exclusivement ni l'énergie essentielle des êtres, ni la seule activité innée de l'esprit, mais le Verbe de Dieu qui a créé le monde et continue à l'illuminer. Ce Verbe tout-puissant, parfait, très-saint pénètre toutes choses et exerce partout son activité. Il éclaire les êtres visibles et invisibles : il les conserve dans l'existence... C'est grâce à son action que tous les êtres se meuvent et sont éclairés. *Le Verbe humain, la raison de l'homme est l'image du Verbe Infini.* Ce que notre raison proclame en nous, c'est Dieu lui-même qui, par son action partout féconde, le promulgue en un certain sens dans l'âme formée à sa ressemblance. En outre, dans les êtres de la nature, le Verbe a réalisé les Idées éternelles, afin que l'homme pût par elles remonter jusqu'à l'invisible Créateur. — Saint Justin considère les créatures comme autant d'évolutions des germes primitifs, dans lesquels l'activité du *Logos* divin persiste et opère sans interruption. — Origène, développant ces vues si hautes, montre dans le Verbe l'unité centrale des Idées et la lumière toujours présente à la raison. Il l'appelle avec Philon l'Idée des Idées (*ἰδέα ἰδέων*). Nous l'avons entendu plus haut : ce fut Augustin qui, plus que tous les autres Pères, assura à la doctrine du concours de l'Intelligence absolue avec la raison créée la faveur des philosophes chrétiens. Au seuil du moyen âge, son noble disciple lui reprit ses principaux enseignements. Nul doute que la fortune qu'ils eurent dans la suite n'ait été, pour une grande part, l'œuvre d'Anselme.

Mais, depuis Malebranche, cette théorie idéologique a provoqué

[1] *Adv. Gent.*, c. XL. — *De Incarn. Verbi*, c. XLII. — Or. II, *Cont. Arianos*, c. XLVIII.

[2] *Apol.*, I, c. XXXII, XLVI; *Ibid.*, II, c. VI, VIII, XIII.

[3] *Cont. Cels.*, VI, c. LXIV. — Cf. Staudenmaier, *Philos. des Christenth.* I, p. 822 seqq.

des malentendus qui sont retombés spécialement sur le Docteur de Cantorbéry et sur saint Augustin, son maître. — Ce serait dénaturer étrangement la doctrine que nous venons d'entendre, que de représenter l'action de la Raison divine sur l'esprit humain comme une *manifestation immédiate*, quoique partielle et obscure encore, de la divine Intelligence. — Sans infirmer en rien ses précédentes explications sur l'élément supérieur de la connaissance, le Docteur d'Hippone a pu tenir que les païens ont vu la vérité immuable de loin, *autant que l'homme* (sans une grâce surnaturelle) *peut la voir*, c'est-à-dire le créateur par la créature, l'artisan par l'œuvre, le fabricateur du monde par le monde, selon la théologie de saint Paul [1]. Augustin ajoute que les principes des sciences sont aussi différents de la majesté de Dieu que le ciel l'est de la terre [2], et *qu'il est impossible de voir les Idées divines si ce n'est dans la vie bienheureuse* [3]. Il semble qu'il ait pressenti l'abus qu'on devait faire de quelques-unes de ses expressions, lorsqu'il nous avertit que, dans sa philosophie, la vision d'une chose signifie simplement « *sa présence rendue sensible de quelque manière* », et que tout ce qui est manifesté à l'esprit est pour celui-ci une lumière [4]. Après avoir consacré de si prolixes développements au concours de Dieu avec l'intelli-

[1] « Haec et philosophi nobiles quaesierunt, et *ex arte artificem* cognove-
» runt... Deum esse quandam vitam, aeternam, immutabilem, intelligibilem,
» intelligentem, sapientem, sapientes facientem, nonnulli etiam hujus saeculi
» philosophi viderunt, veritatem fixam, stabilem, indeclinabilem, ubi sunt
» omnes rationes rerum omnium creatarum... Nam quod viderunt etiam ipsi
» *quantum videre ab homine potest*, creatorem per creaturam, factorem per
» facturam, fabricatorem mundi per mundum, Paulus Apostolus testis est. »
(*Serm.* 55, de Verbis Domini.)

[2] « Adducor ut assentiar quantum in suo genere a caelo terram, tantum ab
» intelligibili Dei majestate spectamina illa disciplinarum vera et certa dif-
» ferre. » — *R.* Bene moveris. — *De lib. arb.*, c. VIII.

[3] « Has ideas non posse videri, nisi visione beata. » — *Lib. 83 quaest.* — q. 46.

[4] « Aliud est enim videre, aliud est totum videndo comprehendere. *Quando-*
» *quidem id videtur, quod praesens utcunque sentitur.* » (*Ep.* 112, c. VI.)
— « *Videntur enim quae praesto sunt*, unde et praesentia nominantur, vel
» animi vel corporis sensibus. » (*Ibid.*, c. II.)

gence humaine, comment Augustin décrit-il le procédé par lequel l'esprit s'élève à la connaissance de Dieu? Il nous dit que c'est par le spectacle des cieux, l'ordre des saisons, les harmonies des nombres et surtout par la considération de l'élément absolu que l'esprit atteint en ses perceptions intellectuelles, que nous devons monter, comme par autant de degrés, jusqu'aux choses divines [1]. C'est en éliminant par la pensée les limites des perfections créées que nous arrivons à concevoir le Bien sans bornes, la Cause première et nécessaire [2]. Anselme affirme à plusieurs reprises qu'il ne se sépare en rien de la doctrine de son maître. C'est déjà, on l'avouera, un très-fort préjugé contre ceux-là qui ont voulu faire de lui un défenseur de la *vision directe* de l'Intelligence divine, lieu des éternelles Idées!

Mais veut-on se persuader tout à fait qu'Anselme n'a pu tenir l'Ontologisme? Qu'on examine sa pensée sur les preuves de l'existence de Dieu! Demandez à un ontologiste comment il se démontre la réalité de l'Absolu : il vous convie bien vite à considérer le caractère éternel, nécessaire des Idées générales. L'éternité, la nécessité, dira-t-il, non sans quelque solennité, ne sont-ce pas les attributs d'un Être infini et nécessaire lui-même? De telles notes ne peuvent affecter de simples modifications de l'intellect. La présence des Idées générales dans la Raison implique donc l'existence de la Cause absolue qui en est le sujet. Voir ces Idées, c'est voir, obscurément du moins, Dieu lui-même. — Ce raison-

[1] Voir surtout *De lib. arb.*, II, c. XVI. — *De Trin.*, VIII, c. VI, IX. — *De vera relig.*, c. XXX. — *De doct. Christ.*, II, c. XXXVIII, pour la méthode générale. — Pour l'idée de l'Être nécessaire et infini, conçu comme la Vérité, la Sagesse, la Justice immuable, absolue et personnelle Cf. *De lib. arb.*, II, c. VI, VIII, IX, X, XI, XII; *De Trin.*, VIII, *passim;* XIV, c. XV; *De vera Relig.*, c XXX, XXXI, XXXII, LII; *Tract.* 23, 35, *in Joan; De civ. Dei*, XI, c. XXVII: *De Magistro*, c. XI, etc. — Sur l'idée de Dieu considéré comme la suprême harmonie, Cf. *De Ordine*, II; *De Musica*, VI, c. X, XIV; *Ep.*, 151; Serm. 17 *De Verb. Ap.* — Cf. M. Ravaisson, ouv. cit., vol. II, *passim.*

[2] *De Trin.*, VIII, c. III. — Personne n'expose mieux, au point de vue spécial de la controverse avec les ontologistes, la doctrine augustinienne que A. Lépidi, en son livre précité, pp. 190 et suivantes.

nement, présenté sous vingt formes différentes, est d'une singulière faiblesse. La faculté abstractive de l'esprit suffit à dégager les types essentiels des choses et à les isoler de toutes les conditions de temps, de toute forme particulière. Mais en est-il moins vrai que l'argument précité est familier aux ontologistes? Eh bien, toutes les fois qu'il analyse le procédé par lequel l'homme s'élève jusqu'à Dieu, Anselme tient la commune doctrine des Docteurs. Dans les premiers chapitres du Monologue, il établit longuement l'existence de l'Être absolu par la considération des multiples degrés de perfection que révèlent à l'observateur les êtres de la nature [1]. Il signale ensuite la causalité transcendante de l'Absolu à l'égard des choses finies, ce qui l'amène à marquer leur rapport idéal avec la Raison éternelle, où subsistent les formes diverses représentées dans l'univers. — Traitant des noms par lesquels l'homme exprime la substance divine, Anselme insiste sur leur caractère purement analogique : « Puis donc qu'*il est certain*, dit-il, que rien de ce qui *appartient à cette nature* ne peut être saisi par ce qu'elle a de propre, mais *seulement* par la vue de quelque chose que l'on puisse lui comparer *au moins de loin*, il est certain que l'on parvient à la connaître d'autant mieux que l'on prend, pour objet *de comparaison* une chose qui lui *ressemble* davantage [2]. » Ici bas, nous ne connaissons la Divinité que par une vue spéculaire et à travers un voile énigmatique. L'âme humaine, faite à son image, est son plus fidèle reflet. — Nulle part, nous n'apercevons la moindre mention de l'identité des Idées absolues avec l'Essence ou l'Intelligence divine. La théorie des types exemplaires, si longuement développée par Anselme, provoquait cependant d'elle-même cette explication!

Mais il faut l'entendre dans sa réponse à Gaunilon de Marmoutiers : « Puisque tout bien inférieur, dit-il, est *en tant que bien* semblable au Bien supérieur, il est évident, pour tout esprit raisonnable, qu'en nous élevant des biens inférieurs aux biens supé-

[1] C. I-V.

[2] C. XVI. — « Cum igitur pateat quod nihil de hac Natura possit percipi » per suam proprietatem, sed *per aliud*, certum est quia per illud magis ad » ejus cognitionem acceditur, quod illi magis per similitudinem propinquat. »

rieurs, nous pouvons *en concevant ces choses* au-dessus desquelles il est possible de penser quelque chose de plus grand, *conjecturer beaucoup* touchant l'Être au-dessus duquel rien ne peut être pensé de plus grand [1]. » Voilà bien la démonstration accoutumée des Écoles, la preuve inductive de la Cause première. A quoi aboutit-elle, dans la pensée d'Anselme? A permettre des raisonnements, des conclusions vraies, sans doute, mais simplement approximatives et au fond inadéquates sur la nature de l'Infini. D'une intuition des Idées divines, nulle trace chez notre Docteur. C'était néanmoins le cas d'en parler. — Il est vrai, les ontologistes prétendent que les Pères et les Docteurs ont professé deux sortes de connaissances de Dieu : l'une synthétique et primitive, résultant de la perception directe de l'Infini, sans interposition d'aucune idée intermédiaire; l'autre réflexe et analytique, provoquée par le spectacle des créatures. — Dans le présent débat, cette distinction ne sert en rien leur cause! En la dispute d'Anselme avec Gaunilon, il s'agissait précisément de la démonstration de l'existence de Dieu *tirée de son idée*. L'habile péripatéticien avait touché au vif l'argument si cher au vénérable Prieur du Bec. Il lui opposait l'impossibilité de trouver dans le monde créé et dans l'esprit une représentation adéquate de l'Infini. C'était assurément soulever la question de la preuve synthétique! S'il avait eu foi dans l'intuition des ontologistes, Anselme n'aurait eu qu'à signaler dans l'idée de l'*Être le plus grand* le Dieu Infini qui s'y révèle! En décrivant la manière dont nous nous élevons par le spectacle du monde jusqu'à son Auteur, il nous avertit que, selon lui, l'idée de l'Infini est une Idée intermédiaire, un produit de l'analyse et de l'abstraction. Un philosophe qui professe une telle doctrine, en de pareilles circonstances, recommande-t-il l'ontologisme? N'hésitons pas à le dire : Ou Anselme n'a pas vu toute la valeur qu'aurait eue pour lui l'argument tiré de l'intuition directe de la Raison Absolue; et

[1] « Quoniam namque omne minus bonum, in tantum est simile majori » bono, in quantum est bonum, patet cuilibet rationabili menti, quia de bonis » minoribus ad majora conscendendo, ex his quibus aliquid majus cogitari » potest, multa possumus conjicere circa illud quo nihil potest majus cogitari. » (C VIII.)

dans ce cas que personne n'oserait admettre, quel intérêt les ontologistes ont-ils à se réclamer de son patronage? ou bien, il a compris toute la portée de la question; et puisqu'il en est ainsi, impossible d'en faire un précurseur de Malebranche. C'est la réponse à Gaunilon qui nous éclaire sur l'opinion d'Anselme : en style augustinien, il s'y rallie à l'ordinaire doctrine des écoles [1]. Cela soit dit pour certains écrivains qui ont imaginé un double Anselme : le Régent du Bec et l'Abbé. Celui-là aurait tenu la théorie commune : celui-ci aurait été partisan de la vision. Franchement, le second Anselme ne paraît pas plus ontologiste que le premier!

Quelques critiques ont cru trouver en divers textes de S. Anselme une négation plus directe de l'Ontologisme. Dans la partie du *Prosloge* où il expose la façon dont nous parvenons à la connaissance de Dieu, il avoue qu'il est inaccessible à l'esprit de l'homme. « Seigneur, s'écrie-t-il, mon Dieu, mon Créateur et mon Réparateur, dites à mon âme brûlante de désir, dites lui ce que vous êtes *autre* que ce qu'elle a vu, afin qu'elle voie purement ce qu'elle désire. Elle s'efforce de voir plus, et elle ne voit au delà de ce qu'elle a vu rien que des ténèbres. Ou plutôt, elle ne voit pas de ténèbres; elles n'existent point en vous : mais elle voit qu'elle ne peut rien voir de plus à cause de ses propres ténèbres. Pourquoi cela, Seigneur, pourquoi? Son œil est-il obscurci par sa faiblesse ou ébloui par votre splendeur? Oui, certes, il est obscurci en lui-même et ébloui par vous; en effet, il est arrêté par sa faible portée, et il est accablé par votre immensité : véritablement, ses bornes étroites le resserrent et votre grandeur illimitée le dépasse. Vraiment, Seigneur, c'est là la lumière inaccessible que vous habitez : car il n'y a point d'autre être qui la pénètre pour vous y voir clairement; et la raison pour laquelle je ne vous vois pas, c'est

[1] Malgré les déclarations si explicites d'Anselme sur l'emploi des intermédiaires créés dans la démonstration de l'existence de Dieu, M. Hauréau écrit à ce sujet ces paroles : « Dans la doctrine de Platon, le fondement de toute certitude, c'est l'idée, l'idée pure dont l'origine est en Dieu. Dieu l'envoie directement à sa créature, sans faire usage d'aucun intermédiaire terrestre. *Voilà ce que répète S. Anselme.* » (*Athenæum français*, n° du 18 février 1854.)

qu'elle est trop forte pour moi. Et cependant tout ce que je vois, je le vois par elle, de même que l'œil faible de mon corps voit tout ce qu'il voit par la lumière du soleil qu'il ne peut contempler dans le soleil même. Mon esprit ne peut pas regarder cette lumière en face : elle brille trop fort, il ne se l'assimile pas : l'œil de mon âme ne peut longtemps fixer son regard sur elle; il est ébloui par son éclat, il est dépassé par sa grandeur, il est accablé par son immensité, il est confondu par son étendue [1]. »

Il semble donc que toute la science de Dieu qu'Anselme reconnaît à l'esprit est purement analogique. Nous le connaissons *indirectement*, à peu près comme on connaît l'artiste à ses œuvres. — Ces considérations ne sont pas celles qu'on a coutume de rencontrer chez les ontologistes. Cependant ce n'est pas sur elles que je voudrais m'appuyer pour prouver qu'Anselme n'a pas enseigné la vision directe des idées. On pourrait répondre, non sans quelque succès, que dans toutes ces déclarations sur l'incompréhensibilité de Dieu, notre Docteur entend parler seulement de la compréhension de la Raison et de l'Essence divine. En plusieurs endroits, c'est la Sainte-Trinité qu'il désigne sous le nom de

[1] « Domine Deus formator meus et reformator meus, dic desideranti » animae meae quid aliud es quam quod vidit, ut pure videat quod desiderat. » Intendit se ut plus videat, et nihil videt ultra hoc quod videt nisi tenebras; » imo non videt tenebras, quae nullae sunt in te, sed videt se non plus posse » videre propter tenebras suas. Cur hoc, Domine, cur hoc? Tenebratur oculus » ejus infirmitate sua, aut reverberatur fulgore tuo? Sed certe et tenebratur » in se, et reverberatur a te. Utique et obscuratur sua brevitate, et obruitur » tua immensitate. Vere et contrahitur angustia sua, et vincitur amplitudine » sua. Quanta namque est lux illa, de qua micat omne verum, quod rationali » menti lucet! Quam ampla est illa veritas, in qua est omne quod verum est, » et extra quam non nisi nihil et falsum est!... (C. XIV.) Vere, Domine, haec » est lux inaccessibilis, in qua habitas; vere enim non est aliud quod hanc » penetret, ut ibi te pervideat. Vere ideo hanc non video, quia nimia mihi est; » et tamen quidquid video, per illam video; sicut infirmus oculus quod videt, » per lucem solis videt, quam in ipso sole nequit aspicere. Non potest intel- » lectus meus ad illam; nimis fulget, non capit illam, nec suffert oculus » animae meae diú intendere in illam. Reverberatur fulgore, vincitur ampli- » tudine, obruitur immensitate, confunditur capacitate. » (C. XVI.) — Voir de Aguirre : *Theol. S. Anselmi*, I, p. 188.

l'Être Suprême (*Summa Natura*). L'argument semblerait nul aux ontologistes qui ne revendiquent à la raison que la seule intuition de l'Infini, comme principe des Idées et des Vérités absolues. — D'autres écrivains ont également insisté sur quelques passages de la Méditation XXI, où il est uniquement question de l'Essence et des attributs *immanents* de la Divinité. Anselme s'y exprime ainsi : « Si vous êtes partout, Seigneur, pourquoi ne vous vois-je pas présent? Mais certes, vous habitez une lumière inaccessible. Et où donc est cette lumière inaccessible? Comment parviendrai-je à cette lumière inaccessible, ou qui m'y guidera afin que je vous y voie?... Il n'y a aucun être ici-bas qui puisse y pénétrer pour vous voir... O suprême et inaccessible Lumière, ô sainte et bienheureuse Vérité, que Vous êtes loin de moi qui suis si près de Vous! Vous êtes partout entièrement présente, et je ne Vous vois point! Je me meus en vous, je vis en Vous, et je ne puis m'approcher de Vous! Vous êtes au dedans et à l'entour de moi, et je ne Vous sens point [1]! »

Dans ce passage, Anselme n'a pas parlé une seule fois de l'auguste Trinité. C'est bien de l'Essence divine qu'il enseigne l'invisibilité essentielle. Mais à cela, les ontologistes répondront derechef qu'Anselme ne rejette ici que la *vision claire de la Divinité en soi*, non une certaine vue de Dieu, en tant qu'il est l'Être Infini, le principe des Essences. — La thèse de l'intuition *limitée et obscure* de l'Essence divine est, aux yeux des meilleurs juges, un pur leurre. Elle est d'autant plus illusoire, dans le présent débat, qu'en l'opuscule théologique : *Sur la procession du S. Esprit*, Anselme tient expressément que « celui qui voit ce en quoi les

[1] « Si ubique es, cur non te video praesentem? Sed certe habitas lucem » inaccessibilem Et ubi est lux inaccessibilis? aut quomodo accedam ad lucem » inaccessibilem? Aut quis me ducet in illam, ut videam te in illa?... Vere » enim non est aliquid quod hanc penetret ut ibi te videat. . O summa et inac- » cessibilis lux, o sancta et beata veritas quam longe es a me, qui tam prope » sum tibi! Quam remota es a conspectu meo qui sic praesens sum conspectui » tuo! Ubique es tota praesens, et non video te! In te moveor, et in te sum, » et ad te non possum accedere! Intra me et circa me es, et non sentio te! » (*Ed. Gerber.*, pp. 241-242.)

personnes Divines sont *un* ne peut voir l'une d'entre elles sans voir les deux autres [1]. » Ce texte insinue clairement qu'à son avis, l'aperception de l'Essence divine implique celle de toute la Sainte Trinité. Quoi qu'il en soit de cet endroit, je ne dissimule pas que les passages du Prosloge offrent, à des gens prévenus, quelque matière à chicaner. Dans le champ clos de l'exégèse, les disciples de Malebranche prétendront qu'Anselme n'a rejeté que la vision *claire* de Dieu. A celle-là aussi, sans nul doute, ils appliqueront ces autres paroles de l'*Homélie IV de S. Matthieu*, où le S. Docteur dit que la vue distincte de la Divinité ne peut être le terme de nos propres forces, mais que nous y parvenons par la grâce de Dieu [2]. Ils montreront les textes où il est écrit que l'œil de l'âme est trop faible pour fixer longtemps son regard sur cette lumière. Vous voyez bien, diront-ils, qu'on peut la fixer au moins un peu, cette divine lumière! Nous ne demandons pas davantage. — Ils indiqueront d'un doigt malin, dans la réponse à Gaunilon, la comparaison où Anselme représente Dieu comme le soleil que nous voyons sans en pouvoir soutenir l'éclat. Je sais bien que le S. Docteur emploie la même comparaison à propos de la vision béatifique [3]! Mais nos zélés contradicteurs n'auront pas grand souci de cela. Les passages du Prosloge leur sembleront décisifs. Ils le paraîtront un peu moins, dès qu'on les rapproche de la Réponse à Gaunilon qui leur est postérieure en date. Là, pour nous, est la vraie, la complète solution du problème. C'est dans l'ensemble de sa doctrine qu'il faut chercher le sentiment d'Anselme. Prétendre l'extraire de textes isolés, c'est faire un anachronisme, et oublier les habitudes littéraires du XI[e] siècle! — Ce qui est plus frivole encore, c'est l'engouement que mettent les ontologistes à tant se prévaloir de la comparaison « du soleil », employée par Anselme, au sujet de notre connaissance de Dieu. « Tout ce que

[1] « Quoniam qui videt hoc in quo *unum sunt* Pater et Filius et Spiritus » Sanctus non potest videre unum de his tribus sine aliis duobus. » (C. XIX, *Éd. Gerb.* p. 58.)

[2] « Quae (Lux) inaccessibilis est viribus nostris, sed acceditur ad eam mu- » neribus divinis. » (*Éd. Gerb.*, p. 164.)

[3] *Hom. IV, in Ev. Matth.*, l. c.

je vois, s'écrie le S. Docteur, je le vois par la lumière de Dieu, de même que l'œil faible de notre corps voit tout ce qu'il voit par la lumière du soleil qu'il ne peut contempler dans le soleil lui-même [1]. » Ils mettent en regard de ces paroles cet autre texte de la *Réponse à Gaunilon* : « Que si vous dites que l'on ne conçoit pas dans l'intelligence ce qu'on *ne conçoit pas* (ou ce qu'on ne comprend pas) *entièrement*, vous devez dire aussi que celui qui ne peut pas regarder la très-pure lumière du soleil ne voit pas la lumière du jour qui n'est autre que la lumière du soleil [2]. » De ces passages on conclut qu'Anselme admettait *une certaine vision de Dieu*, bien qu'elle ne fût ni complète, ni même distincte.

Nous savons déjà que pour Augustin, voir c'est connaître : il en est de même d'Anselme. Il a pris soin de nous indiquer en plus d'un endroit que la connaissance de Dieu est purement analogique, déduite de la considération des créatures. Pour justifier les paroles alléguées, n'est-ce pas assez que la connaissance de Dieu, en tant qu'il est le Principe exemplaire des créatures et la Cause supérieure de la science de l'homme est elle-même mêlée d'ombre, indirecte, semblable au reflet de la vision spéculaire? En soi Dieu est le radieux soleil de Vérité dont la clarté ne peut être contemplée que par les élus, à l'éclat de la lumière céleste : ses rayons descendent jusqu'à nous par la révélation et par la création, par le canal de la grâce et par celui de la nature. La science de Dieu communiquée par la parole révélatrice est à la fois « lumière et ténèbres, » comme parle Anselme après le pseudo-Denys. Dans leurs méditations le philosophe, le mystique peuvent remonter des créatures jusqu'à la Cause première et parfaite, jusqu'à la lumière toujours présente à l'âme. Mais celle-ci même, la raison ne l'atteint qu'à travers le voile des phénomènes : elle ne saurait la fixer longtemps sans se troubler. L'œil de l'homme,

[1] « ... Quidquid video per illam (lucem) video; sicut infirmus oculus quod » videt per lucem solis videt quam in ipso sole nequit aspicere. » (*Monol.*, c. XVI.)

[2] « Quod si dicis non intelligi et non esse in intellectu, quod non penitus » intelligitur, dic, quia qui non potest intueri purissimam lucem solis, non » videt lucem diei quae non est nisi lux solis. » (C. I.)

entravé par les sens et le poids du corps, ne saurait s'arrêter à la contemplation de l'élément supérieur de la connaissance. Ce sommet de la spéculation donne vite le vertige : le regard est trop faible pour regarder en face la lumière qui brille sur ces hauteurs. Mêlant aux déductions rationnelles les fervents enthousiasmes de l'amour, Anselme traduit ces idées en ce cri où nous avons entendu vibrer toute son âme : O lumière suprême et inaccessible! O Vérité totale et bienheureuse! Combien tu es éloignée de ma vue, tandis que je suis si présent à la tienne! Tu es partout tout entière présente, et je ne te vois pas! Je suis en toi, et je ne puis m'élever jusqu'à toi! Tu es partout répandue, et je ne te sens point!

Cette interprétation n'est pas celle des ontologistes, sans doute! J'ose croire qu'elle est fondée en raison, et qu'elle seule est conforme à la doctrine générale de notre S. Docteur. Disons aussi qu'elle est en parfaite harmonie avec les vues d'Augustin, auquel Anselme a emprunté sa comparaison tant exploitée. « La raison qui te parle, dit le Docteur africain, promet de montrer Dieu à ton esprit, comme le soleil se montre à tes regards. Les sens de l'âme représentent les yeux de ton esprit : les principes évidents des sciences sont le symbole des *choses éclairées et rendues visibles par le soleil*, comme la terre et tout ce qui s'y trouve. Dieu est celui-là même qui éclaire. Et moi, la raison, je suis dans l'esprit, comme la faculté de voir est dans l'œil [1]. » Pour Augustin, Dieu est donc le soleil de l'âme, la lumière immédiatement présente à notre esprit. Mais les vérités absolues ne sont pas *un rayon directement perçu de l'astre :* elles ressemblent aux êtres qui reçoivent et réfléchissent son éclat; elles en sont essentiellement

[1] « Promittit enim ratio, quae tecum loquitur, ita se demonstraturam Deum » tuae menti, ut oculis sol demonstratur. Nam mentis quasi sunt oculi sensus » animae : *disciplinarum autem quaeque certissima* talia sunt quae sole » illustrantur ut videri possint, veluti terra et terrena omnia. Deus autem est » Ipse qui illustrat. Ego autem ratio ita sum in mentibus, ut in oculis sit » aspectus. (*Solil.*, I, c. VIII) — Voir sur tous ces points H. J. Kleutgen, S. J. *Philosophie der Vorzeit,* vol. II, p. 800 sqq , et la savante brochure du même écrivain : *De l'Ontologisme.*

distinctes. Elles sont aussi éloignées de Dieu, comme nous l'a déjà appris Augustin, « que le ciel est distant de la terre. » — Notre raison enfin, nos facultés aperceptives mues et dirigées par Dieu correspondent, dans la comparaison, à la puissance optique de l'œil, apte à discerner les objets, grâce aux ondulations du fluide éthéré qui lui sont immédiatement présentes. Augustin, en langage platonicien, explique ainsi sa comparaison. Mais en même temps le maître fait comprendre le disciple; ni l'un ni l'autre n'a cru à une vision directe de l'Essence absolue ou des exemplaires divins.

Nous devions ces éclaircissements à la théorie idéologique d'Anselme, à cause des querelles qu'elle a soulevées en ces dernières années. Pour notre compte, nous n'attachons qu'une fort médiocre importance à toute cette exégèse. Les Platoniciens de tous les temps ont un style trop affranchi de la précision scientifique, pour qu'il y ait grand profit à faire scrupuleusement l'anatomie de leurs paroles. Le lecteur s'en est déjà aperçu. Comme S. Augustin, Anselme mêle sans cesse les élévations mystiques à ses conceptions d'idéologie : presque jamais il ne sépare la spéculation pure des données de la révélation. Cela est surtout vrai de ses développements sur la connaissance de Dieu. A tout prendre, l'intuition des idées en Dieu ne s'est pas plus posée devant son esprit que l'induction péripatéticienne. A cette époque, pour un génie aussi large, aussi ardent, ces problèmes n'auraient eu qu'un médiocre intérêt. Même s'il avait vécu de nos jours, Anselme aurait souri quelque peu de l'effervescence qu'ils causèrent dans l'École. Il n'eût rien compris surtout à l'enthousiasme de ceux-là qui cherchent dans ses traités des armes pour la cause de l'ontologisme. Au-dessus des vues systématiques, il n'eut qu'un souci : celui de retracer les aspirations natives de l'âme vers Dieu, vers l'Infini, et le lien qui rattache l'esprit à l'éternel Moteur. Là-dessus même, il s'est plutôt livré à de fervents épanchements qu'à une exposition raisonnée. Quel embarras de saisir, parmi ces monologues émus, le sentiment de notre Docteur sur les conditions de la science de l'Absolu? C'est pour ces motifs que nous l'avons cherché surtout dans sa réponse à Gaunilon, et dans ses vues générales sur les preuves de l'existence de Dieu. Nous nous croyons en droit de résumer sa théorie à cet égard dans la sentencieuse formule du *Monologue* : « Il est évident qu'on ne peut rien connaître de cette suprême Nature par ce qu'elle est elle-même, mais seulement par autre chose [1]. »

La confusion que la théorie de l'intuition a introduite jusque dans les éléments de la science nous oblige à placer ici une dernière observation. Les Pères et les Docteurs mettaient dans le rapport des êtres créés et de l'esprit humain avec l'absolue Raison le puissant soutien de l'objectivité de nos connaissances : mais ils n'ont jamais prétendu, avec les faux mystiques, faire de l'idée de Dieu la base logique de l'Ontologie, de la Morale, de l'Idéologie surtout. Ils tenaient que l'esprit de l'homme, allant du connu à l'inconnu, s'élevant des créatures jusqu'à l'invisible Créateur, trouve avant tout dans l'évidence des premiers principes et dans les lois de ses facultés, la démonstration de la vérité. Nous l'avons entendu : Anselme lui-même n'a eu garde de méconnaître ce procédé. Avec Aristote, il met dans l'absolue nécessité des notions, dans l'évidence, le signe de leur légitimité, le dernier critère de la certitude. Au point de vue de la pure méthode, l'Idéologie et la Métaphysique peuvent être traitées à part de la Théodicée : elles ont leur objet et leur sphère propres; elles constituent des sciences distinctes, en un sens indépendantes. Elles possèdent dans la raison et la conscience leur règle, leur principe. Ceux qui nient d'une façon absolue la possibilité d'instituer la logique et la psychologie en dehors de l'*idée de Dieu*, s'exposent à plus d'un mécompte. Leur zèle intempérant assure au scepticisme un crédit dont ils ne triompheront qu'en se jetant dans le panthéisme. — La source de cette erreur prolongée est connue. Certains esprits s'obstinent à confondre l'ordre ontologique des questions avec leur ordre logique, la réalité avec la méthode. L'Absolue Essence est la suprême Raison et le Bien infini. Elle est la source supérieure de toute certitude. Pour être traitée d'une manière complète, la synthèse scientifique doit impliquer le rapport transcendant des intelligibles avec l'Intelligence première. Mais, comme le disait

[1] C. LXVI.

déjà Plotin, c'est là le couronnement, la fin du procès rationnel, non son commencement. L'esprit, en vertu de sa loi constitutive, monte de l'effet aux causes, de l'être individuel au principe universel, à Dieu. C'est seulement après avoir gravi ces degrés qu'il peut redescendre de Dieu aux créatures, et saisir dans toute leur splendeur ces rayons émanés de l'Infinie Pensée, donnant à tout ce qui existe sa raison, sa réalité, son éclat.

On le conçoit pourtant : la distinction de l'ordre réel d'avec l'ordre intelligible est tellement élémentaire qu'on ne peut exiger d'un philosophe qu'il l'expose en toute occurrence. Sans en contester la vérité, les Docteurs ne pouvaient, à chaque instant, mutiler à son profit, la démonstration complète du problème de la certitude. De là, en leurs plus nobles travaux, les considérations tirées des rapports de la raison créée avec l'Intelligence absolue. Leur idéologie est aussi élevée que féconde, mais elle présuppose des connaissances préliminaires, qu'ils ne pouvaient songer à rappeler sans cesse.

Comme plusieurs de ses contemporains, Anselme fut beaucoup plus écrivain que professeur. On ne s'étendait pas beaucoup, au moyen âge, sur les questions de méthode. La théodicée avait pénétré si fort la philosophie qu'on embrassait volontiers dans une même vue l'ordre ontologique et l'ordre idéal [1]. Il en était de la philosophie comme des rapports de l'Église et de l'État : on en pouvait parler avec une simplicité confiante à une époque où l'élément divin était le centre commun où convergaient toutes les

[1] Nous avions terminé notre travail, lorsque nous avons rencontré dans un livre de grand mérite d'un savant Italien l'expression des mêmes vues. Résumant le système du maître par excellence de la métaphysique chrétienne, S. Augustin, voici comment s'exprime S. A. Lepidi : « Animadvertendus » est processus Augustini in cognitione : ipse *psychologicus-theologicus* nobis » esse videtur . *Psychologicus* quidem *dum veritatem inquirit*, tunc enim a » cognitione rerum creatarum incipit, potissime vero a cognitione sui, et sic » gradatim, per lucem intellectivam quae est facultas animae, usque ad Deum » assurgit. *Theologicus* autem, *cum aliis scientiam tradit, ac de rebus judicat*, tunc enim animus, juxta S. Doctorem, *cognitione Dei informatus atque imbutus*, idealiter manens in Deo, tanquam in causa efficiente, exemplari, » fundamentali et ultima omnis entis et omnis veri, veluti e speculâ, sub illa

sciences, toutes les institutions. Les susceptibilités de la critique, et aussi les excès de quelques idéalistes, nous obligent désormais à mieux délimiter dés domaines distincts. Au fond, ne nous en plaignons pas! Cette exigence a donné à la science de la précision, sinon de l'élévation, de la profondeur. Or, pour être qualités secondaires, la clarté et la précision n'en sont pas moins indispensables en philosophie.

Par delà ces questions de détail, la noble Idéologie dont nous avons esquissé les principaux traits, ralliait chaque jour de nouveaux partisans.

Le Docteur de Sainte-Marie du Bec l'avait recommandée, avec le prestige de son autorité et de son orthodoxie, aux Maîtres des grandes Ecoles chrétiennes. S. Thomas d'Aquin, le plus influent des Docteurs, consacra ces vues en plusieurs endroits de ses œuvres. Voici comment il s'exprime dans son Opuscule sur le prétendu traité *de la Trinité* par Boèce : « Augustin dit très-bien dans son VIIIe livre sur la Génèse : L'air est éclairé par la présence de la lumière, et dès qu'elle se retire, il devient ténébreux. Ainsi notre esprit est illuminé par Dieu. C'est Dieu qui produit la lumière de la raison naturelle dans l'âme, non par une lumière différente en chacun, mais la même pour tous. Il n'est pas simplement la cause de leurs actes, mais aussi de leur être. *Dieu opère continuellement dans notre esprit*, en ce sens qu'il y produit la lumière naturelle et *qu'il la dirige lui-même*, et de cette façon, l'esprit ne passe point à son acte (de connaître) sans l'opération de la Cause première. . Par cela que Dieu nous donne et conserve

» luce de omnibus judicat, ac omnes docet. Hunc processum magni habuit
» Augustinus, eumque passim in suis operibus alteri anteponit. Et merito
» quidem; non enim decet sanctitatem scientiae creatae, quae est veluti purus
» radius divinae lucis, *a suo fonte* separari. In hujusmodi processu quoque
» immensitas Dei, ac nostra dependentia ab ipso in majori evidentia ponitur
» et instantius praedicatur. » — *De Ontologismo*, p. 219, Lovanii, 1874; c. I, pp. 303-304. Voir mon compte rendu de cet ouvrage, *Revue cath.*, nº de mars, 1874.—Voyez aussi sur ces points délicats, LEIBNITZ : *Lettre à M. Remond* dans le RECUEIL DE PIÈCES, t. II, p. 545, et le *Précis de philosophie* de M. Ch. BÉNARD, prof. au lycée Charlemagne, pp. 494, suiv. et pp. 596, suiv., 7e éd.; Paris, 1872.

en nous la lumière naturelle (de la raison) et la dirige afin qu'elle voie, il est manifeste que la perception de la vérité doit lui être attribuée principalement, de même que l'opération de l'ouvrier doit lui être attribuée plutôt qu'à l'art même [1]. » — C'est l'application du principe que le Docteur avait posé ailleurs : « Il n'est point besoin d'une nouvelle addition de lumière rationnelle pour la connaissance des vérités auxquelles s'étend d'elle-même la raison naturelle, mais bien d'une opération divine. Car, *à part* de l'acte par lequel Dieu a créé les êtres et a donné à chacun d'eux sa forme et la faculté de produire son opération propre, il opère encore dans les choses, par son *concours providentiel*, en *excitant* et en *dirigeant* les énergies de chaque être vers ses opérations propres [2]. » — Un interprète exact des Doctrines thomistes, H. J. Kleutgen, écrit très-justement qu'il n'est question dans ce passage que de la seule évolution *naturelle* de la connaissance.

Des vues analogues se rencontrent chez S. Bonaventure. A l'égal d'Anselme, le Docteur séraphique trouvait plus d'attrait dans l'élément ontologique de la connaissance que dans son côté psychologique. Il tient que « la Divinité est présente à l'âme par la vérité. » L'âme, image de Dieu, lui est immédiatement unie, et directement illuminée par Lui; Dieu

[1] « Sicut dicit Augustinus : Sicut aer illuminatur a lumine praesente, » quod si fuerit absens, continuo tenebratur; ita mens illustratur a Deo, et » *ita etiam lumen naturale semper Deus causat in anima*, non aliud et » aliud, *sed idem;* non enim est causa fieri ejus solum, sed etiam esse ipsius. » *In hoc ergo continuo Deus operatur in mente*, quod in ipsa *lumen naturale causat et ipsum dirigit*, et sic mens non sine operatione causae primae in suam operationem procedit... Hoc ipso quod Deus in nobis lumen » naturale *conservando causat, et ipsum dirigit* ad videndum, manifestum est » quod perceptio veritatis sibi praecipue adscribi debet; sicut operatio artificis magis adscribitur artifici quam arti. » (*Op.*, 70 sup. Boethii., *de Trinitate.*)

[2] « Quamvis non requiratur novi luminis additio ad cognitionem eorum ad » quae naturalis ratio se extendit, requiritur tamen divina operatio : praeter » operationem enim qua Deus naturas rerum instituit, singulis formas et virtutes proprias tribuens, quibus possent suas operationes exercere, operatur » etiam in rebus opera providentiae, omnium rerum virtutes ad actus proprios dirigendo et volendo. » (*Ibid.*)

est tout ensemble l'objet et la cause efficiente supérieure de la connaissance [1]. Il serait superflu de multiplier ces citations : il n'est pas un Docteur considérable du moyen âge qui n'ait développé des vues pareilles.

Après l'émotion causée par la Renaissance, la doctrine des rapports de la raison humaine avec l'Intelligence absolue redevient la question prépondérante en métaphysique. Tout le XVII^e siècle en est plein. Dans leurs impérissables livres, Descartes, Pascal, Bossuet, Fénélon, Leibnitz, Malebranche, Thomassin reprennent la théorie de l'exemplarisme, et l'appliquent à l'idéologie avec une ferveur qui chez l'un ou l'autre de ces beaux génies va jusqu'à l'exagération. Remarquable fait! Ce furent les grands mystiques de la

[1] « Intellectum autem propositionum tunc intellectus noster dicitur veraciter comprehendere, cum certitudinaliter scit illas veras esse, et hoc scire est scire quoniam non potest falli in illa comprehensione; sic enim scit *quod veritas illa non potest aliter se habere.* Scit *igitur* veritatem illam esse incommutabilem. Sed cum ipsa mens nostra sit commutabilis, illam sic incommutabiliter relucentem non potest videre, nisi per aliquem lucem omnino incommutabiliter radiantem, quam impossibile est esse creaturam mutabilem. Scit igitur in illa luce quae illuminat omnem hominem venientem in hunc mundum, quae est lux vera et Verbum in principio apud Deum. — Intellectum autem illationis tunc veraciter percipit noster intellectus, quando videt quod conclusio necessario sequitur ex praemissis, quod non solum videt in terminis necessariis, verum etiam in contingentibus, ut *si* homo currit, homo movetur. Hanc autem necessariam habitudinem percipit non solum in rebus entibus, verum etiam in non entibus. Sicut enim in homine existente sequitur : Si homo currit, homo movetur, sic, etiam non existente. Hujusmodi igitur illationis necessitas non venit ab existentia rei in materia, quia est contingens, nec ab existentia rei in anima, quia tunc esset fictio, si non esset in re. Venit igitur ab exemplaritate in arte aeterna, secundum quam res habent aptitudinem et habitudinem ad invicem, ad illius aeternae artis repraesentationem. — Omnis igitur, ut dicit Augustinus in libro de *vera Religione*, vere ratiocinantis lumen accenditur ab illa Veritate et ad illam pervenit. Ex quo manifeste apparet, quod conjunctus sit intellectus noster ipsi aeternae Veritati; dum nisi per illum docentem nihil verum potest certitudinaliter capere. Videre igitur per te potes veritatem quae te docet, si te concupiscentiae et phantasmata non impediant, et se tanquam nubes inter te et veritatis radium non interponant. » (*Itin.*, c. III.)

fin du XVI[e] siècle qui préparèrent ce mouvement. En s'unissant à l'Infini dans l'extase du céleste amour et des contemplations sacrées, l'esprit humain crut avoir retrouvé la vivante philosophie. Aux argumentations abstraites se substituèrent des preuves où la raison, le cœur, l'imagination et le sentiment reconnurent une persuasion, un charme suprêmes. Ce fut un progrès. Par malheur, les préjugés contre l'École, accrédités par les Cartésiens et les partisans de Malebranche, furent cause qu'on négligea parfois d'apporter, dans le plus délicat problème de la science, l'exactitude et la mesure. Tandis que, sans trop s'en douter, l'on reproduisait les plus chères théories des Scolastiques, quelques écrivains oublièrent trop la réserve de leur langage. Ils voulaient des démonstrations plus réelles, plus complètes. Ils en trouvèrent de fort éloquentes, mais elles furent formulées dans un style qui en compromit la précision. Sans doute, les premiers d'entre ces hommes illustres gardèrent dans leur supériorité même un préservatif contre un semblable écart. Bossuet parle de l'élément supérieur de la connaissance comme Augustin et Anselme. « L'homme ne pourrait dominer le monde, s'écrie-t-il dans un passage qui résume toute son idéologie, s'il ne tenait à Dieu, créateur du monde; s'il n'avait en lui-même, dans quelque partie de son être, quelque art dérivé de ce premier art, quelques fécondes idées tirées de ces idées originales, en un mot, quelque ressemblance, quelque écoulement, quelque portion de cet Esprit ouvrier qui a fait le monde. Oui, il y a au-dedans de nous une divine clarté : un rayon de votre face, ô Seigneur, s'est imprimé dans nos âmes. C'est là... la première Raison qui se montre à nous *par son image* [1]. » Comme Augustin, Bonaventure, Thomas d'Aquin, il proclame que l'âme humaine imparfaite et bornée ne pourrait saisir l'immuable au sein des phénomènes éphémères qu'à condition « de se tourner à Celui qui est immuablement toute vérité. » Il s'écrie : « C'est dans cet Éternel que les vérités éternelles subsistent; c'est là aussi que je les vois. Ainsi nous

[1] *Sermon sur la mort*, p. 210. — Ap. Gratry, *De la connaissance de Dieu*, II, p. 64.

les voyons dans une lumière supérieure à nous-mêmes. » Mais lui-même nous explique ces paroles : « Il faut donc entendre, dit-il, que l'âme *faite à l'image de Dieu*, capable d'entendre la vérité qui est Dieu même, se tourne actuellement vers son original, c'est-à-dire vers Dieu, où la vérité lui paraît, autant que Dieu veut la lui faire paraître..... Il est certain que Dieu est la raison primitive de tout ce qui est et de tout ce qui s'entend dans l'univers : qu'il est la vérité originale, et que tout est vrai par rapport à son idée originelle [1]. » N'est-ce pas l'enseignement traditionnel sur le rapport de l'esprit créé avec la Raison absolue se révélant à l'âme dans les lois qu'elle lui a données? — Fénélon ne parle pas autrement : « C'est la lumière de Dieu, dit-il, qui nous découvre les objets..... Nous ne pouvons rien juger que par elle. Cette connaissance même des individus où Dieu n'est pas l'objet immédiat de ma pensée ne peut se faire qu'autant que Dieu donne à cette créature l'intelligibilité et à moi l'intelligence actuelle. C'est donc à la lumière de Dieu que je vois tout ce qui peut être vu actuellement [2]. » Il est vrai, le célèbre évêque de Cambrai écrit ailleurs que « le même Dieu qui me fait penser n'est pas seulement la cause qui me fait penser, il en est encore l'objet immédiat... Tout ce qui est vérité universelle et abstraite est une idée. Tout ce qui est une idée est Dieu même [3]. » Mais nous ne pouvons voir autre chose dans ces paroles que la vive expression de la pensée qui possède tout entier Fénélon : que les idées et les essences universelles, considérées dans leur suprême raison, sont la représentation des idées divines, et qu'ainsi elles nous mènent jusqu'à l'Absolu lui-même. L'idée de l'Infini elle-même n'est à ses yeux qu'une « image, » non une vue directe [4]. — Il n'en demeure pas moins vrai que la préoccupation trop exclusive du facteur trans-

[1] *Connaissance de Dieu et de soi-même*, c. IV, pp. 5-9.

[2] *Traité de l'existence de Dieu*, II, c. IV, n° 58.

[3] *Ibid.*, n° 50.

[4] Voir là-dessus l'étude du P. Gratry sur Fénélon, dans l'ouvrage cité, I, p. 120. L'éloquent académicien y établit avec bonheur la différence de l'idéologie du XVII[e] siècle avec ce qu'il appelle « l'éblouissement » de Malebranche.

cendant de la connaissance a porté quelque ombre dans la métaphysique de l'éminent Cartésien : il n'a pas rappelé assez ce que les Scolastiques ont tant de fois répété : que l'Absolu n'est que le fondement des Idées de la raison, et qu'Il en est lui-même aussi distinct que « la terre l'est du ciel, » pour parler avec S. Augustin.

Ce fut Malebranche qui le premier érigea la confusion en système. « Malebranche, dit le P. Gratry, confond deux vérités. Malebranche croit que notre idée naturelle de Dieu est la vue de Dieu même, directe, immédiate. Selon lui, la vue des créatures et la vue de notre âme ne sont qu'une vue de Dieu : nous ne voyons alors que Dieu qui opère en nous, à l'occasion de notre âme et du monde, les impressions, les sensations, les sentiments, que nous attribuons au monde et à notre âme. Malebranche ne dit pas comme S. Paul : « Nous voyons Dieu par les créatures, » il dit l'inverse : « Nous voyons les créatures par Dieu. » Il paraît oublier ce texte évangélique : « Nul homme n'a jamais vu Dieu. » Et de fait, avons-nous, tels que nous sommes et naissons en ce monde, la vue directe et immédiate de Dieu ? Qui le croira ? Mais on comprend S. Paul; on comprend qu'en voyant la nature et notre âme, et toute la création, nous avons réellement une certaine vue indirecte et implicite de Dieu, puisqu'il est la lumière qui nous éclaire et sans laquelle rien ne serait visible [1]. » Sans l'avoir voulu, Malebranche altéra pour des siècles la pureté de la tradition métaphysique. Une foule d'esprits d'élite s'éprirent de son rêve grandiose. Leibnitz et Gerdil, tout en le ramenant à une meilleure forme, ne parvinrent pas toujours à resaisir, parmi ce brillant mirage, la sévère réalité. Au lieu de tant plaisanter à propos des Scolastiques, l'on aurait fait sagement d'imiter leur exactitude, et de chercher dans leur idéologie la grandeur et la beauté esthétique qui s'y trouvent, malgré la sécheresse des formes et l'austérité des détails.

Mais ce qu'il faut admirer dans l'incomparable sénat des philosophes du XVII[e] siècle, c'est l'unanimité avec laquelle ils signalent dans la Raison infinie la source et la règle supérieure de la science humaine. On l'a écrit avec justesse : les dissentiments partiels s'ef-

[1] Ouv. cit., I, p. 418. — Cf. R. P. De Decker, *Cours de psychologie*, IV, n° 284.

facent dans l'unité de la grande vue, à laquelle ils se rallient avec un tel éclat.

Nous sera-t-il permis de le dire? La doctrine de la connaissance où les Scolastiques unirent les plus nobles éléments du péripatétisme et du platonisme augustinien nous apparaît comme la vue la plus élevée de l'Idéologie; elle consacre et explique l'élément nécessaire, absolu des perceptions intelligibles, tout en sauvegardant la distinction essentielle de l'Intelligence absolue et de la raison créée. Cet enseignement séculaire s'impose avec tant d'autorité à l'esprit, que les écoles mêmes qui s'en séparent lui ont rendu plus d'une fois d'involontaires hommages. Sous ce rapport rien de plus instructif que de rappeler, dans l'histoire du panthéisme rationaliste, les quelques traits qui touchent notre sujet.

A quel principe Fichte ramène-t-il son système? — Il tient que l'Être dépend de l'Idée; que le *moi* et le *non-moi* sont corrélatifs et inséparables. Le *moi pur* (die reine Form der Ichheit) est l'identité du *moi* et du *non-moi*. Il implique avant tout l'*aperception* du moi ou du principe conscient considéré dans l'ensemble de ses déterminations. L'*Idée absolue* est Dieu : elle est la seule Essence réelle, engendrant *par sa pensée* l'univers ou le *non-moi*. Schelling est plus formel. Il remarque que nous portons tous en nous la faculté, la tendance de déduire l'universel du particulier, et de construire un monde intelligible sur le type du monde matériel. En quoi consiste la philosophie transcendentale? A considérer la *nature* comme la copie de l'*Esprit;* à expliquer l'univers par les lois que nous révèle notre propre personnalité, en laquelle la *nature* arrive à la conscience de soi. Chaque être est un organisme, en ce sens qu'il est l'expression d'une âme, d'un principe intelligent qui l'anime et l'actualise. L'être le plus accompli est celui qui se comprend; celui qui, posant en soi-même la synthèse de la nature et de l'esprit, s'atteint comme *la pensée de sa pensée*. Ainsi l'idée et la réalité, le *non-moi* et le *moi* sont au fond identiques. La science parfaite sera celle qui ramènera complétement la nature au principe idéal dont elle est le produit. L'Absolu n'est que la somme de toutes les intelligences et de tous les organismes qui leur correspondent. Il est ainsi « la totale indifférence du subjectif et de l'objectif, » « le Dieu idéal. »

Nous trouvons chez Hégel plus d'une considération analogue. Lui aussi part du *moi* comme du fondement de toute philosophie. Mais il veut qu'on l'interprète suivant les règles du *procès dialectique*. Son premier principe est l'Être pur, indéterminé, qu'il égale lui-même au néant actuel. Seulement, sous cette absolue indétermination, il y a un germe de développement : *la loi du devenir*. Cette loi, en se réalisant, engendre les êtres multiples de l'univers. Les déterminations des êtres sont calquées *sur les phases de l'idée dialectique*. En vertu de cette incessante progression, chaque être est à la fois *lui-même* et *un autre*. Son essence actuelle se fixe par l'aperception et la conscience, grâce auxquelles il se pose lui-même en sa réalité concrète, et distingue dans l'évolution universelle le moment qui *lui* correspond. La *progression dialectique, idéale des êtres finis* est le point culminant de toute philosophie, et voilà pourquoi celle-ci est nécessairement *idéaliste*. Elle résout, à en croire Hégel, l'opposition de la réalité finie et de l'intelligibilité infinie [1]. — Qui n'aperçoit que le *moi pur* de Fichte, l'*âme du monde* de Schelling, le *procès dialectique* de Hégel ne sont qu'un travestissement de l'exemplarisme et de la doctrine des Idées? La théorie française de la *Raison impersonnelle* ou de l'Intelligence absolue se communiquant du dehors aux esprits créés n'a été à son tour qu'un compromis spécieux entre l'idéologie panthéistique et celle des Scolastiques [2]. L'illustre chef de l'école éclectique essaya-t-il d'être original, en se séparant presque également de ces deux méthodes? Ce qu'il pouvait ignorer moins que personne, c'est qu'il ne faisait que renouveler le système d'Averroës. — L'erreur de tous ces philosophes a été précisément de transporter à la conscience humaine, et par elle aux êtres du monde inférieur, les attributs de l'Intelligence absolue, source et règle des êtres. De là leurs théories contradic-

[1] Cf. *Dict. des sciences philosophiques*, t. I, art. Philosophie allemande.

[2] Cf. Cousin, *Cours de l'hist. de la philos.*, 1828, leç. 4e. — M. Bouillier, *Théorie de la raison impersonnelle*, c. I, etc.

toires du *moi* posant le *non-moi* avec ses formes progressives; de l'*idée* et de l'*Esprit* confondus avec la *réalité* et la *nature*. Erreurs étonnantes, sans contredit, mais pleines d'un grand enseignement : elles démontrent, de par l'histoire, la nécessité d'établir un rapport de causalité et de ressemblance, une harmonie profonde entre la raison bornée de l'homme et l'infinie Intelligence; elles prouvent, en même temps, qu'à moins de faire, avec Krause, de l'esprit humain l'organe ou la détermination particulière de Dieu [1], il faut accepter l'Absolu comme un Être vivant et personnel, comme l'infinie Essence et l'infinie Raison, possédant en l'unité de son éternelle pensée les types intelligibles des choses susceptibles d'imiter, à quelque degré, son être et ses perfections.

La philosophie spiritualiste revient chaque jour davantage à l'Idéologie féconde du passé. En notre siècle, nul ne l'a interprétée avec des vues plus larges, et n'y a mieux montré le fondement de l'objectivité de nos idées que Balmès. Ce sera résumer de la meilleure manière ce chapitre que de rappeler ses paroles. « La certitude, dit-il, préexiste à tout examen, mais elle n'est pas aveugle. Elle naît ou de la clarté de la vision intellectuelle, ou d'un instinct conforme à la raison. Dans le raisonnement, notre esprit arrive à la vérité par l'enchaînement des propositions, c'est-à-dire, à l'aide d'une lumière qui se réfléchit d'une vérité à l'autre. Dans la certitude primitive, la lumière est directe, la vision se nomme *évidence* et n'a pas besoin de réflexion. Ainsi la certitude dont nous constatons l'existence n'est pas un phénomène obscur; loin de vouloir éteindre la lumière à son foyer, nous affirmons qu'elle y est plus brillante que dans ses rayonnements. Le soleil éclaire le monde; si l'on nous demande d'expliquer la nature de ses rapports avec le reste du monde, nierons-nous le soleil [2]? » Le philosophe castillan ajoute ailleurs ces paroles qu'on dirait une réminiscence d'Anselme : « L'homme,

[1] On sait que c'est là le fond du système de Krause. Cf. *System der Philosophie*, pp. 454 et suiv. —Voir aussi le mémoire de M. Tiberghien, *Dissertation sur la théorie de l'Infini*, p. 127 et *passim*. C'est le plus remarquable manifeste du système de Krause.

[2] *Phil. fond.*, c. II, pp. 20-23. Trad. Manec, Liége, Lardinois.

disent les Livres saints, a été créé à l'image de Dieu. Vérité pleine de lumières, dans l'ordre philosophique comme dans l'ordre surnaturel. Nous trouvons dans notre âme, *reflet de l'intelligence infinie,* non-seulement des idées générales qui nous aident à franchir les limites du monde sensible, mais une représentation merveilleuse, dans laquelle, comme dans un miroir, nous voyons passer l'ombre de cet océan sans rivages, dont l'intuition immédiate n'est pas de ce monde; représentation imparfaite, énigmatique, mais vraie.... [1]. *L'objectivité de nos idées,* les rapports nécessaires que nous percevons dans l'ordre possible, rendent manifeste une communication vitale entre notre esprit et l'intelligence incréée, principe et fondement de toute possibilité. Le possible pur n'est pas explicable, si l'on n'admet cette communication. C'est l'action même de Dieu, donnant à notre esprit les facultés en vertu desquelles il perçoit le rapport nécessaire que certaines idées ont entre elles, rapport dont le fondement est l'Être absolu dont l'image ou le type se trouve dans l'Essence infinie elle-même... Ce point de vue est élevé, dit encore Balmès, mais il est le seul vrai; s'en écarter, c'est cesser de voir; les mots perdent leur signification : phénomène étrange, mais consolant! Dans le temps même que l'homme oublie Dieu, qu'il le nie peut-être, Dieu rayonne dans son intelligence, dans ses idées, dans tout ce qu'il est, dans tout ce qu'il pense. C'est de Dieu qu'il tient la force de perception : *la Vérité objective repose sur Dieu même :* l'homme ne peut affirmer une vérité qui n'ait en Dieu sa représentation. Cette communication du fini avec l'Infini est une des vérités les plus certaines de la Métaphysique [2]. » — Ajoutons seulement que ce fut Anselme de Cantorbéry qui, le premier, dans ses applications les plus fécondes, signala cette haute doctrine aux Maîtres du moyen âge. Tous les grands Docteurs l'illustrèrent sans doute. Mais il eut l'honneur de leur ouvrir la voie; et c'est justice de reconnaître, jusque dans la philosophie séparée, la trace du mouvement intellectuel inauguré

[1] *Phil. fond.*, II, p. 218.

[2] *Ibid.*, II, p. 231.

par le métaphysicien de Sainte-Marie du Bec. Que l'on songe à l'état où il avait trouvé la science; après cela, quelques réserves qu'on fasse sur sa méthode et sur ses idées, on pourra juger déjà de la place qui lui appartient dans l'histoire de la pensée.

Il est impossible de ne pas être frappé de l'unité qui se manifeste, sur tous les points essentiels, dans l'expression que les plus nobles esprits ont donnée à ces théories si élevées et si simples. A part quelques conceptions plus poétiques que rigoureuses, la méthode analytique et progressive, allant des signes aux choses, et du relatif à l'Absolu, mais trouvant dans l'Absolu sa règle et sa fin, a paru à tous les siècles la forme naturelle de la science spéculative. Cet unanime sentiment des hommes doit être vrai! L'art antique, avec son sens exquis de la réalité, avait admirablement personnifié cette connaissance humaine des choses divines. On sait comment Phidias, disciple d'Anaxagore, a représenté Pallas-Athéné, la Sagesse céleste. L'Immortelle est debout, dans l'attitude du recueillement et de la réflexion. Mais son visage ne se montre pas entièrement à découvert : il est en partie caché sous un casque. Seulement, sur le cimier est couché un sphinx, et aux deux côtés de la visière se dressent les griffons de la Déesse. Frappant symbole de la suprême Intelligence apparaissant dans le monde des phénomènes! L'œil de l'esprit ne saurait la contempler ici-bas. Il l'entrevoit derrière le voile des apparences, sous les emblèmes créés qui portent son empreinte; il la pressent dans ses aspirations vers la Vérité immuable et l'idéale Beauté. Ainsi dans le chef-d'œuvre de Phidias, on devinait la divine figure de Minerve, fille de Jupiter, à la vue des génies et du sphinx sacré, plongeant dans l'espace sans bornes son regard d'une mélancolie éternelle.

§ 2.

De la connaissance dans ses éléments préliminaires. — Idées-images. — Sources et critique.

Dans les pages qui précèdent, nous avons parlé uniquement de la Métaphysique et de l'Idéologie d'Anselme de Cantorbéry. C'est le côté prépondérant, je devrais dire exclusif, de sa théorie de la connaissance. Mais pour n'en négliger aucune partie, il faut recueillir dans ses œuvres les rares passages où il touche à la psychologie. Cette série de considérations est d'une aridité singulière, mais elle constitue l'appendice naturel de sa Métaphysique. A ses yeux, celle-ci constitue l'élément supérieur et spéculatif de la connaissance : elle est la science des notions générales, des Idées absolues et du rapport des êtres de la nature avec la suprême Raison. — Ses observations psychologiques portent sur la nature même de l'âme et sur le procédé par lequel l'esprit réfléchit en soi les phénomènes, le monde externe et sa propre réalité. Autant que le comportait le XI^e siècle, c'est la science expérimentale, la psychologie élémentaire.

« Lorsqu'on compare, dit M. de Rémusat dans ses études sur Abélard, la philosophie du moyen âge et la philosophie moderne, une première différence frappe les regards. L'une paraît presque étrangère à l'étude des facultés de l'âme, à laquelle l'autre semble consacrée. En d'autres termes, la psychologie passe pour une découverte des derniers siècles. C'est en effet une vérité incontestable, que depuis deux cents ans l'étude de l'esprit humain est devenue la condition préalable, la base, le flambeau, le premier pas de la science; toutes ces métaphores sont justes. Mais c'est surtout cette importance, c'est ce rôle de la psychologie dans la philosophie qui peut s'appeler une découverte moderne; et l'on ne saurait prétendre d'une manière absolue qu'à aucune époque l'homme ait entièrement renoncé à s'observer lui-même, ou du moins à se faire un système quelconque sur sa nature intérieure et sur ses moyens de connaître. Il y a donc eu toujours une certaine psychologie [1]. »

Appliquées au XIII[e] siècle, l'époque classique de la Scolastique, les paroles de M. de Rémusat seraient trouvées exagérées. Elles sont exactes en ce qui concerne le temps d'Abélard ; elles le sont encore plus, lorsqu'on les rapporte à Anselme et à son siècle. Notre Docteur paraît avoir cultivé la psychologie plus que les maîtres contemporains. C'est le renseignement qu'à travers ses confuses explications nous transmet Guibert, abbé de Notre-Dame de Boquet-sous-Coucy, qui avait beaucoup conversé avec l'Abbé du Bec dans les visites que celui-ci faisait au monastère de Flavigny. « Anselme, dit Guibert, m'enseignant à distinguer dans l'esprit de l'homme certaines facultés, et à considérer les éléments de tout mystère intérieur, sous le quadruple rapport de la sensibilité, de la volonté, de la raison et de l'intelligence, me démontrait, après avoir établi ces divisions dans ce que d'ordinaire nous considérons comme une seule et même chose, que les deux premières facultés ne sont nullement les mêmes, et que cependant, si l'on y réunit la troisième et la quatrième, il est certain, par des arguments évidents, qu'elles forment à elles toutes un ensemble unique [2]. » Ainsi, non-seulement Anselme distinguait et classifiait les facultés d'une manière remarquable pour son époque ; il la devançait une seconde fois en marquant leur unité organique. — Mais demandons-lui les renseignements que renferment ses œuvres sur la psychologie, telle qu'on l'entendait en son temps. Si graves qu'ils soient, ils sont formulés dans la forme un peu ondoyante que nous avons coutume de trouver chez les platoniciens.

Selon S. Anselme l'âme est une substance spirituelle, s'élevant *d'instinct* aux choses supérieures, et par-dessus tout le reste, à la sagesse, à l'Infini, son Principe et sa Fin. Elle anime chacun des membres du corps : c'est d'elle qu'ils reçoivent leur sensibilité, leur force. Elle est présente dans toute son intégrité

[1] *Abélard*, I, p. 485.

[2] Guitbertus, *De vita sua*, dans le *Dict. des sc. phil.*, art. S. Anselme.

à chaque organe comme à tout le corps. Les facultés diverses sont autant d'instruments de l'âme, doués chacune d'énergies différentes [1]. La Mémoire, pour Anselme, est tout ensemble la conscience de soi et le souvenir des idées et des faits (*Bewusstseien* des Allemands). Ce n'est qu'en ce sens, plus large que l'acception moderne du mot, qu'on peut bien entendre les paroles du chapitre XLVIII du Monologue : « L'âme humaine se souvient toujours de soi ; » et celles-ci : « Son Verbe (sa connaissance de soi) naît de sa Mémoire [2]. » — La Mémoire, dans l'explication analogique de la S^te^ Trinité, représente, d'après notre Docteur, Dieu le Père, Principe conscient des deux autres personnes divines. Cette assimilation n'est exacte que si l'on prend la Mémoire pour la conscience de soi, première condition des opérations réfléchies et délibérées de l'homme [3]. — La Raison et la Volonté sont considérées par An-

[1] « Constat autem homo ex duabus naturis, ex natura animae, et ex natura » carnis. Natura autem animae, quia anima spiritualis est, *naturaliter tendit* » *ad superiora.* » (*Med.* XIX, p. 238.) — « ... Rationalis creatura nihil tantum » debet studere, quam hanc imaginem (Dei) sibi per naturalem potentiam im- » pressam per voluntarium effectum exprimere... Nihil igitur apertius quam » rationalem creaturam ad hoc esse factam, ut summam essentiam amet » super omnia bona, sicut ipsa est summum bonum. » (*Mon.*, c. LXVIII.) — « Si enim non esset anima tota in singulis membris sui corporis, non sen- » tiret tota in singulis. » (*Prosl.*, c. XIII.) — « Sicut habemus in corpore » membra et quinque sensus... ita et anima habet in se quasdam vires, quibus » utitur velut instrumentis ad usus congruos. Est namque ratio in anima, » qua sicut suo instrumento utitur ad ratiocinandum ; et voluntas qua utitur » ad volendum. » (*De conc. Grat. et lib. arb.*, c. XI.)

[2] « Semper sui meminit (anima). » *Mon.*, c. XLXVI.

[3] *Mon.*, c. XLVII-XLVIII, etc. — « De memoria vero quid sentiendum » est ? An aestimandus est Filius intelligentia memoriae, sive memoria Patris. » aut memoria memoriae ? Equidem cum summa sapientia sui memor esse » negari non possit, nihil competentius quam in memoria Pater, sicut in » Verbo filius intelligitur; *quoniam de memoria nasci verbum videtur.* » Quod clarius in nostra mente percipitur. Quoniam namque mens humana » non semper se cogitat, *sicut sui semper meminit*, liquet, cum se cogitat, » quod verbum ejus nascitur de memoria. Unde apparet quia, si semper se » cogitaret, semper verbum ejus de memoria nasceretur. Rem etenim cogi- » tare, cujus memoriam habemus, hoc est mente eam dicere; verbum vero » rei est ipsa cogitatio ad ejus similitudinem ex memoria formata. Hinc

selme comme des instruments de l'âme, au même titre que la Mémoire : elles en représentent non l'essence entière, mais des fonctions spéciales. Dans chacune de ces facultés, notre Docteur distingue sa nature et l'usage qu'on en fait.

S. Anselme ne s'est pas exprimé directement sur la nature générale de la perception. Au chapitre 33 du Monologue, il compare l'ineffable génération du Fils de Dieu avec la production du verbe ou de la pensée de l'homme. « Peut-on nier, dit-il, à propos de la conscience réflexe, que lorsque l'âme se conçoit en se pensant, il ne naisse dans sa pensée une image d'elle-même, ou plutôt que sa pensée elle-même ne soit son image, formée à sa ressemblance et comme par son impression. *Quelle que soit la chose que l'esprit veuille penser*, soit par l'imagination sensible, soit par la raison, il s'efforce d'en reproduire, autant qu'il en est capable, la *ressemblance* dans sa pensée. Plus fidèle est cette ressemblance, plus vraie aussi est la pensée. Cela se comprend plus clairement, ajoute Anselme avec un tact supérieur à son siècle, lorsque la pensée se porte sur un objet différent de l'âme elle-même, notamment lorsqu'elle a pour terme un corps. N'est-il pas vrai que lorsque je pense à un homme connu, mais absent, la fine pointe de mon esprit se transforme en une ressemblance de lui, telle que sa vue l'a imprimée en ma mémoire? Cette ressemblance, cette image dans ma pensée est le Verbe de cet homme : je parle ce Verbe, quand je pense à lui [1]. » — Il s'était exprimé ailleurs dans le même sens :

» itaque liquido animadverti potest de summa Sapientia, quae sic semper se
» cogitat sicut semper sui memor est, quia de aeterna memoria ejus coaeter-
» num Verbum nascitur. »

[1] « Nulla ratione negari potest, cum mens rationalis seipsum cogitando
» intelligit, imaginem ipsius nasci in sua cogitatione, imo ipsam cogitationem
» sui esse suam *imaginem*, ad sui similitudinem tanquam ex ejus impressione
» formatam. Quamcumque enim rem mens, seu per corporis imaginationem,
» seu per rationem cupit veraciter cogitare, ejus ubique similitudinem, quan-
» tum valet, in ipsa sua cogitatione conatur exprimere. Quod quanto verius
» facit, tanto verius rem ispam cogitat; et hoc quidem, cum cogitat aliquid
» aliud quod ipsa non est, et maxime cum aliquod cogitat corpus, clarius
» perspicitur. Cum enim cogito notum mihi hominem absentem, formatur
» acies cogitationis meae in talem imaginem ejus, qualem illam per visum

« Par le langage intérieur de l'esprit et de la raison, dit-il, j'entends non le cas où l'on pense les *mots* qui expriment les choses, mais celui où l'on représente, par la force de la pensée, *les choses elles-mêmes,* soit futures, soit déjà existantes. » Une expérience fréquente nous apprend que nous pouvons parler la même chose de trois manières différentes. Ou nous exprimons les objets par des signes sensibles, c'est-à-dire qui sont saisis par les sens corporels, et alors nous agissons selon la sensibilité physique : ou nous représentons à notre pensée, d'une manière non sensible, ces signes au dehors ; ou enfin, nous n'usons de ces signes, ni d'une manière sensible, ni d'une manière non sensible ; mais nous représentons les choses intérieurement dans notre esprit, ou par l'imagination qui reproduit les formes corporelles, ou par l'intelligence, selon la diversité de ces objets. Je parle *l'homme* d'une manière différente, lorsque je l'exprime en prononçant ce mot *Homme ;* différente, lorsque sans le prononcer, je pense au même mot ; différente encore, lorsque mon esprit se représente cet homme, soit en reproduisant l'image de son corps, soit en songeant à sa raison. En reproduisant l'image de son corps, je me représente sa forme sensible ; en songeant à sa raison, je songe à son essence universelle, essence en vertu de laquelle il est un *animal raisonnable mortel.* Ces trois manières de parler ont leurs diverses expressions. Mais les signes de celle que j'ai placée la troisième et la dernière, n'étant point empruntés à des choses qu'on peut ignorer, sont naturels et les mêmes chez toutes les nations... On peut dire avec raison de ces signes qu'ils sont d'autant plus vrais qu'ils sont plus semblables aux choses dont ils sont *les paroles* (*les Verbes*), et qu'ils les expriment plus exactement [1]. « Comme l'âme de l'homme ne *se pense* pas tou-

» oculorum in memoriam attraxi; quae imago in cogitatione verbum est ejus-
» dem hominis, quem cogitando dico Habet igitur mens rationalis, cum se
» cogitando intelligit, secum imaginem suam ex se natam, id est cogitationem
» sui ad similitudinem suam quasi sua impressione formatam, quamvis ipsa
» se a sua imagine non nisi ratione sola separare possit, *quae imago ejus ver-*
» *bum ejus est.* » (C. XXXIII.)

[1] « Mentis autem sive rationis locutionem hic intelligo, non cum voces

jours, mais qu'elle *se souvient* toujours d'elle-même, il est clair que lorsqu'elle se pense, le Verbe *naît de sa mémoire;* d'où il suit que, si elle se pensait toujours, son Verbe naîtrait toujours de sa mémoire, puisque penser une chose dont nous avons la mémoire, c'est la dire dans notre esprit; et que le Verbe de cette chose n'est que la pensée même formée par la mémoire à la ressemblance de la chose [1]. — Disons en passant que M. Bouchitté, le traducteur élégant du *Monologue,* s'étonne de ce qu'en ce passage un penseur aussi exercé qu'Anselme admette en Dieu *un passé,* puisqu'il parle de *sa mémoire.* Mais le Dr Tennemann avertit avec raison qu'en ce texte la *Mémoire* implique la *conscience de soi.*

Les textes que nous avons rapportés sont les seuls où Anselme

» rerum significativae cogitantur, sed cum res ipsae, vel futurae vel jam
» existentes, acie cogitationis in mente conspiciuntur. Frequenti namque usu
» cognoscitur, quia rem unam tripliciter loqui possumus. Aut enim res loqui-
» mur signis sensibilibus, id est, quae sensibus corporeis sentiri possunt,
» sensibiliter utendo; aut eadem signa, quae foris sensibilia sunt, intra nos
» insensibiliter cogitando; aut nec sensibiliter nec insensibiliter his signis
» utendo, sed ipsas res vel corporum imaginatione vel rationis intellectu, pro
» rerum ipsarum diversitate, intus in nostra mente dicendo. Aliter namque
» hominem dico, cum eum hoc nomine, quod est homo, significo; aliter cum
» idem nomen tacitus cogito; aliter cum eum ipsum hominem mens, aut per
» corporis imaginem, aut per rationem intuetur : per corporis quidem imagi-
» nem, ut cum ejus sensibilem figuram imaginatur; per rationem vero, ut
» cum ejus universalem essentiam, quae est animal rationale mortale, cogitat.
» Hae vero tres loquendi varietates singulae verbis sui generis constant;
» sed illius, quam tertiam et ultimam posui, locutionis verba, cum de rebus
» non ignoratis sunt, naturalia sunt, et apud omnes gentes sunt eadem. Et
» quoniam omnia alia verba propter haec sunt inventa, ubi ista sunt, nullum
» aliud verbum est necessarium ad rem cognoscendam, et ubi ista esse non
» possunt, nullum aliud est utile ad rem ostendendam. Possunt etiam non
» absurde dici tanto veriora quanto magis rebus, quarum sunt verba, similia
» sunt et eas expressius significant. »

[1] « Quoniam namque mens humana non semper se cogitat, sicut sui semper
» meminit, liquet cum se cogitat, semper verbum ejus de memoria nascere-
» tur. Rem etenim cogitare, cujus memoriam habemus, hoc ut est mente
» eam dicere; verbum vero rei est ipsa cogitatio ad ejus similitudinem ex
» memoria formata. » (*Mon.*, c. XLVIII.)

décrit ou plutôt esquisse la formation des concepts directs. — Disons tout de suite que ses explications se retrouvent chez quelques-uns de ses devanciers et qu'elles sont manifestement inspirées par le Traité *de la Trinité*, de S. Augustin, que lui-même nous a indiqué comme la principale source de ses écrits. La distinction des facultés de l'âme, tirée de leurs *opérations propres* est indiqué déjà par Alcuin, Rhaban Maur et Gerbert. Ne semble-t-il pas que le commentaire du célèbre maître d'Aurillac : *de Rationali et ratione uti*, où il distingue entre l'application de la raison et sa nature, ait été connu d'Anselme? Ce qui est certain, c'est que sa doctrine de l'âme est tirée presque en entier des œuvres d'Augustin, principalement des X et XI[es] chapitres du Traité *de la Trinité*. Comme Anselme, le Docteur d'Hippone regarde l'âme comme le principe vivificateur du corps, la cause de son unité organique [1]. Elle est immédiatement présente à tout le corps et à chaque partie en particulier, et se perçoit *elle-même* en chaque sensation [2]. Elle s'atteint également dans ses actes rationnels, avec conscience et une entière certitude. Les sens ne sont que ses organes [3]. Curieux détail! Augustin

[1] « In quolibet animante magna et mirabilis animae vis est, quae illam » compagem (corpoream) ineffabili permixtione vitaliter continet, et in quam » dam sui moduli redigit unitatem : cum eam non indifferenter, sed ut ita » dicam indignanter patitur corrumpi atque dissolvi. » (*De Genesi ad litter*, III, c. XVI.)

[2] « Quadam enim interiore, non simulata, sed vera praesentia (cogitat » anima)... vivere se, et meminisse, et intelligere, et velle se. Novit enim » haec in se nec imaginatur, quasi se extra se illa sensu tetigerit, sicut » corporalia quaeque tanguntur... Vivere se tamen et meminisse, et velle et » cogitare quis dubitet ? » (*De Trin.*, X, c. X.) — « Intima scientia est, qua » nos vivere scimus. In quo prorsus non metuimus, ne aliqua vere similitu- » dine forte fallamur; quoniam certum est eum qui fallitur vivere. » (*Ibid.*, c. XII.) — « Nam anima non modo universae moli corporis sui, sed etiam » unicuique particulae illius tota simul adest. » (*Cont. Ep. Manich*, c. XVI.) — « Sensus est certe omnis passio corporis non latens animam. » (*Lib. de quant. animae*, c. XXV.) — « Sentire non est corporis, sed animae per corpus. » (*De Gen. ad litt*, c XVI.

[3] « Sensus quo anima *per corpus utitur*, ipse jam nomine proprio sensus » dicitur. » (*De quant. animae*, c. XXIII.)

signale déjà dans le système cérébro-spinal le centre de transmission des sensations [1]. L'origine de l'âme reste, à ses yeux, un mystère profond. Il se rallierait à la doctrine qui veut que chaque âme soit immédiatement créée par Dieu, n'était la difficulté qu'il y trouve à expliquer la transmission du péché originel. Il avoue du reste que ce sentiment est commun dans l'Église [2]. Disons qu'en ce point Anselme ne fut pas arrêté par les scrupules de son maître. — Pour Augustin, élevé à l'école de Platon, la *Mémoire* a la signification multiple que nous avons retrouvée chez son vénérable disciple. Tantôt elle désigne l'ensemble des vérités-principes, que la raison fait apercevoir à tout homme dès le début de la vie intellectuelle. Augustin se rappelle les Alexandrins, lorsqu'il écrit que ces vérités sont comme cachées dans les profondeurs de l'âme [3]. Ailleurs la Mémoire est le trésor des idées et des souvenirs [4]. Elle signifie encore la conscience de soi, l'existence aperçue par la réflexion. C'est en ce sens qu'Augustin a pu dire que la Mémoire est présente à elle-même par soi et non par une image, par une espèce intermédiaire [5]. — L'âme est la Mémoire, écrit-il ailleurs : elle s'y atteint elle-même.

[1] « (Philosophi) ipsum tangendi sensum, qui per totum corpus est, ab eodem » cerebro dirigi dicunt per medullam cervicis, et eam quae continetur ossi» bus, quibus dorsi spina conseritur, ut inde se tenuissimi quidam rivuli, qui » tangendo sensum faciunt, per cuncta membra diffundant. » (*De Gen. ad lit.*, VII, c. XIII.)

[2] *Ep.*, 28, 157. — *De anima et ejus origine*, I, c. XIX.

[3] « Unde et qua haec intraverunt in memoriam meam? Nescio quomodo; » nam cum ea didici, non credidi alieno cordi, sed in meo recognovi, et vera » esse approbavi, et commendavi ei, tanquam reponens unde proferrem cum » vellem. Ibi ergo erant, et antequam ea didicissem; sed in memoria non » erant. Ubi ergo? Aut quare cum dicerentur, agnovi et dixi : ita verum est, » nisi quia jam erant in memoria, sed tam remota et retrusa, quasi in caveis » abditioribus, ut nisi admonente aliquo eruerentur, ea fortasse cogitare non » possem? » (*Conf.*, X, c. X.)

[4] *Conf.*, X, c. XVII; *De Trin.*, XIV, c. III, *passim*.

[5] « Num et ipsa (memoria) per imaginem suam sibi adest, ac non per seip» sam? Nomino quippe memoriam et agnosco quod nomino. Et ubi agnosco » nisi in ipsa memoria? Nihil tam in memoria quam ipsa memoria est, cum » anima sit ipsa memoria. » (*Conf.*, X, c. XV)

Depuis qu'elle existe, elle n'a jamais cessé d'avoir conscience d'elle-même, de se connaître et de s'aimer. A l'égard des choses passées, la mémoire implique le souvenir. Mais à l'égard du présent, le rôle de l'âme peut aussi s'appeler *Mémoire,* puisque l'âme est toujours présente à elle-même, de façon à pouvoir être saisie par sa propre pensée [1]. L'âme de l'enfant, dit Augustin, « se connaît, bien qu'elle ne puisse se penser, puisqu'elle est à elle-même sa propre mémoire [2]. » — Nous avons retrouvé ce même sens chez Anselme.

La doctrine des Idées-images a également été empruntée à Augustin par Anselme. Écoutons ces passages du Traité *de la Trinité* : Il faut tâcher d'entendre, dit le grand Docteur, que, quelque chose que nous connaissions, celle-ci engendre en nous sa connaissance. La science est le résultat d'un double facteur : le *connaissant* (sujet) et le *connu.* Ainsi l'esprit, lorsqu'il se connaît, est à lui seul le principe de sa connaissance : il est l'objet connu en même temps que le *connaisseur.* Et il ajoute : L'objet que nous découvrons (par le raisonnement) peut être appelé *engendré :* il ressemble à l'enfant qui est conçu. Et où donc est-il conçu, cet objet, si ce n'est dans l'aperception? Là il est engendré, comme si son *image* y était produite. Car, bien que l'objet que nous cherchons existait en soi, sa connaissance cependant n'existait pas encore de fait [3]. — C'est encore à ce point

[1] « Quapropter sicut in rebus *praeteritis* ea memoria dicitur, qua sit ut » valeant recoli et recordari ; sic in *re praesenti*, *quod sibi est mens*, memoria » sine absurditate dicenda est, qua sibi praesto est, ut sua cogitatione possit » intelligi. » (*De Trin.*, XIV, c. XI.)

[2] « Cum vero se non cogitat (mens pueri), tamen noverit se, tanquam ipsa » sit sibi memoria sui. » (*Ibid.*, c. V, et *passim.*)

[3] « Liquido tenendum quod omnis res, quamcumque cognoscimus, congenerat in nobis notitiam sui. Ab utroque enim notitia paritur, a cognoscente » et cognito. Itaque mens, cum se ipsam cognoscit, sola parens est notitiae » suae; et cognitum enim et cognitor ipsa est... Quae autem reperiuntur, » quasi pariuntur : unde proli similia sunt. Ubi nisi in ipsa notitia? Ibi enim » quasi expressa formantur. Nam, etsi jam erant res, quas quaerendo invenimus; notitia tamen ipsa non erat, quam sicut prolem nascentem deputamus. » (*De Trin.*, IX, c. XVIII.) — « Formata cogitatio ab ea re quam sci-

qu'il faut rapporter les sentences si connues : Par les choses contenues dans la mémoire, l'esprit lui-même est stimulé. Nous conservons en nous (dans notre mémoire) la connaissance acquise des objets, à l'instar d'un verbe [1]. — Par l'organe du sens corporel, nous touchons un corps : ainsi s'imprime dans notre esprit, non le corps, mais une certaine ressemblance de lui. Sans cela, il n'existerait pas de sensation qui nous révèle les êtres extérieurs dont nous sommes entourés [2].

Nous avons entendu les sommaires explications d'Anselme concernant l'efformation des concepts. Les critiques ont noté qu'elles se résument dans la doctrine célèbre des *espèces intentionnelles*. — « Ces termes : images, *corporis imaginatio*, *similitudo*, *impressio*, *exprimere*, écrit M. Hauréau, qui sont employés par Anselme pour énoncer la théorie des idées-images, des idées représentatives, n'appartiennent pas au langage de l'ancienne philosophie... Il est manifeste que dans le système psychologique de S. Anselme, toute perception produit un fantôme, que l'imagination est une faculté moyenne entre les sens et la raison, que la mémoire est pleine d'idées impresses, et que tout acte de la pensée est une espèce expresse. C'est ce que tous les réalistes et la plupart des nominalistes répéteront jusqu'à la venue de Pierre de Verberie et de Guillaume d'Occam [3]. » — Ce n'est pas ici que nous pouvons placer une discussion approfondie de la fameuse théorie. Presque à son insu, ou du moins sans insistance, Anselme, se rappelant S. Augustin, en a

» mus, verbum est quod in corde dicimus. » (*De Trin.*, XV, c. X.) — « Cor-
» pora omnia quae vidimus oculis corporeis, per ipsarum imagines, quas
» memoria tenemus, etiam absentia cogitamus : quorum imagines infixae
» in memoria recordando revisuntur. » (*Ibid.*, XII, c. I.)

[1] « Ex iis autem quae memoria continentur, recordantis acies informatur...
» atque inde conceptam rerum veracem notitiam, tanquam verbum apud nos
» habemus, et dicendo intus gignimus. » (*De Trin.*, XIV, c. VII; IX, c. VII.)

[2] « Momento eodem quo corpus sensu corporis tangitur, fit etiam in animo
» tale aliquid, non quod hoc sit, sed quod simile sit : quod si non fieret, nec
» sensus ille esset quo ea quae extrinsecus adjacent sentiuntur. » (*De Gen. ad litter*, XII, c. XXIV.)

[3] Ouv. cit., II, p. 273.

exprimé quelques traits. A Jean de la Rochelle (1271), aux maîtres qui le suivirent revient surtout la responsabilité d'avoir systématisé cette psychologie [1]. Mais on a dénoncé les idées représentatives comme une invention toute scolastique, ou plutôt augustinienne; on a fait un reproche à peine déguisé à Anselme de les avoir accueillies. Cela mérite quelque examen.

En la préface de sa docte traduction du Traité *de l'Ame,* M. Barthélemy Saint-Hilaire reprend le Dr Reid d'avoir attribué à Aristote la théorie des espèces conceptuelles. M. Hauréau regrette qu'Anselme et les Docteurs s'y soient ralliés. — Que cette doctrine ne se rencontre pas chez Aristote à l'état de système définitif, achevé, personne ne le nie. Mais ne l'a-t-il pas en partie énoncée, implicitement reconnue? — C'est bien Aristote qui, de l'avis de son savant annotateur, enseigne ceci : « L'être sensible, avant de sentir, est dissemblable à l'être qu'il sent; après avoir senti, il est, en quelque façon, semblable à lui. Le sensible est le principe qui reçoit *la forme* des objets sensibles, sans la *matière* même de ces objets [2]. » N'est-ce pas Aristote qui fait les déclarations suivantes, que nous devons rappeler malgré leur aridité : « L'intelligence est capable de recevoir la forme des objets.... Il faut que ce que la sensibilité est à l'égard des choses sensibles, l'intelligence le soit à l'égard des choses intelligibles [3]. — Quant à l'âme intelligente, les images remplissent pour elles le rôle de sensations. — Voilà pourquoi cette âme ne pense jamais sans images. L'intelligence est aux images ce que le commun sens est aux sensations qu'il réunit. — Elle pense les formes dans les choses qu'elle perçoit [4]. — Le principe qui sent et le principe qui sait, dans l'âme, sont en puissance les objets mêmes : ici l'objet qui est su, et là l'objet qui est senti. Mais nécessairement, ou il s'agit ici des objets eux-mêmes, ou seulement de leurs formes; et ce n'est certainement pas des objets, car ce n'est pas la pierre qui est dans l'âme, mais seulement sa

[1] Cf. M. Hauréau, ouv. cit., t. Ier, p. 480.
[2] Préface, p. xx.
[3] *De l'Ame*, III, c. IV, § 5.
[4] *Ibid.,* c. VII.

forme... L'être, s'il ne sentait pas, ne pourrait absolument rien savoir ni rien comprendre; mais quand il conçoit quelque chose, il faut qu'il conçoive aussi quelque image. ...En quoi consistera donc la différence des pensées premières de l'intelligence et qui les empêchera de se confondre avec les images? C'est qu'elles ne sont pas, elles aussi, des images, mais sans les images, elles ne seraient pas [1]. On ne peut penser sans images [2]. Dans les actes de mémoire, on contemple en soi l'impression (causée par les objets. Évidemment on doit croire que ce qui se produit par suite de la sensation dans l'âme et dans cette partie du corps qui perçoit la sensation est analogue à une espèce de peinture, et que la perception de cette impression constitue précisément ce qu'on appelle la mémoire. Le mouvement qui se produit alors empreint dans l'esprit comme une sorte de type de la sensation, analogue au cachet qu'on imprime sur la cire avec un anneau [3]. » — Ces textes ne contiennent-ils pas en germe les idées-images, qu'on nous représentait comme tout à fait étrangères au langage de l'ancienne philosophie? Pour peu qu'on en rapproche la doctrine aristotélicienne de l'abstraction, en vertu de laquelle les sens saisissent les qualités et les réalités individuelles où l'intellect atteint l'élément absolu, l'essence, l'on aura rencontré chez le Stagyrite tous les traits essentiels de la psychologie scolastique. Malgré les subtiles réflexions de M. de Saint-Hilaire, nous osons croire que les Écossais avaient raison de la faire remonter à Aristote. L'éminent traducteur veut que les « images ou *fantômes* de l'imagination qui ont pu égarer le D^r^ Reid sont parfaitement distincts, selon le Maître, de la sensation et de l'intelligence [4]. » La portée de cette réflexion nous échappe [5]! Nous l'avons entendu : ce n'est pas seulement pour les actes de l'imagination, mais aussi

[1] *De l'Ame*, c. VIII.

[2] *De la réminiscence et de la mémoire*, c. I, § 4.

[3] *Ibid.*, c. I, § 6.

[4] Préf. *De l'Ame*, p. XXIV.

[5] On a coutume d'indiquer le chapitre II, § 2 du traité *De l'Ame*, pour convaincre le lecteur qu'Aristote repousse le système intermédiariste. Ni là ni ailleurs, nous n'avons rien pu trouver qui justifie cette affirmation.

pour ceux de la sensation, de la mémoire et de l'intelligence que le Philosophe requiert les espèces représentatives. Sa psychologie nous paraîtrait une énigme s'il était vrai, comme on l'assure, qu'il repousse les idées intermédiaires!

Celles-ci sont-elles une chimère aussi fantaisiste qu'on s'est plu à le dire? — Dans leur critique de l'idéologie réaliste, les nominalistes Pierre de Verberie, Durand de S. Pourcin, Guillaume d'Occam combattent surtout les idées intermédiaires parce qu'elles semblent compliquer à plaisir les phénomènes de la perception. D'après eux, il suffit de poser que les sens sont l'organe de la connaissance sensible, comme l'intellect est celui de la connaissance immatérielle. Toutes les entités qu'on place entre les facultés et leur objet sont des inventions de l'esprit réalisant hors de lui ses abstractions, ses rêves. Cette objection contre les idées-images a suffi à les ridiculiser : les modernes n'ont pas assez d'éloges pour les chefs du nominalisme qui l'ont formulée. — Incontestablement, il y a dans l'observation qu'on vient d'entendre une capitale vérité. Pour l'homme, comprendre, c'est tout simplement atteindre d'une manière intelligible ce que les sens représentent d'une façon matérielle. A moins de renoncer à la philosophie, il faut partir de ce fait premier que les sens sont destinés par la nature à percevoir l'être individuel, comme l'intellect est fait pour pénétrer jusqu'à l'essence des choses. Le Prince des Scolastiques, S. Thomas est formel sur ce point fondamental [1]. Que

[1] 1. « Est differentia inter intellectum et sensum; nam sensus apprehendit » rem quantum ad exteriora ejus accidentia, quae sunt color, sapor, quan- » titas et alia hujusmodi, sed intellectus ingreditur ad interiora rei; et quia » omnis cognitio perficitur secundum similitudinem quae est inter cognoscens » et cognitum, oportet quod in sensu sit similitudo rei sensibilis, quantum ad » ejus accidentia; in intellectu vero sit similitudo rei intellectae, quantum ad » ejus essentiam : verbum igitur in intellectu conceptum est imago vel exem- » plar substantiae rei intellectae. » (*Cont. Gent.*, IV, c. XI.) — 2. « Phan- » tasmata cum sint similitudines individuorum, et existant in organis cor- » poreis, non habent eumdem modum existendi quem habet intellectus » humanus; et ideo non possunt sua virtute imprimere in intellectum possibi- » lem. Sed virtute intellectus agentis resultat quaedam similitudo in intellectu » possibili, ex conversione intellectus agentis supra phantasmata : quae qui-

l'homme analyse ses représentations sensibles, les modifications de sa conscience, les idées de sa raison, qu'y trouvera-t-il? Des produits dont les perceptions des sens et de l'esprit, s'assimilant les choses réelles, ont fourni les éléments, et que la lumière de l'entendement a idéalisés, combinés, classés. — En ce sens, l'harmonie de l'ordre réel et de l'ordre idéal se démontre et par le caractère fatal, nécessaire, despotique, si l'on veut, des sensations, des phénomènes de conscience et des principes intelligibles, et par la portée objective du langage, et par l'invincible et instinctive tendance de l'homme à trouver dans chacune de ses facultés le réflecteur vital, immanent de son objet propre. L'objectivité de nos connaissances, le rapport de nos aperceptions avec les choses est un fait d'expérience, d'instinct, d'évidence; c'est un phénomène irréductible. Ce fut pour les nominalistes un honneur d'en avoir fait ressouvenir les idéologues de leur temps qui l'oubliaient; mais avant eux, les maîtres du XIII[e] siècle le savaient, l'avaient dit.

Toutefois, cela admis, il doit être permis de rechercher par quel procédé l'homme s'assimile la science des êtres. Les mouvements nerveux produits dans les organes des sens constituent comme

» dem est repraesentativa eorum, quorum sunt phantasmata, quantum ad » naturam speciei (universalis, seu essentiae). Et per hunc modum dicitur » abstrahi species intelligibilis a phantasmatibus; non quod aliqua numero » forma quae *prius* fuerat in phantasmatibus *postmodum* fiat in intellectu » possibili. » (*Summ. th.*, I, q. 85, a. 1) — « Hoc ipsum quod lumen intel- » lectus agentis non est actus alicujus organi corporei, per quod operetur, » sufficit ad hoc quod possit separare species intelligibiles a phantasmatibus. » (*De spir. creat.*, a. 10 ad 6.) — 3. « Dicendum quod species intelligibilis se » habet ad intellectum ut *quo* intelligit intellectus... Sed quia intellectus supra » seipsum reflectitur, secundum eamdem reflexionem intelligit et suum intel- » ligere, et speciem qua intelligit. Et sic species intellecta secundario est id » *quod* intelligitur, sed id quod intelligitur primo est *res*, cujus species intel- » ligibilis est similitudo. » (*Summ. th.*, I, q. 85, a. 2.) — 4. « Anima quasi » transformata est in rem per speciem, qua agit quidquid agit : unde cum » intellectus ea informatus est actu, verbum producit, in quo rem illam dicit, » cujus speciem habet. » (*De natura Verbi intellectûs.*) — Cf. Quæst. disp. *de Veritate*, q. X, art. 4. — Op. *de Veritate*, q. II, a. 2.

un signe manifestant vitalement à ces organes l'objet qui les provoque. Cet ébranlement perçu par l'esprit lui *représente* l'objet. Qu'on appelle la perception idée-intermédiaire, espèce impresse sensible ou copie de l'objet, avec Aristote, c'est affaire de nom! C'est un signe, une image de la chose, un pur *accident* du principe connaissant, non une entité absolue. Les Scolastiques, S. Thomas en particulier, le disent sans ambages. Ils notent surtout que l'impression représentative ou révélatrice de l'objet n'est qu'un médiateur entre l'être et la faculté, et tiennent que les sens y saisissent leur objet propre, sans s'arrêter à l'impression même, à peu près comme nous verrions notre image dans un miroir de la même forme et de la même dimension que nous [1]. C'était d'avance réfuter Arnauld et les Écossais. — Après que les sens ont exercé leur opération sur l'être sensible, et qu'ils ont atteint dans la modification du moi la forme représentative de l'objet, commence le rôle de l'intellect. Sa fonction naturelle est de spiritualiser l'espèce concrète, par l'élimination des attributs individuels, contingents qui la circonscrivent. Cette abstraction fondamentale fournit directement à l'esprit le concept universel, l'essence de l'être matériel. Enfin, déterminé par ce type idéal, l'esprit l'exprime dans son verbe intérieur, qui est la notion intelligible de l'objet, le terme final de la connaissance [2].

[1] « Efficitur *opere naturae* ut in (specie) aliquid cernatur; natura autem » non agit aliquid superflue, et ideo non excedit speculum hoc, id est id quod » in eo (speciei medio) videtur. » (*De natura Verbi intellectûs.*)

[2] « Intellectus non intelligit nisi factus unum aliquid cum specie, sed ipsa » specie informatus agit tanquam *aliquo sui*, ipsam (i. e. speciem) tamen non » excedens. Species autem sic accepta semper ducit in objectum *primum*, » unde manifestum est quod ipsum verbum intellectus perficitur per actum » rectum (i. e. directum)..., quum sit *unum agens* cum quo et species ipsa » efficitur unum spiritualiter in participando vitam ejus... Haec autem species » quam habet intellectus advenit sibi a re quam ipse non est intuitus, sed » sensus . Quia igitur res intelligibilis eo ipso intelligitur quo intellecto for» matur sua specie actu, *prius natura* est informari quam intelligere, sed » non *tempore*... Prius enim *natura* est intellectus informatus specie, quae » est primum sufficiens intelligendi (principium), quam gignatur verbum ; et » ideo intelligere *in radice* prius est verbo, et verbum est terminus actionis » intellectus. » (*Ibid.*)

L'idée, tant sensible qu'intelligible, n'est donc qu'une modification du moi, engendrant, accompagnant la perception même : elle est logiquement distincte de celle-ci, en ce sens qu'elle en est le principe et le couronnement, mais l'impression ou l'image sensible et l'idée intelligible sont des modalités de l'âme; elles s'identifient avec le sujet pensant dans l'unité d'un même acte, pour parler le langage de S. Thomas. Dans le rôle de ces facteurs, il n'y a pas d'antériorité chronologique, mais une pure succession d'ordre : ils impliquent si peu une distinction absolue, à la façon de « quelques sujets, » qu'ils coexistent d'une manière indivisible à l'aperception : enfin les représentations et les idées ne demeurent comme des sujets permanents qu'à titre de modifications de l'âme, dans le souvenir et dans l'imagination. — Ces prémisses posées, qu'y a-t-il de répréhensible à discerner et les espèces impresses des sens ou l'effet des mouvements des nerfs ébranlés par les objets extérieurs; et les espèces impresses intelligibles produites par l'acte abstractif de l'esprit, démêlant dans les choses l'essence universelle; et les espèces expresses ou verbes recueillies par l'intellect passif, ainsi nommé, non qu'il soit une faculté séparée ou une pure puissance, mais parce que l'intelligence est de sa nature destinée à recevoir et à exprimer le type essentiel engendré par l'abstraction. — Ces termes peuvent déplaire; ils furent loin d'être uniformément compris [1]; ils ont été, pour des esprits curieux de subtilités, l'occasion d'un risible morcellement des facultés. Nous ne plaidons pas la cause des mots! Mais en fait, malgré la rigueur et l'esprit d'unité qu'elle s'efforce de porter en son analyse, la psychologie moderne, sous d'autres noms, reproduit ces distinctions de l'École [2]. Sobrement inter-

[1] Sur les différences de l'intellect actif et de l'intellect passif, tant chez les péripatéticiens que chez les scolastiques, voyez, entre autres, le Dr Schneider, *Unsterblichkeitslehre von Aristoteles*, pp. 56-57, Wiceburgi, 1866. — L'auteur insiste avec beaucoup de justesse sur la distinction purement formelle des deux intellects chez Aristote, p. 66. Nous entendrons tout à l'heure saint Thomas suivre en cela son maître. — Le Dr Schneider vient d'être enlevé, par une mort prématurée, à la philosophie qui espérait en lui un critique distingué.

[2] Cf. Wundt : *Nouveaux éléments de physiologie humaine*, §§ 175 et suivants.

prétée, la doctrine paraît sage, exacte, conforme à l'esprit d'Aristote, et ce qui vaut mieux, à la nature.

Ceci soit dit sur le fond de la question. Dans le langage encore peu fixé de la Psychologie expérimentale, elle garda quelques ténèbres, en ses détails surtout. Il ne manqua pas de Docteurs qui surchargèrent d'entités superflues le procès psychologique. Déjà Godefroid des Fontaines, l'un des plus spirituels penseurs du XIII^e^ siècle, réclame contre cet abus que l'âge suivant devait porter à l'apogée. Mais il suffit de parcourir, par exemple l'opuscule déjà cité de S. Thomas sur *le Verbe* [1] pour s'apercevoir avec quel pressentiment des vues de l'avenir, avec quelle sagacité, le prince des Scolastiques décomposait le phénomène de la perception intellectuelle. — L'intellect, dit-il, lorsqu'il est informé par l'espèce,

[1] « Quum ergo intellectus informatus specie natus sit agere, terminus » autem cujusque actionis est ejus objectum, objectum autem suum est quid- » ditas aliqua cujus specie informatur, quae non est principium operationis » vel actionis, nisi ex propria ratione illius cujus est species; objectum autem » non adest ipsi animae illa specie informatae, quum objectum sit extra in sua » natura, actio autem animae non sit extra, — prima actio ejus per spe- » ciem est formatio sui objecti, quo formato intelligit, simul tamen tempore » ipse format et formatum est, et simul intelligit... sicut in principio actionis, » intellectus et species non sunt duo sed unum est ipse intellectus et species » illustrata, ita unum in fine relinquitur, similitudo scilicet perfecta, genita » et expressa ab intellectu; et hoc totum expressum est verbum, et est totum » rei dictae expressivum, et totum in quo res exprimitur; et hoc intellectum » principale, quia res non intelligitur nisi in eo, est enim tanquam speculum » in quo res cernitur, sed non excedens id quod in eo cernitur. » *De nat. Verb. intellect.*, l. c.— Cf. *Sum. th.*, I, q 84 et suiv.— Cet important passage explique comment dans un autre texte cité par M. Hauréau, (II, p. 201). S. Thomas a pu maintenir une distinction modale entre les espèces et le fait définitif de la perception. Voir aussi Liberatore, *De la connaissance intellectuelle*, p. 61, Tournai, 1863. — Il est tout à fait remarquable qu'Arnauld, tout en argumentant contre les idées représentatives, montre à son insu leur portée objective, en une spirituelle comparaison : « Ne serait-ce pas, dit-il, une chose ridicule de dire à une femme qui se regarde dans son miroir qu'elle ne voit que son miroir, sous prétexte qu'elle ne voit son visage que par *le moyen de son miroir?* » (*Défense cont. Malebranche*, p. 47). Si le D^r^ Reid eût songé à ces paroles, il eût moins insisté sur la connaissance purement subjective, à son avis, fournie par les espèces de scolastiques.

est en demeure d'agir. Or, le terme de tout acte est son objet : l'objet de l'intelligence est l'essence, dont l'espèce (l'image) l'informe, mais cette image n'est le principe de l'opération et de l'action *qu'en raison de l'objet même dont elle dérive* : l'objet lui-même n'est pas présent dans l'âme informée par l'espèce, puisqu'il existe en réalité en dehors d'elle. Toutefois, l'acte de l'âme n'est pas externe pour cela; comprendre, en effet, est un mouvement vital : aussi, et en vertu de l'espèce qui le conduit à concevoir tel ou tel être, et en vertu de sa nature, le premier acte de l'intelligence est l'assimilation de l'objet au moyen de l'espèce, et cet acte posé, l'intellection a lieu. *C'est dans le même temps* que l'esprit se représente l'objet, qu'il est représenté et qu'il est conçu. De même qu'au début de l'acte, l'intellect et l'espèce ne sont pas *deux êtres,* mais que l'intellect et l'espèce perçue ne sont qu'une même chose, ainsi à la fin de l'acte, il n'y a non plus qu'un *seul terme,* à savoir la similitude parfaite de l'objet engendrée et produite par l'intellect. Cette ressemblance est le verbe; on l'appelle la totale expression de l'objet, dans laquelle celui-ci est véritablement perçu. Il ressemble à un miroir où l'objet se reflète, mais à un miroir n'excédant en rien l'être qu'il représente [1].

[1] Un savant apologiste moderne de l'idéologie scolastique s'explique ainsi sur les idées-images. « Verbum mentale quodammodo duas facies habet. » Facies una est, secundum quam respicit substantiam intellectivam in qua » est : et sic est qualitas quaedam spiritualis, quae substantiae intellectuali » adhaeret. Facies altera, secundum quam assimilatio illa est relatio quaedam » respiciens objectum quod repraesentat, est vicaria objecti; est nexus quidam » cognoscentis et cogniti; est conditio sine qua realiter nequiret subjici et » manifestari intellectui; est demum perfectio idealis quae substantiam intel- » lectivam formaliter perficit. — Quibus cognitis, dicimus quod si assimilatio » illa primo modo consideretur, ipsa non est proprie terminus operationis » intellectivae, quae directe fertur ad veritatem; sed solum est terminus ope- » rationis intellectivae reflexae, quae propriam suam cogitationem recogitat, » inquirens quale sit medium in quo formaliter ipsa cognovit veritatem. Si » vero hujusmodi assimilatio posteriori modo consideretur, tunc ipsa est » terminus immediatus et proximus actus mentalis; tamen secundum *aliud* » *ab ipsa.* Est quidem terminus proximus et immediatus actus mentalis, » quia ipsa illa assimilatio est, quae proprie exercet actum intelligendi ; ac » in ipsa repraesentative, seu idealiter est res quae cognoscitur. Est autem

Voilà une explication qui paraît pleine de prudence et de réserve. Elle sauvegarde à la fois et l'objectivité de la connaissance, et l'unité générale des opérations de l'intellect. On a beaucoup vanté Guillaume d'Occam pour sa critique des facultés. Venu après des réalistes d'un subtilisme exagéré, il eut le mérite de les rappeler au bon sens, à la froide raison. Ceux-là compromettaient la psychologie scolastique par leurs abstractions frivoles; lui la simplifia trop. Excès opposé à d'autres excès! — D'Occam nie que les objets sensibles produisent des espèces intermédiaires *antérieures* à l'acte de la sensation. Elles ne sont rien de réel, pas même quelque entité comparable à celle qui existerait sur le miroir qui la supporte. Il accorde toutefois que ces images accompagnent l'impression sentie de l'objet. Elles sont « imprimées » dans l'âme, grâce au concours de l'objet et de la faculté. Il va jusqu'à avouer que l'espèce est le principe de la sensation. — En toute sincérité, découvre-t-on une différence sérieuse entre ces explications et celles

» terminus proximus et immediatus secundum aliud ab ipsa; quia id quod per » ipsam et in ipsa cognoscitur, est aliquid diversum ab ipsa. » (A. Lepidi, *De ontologismo*, p. 63.) — L'auteur montre ensuite la portée objective de nos connaissances, selon la psychologie scolastique, en rapprochant de nos idées représentatives la loi irréductible et primitive de l'évidence : « Etsi » interiori et ineluctabili experimento percipiamus manifestationem et repraesentationem rei cognitae in quolibet cognoscente a luce ejus intellectiva » pendere necessario, quia sine ipsa nulla cognitio et nulla manifestatio veri » esse potest; tamen eodem interiori et ineluctabili experimento sentimus, » quod res manifestata a luce intellectiva creata sit aliquid sempiternum, » independens ab ipsa... Ex his igitur comperitur quod nulla sit necessitas » comparandae imaginis cum re repraesentata per imaginem pro certitudine » habenda, quod imago illa existens in animo reipsa sit realitatis imago. » Etenim ipsa lux intellectiva immediate per se, vel per legitimam applicationem sui circa res cognitas, sine errore et fallacia hoc testificatur. Controversia autem de transitu qui fit a cognitione rei, prout repraesentatur in » animo, ad cognitionem rei prout est in se, est controversia quae declarari » potest ostendendo per interiorem experientiam transitum illum esse naturalem, *ex nativo instinctu* provenientem. » — A la base du procès idéologique, le savant thomiste place donc la grande loi des instincts primitifs et infaillibles reconnue par toute l'École, et dont Anselme le premier fit apercevoir l'importance aux Docteurs.

des grands Docteurs? — Passant à la connaissance intellectuelle, d'Occam rejette la nécessité des espèces conceptuelles. « Ainsi que la sensation a été définie l'acte résultant d'un rapport entre l'objet externe et la sensibilité; de même la connaissance ou l'intellection sera dite avoir pour causes partielles la chose connue et la puissance intellective, l'intellect; ni l'un ni l'autre de ces actes ne réclame une espèce [1]. » Cette conclusion paraît un peu leste. Reste à démontrer que l'objet *externe* peut se représenter vitalement à la faculté organique et à l'esprit sans exercer sur eux une certaine *impression*, en d'autres termes, sans une espèce, sans un signe qui le manifeste; que l'intellect, puissance indéterminée de soi et spirituelle, peut connaître l'essence universelle, sans dépouiller l'objet de ses accidents matériels, sans exprimer ni recueillir lui-même cette notion essentielle. Voilà ce que ni d'Occam ni Arnauld ni le Docteur Reid n'ont montré : là pourtant était tout le problème! Ils ont, le premier d'entre eux surtout, parfaitement signalé les abus, les faiblesses de la théorie; ils n'ont rien mis à sa place [2]. On les félicite de s'être arrêtés, en critiques avisés, devant l'inexplicable mystère de l'aperception intellectuelle! Nous estimons que les Docteurs n'ont pas démérité pour en avoir essayé l'interprétation. A bon droit, l'on peut douter que Durand et d'Occam se fussent contentés de définir l'*idée*, l'espèce, « ce qui

[1] Voir M. Hauréau, ouv. cit., II, 443.

[2] Nous nous permettons de renvoyer ici le lecteur à l'analyse des facultés de Suarez, en son traité *De Anima*, l. III et l. V, notamment aux c. II et IX du l. III; aux c. I, VIII et X du l. IV. — Suarez tient compte des critiques raisonnables de Durand, de d'Occam : il explique, en devançant la psychologie moderne, le rôle souvent travesti de l'intellect sur les espèces. Il élucide également quelques points obscurs des écrits de S. Thomas, dans l'esprit même du grand Docteur, et surtout la vraie nature de l'abstraction exercée par l'intellect actif sur les espèces. « Intellectum abstrahere speciem, nihil est » aliud quam virtute sua efficere speciem spiritualem repraesentatam eamdem » naturam quam phantasma repraesentat; modo tamen quodam spirituali : » illaque elevatio a materiali repraetatione phantasmatis ad spiritualem repraesentationem speciei intelligibilis dicitur abstractio : ex quo aperte constat » abstractionem non esse actionem *distinctam* a productione speciei. » (L. IV, c. XI, n° 18.)

n'existe pas indépendamment du langage, » bien que ce bon mot soit de M. Cousin et que M. Hauréau l'applaudisse! Ce que d'Occam rejetait avec dédain, c'était l'absurde antériorité des espèces aux actes de sentir et de connaître [1]. Il redoutait les entités oiseuses si chères aux ultra-réalistes, leur luxe d'abstractions. Nous avons entendu S. Thomas affirmer avec énergie l'unité des opérations diverses de l'esprit. Tous les Docteurs n'eurent pas cette réserve : qu'on blâme les auteurs, non la doctrine!

Ces observations paraîtront bien étendues peut-être. Nous avons insisté quelque peu sur une théorie développée surtout dans les écoles après Anselme de Cantorbéry, et qui prêta à des malentendus graves. C'est que notre Docteur, en passant, s'y est rallié, qu'on lui en faisait un médiocre honneur, et que l'Académie nous demande un jugement sur sa psychologie.

[1] Je sais bien qu'on nous objectera les paroles d'Arnauld disputant contre Malebranche sur ce même sujet : qu'on exprime la même chose en disant qu'une chose est objectivement dans l'esprit, ou bien qu'elle est connue de notre esprit. (*Des vraies et des fausses idées*, l. c. ap. Hauréau.) — Mais Arnauld, après d'Occam, combat dans les espèces sensibles et intelligibles *actuellement perçues* leur *distinction réelle* de la perception et de l'intellection finales. Il rapporte à cet égard la thèse d'un maître ès arts de l'ancienne université de Louvain (juillet 1683), et y loue le passage suivant : « Quomodo » inextensa et indivisibilis mens concipit extensum et divisibile spatium? Ubi » et in quo percipit absentia et procul dissita corpora ? Indubie *in ideis ipsorum*, sed cave ne recentioris cujusdam somnio delectatus ideas ipsas aliquid » a *perceptionibus diversum* cogites. » (Arnauld, *Défense contre la réponse au livre des vraies et des fausses idées*, p. 36.) — Rappelons seulement ici le texte de S. Thomas : « Simul tamen tempore et ipse (intellectus) format » (verbum), et formatum est, et simul intelligit. »

CHAPITRE III.

VUES D'ANSELME DE CANTORBÉRY SUR LA NATURE DE LA SUBSTANCE PHYSIQUE.

Sens général de la question. — État de la doctrine jusqu'à Anselme. — Ses vues sur l'unité de la substance physique. — A-t-il admis l'unité numérique des essences réelles ou seulement leur unité spécifique? — Doctrine. sources et critique.

Tout le monde connaît ces paroles d'Aristote : « L'objet de toutes les méditations philosophiques passées et futures, la question sans cesse renouvelée : Qu'est-ce que l'être? se ramène à celle-ci : Qu'est-ce que la substance [1]? De fait, comme l'écrit Anselme de Cantorbéry, nous attribuons la réalité à tout ce qui n'est pas un pur néant [2]. Mais dans un sens plus précis, l'être se dit surtout des choses qui subsistent par elles-mêmes, indépendamment d'un soutien extérieur. Or, cette indépendance constitue précisément le caractère constitutif de la substance. La parole d'Aristote se vérifie : l'être et la substance sont en ce sens identiques.

En outre la division la plus élémentaire des êtres de la Nature est celle qui les groupe d'après leur *ressemblance* ou d'après leur *diversité*. Rechercher si l'existence réelle, et spécialement *si l'existence substantielle* est l'attribut propre de la collection elle-même, ou bien des facteurs semblables qui la composent, c'est poser, à un point de vue très-général, la question de l'être. — Mais d'autre part, déterminer la nature de l'élément essentiel et unique subsistant dans les types multiples et divers, n'est-ce

[1] *Metaph.*, VII, c. I.
[2] *De Fide Trinitatis*, c. III.

pas aborder, en son aspect rudimentaire, la thèse fameuse des *Universaux?* N'est-il pas déjà évident que les deux problèmes présentent une connexion étroite et que leur solution présuppose des données communes? Au fond les questions de l'être, de la substance, des Genres et des Espèces, des Universaux sont des formules synonymes.

Le problème des Universaux peut être envisagé de plusieurs manières. Que l'on scrute la *dernière raison* des êtres de même nature, l'on aboutit bientôt à la doctrine des Idées-divines ou des Archétypes exemplaires, qui comprend une partie importante de l'Ontologie. Examine-t-on le mode de subsistance actuelle de l'élément commun des êtres? C'est toucher à un grave mystère de l'Histoire naturelle : celui de l'Espèce. Préfère-t-on s'informer du procédé par lequel l'esprit engendre le concept des formes communes? On rencontre l'un des plus intéressants objets de la Psychologie et de l'Idéologie. Nous avons recherché la pensée d'Anselme sur les Idées exemplaires et sur les concepts psychologiques. Nous devons à présent étudier sa doctrine sur la manière dont subsistent les formes communes, l'élément universel en un mot, *en dehors de leur cause idéale et dans la réalité physique.* Mais en ce point surtout, il serait impossible de nous renseigner sur les sources de notre Docteur, selon le vœu de l'Académie, sans résumer l'histoire du débat dans la période qui précéda S. Anselme de Cantorbéry.

C'est presque toujours la manière dont une question est posée à l'origine qui décide de sa solution. Nulle part on ne s'en aperçoit aussi bien qu'à propos des Essences et des Notions universelles?

Les plus fervents admirateurs de Platon tombent d'accord que sur la nature des Idées, il s'énonça avec beaucoup d'obscurité. Subsistent-elles dans l'Intelligence divine, ou constituent-elles des types séparés, localisés en dehors du souverain Bien ou de l'Essence absolue, voilà la matière d'une dispute éternelle. Or, Platon lui-même appelle les Idées « *le genre* des choses. » C'est ainsi que, dès l'origine, l'équivoque fut mêlée à la polémique. Cette ambiguïté, en un point si considérable, fâchait fort Aristote. On ne peut nier que le Stagyrite, sans dissiper toutes les obscurités du problème, ne soit explicite sur le caractère individuel de la substance physique, et, par conséquent, sur l'*existence purement conceptuelle ou idéale des Universaux.* « Il est impossible, dit-il, qu'aucun universel ne soit une substance, quel qu'il soit. Nul des attributs généraux ne marque l'existence déterminée, mais le mode de l'existence..... Rien d'universel n'a une existence isolée des particuliers [1]. » Certes Aristote était loin de ne reconnaître d'autre fondement à la connaissance que la sensation. Il parle avec le plus grand mépris des partisans de Démocrite, les matérialistes dogmatiques de l'antiquité. Ceux-là qui font des sens le critère unique de la vérité aboutissent nécessairement, selon lui, au scepticisme universel, puisque les sensations varient comme les individus eux-mêmes [2]. Aussi insiste-t-il sur le caractère absolu des données rationnelles, et sur la nécessité de faire des idées générales l'objet principal de la philosophie [3]. Tandis qu'avant lui, les Mégariens, comme Euclides, Stilpon et Antisthènes, concentraient l'existence réelle dans les *seuls* individus, Aristote convient que les notions universelles ne sont pas des concepts chimériques : il signale en maints endroits le fondement qu'ils ont dans la réalité. Mais, concernant le caractère conceptuel de la substance universelle, en tant qu'universelle, sa doctrine est tout à fait claire [4]. — L'École de Platon était le symbole de l'élément synthétique de l'esprit humain, comme celle d'Aristote représentait son côté analytique et démonstratif.

[1] *Met.*, VII, 13. — Οὐδὲν τῶν καθόλου ὑπαρχόντων οὐσία ἐστιν.— *Ib.*, 16.

[2] *Mét.*, III, 6.

[3] *Probl.*, XXX, 9. — *Deux. Anal.*, l. I, c. XXIV; l. II, c XIX.

[4] Voir les témoignages concernant ce point dans Prantl, *Geschichte der Logik*, I, pp. 100-159, passim. — C'est à cette doctrine qu'il faut notamment rapporter: 1) l'aperception de l'universel attribué au νοῦς. — *Eth. Nicom.*, I, 4; 2) le double élément de la connaissance, l'un nécessaire et absolu, l'autre contingent et relatif (*ibid.*, VI, 12, 36); 3) l'aperception des éléments *semblables* (*Anal. poster.*, II, 19; *De anim*, III, 7); 4) l'inclusion en puissance de l'universel dans les individus (*Anal. post.*, I, 24, 31; *Métaph.*, III, 5, 6). — Au fond, toute la doctrine du *Concept* (Prantl, I, pp. 24-263), repose sur le *fondement objectif* des universaux ou des formes générales.

Sous les auspices des deux représentants de la philosophie ancienne, la dispute des Genres et des Espèces fut engagée dans des voies opposées. Elle n'en sortira plus.

Il arriva que les Régents des Écoles de la Restauration Carlovingienne se trouvèrent aux prises avec l'épineux problème, dès leur début dans la carrière philosophique. On le pense bien : ils furent, sinon tout à fait déroutés, du moins déconcertés très-fort par la manière même dont la thèse avait été posée. Elle avait été formulée par un éclectique. Porphyre, l'élève de Plotin, rêvait comme son Maître et les Alexandrins, de concilier les doctrines de Platon et celles d'Aristote. Il en résulta qu'il exposa la question en termes assez vagues, et que, dans la préface aux Catégories sur laquelle pâlirent tant de générations, il ne lui donna aucune solution précise. Tout le monde connaît le passage de Porphyre qui fournit occasion à la célèbre controverse. Mais il nous touche de trop près, pour ne pas être transcrit ici. « Puisqu'il est nécessaire, dit-il, au patricien Chrysaore, son disciple, pour comprendre la doctrine des Catégories d'Aristote, de savoir ce que c'est que le Genre, la Différence, l'Espèce, le Propre et l'Accident, et puisque la connaissance de ces choses est utile à l'établissement des définitions et à tout ce qui concerne la division et la démonstration, j'essayerai de te transmettre dans un abrégé succinct, et en forme d'introduction, ce que les anciens ont enseigné à ce sujet, m'abstenant des questions trop élevées, m'arrêtant même assez peu aux plus simples. Ainsi je refuserai de dire si les genres et les espèces subsistent ou consistent seulement en de pures pensées; — si comme subsistants, ils sont corporels ou incorporels; s'ils existent enfin séparés des objets sensibles ou dans ces objets, et forment avec eux quelque chose de coexistant. Cette affaire est trop grosse, et demande des recherches trop étendues [1]. »

L'incertitude où l'éclectique Porphyre laissait les esprits des premiers Docteurs sur un problème qui touche à toutes les sciences ne fit que stimuler leur ardeur. Pour le résoudre, il n'avaient par

[1] *Intr. aux Catég. d'Aristote.* — Préface, trad. de M. Barthélemy-St-Hilaire.

malheur que quelques livres de Dialectique [1], c'est-à-dire des notions et des mots plutôt que des principes et des faits. Ajoutez à cela que, dans la formule porphyrienne, la substance est conçue en dehors de toute relation avec la Raison absolue. La question aurait été bien simplifiée, si dès l'origine, on eût nettement distingué les trois moments logiques de l'universel, si bien mis en relief par les grands Scolastiques, et insinués au commencement de ce chapitre : l'Universel considéré comme terme des Idées divines (*Universale ante res*); l'universel envisagé dans le monde des réalités (*Universale in rebus*); l'universel conçu par l'esprit (*Universale post res*). Mais Porphyre écrivait un *Isagoge*, une Préface aux Catégories, et l'on sait qu'Aristote se montrait froid à l'égard des Idées et de l'exemplarisme. — Boèce imita la réserve du commentateur éclectique. Dans son commentaire sur Porphyre, il analysa en détail la genèse du concept universel aussi bien que la manière dont l'espèce, l'élément commun, subsiste dans la réalité. C'est sans contredit le côté important de la controverse, et Boèce l'expose en interprète habile. Il montre que l'universel est le produit de l'acte abstractif de l'esprit, saisissant dans les individus l'essence commune à tous. Il tient que c'est le propre de l'intelligence d'atteindre la substance une et absolue des choses, comme c'est le caractère des facultés sensibles de percevoir le multiple, le particulier. Dans les êtres, « le semblable, » c'est-à-dire le genre, l'espèce sont concrets, sensibles, particuliers : dans l'esprit, ils sont abstraits, intelligibles, *universels*. Mais ils ont leur fondement dans la nature : ce ne sont pas de pures combinaisons de la raison. — Ces explications étaient correctes. Elles ne rappelaient pas pourtant le lien naturel de la substance physique avec l'Intelligence créatrice. Cet oubli devait nuire à la claire compréhension de la thèse. Il est probable que Boèce entrevit la lacune; mais il laissait à une critique plus approfondie le soin de la combler [2]. Était-ce discrétion d'esprit, diplomatie littéraire? Que le lecteur

[1] M. de Rémusat a parfaitement mis en lumière l'importance de ce point de départ. *Abélard,* I, pp. 305 et suivantes.

[2] *In Porph. a se translatum,* l. I, p. 55.

décide! Boèce tenait plus qu'on ne l'a cru aux Alexandrins. Cela donne à réfléchir sur son silence.

Un savant Italien qui a beaucoup écrit sur la présente matière, M. Liberatore S. J., veut qu'il y eût, dans les explications de Boèce, une autre cause de confusion, qui ne fut pas sans influence sur l'avenir. Nulle part Boèce ne distingue ce que les philosophes nomment *l'universel direct* de *l'universel réflexe.* Celui-ci implique un double moment logique. D'abord l'esprit recueille des types particuliers l'essence pure : ensuite, l'intelligence applique cette essence aux êtres réels ou possibles dans lesquels elle se trouve réalisée; il la conçoit comme *Genre* ou *Espèce*. La relation de l'essence commune avec les types multiples dans lesquels elle peut subsister n'appartient qu'à l'universel réflexe. Mais nulle part le consul n'exprime cette importante distinction. — Quand les Universaux devinrent l'objet d'un débat passionné, cet oubli produisit l'effet qu'on aurait pu prévoir. Il y eut des philosophes qui s'absorbèrent si exclusivement à la considération du côté *individuel* des Universaux qu'ils ne se préoccupèrent en rien de la notion réflexe; ils tinrent les Espèces pour de simples noms ou pour de purs concepts. D'autres, au contraire, s'arrêtant au rapport de l'espèce avec les êtres concrets dans lesquels elle existe en réalité, affirmaient l'universalité de l'espèce elle-même. Ce fut en partie l'origine du Nominalisme et du Réalisme outrés [1].—Aristote avait déjà indiqué, dans cette confusion, l'origine du débat des platoniciens sur la même question : « Voici le motif de l'erreur dans laquelle on tombe, dit ce grand homme [2] : on envisage à la fois la question, et sous le point de vue *mathématique* (expérimental), et sous le point de vue *des notions universelles* (métaphysique). Dans le premier cas, on considère l'unité et le principe comme un point, car la monade est un point sans étendue, et alors les partisans de ce système composent, comme quelques autres, les êtres avec l'élément le plus petit.... Le point de vue de l'universel amena à regarder l'unité comme *le principe général;* d'un autre côté, on la considéra comme partie (intégrante), comme *élément :*

[1] *De la connaissance intellectuelle,* trad. Sudre, p. 231.

[2] *Métaph.*, XIII, 8.

deux caractères qui ne sauraient se trouver à la fois dans l'unité. »
Quant à Boèce, nous avons dit qu'il ne veut pas se prononcer sur le problème agité entre Aristote et Platon : à son avis, cela serait peu convenable. S'il a consacré un plus long développement à l'opinion d'Aristote, ce n'est pas qu'il la juge préférable, mais parce qu'il écrit sur les Catégories dont le Philosophe est l'auteur[1]!

Les maîtres des Écoles nouvelles n'eurent pas cette réserve. Le premier qui, d'assez loin, il est vrai, aborda la question, fut Jean Scot Erigène. Poussé dans les voies nouvelles par son génie aventureux, égaré peut-être par des textes inexacts ou mal compris du faux Denys, Scot donna à la thése réaliste un développement excessif. D'après les meilleurs critiques, il nia la réalité substantielle des phénomènes au profit de la substance universelle d'où émanent successivement les formes éphémères. Il ne reconnaît pas une *natura creata* à côté de la *natura creans*, mais seulement une multitude d'apparitions émanées de l'Absolu et s'absorbant dans son sein, pour en émerger à nouveau, sans interruption et sans terme. Est-ce sur ces deux termes que Spinosa calqua sa distinction célèbre entre la *natura naturans* et la *natura naturata?* Ce qui est sûr, c'est qu'il y a entre les systèmes de ces deux penseurs une similitude assez grande. Scot tient que « *l'Essence existe par soi,* en sa réalité propre; » que la quantité et la qualité, tout en s'étendant à toutes les autres catégories de l'être, n'abandonnent point pour cela leur nature particulière; » d'où il suit que l'être *physique*, l'individu n'est point la substance. — La Dialectique de Scot s'occupe avant tout de l'*Essence,* comme de son principe propre : toute la diversité et toute la multiplicité des êtres commence par les genres les plus généraux et les genres moyens, en s'étendant aux formes et aux espèces les plus particulières, et en remontant par les mêmes degrés qu'elles ont parcourus, jusqu'à ce que toute cette multiplicité retourne à l'Absolu dont elle est la fatale et progressive éclosion [2]. Nous voilà loin du Lycée et de Boèce!

[1] *In Porph. a se translat.*, I, p. 55.

[2] *De div. naturae*, l. I, c. XXII. — Cf. *Scot Erigène*, par M. Saint-René-Taillandier, III, c. II, *passim.*

On comprend que les vues hardies de Scot durent vivement impressionner les esprits dans cette première Renaissance des lettres. Elles ravivèrent, en la transportant dans un monde nouveau, la vieille, l'éternelle querelle des Éléates et des Mégariens, de Platon et d'Aristote, reflet du dualisme de la Nature et de l'Esprit, ce double pôle de toute philosophie.

Le pseudo-Rhaban nous apprend qu'il y avait déjà de son temps un parti de *réalistes*, interprétant les Catégories d'Aristote dans un sens rigoureusement ontologique [1]. Sans doute ceux-là se réclamaient du célèbre Irlandais! A côté d'eux, l'esprit de réaction donna naissance à un mouvement nominaliste. La faveur de Boèce dans les écoles, et plus encore le bon sens qui se révélait dans ses explications sur les Universaux, assurèrent au sentiment d'Aristote un crédit qui alla toujours croissant.

Le faux Rhaban professe la doctrine que tiendra un jour S. Thomas d'Aquin et l'École presque entière. Se fondant sur Boèce, il tient que les Universaux n'existent pas physiquement, sous leur forme propre, *quasi quiddam diversum*. Il observe qu'il ne faut pas néanmoins refuser une *certaine réalité* aux Genres et aux Espèces : sans cela, notre science, qui est basée sur les notions universelles, n'aurait point de véritable objet. Le Genre, pour nous borner à cet exemple, est la ressemblance substantielle des diverses espèces recueillies par l'esprit [2].

Heiric d'Auxerre, héritier des traditions de Fulde par son maître Haimon, partage le sentiment commun jusqu'alors, dans sa Glose *sur les Dix Catégories*, publiée par M. Cousin. Pour lui *le lieu* et les prédicables en général ne sont pas des *réalités physiques*. Il ajoute que « le genre ne se dit pas de l'animal selon le fait, la substance, mais ce mot *Genre* est le nom désignatif de l'animal, nom dont on se sert pour désigner qu'Animal se dit de plusieurs différents quant à

[1] *Com. in Isag.* — Cf. Cousin, *Ouv. inéd. d'Abélard*, pp. x, lxxvi — Prantl, ouv. cit., II, pp. 38-39.

[2] « Nihil aliud est genus quam substantialis similitudo ex diversis specie- » bus in cogitatione collecta. — Ap. Cousin, *ouv. inéd. d'Abélard*, p. lxxix. — Cf. Prantl, II, p. 40.

l'espèce [1]. » A propos de ce sentiment, M. Hauréau rappelle qu'en même temps qu'Heiric rejette l'existence concrète des substances universelles, il leur reconnaît, aussi bien que Rhaban, une réalité logique, fondée sur leur ressemblance substantielle. Il définit en conséquence le genre *cogitatio collecta ex singularum similitudine partium*. Heiric, comme le fera plus tard Abélard, attribue aux *mots* qui expriment les concepts universaux une valeur objective. Aussi M. Hauréau l'appelle-t-il à bon droit *un conceptualiste*. — L'écrivain caché sous le pseudonyme de Jépa s'exprime également sur les Universaux dans le sens du réalisme modéré. Avec Boèce, il veut qu'autre soit leur manière de subsister dans l'esprit, autre leur subsistance réelle dans la nature [2]. Quant à Remi d'Auxerre, son langage est moins réservé. En son Commentaire sur *les Noces de Mercure et de la Philologie* de M. Capella, il insiste de préférence sur l'élément transcendant de l'Universel. Cela étonne moins quand on réfléchit que Remi passe pour s'être beaucoup adonné à la lecture de S. Augustin. Mais sa définition de la substance est ambiguë : « *Est autem forma partitio substantialis ut homo : homo est multorum hominum substantialis unitas.* » Ces paroles se rapprochent fort de la doctrine de Scot Erigène, établissant l'unité numérique de l'essence dans les divers types de l'espèce. Ce sens paraît d'autant plus vraisemblable, qu'ailleurs Remi affirme que le genre le plus universel, l'οὐσία, l'Essence, comprend toutes les

[1] « Sed huic occurrimus dicentes, genus non praedicari de animali secun-» dum rem, id est substantiam, sed designativum nomen esse animalis, quo » *designatur* animal de pluribus specie differentibus dici. » (Hauréau, ouv. cité, I, p. 192.

[2] Voir l'intéressante critique du Dr Prantl, II, p. 43. — Je signale au lecteur le texte suivant : il donne la clef de plus d'un malentendu, en démontrant à l'évidence qu'en ce temps de barbare langage, le terme *subsistere* s'employait aussi bien de l'*existence conceptuelle* que de l'*existence réelle*. Ceux qui se sont occupés du problème des Universaux savent l'importance de cette remarque : « Prima quaestio est, utrum genera et species vere sint. » Sed sciendum est, *quod non esset disputatio de eis, si non vere subsiste-» rent* (!) » — Admirons maintenant, comment l'élément ontologique est enchevêtré, sans transition aucune, à l'élément nominal : « *Nam*, poursuit » *Jépa*, res omnes quae vere sunt, sine eis non esse possunt. »

natures, et que tout ce qui existe est portion de cette Essence. Certes, depuis Scot, ces paroles offrent quelque équivoque [1]. — Il est difficile de juger du sentiment du célèbre Gerbert d'Aurillac, dont le langage est assez peu constant. Il signale avec beaucoup de clarté le fondement suprême des Essences universelles. C'est des types exemplaires qu'il entend parler, lorsqu'il affirme que les « différences substantielles, comme les Espèces et les Genres, sont douées d'une existence permanente [2]. » On a trouvé l'ultra-réalisme dans ces paroles : « Les (types) intelligibles se combinant aux choses corruptibles, se diversifient au contact du corps. » La conclusion semble un peu violente! — Dans les Gloses sur les Catégories du *Codex Viennensis* [3], le savant éditeur, M. le Dr Barach, reconnaît le réalisme modéré d'Heiric et de Rhaban. Mais pour le Glossateur, comme pour Anselme dans le Dialogue *de Grammatico*, l'*individu* est la Πρώτη οὐσία, la substance première. La *seconde substance*, dit-il, est, par exemple, l'homme, l'animal, dans lesquels on ne trouve pas des substances déterminées. — Par l'organe des sens extérieurs, l'esprit est averti. D'abord il recueille et fixe en sa mémoire les choses perçues au moyen de l'imagination, puis il exprime par les *mots* les *choses qu'il a pensées*. Et comme les êtres particuliers sont nombreux, infinis en nombre, nous nous élevons à leur *connaissance* par le moyen de l'intellect. — La notion générale est déduite des types individuels... [4].

[1] Cf. Hauréau, I, p. 145, sqq. — Prantl, II, p. 44. — Ueberwegg, II, pp. 114-115.

[2] Cf. Hauréau, I, p. 155. — Prantl, pp. 55 et suiv.

[3] *Zur Geschichte des Nominalismus vor Roscellin.* — Nach bisher unbenützten handschriftlichen Quellen der Wiener Kaiserlichen Hofbibliothek, von Dr C.-S. Barach, 1866. — La publication de M. le professeur Barach est extrêmement importante ; elle est la confirmation des vues du Dr Prantl touchant les origines du Nominalisme.

[4] « Dicitur certior *usia* quam accidens, sic prior substantia potior quam » secunda quia manifestius significat aliquid (f° 9). — Prima usia, id est » primae substantiae sunt individua, ubi certius agnoscuntur individua. Se- » cunda usia est ut homo, animal, in qua non sunt certae substantiae (f° 15). » — *Sentiuntur* ea quae quinque corporis sensibus cognoscuntur; *percipiuntur* quae animo et mente colliguntur. Per exteriores sensus, ammonetur

Parlant du corps géométrique, produit de l'abstraction, il écrit : En ce corps-là (abstrait), se trouve *réalisée* la ligne, c'est-à-dire *la Longueur en soi* (sans les deux autres dimensions). Non certes qu'un corps sans longueur et sans largeur existe dans la nature, mais il *existe dans l'esprit.* L'anonyme appelle les mots « les signes des choses. » — « Le nom est le véhicule de l'idée, l'organe au moyen duquel l'Idée, la conception de l'esprit est manifestée [1]. » Certes, nous voilà loin de l'ultra-réalisme. Néanmoins ce nominalisme, comme l'appelle le Dr Barach, peut aussi bien s'appeler *Conceptualisme* que le système d'Heiric d'Auxerre, ainsi nommé, et très-justement par M. Hauréau. L'une et l'autre opinion se ramènent en réalité au *Réalisme scolastique.* Cette remarque a son importance.

L'histoire de la pensée humaine, dès qu'elle s'écarte de la nature pour s'aventurer aux systèmes, devient une suite de contradictions. Au IXe siècle nous avons entendu Scot Erigène enseigner le réalisme ontologique, et compromettre par des vues outrées ce qu'il y a de vrai dans cette conception. — Au XIe siècle, Béranger jeta la suspicion sur le nominalisme, ou pour mieux exprimer son sentiment, sur l'individualisme. Si l'Archidiacre de Tours rejette la transsubstantiation, c'est en grande partie pour ses opinions nominalistes. Il les supposait froissées par le dogme catholique. Admettre des accidents physiques, à part de leur sujet normal, n'était-ce pas reconnaître des accidents absolus, subsistant en eux-mêmes [2]? Béranger pressentait-il les vues élevées mais fantaisistes de Gilbert de la Porrée sur la substance, ou avait-il pénétré

» animus ad intellectum, et excitatur primo sensibus. Postmodum vero visa
» apud se per quasdam imaginationes et phantasias recolligit et animo figit.
» sicque meditata verborum officio extrinsecus fundit Cum igitur multae res,
» et infinitae sint, illarum solummodo *cognitionem percipimus intellectu*
» (fo 17). — Intellectus generalium rerum ex particularibus sumptus est (fo 8). »

[1] « Omnes res propriis notulis signantur, id est demonstrantur, et nomina
» signa sunt rerum. Signa aut sunt rerum, aut signa signorum. Signa autem
» rerum primum in animo perceptarum sunt voces, verborum prolationes. »

[2] « Omne enim quod est aliud, est in eo quod aliquid est, nec potest res
» ulla aliquid esse, si desinat ipsum esse; et ne obscurum quod dico rema-
» neat, dicat aliquis : Socrates est, Socrates justus est, nullo modo Socrates

jusqu'au fond des conclusions de Scot? Lanfranc lui répondit que, dans le Mystère Eucharistique, la Cause absolue suppléait le rôle de la substance; et qu'ainsi la Foi était sauve, et la doctrine aussi.

Vers cette époque, un peu avant Roscelin, le Nominalisme, ou le système des *mots* comme on l'appelait alors, fut enseigné à Lille, par Maître Raimbert. Celui-ci eut pour adversaire Odon de Cambrai, ou Odoard dont le traité : *de la Chose et de l'Être* est le plus remarquable document de l'époque. Odon parle beaucoup des Universaux, en fort bon langage. La question des Universaux est nettement posée pour lui. Il penche vers l'ultra-réalisme. Depuis Béranger, les Docteurs orthodoxes devaient se complaire à mettre en relief le côté objectif du concept. D'ailleurs n'oublions pas qu'Odon polémise contre Raimbert. Ces considérations faites, il est assez malaisé de décider s'il rejette le Nominalisme exagéré qui ne reconnaît aux notions universelles qu'une *portée purement vocale*, sans fondement dans l'idée et dans la réalité : ou bien, s'il attribue d'une façon absolue une existence physique à la substance universelle. Odon n'ose pas souscrire à la théorie traducianiste de l'unité substantielle des âmes. Cela eût été conséquent cependant avec le dogme de l'unité de substance! — Ses contemporains paraissaient assez embarrassés de choisir entre lui et Raimbert. Le Dr Prantl rapporte à ce sujet un texte fort plaisant d'Hériman de Tournai. Ce chroniqueur raconte que les disciples des deux écoles, à bout de syllogismes, s'en furent interroger un sorcier sourd-muet, sur le mérite des deux Maîtres. Sur l'avis du devin, la palme fut décernée au Professeur de Réalisme [1]. — Heureux temps, où un brave magicien,

» justus erit, si Socratem esse non contingeret. » (*De sacra Coena*, Ed. Visscher, p. 84.) — « Repetito dico : quicunque negat, post consecrationem » superesse panem et vinum in mensa dominica, et tamen nobis harum » quancumque concedit enunciationum, ipse se subvertit : ipse sibi necessario » contrarius existit. » (*Ibid.*, p. 107.) — « *Impossibile est, corrupto subjecto,* » *non corrumpi quod erat in subjecto.* » (*Ibid.*, p. 194.) — Cf. les éclaircissements ingénieux de M. X. Rousselot sur le Nominalisme théologique de Béranger.

[1] Le texte d'Hériman n'est pas seulement divertissant : il offre un intérêt scientifique réel. Le chroniqueur commence par rapporter au sujet d'Odon,

sans oreilles et sans voix, semblait le plus sûr arbitre des querelles d'école !

Nous ne sommes renseignés sur les opinons de Roscelin, que par S. Anselme de Cantorbéry et par Abélard, qui fut son élève, avant de venir à Paris. D'après le docteur du Bec, le chanoine de Compiègne aurait tenu les substances universelles pour « un pur souffle de voix, pour un simple mot »: toute distinction entre le corps et la couleur, entre les corps concrets et leurs prédicables essentiels aurait été par lui rejetée. Il n'aurait reconnu la qualité de Substance qu'aux seuls individus, et nié que, même au point de vue de l'espèce, l'humanité pût être envisagée comme un homme unique. — Roscelin étendit ces maximes à la

« qu'il ne lisait pas la dialectique *in voce*, à la manière des *modernes*, mais *in re*, comme Boèce et les anciens maîtres. » — Le conceptualisme de Boèce apparaissait donc à ses contemporains comme un certain *réalisme*. Certes, cela aura signifié que, comme Aristote son maître, il reconnaissait aux universaux *un fondement physique dans les individus eux-mêmes*, à la différence des premiers nominalistes, dont le langage du moins faisait supposer qu'ils ne voyaient dans les prédicaments que de purs êtres de raison (Cf. DE RÉMUSAT, *Abélard*, L. II, c. I, p. 298 et suiv.) — On conçoit dès lors qu'Anselme ait pu se séparer avec éclat de Roscelin et de ses pareils, sans cesser d'être un disciple de Boèce que Lanfranc lui avait si diligemment expliqué et que lui-même dut interpréter dans l'école de S^te^-Marie du Bec. — Écoutons Hériman : « Unde et magister Rambertus qui eodem tempore in oppido Insu-
» lensi dialecticam clericis suis *in voce* legebat; sed et alii quamplures ma-
» gistri ei non parum invidebant, et detrahebant suasque lectiones ipsius
» meliores esse dicebant; quamoborem nonnulli ex clericis conturbati, cui
» magis crederent haesitabant, quoniam magistrum Odardum ab antiquorum
» doctrina non discrepare videbant... Unus itaque ex ejusdem ecclesiae cano-
» nicis nomine Qualbertus... tanta sententiarum errantiumque clericorum
» varietate permotus quemdam pythonicum surdum et mutum in eadem urbe
» divinandi famosissimum adiit et cui magistrorum magis esset credendum,
» digitorum signis et nutibus inquirere caepit. Protinus ille, mirabile dictu!
» quaestionem illius intellexit dextramque manum per sinistrae palmam instar
» aratri terram scindentis pertrahens digitumque versus magistri Odonis
» scholam protendens significabat doctrinam ejus esse rectissimam; rursus
» vero digitum contra Insulense oppidum protendens manuque ori admota
» exsufflans innuebat, magistri Ramberti lectionem non nisi verbosam esse
» loquacitatem. » (Ap. PRANTL, II, 82.)

divine Trinité. Admettant trois *personnes* en Dieu, il en aurait fait, dit-on, trois entités distinctes, à la manière de trois Anges, de trois hommes. Selon lui, elles n'auraient eu qu'*une unité purement morale*, résultant de la conformité de leur volonté et de l'égalité de leur puissance [1]. — Abélard reproche en outre à Roscelin de n'avoir pas reconnu de parties dans les choses créées. A propos du texte évangélique rapportant que le Seigneur mangea une *partie d'un poisson*, il aurait assuré qu'il faut entendre cela d'une partie du mot Poisson [2]!! Ce qu'il y aura probablement eu de vrai dans cette bouffonnerie, c'est que Roscelin considérait l'individu comme la véritable Substance; il n'accordait pas aux *parties* une existence indépendante et complète. — Dans la réalité, dit-il lui-même en sa lettre à Abélard, le *toit* suppose l'existence du *mur* et de la *maison*, et ainsi du reste [3]. — Qu'il ait cherché à prouver cela par de puériles subtilités, on peut le croire. Abélard, certes, ne mérite pas toujours créance, quand il accuse un adversaire; mais l'argument prêté à Roscelin est dans le goût de son temps.

Roscelin était-il Nominaliste, au point de ne voir dans les concepts universels ou dans l'élément commun des êtres qu'un simple *son de voix?* Pour employer les termes consacrés jusqu'au XIIe siècle, enseignait-il absolument la Dialectique *in voce*, à l'opposé de ceux qui l'enseignaient *in re?* Si l'on connaissait mieux la doctrine d'Arnulphe de Laôn et de Robert de Paris, qui furent condisciples de Roscelin, chez Maître Jean dit le Sourd, on pourrait mieux répondre à cette question. Mais on ne sait rien de l'enseignement de ces Docteurs ni de Jean lui-même. Ceux qui en ont parlé ont émis des conjectures : ils n'ont rien appris de certain.

[1] *De Fide Trinitatis*, c. II. — Cf. Joan. Sarisb., *Metalog.*, II, 17. — S. Ans., *Ep.*, II, 41 : « Quia Roscelinus clericus dicit, in Deo tres personas esse tres ab » invicem separatas, sicut sunt tres angeli, ita tamen ut una sit voluntas et » potestas, aut Patrem et Spiritum sanctum esse incarnatum, et tres deos vere » posse dici, si usus admitteret. »

[2] Cf. Cousin, *Introd. aux ouv. inéd. d'Abélard*, p. 90.

[3] Cf. Hauréau, *l. c.*, p. 255.

Que de malentendus sont nés d'un nom! M. Hauréau termine son vaste travail sur la Scolastique par ces graves paroles : « S'est-il rencontré, pendant tout le moyen âge, un seul philosophe qui ait considéré les Universaux comme de *pures voix*, de purs noms? Nous ne le croyons pas; Roscelin lui-même, accusé par son disciple Abélard, d'avoir donné dans cette erreur, nous semble avoir été calomnié. Mais, qui se trouve à l'opposé des choses? les noms. Nier les choses, c'était donc réduire ces choses à des noms. Voilà ce qu'on s'empressa de dire; et les défenseurs de la thèse des choses furent aussitôt appelés Réalistes, *Reales;* les défenseurs de la thèse contraire, Nominalistes, *Vocales, Nominales.* Remarquons d'ailleurs qu'il ne fut pas trop malhabile de désigner par ce qualificatif les adversaires des essences universelles; il n'était pas, en effet, difficile de prouver que le Discours n'est pas un vain son de la Voix, et cette preuve faite, on se félicitait d'avoir confondu le nominalisme. Il est vraisemblable que Roscelin et ses partisans protestaient contre cette manière d'argumenter; mais leurs cahiers, leurs écrits nous manquent. Hâtons-nous toutefois de déclarer qu'on peut à la rigueur soutenir cette thèse des mots, bien ou mal développée par Roscelin... C'est en effet une chose qu'un nom, qu'un mot. On recherchait vainement, au sein des substances composées, un tout individuellement universel qui répondît à la définition donnée par les Réalistes : eh bien! cette chose est trouvée; c'est le son réel, très-réel que prononce la voix en désignant l'espèce... Ne considérons donc pas le Nominalisme et le Conceptualisme comme deux doctrines défendues par deux écoles, mais comme une seule doctrine qui se compose de deux thèses; la thèse des concepts, qui sert à définir l'universel interne, le véritable universel; et la thèse des noms, plus ingénieuse que profonde, plus ironique que démonstrative, à laquelle se rapporte l'universel externe, considéré comme un tout réel, une essence, une nature indivisément commune [1] ? » Tous ceux qui ont étudié dans les sources originales le problème scolastique se rallieront à cette conclusion. Nous avons

[1] II, p. 505.

entendu qu'Hériman de Tournai nomme les Nominalistes *les modernes* et les oppose aux Réalistes qu'il appelle les *anciens*. Or, le Dr Prantl a établi que la doctrine des *noms significatifs des idées et des choses* fut tenue par le pseudo-Rhaban, Jépa, l'anonyme édité par M. Cousin et par celui de S. Gall. Du temps d'Hériman de Tournai, on regardait comme anciens et comme *réalistes*, des maîtres qui tenaient l'opinion appelée plus tard *Nominalisme!* En allant sans parti pris au fond des textes, on n'y trouvera, sur la nature de la substance physique, que deux systèmes nettement accusés : *l'ultra-réalisme* des Platoniciens, posant, *dans l'ordre de la réalité*, l'universel avant l'individu, et le *réalisme psychologique* ou réalisme modéré des disciples d'Aristote. Sans doute, Jean de Sarisbury a pu compter jusqu'à douze opinions diverses sur les Universaux. Mais pour quiconque a lu le malicieux auteur du *Métalogicus*, l'esprit le plus fin et le plus caustique de son temps, il est visible qu'il y a une bonne part de raillerie dans cette énumération. Furieux de voir la polémique des Universaux devenue la marotte d'une foule de « gens s'escrimant dans le vide [1], » il se complaît à dénombrer leurs distinctions insensées. Le Dr Prantl, si sévère lui-même pour les Scolastiques, en juge ainsi. Le nominalisme de Roscelin lui semble beaucoup moins cru que le critique de Sarisbury ne l'a pensé. Il y a longtemps du reste que l'exactitude de celui-ci est suspecte [2]. Nous croyons qu'Aventin, le chroniqueur du XIIIe siècle a rencontré plus vrai. Parlant de Roscelin, l'annaliste écrit que ce fut à son occasion que les Péripatéticiens *disciples d'Aristote* (c'est-à-dire de Boèce) se partagèrent en deux camps : l'ancien, fécond à créer des réalités, se vantant de posséder *la science des choses*, et appelé de ce chef

[1] *Polycrat*, l. VII, c. XII. — Un peu plus loin, Jean de Sarisbury ajoute ces paroles, où semble grimacer son ironique sourire : « Les auteurs expédient la question de diverses manières, avec divers langages, et quand ils se sont différemment servis des mots, ils semblent avoir trouvé des opinions différentes, c'est ainsi qu'ils ont laissé ample matière à disputer aux gens querelleurs. » (Trad de M. de Rémusat, *Abélard*, II, p. 3)

[2] Voir la critique de Meiners sur la nomenclature de Jean de Sarisbury, *De nominalium et real. init*, Societ. Goetting. *Comment.*, t. XII, p. 11.

Réaliste; l'autre nouveau... dit *Nominaliste,* avare de réalités mais prodigue de noms, *partisan des notions et des mots* [1]. » — Ne semble-t-il pas que ces paroles soient l'explication de la longue dispute? D'une part, des réalistes exaltés, amoureux d'objectiver les abstractions de leur fécond cerveau : de l'autre, des empiriques rejetant l'existence physique des Universaux, avec une telle fougue qu'ils en négligèrent le fondement réel, et ne parurent leur attribuer qu'une existence purement verbale, comme les Stoïciens de l'école de Mégare [2].

Aventin veut que Roscelin soit le chef de ces derniers. Sans nul doute, il en aura été l'un des types les plus radicaux. Il a tenu que l'universel n'était qu'*un souffle de la voix.* S. Anselme l'assure, mais ajoute qu'il n'avait pas lu ses écrits. Peut-être cette *voix* était-elle l'expression du *concept*, de l'élément commun des choses, qui n'existe que virtuellement dans la réalité, et n'a qu'une subsistance idéale, logique. Par malheur, le chanoine de Compiègne, esprit systématique, aura considéré exclusivement l'ordre physique. Il se sera peu soucié d'indiquer, dans le monde sensible, le fondement objectif des notions générales. Sa préoccupation l'a pu conduire à le nier [3] : n'oublions pas cependant qu'il se réclamait devant les juges ecclésiastiques, de l'autorité de Lanfranc et d'Anselme [4], et trouvait singulier qu'on l'inquiétât. Peut-être

[1] « Hisce quoque temporibus fuisse reperio Rucelinum Britannum, magis- » trum Petri Abelardi, novi Lycaei conditorem, qui primus scientiam (sen- » tentiam) *vocum* instituit, novam philosophandi viam invenit; eo namque » auctore, duo Aristotelicorum peripateticorum genera esse caeperunt : unum » illud *vetus locuples in rebus procreandis,* quod scientiam rerum sibi vindi- » cat, quamobrem *reales* vocantur; alterum *novum,* quod eam distrahit, *nomi-* » *nales* ideo nuncupati, quod *avari rerum prodigi nominum atque notionum,* » *verborum videntur esse assertores..* » (*Ann. Boior.*, VI, ap. PRANTL, II, p. 78.)

[2] Cf. Sur la parenté des Nominalistes et des Mégariens : RIXNER, *Handbuch der gesch. der phil.*, t. II, p. 182. — RITTER, *Gesch. der phil.*, t. II, p. 182. — Voir aussi UEBERWEGG, I, p. 101.

[3] C'est le sentiment de M. DE RÉMUSAT, *Abélard*, II, p. 64.

[4] Jean, abbé de Télèse, plus tard cardinal-évêque de Tuscoli, avait averti S. Anselme que Roscelin se couvrait de son autorité : il l'engageait à lui répondre, afin d'éviter des désagréments pareils à ceux qu'avaient attirés à

il partageait leur manière de concevoir la substance, mais il se donna le tort d'en tirer des conclusions impies et fausses, concernant les mystères révélés. Si nous possédions de Roscelin un autre document que sa lettre à Abélard, muette sur le débat actuel, nous saurions s'il en appela aux vues d'Aristote et de Boèce, consignées dans le Dialogue *de Grammatico.* — Quant à S. Anselme le Métaphysicien, il devait sévèrement juger un esprit d'une nature si opposée à la sienne [1]. Cette disposition dut s'aggraver lorsque Roscelin fit une malheureuse application de ses principes au Mystère de la Ste-Trinité. Quoi d'étonnant, si par une inévitable réaction, Anselme appuya surtout dans ses traités contre l'hérétique, sur le côté objectif de l'Universel, sur la distinction *rationnelle* de la nature et de la personne, de la substance et des accidents ?

Mais a-t-il enseigné l'unité numérique de la substance physique dans tous les individus de l'espèce, en ce sens que l'élément commun préexiste aux types particuliers, en dehors de sa cause exemplaire, et reçoit les individus, à la façon de simples modifications

Lanfranc une réclame de Béranger. Le S. Docteur, trop dédaigneux des menées intrigantes pour s'en soucier beaucoup, lui répond assez brièvement. (*Ep.*, II, 35.) — Dans le Traité *de la Trinité*, composé après son élévation au siége de Cantorbéry, il parle constamment des erreurs du « clerc français, » sur la foi des informations. (C. I, III, VI et *passim.*) — Il nomme Roscelin dans sa lettre à Foulques, évêque de Beauvais. (*Ibid.*, *Ep.*, XLI) et dans celle qu'il adresse à Baldéric. (*Ep.*, LI.) — Celle-ci apprend qu'Anselme avait écrit pour quelques amis une réfutation des erreurs imputées au « clerc franç. » Cette réfutation, imparfaite encore, avait été trop tôt communiquée à d'autres personnes, et cette circonstance fit que l'archevêque la reprit dans l'opuscule sur la Ste-Trinité. Il y aura utilisé sa rédaction primitive. De là, à notre avis, la façon encore vague avec laquelle il s'y exprime sur Roscelin, dont il savait à cette époque le nom et les sentiments. (Cf. Gerberon, *Censura libri seu epistolae de Trinitate*, Op. Ans., p. II)

[1] Il est certain que les nominalistes postérieurs, qui posèrent la question en termes plus précis, repoussent toute solidarité avec le terminisme brutal imputé à Roscelin. Ils sont conceptualistes comme Abélard, comme Rhaban, ou comme Boèce et Aristote. Voir Salabert, *Philosophia nominalium vindicata*, p. 12, sqq.

accidentelles ? A-t-il reconnu une réalité substantielle aux formes générales et aux accidents eux-mêmes ? En un mot, est-ce à bon droit qu'on signale le Docteur de Cantorbéry comme le parrain attitré de l'ultra-réalisme, comme l'un des principaux artisans des « abstractions réalisées, » inaugurées par J. Scot Érigène, et qui compteront de si nombreux partisans?

Cette accusation, que nous avons déjà entendue ailleurs, est si fort accréditée contre Anselme; elle est patronnée par de si beaux noms, qu'il doit paraître hardi d'oser la décliner.

Notre Docteur, nous le savons, avait été élevé avec soin par Maître Lanfranc, dans la Dialectique d'Aristote. Dans le Dialogue *de Grammatico*, nous l'avons entendu définir la substance. L'être auquel, selon lui, convient excellemment ce nom, est-ce l'*universel?* C'est là ce que doit tenir tout réaliste conséquent. Eh bien! pour Anselme, « la substance première est l'homme individuel, Pierre ou Paul, par exemple. » — « Tout ce qui est affirmé de plusieurs êtres n'est pas la substance première, » ajoute Anselme. Qui ne reconnaît ici la doctrine d'Aristote et du classique Boèce ? « La substance, qui est principalement et par excellence telle, est celle qui n'est point affirmée d'un sujet ni n'existe dans un sujet, comme *un homme déterminé, un cheval déterminé*. On les nomme premières substances... parce que tous les autres attributs sont affirmés d'elle ou subsistent en elle [1] ? »

Après cette explication, écoutons la définition de la substance universelle donnée par Anselme. Il nie, dans le Monologue, que Dieu rentre dans la catégorie de la Substance, et pour le prouver, il lui suffit d'une rapide analyse. « Toute substance, dit-il, est ou bien *universelle*, commune à plusieurs substances *selon l'essence*, — ou *individuelle*, possédant l'essence universelle en société d'autres êtres (d'autres types de la même espèce). Qui donc s'imaginera que la suprême Nature puisse être comprise dans la classe des

[1] « Substantia quae proprie et principaliter et maxime dicitur, est quae » neque de subjecto aliquo dicitur, neque in subjecto aliquo est, ut quidam » homo et quidam equus. . Primae substantiae ideo quod aliis omnibus sub» jacent, et alia omnia vel de ipsis praedicantur, vel in ipsis sunt, propter hoc » maxime substantiae primae dicuntur. » (*Catég.*, c. III.)

substances, elle qui ne se divise point en plusieurs substances, et qui ne se réunit point à d'autres par sa participation à leur essence [1]. » Voilà une définition assez embarrassée ! Selon notre S. Docteur, la substance universelle créée serait celle qui se divise entre plusieurs *substances,* qui existe en plusieurs sujets. Mais cette division se ferait de manière à ce que la substance soit commune à ces divers sujets selon l'essence (*essentialiter* communis pluribus *substantiis*). Il y a certes quelque chose d'ambigu et de suspect dans ce terme de *la division de la substance*, engendrant les multiples individus. On le rencontre avec une portée ultra-réaliste chez Scot. Mais Boèce s'en sert dans un sens tout à fait péripatéticien [2]. Porphyre, dans la version de Boèce, avait donné de l'espèce et du genre une définition qui ne diffère pas essentiellement de celle d'Anselme : « Collectivum multorum » in unam naturam species est, et magis etiam genus [3]. » — Il s'agit de constater ultérieurement par l'ensemble des doctrines d'Anselme, s'il tient qu'il n'y a qu'une seule substance, *physiquement*

[1] « Constat igitur, quia illa substantia nullo communi substantiarum tractatu » includitur, a cujus essentiali communione omnis natura excluditur. Nempe » cum omnis substantia tractetur aut esse *universalis* — quae pluribus sub» stantiis essentialiter communis est, ut hominem esse commune est singulis » hominibus; — aut esse *individua* quae universalem essentiam communem » habet cum aliis, quemadmodum singuli homines commune habent cum sin» gulis ut homines sint : quomodo aliquis summam Naturam in aliorum sub» stantiarum tractatu contineri intelliget, quae nec in plures substantias se divi» dit, nec cum alia aliqua per essentialem communionem colligit ? » (C. XXVII.)

[2] P. E. « Omnes hae differentiae specificae nuncupantur, generum enim spe» cierumque differentiae sunt, sed generum quidem *divisivae,* specierum » autem constitutivae. » (*Ad Porph. a se translat.*, p. 81; *in Porph. a Vict. transl.*, p. 11.) — « Nomen generis in tres dividit formas » (*De divis.*, p. 638.) — « Divisio namque multis modis dicitur : est enim divisio generis in species, » est rursus divisio, cum totum in proprias dividitur partes; est alia cum vox » multa significans in significationes proprias recipit sectionem; praeter has » tres, est alia divisio quae secundum accidens fieri dicitur : hujus autem est » triplex modus : unus cum subjectum in accidentia separamus, alius cum » accidens in subjecta dividimus, tertius cum accidens in accidentia seca» mus » (*Ibid.*, p. 639.) — Cf. Prantl, I, pp. 686-687.

[3] *In Porph.*, III; *Isagog.*, II.

et *numériquement une* dans tous les individus de l'espèce ; ou bien, s'il n'a voulu enseigner que l'unité essentielle, métaphysique de la substance, ou si l'on veut, du genre, de l'espèce.

Ce qu'il ajoute ailleurs, au sujet de la matière première et informe où il voit « le *substratum* commun de tous les corps qui se distinguent par leurs formes diverses[1], » n'éclaircit en rien son explication. Cette manière d'envisager l'élément passif et indéterminé du monde corporel recevant de la *forme substantielle* son acte et sa perfection, est empruntée à S. Augustin et à Platon, mais nous la retrouvons chez Aristote; elle n'élucide point la pensée de notre Docteur[2].

Outre la définition de la substance universelle, Anselme nous a donné également celle de la personne. Elle est à ses yeux « la collection des propriétés unies à la nature[3]. »

» Les personnes humaines se distinguent entre elles, en ce que l'ensemble de ces propriétés chez l'une d'elles n'est pas identique à celles d'une autre[4]. — Cette identité, selon lui, est impossible. « L'ensemble des propriétés de Pierre et de Paul n'est pas la même : et Pierre, dit-il naïvement, ne peut être nommé Paul ni Paul Pierre[5]. » — Avec cela, il tient comme Boèce que la personne

[1] « Non autem dubito omnem hanc mundi molem cum partibus suis, sicut » vidimus, formatam constare ex terra et aqua et aere et igne, quae scilicet » quatuor elementa aliquo modo intelligi possunt sine his formis quas conspi- » cimus in rebus formatis, ut eorum informis aut etiam confusa natura videa- » tur esse materia omnium corporum suis formis discretorum. » (*Monol.*, c. VII)

[2] Voir S. Aug., *Confess.*, XII, c. III, VI; *de Gen. ad litter.*, c. XIV, XV. — Platon, *Timée*, passim ; Arist., *Metaph.*, VII; c. III. — Sur cette question voir Suarez, *Metaph.*, disp. XIII et Kleutgen, *Phil. der Vorzeit*, vol. III, pp. 236 et suivantes.

[3] « Una cum natura proprietatum collectio. » (*De fide Trin.*, c. VI.)

[4] « Per hoc enim hominum personae diversae sunt ab invicem, quia uniuscujusque proprietatum collectio non est in alia eadem. » (*De processione S. Spiritus*, c. XXVIII.)

[5] « Diversarum vero personarum impossibile est eamdem esse proprieta- » tum collectionem, aut de invicem eas praedicari. Nam et Petri et Pauli *non* » *est eadem proprietatum collectio;* et Petrus non dicitur Paulus, nec Paulus » Petrus. » (*De fide Trin.*, c. VI.)

« n'est dite que d'une nature douée de raison et individuelle. » — On le voit : à tout prendre, Anselme n'est pas beaucoup plus explicite sur la notion de la personnalité que sur celle de la substance universelle.

Disons toutefois, sans tarder, qu'il se rencontre dans un de ses traités théologiques, une phrase qui paraît recommander très-fort le sens ultra-réaliste.

« Lorsque nous disons d'une manière démonstrative, écrit Anselme dans son livre sur la divine Trinité, *celui-là* ou *cet homme*, nous désignons *la personne* possédant, avec la nature, une collection de propriétés : c'est par ces propriétés que l'*homme universel devient singulier* et *qu'il se distingue des autres* [1]. » — C'est le trait caractéristique des partisans de l'unité *numérique* de la substance, de faire de l'universel ou de la nature commune le premier terme du composé, une entité principale, dont les individus ne sont que des modifications secondaires. Dans le passage que nous venons de rapporter, Anselme semble s'exprimer en ultra-réaliste. Quelles que soient les nuances qui distinguent leurs théories, Guillaume de Champeaux, Gilbert de la Porrée, Guillaume d'Auvergne, et même Adélard de Bath, ont posé l'essence commune comme l'élément réel et unique en nombre, communiqué secondairement aux multiples individus de l'espèce. Eux aussi assurent que « l'homme universel devient individuel grâce aux contingences personnelles. »

Je sais bien que, pour Anselme, la question ne paraît pas avoir été conçue sous un aspect aussi précis. Mais a-t-il en définitive enseigné la priorité réelle de l'universel sur les individus en lesquels elle s'actualise ? Ou bien, malgré son oscillant langage, n'a-t-il revendiqué à l'essence que la priorité logique, en vertu de laquelle les types individuels sont considérés comme des facteurs déterminant l'espèce à telle ou telle forme particulière ? Que celui

[1] « Cum vero demonstrative dicimus *istum* vel *illum hominem*, vel pro-
» prie nomine *Jesum*, personam designamus, quae cum natura collectionem
» habet proprietatum, *quibus homo communis fit singulus* et ab aliis sin-
» gulis distinguitur. » (*De fide Trin.*, c. VI.)

qui désire s'éclairer là-dessus se garde d'oublier que les Nominalistes eux-mêmes ont appelé l'acte de l'individuation le principe déterminant du genre, de l'espèce, considérés comme l'élément général, passif, indéterminé. Albert le Grand n'était pas ultra-réaliste; il n'en écrit pas moins « qu'absolument parlant, la substance se dit de ce qui contient et détermine les natures particulières [1]. » S. Thomas n'hésite pas à voir dans l'essence le principe qui « cause l'être dans son propre sujet, » pour emprunter l'expression de M. Hauréau. Et avant tous les autres, justement à l'endroit de sa Métaphysique où il professe que « le terme producteur est de même forme que le terme produit, bien qu'il n'y ait point entre eux identité de nombre, mais seulement identité de forme, » Aristote lui-même déclare que « telle forme générale *se réalisant* en tels os et telles chairs, c'est Socrate ou Callias [2]. » — Ce serait s'abuser fort que de s'en tenir uniquement aux expressions, en la présente matière.

Le lecteur décidera tout à l'heure de la portée de celles d'Anselme. Qu'il ait la patience d'écouter les textes qui peuvent y répondre quelque jour.

Des savants autorisés ont trouvé de spécieux arguments pour montrer qu'Anselme n'admit jamais l'*essence universelle*, à titre de substance. Ils citent à ce sujet les passages où il enseigne que la nature substantielle s'affirme par excellence des individus, et qu'elle se multiplie en raison de ceux-ci. « En chaque homme, écrit-il, par exemple, il y a tout ensemble et la nature par laquelle il est homme comme les autres, et la personne par laquelle il s'en distingue ; c'est ainsi qu'on le dit tel ou tel, ou de son nom propre, Adam, Abel [3]. » — « La substance, tient-il encore, se dit excellemment des individus : en effet, ceux-ci surtout sont affectés par

[1] « Concedimus universalem naturam absolute dici de eo quod continet et » regit omnes naturas particulares. » (Tr. *de Anima.*)

[2] *Met.*, l. VII, c. VIII. — Cf. l. IX, c. V.

[3] « Licet enim in unoquoque homine simul sint et *natura*, qua est homo » sicut omnes alii, et *persona*, qua discernitur ab aliis, ut cum dicitur *ille*, » vel *iste*, sive proprio nomine, ut Adam et Abel, etc. » (*De conceptu Virg. et orig. peccato*, c. I.)

la pluralité. » Et un peu plus haut : « Les personnes multiples subsistent de telle façon les unes à part des autres, qu'en fait il y a autant de substances qu'il y a de personnes : cela s'observe en plusieurs hommes, où l'on trouve autant de personnes individuelles qu'il y a de personnes [1]. » — Certes, à première vue, ces textes paraissent clairs : autant d'individus, autant de substances numériquement distinctes. Cela semble bien la formule, le mot d'ordre des Péripatéticiens ! Mais qu'on ne s'y trompe pas! On trouve des phrases pareilles chez les ultra-réalistes les plus décidés : chez Guillaume de Champeaux, Gilbert de la Porrée, Bernard de Chartres. — Il s'agit de savoir si par *substance,* Anselme entend désigner l'*essence,* la *nature universelle,* le *genre*, l'*espèce* assimilés aux individus. Sans cette condition, il est évident que les passages allégués ne prouvent pas ce qu'on en tire. — Or, la *substance,* dans le langage d'Anselme, exprime l'*essence déjà individualisée* et *envisagée dans son rapport avec les accidents.* Le Docteur du Bec considère l'être *substantiel* dans sa signification strictement étymologique. Avec Aristote et Boèce, il l'attribue surtout à l'*individu,* comme il nous en avertissait dès le Dialogue du *Grammairien*, à propos de la *substance première.* Quant à la *personne,* elle est pour lui l'*ensemble des accidents*, en tant que ceux-ci sont le signe distinctif des individus d'une même espèce. En fait, Anselme oppose la *substance* aussi bien que la *personne* à l'*essence*, à la *nature.* A celles-ci il reconnaît surtout l'unité ; à celles-là la pluralité. Gilbert de la Porrée l'imitera un jour en cela. — Mais prouvons notre assertion. S'expliquant à l'endroit précité, sur le défaut d'exactitude, inévitable dans l'infirme langage humain dès qu'on l'applique aux choses divines, il s'exprime ainsi : « Toutes les personnes qui sont plusieurs en nombre subsistent à part les unes des autres, de telle manière que nécessairement il y a autant de *substances* que de *personnes*... Si donc quelqu'un veut

[1] « Substantia principaliter dicitur de individuis quae maxime in pluralitate » subsistunt... Omnes plures personae sic subsistunt separatim ab invicem, » ut tot necesse sit esse substantias, quot sunt personae : quod in pluribus » hominibus qui quot personae tot individuae sunt substantiae, cognoscitur. » » (*Monol*, c. LXXVIII.)

dire à un autre ce que sont ces trois, il dira : le Père, le Fils et l'Esprit de tous les deux, à moins que poussé par l'absence d'un nom qui convienne rigoureusement, il ne choisisse un nom parmi ceux-là qui ne peuvent pas être énoncés au pluriel de l'essence suprême, afin d'exprimer par là ce qui ne peut pas l'être par un nom entièrement propre, en disant, par exemple, que cette admirable Trinité est une *Essence* ou *Nature*, et trois *personnes* ou *substances*. Car ces deux noms-ci sont choisis plus convenablement pour exprimer la *pluralité* dans l'Essence suprême. » Écoutons-en la raison ; Anselme la donne lui même : « C'est, dit-il, que le mot *personne* ne se dit que d'une nature individuelle raisonnable — et que la *substance* se dit *principalement des individus qui subsistent surtout dans la pluralité.* Car les *individus* se trouvent par-dessus tout le reste sous les accidents comme leurs supports ou soutiens, et c'est pour cela qu'on leur donne de préférence le nom de *substance* [1]. » Cette explication parait nette. Anselme réserve l'appellation d'*essence* ou de *nature* à l'élément qui donne aux êtres leur unité ; la *substance* signifie, au contraire, le produit résultant de l'individuation. — Aussi ne voulons-nous pas opposer directement les endroits précités à ceux qui tiennent

[1] « ... Omnes plures personae sic subsistunt separatim ab invicem, ut tot » necesse sit esse substantias, quot sunt personae ; quod in pluribus homini- » bus, qui quot personae tot individuae substantiae sunt, cognoscitur. Quare » in summa Essentia, sicut non sunt plures substantiae, ita nec plures per- » sonae. — Si quis itaque inde velit alicui loqui quid sunt tres, dicet esse Patrem » et Filium et utriusque Spiritum, nisi forte indigentia nominis proprie con- » venientis coactus elegerit aliquod de illis nominibus, quae pluraliter in » summa Essentia dici non possint, ad significandum id quod congruo nomine » dici non potest ; ut si dicat illam admirabilem Trinitatem esse unam essen- » tiam vel naturam, et tres personas sive substantias. Nam haec duo nomina » aptius eliguntur ad significandam pluralitatem in summa Essentia, quia per- » sona non dicitur nisi de individua rationali natura, et substantia principa- » liter dicitur de individuis quae maxime in pluralitate subsistunt. Individua » namque maxime substant, id est, subjacent accidentibus, et ideo magis » proprie substantiae nomen suscipiunt. Unde jam supra manifestum est, » summam Essentiam, quae nullis subjacet accidentibus, proprie non posse » dici substantiam, nisi substantia ponatur pro essentia. » (*Monol., ubi supra.*)

Anselme pour patron de l'unité numérique de l'essence, dans les divers types de l'espèce.

Notre Docteur nous fournit un meilleur argument. — Il s'indigne contre les novateurs qui oseraient comparer l'unité des Personnes divines à celle de trois Anges ou de trois âmes. Par là, dit-il, ils introduisent la pluralité dans l'Infini. Pourquoi cela? — C'est que « deux Anges ou deux âmes ne se disent nullement d'une chose *une en nombre*, et aucune *chose une en nombre* ne s'affirme de deux Anges ou de deux âmes [1]. » Entendons-le donc bien. De l'avis d'Anselme, rien, ni la *personnalité*, ni l'*essence* ou la *nature*, ne se disent d'aucun être créé, à titre d'entité physique, de substance *unique* en nombre participée diversement par les individus. Dans son étude sur Duns Scot, M. Hauréau appelle le Docteur subtil un réaliste autant qu'on peut l'être, puisqu'il pose une autre unité réelle que l'unité numérable [2]. Nous ne voulons pas rechercher ici le sentiment de Scot; mais c'est précisement cette unité dénoncée par M. Hauréau que rejette ici S. Anselme. Tout le chapitre III de l'opuscule *de la Trinité* est le développement théologique de cette déclaration. Elle jette une assez vive lumière sur cette abstruse recherche.

Ce n'est pas tout : dans son traité théologique *Sur la Procession du S. Esprit,* Anselme écrit ceci : « En ce qui concerne les personnes humaines, s'il y a *une personne*, il y a *un homme*, et s'il y a *un homme*, il y a *une personne;* s'il y a *plusieurs personnes*, il y a *plusieurs hommes;* et si ceux-ci sont multiples, celles-là aussi n'éviteront pas la pluralité [3]. » Or lui-même nous avertit ailleurs

[1] « Nempe *de nulla una eademque numero re* duo Angeli dicuntur, aut » duae animae, nec unum aliquid numero de duobus Angelis dicitur, aut de » duabus animabus, sicut et Patrem et Filium dicimus de Deo uno numero et » unum numero Deum de Patre et Filio... Talem itaque significat (Roscelinus) » pluralitatem et separationem, qualem habent plures Angeli aut animae, id » est qualem habent plures substantiae. » (*De fide Trin.*, c III.)

[2] *Hist. de la phil. scol.*, II, p. 336.

[3] « Nam in personis hominum si una est persona, unus est homo; et si » unus est homo, una est persona; item, si plures sunt personae, plures » quoque sunt homines; et si isti plures sunt, illae et pluritatem non effu- » giunt. » (*De process. Spir. S.*, c. XXVIII.)

du sens qu'il attache à l'expression *homme*, mis en regard des *personnes* : « Lorsqu'on dit *homme*, dit-il, on signifie seulement *la nature commune à tous les hommes.* Mais lorsqu'on dit d'une manière démonstrative *celui-ci* ou *celui-là*, on désigne la personne qui possède avec l'essence la collection des propriétés en vertu desquelles l'homme devient individuel et se distingue des autres [1]. » Du rapprochement des deux textes d'Anselme, il suit que non-seulement les *personnes*, ou, pour parler en son style, les *substances* sont en même nombre que les individus, mais aussi que l'*homme*, c'est-à-dire l'*essence*, la *nature* commune, se multiplie avec eux. Cette fois nous obtenons une conclusion tout à fait contraire au principe fondamental de la doctrine ultra-réaliste. Il importe de la noter. Elle est bien faite, croyons-nous, pour y jeter quelque jour, et il est surprenant qu'elle ait été négligée jusqu'aujourd'hui.

Mais les réalistes modernes ont essayé de trouver dans les écrits d'Anselme des preuves indirectes en faveur de l'unité numérique et substantielle de l'âme humaine. On sait que les Pères grecs et la plupart des latins professaient la création divine de l'âme individuelle. S. Augustin toutefois avait pensé que l'on expliquerait plus aisément la transmission de la faute originelle, en supposant une sorte d'émanation spirituelle des âmes. Sans rien décider là-dessus, il lui paraissait que, dans cette opinion, leur vice héréditaire se comprenait sans trop de peine. Ses disciples, S. Fulgence, Cassiodore, S. Grégoire le Grand, Alcuin, partagèrent l'hésitation de leur maître. Le créatianisme n'en fut pas moins la commune doctrine des Latins. Sauf quelques novateurs obscurs, aucun Docteur de renom ne paraît avoir reconnu l'unité substantielle et physique des âmes. En 1341, Macaire l'Arménien, qui peut-être avait puisé cette hypothèse aux livres d'Averroës, fut censuré de ce chef par Benoît XII. De nos jours cependant, quelques écrivains,

[1] « Nam cum profertur homo, natura tantum, quae communis est omnibus » hominibus, significatur. Cum vero demonstrative dicimus *istum* vel *illum* » hominem, vel proprio nomine Jesum, personam designamus, quae cum na- » tura collectionem habet proprietatum, quibus homo communis fit singulus » et ab aliis singulis distinguitur. » (*De fide Trin.*, c. VI.)

parmi lesquels je citerai surtout les Docteurs Klee et Berlepsch, ont cru au réalisme physique ou à l'unité physique des âmes, qu'ils estiment dériver les unes des autres, à peu près à la façon de lumières empruntées à un même flambeau. La partie théologique de la querelle ne nous concerne pas. Cette hypothèse erronée se réclame à tort de l'autorité d'Anselme. — Déjà nous l'avons entendu rejeter explicitement l'opinion de ceux-là qui affirment, n'importe à quel titre, l'unité numérique des âmes : « *Nec unum aliquid numero de duobus Angelis dicitur aut de duabus animabus.* » Si les mots ont un sens, ceux-ci semblent péremptoires. En outre, à l'occasion de sa dispute avec Roscelin, il proteste dans une longue suite de considérants dogmatiques contre ceux-là qui assimilent à l'unité des Personnes divines, non-seulement l'unité conceptuelle de la nature angélique et humaine, mais encore l'unité de puissance ou de volonté qu'on trouve dans les Anges ou dans les âmes. Anselme note avec insistance le caractère purement accidentel et contingent de cette double unité dans les esprits créés, et il l'oppose à l'unité nécessaire, substantielle de l'Être absolu. Le lecteur voit la conclusion des prémisses. Il n'y a donc aucun rapport d'identité, nulle véritable similitude entre l'unité divine et celle des substances spirituelles. Or, pour un réaliste conséquent, c'est le contraire qui est vrai. Toutes les âmes n'ont qu'une même et unique essence, une seule activité et volonté substantielle. La diversité entre elles vient uniquement des attributs personnels. Cela est si vrai que les réalistes contemporains se réclamaient, pour leur théorie, de l'aisance avec laquelle elle leur permet d'élucider le mystère de l'unité d'essence dans la pluralité des personnes en Dieu. Une si complète lumière en un mystère que l'on s'accorde à regarder comme impénétrable, jette quelque suspicion sur le système. Mais ce qui est évident c'est qu'Anselme, de ce chef du moins, lui est de tout point contraire.

Il nous reste à examiner les passages de ses œuvres qui ont été invoqués par les défenseurs de l'ultra-réalisme à l'appui de leur doctrine. Ils se rejettent avant tout sur le célèbre texte de la Réponse de notre S. Docteur aux erreurs de Roscelin. « Puisque tous doivent être avertis, dit Anselme, d'aborder avec une très-grande précaution les questions des saintes Lettres, on doit entièrement exclure de la discussion des questions spirituelles ces dialecticiens de notre temps, ou plutôt ces gens dialectiquement hérétiques, qui pensent que les substances universelles ne sont qu'un souffle de voix, et qui ne peuvent comprendre que la couleur soit autre chose que le corps ou la sagesse d'un homme autre chose que l'âme. En effet, dans leur esprit, la raison à laquelle appartient la primauté et le jugement de tout ce qui est dans l'homme, est tellement enveloppée dans les représentations corporelles qu'elle ne peut pas s'en débarrasser et qu'elle ne sait pas distinguer de celles-ci ce qu'elle doit contempler seule et pure (de toute immixtion des facultés inférieures). Car celui qui ne comprend pas encore comment plusieurs hommes sont, *quant à l'espèce,* un seul homme, de quelle manière concevra-t-il dans cette nature très-secrète et très-sublime, comment plusieurs personnes dont chacune est un Dieu parfait sont un seul Dieu? Et celui dont l'esprit est trop offusqué pour distinguer entre le cheval et sa couleur, comment distinguera-t-il entre l'unité de Dieu et la pluralité de ses relations? Enfin, celui qui ne peut comprendre que l'homme est autre chose que l'individu, ne peut concevoir l'homme que comme une personne humaine, puisque tout individu humain est une personne; or, comment celui-là comprendrait-il que le Verbe s'est uni un homme et non pas une personne humaine, c'est-à-dire que le Verbe divin a pris une autre nature, mais non pas une autre personne [1]? »

Mais de bonne foi, que contient ce fragment, sans doute très-important dans notre querelle? Anselme se refuse à admettre

[1] « Cumque omnes, ut cautissime ad sacrae paginae quaestiones accedant, » sint commonendi; illi utique nostri temporis dialectici (imo dialectice haeretici, qui non nisi flatum vocis putant esse universales substantias, et qui » colorem non aliud queunt intelligere quam corpus, nec sapientiam hominis » aliud quam animam), prorsus a spiritualium quaestionum disputatione sunt » exsufflandi. In eorum quippe animabus ratio, quae et princeps et judex » omnium debet esse quae sunt in homine, sic est imaginationibus corporalibus obvoluta, ut ex eis se non possit evolvere, nec ab ipsis ea, quae ipsa » sola et pura contemplari debet, valeat discernere Qui enim nondum intelligit » quomodo plures homines in specie sint unus homo; qualiter in illa secretis-

que les substances universelles ne sont qu'*un simple nom*. Lui, qui avait insisté plus qu'aucun de ses contemporains sur la réalité objective des essences et sur leur rapport avec l'intelligence infinie, pouvait-il voir dans l'universel un *souffle de voix?* — Mais d'autre part, pour se rallier à la doctrine des idées objectives, pour attribuer aux Universaux un fondement dans la réalité et ne pas les réduire à des sons purement matériels, est-il besoin de soutenir l'*unité numérique, physique de la substance?* Déjà Rhaban-Maur, Heiric d'Auxerre et l'Anonyme de Vienne, pour ne citer que ceux-là, ont répondu à cette question. On les vante comme conceptualistes : nous savons pourtant qu'ils n'égalaient pas les notions communes aux rêves de la fantaisie. Bien avant que sa controverse avec Roscelin l'eût obligé aux précautions qu'il dut employer dans la suite, Anselme avait posé la distinction entre la Personne et la Substance. Rendre raison de celle-ci, en la réduisant à un *pur mot,* c'était ramener la multiplicité des personnes diverses à des différences accidentelles. N'admettre qu'une distinction nominale entre la couleur et le corps qu'elle informe, c'était mettre sur le même rang un accident, un prédicable, et l'essence même des êtres. Identifier absolument l'âme et la sagesse, la science, n'était-ce pas confondre grossièrement l'acte contingent avec la faculté caractéristique et l'essence de l'homme? En tout cela, n'y avait-il pas le fait de ceux qui s'obstinent à ne juger des choses que sur les seules apparences, par l'imagination et par les sens? Anselme n'aurait pas tiré ces réflexions de son propre fonds qu'il les aurait entendues d'Augustin. Son maître, en une foule d'endroits, rappelle l'esprit des phénomènes sensibles à la contemplation de l'essence immuable

» sima et altissima Natura comprehendet quomodo plures personae, quarum
» singula quaeque est perfectus Deus, sint unus Deus? Et cujus mens obs-
» cura est ad discernendum inter equum suum et colorem ejus, qualiter
» discernet inter unum Deum et plures relationes ejus? Denique qui non
» potest intelligere aliquid esse hominem nisi individuum, nullatenus intel-
» liget hominem nisi humanam personam. Omnis enim individuus homo per-
» sona est. Quomodo ergo iste intelliget hominem assumptum esse a Verbo,
» non personam, id est, aliam naturam, non aliam personam esse assump-
» tam? » (*De fide Trin.*, c. II.)

et spirituelle. Il avait lu peut-être aussi les dénonciations de Jean Scot contre ceux-là qui ne réfléchissent pas qu'autre chose est le corps, autre chose son essence et qui s'égarent jusqu'à estimer la substance du corps sensible et matérielle. C'est d'une autre façon, notait l'Irlandais, que nous fixons les choses (essences), immuables par le pur regard de l'esprit, et que nous atteignons dans leur simplicité les choses composées [1]? — Notre Docteur juge qu'un homme aussi peu fait que son adversaire aux spéculations abstraites, ne devrait pas pousser la présomption jusqu'à scruter les rapports mystérieux des trois personnes divines. « Ne croyons-nous pas, nous autres chrétiens, dit-il, que Dieu le Père, le Fils et le S^t-Esprit ne sont pas trois Dieux, mais une seule Divinité unique en nombre comme en essence? » Comment le Dialecticien qui met absolument sur la même ligne l'Essence et les Personnes peut-il sauvegarder le dogme fondamental de l'Unité dans la Trinité? On assure que Roscelin entend cette unité de la conformité de volonté et de l'égalité de puissance, et qu'il prétend qu'on pourrait dire que les trois Personnes sont « trois choses » distinctes, trois substances, aussi bien que trois hommes ou trois Anges! Mais qui ne voit que cette comparaison détruit l'unité consubstantielle des divines Hypostases, en la réduisant à l'unité simplement générique et morale qui n'exclut nullement la pluralité numérique des substances? — Nous croyons en outre, ajoutait Anselme, que la deuxième personne de la Sainte Trinité *seule* s'est incarnée pour notre salut, et nous professons que notre Sauveur est vraiment Dieu. Roscelin, en ne reconnaissant aucune distinction entre l'Essence et la personne, doit avouer que les trois

[1] « Sed adversus eos qui non aliud esse corpus et aliud corporis essentiam » putant, in tantum seducti ut ipsam substantiam corpoream esse visibilem » et tractabilem non dubitent, quaedam breviter dicenda arbitror... Quid » ergo mirum aut rationi contrarium, si similiter accipiamus magnificum » Boethium non aliud aliquid variabilem rem intellexisse nisi corpus mate» riale?... Si aliter res per se immutabiles puro mentis contuitu perspiciantur » in sua simplicitate, aliter sensu corporeo in aliqua materia ex concursu earum » facta compositae? » (*De divisione naturae*, l. I, c XLVII, LXI.)

Personnes divines se sont incarnées, ce qui restaurerait l'hérésie de Sabellius. Ou bien il doit attribuer aux trois personnes de la Trinité, tout en les reconnaissant pour divines, trois substances ou natures séparées. Ce serait le comble du délire. — Enfin, c'est l'enseignement de la Foi que la Personne sacrée du Verbe a assumé en elle la nature humaine, et que de cette manière, le Fils de l'Homme est devenu le propre Fils de Dieu. Mais cette économie de l'Incarnation devient impossible dès qu'on pose, avec Roscelin, la coexistence de deux Personnes dont les propriétés sont essentiellement distinctes et même opposées.

Voilà en substance comment raisonnait Anselme. Mais pour sauvegarder toutes ces vérités, que faut-il admettre? Une seule chose : la distinction de la substance et de la Personne, de la substance et des accidents, de l'espèce et des individus qui la composent. Et quel est le facteur de cette distinction? La puissance abstractive de l'esprit, seule capable de contempler, *par son seul et pur regard,* pour parler avec Anselme, l'élément intelligible, l'essence universelle sans les accidents très-réels, mais contingents et multiples qui l'individualisent. Tout cela n'autorise en rien à affirmer l'unité numérique de la substance dans tous les individus de l'espèce. Tout cela ne permet pas d'inférer qu'il n'y a dans tout le groupe humain qu'une âme numériquement une, transmise par la génération à toutes les personnes.

On se rejette sur la doctrine d'Anselme concernant le péché originel. Écoutons les passages les plus vantés par nos Réalistes modernes. Anselme veut montrer comment la faute d'Adam a pu passer à ses descendants. Il observe d'abord que ceux-ci ont un lien réel avec l'auteur commun de notre espèce : « On ne peut nier, dit-il, que les enfants ne fussent en Adam, quand il a péché, mais ils étaient en lui, en tant qu'il est leur cause, ils étaient en lui matériellement et comme dans leur germe, mais ils sont en eux-mêmes personnellement, parce qu'en lui ils étaient le germe même en eux-mêmes, ils sont chacun une personne distincte; en lui, ils n'étaient pas différents de lui, en eux-mêmes ils sont autres que lui. En lui ils étaient lui, en eux-mêmes ils sont eux.

Ils étaient donc en lui, mais ils n'y étaient pas *eux-mêmes* parce qu'eux-mêmes, ils n'étaient pas encore. Peut-être quelqu'un dira-t-il : Cet être par lequel on dit que les autres hommes ont été en Adam est un néant et quelque chose de chimérique auquel on ne doit pas le nom d'être. Que celui-là dise donc aussi que cet être par lequel le Christ a été originairement en Abraham, en David et en d'autres patriarches a été un être négatif, faux ou chimérique : qu'il dise encore que ce n'est rien ce que Dieu a fait lorsqu'il a ordonné d'abord dans leurs germes toutes les choses qui sont produites d'un germe; qu'il dise de plus que c'est un néant ou quelque chose de vain, cet être sans l'existence véritable duquel les choses que nous voyons être ne seraient point. Car s'il n'était pas vrai que ces choses que la nature produit de germes préexistants ont été auparavant quelque chose dans ceux-ci, elles ne naîtraient point d'eux. Or, s'il est insensé de dire cela, ce n'est pas un être faux ou chimérique, mais un être réel et vrai ce par quoi tous les autres hommes ont été en Adam; ce n'est pas quelque chose de chimérique ce que Dieu a fait lorsqu'il les a fait être en lui; mais comme il a été dit, ils n'ont rien été en lui autre chose que lui, et par conséquent, ils ont été en lui tout autrement qu'ils ne sont en eux-mêmes [1]. »

Des textes allégués, les réalistes ont conclu qu'Anselme admet la thèse fondamentale du réalisme physique, non-seulement dans la création inférieure et matérielle, mais par-dessus tout dans la

[1] « Equidem negari nequit, infantes in Adam fuisse cum peccavit; sed in » illo causaliter, sive materialiter (*al.* naturaliter), velut in semine fuerunt; » in seipsis personaliter sunt; quia in illo fuerunt ipsum semen, in se singuli » sunt diversae personae; in illo non alii ab illo, in se alii quam ille. In illo » fuerunt ille, in se sunt ipsi. Fuerunt igitur in illo, sed non ipsi, quoniam » nondum erant ipsi.

» Forsitan dicet aliquis : Istud esse quo alii homines in Adam fuisse dicun- » tur, quasi nihil et inane quoddam est, nec est nominandum esse. — Dicat ergo » illud esse fuisse nihil aut falsum sive vanum, quo fuit Christus secundum » semen in Abraham, in David et in aliis Patribus; et quo omnia quae sunt ex » semine fuerunt non in semine; et nihil fecisse Deum, cum omnia quae pro- » creantur ex semine, ipse fecit prius in seminibus; et dicat nihil vel vanum » aliquid esse hoc, quod si vere non esset, haec quae videmus esse non nature intelligente. D'après eux, il y enseigne qu'il y a dans tous les individus de l'espèce humaine deux substances, chacune numériquement une : la substance corporelle et l'âme. La première est transmise des parents aux enfants par voie de génération : la seconde est communiquée à ces derniers par une véritable procréation, ou si l'on veut, par l'émanation d'une force spirituelle, qu'on peut considérer comme l'âme de l'enfant elle-même. C'est en ces propres termes que les réalistes modernes, précisément à l'occasion des textes d'Anselme, ont conçu leur système. On voit qu'en fait il implique l'existence *réelle et physique de la substance universelle.*

Au point de vue purement philosophique où nous demeurons placé, il suffit d'examiner sans parti pris ces passages pour se convaincre qu'ils n'affirment que la descendance de tout le genre humain du premier couple créé, par voie de génération. En Adam se concentrait, à l'origine, toute l'humanité. Toutes les personnes qui ont existé dans la suite des temps sont issues de ce père commun, par l'organe des parents médiats. Elles étaient comme contenues dans le premier terme de la série. Il y a plus : en vertu de la fécondité continue qui est le caractère et la loi de l'espèce (Anselme l'appelle *Natura propagandi*), la même substance matérielle est transmise, par la génération, des parents aux enfants [1]. Sous ce rapport, les individus ne sont pas seulement semblables, mais consubstantiels entre eux : c'est ce que professe Anselme dans l'exemple du germe, contenant en puissance l'arbre futur. Mais la

» possent. Si enim verum non est, ea, quae natura procreat ex seminibus, » in illis prius aliquid fuisse, nullo modo ex ipsis essent. Quod si hoc dicere » stultissimum est, non falsum vel vanum, sed verum et solidum esse fuit, » quo fuerunt omnes alii homines in Adam; nec fecit Deus inane aliquid, » cum eos in illo fecit esse; sed, sicut dictum est, in illo fuerunt non alii ab » illo, et ideo longe aliter quam sunt in seipsis. » (*De Conc. Virg.* C. XXIII.)

[1] « Cum fecit Deus Adam, fecit in eo *naturam propagandi*... Qui creavit » primum hominem sine parentum generatione, creat etiam eos, qui per » creatam ab illo fiunt *propagandi naturam*. » (C. X.) — Le caractère matériel de la force propagative est nettement indiqué au chapitre XVI... « Si » objiciuntur mihi Joannes Baptista et alii qui de sterilibus et in quibus » prae senectute *natura generandi jam erat mortua* propagati sunt.. »

subtance corporelle et psychique ne préexiste pas au premier couple de parents : elle ne reçoit pas surtout les individus particuliers comme autant d'accidents, ou comme une collection de propriétés. Au contraire, ce n'est qu'en eux qu'elle peut exister. Elle leur est immanente; elle finit et commence avec eux. On voit dans quel sens l'on peut et l'on doit dire qu'Adam a été le principe physique et actif de l'espèce humaine. Lorsque Anselme affirme que « tous les hommes ont été dans Adam matériellement et dans leur germe, que tout homme est un Adam par la propagation, » il n'a fait qu'enseigner la transmission de la faute d'origine à toute la race humaine, par voie de *descendance ou de génération* [1]. Ce sont les termes du Concile de Trente : ils ne contiennent pas une libre opinion d'école, mais un dogme de foi.

Quant à ce qu'ajoute Anselme que l'inclusion de toute l'humanité en Adam est quelque chose de *bien réel*, point de difficulté non plus en cela! Le rapport de descendance des enfants à l'égard de leurs parents est certes très-réel, puisqu'il est basé sur le fait même de la génération. Anselme a raison de dire que ce n'est pas là quelque chose de chimérique, un pur néant. Cette conclusion est d'autant plus rigoureuse qu'il avait enseigné plus haut qu'à chaque personne individuelle est réellement assimilée *la nature*, l'essence elle-même. Mais en formulant cette doctrine, le Docteur du Bec n'a pas entendu expliquer la transmission du péché originel par le principe ultra-réaliste de *l'unité numérique du corps et de l'âme des hommes.* Entre ces deux doctrines, il n'y a aucun lien nécessaire. C'est ce qu'avouait récemment un savant critique. En sa Dissertation couronnée par l'Université de Leipzig, où il nomme Anselme un réaliste, le Dr Hohne conclut que ce système ne se retrouve pas dans sa théorie sur la transmission du péché originel!

En tenant compte de ces observations, l'on conçoit également

[1] « Est quidem unusquisque filius Adae et homo per creationem et Adam » per propagationem, et persona per individuitatem, qua discernitur ab aliis... » Nam sicut Adam non se fecit hominem, ita non fecit in se naturam propa- » gandi; sed Deus qui eum creavit hominem, fecit in eo hanc naturam, ut de » illo propagarentur homines. » (C. X.)

ce que signifie, sous la plume d'Anselme, « le péché de la Nature et le péché de la Personne. » — Le péché d'Adam, dit-il au chapitre XXIII de l'opuscule *Sur la conception de Marie*, fut à la fois péché de la personne et péché de la nature; il fut le fait de la *volonté propre* de celui d'où est descendu tout le *genre humain*. Pour ses descendants, privés par sa faute des grâces surnaturelles qui devaient être le prix de sa fidélité, ce dépouillement fut simplement un défaut de la nature, non de la personne. Comme *individus*, ils ne pouvaient être justiciables d'un acte posé par Adam sans participation de leur libre arbitre. Mais en vertu d'un plan providentiel, la fidélité de notre premier Père à la grâce en assurait la transmission à toute l'espèce humaine. Au contraire, sa désobéissance entraînait pour tous ses fils la perte des bienfaits *gratuits* et surajoutés à leurs perfections natives, que Dieu lui avait départis, pour qu'il les communiquât à chacun de nous [1]. — On voit qu'il n'est nullement requis d'embrasser le réalisme de l'espèce pour sauvegarder la solidarité morale du genre humain.

[1] « Est peccatum a natura, ut dixi, et est peccatum a persona. Itaque quod » est a persona potest dici personale; quod autem a natura naturale, quod » dicitur originale; et sicut personale transit ad naturam, ita naturale ad per- » sonam hoc modo.

» Quod Adam comedebat, hoc natura exigebat; quia ut hoc exigeret, sic » creata erat. Quod vero de ligno vetito comedit, non hoc voluntas naturalis, » sed personalis, hoc est, propria fecit. Quod tamen egit persona, non fecit » sine natura. Persona enim erat, quod dicebatur Adam; natura, quod homo. » Fecit igitur persona peccatricem naturam; quia, cum Adam peccavit, homo » peccavit. Siquidem non quia homo erat, ut vetitum praesumeret, impulsus » est; sed propria voluntate, quam non exigit natura, sed persona concepit, » attractus est.

» Similiter fit in infantibus e converso. Nempe, quod in illis non est justitia, » quam debent habere, non hoc fecit illorum voluntas personalis, sicut in » Adam, sed egestas naturalis, quam ipsa natura accepit ab Adam. In Adam » namque, extra quem de illa nihil erat, est nudata justitia quam habebat; et » ea semper, nisi adjuta, caret.

» Hac ratione, quia natura subsistit in personis et personae non sunt sine » natura, facit natura personas infantium peccatrices. Sic spoliavit persona » naturam bono justitiae in Adam; et natura egens facta omnes personas, Ces déductions tirent une nouvelle force de la doctrine d'Anselme sur l'origine de l'âme humaine. Notre S. Docteur tient, d'après l'opinion d'Aristote et de tous ses contemporains, que le fœtus n'est informé par l'âme qu'assez longtemps après la conception [1]. Que suit-il de cela? Des deux choses l'une : Ou bien l'âme, la substance spirituelle, est transmise par *un canal corporel*, le germe, par exemple; ou bien la substance spirituelle est créée immédiatement par Dieu. La première conclusion n'a pu être accueillie par un philosophe spiritualiste. Anselme d'ailleurs a clairement enseigné la seconde. Dans sa première Méditation, il s'adresse en ces termes à son âme : « Pénètre Dieu, aime Dieu et tâche d'exprimer en toi l'honneur de ta création, par laquelle *tu as été créée à l'image de Dieu* [2]. » Or le créatianisme est l'antipode du réalisme psychique. Chaque âme étant le terme d'une opération créatrice spéciale, il est manifeste que, dans cette doctrine, il y a autant de substances spirituelles distinctes qu'il y a d'individus dans l'espèce humaine. Cela est si vrai qu'Odon de Cambrai lui-même n'ose pas soutenir que, « dans la création des âmes, Dieu ne crée pas la substance, mais seulement la propriété, de crainte de paraître déroger à la souveraine toute-puissance, en

» quas ipsa de se procreat, eadem egestate peccatrices et injustas facit. Hoc
» modo transit peccatum Adae personale in omnes qui de illo naturaliter pro-
» pagantur, et est in illis originale sive naturale.
» Unde patet magnam esse distantiam inter peccatum Adae et peccatum
» eorum, quia ille peccavit propria voluntate, illi naturali peccant necessi-
» tate, quam propria et personalis meruit illius voluntas. »

[1] « Sicut in Adam omnes peccavimus, quando ille peccavit, non quia tunc
» peccavimus ipsi qui nondum eramus, *sed quia de illo futuri eramus;* et
» tunc facta est illa necessitas ut cum essemus peccaremus, quoniam *per*
» *unius inobedientiam peccatores constituti sunt multi.* Simili modo de
» immundo semine, in iniquitatibus et in peccatis concipi potest homo intel-
» ligi, non quod in semine sit immunditia peccati, aut peccatum sive iniqui-
» tas, sed quia ab ipso semine et ipsa conceptione, ex qua incipit homo esse,
» accipit necessitatem *ut, cum habebit animam rationalem,* habeat peccati
» immunditiam, quae non est aliud quam peccatum et iniquitas. » (*Ibid.*. c. VII.)

[2] « ... Intelligas Deum, ames Deum, et tuae elevationis dignitatem, *qua*
» *ad imaginem Dei creata es*, salubriter exprimas. » (*Med.*, I, § 1, p. 203.)

disant qu'elle crée seulement les accidents des personnes, et non les substances elles-mêmes [1]. »

Anselme avait vécu dans un temps où la controverse entre Réalistes et Nominalistes n'était pas formulée avec une complète netteté. Nous avons vu qu'il règne une certaine indécision dans son langage. Boèce lui-même n'était pas entré fort avant dans le difficile problème. La maladroite application que fit Roscelin de ses principes au plus auguste des Mystères chrétiens; la façon exagérée, exclusive dont il les exprima furent cause qu'Anselme s'occupât plus de défendre le Dogme que d'exposer une théorie générale sur la nature de la substance. Étonnant malentendu! Dans son ouvrage sur S. Anselme, M. de Rémusat nous avertit que notre Docteur n'a pas poussé très-loin la discussion des Universaux. Cela ne l'empêche pas de le représenter ailleurs comme un réaliste *excessif* [2]!

Peu de temps après Anselme, Guillaume de Champeaux professa l'ultra-réalisme dans toute sa crudité. Le système de Guillaume garde encore plus d'une obscurité. Selon les critiques, il aurait tenu l'*unité physique de l'Espèce,* dont les multiples *individus* ne seraient que les formes accidentelles et extérieures. Son opinion se résume dans cette phrase connue : « *L'homme* est une espèce, une chose essentiellement une à laquelle adviennent accidentellement certaines formes qui font Socrate [3]. « A ce compte,

[1] « Vix audemus dicere in creatione animarum Deum non creare substan- » tiam, sed proprietatem solam, ne derogare videamur omnipotentiae summae, » si sola accidentia dicuntur in personis et non substantias creari » (*De pecc. orig.*, II, § 20.)

[2] *Abélard*, I, p. 359. — « S. Anselme, son puissant adversaire, se jeta par opposition dans *l'excès du réalisme.* » — Toute la discussion théologique, qui suit ces paroles, est assez faible.

[3] « Homo quaedam species est, res una essentialiter, cui adveniunt formae » quaedam, et efficiunt Socratem : illam eamdem essentialiter eodem modo » informant formae facientes Platonem et caetera individua hominis, nec ali- » quid est in Socrate praeter illas formas informantes illam materiam ad » faciendum Socratem, quin illud idem eodem tempore in Platone informatum » sit formis Platonis. » (*De Gen. et specieb.*, p. 513. — Cf. M. de Rémusat : *Abélard*, II, p. 24.) — « Erat autem in ea sententia de communitate universalium, ut eam-

dit M. de Rémusat, l'universel serait attribuable à plusieurs, en ce sens qu'une même chose serait en plusieurs, diversifiée uniquement par l'opposition des formes et conviendrait ainsi aux individus, soit essentiellement, soit subjectivement [1]. » On sait qu'Abélard répondait à cela qu'en ce cas, partout où ne se trouvait pas Socrate, ne se trouvait point l'espèce humaine. Quoi qu'il en soit de cette observation souvent rappelée, Abélard fit faire un progrès réel à la question, en la ramenant à des termes plus précis. Il tient que les Universaux, comme tels, ne sont pas des *mots* ou des *vocables matériels* (*voces, flatus*), comme paraît l'avoir insinué Roscelin, mais des termes significatifs (*sermones*). Pour lui, l'Universel ou l'élément commun aux divers individus est ce qui naturellement peut être affirmé de plusieurs choses. » — « Lorsque l'espèce est dite être créée ou produite par le Genre, dit-il, il ne faut pas pour cela que le Genre précède ses espèces chronologiquement, ou dans l'ordre de l'existence, de sorte qu'il doive exister avant elles. En réalité, jamais le Genre n'exista que par quelque espèce : jamais animal n'exista qu'il ne fût raisonnable ou non raisonnable. De même les espèces existent en réalité avec leurs Genres [2]. » C'est ici la doctrine aristotélicienne de l'immanence de l'universel dans les choses, dit très-bien le Dr Ueberwegg. — Si Abélard n'a pas résolu le problème scolastique, il a du moins écarté les points de vue extrêmes. Bernard de Chartres, Guillaume de Conches et Adélard de Bath cherchèrent à concilier, dans leurs livres, Aristote et Platon. « Ce qui nous tombe sous les sens, dit Adélard dans un texte dont j'emprunte la traduction à M. Hauréau, étant genre, espèce ou individu, à bon droit Aristote a dit que le

» dem essentialiter rem totam simul singulis suis inesse adstrueret individuis,
» quorum quidem nulla esset in essentia diversitas, sed sola multitudine acci-
» dentium varietas. — Sic autem istam correxit sententiam, ut deinceps rem
» eamdem non essentialiter sed individualiter (indifferenter ?) diceret. » Cf. M. Hauréau, I, p. 367. — Le savant critique y discute la variante indiquée, avec sa pénétration ordinaire.

[1] *Abélard*, II, p. 97.

[2] *Intr. ad theol*, II, 13, p. 1083. — Cf. *Dialect.*, p. 458. — Voir Prantl, II, pp. 160 et suiv.; Ueberwegg, II, p. 138. — de Rémusat, *Abélard*, II, pp. 119-142.

Genre, l'Espèce, l'Individu ne se trouvent pas ailleurs que dans les choses... Cependant comme ces choses, en tant qu'on les appelle *genres* et *espèces*, ne sont contemplées par personne, pures et en elles-mêmes, sans le miroir trompeur de l'imagination, Platon a dit qu'elles se conçoivent et existent telles hors du sensible, c'est-à-dire dans l'intelligence de Dieu. Ainsi, ajoute avec quelque naïveté le candide auteur du système de la non-différence, ces philosophes qui paraissent s'exprimer en des termes contradictoires, ont toutefois en fait la même opinion [1]. » — Rappelons à cette occasion que dans ce système d'Adélard *l'universel* était le *non-différent* dans les êtres de la nature : il s'appelait *la substance* et *constituait le premier sujet réel.* Les individus étaient *les différents,* les notes accidentelles : elles se nommaient l'*Essence des êtres* et constituaient le principe de la multiplicité : les personnes [2].

On a avancé que le système éclectique de la *non-différence,* comme on l'appella, fut celui d'Albert le Grand, de Thomas d'Aquin et de tous les grands Docteurs. Il est plus exact de dire que les partisans d'Adélard considèrent l'universel, la nature commune, comme le principe du composé, auquel les caractères particuliers viennent s'ajouter comme des déterminations accidentelles. — Avec autant d'énergie qu'Adélard, nous avons entendu le Docteur de Ste-Marie du Bec nous dire que la substance n'existe que dans l'individu. Ce n'est pas seulement de l'essence qu'il affirme l'individualité, mais de la substance elle-même. Cela n'a pas empêché M. Hauréau d'écrire « qu'aux yeux d'Anselme, il semble que l'universel soit une nature discrète, séparée des individus, et fonctionnant au sein de l'univers, pour son propre compte. » Anselme est mis par lui au rang des plus intempérants réalistes, de Jean Scot Erigène, de Gilbert de la Porrée, de Guillaume de Champeaux!

Nous avons nommé tout à l'heure les Docteurs du XIIIe siècle. Ils achevèrent de circonscrire le problème, en précisant la part

[1] *Ouv. cit.*, I, p. 352.

[2] Sur la distinction entre la substance et l'essence devenue si importante depuis Abélard, voir le savant travail de M. Barthélemy de St.-Hilaire, *Sur la logique d'Aristote*, t. Ier, sect. II, c. II.

de l'esprit dans la genèse de l'Être Universel, et en déterminant le côté psychologique de la question. Les Arabes venaient de leur faire connaître les œuvres métaphysiques d'Aristote, et leurs propres Commentaires sur sa Philosophie. — Avicenna (1037) avait exposé longuement la Doctrine péripatéticienne des Universaux. — Ce n'est point en dehors de l'esprit, avait-il dit, que l'Universel est véritablement une Essence UNE, par exemple, que l'animal a l'universalité réelle. Mais c'est dans l'esprit que l'animal a une existence commune à beaucoup d'êtres, par le fait de la comparaison, de façon à ce que la comparaison rapproche la forme des êtres multiples dans lesquels elle existe d'une manière semblable [1]. — Il se résume en cette formule : *Intellectus agit universalitatem in formis*. Avicenne, s'inspirant du Stagyrite, distingue, les *Universaux ante res :* ce sont les Idées divines, exemplaires des réalités créées; les *Universaux in rebus :* c'est l'essence immanente aux choses identifiées de fait aux formes accidentelles; les *Universaux post res;* c'est le type commun recueilli des individus par voie d'abstraction et de comparaison. L'aperception des individus s'appelle chez le médecin arabe *Intentio prima*. L'abstraction, l'idée générale produit de l'acte réflexe de l'esprit sur les termes de la perception se nomme *Intentio secunda*. Ces termes sont devenus célèbres. — La thèse est mieux posée par Avicenne que par Boèce. N'oublions pas que les Arabes avaient reçu des Néoplatoniciens de Syrie, auxquels ils devaient la traduction des livres d'Aristote, la doctrine de l'Exemplarisme ou des Universaux *ante res*. Allgazel (1111), Averroës (1198) reproduisirent presque entièrement les vues d'Avicenne. C'est surtout grâce à Albert le Grand (1193) que l'Aristote des Arabes pénétra dans les Écoles d'Occident. Albert cite textuellement Avicenne : L'universel, selon lui, dit-il, existe de fait dans l'individuel, mais il est apte à exister en plusieurs individus... Il peut être considéré de trois manières,

[1] *Met.*, V, c. II. — Cf. PRANTL, II, p. 349. — La partie de l'œuvre du professeur de Munich, consacrée à la logique des Arabes, offre une importance capitale pour l'étude de la scolastique. S'inspirant aux sources les plus récentes, l'auteur montre avec beaucoup de sagacité sous quel aspect la philosophie arabe a passé dans les écoles de l'Occident.

selon qu'on l'envisage dans son rapport avec l'intellect, enfin selon qu'on le considère dans son rapport avec tel ou tel individu. Au premier point de vue, il n'est que la simple et invariable nature des êtres, qui leur donne leur essence, leur concept et leur nom... Selon qu'il se trouve en tel individu ou en tel autre, il représente l'essence avec ses attributs accidentels... Dans son rapport avec l'intelligence, il peut être considéré de deux manières aussi : relativement à l'intelligence de la Cause première dont il est comme un rayon : ou dans son rapport avec l'intelligence qui le connaît par voie d'abstraction et lui communique ainsi l'universalité [1]. — Par conséquent, et c'est là ce qui nous intéresse, d'après Albert, pas d'universel réellement existant, « aucune substance réelle se partageant à toutes les substances particulières. »

Sauf une clarté plus grande encore, nous trouvons la même doctrine chez S. Thomas d'Aquin. « A l'Essence commune (à plusieurs individus), dit-il, ne peut être attribuée la forme de l'universalité, si ce n'est selon *l'être intelligible* (l'ordre idéal). De cette façon seulement, elle est la nature unique qui peut s'affirmer de plusieurs sujets. » Néanmoins l'Essence à laquelle l'universalité est attribuée par l'esprit, existe réellement [2]. Voilà pourquoi, ajoute S. Thomas avec un sens profond, les noms communs qui signi-

[1] *De praedicabilib.*, II, p. 1. — Ap. PRANTL, p. 92-100. — « Universale » autem est, *quod cum sit in uno*, aptum natum est esse in pluribus... Et sic » universale est quod de sua aptitudine est in multis et de multis. » (*Ibid.*, c III.) — « Universale triplicem habet considerationem, scilicet secundum » quod in se ipso est natura simplex et invariabilis, et secundum quod refer- » tur ad intelligentiam, et secundum quod est in isto vel illo. Primo quidem » modo simplex est natura, quae dat esse et rationem et nomen. — Per hoc » autem quod est in isto vel illo, multa accidunt ei... quod est particulatum » et individuatum... Per hoc autem quod est in intellectu, dupliciter conside- » ratur, scilicet aut secundum relationem ad intellectum Intelligentiae primae » cognoscentis et conscientis ipsum, cujus radius quidam est, aut secundum » relationem ad intellectum per abstractionem cognoscentem ipsum... » (*Ibid.*)

[2] « *Naturae communi* non potest attribui intentio universalitatis, nisi » secundum esse quod habet in intellectu : sic enim solum est unum de mul- » tis. — Ipsae autem naturae quibus accidit intentio universalitatis sunt in

tient les Essences, sont de fait affirmés des individus eux-mêmes, mais pas les noms *qui expriment les formes de l'esprit.* Socrate est un homme : il n'est pas *une espèce,* bien que l'homme soit une espèce. — Et il écrit ailleurs : Il y a des êtres qui existent hors de l'âme, selon leur être complet, comme l'homme, la pierre... il y en a qui n'ont aucune sorte d'existence hors de l'âme, comme les rêves et les chimères. Il y en a aussi qui ont *un fondement dans la réalité,* et en dehors de l'âme, mais dont la dernière raison formelle est le produit de l'acte intellectuel, comme cela se voit dans l'universel. Ainsi l'Humanité est quelque chose de réel; mais dans la réalité, elle n'a pas la forme d'une Essence universelle. En dehors de l'esprit, il n'y a pas d'humantié commune à plusieurs individus : ce n'est que dans l'esprit qu'à l'humanité est attribuée la forme d'après laquelle elle prend le nom d'espèce [1].

» rebus; et propter hoc nomina communia significantia naturas ipsas praedi-
» cantur de individuis, non autem nomina significantia intentiones. Socrates
» enim est homo, sed non est species, quamvis homo sit species. » (*Com. in lib. de anima,* l. II, lect XII.)

[1] *In I sent. dist.,* 19, q. 5, a. 1. — Cf. l'opuscule 48, *de Universalibus :* Transcrivons ces quelques lignes... « In homine sic intellecto (h. e. universali-
» ter) est duo considerare, scilicet ipsam naturam humanam seu habens eam ;
» et ipsam universalitatem, seu abstractionem a dictis conditionibus mate-
» riae. Quantum ad primum, homo dicit rem; quantum vero ad secundum,
» dicit intentionem ; non enim in re invenitur homo, qui non sit *hic* et *nunc ;*
» et ipsa natura ut sic,dicitur esse prima intentio. Sed quia intellectus reflec-
» titur supra se ipsum, et supra ea quae in eo sunt sive subjective, sive
» objective, considerat iterum hominem sic a se intellectum sine conditionibus
» materiae; et videt, quod talis natura cum tali universalitate seu abstrac-
» tione intellecta, potest attribui huic et illi individuo, et quod realiter est
» in hoc et in illo individuo; ideo format secundam intentionem de tali natura,
» et hanc vocat universale, seu praedicabile vel hujus modi. » (*Ibid.*, c. II.)
— « Quia intellectus noster ea quae in re sunt conjuncta potest distinguere,
» quando unum eorum non cadit in ratione alterius, et quum rationale in se
» consideratum non sit de ratione sensibilis; ideo ea separatim accipit.
» Quando ergo intellectus considérat in re illud in quo convenit cum aliis
» rebus,*illi rei conceptae* attribuit intentionem universalitatis; intentioni vero
» universalitatis respondet extra, ut fundamentum, illud in quo Socrates est
» conformis cum aliis rebus. »

On voit à la simple lecture de ces textes combien le problème a gagné en netteté chez les Docteurs du XIII^e^ siècle. L'esprit romanesque d'un nombre assez considérable de Scotistes et d'ultraréalistes compliqua de nouveau la discussion. On tint qu'à part toute opération abstractive de l'esprit, il existe des formes universelles. Selon ces maîtres, l'Essence, la Nature commune serait distincte des individus non-seulement en raison, mais d'une manière formelle, et à part de toute réflexion psychologique. La nature subsiste, numériquement une, dans les multiples individus de l'espèce.

Ces thèses dont l'exagération choque si fort provoquèrent la réaction de Guillaume d'Occam. D'après lui, l'universel, dit-il, exprime l'essence; il manifeste dans l'esprit la nature de l'être en dehors de l'esprit [1]. Le canoniste de Louis de Bavière professe que l'acte abstractif qui engendre l'universel n'est qu'une fiction, mais en même temps, il tient qu'en réalité lui correspond une entité semblable à sa forme, et qui est la nature même de l'être. Cette déclaration rappelle le fondement objectif des concepts généraux si clairement définis par les Maîtres du XIII^e^ siècle. Seulement, d'Occam insiste à l'excès sur le côté conceptuel du problème. On croirait entendre Roscelin. Le critique était un partisan excessif de l'école terministe accréditée par Psellus le Byzantin. Il considère les concepts universaux, comme des *signes* représentant, au point de vue du Discours et de l'expression, des individus d'essence semblable. L'universel n'a d'existence réelle, dit-il en certains passages, que dans le Discours. Mais, comme Abélard, il a soin d'ajouter que les *Termes* répondent aux *concepts* qu'ils manifestent. Il est vrai que, pour lui, les mots sont des signes *arbitraires* des idées. Il faut se souvenir pourtant qu'à côté de l'*universel* considéré uniquement dans

[1] Cf. G. Biel : « Universale non est aliquid *reale* habens esse subjectivum » (h. e. objectivum, comme diraient les modernes) nec in anima, nec extra » animam, sed tantum esse tale in esse objectivo (= subjectivo) quod habet » res extra in esse subjectivo. » (*In Sent.*, I, d. 11, q. 8) — « Sed magis pro» prie loquendo debet concedi quod universale exprimit vel explicat essentiam » substantiae, h. e. naturam quae est substantia. » (*Summa totius log.*, I, p. 17.)

les mots, il distingue l'*universel naturel* ou « symbole qui *par sa nature* peut être attribué à plusieurs êtres [1]. » Sans trop le savoir, Gabriel Biel a montré que d'Occam n'a jamais rejeté le fondement réel des Universaux [2]. Il est regrettable qu'il n'ait pas exposé ses vues d'une façon plus développée et plus synthétique. A l'encontre d'Anselme de Cantorbéry, c'était un psychologue plutôt qu'un métaphysicien, et la licence des réalistes exalta ses tendances empiriques, au grand détriment de sa doctrine qui n'est pas toujours claire ni complète.

Dans les limites que nous prescrit la nature de notre sujet, nous pouvons à présent porter un jugement général sur la manière dont la question des Universaux a été envisagée durant les premiers siècles du moyen âge La partie psychologique du problème ou la *genèse des notions communes dans l'esprit* a été parfaitement traitée par les Docteurs, surtout par les Maîtres du XIII[e] siècle. Ils établirent avec la dernière clarté que c'est le propre de la raison de saisir, dans les êtres de la nature, l'essence pure et de la dépouiller, par l'abstraction, des attributs accidentels auxquels elle coexiste dans la réalité. C'était nier l'existence concrète

[1] « Quarta posset esse opinio quod nihil est universale ex natura sua, sed » tantum ex institutione, illo modo *quo vox est universalis*, quia nulla res ex » natura sua habet supponere pro alia re nec vere praedicari de alia re, sicut » nec vox, sed tantum ex institutione voluntaria. — *Sed haec opinio non* » *videtur vera*, quia *tunc nihil ex natura sua esset species vel genus* nec e » converso. » (*In Sent*, I, d. 11, q. 8. — Ap. Prantl, III, p. 357.)

[2] Citons seulement le texte suivant : « Videtur opinio probabilior quod uni- » versale est conceptus mentis : id est, actus cognoscendi qui est vera qua- » litas in anima, et res singularis, significans univoce plura singularia aeque » primo. — Quorum singulorum est *naturalis similitudo*, non in existendo, » sed in repraesentando : propter quod dici potest *fictum*, similitudo, imago » vel pictura rei; etiam objectum cognitum, sed non seipso, sed alio conceptu » *reflexo*. Est etiam universale vox vel scriptum aut quodcumque aliud » signum, ex institutione vel voluntario usu significans plura singularia uni- » voce. » (*In sent.*, d. 11, q. 9.) — Notons que le rapporteur fidèle de Guillaume d'Occam admet le fondement naturel des Universaux (naturalis similitudo). Mais, *comme entité*, l'universel n'a pas d'existence absolue; il n'a qu'une existence représentative, à titre de signe, de parole parlée ou écrite.

et séparée de la substance universelle, et affirmer en même temps le fondement des concepts généraux. Nous avons retrouvé les linéaments rudimentaires de cette doctrine dans Anselme de Cantorbéry.

Restait la partie physique ou, si l'on aime mieux, physiologique de la question. Y a-t-il dans les êtres vivants un élément unique qui est transmis en réalité aux divers individus constituant une classe naturelle d'êtres, ou pour parler exactement, *une espèce?*

Pour répondre à cette interrogation qui posait le problème de la substance *physique* sous son véritable point de vue, nous devons rappeler qu'Aristote avait conçu le groupement des êtres de la nature selon leurs rapports naturels, notamment *selon leur mode de génération*... « Toute substance est engendrée par une substance synonyme, avait-il dit, et l'homme engendre un homme. » — Et il rapprochait cette thèse de sa théorie sur la substance individuelle par cette grave explication : « Il est évident que les idées (universaux) considérées comme causes, et c'est le point de vue des partisans des idées, en supposant même qu'il y ait des êtres indépendants des objets particuliers, sont inutiles pour la production des essences, et que ce ne sont pas les idées qui constituent les essences des êtres. Il est encore évident que, dans certains cas, ce qui produit est de même nature que ce qui est produit, mais ne lui est *pas identique en nombre* : *il y a seulement identité de forme,* comme il arrive, par exemple, pour les productions naturelles. Ainsi l'homme produit l'homme [1]. » La science des classifications était encore une de ces intuitions de génie où le Stagyrite devançait son temps et pressentait l'esprit moderne. Mais des préoccupations multiples empêchèrent de tirer de cette vue féconde tout ce qu'elle renfermait. Le sentiment du Stagyrite touchant la génération spontanée des espèces inférieures jeta de l'ombre sur sa théorie de la substance. Les ultra-réalistes taillaient le monde réel sur le patron de leurs distinctions logiques, et le peuplaient des plus aventureuses chimères. Les nominalistes, qui d'ordinaire eurent plus

[1] *Met.*, XII, c. III; l. VII, c. VIII.

de souci de l'observation, se donnèrent le tort de négliger le lien des phénomènes : ils méconnurent ainsi l'élément objectif des notions universelles, la nature commune aux multiples individus. Les conceptualistes se rapprochaient comme eux de la vérité, mais leur langage flottait incertain, et accusait trop souvent le vague de la pensée elle-même. Au XIII[e] siècle, on fit un grand pas vers une solution définitive. Albert le Grand et Thomas d'Aquin montrent dans la matière première et indéterminée l'élément simplement potentiel des êtres, qui ne peut être conçu comme réel que dans son union avec la forme : d'après eux, la seule matière réelle est le *terme de la génération, la matière engendrée* [1]. *Le fait de la génération*, là était bien la clé du problème! Les Docteurs le pressentirent. Toutes leurs recherches si abstruses sur la nature de la matière première et sur le *principe d'individuation* trahissent cette préoccupation [2]. Les modernes ont enfin rendu justice à ces discussions dont s'amusait l'élégante frivolité du dernier siècle. Le nôtre s'est mis à scruter à son tour l'entité ou la quasi-entité qui constitue le dernier fondement des déterminations de la substance. La doctrine de la matière et de la forme se retrouve dans les théories des chimistes contemporains. Mais au moyen âge, c'était plutôt par la spéculation que par l'expérience et l'analyse qu'on cherchait à connaître la nature. Après le Docteur Angélique qui avait regardé comme le principe de l'individuation la *matière étendue*, Duns Scot donna un tour plus métaphysique à la discussion. Il distingua dans l'être la matière première, totalement

[1] C'est dans le commentaire d'Albert le Grand sur le *liber IV Principiorum* que M. Hauréau signale ce passage suivant, le plus important qui jusqu'alors avait été écrit au sujet des Universaux.— « Singularitas creationi sive generationi coaequatur, quia *terminus generationis aut creationis est singulare.* » — Mais il faut ajouter avec M. Hauréau que le langage du Docteur universel n'est pas toujours ferme sur cet important sujet. (Cf. S. Th , *Sum.*, I, q. 76, art. 2. — « *Unumquodque* hoc modo habet unitatem quo habet esse. »

[2] Cf. Opusc. *De natura materiae*, c. III. — *De principio individuationis.* —Voy. sur la doctrine de S. Thomas sur le principe d'individuation des êtres les excellentes considérations de Suarez, *Met.*, disp. V, sect. III et suiv.

informe, mais réellement *une et existante en soi :* puis la matière seconde-première, ayant déjà reçu la forme substantielle et devenue ainsi le réceptacle virtuel des formes; enfin la matière troisièmement-première ou la substance engendrée, l'individu procréé par l'essence commune et la forme réunies [1].

Il est vrai : à mesure que la méthode expérimentale se répand dans les Écoles, le problème est résolu d'une façon plus concrète. Le savant Suarez admire que son collègue Fonseca y trouve tant d'aspérités. Pour lui, le principe d'individuation des êtres n'est rien autre chose que leur essence envisagée dans son ensemble, avec toutes ses propriétés. Chaque être est ainsi par lui-même, dit-il, son principe d'individuation [2]. Nous ne pouvons qu'indiquer en passant la solution de Suarez. C'est celle de d'Occam : *Quœlibet res, eo ipso quod est, est hæc res.* (In I Sent. D. II, Q. VI). Elle nous paraît la vraie. Mais veut-on se convaincre combien elle est conforme à l'esprit de la science moderne? Écoutons ce passage où M. Hauréau, montre qu'au XIV^e^ siècle la science se simplifie, sur une foule de points, grâce à l'adoption d'une méthode meilleure, et à la déchéance de l'ultra-réalisme. « Ne voit-on pas du premier coup d'œil, écrit ce savant, combien de problèmes, si vivement débattus au XIII^e^ siècle, se trouvent écartés comme frivoles, par les principes mêmes de la doctrine nominaliste? Il ne s'agit plus de rechercher quelle est la manière d'être de la matière séparée de la forme... Quelle est de même la nature de la forme séparée de la matière? La recherche du principe d'individuation, ce problème qui par son obscurité même avait tant d'attraits pour les scolastiques du siècle précédent, que devient-elle?... La cause, le principe de l'individualité est tout simplement *l'acte générateur de la substance individuelle,* l'acte émané de la cause intrinsèque, du suprême moteur [3]. » Du moment où les Maîtres étaient parvenus à ces conclusions, la

[1] *De rerum princip.*, q. VIII, a. 4. — Voir les études de M. Hauréau sur D. Scot, II, pp. 307-382.

[2] *Metaph.*, d. V, § VI.

[3] Ouv. cit., II, p. 472.

question de la *substance physique* était près de sa solution. Les querelles qui remplirent la fin du XIVe siècle, et les disputes idéologiques dont elles furent suivies la retardèrent. La physiologie moderne, sur ce point comme sur tant d'autres, est revenue à Aristote : non sans doute à l'Aristote des Glossateurs, mais à l'Aristote véritable, au disciple de l'expérience et de la nature. Qu'apprend l'expérience touchant l'élément commun des êtres vivants; qu'enseigne la nature? Qu'est-ce, selon elle, que l'universel *in re,* l'Espèce en un mot? C'est la collection des êtres qui produisent des descendants capables d'en reproduire d'autres à leur tour, de même essence et de forme semblable. La *fécondité continue,* voilà donc le signe et le critère de l'espèce, de l'Universel physique. Ce caractère est en soi indépendant de toute considération de l'esprit. Par l'imagination anéantissez l'homme et la raison. La fécondité des êtres vivants, le prolongement de leurs espèces ne seront pas détruits pour cela. Une essence identique se retrouvera dans tous les individus des mêmes groupes spécifiques. Créée avec le germe primitif, la vie de l'animal passe des parents aux descendants, comme l'eau de la source alimente au loin les réservoirs et les ruisseaux, pour employer une comparaison d'Anselme. Mais comment subsiste cette nature commune? Où trouve-t-on ce caractère de la fécondité continue? *Uniquement, dans les individus, dans les types particuliers.* L'espèce, comme dit Cuvier, n'est que *l'ensemble* des individus descendus l'un de l'autre ou de parents communs [1].— « Conçue comme être collectif » elle n'est, à proprement parler, qu'une abstraction, selon l'expression de M. Flourens [2]. Elle n'a pas une existence séparée et concrète, en tant que substance universelle. Sous ce rapport, elle n'est pas la substance réelle, car celle-ci a été définie par Aristote aussi bien que par Anselme : « Ce qui n'est pas en un sujet ni ne se dit d'un sujet. » Elle est l'attribut exclusif des *individus* possédant, dans l'unité de leur être, le principe constitutif de leur existence et de leur

[1] *Règne animal*, t. Ier, p. 16.
[2] *Ontologie naturelle*, p. 12.

activité. Il est très-possible de concevoir, d'une part, que la substance commune n'existe que dans les individus; et, d'autre part, qu'elle s'identifie de fait à chacun d'eux, et que par conséquent elle est *consubstantielle* à tous les représentants d'une même espèce. La transmission de la substance corporelle aux multiples individus par voie de génération, et la doctrine d'Aristote sur le caractère individuel de la Substance peuvent se concilier parfaitement. Que faut-il à cette fin? Rejeter les thèses de l'ultra-réalisme. Nier contre J. Scot Érigène que, même dans les types particuliers, l'essence universelle subsiste par soi, comme une nature complète et séparée; contre Remi d'Auxerre et Gilbert de la Porrée, nier qu'elle se divise entre les individus, comme si elle avait sur ceux-ci la priorité dans l'ordre de l'existence, et enfin, contre Guillaume de Champeaux et Guillaume d'Auvergne, nier qu'elle reçoive les types individuels comme de purs accidents intrinsèques.

En mettant fin à cette étude, nous devons certes regretter que les déclarations d'Anselme touchant la substance ont été formulées d'une manière incomplète. Ce n'est pas notre faute s'il a fallu, non sans ennui et sans labeur, dégager sa pensée des nuages qui l'enveloppent. La question n'était qu'incidemment posée devant son esprit. Elle se produisait à l'occasion d'une discussion dogmatique, sur la foi de renseignements indécis. Moins heureux que Guillaume de Champeaux, Anselme n'eut pas la fortune de rencontrer un contradicteur vigoureux et précis, dont les arguments l'eussent obligé à déterminer, à éclaircir ses idées. Mais en rapprochant les points principaux professés ou admis par le Régent du Bec, nous pouvons pénétrer sa doctrine [1].

D'une part, lui, le chercheur des causes premières, le disciple

[1] Nous nous rallions entièrement au jugement de M. de Rémusat qui veut qu'Anselme n'ait pas pénétré fort avant dans la grande querelle. Celle-ci commença à devenir tout à fait sérieuse au temps d'Abélard. — On comprend qu'en cet état de choses, nous ne puissions nous étendre sur les aspects divers du problème des Universaux. Nul, à notre avis, ne l'a analysé, en général, avec autant de finesse que l'auteur d'*Abélard*, t. Ier, p. 318, et t. II, pp. 1-142,

de S. Augustin ne peut nier la réalité métaphysique de la substance. Comme élément essentiel des individus; comme principe de leurs énergies et fondement général de leur classification naturelle, elle a une importance prépondérante pour le philosophe : elle ne peut être identifiée, *sans distinction aucune*, aux personnes, *aux singuliers*, ni surtout être réputée un néant, un vain son et une parole fugace. Il est vrai : l'essence universelle n'est pas directement objet de sensation : néanmoins, associée au composé par l'acte indivisible de la génération, elle peut en être séparée par l'intellect, l'affranchissant des propriétés individuelles, et s'élevant, par delà les accidents, jusqu'à l'espèce simple, immuable, commune. De même les qualités, les parties inséparables de leurs sujets en sont toutefois distinctes : ce ne sont ni de purs concepts ni des formules sans fondement. En somme, qu'exige Anselme de Roscelin? Que celui-ci admette au moins une distinction de raison entre la personne et la nature, entre la substance et ses accidents. Très-justement il lui reproche de ne pas concevoir que le Verbe ait pu prendre la nature de l'homme, sans accepter par le fait la personnalité humaine. Il tient que le chanoine de Compiègne introduit dans l'essence divine la distinction et la pluralité qu'il trouve aux choses créées, aux esprits, aux âmes. Il repousse avant tout l'assimilation de l'unité substantielle de l'Absolu et de l'unité *simplement logique, conceptuelle* des substances finies. De l'aveu d'un critique peu suspect de partialité à l'égard du Docteur de Cantorbéry, c'est la thèse de Heiric d'Auxerre et de Rhaban-Maur, de l'école conceptualiste [1].

Nous permettra-t-on de le dire? A notre avis, il y a quelque

[1] Voici comment M. Hauréau termine son examen des opinions d'Heiric d'Auxerre : « Les mots signifiant des pensées, des pensées recueillies de l'observation des choses, Heiric se prononce à l'avance contre la thèse *merae voces, flatus vocis*, qui sera, comme nous le verrons, imputée au chanoine Roscelin. Distinguant donc ce qui est, en effet, conventionnel, de ce qui est, il le dit, naturel, c'est-à-dire nécessaire, et plaçant les idées dans cet ordre, Heiric nous informe ainsi qu'il veut être inscrit au nombre des conceptualistes, en la compagnie de Rhaban Maur. » (I, p. 196.) — Voilà qui est bien dit. Seulement, l'on souhaiterait que M. Hauréau indiquât une opposition réelle entre la doctrine d'Heiric et celle d'Anselme.

engouement à montrer dans Anselme le héraut du réalisme physique, le sectateur prudent de Scot Érigène et le devancier de Guillaume de Champeaux [1]. — La seule réalité qu'incontestablement il a reconnue à la substance universelle, c'est d'une part, sa forme transcendante, idéale en l'intellect divin; d'autre part, son existence abstractive dans l'entendement de l'homme, et son inclusion virtuelle dans l'être individuel. Pour emprunter son langage, l'universel est une chose, en ce sens que nous avons coutume d'appeler de ce nom tout ce qui participe de quelque façon à l'être. On peut l'appeler une Essence, mais à condition de se souvenir que toutes les essences ne sont pas des substances.

Voilà les résultats de notre enquête sur les vues du Docteur du Bec. Ils sont bien loin de présenter un système complet sur le problème des Universaux. Mais on a trop parlé de l'ultra-réalisme d'Anselme pour qu'il fût permis de les négliger. S'il eût vécu quelques années de plus; s'il lui eût été donné d'achever le *Traité de l'origine des âmes* qu'il méditait à la veille de sa mort, peut-être aurait-il laissé à notre curiosité des documents plus formels. Définitivement nous saurions s'il aurait partagé les idées de Guillaume de Champeaux, ou bien celles d'Abélard. Nous croyons sans difficulté que son langage a pu jusqu'à un certain point recommander le dogme de l'unité de substance. C'est de ce chef sans doute que le chroniqueur Heriman lui a prêté la doctrine d'Odon de Cambrai. Mais pour quiconque a souci de l'approfondir, son sentiment vaut mieux que ses paroles. Tels qu'ils sont, les textes que nous possédons vengent sa mémoire de l'accusation d'idéalisme effréné dont on l'a chargée tant de fois; ils nous donnent le droit de penser qu'à part les vacillements d'une terminologie encore peu fixée, il aurait accepté sur les Universaux la doctrine des grands Maîtres du XIII^e^ siècle, celle d'Albert le Grand et de S. Thomas d'Aquin.

Mais il est temps de quitter cet aride sujet. D'autres débats nous attendent, dans un plus intéressant domaine. Avec Anselme, allons en Théodicée.

[1] C'est aussi l'avis de M. Bouchitté, dans le remarquable article qu'il a consacré à Anselme, au I^er^ vol. du *Dict. des sciences philosophiques*, et du D^r^ H. Ritter, t. VII, p. 341

CHAPITRE IV.

THÉODICÉE DE S. ANSELME DE CANTORBÉRY.

§ 1.

De l'existence de Dieu : preuves tirées de la relation des êtres finis avec la Cause nécessaire et infinie. — Preuve dite *à priori* ou tirée de la seule idée de *l'Être le plus grand.* — Critique ; sources.

La Théodicée ou l'investigation rationnelle de la Cause première constitue la partie la plus importante de la philosophie de S. Anselme de Cantorbéry. Le premier, depuis la renaissance des lettres sous Charlemagne, il a écrit un traité étendu dont Dieu fût l'objet spécial. Les écrivains des grands siècles patristiques nous ont laissé d'admirables élévations sur la Divinité. C'est le mérite de notre Docteur d'avoir coordonné les principaux aspects d'un si difficile sujet. Cet homme du XIe siècle, sorti de l'école des Dialecticiens, a su imprimer à sa Démonstration une telle originalité qu'elle nous charme encore aujourd'hui, et rallie les suffrages de ceux-là même qui s'en séparent en des points essentiels [1].

Anselme tenta cette grave entreprise dans les deux Traités célèbres, le *Monologue* et le *Prosloge*. Le modeste religieux ne les jugeant pas digne de prendre rang parmi les livres, avait d'abord appelé le premier un « Essai de Méditation religieuse, »

[1] C'est avec toute raison qu'Eadmer, compagnon et historien du S. Archevêque de Cantorbéry, écrit au sujet du Monologue : « In tantum contempla- » tionis divinae culmen ascendisse (Anselmum), ut obscurissimas, et *ante* » *tempus suum insolitas de Divinitate et nostra fide quaestiones*, Deo rese- » rante perspiceret, ac perspectas enodaret, apertisque rationibus, quae dice- » bat, rata et catholica esse probaret. » (*Vit. S. Ans*, l. I.)

Exemplum meditandi de fide [1]. L'autre portait pour titre : La Foi cherchant l'intelligence : *Fides quærens intellectum.* Ce ne fut que plus tard, sur les instances d'Hugues, archevêque de Lyon et légat apostolique des Gaules, qu'il leur donna une publicité plus grande, sous le nom de *Monologue* ou Soliloque et de *Prosloge* ou Allocution [2]. Quelques critiques estiment que le Monologue s'occupe surtout de *l'existence de Dieu*, et le Prosloge de son *essence intime.* Nous pensons que les deux moments de la question sont exposés dans ces Traités avec trop d'extension pour qu'on puisse adopter la distinction que nous venons d'entendre. Nous partagerons les vues du S. Docteur d'une manière plus générale. Avant tout nous examinerons sa démonstration de l'existence de la première Cause; ensuite nous nous occuperons de ses idées sur l'essence divine elle-même. Dans notre examen l'ordre logique sera notre unique guide : nous ne ferons aucun scrupule de prendre indifféremment les éléments de la discussion dans le Monologue et dans le Prosloge, aussi bien que dans la critique de Gaunilon de Marmoutiers et dans la réponse d'Anselme à ce rude et fin dialecticien.

Anselme reconnaît tout d'abord qu'il y a plusieurs manières de démontrer l'existence de Dieu; mais, dans le Monologue, il s'attache à une preuve qu'il estime tout ensemble simple et efficace. Il commence par noter que tout homme recherche le Bien, c'est-à-dire ce qui, à des titres divers, se révèle comme désirable à la volonté. Cela posé, voici, sans plus de retards, comment raisonne notre S. Docteur : Il est manifeste, dit-il, qu'il y a dans les choses que nous appelons bonnes des degrés divers, et que leur *bonté* est plus ou moins grande. Cela est vrai dans l'ordre physique et sensible comme dans l'ordre moral et immatériel. Or, n'est-il pas clair que ces êtres, considérés précisément sous le rapport de la bonté, supposent *un élément identique en tous?* Cet élément, ajoute Anselme, ne doit-il pas être le principe, la forme immédiate

[1] Cf. *Proslog.*, proœm.

[2] C'est en effet le titre que porte le manuscrit de Saye. — Voir également les chapitres IV et IX du traité *de la Trinité et de l'Inc. du Verbe* — et les *Lettres*, l. I, lett. 63, 65; l. II, lett. 17.

de la bonté à laquelle ils participent selon une diverse mesure et dans des ordres différents? De la sorte, tout ce qui est utile et honnête n'est véritablement bon que par cette forme de toute bonté. Or, ce qui est la cause de toute bonté des êtres doit être à coup sûr un bien excellent. *Ce ne peut être que le Bien en soi, le Bien absolu.* Ce Bien subsistant par soi est d'évidence au-dessus de tous les autres êtres qui ne sont bons qu'à condition de participer à un certain degré à sa bonté. Il doit les surpasser donc de manière à n'avoir parmi eux ni supérieur ni égal. Mais la grandeur, c'est-à-dire la perfection naturelle ou ontologique, est en raison directe de la bonté de l'Être ou du désir qu'il est capable d'engendrer dans la droite volonté. Il y a donc un Être souverainement bon et souverainement grand, supérieur à tous les autres êtres bons distincts de lui (c. 1) [1]. Et de même que nous avons trouvé l'origine de toute bonté dans la participation des êtres à la Bonté en soi, ainsi leur perfection ne s'explique que par leur participation à l'excellence de cet Être. Celui-ci dès lors se révèle à nous comme souverainement grand et souverainement bon, en un mot, comme l'Être absolument supérieur à tout ce qui

[1] « Facile est igitur, ut aliquis sic secum tacitus dicat : Cum tam innume-
» rabilia bona sint, quorum tam multam diversitatem et sensibus corporeis
» experimur et ratione mentis discernimus, *estne credendum esse unum ali-*
» *quid per quod unum sunt bona quaecumque bona sunt*, aut sunt bona
» alia per aliud? Certissimum quidem et omnibus volentibus advertere perspi-
» cuum est, quia quaecumque dicuntur *ad aliquid*, ita ut ad invicem magis
» aut minus aut aequaliter dicantur, per aliud dicuntur; quod non aliud et
» aliud, sed idem intelligitur in diversis, sive in illis aequaliter sive inaequa-
» liter consideretur. Nam quaecumque justa dicuntur *ad invicem*, sive pariter
» sive magis vel minus, non possunt intelligi justa nisi per justitiam, quae
» non est aliud et aliud in diversis. Ergo, cum certum sit quod omnia bona,
» si ad invicem conferantur, *aut aequaliter aut inaequaliter sint bona*,
» necesse est ut omnia sint per aliquid bona, *quod intelligitur idem in*
» *diversis bonis*, licet aliquando videantur bona dici alia per aliud. Per aliud
» enim videtur dici bonus equus, quia fortis est, et per aliud bonus equus,
» quia velox est. Cum enim videatur dici bonus per fortitudinem et bonus per
» velocitatem, non tamen idem videtur esse fortitudo et velocitas. Verum si
» equus, quia est fortis aut velox, bonus est; quomodo fortis et velox latro

existe. — Jusqu'ici nous ne faisons que reproduire rigoureusement l'argumentation de notre Docteur. Poursuivons.

Non-seulement toute la bonté et toute la perfection des êtres émanent d'un principe unique qui est la Bonté et la Perfection suprêmes, il faut tenir en outre que ce Bien absolu est la Cause universelle de tout ce qui *existe*. Dans la pensée d'Anselme, cette conception est si étroitement rattachée aux précédentes observations, que nous voulons tout de suite résumer ici le développement qu'il lui donne.

Tout ce qui existe, dit-il, est déterminé à l'existence par quelque Être. Ce principe déterminant est-il unique ou multiple? Si tous les êtres de la nature sont produits par plusieurs principes, ceux-ci relèvent tous d'*une seule cause*, ou ils existent *chacun par soi*, ou bien ils se sont *mutuellement déterminés* à l'existence. Dans le premier cas, il est clair que cette cause primordiale serait l'Être suprême, Celui que nous avons appelé déjà le souverain Bien. Les causes supérieures subsistent-elles par elles-mêmes? S'il en est ainsi, *cette force de subsister par soi*, assimilée à ces multiples substances, sera elle-même la nature ou le Principe suprême, et

» malus est? Potius igitur quemadmodum fortis et velox latro ideo malus est
» quia noxius est, ita fortis et velox equus idcirco bonus est quia utilis est.
» Et quidem nihil solet putari bonum, nisi aut propter aliquam utilitatem,
» ut bona dicitur salus et quae saluti prosunt, aut propter quamlibet honestatem, sicut pulchritudo aestimatur bona et quae pulchritudinem juvant. Sed
» quoniam jam perspecta ratio nullo potest dissolvi pacto, necesse est omne
» quoque utile vel honestum, si vere bona sunt, *per idipsum esse bona per*
» *quod necesse est cuncta esse bona, quidquid illud sit.*
» Quis autem dubitet illud ipsum, per quod cuncta sunt bona, esse magnum
» bonum? Illud igitur est *bonum per seipsum, quoniam omne bonum est*
» *per ipsum.* Ergo consequitur, ut omnia alia bona sint per aliud quam quod
» ipsa sunt, et ipsum solum per seipsum. At nullum bonum quod per aliud
» est, aequale aut majus est eo bono quod per se est bonum. Illud itaque
» solum est *summe bonum*, quod solum est per se bonum. Id enim summum
» bonum est, quod sic supereminet aliis, ut nec par habeat, nec praestantius. Sed quod est summe bonum, est etiam summe magnum. Est igitur
» unum aliquid summe bonum et summe magnum, id est, summum omnium
» quae sunt. » (*Mon.*, I.)

celles-ci ne méritent leur prééminence qu'en vertu de leur participation à cette force. Quant à supposer que ces causes se sont réciproquement donné l'existence, c'est une conjecture absurde. Comment une chose existerait-elle par l'être auquel elle-même est censée donner l'existence ? Des causes relatives ou dépendantes les unes des autres ne peuvent d'aucune façon se donner l'être et la subsistance. De la suite de ces considérations, il ressort qu'il est impossible d'admettre plusieurs causes supérieures. Mais, en outre, tout ce qui ne possède l'existence qu'en vertu de la détermination d'un autre Être, existe d'une façon moins parfaite que ce qui dépend seulement de soi-même. Ce qui existe par soi existe seul véritablement. Il y a par conséquent un Être qui existe par soi, excellemment, parfaitement. Qu'on l'appelle Essence, Substance, ou Nature, il est souverainement bon, souverainement grand et absolument supérieur à tout ce qui est. (C. III.)

Mais il y a encore une autre suite de considérations qui démontrent cette même vérité. Voici comment Anselme la présente :

Nous observons que les êtres de l'univers offrent *des degrés inégaux de perfection*. Or, il faut que cette échelle progressive s'arrête à un dernier échelon. Il y a donc nécessairement une nature tellement supérieure aux autres qu'elle n'est inférieure à aucune.

Dira-t-on qu'il y a plusieurs natures de cette espèce ? En est-il ainsi, le principe de leur commune supériorité appartient à leur essence, ou bien il s'en distingue. Dans la première alternative, puisque nous sommes en présence d'une seule essence, il devient manifeste qu'il n'y aurait pas plusieurs natures, mais bien une seule; car de fait, dans la présente controverse, la *nature* et l'*essence* sont des termes identiques. Dans l'autre cas, c'est l'*élément communiqué à toutes ces diverses natures* qui sera la substance ou la force suprême. Elles-mêmes ne peuvent être considérées comme supérieures à tous les autres êtres. Il y a donc une Nature, Essence ou Substance bonne et parfaite par elle-même, *qui est par elle-même ce qu'elle est*, et par laquelle existe tout ce qui est bon ou grand, tout ce qui est quelque chose. Il est par conséquent l'Être souverainement bon, souverainement grand, l'Être absolument supérieur à tout ce qui est. (IV) [1].

Nous venons de résumer la première démonstration de l'existence de la Cause nécessaire et absolue que nous rencontrons

[1] « Quod cum ita sit, aut est unum, aut sunt plura, per quae sunt cuncta » quae sunt. Sed si sunt plura, aut ipsa referuntur ad unum aliquid per quod » sunt, aut eadem plura singula sunt per se, aut ipsa per se invicem sunt. At » si plura ipsa sunt per unum, jam non sunt omnia per plura, sed potius per » illud unum per quod haec plura sunt. Si vero ipsa plura singula sunt per » se, utique *est una aliqua vis vel natura existendi per se*, qua habent ut » per se sint; non est autem dubium, quod per idipsum unum sint per quod » habent ut sint per se; verius ergo per ipsum unum cuncta sunt, quam per » plura, quae sine eo uno esse non possunt. — Ut vero plura per se invicem sint, » nulla patitur ratio; quoniam irrationalis cogitatio est ut aliqua res sit per » illud cui dat esse, nam nec ipsa relativa sic sunt per invicem. Nam cum » dominus et servus referantur ad invicem, et ipsi homines qui referuntur » omnino non sunt per invicem, et ipsae relationes quibus referuntur non » omnino sunt per invicem, quia eaedem sunt per subjecta. Cum itaque veritas » omnimodo excludat plura esse per quae cuncta sunt, *necesse est unum » illud esse per quod sunt cuncta quae sunt.* Quoniam ergo cuncta quae » sunt, sunt per ipsum unum, procul dubio et ipsum unum est per seipsum. » Quaecumque igitur alia sunt, sunt per aliud, et ipsum solum per seipsum. » At quidquid est per aliud, minus est quam illud per quod cuncta sunt alia, » et quod solum est per se. Quare illud quod est per se, maxime omnium est. » Est igitur unum aliquid, quod solum maxime et summe omnium est. Quod » autem maxime omnium est, et per quod est quidquid est bonum, vel ma- » gnum, et omnino quidquid aliquid est, id necesse est esse summe bonum, » et summe magnum, et summum omnium quae sunt. Quare est aliquid quod, » sive essentia, sive substantia, sive natura dicatur, optimum et maximum » est, et summum omnium quae sunt. Amplius; si quis intendat rerum natu- » ras, velit, nolit, sentit non eas omnes contineri una dignitatis paritate, sed » quasdam earum distingui graduum imparitate... Cum igitur naturarum aliae » aliis negari non possint meliores, nihilominus persuadet ratio aliquam in eis » sic supereminere, ut non habeat se superiorem. Si enim hujusmodi gra- » duum distinctio sic est infinita, ut nullus ibi sit gradus superior quo supe- » rior alius non inveniatur, ad hoc ratio deducitur, ut ipsarum multitudo natu- » rarum nullo fine claudatur... Est igitur ex necessitate aliqua natura, *quae » sic est alicui vel aliquibus superior, ut nulla sit cui ordinetur inferior.* » (*Mon.*, III. IV.)

chez Anselme. Nous savons que, dans le Prosloge, il a joint à celle-ci son argument préféré, la preuve de l'existence de Dieu tirée de son idée. Avant de passer à l'examen de cette preuve fameuse, nous devons nous arrêter à celle-ci. Elle est d'une très-grande importance, mais en outre, de son intelligence dépend en partie celle de l'argument ontologique lui-même.

Pour conclure à l'existence d'une première Cause parfaite en soi, Anselme en appelle avant tout aux degrés divers d'excellence et de bonté que présentent les êtres de l'univers. Il déduit de cette inégalité qu'ils n'ont qu'une perfection participée, qu'ils ne sont bons qu'en vertu de leur assimilation à un Principe indépendant, autonome qui est le Bien en soi. De cette façon, il établit à la fois et *le caractère relatif* du monde des phénomènes, et sa dépendance d'une *Cause absolue* et souverainement parfaite.

Nous serons bref sur la forme de cette argumentation. Nous l'avons dit ailleurs : notre S. Docteur est un très-subtil dialecticien. Il sort de l'école de Lanfranc, et l'on sait si ce maître célèbre faisait cas de la logique formelle! La portée ontologique ou objective n'est jamais absente de ses vues. Mais l'enchaînement des différentes parties de la preuve n'offre pas toujours une suffisante rigueur. Le métaphysicien, bien souvent, domine, corrige le logicien! Les premiers chapitres du Monologue sont d'une teneur un peu lâche : ils trahissent une méthode en formation. Le *point saillant*, qu'on me passe l'expression, ne se profile pas avec assez de netteté, parmi les circuits de la démonstration. Une certaine attention est requise afin de dégager des formes scolastiques les conceptions empruntées à S. Augustin ou au Timée de Platon. L'esprit est surpris d'entendre S. Anselme conclure que la forme qui se retrouve dans les êtres *diversement bons* est le principe substantiel d'où leur vient de fait leur excellence propre. Cette forme est conçue par notre Docteur comme le Bien en soi, l'Être suprême, l'Infini vivant et personnel! — Voilà un exemple remarquable de ces transitions brusques de la notion purement abstraite à l'ordre concret. Ce n'est pas le premier que nous avons relevé. Le procédé est familier à ceux qui se sont beaucoup préoccupés de formules et de distinctions.

Cultivée à l'excès, isolée de la nature, de l'expérience positive, la logique empiète ainsi d'elle-même sur l'ontologie. L'histoire de la Philosophie est pleine de ses coups d'État. En ce sens, nous avouons qu'Anselme fut parfois porté à réaliser des abstractions. Mais en soi son premier argument est d'une profonde philosophie. Avec plus de rigueur, les Scolastiques, Thomas d'Aquin entre autres, le lui reprendront bientôt. Quel est le principe qui se cache sous la suite de considérations que nous avons reproduites. Le voici : le degré, l'*inégale mesure dans la qualité* implique son caractère accidentel et purement relatif. Cet axiome posé, l'existence actuelle d'êtres présentant des qualités, des excellences *diverses* et *graduées*, ne peut s'expliquer qu'à condition de présupposer l'existence d'une Bonté ou d'une Perfection absolue. Étendons un peu ces pensées.

De fait, que nous révèle l'observation de la nature? Que l'*essence des êtres*, leur attribut constitutif et *spécifique* subsiste d'une façon *totale, indivisible, identique dans tous les individus de l'espèce*. Cela est fondamental dans notre question. Le type *naturel* de l'homme n'admet aucune modification, aucune différence de degré. Les individus peuvent sans doute s'approcher ou s'éloigner du type esthétique ou moral de l'humanité, mais ils participent tous, *dans une mesure égale*, de l'essence humaine. De là l'adage : *Plus et minus non mutant speciem ;* « le plus ou le moins ne tombent point sur l'espèce, » sur l'essence spécifique. Sous ce rapport, aucune distinction entre les êtres; la différence commence avec les qualités surajoutées, avec les *accidents* qui revêtent et circonscrivent la substance. Ceux-ci sont susceptibles de degrés, de mesure. Ce sont ces variétés accidentelles qui distinguent les individus et caractérisent les races, les familles, les personnes. En chaque espèce, partout où il y a *progression*, partout où apparaît la mesure, l'*inégalité dans la qualité*, l'observateur est en présence de propriétés subordonnées, accidentelles. En de tels êtres, non-seulement il ne peut songer un seul instant à l'Absolu proprement dit, à la Bonté nécessaire et subsistant en vertu d'elle-même; il ne peut même être question d'une perfection simplement essentielle, fût-elle d'ailleurs créée et contingente.

Or, les qualités individuelles des agents physiques et immatériels de l'univers n'ont qu'une bonté mesurée par des degrés bien divers. Aucun d'eux ne se manifeste à la volonté avec l'attribut de l'absolu. Leur *excellence* est plus ou moins grande; elle n'est ni totale, ni indivisible. Ils présentent plus ou moins d'utilité, plus ou moins d'agrément, plus ou moins de grandeur morale : voilà tout. Au point de vue de la bonté, les êtres de la nature se posent devant le philosophe comme des êtres relatifs, dépendants. Ils sont bons, ils n'ont point la bonté, comme disait Platon. Ils ne sont bons que dans la mesure de leur participation à la bonté. Mais une série d'êtres relatifs sans terme absolu est de toute façon absurde et contradictoire. Ce serait une progression où la somme des conséquents surpasserait celle des antécédents. Dès lors, et toute la collection des êtres créés, et chacun d'eux en particulier ne peuvent jouir de l'existence actuelle qu'en raison de la détermination d'une Cause absolue, d'une Bonté sans degré, souveraine et nécessaire. Les propriétés de l'être, les *accidents* supposent et exigent la substance, comme leur sujet naturel, auquel les enchaîne un lien nécessaire. Avec combien plus de nécessité encore, les perfections bornées et relatives de la nature n'impliquent-elles pas l'existence d'une Bonté absolue, subsistant par la seule nécessité de son être, et dès lors souveraine, parfaite [1]? — C'est ce qu'avait montré Augustin dans un passage dont doit

[1] Voici comment d'Aguirre s'exprime, dans son Commentaire scolastique sur le Monologue : ... « Nec ipsa relativa que adeo connexa sunt, dant sibi » esse invicem. Neque enim Dominus et servus, aut homines invicem relati, » vel ipsae formae quibus mutuo se respiciunt dant sibi esse invicem... Hoc » est quia non comparantur inter se ut causae efficientes, vel formales, ad » quas pertinet dare esse : sed subjecta quae denominantur invicem relata, » sunt causae efficientes, *fundamentaque ipsarum relationum.* Quamvis » relatio absolute sit forma subjecti relati per illam, nullatenus est efficiens » aut formalis causa relationis sibi oppositae : sed dumtaxat est forma subjecti » in quo fundatur et a quo dimanat. Nulla igitur ratione locum habere potest, » ut *plura aliqua*, etiam *relativa*, sint per se invicem ad modum circuli. » (*Disputat.*, XII, sect. IV, § 34.) — On voit combien les notions du *relatif* et de l'*absolu*, approfondies pour la première fois au moyen âge par Anselme, ont exercé d'empire sur les esprits.

s'être souvenu Anselme : « Toutes choses sont bonnes, dit-il, mais elles ont été *faites* bonnes : elles sont bonnes par l'opération de Dieu, *non par elles-mêmes*. Celui qui les a faites est d'une bonté excellente : car nul ne l'a fait : il est bon par soi [1]. »

A ces observations sont étroitement liées celles que présente Anselme dans le chapitre XIe du Monologue. Là il remarque que les diverses espèces des êtres de la nature forment comme une chaîne hiérarchique dont les anneaux présentent une perfection toujours croissante. Déjà la constatation des degrés dans les qualités lui avait permis d'inférer leur caractère purement relatif : des degrés de perfection objective dans les divers ordres de création, il conclut *au caractère relatif de la substance créée elle-même*, puis à l'absolue infinité de la Cause qui l'a produite. Que là où il y a perfection bornée, il n'y ait qu'une existence participée, il est aisé de le concevoir. Mais Anselme approfondit l'argument : il affirme qu'il faut également admettre que cette série d'êtres dépendants et relatifs doit en dernière analyse se ramener à une Cause nécessaire et absolue. Cette déduction encore paraît claire. Voici où gît la difficulté : comment établir que cette Cause est non-seulement nécessaire, mais en outre qu'elle est *infiniment parfaite* et *unique dans son essence?* Dans le Monologue Anselme glisse assez rapidement sur l'infinité de Dieu. Bien que sa pensée aille au delà de ses expressions, il se contente de montrer l'existence d'une substance tellement supérieure aux autres « *qu'elle n'est inférieure à aucune d'entre elles.* » La raison peut-elle s'avancer plus loin ; peut-elle établir *l'infinité proprement dite* et *l'unité numérique* de la première Cause ? Nous croyons que oui : en indiquant ce procédé, nous achèverons d'éclaircir la doctrine de notre S. Docteur, selon le vœu de l'Académie.

[1] « Omnia bona, sed facta bona, et a Deo bona, non a se. Qui fecit haec, » super omnia est bonus, quia nullus eum fecit bonus, sed a se ipso bonus » est. » (*Serm. III de diversis.*) — « Aliud est bonum quod summe ac per » se bonum est, et non participatione alicujus boni, sed propria natura et » essentia : aliud quod participando bonum et habendo. Habet autem de illo » Bono summo, ut bonum sit ; in se tamen manente illo, nihilque amittente. » (*De Morib. Manich.*, l. I.)

N'est-il pas vrai que la Cause absolue et nécessaire, dont nous avons démontré l'existence, a pour attribut immédiat ce que l'École appelle l'*identité de l'essence et de l'existence?* L'Être nécessaire est l'*Acte pur* en lequel l'idéalité et la réalité se confondent dans l'unité d'une vie supérieure et ineffable. Or, l'induction prouve que *la perfection des êtres est en raison directe de leur degré d'activité essentielle.* La plante est plus parfaite que la matière brute, précisément *dans le rapport* où les forces qui l'animent l'élèvent au-dessus de l'*inertie* et de la *passivité* de l'être inorganique. L'animal l'emporte sur le règne végétal dans la mesure de sa spontanéité motrice et de ses instincts. L'homme occupe le sommet de la création terrestre, en raison de ses facultés d'intelligence et de liberté. A chaque échelon de la vie des êtres, l'indépendance, l'autonomie s'élèvent et la passivité décroît en une égale proportion. Dans les individus, autant que dans les espèces, la mesure de cette énergie immanente est celle de la perfection et du progrès. Mais l'Absolu s'offre à nous sous le symbole d'une Activité suprême, sans mélange d'aucune indétermination, d'aucune potentialité. Anselme lui-même, mieux qu'aucun de ses devanciers, a établi l'*aséité,* le caractère absolu du premier Être. Il y revient sans cesse dans toute la première partie du Monologue, qui en est la laborieuse démonstration. Seule, la Cause nécessaire possède cet attribut, parce que c'est son privilége singulier d'exister par soi, et de trouver en elle-même le principe complet, indépendant de son existence et de ses opérations. Elle est sa vie, sa connaissance, sa béatitude propres. C'est assez pour conclure, en vertu de l'induction signalée tout à l'heure, que l'Absolu n'est pas seulement la Cause nécessaire, mais qu'il est véritablement l'Être parfait, infini. Notre S. Docteur est tellement imbu de cette idée qu'il se borne ici à l'indiquer. Faut-il s'en étonner de la part d'un disciple de S. Augustin, du pseudo-Denys et de Platon? Plus loin, il est vrai, il reviendra sur la notion de la perfection divine; mais ce sera pour l'analyser en détail. Il nous a avertis qu'il a songé surtout à écrire des méditations populaires sur l'existence du souverain Être. Leur but était ascétique autant que spéculatif. Dès lors *la transition logique de la nécessité à l'infinité* a pu être négligée. — Anselme s'attache plus longuement à élucider l'*unité essentielle* de Dieu. Il s'appesantit si fort là-dessus que la preuve en perd peut-être quelque chose de sa clarté. Si l'on suppose, dit-il, la multiplicité des causes premières, admettra-t-on que toutes ensemble elles doivent l'existence à un seul principe? En ce cas, ce serait celui-ci, à l'exclusion des autres, qui serait l'absolu proprement dit. Certes, personne ne soutiendra qu'ils se sont réciproquement donné l'être; car comment concevoir l'action combinée de plusieurs principes relatifs et en soi indéterminés? Tient-on qu'il y a en ces divers êtres une forme nécessaire et absolue? Qui ne voit que c'est à celle-ci qu'il faut alors reconnaître le caractère de l'absolu?

Une argumentation assez semblable se retrouve au chapitre IV du Monologue. Que l'on conçoive un instant qu'il existe plusieurs natures ou Essences suprêmes : même, dans cette hypothèse, il est clair qu'elles présentent *un même élément commun*. Celui-ci ne peut être distinct de leur essence qu'à condition d'être lui-même ce principe supérieur que nous cherchons. Mais dès qu'on l'assimile à leur essence, il ne peut être multiple, puisque celle-ci est la même chez toutes en vertu de la supposition. — Voilà les raisonnements d'Anselme [1].

La première de ces démonstrations offre un exemple de ces

[1] « Haec vero natura quae talis est, aut sola est, aut plures hujusmodi et » aequales sunt. Verum si plures sunt et aequales, cum aequales esse non pos- » sint per diversa quaedam, sed *per idem aliquid*, illud unum per quod » aequaliter tam magnae sunt, aut est idipsum quod ipsae sunt, id est, ipsa » earum essentia, aut aliud quam quod ipsae sunt. Sed si nihil est aliud » quam ipsa earum essentia, sicut earum essentiae non sunt plures, sed una, » ita et naturae non sunt plures, sed una; idem namque naturam hic intelligo » quod essentiam. Si vero id, per quod plures ipsae naturae tam magnae » sunt, aliud est quam quod ipsae sunt, pro certo minores sunt quam id per » quod magnae sunt. Quidquid enim per aliud est magnum, minus est quam » id *per quod* est magnum. Quare non sunt sic magnae, ut illis nihil sit majus » aliud. Quod si nec per hoc quod sunt, nec per aliud possibile est tales esse » plures naturas quibus nihil sit praestantius, nullo modo possunt esse naturae » plures hujusmodi. Restat igitur unam et solam naturam aliquam esse, quae

constructions ingénieuses et conçues de toutes pièces en vue d'une conclusion entrevue d'avance. Toute l'argumentation, d'ailleurs très-subtile et pleine de finesse, repose sur cette affirmation que la « Force, » l'Activité absolue, infinie, qui serait commune à plusieurs êtres, constituerait elle-même l'Infini proprement dit. N'est-ce pas préjuger ce qui est en question : qu'il est impossible qu'il y ait *plusieurs* causes complètes, *infinies chacune* [1] ?

La deuxième preuve renferme, sous une forme compliquée par l'affectation dialectique, un raisonnement qui est au fond d'une capitale importance, à savoir : *l'Être absolu est à soi-même son principe complet d'individuation.* Du moment où l'on suppose, enseigne notre Docteur, que le principe d'égalité, commun à plusieurs êtres nécessaires, est *identique à leur essence,* il doit nécessairement être unique, puisque leur essence est telle. Développons un peu cette maxime : elle en vaut la peine. L'essence des êtres de l'univers est numériquement une; *il n'y a pas deux*

» sic est aliis superior, ut nulli sit inferior. Sed quod tale est, maximum et
» optimum est omnium quae sunt. Est igitur quaedam Natura quae est sum-
» mum omnium quae sunt.

» Hoc autem esse non potest, nisi ipsa sit per se id quod est, et cuncta
» quae sunt sint per ipsam id quod sunt. Nam cum paulo ante ratio docuerit,
» id quod per se est, et per quod alia cuncta sunt, esse summum omnium
» existentium, aut e converso id quod est summum, est per se, et cuncta alia
» per illud, aut erunt plura summa. Sed plura summa non esse manifestum
» est. Quare est quaedam natura, vel substantia, vel essentia, quae per se est
» bona et magna, et per se est id quod est, et per quam est quidquid vere
» aut bonum aut magnum aut aliquid est, et quae est summum bonum, sum-
» mum magnum, summum ens, sive subsistens, id est, summum omnium
» quae sunt. » (C. IV.)

[1] Avec sa manière habituelle, d'Aguirre développe ainsi l'argument du S Docteur : « Posset quisquam occurrere rationi praejactae, dicereque, ex ea ad
» summum convinci existentiam alicujus naturae ita perfectae, *ut nul-*
» *lam superiorem habeat*, ac proinde sit locus *pluribus diis aequalibus*
» *omnino inter se.* — Eam vero evasionem sic fere praecludit Anselmus.
» Natura ita perfecta, ut nullam aliam superiorem habeat, aut est unica aut
» multiplex, et aequalis in pluribus. Si unica est, erit profecto unus et solus
» Deus : quo statuto corruit polytheismus, seu pluralitas Deorum ab Ethnicis

espèces identiques. D'où vient en réalité la pluralité des individus? De ce que l'espèce ou l'essence n'est communiquée avec toutes ses perfections à aucun d'eux. Nul homme ne possède dans toute leur amplitude les facultés distinctives de l'humanité. — Chaque individu présente dans son indivisible totalité l'attribut constitutif de l'espèce; nul ne concentre dans sa personne toute l'énergie, toute l'activité dont les sens et l'esprit sont susceptibles. C'est que la perfection de l'espèce humaine n'a pas en soi sa raison; elle est communiquée aux individus par une Cause supérieure et distincte d'eux. Voilà ce qui fait que l'espèce peut subsister dans un nombre indéfini de personnes, et y revêtir des propriétés individuelles multiples. Ainsi la vraie source de la pluralité des substances, c'est leur *potentialité*, ou ce qui revient au même, leur contingence et leur imperfection. Or, l'Être nécessaire est tel qu'en vertu même de son aséité et de sa nécessité, il possède en soi *toute la plénitude de l'être*. Voilà son critère essentiel. C'est pour cela que l'École,

» conficta. — Si autem plures naturae sint et aequales, et aequalitatem
» habebunt, non per diversa quaedam, sed *per idem aliquid*. Etenim ratione
» praedicatorum essentialiter diversorum, nequeunt esse aequales, sed inae-
» quales; *cum omnes species sint inter se inaequales, sicut numeri*. Ergo
» oportet ut sint aequales per unum aliquid. Hoc autem unum, per quod
» aequales et adeo magnae sunt naturae *illae*, aut est idipsum quod illae sunt,
» id est, *ipsa earum essentia;* aut aliud quam quod ipsae sunt. Si primum
» asseratur, profecto sicut earum rerum non sunt plures essentiae, *sed unum*
» *aliquid*, ut probatum est; sic etiam naturae non sunt plures, sed una.
» Idem quippe hoc loco intelligitur nomine naturae et essentiae. Si autem
» dicatur secundum; certe id per quod plures naturae *tam magnae sunt* erit
» aliud quam quod ipsae sunt : atque adeo illae minores erunt quam id per
» quod tam magnae sunt. Quidquid enim est magnum ratione alterius, debet
» esse minus eo, per quod magnum est. Ergo jam naturae illae non sunt ita
» magnae, ut non sit aliquid iis majus, contra quam in solutione dicebatur.
» Cum igitur, nec per id quod sunt, nec per aliud possint esse *plures naturae*
» *aequales*, et ita magnae ut nullam superiorem habeant, nulla demum
» ratione fieri potest, ut sint plures ejusmodi naturae. Ergo de primo ad ul-
» timum fateri debemus, unam aliquam et solam Naturam existere ita cae-
» teris superiorem, ut omnes aliae sint inferiores, et illa omnium maxima
» atque optima, absque aequali. » (*Disp.*, XII, S. V, n. 45.)

après Aristote, le définira : l'*Acte pur*. Ce caractère essentiel lui appartient d'une façon exclusive et incommunicable; son infinie perfection empêche pour lui toute multiplication, toute pluralité dans l'essence. La Cause absolue ne peut être conçue que comme une substance numériquement une [1]. Ce n'est pas quelque attribut positif qui pourrait devenir pour elle un principe de pluralité, puisque en chacun de ces types multiples se retrouveraient les mêmes qualités; ce n'est pas non plus une imperfection, puisque l'Être absolument indépendant ne peut être que parfait. Que l'on imagine un instant plusieurs Êtres nécessaires, *d'essence distincte*. N'admettant, en raison même de leur simplicité, aucune note distinctive, ils se confondraient fatalement dans je ne sais quelle monstrueuse unité.

Nous devions ces développements aux vues un peu rapides d'Anselme. Nous connaissons à présent la portée de ses preuves, et nous les avons éclaircies, dans l'esprit même de notre auteur. A bien les entendre, elles ne sont que la démonstration de l'*Être nécessaire*, exposée dans le langage et selon l'esprit de Platon.

Nous avons vu ailleurs que toutes les Idées, d'après le divin Philosophe, sont subordonnées à l'idée du Bien, l'*Idée des idées*. C'est d'elle, dit-il dans la *République*, « que les êtres intelligibles tiennent non-seulement leur intelligibilité, mais encore leur être et leur essence [2]. » Il affirme en ce même endroit que le Bien en soi n'est pas essence, mais surpasse encore l'Essence en dignité et en puissance. Ces maximes deviennent plus claires dans le *Timée*, où Platon identifie l'*idée du Bien* avec Dieu lui-même. Il considère l'idée du Bien comme la source et la mesure transcendante de toute bonté et de toute beauté créées. C'est d'elle que toutes les autres beautés participent. — On sait comment Augustin popularisa ces conceptions dans les écoles chrétiennes. L'immuable vérité, d'après laquelle nous jugeons de toutes choses, est, selon lui, identique au Bien. C'est parce qu'elles ont reçu une certaine participation de la Bonté suprême, que les créatures se

[1] Cf S. Th. *Sum. th.*, I, q. IV, in concl.
[2] Cf. L. VI.

révèlent comme bonnes à notre raison et à notre conscience [1]. Dans un tableau où son génie plein de chaleur et d'abondance se donne carrière, Augustin retrace avec grand détail les *biens* divers de l'ordre créé : l'heureuse variété des monts et des vallées, la fertilité des champs, l'harmonie des sphères célestes, les douceurs du foyer, les services des animaux, la beauté des figures, les charmes de l'amitié, les attraits de la vertu, la mélodie des vers. Supprimez, continue le Docteur d'Hippone, supprimez la limite : considérez le bien en soi, si vous le pouvez. Voilà Dieu, qui n'est pas bon par la participation d'un autre bien, mais principe et bonté de tout ce qui est bon... Il n'est point tel ou tel être bon, mais le Bien qui est bon par soi... Il n'existerait donc aucun bien changeant s'il n'existait un bien immuable. Aussi lorsque vous entendez parlez de tel ou tel bien, qui, à parler absolument, ne *sont* pas même des biens, s'il était possible de négliger les biens qui ne sont tels que par leur participation à ce bien suprême; s'il était possible de faire abstraction de ces divers biens et de percevoir le Bien en soi, vous atteindriez Dieu lui-même [2]. — Les critiques ont signalé ce texte comme l'une des sources les plus importantes de la théodicée d'Anselme. C'est avec raison. Tous les éléments de l'argument du Monologue s'y rencontrent : les degrés d'excellence des créatures, le rapport des biens relatifs avec le Bien absolu, l'unité de cette suprême per-

[1] « Desiderabitis quoddam bonum ? Quale bonum ? *Omnis boni bonum :* » cui non addatur quod sit ipsum bonum Dicitur enim bonus homo, et bonus » ager, et bona domus, bonum animal, et bona arbor, et bonum corpus, et » bona anima. Adjunxisti, quoties dixisti, bonum est, Bonum simplex, ipsum » bonum, quo cuncta sunt bona ; ipsum bonum ex quo cuncta sunt bona. » (*Enarrat. II in Psalm. 26.*)

[2] « ... Non amas certe nisi bonum, quia bona est terra altitudine montium et » temperamento collium et planitie camporum, et bonum praedium amoenum » ac fertile, et bona domus paribus membris disposita et ampla et lucida, et » bona animalia animata corpora, et bonus aër modestus et salubris, et bonus » cibus suavis atque aptus valetudini... Quid plura et plura (bona memorem) ? » Bonum hoc et bonum illud, tolle hoc et illud, et vide ipsum bonum, si » potes : ita Deum videbis, *non alio bono bonum, sed bonum omnis boni.* » (*De Trin.*, VIII, c. III.)

fection où ils viennent converger. Sans doute Anselme approfondit plus encore qu'Augustin ces données métaphysiques [1] : le Docteur de la Grâce les mêle à une foule d'autres considérations dans son ouvrage consacré à l'élucidation de l'auguste Trinité; pour Anselme, elles font l'objet propre d'un traité distinct. Mais il est impossible de méconnaître la parenté d'idées d'Augustin et d'Anselme, et l'influence des écrits du Docteur d'Hippone sur le Docteur du Bec [2].

L'argument que nous venons d'entendre acquit droit de cité dans les écoles les plus diverses. Les Docteurs mystiques l'accueillirent notamment par l'organe de Richard de S. Victor [3] et de S. Bonaventure [4]. Thomas d'Aquin le reproduisit en plusieurs passages. Celui de la Somme théologique mérite surtout l'attention. « Il y a dans les êtres, écrit le Docteur angélique » du plus et du

[1] Écoutons ici M. Bouchitté : « Lorsqu'on opère sur les attributs de Dieu, comme l'a fait S. Augustin sur le bon, l'induction la plus rigoureuse ne donne cependant pour résultat que l'idée abstraite et générale de bon, de juste, etc., selon l'attribut que l'on a choisi; concept vide, et tel que le donnerait la théorie nominaliste. Il faut donc s'élever plus haut encore, et résoudre ces attributs dans l'Être qui en est le lien et la substance. C'est ce que donne l'induction qui part de l'être perçu, comme fini, relatif, que l'expérience nous donne à tout moment, pour atteindre jusqu'à l'être inconditionnel, infini et absolu; c'est là ce que développe, avec une rigueur inattaquable, le chapitre III du *Monologium*. La supériorité appartient donc à Anselme. Mettre en lumière un principe avec une fécondité pareille, le retourner sous presque toutes ses faces, le corroborer par toutes les ressources d'une dialectique serrée et pénétrante, c'est en prendre possession, c'est se montrer, par la pleine possession du sujet, supérieur à tous ceux qui ont pu l'adopter et le défendre auparavant. » (*Préf. de la trad. du Mon.*, p. XL.) — Il est très-vrai que notre S. Docteur expose plus scientifiquement la démonstration de l'absolu par le relatif. Mais qui ne voit qu'aussi bien que lui, S. Augustin résout les perfections, dont le spectacle du monde lui a fourni la notion, dans la Substance infinie. Je ne puis entrevoir de différence essentielle entre les vues du maître et celles de son noble disciple.

[2] Nous ne faisons qu'indiquer ce point. Il a été mis en lumière par M. de Rémusat, *S. Anselme*, pp. 492 et suiv. — BOUCHITTÉ, *Le rationalisme chrétien*, pp. XXXV et suiv.

[3] *De Trin*, l. I, c. VI.

[4] *Itin mentis ad Deum*, c. III.

moins dans la bonté, la vérité, la noblesse, et ainsi du reste. Mais *le plus* et le *moins* se disent de plusieurs êtres, selon qu'ils se rapprochent différemment de quelque chose qui est absolu : « ainsi ce qui est *plus chaud* se rapproche du chaud absolu. Il y a donc quelque chose qui est la vérité, l'excellence, la noblesse suprême et par conséquent l'Être suprême. Car le vrai, au plus haut degré, est aussi l'être au plus haut degré. Or, ce qui est l'Être suprême en un certain genre, est le principe de tout ce qui existe en ce genre : ainsi le feu qui est la chaleur suprême est la cause de toute chaleur... Il y a donc un Être qui est la cause de tous les autres êtres, de toute bonté, et de toute perfection. Nous l'appelons Dieu [1]. — Quant à la preuve de l'assertion que la vérité est en proportion directe de l'être, nous la trouvons insinuée dans la *Somme philosophique.* Elle est fort sommaire et empruntée à l'ordre abstrait. « Au IV^e livre de la Métaphysique, dit S. Thomas, Aristote montre qu'il y a une Vérité suprême, par ceci que de deux faussetés, l'une est plus grande que l'autre. Il faut donc qu'il y ait des vérités dont l'une soit plus vraie que l'autre. Or, tout cela se dit par approximation de l'être qui est absolument le plus vrai. — De cela on peut ultérieurement inférer qu'il y a aussi un être qui est absolument le plus grand : celui-là, nous le nommons Dieu [2]. »

[1] « Invenitur in rebus aliquid magis et minus bonum, et verum, et nobile, » et sic de aliis hujusmodi. Sed magis et minus dicuntur de diversis, secun- » dum quod appropinquant diversimode ad aliquid quod maxime est : sicut » magis calidum est quod magis appropinquat calido. Est igitur aliquid quod » est verissimum et optimum et nobilissimum, et per consequens maxime » ens. Nam quae sunt maxime vera, sunt maxime entia, ut dicitur II Metaph. » (textu 4). Quod autem dicitur maxime tale in aliquo genere, est causa » omnium quae sunt illius generis; sicut ignis, qui est maxime calidus, est » causa omnium calidorum, ut in eodem libro dicitur. Ergo est aliquid quod » omnibus entibus est causa esse, et bonitatis et cujuslibet perfectionis, et » hoc dicimus Deum. » (*Sum. th.*, I, q. II, art. 3.)

[2] « Potest etiam et alia ratio colligi ex verbis Aristotelis in II libro *Meta-* » *physicorum.* Ostendit enim ibi quod ea quae sunt maxime vera sunt et » maxime entia. In IV etiam Metaphysicorum ostendit esse aliquid maxime » verum, ex hoc quod videmus duorum falsorum unum altero esse magis » falsum; unde oportet ut alterum sit etiam altero verius. Hoc autem est

L'identité de l'argumentation de S. Thomas avec celle d'Anselme est évidente. Mais le Docteur angélique insiste avec plus de force sur cet axiome : *que l'être le plus parfait de la série doit être le principe de la série entière.* Chose remarquable! pas plus qu'Anselme, S. Thomas ne l'a beaucoup élucidé. Cela a donné quelque souci à ses interprètes [1]. Il faut bien entendre sa maxime. Elle ne se vérifie qu'à un point de vue tout à fait *général;* elle ne doit pas s'appliquer aux individus, dit H. S. Kleutgen : l'homme le plus parfait de l'espèce n'est pas la cause des autres hommes. Mais l'Être nécessaire infini en qui subsistent la justice accomplie, la Beauté suprême est de fait *le principe transcendant* des perfections, des vertus et des beautés relatives. La divisibilité dans la perfection, le degré dans la bonté, impliquent la borne et la limite, la contingence. De même, en un sens plus large, l'être borné présuppose l'Être sans borne, l'infini. Donc la dernière raison des choses est l'Être *universellement parfait*, l'Absolu.

Nous avons insinué déjà que la première preuve d'Anselme n'est qu'une des formes multiples de l'argument si connu *du contingent* et *du nécessaire*. Celui-ci fut proposé dans sa formule propre par Richard de S. Victor [2], Thomas d'Aquin [3], Duns Scot [4]; dans la suite il devint d'un usage presque général. La démonstration tirée de la mesure diverse des biens créés se fondit dans cet argument et n'eut plus dans la Théodicée qu'une place secondaire. Il faut l'attribuer à la prépondérance chaque jour croissante de la philosophie d'Aristote. La méthode platonicienne entre pour longtemps dans une époque de déclin. Lorsqu'elle en sortira, au temps de la Renaissance, ce ne sera plus aux preuves de détail, mais à l'esprit général des systèmes qu'elle s'attachera.

» secundum approximationem ad id quod est simpliciter et maxime verum. Ex
» quibus concludi potest ulterius, esse aliquid quod est maxime ens; et hoc
» dicimus Deum. » (*Sum. cont. Gent.*, l. I, c. XIII.)

[1] Cf. *Philosophie der Vorzeit*, III, p. 494. — L'argument de S. Thomas est longuement expliqué par A. Lépidi : *Examen phil. theol. de Ontolog.*, p. 257.

[2] *De Trin.*, I, VI.

[3] *Sum. th.*, I, q. II, art. 3.

[4] *Sent.*, l. I, d. II, q. 2, art. 6.

Mais il est temps de suivre Anselme sur un autre terrain. C'est par la considération des créatures (*a posteriori*) qu'il a prouvé l'existence de Dieu. Il faut l'entendre sur la fameuse démonstration dite *a priori* tirée de l'*idée même de l'Être le plus parfait.* C'est ce qu'on nomme l'*argument ontologique* de l'existence de Dieu.

Ce n'est pas un facile labeur que de chercher à démontrer, avec une rigueur logique, l'existence de la Cause absolue, dans son unité, dans sa vie transcendante, parfaite. Les résultats de la recherche n'en compensent pas toujours l'austérité. Que d'ombres dans les preuves, que de doutes, quelles déceptions parfois! A certaines heures il semble que la solution soit trouvée : on reprend le procédé, on l'examine à nouveau. Hélas! on s'aperçoit qu'une fallacieuse formule ou qu'un terme ambigu ont égaré l'esprit : il s'est glissé dans quelque prémisse d'inoffensive apparence une secrète pétition de principe qui préjugeait la conclusion. — Il y a des jours où l'on croit toucher au but; l'esprit se repose dans une sereine clarté. Le lendemain de nouveaux nuages sont survenus; la raison flotte incertaine, anxieuse. L'éternel problème reste là devant la conscience, comme l'Isis des anciens, muette et voilée.

En sa solitude de Sainte-Marie du Bec Anselme avait connu ces angoisses de la pensée. Lui-même nous apprend, dans le Prosloge, que la démonstration du Monologue lui paraissait longue, compliquée. Il rêvait une preuve moins embarrassée, plus directe. Quel noble souci pour un homme du XI^e^ siècle! Rien que pour se préoccuper d'un pareil sujet, quel génie ne fallait-il pas au successeur immédiat de Lanfranc?

Les pages où Anselme a consigné ses recherches gardent la trace émouvante de ses luttes intérieures, de ses mécomptes, de sa joie mêlée peut-être d'appréhensions. Son âme s'épanche en prières, en soupirs mélancoliques, en vives et ardentes actions de grâce. A travers ces lignes émues, l'on entrevoit avec respect et émotion, le front soucieux de l'illustre moine, sous les ombrages inspirateurs ou dans la cellule silencieuse de son abbaye normande, au milieu de ses parchemins acquis par tant de sacrifices. A-t-il trouvé la vérité cherchée? Ne s'est-il pas trompé quelque part dans sa démonstration? Ah! quel martyre causent en un tel sujet ces perplexités étranges! Écoutons l'éloquent et candide aveu des peines d'Anselme : « Après avoir, sur les instantes prières de quelques frères, dit-il lui-même, publié un opuscule (le Monologue), qui pût servir d'exemple de méditation sur les vérités de la Foi, à un homme qui recherche ce qu'il ignore, en raisonnant silencieusement avec lui-même, j'ai remarqué que ce livre se compose d'un grand nombre de raisonnements enchaînés les uns aux autres, et dès lors j'ai commencé à chercher s'il ne serait pas possible de trouver une preuve unique qui, pour être complète, n'eût besoin que d'elle-même, et qui seule suffît pour démontrer que Dieu existe véritablement, qu'il est le Bien suprême n'ayant besoin d'aucun autre, et dont tous les autres ont besoin pour être et pour bien être, ainsi que tout ce que nous croyons de la substance divine. Comme je tournais mes pensées souvent et avec beaucoup d'attention vers cet objet, tantôt je croyais être sur le point d'atteindre ce que je cherchais, et tantôt il me semblait se dérober tout à fait à la perspicacité de l'intelligence : désespérant enfin d'y parvenir, je résolus d'abandonner cette recherche comme celle d'une chose impossible à trouver. Mais lorsque je voulus éloigner entièrement de moi cette pensée, de crainte qu'en occupant inutilement mon esprit, elle ne me détournât d'autres études où je pouvais faire d'utiles progrès, c'est alors que malgré moi elle a commencé à me poursuivre avec une sorte d'importunité. Un jour donc que je me fatiguais à résister avec force à cette importunité, ce dont j'avais désespéré s'offrit, pendant la lutte même de mes idées, de telle manière que j'embrassai avec une ardeur nouvelle la pensée que je m'efforçais d'écarter. Pensant que si ce que j'étais heureux d'avoir trouvé était écrit, il pourrait plaire à quelqu'un qui le lirait, j'écrivis sur ce sujet et sur quelques autres l'opuscule suivant, où je fais parler un homme qui tâche d'élever son esprit à la contemplation de Dieu, et qui cherche à comprendre ce qu'il croit [1]. »

Qu'a donc trouvé Anselme? De quelle manière s'est-il démontré le Dieu infini auquel il avait foi? — N'est-il pas vrai que la cause

[1] *Prosl. proœm.*

première s'offre à la raison et à la conscience, sous le symbole de l'Être *au-dessus duquel il n'en existe pas de plus grand?* « Dieu, avait dit S. Augustin, dans un texte bien connu et auquel on se rapporte nécessairement à la lecture de la preuve d'Anselme, Dieu est pensé par tous, même par ceux-là qui admettent, vénèrent et invoquent d'autres dieux dans le ciel ou sur la terre, comme quelque chose au-dessus duquel il n'y ait rien de plus grand, de plus sublime... Personne ne peut se rencontrer qui prenne pour Dieu un Être au-dessus duquel il en existe un meilleur [1]. »

Cela admis, qui pourrait nier l'existence actuelle de cet Être suprême, à cause des négations insensées de l'impie? Quoi! lorsqu'il l'entend nommer seulement, l'athée ne se forme-t-il pas dans son esprit la notion de cet Être suprême, quand même il ne concevrait point entièrement que de fait il existe? Sans doute, ajoute Anselme, — et il insiste là-dessus, — autre chose est avoir une chose présente à l'esprit, autre chose concevoir qu'elle existe en réalité. Voulons-nous le voir dans un exemple familier? Le peintre a déjà présent à son imagination le tableau qu'il va exécuter; mais il ne le conçoit comme existant qu'après l'avoir peint. Mais, du raisonnement fait tout à l'heure, il suit que, dans l'intelligence du moins, existe l'Être le plus grand et la notion de bonté suprême. La raison en est claire : dès que l'esprit entend énoncer un tel Être, il en comprend la formule, et tout ce qu'on comprend existe dans l'intelligence. *Or, par cela seul, continue Anselme, l'homme peut se persuader que cet Être souverain n'existe pas uniquement dans l'intelligence.* L'Être qui existerait non-seulement dans l'esprit, mais aussi dans la réalité, serait d'évidence plus grand que celui qui subsisterait dans la seule pensée. Il est donc contradictoire d'affirmer que l'Être par hypothèse le plus grand peut ne subsister que dans l'intelligence. L'Être suprême doit donc exister *et dans la pensée* et *aussi dans la réalité* [2].

[1] « Deum ab iis etiam qui alios et suspicantur et vocant et colunt Deos, sive » in caelo, sive in terra, ita cogitari, ut aliquid, *quo nihil melius sit*, atque su» blimius, illa cogitatio conetur attingere... hoc quisquam invenire potest qui » hoc Deum credat esse, quo melius aliquid est. » (*De Doct. christ*, I, c. VII.)

[2] « An ergo non est aliqua talis natura, quia dixit insipiens in corde suo :

Bien plus : on ne peut pas même penser qu'il n'existe pas en réalité. Cela est évident pour peu qu'on réfléchisse qu'il est l'Être le plus grand que puisse atteindre la pensée. Or, par delà l'Être le plus grand conçu par l'esprit, nous pouvons nous imaginer la Cause suprême *subsistant dans la réalité.* Celle-là donc seule est *l'Être suprême.* La Cause infinie, l'Absolu ne peut être représenté que comme un Être réel, non simplement comme une forme idéale. Cette vivante et souveraine Essence, c'est le Dieu auquel croit la conscience chrétienne. Si l'âme pouvait se figurer un être plus grand, la créature s'élèverait par cette supposition même au-dessus de l'éternelle perfection. Tous les autres êtres peuvent être pensés comme n'existant pas; l'Être suprême seul a pour attribut constitutif d'impliquer dans son concept la nécessité de l'existence actuelle. Que si l'impie nie cela, c'est qu'il n'a pas compris ce mot : *Dieu;* c'est qu'il n'attache aucun sens à cette grande parole ou qu'il la détourne de sa vraie signification. A coup sûr, il n'entend point par Dieu l'*Être le plus grand,* car alors il verrait d'évidence qu'il est impossible de lui dénier l'existence actuelle et objective [1].

Voilà l'argument ontologique d'Anselme; la preuve de l'existence de Dieu formellement déduite de son *idée.* Plus que toute

» non est Deus? Sed certe ipse idem insipiens, cum audit hoc ipsum quod » dico, aliquid quo majus cogitari nihil potest, intelligit quod audit, et quod » intelligit in intellectu ejus est, etiamsi non intelligat illud esse. Aliud enim » est rem esse in intellectu, aliud intelligere rem esse. Nam cum pictor prae- » cogitat quae facturus est, habet quidem in intellectu, sed nondum intelligit » esse quod nondum fecit. Cum vero jam pinxit, et habet in intellectu, et » intelligit esse quod jam fecit. Convincitur ergo etiam insipiens esse vel intel- » lectu aliquid quo nihil majus cogitari potest, quia hoc cum audit intelligit, » et quidquid intelligitur in intellectu est. Et certe id quo majus cogitari » nequit, non potest esse in solo intellectu. Si enim vel in solo intellectu » est, potest cogitari esse et in re; quod majus est. Si ergo id quo majus cogi- » tari non potest est in solo intellectu, idipsum quo majus cogitari non potest » est quo majus cogitari potest; sed certe hoc esse non potest. Existit ergo » procul dubio aliquid, quo majus cogitari non valet, et in intellectu et in re. » (*Prosl.,* c. II.)

[1] « Quod utique sic vere est, ut nec cogitari possit non esse. Nam potest

autre partie de ses œuvres, son importance, sa célébrité nous forcent de nous y arrêter, malgré tout ce qui a été écrit à ce sujet.

Faisons-en dès maintenant l'observation : l'argument du Prosloge peut être considéré sous le point de vue *dialectique* et sous le point de vue *ontologique*. L'investigation du critique peut se porter sur la valeur des principes dans leur rapport avec la conclusion, ou bien sur la réalité de chaque proposition, abstraction faite de leurs rapports logiques. Le premier procédé s'impose avant tout à la discussion.

Il est hors de doute que, dans la forme qu'il donne à son argument, Anselme déduit l'*existence actuelle* du Dieu infini *de l'idée que l'esprit se forme du Souverain Être*. C'est là le caractère distinctif de sa preuve. Dès les premiers temps du christianisme, les Pères démontrèrent la spiritualité transcendante du premier Être par la considération des *idées absolues* et des attributs essentiels des choses. Plus d'une fois ils prouvèrent son unité et sa grandeur par la notion de l'Infini. Nous avons entendu tout à l'heure Augustin établir la perfection divine par la suppression des degrés divers des biens créés, suppression fondée sur l'*idée de la Bonté en soi*. Mais à proprement parler, Anselme est le premier qui ait directement tiré l'*existence actuelle* de Dieu *de son idée, de la notion de l'Absolu* [1]. L'insensé lui-même, qui nie l'existence de

» cogitari aliquid esse quod non possit cogitari non esse, quod majus est
» quam quod non esse cogitari potest. Quare, si id quo majus nequit cogitari
» potest cogitari non esse, idipsum quo majus cogitari nequit non est id quo
» majus cogitari nequit; quod convenire non potest.

» Sic ergo vere est aliquid quo majus cogitari non potest, ut nec cogitari
» possit non esse. Et hoc es, Domine Deus noster. Sic ergo vere es, Domine
» Deus meus, ut nec cogitari possis non esse; et merito. Si enim aliqua mens
» posset cogitare aliquid melius te, ascenderet creatura super creatorem, et
» judicaret de creatore; quod valde est absurdum. Et quidem quidquid est
» aliud praeter te solum, potest cogitari non esse. Solus igitur verissime om-
» nium, et ideo maxime omnium habes esse, quia quidquid aliud est non sic est
» vere, et idcirco minus habet esse. Cur itaque dixit insipiens in corde suo :
» non est Deus, cum tam in promptu sit rationali menti te maxime omnium
» esse ? cur, nisi quia stultus et insipiens ? » (*Ibid.*, c. III.)

[1] Soulignons ces paroles, alors si nouvelles et si étonnantes, du ch. IV de la Réponse à Gaunilon : « *Non esset proprium Deo non posse intelligi non esse.*

Dieu, dit-il, par le fait même de cette négation, a dans son esprit l'idée de l'Être le plus grand qui puisse être; car c'est bien sous ce concept que nous nous représentons Dieu. Or, cet Être doit nécessairement exister en réalité; autrement, il serait possible de se représenter un Être plus grand : celui qui existerait non-seulement en idée, mais aussi dans sa vivante personnalité; ce qui est contraire à l'hypothèse. Voilà le résumé de toute son argumentation.

Très-vraisemblablement, Anselme n'a pas voulu simplement construire une démonstration logique, dans le sens que nous attachons aujourd'hui à ce mot. Ce qui est certain, c'est que sa conclusion, considérée comme stricte conséquence, est inadmissible : elle empiète sur les prémisses. On souffre à plier un argument qui contient une vue d'un si haut génie aux lois de la dialectique élémentaire. Mais cela même n'est pas sans un grand intérêt.

Qu'est-ce que l'idée d'un Être, quelle que soit d'ailleurs sa nature? N'est-il pas clair que c'est sa formule idéale, logique? Tout raisonnement basé sur les idées pures ne saurait aboutir qu'à une conclusion *purement abstraite*. Celle-ci peut bien poser les attributs constitutifs de l'ordre intelligible; mais elle franchit les bornes de son domaine, dès qu'elle entre dans l'ordre de la réalité physique, de l'existence réelle. Au point de vue du monde des existants, les concepts formels, isolés des éléments fournis par l'observation, sont aussi stériles que les faits sensibles le sont dans l'ordre métaphysique. « Quelle que soit l'évidence dans l'ordre idéal, dit très-bien Balmès, si l'on ne pose la condition d'existence ou de non-existence, le *oui* et le *non* demeurent indifférents à l'ordre réel [1]. »

La nature de l'objet conçu ne change rien au raisonnement que nous avons opposé à l'argument d'Anselme. Il y a d'évidence un abîme entre l'Essence de l'Être absolu et l'essence des êtres contingents. A la différence de ceux-ci, celle-là implique l'existence actuelle. Son essence et son existence, sa notion et sa réalité sont

[1] *Phil. fond.*, l. I, c XIV. — Nul n'a mieux traité ce point que Balmès. Le premier livre de sa Philosophie fondamentale n'est que la démonstration développée du principe que nous avons dû rappeler ici.

en soi identiques. Mais aussi longtemps qu'on se tient sur le terrain de la seule considération abstraite, ce rapport nécessaire de l'existence et de l'essence, dans la Cause absolue, n'est lui-même qu'un concept formel, hypothétique. Il peut se ramener à cette formule: L'esprit conçoit l'Absolu comme un Être dont la notion suppose l'existence actuelle. Donc *si de fait l'Absolu n'est pas une chimère,* il n'a pas simplement une existence idéale, mais physique et réelle. Seulement, ce serait violenter la conséquence que de conclure : l'esprit ne concevant l'Absolu que comme existant, son *existence actuelle* est renfermée dans son *Essence métaphysique,* dans son Idée. Donc l'existence de l'Infini est prouvée par sa seule idée.

Veut-on pénétrer plus avant dans cette considération, et se demander pourquoi de l'Essence de Dieu on ne peut, sans saut logique, conclure à son existence, alors même que celle-ci est contenue dans son essence? C'est que notre connaissance de l'Absolu n'est qu'une connaissance simplement analogique, ce n'est point une connaissance intuitive.— Comment nous élevons-nous à l'idée de Dieu, de l'Infini? Par le spectacle de la nature, les aspirations instinctives de la conscience. Sauf peut-être Platon, à l'occasion de sa doctrine des idées, Aristote, les Stoïciens et toute l'école chrétienne, avec la plupart des philosophes modernes, professent que la notion de Dieu est le résultat d'une application spéciale du principe de causalité. L'Absolu en soi, comme terme de perception immédiate, n'est pas un intelligible proportionné au simple regard de l'esprit. Le sens intime atteste que notre connaissance de Dieu est le produit de l'exercice de nos facultés sur les intermédiaires créés, dont l'existence présuppose celle d'une Cause infinie et indépendante [1]. Cette connaissance est médiate, en ce sens que l'idée

[1] D'Aguirre s'exprime en ces termes sur ce point : « ... Quoniam nos » de Deo non scimus *quid sit*, ea propositio (*Deum existere*) non est per » se nota nobis; sed quam demonstrare opus sit per ea, quae sunt magis » nota quoad nos; scilicet, *per effectus*. — ... Dicendum est S. Doctorem » non fuisse contrarium doctrinae hactenus traditae : quin potius ei suffra- » gium tulisse. Etenim in hoc ipso Monologio per quinque priora capita plu- » rimum laborat et alias atque alias rationes excogitat, urgetque ut probet

de Dieu présuppose plusieurs idées préalables dont elle est le terme logique. Que suit-il de là? Qu'il ne faut pas confondre, en ce qui concerne l'idée de l'Absolu ou de l'Infini, cette idée et son objet. *En soi*, l'essence de Dieu est réellement identifiée avec sa nature physique; à l'opposé des êtres relatifs, il n'y a aucune distinction entre ces deux éléments. Nous entendrons bientôt Thomas d'Aquin le noter à propos d'Anselme. Celui qui aurait l'intuition directe de l'Infini percevrait *son existence dans son essence*, sa réalité dans sa notion. Mais le philosophe ne connaît Dieu ni par son essence, ni par quelqu'une de ses propriétés; c'est S. Anselme qui nous l'a dit en propres termes. L'idée de Dieu, telle que nous la possédons, est, selon lui, simplement réflexe. Il la compare à la vision spéculaire. Celle-ci, prise en soi, ne nous montre que les linéaments extérieurs de l'objet reflété par le miroir, sans nous renseigner par elle-même sur le fait et le mode de la vie des êtres [1].

» existentiam Dei : quod certe non nisi frustra faceret, si eam veritatem, per » se notam omnibus existimaret... Quare argumento ex verbis illis Anselmi » in Proslogio, et adversus insipientem petito, respondemus inde non col- » ligi existentiam Dei esse omnibus per se notam, *sed sapientibus dumtaxat...* » Caeterum eadem connexio (essentiae et existentiae Dei) immediate et per se » nota est iis qui apprime in Metaphysica versati sunt. Etenim in hoc ipso con- » ceptu objectivo Dei sive Entis a se, immediate detegunt existentiam, veluti » perfectionem explicitam ipsius, seu proprietatem immediatam qua non intel- » lecta, in obliquo saltem, conceptus objectivus Dei, sive Entis a se, intelligi » omnino nequit. Quare ii oppositum existentiae Dei cogitare non possunt... » Porro per conceptum objectivum significatum hoc nomine latino *Deus*, sicuti » et quocumque alio nomine ipsi aequivalente, juxta varias quarumlibet natio- » num linguas, intelligitur *id quo majus aut excellentius nihil cogitari valet.*» (*Disp.*, XI, sect. I, § 2; sect. VI, § 49.) — D'Aguirre, ici, est plus apologiste que critique.

[1] Le savant Valentia, partageant en cela le commun sentiment de sa docte Compagnie écrivait à propos de notre argument: «Ut maxime evidens est audito » nomine Dei omnes cogitare aliquid quo melius cogitari non possit; tamen » non propterea sequitur omnes illico agnoscere *esse* Deum. Non enim id sta- » tim cogitant per actum aliquem judicii et assensionem quo sibi persuadeant » tale aliquid *jam existere*, sed per simplicem quamdam apprehensionem cui » quidem utrum aliquid tale melius tanquam verum et existens objectum » respondeat non est notum donec argumentis aliquibus probetur.» (*In S.Th*,

Quoi qu'il en soit de l'élément ontologique renfermé dans l'argument d'Anselme, et du sens réel qu'il lui attribuait, il faut tomber d'accord que *sa forme dialectique* est vicieuse. Que de fois n'est-il pas arrivé qu'une vérité sublime ait perdu jusqu'à sa valeur véritable pour avoir été traduite d'une façon inhabile, selon les règles logiques ! La preuve du Prosloge en demeurera le plus solennel exemple.

Un contemporain d'Anselme, Gaunilon de l'abbaye de Marmoutiers, vit ce défaut et le signala. Le Dr Staudenmaier estime que Gaunilon est un personnage de toutes les époques, et qu'il est le type du philosophe naturaliste luttant contre l'Idéalisme. Nous préférons croire, avec Tennemann, qu'il y a dans sa critique des objections qui sont restées vraies, malgré les réponses d'Anselme. Nous devons résumer tout de suite ce document d'une importance capitale en tout ce débat, mais qui porte, lui aussi, en sa rude facture, l'estampille de l'époque [1].

Gaunilon, comme la plupart de ses contemporains, n'a pas un

t. Ier, d. 1, p. 11, p. 1. — Cf. Fr. de Lugo, *de Deo uno*, l. I, d. 14, a. 8. — Vasquez, *in S. Th.*, q. 11, a. 1, c. IV. — Suarez, *Met.*, d. 29, sect. III. — Vekenius, *de Deo uno et trino*, Antv., 1655, p. 30. — Les Jésuites modernes tiennent le même sentiment que leurs devanciers. Il suffira de citer Kleutgen, *Phil. der Vorzeit.*, III, p. 757, éd. Munster, 1860. — Tongiorgi, *Inst. phil.*, III, p. 319. — Nous ne connaissons que le P. Marin de Boylesve qui, en son Cours de Philosophie, reprenne l'argument de S. Anselme, au moins d'une manière assez explicite.

[1] Gaunilon ou Guanilon, comme le nomme Dom Martène dans l'histoire inédite du couvent de Marmoutiers découverte à la Bibliothèque de Tours par M. Ravaisson, était né d'une famille noble de Thuringe. Il vécut d'abord dans les grandeurs et prit ensuite l'habit religieux au Grand Monastère (majus monasterium). Il y mourut en 1083. Comte de Montigny, il avait possédé la trésorerie du chapitre S. Martin de Tours. — Voir M. Charma, *Notice bibliographique sur S. Anselme de Cantorbéry*, p. 242.

« Dubitanti utrum sit, vel neganti quod sit aliqua talis natura qua nihil
» majus cogitari possit, tamen esse illam hinc dicitur primo probari : quod
» ipse negans, vel ambigens de illa, jam habeat eam in intellectu, cum audiens
» illam dici, id quod dicitur intelligit; deinde, quia quod intelligit, necesse
» est ut non in solo intellectu, sed etiam in re sit. Et hoc ita probatur : quia
» majus est esse in intellectu et in re quam in solo intellectu. Et si illud est

grand souci de l'arrangement méthodique de ses preuves. Ne lui demandez pas l'ordonnance progressive des raisons, ni la mise en relief des points saillants. Mais très-fermement il a vu le faible de la démonstration du célèbre théologien du Bec. Il commence par risquer quelques affirmations qui montrent bien qu'il avait compris à fond le passage du Prosloge qui sert d'introduction à l'argument. — On prétend, dit-il, que l'insensé qui nie Dieu l'a déjà dans son intelligence, puisque dès qu'on parle de lui, il conçoit ce que ce mot signifie. Mais, s'il en est ainsi, il faut également concéder que nous avons dans notre intelligence toutes les maximes fausses et toutes les idées chimériques. Dira-t-on que c'est le propre de l'idée de l'Absolu de subsister dans l'intelligence d'une façon particulière, de manière qu'on ne peut le penser sans le concevoir, ou sans voir du même coup son existence, dans son concept? Mais en ce cas, il n'était pas besoin de distinguer aussi soigneusement ces deux choses : l'une, *d'avoir la chose dans l'intelligence;* l'autre, *de concevoir ultérieurement*

» in solo intellectu, majus illo erit quidquid etiam in re fuerit, ac sic majus » omnibus minus erit aliquo, et non erit majus omnibus; quod utique repug- » nat. Et ideo necesse est, ut majus omnibus, quod jam probatum est esse » in intellectu, non in solo intellectu, sed et in re sit; quoniam aliter majus » omnibus esse non poterit.

» Responderi forsitan potest, quod hoc jam esse dicitur in intellectu meo, » non ob aliud nisi quia id quod dicitur intelligo. Nonne et quaecumque » falsa, ac nullo prorsus modo in seipsis existentia, in intellectu habere simi- » liter dici possem, cum ea dicente aliquo, quaecumque ille diceret, ego intel- » ligerem? nisi forte tale illud constat esse ut non eo modo, quo etiam falsa » quaeque vel dubia, haberi possit in cogitatione, et ideo non dicor illud audi- » tum cogitare vel in cogitatione habere, sed intelligere et in intellectu habere, » quia, scilicet, non possum hoc aliter cogitare, nisi intelligendo id est, » scientia comprehendendo, re ipsa illud existere?

» Sed si hoc est, primo quidem, non hic erit jam aliud, idemque tempore » praecedens, habere rem in intellectu, et aliud, idemque tempore sequens, » intelligere rem esse; ut fit pictura, quae prius est in animo pictoris, deinde » in opere. Deinde, vix umquam poterit esse credibile, cum dictum et audi- » tum fuerit istud, non eo modo posse cogitari non esse, quo etiam potest » cogitari non esse Deus. Nam si non potest, cur contra negantem au dubitan- » tem, quod sit aliqua talis natura, tota ista disputatio est assumpta? »

qu'elle existe. En outre, si la seule présence de la notion de Dieu dans l'esprit conduit à l'affirmation de sa réalité ou de son existence en dehors de l'esprit, il s'ensuivrait qu'il suffirait de se représenter idéalement Dieu pour percevoir aussitôt son existence. D'où vient alors qu'on doive démontrer cette existence avec un si grand labeur, comme l'auteur du Prosloge le montre par son propre exemple?

Le critique semble pressentir le sentiment de Leibnitz qui cherchait précisément à compléter la preuve d'Anselme en établissant *que, en Dieu,* l'essence ou la possibilité intrinsèque du concept entraîne l'existence réelle. Mais il est tout à fait dans le faux lorsqu'il croit que l'existence de l'Absolu, supposé même qu'elle fût contenue dans sa seule idée, ne devrait pas être démontrée, ou du moins éclaircie, développée.

Gaunilon poursuit en signalant la différence des conceptions de notre intelligence et de l'existence idéale des œuvres d'art dans l'esprit de l'artiste. Celles-ci, dit-il, sont en quelque sorte, avant d'être réalisées, une partie de l'intelligence de l'artisan. Au contraire, dans l'acte de perception, autre chose est la raison qui perçoit, autre chose le terme intelligible [1]. Le moine de Marmoutiers touche ensuite à la nature purement analogique de notre connaissance de Dieu. Nous ne le connaissons que par comparaison, dit-il, et non en soi, ni d'une manière directe. Comment, en l'entendant nommer, pourrais-je le concevoir comme un Être nécessairement existant? Je connais la nature spécifique de l'homme : néanmoins, si quelqu'un me parlait d'un homme déterminé, je ne pourrais de ce type générique inférer son existence; car il se pourrait que de fait cet individu-là n'existât point en réalité. A plus forte raison ne puis-je déduire l'existence actuelle de Dieu de son idée. Je puis comparer un homme déterminé à d'autres individus de l'espèce : mais cela est impossible pour l'Être absolu, dont aucun autre être ne peut me donner la notion véritable, complète [2]. « Lorsque j'entends nommer Dieu ou

[1] § 3.
[2] § 4.

l'Être plus grand que tous les autres, dit-il, je ne puis l'avoir dans la pensée et dans l'intelligence, sous une forme facile à saisir, comme celle sous laquelle je me figurais cet être dont je viens de parler, et qui pourtant n'existait pas. Je pouvais penser à un homme en vertu de l'idée d'un être vrai, idée dont l'objet m'était connu; mais je ne puis penser à Dieu que par l'entremise d'un mot, duquel seul on peut à peine, ou l'on ne peut nullement conclure à l'existence réelle de ce qu'il exprime. S'il est vrai toutefois, et l'on n'en saurait douter, que lorsqu'on pense sous cette forme et dans cette condition, c'est plutôt l'objet exprimé par le mot qui fait l'objet de la pensée, que le mot lui-même, vrai seulement en tant que son de lettres et de syllabes, il faut remarquer que, dans ce cas, sa signification est conçue non comme elle le serait par celui qui connaît *ce que cette parole exprime* et qui se représente l'être lui-même et la pensée véritable, mais comme elle le serait par celui qui n'en connaît pas l'objet, et dont la pensée se détermine uniquement en vertu du mouvement imprimé à son âme par la parole qu'il a entendue, et à laquelle il s'efforce de trouver un sens; terme qu'il serait bien surprenant qu'il atteignît dans une complète vérité. Il est certain que les choses ne se passent pas autrement, dans mon intelligence, lorsque quelqu'un établissant qu'il y a un être plus grand que tout ce que l'on peut imaginer, j'entends et je comprends ses paroles. C'est là ce que j'avais à répondre, conclut Gaunilon, et cette réponse me paraît répondre aux raisons par lesquelles on croit prouver que cette nature suprême existe dans mon intelligence [1]. »

Après ces remarques superficielles, Gaunilon arrive au côté vraiment fort de son argumentation. Il nie que Dieu doive être conçu comme existant, précisément parce qu'on le considère

[1] « Nec sic igitur, ut haberem falsum istud in cogitatione vel in intellectu,
» habere possum illud cum audio dici Deus, aut aliquid omnibus majus. Cum
» quando illud secundum rem veram mihique notam cogitare possum, istud
» omnino nequeam nisi tantum secundum vocem, secundum quam solam aut
» vix aut numquam potest ullum cogitari verum. Siquidem, cum ita cogita-
» tur, non tam ipsa vox, quae res est utique vera, hoc est, litterarum sonus

comme l'Être le plus grand. Pourquoi cela? Parce qu'on peut nier que de fait il existe *un Être absolu*. Il faut donc avant tout démontrer par un clair argument, *qu'un tel Être existe en réalité*. Ce n'est pas assez pour cela d'en appeler sans cesse à son existence idéale dans l'esprit: celle-ci n'est que le résultat d'une spéculation mentale. L'esprit, lorsqu'il se représente l'Être le plus grand, se forme une idée dont l'objet, dans son essence, lui est caché [1]. En s'appuyant sur l'argument du Prosloge, dit Gaunilon en son singulier langage, on soutiendrait également bien l'existence de ces îles qu'on pourrait nommer les Iles perdues, à cause de la difficulté de les trouver. Supposons que quelqu'un nous dise : dans ces îles, bien plus qu'aux Iles fortunées, il y a une abondance extrême de toute espèce de biens; ce sont les plus riches régions de l'univers! Ce discours ne présentera aucune espèce de difficulté. Mais s'il ajoutait : Tu ne peux nier que ces

» vel syllabarum, quam vocis auditae significatio cogitatur; sed non ita ut ab » illo qui novit quid ea soleat voce significari, a quo scilicet cogitatur secundum rem vel in sola cogitatione veram, verum ut ab eo qui illud non » novit, et solummodo cogitat secundum animi motum illius auditu vocis » effectum significationemque perceptae vocis conantem effingere sibi; quod » mirum est, si umquam rei veritate potuerit. Ita ergo nec prorsus aliter » adhuc in intellectu meo constat illud haberi, cum audio intelligoque dicentem esse aliquid magis omnibus quae valeant cogitari. » (§ 4.)

[1] « Quod autem et in re necessario esse, inde mihi probatur quia, nisi » fuerit, quidquid est in re majus illa erit, ac per hoc non erit illud majus » omnibus, quod utique jam esse probatum est in intellectu. Ad hoc respondeo, si esse dicendum est in intellectu, quod secundum veritatem cujusquam rei nequit saltem cogitari, et hoc in meo sic esse non denego. Sed » quia per hoc esse quoque in re non potest ullatenus obtineri, illud ei esse » adhuc penitus non concedo, quousque mihi argumento probetur indubio. » Quod qui esse dicit hoc quod majus omnibus aliter non erit omnibus majus, » non satis attendit cui loquatur. Ego enim nondum dico, imo etiam nego » vel dubito, ulla re vera esse majus illud; nec aliud ei esse concedo quam » illud, si dicendum est esse, cum secundum vocem tantum auditam rem » prorsus ignotam sibi conatur animus effingere. Quomodo igitur inde mihi » probatur, majus illud rei veritate subsistere, quia constet illud majus omnibus esse; cum id ego eousque negem adhuc dubitemve constare; ut ne in » intellectu quidem vel cogitatione mea eo saltem modo majus ipsum esse

îles n'existent en réalité. En effet, tu les tiens pour les meilleures contrées du monde, et en les concevant de la sorte tu leur donnes véritablement une existence idéale. Or il vaut mieux qu'elles existent à la fois et dans ton esprit et dans la réalité. Autrement il serait possible de concevoir des régions supérieures à celles-ci, et *qui de fait existeraient réellement.* Un pareil raisonnement serait à coup sûr le comble de la démence. Eh bien, n'est-il pas absurde de conclure à l'existence du souverain Être, parce qu'il se présente à notre esprit comme existant, *à moins d'avoir prouvé que cette conception de notre intelligence est légitime, objective.* Aussi toutes les fois qu'on voudra prouver à l'incrédule que Dieu existe en réalité en remarquant que, dans le cas contraire, il ne serait pas l'*Être le plus grand,* il pourrait répondre : Mais avant tout prouvez-moi simplement que cet *Être suprême* existe ; cela même est en question. Aussi, ajoute en terminant le tenace moine de Marmoutiers, au lieu de dire

» dicam, quo dubia etiam multa sunt et incerta. Prius enim certum mihi ne-
» cesse est fiat, re vera esse alicubi majus ipsum, et tum demum ex eo, quod
» majus est omnibus in seipso quoque subsistere, non erit ambiguum. (§ V.)
» Exempli gratia : Aiunt quidam alicubi oceani esse insulam, quam ex
» difficultate vel potius ex impossibilitate inveniendi, quod non est, cogno-
» minant aliqui perditam; quamque fabulantur multo amplius quam de for-
» tunatis insulis fertur, divitiarum deliciarumque omnium inestimabili uber-
» tate pollere, nulloque possessore aut habitatore universis aliis, quas incolunt
» homines, terris possidendorum redundantia usquequaque praestare. Hoc ita
» esse dicat mihi quispiam, et ego facile dictum, in quo nihil est difficul-
» tatis, intelligam. At si tunc velut consequenter adjungat ac dicat : Non
» potes ultra dubitare insulam illam omnibus terris praestantiorem vere esse
» alicubi in re, quam in intellectu tuo non ambigis esse; et quia praestantius
» est non in intellectu solo, sed etiam esse in re, ideo sic eam necesse est
» esse, quia, nisi fuerit, quaecumque alia in re est terra praestantior illa erit,
» ac sic ipsa jam a te praestantior intellectu praestantior non erit. Si, inquam,
» per haec ille mihi velit astruere de insula illa, quod vere sit, ambigen-
» dum ultra non esse, aut jocari ipsum credam, aut nescio quem stultiorem
» debeam reputare, utrum me, si ei concedam, an illum, si se putet aliqua
» certitudine insulae illius essentiam astruere, nisi prius ipsam praestantiam
» ejus solummodo, sicut rem vere atque indubie existentem, nec ullatenus
» sicut falsum aut incertum aliquid in intellectu meo esse docuerit. » (§ VI.)

que l'Absolu ne peut pas être *pensé* comme n'existant pas, on dirait mieux qu'il ne peut pas être *compris* à part de l'existence réelle, ou qu'il n'est pas possible d'en avoir une connaissance complète sans le concevoir comme existant. La raison en est en ce que le mot *comprendre* ne se dit que de la science *véritable* ou des notions adéquates, par opposition à la connaissance conjecturale ou erronée qui peut néanmoins être présente à la pensée. En ce sens je *sais* que je suis, mais je sais aussi que je pourrais ne point être; je comprends que l'Être suprême existe et ne peut point ne pas exister. Mais quant à *penser* que je n'existe pas pendant que j'existe, j'ignore si cela m'est possible. Si l'on tient que je le puis, pourquoi ne pourrais-je point penser de même que l'Être suprême n'existe point? Et si l'on veut que je ne le puisse point, cette impossibilité n'affecte pas exclusivement le souverain Être, comme le suppose l'argument [1].

C'est ainsi qu'un contemporain traitait l'argument ontologique [2].

[1] « Haec interim ad objecta insipiens ille responderit. Cui cum deinceps » asseritur tale esse majus illud, ut nec sola cogitatione valeat non esse, et » hoc rursus non aliunde probatur, quam eo ipso quod aliter non erit omnibus » majus, idem ipsum possit referre responsum et dicere : Quandonam ego » rei veritate esse tale aliquid, hoc est, majus omnibus dixi, ut ex hoc mihi » debeat probari in tantum etiam re ipsa id esse, ut nec possit cogitari non » esse? Quapropter certissimo primitus aliquo probandum est argumento ali- » quam superiorem, hoc est, majorem ac meliorem omnium quae sunt esse » naturam, ut ex hoc alia jam possimus omnia comprobare, quibus necesse » est illud quod majus ac melius est omnibus non carere.

» Cum autem dicitur, quod summa res ista non esse nequeat *cogitari*, me- » lius fortasse diceretur, quod non esse aut etiam posse non esse non possit » *intelligi;* nam secundum proprietatem verbi istius falsa nequeunt intelligi, » quae possunt utique eo modo cogitari, quo Deum non esse insipiens cogi- » tavit. Et me quoque esse certissime scio, sed et posse non esse nihilominus » scio; summum vero illud, quod est Deus, et esse et non esse non posse indu- » bitanter intelligo. Cogitare autem me non esse, quamdiu esse certissime scio, » nescio utrum possim; sed si possum, cur non et quidquid aliud eadem certi- » tudine scio? Si autem non possum, non erit jam istud proprium Deo. » (§ VII.)

[2] Sur la réplique de Gaunilon, voyez Ritter, *Geschichte der Phil.*, t. VII, p. 336. — Tennemann, *Geschichte der Phil.*, t. VIII, p. 158. Dr Hase, t. II, pp. 238-271.

Du reste, ce point là à part, le Prosloge paraît à Gaunilon un traité excellent, digne des plus grands éloges [1]. Anselme lui répliqua, et nous devons voir comment il sauvegarde, dans son apologie, la valeur de sa preuve de prédilection. Dès qu'il eut reçu par un de ses amis communication de la critique de Gaunilon, écrite à la suite d'une copie du Prosloge, il voulut y répondre en détail. Les objections du comte de Montigny avaient fait impression sur quelques esprits [2]; notre Docteur était tenu d'y opposer une réfutation prompte et sérieuse.

S. Anselme ne devait pas aimer beaucoup la polémique. Toujours l'homme d'intuition est, sur ce terrain-là, plus faible que sur celui de la spéculation pure. Il n'en redressa pas moins avec habileté les quelques exagérations de son redoutable adversaire.

Il va d'emblée au cœur de la question; mais il faut bien le dire : dès le début aussi, il témoigne combien les attaques de l'adversaire sont fondées. Votre foi et votre conscience, dit-il à Gaunilon, proclament Dieu l'Être suprême, l'absolue Perfection [3]. Dès lors si la Cause suprême n'existe pas dans l'esprit, c'est que celui-ci se forme de Dieu une notion fausse; mais si l'intelligence le conçoit avec exactitude, il faut que l'Absolu existe *dans l'esprit.* En outre, il existe *dans la réalité.* L'Être absolument le plus parfait doit évidemment être conçu sans commencement. Or, tout être qui n'existe pas de soi et par soi implique dans son concept une *existence initiale* ou, si l'on veut, il a commencé d'exister. Il est donc

[1] Cela n'empêche pas M. Renan de donner comme un libre penseur ce Gaunilon, et d'assurer que dans son *Liber pro insipiente* il avait osé faire l'apologie de l'insensé, qui a dit dans son cœur : « Il n'y a pas de Dieu! » (*Averroès*, p. 282.)

[2] Voir le c. V de la *Réponse d'Anselme.*

[3] « Ego vero dico : si quo majus cogitari non potest, non intelligitur vel » cogitatur, nec est in intellectu vel cogitatione, profecto Deus aut non » est quo majus cogitari non possit, aut non intelligitur vel cogitatur, » et non est in intellectu vel cogitatione. Quod quum falsum sit, *fide* et » *conscientia tua* pro firmissimo utor argumento. Ergo quo majus cogitari » non potest, vere intelligitur et cogitatur, et est in intellectu et cogitatione. » (C. I.)

impossible de penser que l'Être le plus parfait n'existe pas réellement.

Nous venons de constater, poursuit Anselme, plusieurs propriétés ou attributs de « l'Être le plus grand. » Puisque nous percevons clairement ces choses, nous devons avouer que cet absolu lui-même *existe dans notre pensée.* Le niera-t-on pour le motif que celle-ci ne le pénètre pas d'une façon tout à fait complète? Mais si cela motivait une pareille négation, l'on pourrait également nier que l'œil voie la lumière du soleil, parce qu'il ne peut la fixer dans tout son éblouissant éclat. Il est donc avéré que nous avons *dans l'intelligence* l'Être absolument parfait, et cela précisément *parce que nous le concevons.* Or, cet être n'existe pas dans l'intelligence seule, mais aussi en réalité. C'est précisément sa note caractéristique et *incommunicable* que d'impliquer le fait de son existence dans son idée, dans sa formule intelligible [1]. Que l'adversaire montre un seul être distinct de l'Absolu, et possédant cette propriété, et l'on pourra lui assurer l'empire de ces Iles perdues au sujet desquelles il badine si plaisamment [2].

Mais Anselme ne se contente pas de ces observations. Il constate que, dans sa critique, Gaunilon a confondu *le plus grand des*

[1] C. III.

[2] « Fidens loquor, quia si quis invenerit mihi aliquid aut re ipsa aut sola » cogitatione existens, *praeter quo majus cogitari non possit*, cui aptare » valeat connexionem hujus meae argumentationis, inveniam et dabo illi perditam insulam amplius non perdendam. Palam autem jam videtur, quo non » valet cogitari majus, *non posse cogitari non esse*, quod tam certa ratione » veritatis existit; aliter enim nullatenus existeret. Denique, si quis dicit, se » cogitare illud non esse; dico quia, cum hoc cogitat, aut cogitat aliquid quo » majus cogitari non possit, aut non cogitat. Si non cogitat, non cogitat » non esse quod non cogitat. Si vero cogitat, utique cogitat aliquid quod » nec cogitari non esse possit. Si enim posset cogitari non esse, cogitari » posset habere principium et finem; sed hoc non potest. Qui ergo illud » cogitat, aliquid cogitat quod nec cogitari possit non esse; hoc vero qui » cogitat, non cogitat idipsum non esse; alioquin cogitat quod cogitari non » potest. Non igitur potest cogitari non esse quo majus cogitari nequit. » (C. III.)

Êtres avec l'*Être le plus grand* que l'on puisse penser. C'est de ce dernier seulement que se vérifie l'argument du Prosloge, puisqu'il serait contradictoire d'attribuer l'absolue et suprême perfection à un Être existant seulement dans la pensée. Mais cela ne peut s'affirmer avec une égale évidence de l'Être qui est en réalité *le plus parfait.* Un pareil être pourrait être pensé comme n'existant pas [1].

Vous n'accordez pas, dit notre Docteur à l'adversaire, qu'il est impossible de penser l'Être le plus grand comme n'existant pas. Cependant n'est-il pas vrai que si l'on nie l'existence actuelle de Dieu, c'est qu'on ne le conçoit pas comme il le faudrait. Et c'est précisément pour cette raison que j'ai basé tout mon raisonnement sur la notion de l'Être *au-dessus duquel on n'en peut penser de plus grand* [2]. A l'occasion de ces considérations, vous avez critiqué la comparaison du tableau et de son existence dans l'imagination de l'artiste : mais vous oubliez que j'ai uniquement fait cette comparaison pour montrer qu'il y a certaines choses *existant dans l'intelligence* et qu'on conçoit parfaitement comme *n'existant pas*

[1] « Primum, quod saepe repetis me dicere quia *quod est majus omnibus* » est in intellectu, et si est in intellectu, est et in re; aliter enim omnibus » majus non esset omnibus majus. Nusquam in omnibus dictis meis invenitur » talis probatio. Non enim idem valet, quod dicitur *majus omnibus*, et *quo* » *majus cogitari nequit* ad probandum, quia est in re quod dicitur... Nam » quod non est potest non esse, et quod non esse potest cogitari potest non » esse. Quidquid autem cogitari potest non esse, si est non est quo *majus* » *cogitari non possit...* Hoc autem non tam facile probari posse videtur de eo » quod *majus dicitur omnibus...* Quid enim, si quis dicat esse aliquid majus » omnibus quae sunt, et idipsum tamen posse cogitari non esse, et aliquid » majus eo, etiamsi non sit, posse tamen cogitari; an hic sic aperte inferri » potest : non est ergo majus omnibus quae sunt, sicut ubi apertissime dice- » retur : ergo non est quo majus cogitari nequit? Illud namque alio indiget » argumento quam hoc quod dicitur omnibus majus; in isto vero non est » opus alio, quam hoc ipso quod sonat : quo majus cogitari non possit. » (C.V.)

[2] « Quare nec credibile potest esse, idcirco quemlibet negare quo majus » cogitari nequit, quod auditum aliquatenus intelligit, quia negat Deum, » cujus sensum nullo modo cogitat. Aut si et illud, quia non omnino intelli- » gitur negatur, nonne tamen facilius id quod aliquo modo quam id quod » nullo modo intelligitur, probatur ? » (C. VII.)

en réalité. C'est précisément à ces choses-là que j'ai opposé l'Être le plus grand.

Vous croyez que je ne puis me faire une idée de cet Être, parce que je ne le connais ni par son essence ni par un autre être offrant avec lui une ressemblance proprement dite. Mais ne puis-je, au moyen des biens créés, me faire une lointaine idée du Bien incréé et conjecturer en quelque sorte sa nature ? Par exemple, s'il y a quelque chose de bon impliquant un commencement, l'on peut penser que le Bien sans commencement est meilleur, et que le Bien sans fin comme sans commencement est supérieur encore : et qu'enfin le Bien sans fin, sans commencement et même sans aucun changement, est bien plus excellent. Ne peut-on pas raisonner de la sorte, même abstraction faite de l'existence de pareils Êtres ? De cette manière ne parvient-on pas à pressentir beaucoup de vérités, concernant l'Être au-dessus duquel on n'en peut penser de plus grand [1] ?

Si l'incrédule assurait qu'il ne peut même *concevoir* les termes de cette énonciation : l'*Être le plus grand existe nécessairement*, qui ne rirait de lui ? Celui qui nie l'existence de cet Être (de l'Absolu) conçoit du moins cette proposition négative, et par ce fait même, l'Être au-dessus duquel on n'en peut penser de plus grand. Il est certes possible de penser un Être qui ne peut point ne pas exister en réalité. Or, cet Être se manifeste d'évidence à l'esprit comme plus grand que celui qui peut ne pas exister. Dès lors, dans l'hypothèse que l'impie se représente *mentalement* l'Être le plus grand, il doit nécessairement admettre que cet Être existe aussi *en réalité* [2].

[1] C. VIII.

[2] « ... Cum dicitur : quo nihil majus valet cogitari, procul dubio quod audi-
» tur cogitari et intelligi potest, etiamsi res illa cogitari non valeat aut intelligi
» qua majus cogitari nequit. Nam etsi quisquam est tam insipiens, ut dicat
» non esse aliquid quo majus non possit cogitari, non tamen ita erit impu-
» dens, ut dicat se non posse intelligere aut cogitare quid dicat ; aut si quis
» talis invenitur, non modo sermo ejus est respuendus, sed et ipse cons-
» puendus.

» Quisquis negat, aliquid esse quo majus nequeat cogitari, utique intel-

Je crois donc avoir démontré, conclut Anselme, qu'il existe réellement un Être tel qu'au-dessus de lui l'esprit n'en saurait concevoir de plus parfait. Et la portée de ma démonstration est telle que cet Être absolu dont on énonce le nom est posé comme réellement existant, en dehors de l'intelligence, par le seul fait qu'on le conçoit et qu'on l'affirme avec une si singulière nécessité. De cette proposition fondamentale découlent comme autant de corollaires tous les autres attributs de la Cause suprême [1].

Nous savons à présent l'originalité et aussi l'erreur de la preuve d'Anselme. Elles consistent à induire directement l'existence de l'Infini de son idée, de sa notion. Quant à admettre avec le Docteur Ueberwegg que par l'existence dans l'esprit qu'il attribue à l'Absolu, il ait entendu non la simple représentation mentale, mais une sorte de forme idéale, comme en imagina si souvent l'École réaliste, c'est, croyons-nous, une supposition ingénieuse, mais peu acceptable [2]. L'hypothèse de l'éminent et regrettable historien de la Philosophie est inutile pour l'intelligence de la doctrine d'Anselme, et, de plus, elle paraît tout à fait gratuite. De la discussion de l'argument du Prosloge, il ressort uniquement que celui-ci prétendait

» ligit et cogitat negationem quam facit, quam negationem intelligere aut » cogitare non potest sine partibus ejus; pars autem ejus est quo majus cogi- » tari non potest. Quicumque igitur hoc negat, intelligit et cogitat quo majus » cogitari nequit. Palam autem est, quia similiter potest cogitari et intelligi » quod non potest non esse; majus vero cogitat qui hoc cogitat, quam qui » cogitat quod possit non esse. Cum ergo cogitatur quo majus non possit » cogitari, si cogitatur quod possit non esse, non cogitatur quo non possit » cogitari majus. Sed nequit idem simul cogitari et non cogitari. Quare qui » cogitat quo majus non possit cogitari, non cogitat quod possit, sed quod non » possit non esse. Quapropter necesse est esse quod cogitat, quia quidquid » non esse potest non est quod cogitat. » (C. IX.)

[1] « Puto, quia monstravi me non infirma, sed satis necessaria argumenta- » tione probasse in praefato libello, *re ipsa* existere aliquid quo majus cogi- » tari non possit, nec eam alicujus objectionis infirmari firmitate. Tantam enim » vim hujus probationis in se continet significatio, ut hoc ipsum quod dicitur » ex necessitate, eo ipso quod intelligitur vel cogitatur, et re vera probetur » existere, et idipsum esse quidquid de divina substantia oportet credere. » (C. X.)

[2] *Geschichte der Phil*, II, p. 181.

tirer directement l'existence réelle de l'Absolu de sa notion dans l'esprit.

C'est ainsi également que les plus anciens Docteurs qui se préoccupèrent de sa démonstration, l'ont comprise. Thomas d'Aquin s'est expliqué là-dessus en plusieurs passages de ses deux Sommes. Nous devons nous arrêter quelques instants à ces graves éclaircissements.

Après Albert le Grand son maître [1], S. Thomas se demande, dès le début de sa *Théodicée*, « *si Dieu est un Être connu par soi?* » Nous savons déjà qu'en posant cette question, les Docteurs entendent examiner si l'existence de l'Être absolument parfait est une vérité évidente par elle-même. Après Aristote, les Scolastiques appellent *connues par soi* les vérités principes, les axiomes fondamentaux des sciences, qui non-seulement sont vrais en eux-mêmes, mais qui se posent devant notre esprit dans la pleine lumière de l'*évidence immédiate* et sans avoir besoin d'une démonstration ultérieure. « Une proposition est *connue de soi*, dit S. Thomas, lorsque sa vérité se manifeste d'une façon évidente par l'énoncé de ses termes ; exemple : le tout est plus grand que ses parties. » En un autre passage, il avait appelé de ce nom *les vérités évidentes par leurs termes,* ce qui est le propre des premiers principes, des *axiomes vulgaires que nul ne peut ignorer* [2]. Retenons cette dernière explication. Du moment où la question était ainsi posée, il est clair que, par rapport à Dieu, elle ne pouvait avoir qu'une solution négative [3]. Ce qui est autrement sérieux, ce sont les raisons qu'on apporte pour nier l'intelligibilité immédiate de l'Absolu.

[1] T. XVII, p. 62. Éd. Lugd., 1638.

[2] « Illa *per se esse nota* dicuntur quae statim notis terminis cognoscuntur, » sicut : cognito quid est totum et quid est pars, statim cognoscitur quod » omne totum est minus sua parte. » (*Sum. cont. Gent.*, I, c. X.) — « Ex hoc » propositio aliqua est per se nota quod praedicatum includitur in ratione » subjecti, ut homo est animal... *Sum. th.*, I, q. II, a. 1, in corp. » — Cf. *De Verit.*, q. 10, a. 12. — Scot, *In sent.*, I, D. II, q. 2.

[3] D'Aguirre exprime parfaitement la doctrine de S. Thomas : « Ratio autem » a priori hujus doctrinae videtur in eo sita, quod proprium sit primorum » principiorum, ut omnibus hominibus ratione utentibus per se nota sint.

S. Thomas note que l'existence de Dieu est très-souvent niée ou révoquée en doute : donc elle n'est pas immédiatement connue de soi. Qui s'avise de nier les premiers principes? Ne sont-ils pas l'universel patrimoine de tous les esprits ? D'autre part, plusieurs ont cru que Dieu était un *corps matériel* ou même l'*ensemble de l'univers*. Tout en admettant l'existence de Dieu, l'on peut, par erreur, ne pas le concevoir comme l'Être le plus parfait [1]. — Au point de vue strictement logique, la remarque frappe en plein l'argument du Prosloge. C'est de l'idée seule de l'Infini qu'Anselme déduisait son existence. Sous ce rapport-là cette idée ressemblait tout à fait aux axiomes, aux premiers principes que nul ne conteste. Certes, Anselme ne tient pas que la notion de l'Absolu soit aussi simple et aussi accessible à l'intelligence que celle de l'*être* et du *non-être,* du tout et de la partie. Il nous a appris, dans sa réponse à Gaunilon, que cette notion est assez complexe, et que l'on ne parvient à l'idée adéquate de Dieu que d'une manière analogique, après certains raisonnements préalables. Il aurait sans doute répondu à S. Thomas ce qu'il répliquait à Gaunilon : que penser Dieu comme un corps ou comme l'ensemble des forces physiques, ce n'était pas le concevoir du tout, mais substituer à son concept une chimère insensée. Il n'en demeurait pas moins certain que ces erreurs mêmes prouvaient que l'esprit n'a point de l'Infini une connaissance *intuitive,* qui lui permette d'inférer sa réalité de sa seule Idée. C'est là ce qui nous intéresse dans le raisonnement du Docteur Dominicain. S. Thomas écrit encore à ce sujet : Il est très-vrai, que pour

» Talia sunt quae spectant ad habitum primorum principiorum speculabilium, » ut : *quodlibet est, vel non est,* et, *omne totum est majus sua parte.* Talia » etiam principia *prima agibilia* quae dicuntur principio juris communia, et » spectant ad synderesim : ut bonum *est faciendum*, et *malum est fugien-* » *dum*, etc... Itaque lumine naturae nobis generatim solum sunt per se nota » principia : qualia sunt quae spectant immediate ad habitum principiorum, » seu speculabilium, seu agibilium. Atqui propositio haec *Deus existit,* non » est aliquod primum principium, nec speculabile, nec agibile. » (Disp. VI, sect. III, § 28.

[1] Voy. *Sum. th*, I, q. II, a. 1, ad 1. — Cf. *Sum. cont. Gent.,* l. III, c. XXXVIII.

ceux-là qui voient à découvert l'essence divine, l'*existence de Dieu est connue de soi*, puisque son essence et son existence ne sont en rien distinctes. Mais l'homme ne voit point les essences des choses, celle de l'Être absolu surtout. Nous ne nous élevons à la cause increéée que par l'intermédiaire des créatures [1]. Pour déduire *directement* l'existence de l'essence même ou de la formule idéale de l'Infini, il faudrait que cette idée fût véritablement intuitive. Or cela ne peut être soutenu sérieusement, Anselme lui-même en tombe d'accord.

C'est tout à fait dans le même sens que S. Thomas enseigne que l'existence de Dieu est immédiatement évidente *en soi*, mais non *quant à nous*. Le Docteur angélique veut dire que pour ceux qui ont l'intuition directe de l'Infini, son *existence* est saisie dans *son essence* même [2]. Antoine de Gênes insinue à ce propos qu'il paraît absurde d'appeler une chose évidente *en soi*, mais non *quant à nous*. C'est qu'il ne réfléchit pas sur la condition d'*intelligibilité immédiate* que S. Thomas a si clairement exposée, dans le passage de la Somme philosophique rap-

[1] « Dico ergo quod haec propositio *Deus est*, quantum in se est *per se* nota » est; quia praedicatum est idem cum subjecto. *Deus enim est suum esse.* — » Sed quia nos non scimus de Deo quid est, non est *nobis* per se nota, sed » indiget demonstrari per ea quae sunt magis nota *quoad nos* et minus nota » quoad naturam, scilicet per effectus... (*Sum. th.*, I, q. 2, a. 1 in concl.) — Quod » possit cogitari (Deus) non esse, non ex imperfectione sui esse est vel incer- » titudine, quum suum esse sit secundum se manifestissimum, sed ex debili- » tate nostri intellectus, qui eum intueri non potest per se ipsum, sed ex » effectibus ejus. Et sic ad cognoscendum ipsum esse, *ratiocinando* perduci- » tur... Sicut nobis per se notum est quod *totum sua parte sit majus*, sic » videntibus ipsam divinam Essentiam per se notissimum est Deum esse, ex » hoc quod sua essentia est suum esse. Sed quia Ejus essentiam videre non » possumus, ad ejus esse cognoscendum non per se ipsum, sed per ejus » effectus pervenimus. » (*Sum. cont. Gent.*, l. I, c. XI.)

[2] « Respondeo dicendum quod contingit aliquid esse per se notum dupli- » citer. Uno modo *secundum se*, et *non quoad nos*, alio modo secundum se » et quoad nos. Ex hoc enim aliqua propositio est per se nota, quod praedica- » tum includitur in ratione subjecti ut : homo est animal; nam animal est de » *ratione* hominis. Si igitur notum sit omnibus de praedicato, et de subjecto » quid sit, propositio illa erit omnibus per se nota, sicut patet in primis de-

pelé tout à l'heure[1]. Celle-ci fait le fond même du présent débat, la claire intuition du rapport de l'essence et de l'existence en Dieu pouvant seule permettre à l'esprit de passer *de sa seule notion* à sa vivante *réalité*.

S. Thomas s'exprime lui-même en ce sens. Supposons, dit-il, que par le nom de Dieu l'on signifie l'Être absolument le plus parfait que l'on puisse penser. Il ne s'ensuit pas qu'un tel Être existe en réalité. De ce que l'intelligence conçoit l'idée de cet Être, l'on ne peut induire qu'il existe en dehors de l'intelligence[2]. — C'est ce

» monstrationum principiis quorum termini sunt quaedam communia quae » nullus ignorat, ut ens et non ens, totum et pars, et similia. — Si autem » *apud aliquos* notum sit de praedicato et subjecto quid sit, propositio quidem quantum in se est, erit per se nota, non tamen apud illos qui praedicatum et subjectum propositionis ignorant. » (*Ibid.*) — C'est tout à fait dans le même sens que Biel écrivait : « Cum dicitur propositio per se nota, » non excluditur notitia terminorum, nec notitia terminorum est sufficiens » respectu talis notitiae : sed cum terminorum notitia etiam requiritur for- » matio propositionis, et ex consequenti voluntas imperans intellectui ut intel- » ligat. — Propositio « Deus est » quam format Beatus, cognoscens divinam » Essentiam in se est per se nota. » (*In I*, d. III, q. IV.)

[1] Cf. Genuens, *Elem. theol. christ.*, l. II, c. I. — Déjà Argentinas avait tenu la même doctrine qu'Antoine de Gênes. (*In I Sent.*, d. II, q. 1, art. 3.) — Ils ne faisaient que reproduire au fond de vieilles objections. (Cf. Henri de Gand, *Sum.*, p. 1, a. 22, q. 2; Scot, *in I*, d. 2, q. 2. — Occam, *in I*, d. 3, q. 3; *in I*, q. 3.

[2] « Dato etiam quod quilibet intelligat hoc nomine Deus significari hoc quod » dicitur, scilicet illud quo majus cogitari non potest; non tamen propter hoc » sequitur quod intelligat id quod significatur per nomen *esse in rerum na-* » *tura*, sed *in apprenhensione intellectus tantum*. Nec potest argui quod sit » in re, *nisi* daretur quod sit in re aliquid quo majus cogitari non potest, » *quod non est datum* a ponentibus Deum non esse. » (*Sum. th.*, l. c, ad 2m. — Cf. *Sum. cont. Gent.*, l. c.) — « Ex hoc quod mente concipitur quod profertur hoc » nomine *Deus*, non sequitur Deum esse, *nisi in intellectu*. Unde nec opor- » tebit id quo majus cogitari non potest, esse nisi in intellectu : et ex hoc non » sequitur quod sit aliquid in rerum natura quo majus cogitari non possit. Et » sic nullum inconveniens accidit ponentibus Deum non esse. Non enim incon- » veniens est, quolibet dato vel in re vel in intellectu, aliquid majus cogitari » posse, nisi ei qui concedit esse aliquid quo majus cogitari non possit, in » rerum natura. »

que Duns Scot explique d'une manière un peu différente en ces termes : « Il faut interpréter comme ceci l'argument d'Anselme : Étant posée l'idée de Dieu, comme celle de l'Être le plus grand, il est impossible de *penser* qu'il existe un Être plus grand que lui [1]. » S. Thomas ne fait que reprendre contre la preuve du Prosloge les meilleures réflexions de Gaunilon.

La question est éclaircie au point de vue dialectique. Sous la forme qu'il revêt dans le Prosloge, l'argument de S. Anselme n'est pas démonstratif. La conclusion excède les prémisses. Mais de fait, il y a dans sa preuve un élément objectif d'une importance et d'une portée extrêmement sérieuses.

En exposant les principes de métaphysique d'Anselme, nous avons montré comment toute son idéologie repose, en définitive, sur le rapport de causalité des êtres relatifs avec l'Être absolu. En raison de leur contingence, les êtres bornés de l'univers n'ont pu être appelés à l'existence physique que par l'acte d'une Cause nécessaire et souverainement sage. S'appuyant sur cette considération, Anselme établit avec son maître Augustin que la Cause créatrice porte, dans son infinie intelligence, les types exemplaires des choses qu'elle appelle librement à exister dans le temps. Dès lors, comme il nous l'a dit en son Dialogue *de Veritate*, l'ordre réel est une sorte de reflet de la pensée divine, et réciproquement l'intelligence, la pensée de l'homme, doivent être considérées comme le miroir de la réalité. En haut l'Infinie Essence; en bas la Nature; entre ces deux extrêmes, l'esprit créé par Dieu pour s'élever à Lui par le spectacle de ses œuvres, voilà la synthèse de la métaphysique spiritualiste. C'est la suprême raison de l'harmonie originelle qui existe entre l'âme et l'univers, entre la vérité et les facultés humaines [2]. L'esprit est fait pour atteindre, dans ses représentations évidentes, dans ses déductions légitimes, l'essence des êtres. N'est-il pas clair que l'intelligence humaine, vivante image

[1] *De primo rerum principio*, c. IV, nº 24. — Ap. Hauréau, I, p. 208.

[2] Cet ordre de considérations a été développé d'une manière remarquable par le Dr Billroth, dans sa monographie : *Dissertat. hist. crit. de Anselmi Prosl. et Monol.*, (Lipsiae, 1832). — Voir aussi Ritter, *Gesch. der Phil.*, VII, p. 344.

de la Pensée divine, ne peut être le jouet d'une illusion où la précipiterait sa nature elle-même? L'erreur ne commence qu'avec les vaines imaginations (*imaginatio*) et les faux raisonnements.

Nous avons entendu les Docteurs scolastiques signaler avec Aristote le caractère d'intelligibilité immédiate et d'infaillible évidence des vérités-principes. Anselme, lui, est allé plus loin. Il a voulu déduire l'existence objective de l'Absolu de sa formule représentative. Cette transition du monde abstrait à la plus concrète des réalités fut à la fois le signe caractéristique de sa Théodicée et son côté défectueux. Erreur sublime, je le sais! puisqu'elle est fondée sur l'essence de l'Infini, indistincte de son existence réelle; mais erreur toutefois; car, comme le répétait, avec son ferme génie, Thomas d'Aquin, le passage de l'idée à l'être, dans le cas qui nous occupe, ne serait justifié qu'à condition d'avoir l'intuition directe de Dieu et de percevoir sans intermédiaire la substance divine, dans sa vie ineffable et souverainement actuelle.

Il semble que le Docteur de Cantorbéry ait pressenti lui-même, en de fugitifs moments, la vraie portée qu'il aurait dû donner à son argument. Plus d'une fois, il croit s'apercevoir qu'il ne suffit pas de se réclamer uniquement de l'*idée logique de l'Absolu*, pour affirmer son existence. Dans sa réplique au moine de Marmoutiers, l'élément ontologique tient une place bien autrement considérable que dans le Prosloge. Chose frappante! Dès le premier chapitre Anselme rappelle au subtil critique que *sa foi de chrétien et sa conscience d'homme rendent témoignage de l'Être absolument le plus parfait!* Ce n'est donc pas seulement l'*idée pure* qui fournit la donnée fondamentale du fameux argument. Franchement, cet exorde de la réplique, cet appel à la doctrine de la foi devaient étonner le comte de Montigny. Ce que nous soulignons ici, c'est le *témoignage de la conscience*, dont parle Anselme. Nous n'oublierons pas ce mot là, et nous y reviendrons. Pour le moment, notons que le S. Docteur se rejette dès le commencement de la polémique sur l'ontologie : la transition dialectique de l'idée à l'Être réel est reléguée au second plan. Aussi, quelques lignes plus loin, l'existence de Dieu est tirée *non plus de l'idée logique*, mais de l'*éternité du premier Être* et de son *évidente nécessité.* « L'Être au-dessus duquel il n'est pas possible de rien penser de plus grand, écrit Anselme, ne peut être pensé que comme étant sans commencement. Mais tout ce qui peut être pensé comme existant et qui cependant n'existe pas peut être pensé comme ayant *un commencement dans l'existence.* Donc ce au-dessus de quoi rien ne peut être pensé de plus grand ne saurait être pensé comme existant sans qu'il existe. Si donc il peut être pensé comme existant, il existe nécessairement..... Je dirai plus : sans doute, ce qui est quelque part ou parfois n'est pas, peut même, quand il est quelque part et quelquefois, être pensé comme n'étant jamais nulle part, de même que quelque part ou parfois il n'est point... Pareillement ce qui n'est pas ici ou ailleurs, de même qu'il n'est pas ici, de même il peut être pensé comme n'étant nulle part. Pareillement encore, ce dont chaque partie n'est pas là et au moment où y sont les autres parties peut être pensé comme n'étant jamais nulle part quant à toutes ses parties et, par conséquent, quant à son essence entière... Mais ce au-dessus de quoi il est impossible de rien penser de plus grand, s'il est, ne peut être pensé comme n'étant pas; autrement s'il est, il n'est pas ce au-dessus de quoi il n'est pas possible de rien penser de plus grand; ce qui est contradictoire [1]. » — A travers ce flux de paroles, l'on

[1] « Nam quo majus cogitari nequit non potest cogitari esse nisi sine initio. » Quidquid autem potest cogitari esse et non est, per initium potest cogitari » esse. Non ergo quo majus cogitari nequit cogitari potest esse et non est. » Si ergo potest cogitari esse, ex necessitate est.

« Amplius. Si utique vel cogitari potest, necesse est illud esse. Nullus enim » negans aut dubitans esse aliquid quo majus cogitari non possit, negat vel » dubitat quia, si esset, nec actu nec intellectu posset non esse. Aliter » namque non esset quo majus cogitari non posset. Sed quidquid cogitari » potest et non est, si esset, posset vel actu vel intellectu non esse. Quare, » si vel cogitari potest, non potest non esse quo majus cogitari nequit.

» Sed ponamus non esse, si vel cogitari valet. At quidquid cogitari potest » et non est, si esset, non esset quo majus cogitari non possit. Si ergo esset » quo majus cogitari non possit, non esset quo majus cogitari non possit; » quod nimis est absurdum. Falsum est igitur non esse aliquid quo majus » cogitari potest; multo itaque magis, si intelligi aut in intellectu esse potest. — *Rép. à Gaunil.*, c. I.

se convaincre que dès le début de sa discussion avec Gaunilon Anselme entrevoyait la nécessité d'assigner à la notion de l'Être le plus grand une base en dehors de la pensée. Partout des considérations de l'ordre ontologique prennent la place de l'idée pure [1]. L'argument du Prosloge retrouve son fondement naturel dans la preuve cosmologique du Monologue. Il est très-vrai : les aveux de la réponse à Gaunilon enlèvent à la démonstration d'Anselme beaucoup de son originalité. C'est le froid disputeur de Marmoutiers qui a ramené de la sorte l'illustre disciple de Platon à un sentiment plus fidèle de la réalité. Pourquoi celui-ci s'est-il laissé égarer dans le labyrinthe de la dialectique formelle, au lieu de s'appesantir sur le côté objectif de sa preuve? C'est à cela qu'il doit imputer sa défaite. Mais que dis-je, sa défaite? Il ne s'en doute même pas! Avec une candeur qui n'est plus de notre temps, dans le dernier chapitre de sa réplique, S. Anselme se félicite de sa démonstration triomphante! Il veut qu'à la suite du Prosloge, on place l'attaque de Gaunilon et sa propre défense. Dans sa bienveillance pleine d'humilité, le vénérable Docteur donne à l'œuvre de son adversaire de grands éloges.

[1] « Plus aliquid dicam. Procul dubio quidquid alicubi aut aliquando non est, » etiamsi est alicubi aut aliquando, potest tamen cogitari numquam et nusquam esse, sicut non est alicubi aut aliquando. Nam quod heri non fuit et » hodie est, sicut heri non fuisse intelligitur, ita numquam esse subintelligi » potest; et quod hic non est et alibi est, sicut non est hic, ita potest cogitari » nusquam esse. Similiter cujus partes singulae non sunt ubi aut quando sunt » aliae partes ejus, omnes partes, et ideo ipsum totum, possunt cogitari » numquam aut nusquam esse. Nam, etsi dicatur tempus esse semper et » mundus ubique, non tamen illud totum semper aut iste totus est ubique; » et sicut singulae partes temporis non sunt quando aliae sunt, ita possunt » etiam numquam esse cogitari, et singulae mundi partes sicut non sunt ubi » aliae sunt, ita subintelligi possunt nusquam esse; sed et quod partibus conjunctum est, cogitatione dissolvi et non esse potest. Quare quidquid ali» cubi aut aliquando totum non est, etiamsi est, potest cogitari non esse. At » quo majus nequit cogitari, si est, non potest cogitari non esse; alioquin, » si est, non est quo majus cogitari non possit; quod non convenit. Nullatenus ergo alicubi aut aliquando totum non est; sed semper et ubique » totum est. » (C. I.)

Il est temps de le noter, afin de mettre en son vrai jour l'élément objectif de la preuve anselmienne : il y a deux manières de poser le problème de l'existence de Dieu. Par cet Être, on peut signifier la Cause suprême de l'univers, l'Être nécessaire, ou bien l'Être absolument le plus parfait, l'infinie et vivante personnalité, réunissant dans son essence toutes les perfections véritables. Les démonstrations des anciens maîtres comprennent tour à tour ces deux aspects du problème. Souvent, dans leurs syllogismes sur le premier Moteur, ils semblent se préoccuper surtout de conclure à l'existence de la première Cause. D'autres fois c'est bien le Dieu infini et personnel qu'ils veulent montrer. C'est le cas des multiples arguments basés sur la *suprême actualité* de l'Être nécessaire [1]. Ce dernier genre de démonstration fut en grand honneur dans l'École : il présente certes une haute valeur; il est inattaquable à la critique. Mais il a la sécheresse des démonstrations abstraites; il ne s'adresse qu'à une seule faculté de l'homme, la raison. Avec Anselme, plus d'un penseur devait d'instinct chercher un autre procédé, inséparable du premier, mais plus vivant et s'adressant à toutes les facultés de l'âme. Ce procédé existe-t-il? Nous le croyons, et parmi les Scolastiques, Alexandre de Halès, Albert le Grand, S. Bonaventure et S. Thomas l'ont connu et pratiqué; nous le constaterons bientôt.

Avec une puissance de raison unique en son temps, S. Anselme avait touché au phénomène central de la conscience humaine : *son instinctive et universelle aspiration vers l'Infini.* C'est précisément l'argument dont nous entendons parler. Ce mot de *conscience,* appelé à un si grand retentissement dans la philosophie de l'avenir, notre S. Docteur l'a prononcé. — Ne nous l'avait-il pas dit dans le Monologue et répété dans ses Méditations? Dieu conserve toutes choses « par sa présence toujours active. » La Cause universelle et première est nécessairement présente à l'esprit limité de l'homme; sans son concours persistant, la raison demeurerait inerte. Mais l'Absolu, principe des êtres relatifs, doit être aussi leur suprême Fin. Son action sur leurs facultés les conduit

[1] Voir plus haut, pp. 244 et suivantes.

à réaliser sûrement le but de la destinée humaine. Ainsi la contingence des créatures et la sagesse du premier Être impliquent l'existence d'un concours naturel et immédiat de la Cause première avec les causes secondes, de Dieu avec l'homme pour guider sûrement celui-ci à accomplir la loi de son être. Prédestinés à nous élever vers Dieu, nous sommes avertis par l'effort spontané de la raison, par la tendance vitale de toutes nos facultés, à remonter l'échelle des créatures et à nous porter jusqu'au suprême Créateur, source dernière des contingences terrestres. L'imagination et le sentiment esthétique le représentent comme la Beauté idéale et parfaite; la volonté le poursuit comme le Bien sans limites; la conscience le reconnaît pour sa règle et sa loi; la raison voit en lui l'Absolu, possédant sans mélange les perfections dont l'esprit perçoit, dans le monde des phénomènes, l'éphémère et lointain reflet. Chacune de nos puissances cherche à s'unir à Lui selon sa nature spéciale. S'il se révèle d'une manière si universelle, si rapide à l'âme humaine, n'est-ce pas que celle-ci est faite par lui pour le connaître et pour l'aimer? C'est en vertu de cette prédestination de ses facultés à monter jusqu'à Dieu, qu'elle est sa *vivante image* [1]. Il se manifeste à elle, non comme le terme abstrait et indéfiniment progressif de *l'éternel devenir*, mais comme l'Être actuellement parfait. Pour parvenir jusqu'à lui, nous n'avons besoin que de nos énergies aperceptives, s'exerçant sur le spectacle du monde, sur l'activité intérieure de notre âme, et par-dessus tout, sur les aspirations de la volonté, cherchant dans le souverain Bien, vivant et personnel, son objet, sa règle et sa félicité.

Comme Platon et Augustin, ses devanciers, Anselme avait connu cette ascension naturelle de l'âme humaine vers l'Absolu, sous la

[1] Voici comment, en ce sens, un savant thomiste italien, A. Lépidi, a essayé d'expliquer naguère la démonstration du Prosloge. Écoutons-le : « Hujusmodi » imago quae est mens rationalis, qualis ponitur ab Anselmo, non solum divi- » nas perfectiones manifestat; verum etiam divinam existentiam. Modus ma- » nifestationis ejus talis est, ut non solum manifestet esse Dei eo modo quo » effectus, mediante ratiocinio manifestat esse causae, verum etiam per mo- » dum imaginis, quatenus imago est; ita scilicet, ut intellectus videat Deum » per mentem rationalem quia imago ejus est. » (*De Ontologismo*, p. 234.)

direction et l'influence de ce premier moteur lui-même. Voilà l'élément objectif de l'argument du Prosloge. Il constitue le principe générateur de la Philosophie platonicienne. Pourquoi, en le signalant, Anselme ne s'est-il pas abandonné à la libre inspiration de son génie! — Mais formé à l'école des dialecticiens, le Docteur se contenta de définir le lien de l'*intellect* avec l'*Infini*. Dans le *Prosloge*, il représente Dieu sous la formule de l'*Être au delà duquel l'esprit n'en peut penser de plus parfait*. C'est la *notion* de l'Absolu qui le préoccupe exclusivement Sa polémique avec Gaunilon porta sur ce point : elle fut cause qu'Anselme s'attacha de plus en plus au *concept*, au rapport *abstrait* de l'Infini avec l'intelligence. Il s'absorba à contempler l'empreinte, là où il aurait dû scruter la faculté, et par elle remonter à son objet. C'était restreindre la démonstration, l'énerver par conséquent. Ce fut pour le S. Docteur un accident fâcheux; pour les logiciens, incapables d'atteindre à la vérité cachée dans sa thèse, un bruyant triomphe. Mais il reste à notre Docteur la gloire d'avoir, le premier, entrevu la place d'élite que devait obtenir, parmi les preuves de l'existence de Dieu, l'argument psychologique tiré des rapports primitifs de l'âme humaine avec l'Infini. En ce point, il est tout à fait original. Nul ne l'a guidé à cette haute vue [1]. Augustin a pu fournir des matériaux à sa conception : le relief qu'Anselme lui a donné n'appartient qu'à lui. S'il l'a développée d'une manière incomplète, c'est la faute de l'époque, peu exercée à l'analyse [2]. Il a réuni du moins la plupart des termes de la

[1] Un érudit néerlandais, le Dr Veder, écrit que, d'après Krüg (*de Cleanthe divinitatis assertore ac praedicatore*. — *Symb. ad hist. phil.*, II, Lips.. 1819), l'argument dit ontologique aurait apparu, pour la première fois, dans l'Hymne de Cléanthe *au Dieu suprême* (ed. novis curis Merzdorf, Lips., 1835). Mais il a soin de noter qu'Anselme ne put connaître d'aucune manière l'œuvre du poëte stoïcien! — Cf. VEDER, *Dissertatio de Anselmo Cantuariensi*, Lugduni Batavorum, 1832, p. 110.

[2] Sous ce rapport, nous sommes heureux de rappeler les conclusions du P. Gratry dans son étude sur S. Anselme (*Connaissance de Dieu*, I, Appendice.) — L'éloquent Oratorien, que nous pouvons désormais citer avec une si pure joie, s'exprime ainsi : « Si l'on demande à S. Anselme, dit-il, comment on arrive à cette idée du Bien suprême, il répond qu'on y arrive par la vue des

féconde théorie : la contingence des êtres de la nature et de la conscience humaine; le concours et la direction de la première Cause; la prédestination originelle de l'âme à s'élever jusqu'à l'Absolu par le spectacle de la création et l'instinctif mouvement de ses facultés.

L'Académie nous interroge touchant l'influence de l'argument d'Anselme sur les maîtres venus après lui. Elle nous permettra d'être court dans cette recherche. La docte dissertation de M. E. Saisset, les travaux de MM. Bouchitté, Hauréau, de Rémusat ont épuisé le côté historique de la question. Nous profiterons avec reconnaissance de leurs découvertes, en insistant sur certains points que ces savants n'ont pas compris dans leur critique.

biens bornés (*de minoribus bonis ad majora conscendendo*). On passe de l'idée d'un bien, tel qu'on peut en concevoir un plus grand, à l'idée d'un bien tel qu'on n'en puisse concevoir de plus grand (*ex iis quibus majus cogitari valet. Conjicere id quo majus cogitari nequit*); c'est-à-dire que de l'idée des biens finis (*quod initium et finem habet*), on s'élève à l'idée du Bien infini (*quod nec finem habet nec initium*). Tout bien inférieur, en tant que bien, a quelque ressemblance au Bien suprême (*omne minus bonum in tantum est simile majori bono in quantum est bonum*). Il y a donc un point d'appui pour arriver à l'idée de l'infini. C'est ce que la raison montre à tout esprit raisonnable (*Cuilibet rationali menti*), mais si quelque chrétien le nie, poursuit notre S. Docteur, il faut lui rappeler le mot de S. Paul : « Les choses invisibles de Dieu sont visibles dans la création. »

§ 2.

De l'influence de l'argument d'Anselme sur les philosophes postérieurs.

La preuve du Prosloge, dans la forme qu'Anselme lui donna, n'eut pas un grand succès parmi les Docteurs scolastiques. Il faut aller jusqu'à Pierre d'Ailly pour l'entendre rejeter au nom du scepticisme traditionnaliste [1]; mais dès le XIII[e] siècle, elle fut en défaveur dans l'École. La critique de Gaunilon avait eu quelque retentissement, et sa victoire sur le domaine de la logique n'était pas faite pour assurer la faveur à la démonstration d'Anselme. Toutefois il est probable que celle-ci donna occasion aux quelques arguments ontologiques de l'existence de Dieu, que nous rencontrons chez les maîtres du moyen âge. Sans doute, Augustin avait pu les fournir ; mais qui voudrait nier que l'enthousiaste initiative d'Anselme n'ait contribué puissamment à les mettre en vogue? Nous savons déjà que S. Bonaventure, Richard de S. Victor, Thomas d'Aquin et Scot déduisent l'existence de Dieu des perfections d'inégale mesure que l'on trouve dans les créatures et qui impliquent l'existence d'un Bien sans degré, principe de tous les autres. C'est l'argument qu'Anselme avait développé au début du Monologue. — D'autres fois, pour prouver l'existence de la première Cause, les mêmes Docteurs arguent du concept de la vérité. « La Vérité, écrit le réaliste Guillaume d'Auvergne, existe avant tous les êtres créés, par soi-même et de soi-même, et cette première Vérité est Dieu [2]. » Thomas d'Aquin et Duns Scot reproduisent le même raisonnement. « Celui qui nie l'existence de la Vérité accorde par là même qu'elle existe, fait dire l'Ange de l'École à son interlocuteur; car si quelque chose est vrai, la vérité existe. Or, Dieu est la vérité; donc il existe [3]. » On comprendrait

[1] Voir dans le *Dict. des sc. phil.*, l'art. Pierre d'Ailly par M. Bouchitté.

[2] *De universo*, p. 1, sect. I, c. XXXIII.

[3] *Sum. th. I*, q. II, art. 1, 3.

mal cet argument si l'on ne se rappelait la doctrine établie par S. Thomas dans ses thèses sur la Vérité. Là le Docteur angélique prouve que toute vérité particulière suppose la Vérité absolue qui n'est pas distincte de Dieu. C'est sur cette donnée que s'appuie le raisonnement que nous venons de rapporter. — Dans le même sens Scot écrit : « Que la Vérité existe, cela est évident de soi. De fait, s'il n'y a point de Vérité, il *est donc vrai qu'il n'y en a point*. Or, Dieu est la Vérité [1]. » N'y a-t-il pas une affinité remarquable entre ces considérations et la vue fondamentale du Dialogue *de Veritate* plaçant le fondement de la Vérité en Dieu lui-même? — En certains cas, l'argument du Prosloge lui-même est développé et transformé d'une manière remarquable. C'est ainsi qu'Alexandre de Halès, Albert le Grand et S. Bonaventure reprennent la preuve d'Anselme, mais en la corrigeant de son vice de forme. *Ils établissent avant tout qu'il y a une Cause nécessaire*. Ensuite, par l'analyse de son *concept objectif*, ils démontrent qu'elle est la « Réalité par essence. » — « Cet être là est le plus vrai et existe le plus véritablement, dit Alexandre, qui non-seulement ne peut pas n'être point, mais ne peut même être *pensé comme n'existant pas*, puisqu'il est entièrement parfait : de sorte qu'il ne peut ne pas être, ni dans la pensée ni dans la réalité. Donc, *s'il est démontré que Dieu existe de la manière la plus réelle*, il ne peut pas ne point être, ni même *être pensé comme n'existant pas* [2]. »

Albert le Grand, interprétant la preuve de S. Anselme, dit qu'on peut l'accepter, en ce sens que « l'Être possédant la plus certaine existence est celui qui est le plus éloigné du néant : or cet être est celui qui ne va pas de l'existence au néant ou du néant à l'existence, et dont il n'est pas même possible de se figurer la non-existence. [3] » — Albert suppose démontrée la nécessité de la

[1] *Sent. I*, dist. 2, q. 1.

[2] *Sum. univ. Theol.*, p. I, q. 3, Memb. 1.

[3] « ... Sicut dicit Anselmus : illud maxime habet esse quod maxime » distat a non esse, quod scilicet non habet non esse post esse, nec esse » post non esse, nec potest cogitari non esse. » (*Comp. theol. verit.*, l. I, c. I.)

première Cause : il en conclut son infinité, mais il ne tire pas celle-ci de sa pure notion.

Écoutons encore S. Bonaventure : « Il a été dit à Moïse, écrit en son mystique langage le Docteur séraphique : Je suis celui qui suis... Que celui qui souhaite contempler les invisibles attributs de Dieu et l'unité de son essence, fixe avant tout son regard sur l'Être lui-même et qu'il le reconnaisse avec assurance comme *l'Être par soi,* qui ne peut être pensé comme n'existant pas; car il est *l'Être pur,* repoussant loin de lui tout mélange de non-être. Et comme le néant n'a rien de l'être ni de ses attributs ; ainsi, au contraire, l'Être n'a rien du néant, ni en acte ni en puissance, ni dans l'ordre de la réalité, ni même selon notre manière de concevoir... Car il n'est point l'Être particulier, borné, mélangé d'indétermination. L'Être pur est l'Être simplement, l'Absolu, la première Essence, l'Éternel, l'Actuel, le Parfait, la suprême Unité. Et ces vérités sont si évidentes, qu'il n'est pas possible que celui qui les entend bien puisse penser le contraire. L'une du reste est un corollaire de l'autre; de sorte que, *du moment où il est posé que Dieu est l'Être premier,* éternel, simple, *actuel et parfait,* il est impossible de *penser* qu'il n'existe pas..... [1]. »

L'analogie de ces arguments avec celui du Prosloge est évidente.

[1] « Dictum est Moysi *Ego sum qui sum*... Volens igitur contemplari Dei » invisibilia, quoad essentiae unitatem, primo defigat aspectum *in ipsum* » *esse,* et videat ipsum esse adeo in se certissimum, *quod non potest cogi-* » *tari non esse;* quia ipsum est purissimum, non occurit nisi in plena fuga » non esse, sicut et nihil in plena fuga esse. Sicut igitur omnino nihil, nihil » habet de esse, nec de ejus conditionibus : sic e contra ipsum esse nihil » habet de non esse, nec actu nec potentia, nec secundum veritatem rei, nec » secundum aestimationem nostram... Sed hoc non est esse particulare quod » est esse arctatum, quia permixtum est esse cum potentia. Esse igitur quod » est esse purum et esse simpliciter et esse absolutum, est esse primarium, » aeternum, simplicissimum, actualissimum, perfectissimum et summe unum. » Et haec sunt ita certa, quod non potest ab intelligente ipsum esse cogitari » bonum oppositum, et unum horum necessario infert aliud... Unde *si Deus* » nominat esse primarium, aeternum, simplicissimum, actualissimum, perfec- » tissimum, *impossibile est ipsum cogitari non esse,* nec esse nisi ipsum » solum... » (*Itiner. mentis ad Deum*, c. V.)

Mais Alexandre de Halès et Bonaventure ont donné une base préalable et objective à la notion de l'Être parfait. C'est *l'existence réelle de la Cause nécessaire, principe des êtres contingents et périssables.* De la sorte ils évitent le subjectivisme idéaliste du Prosloge; leur argumentation se rapproche des vues admises un peu tardivement par le Docteur du Bec, dans sa réplique à Gaunilon.

Mais il faut entendre une preuve d'une bien autre importance, et trop négligée des critiques. En sa *Somme philosophique,* l'Ange de l'École constate qu'il y a dans l'esprit humain une tendance spontanée vers l'Infini. Où cherche-t-il la preuve de cette affirmation? Dans le fait que toutes les fois qu'on lui propose un terme fini quelconque, l'intelligence se porte comme d'instinct à un intelligible plus parfait. « Or, continue Thomas d'Aquin, cette originelle tendance de l'âme serait oiseuse, si dans la réalité il n'existait un Être véritablement parfait. Un tel Être ne peut donc manquer d'exister, et c'est lui que nous nommons Dieu. Par conséquent, conclut-il, Dieu est véritablement infini. »

La signification de l'argument de S. Thomas ne saurait être

[1] « Intellectus noster ad infinitum in intelligendo extenditur, cujus signum » est quod qualibet quantitate *finita* data, intellectus noster majorem excogi- » tare possit. Frustra autem esset haec *ordinatio intellectus* ad infinitum, nisi » esset aliqua res intelligibilis infinita. Oportet igitur esse aliquam rem intel- » ligibilem infinitam, quam oportet esse maximam rerum, et hanc dicimus » Deum. Deus igitur est infinitus. » (L. I, c. XLIII.) — Dans le manuscrit autographe réédité par M. Migne, S. Thomas modifie, en l'accentuant avec plus d'énergie encore, son magnifique argument. — « Omni finito potest aliquid » majus cogitari, ex quo declaratur quod intellectus noster habet quamdam » infinitatem respecta sui intelligibilis. *Intelligibile autem est res : Omni » autem potentiae respondet suus actus,* cum potentia ad actum dicatur. Cum » igitur intelligibile sit actus et perfectio intellectus, oportet ponere aliquam » rem intelligibilem infinitam. Infiniti autem principium non potest esse aliquid » finitum cum nihil agat praeter seipsum. Oportet autem esse aliquid quod » est praeter Deum impossibile esse. Est igitur Esse infinitum. » (Éd. Migne, l. I, c. XLIII, p. 98.) Cf. l. III, c. L. « Nihil finitum *desiderium intelectus* quietare potest, quod exinde ostenditur, quod intellectus, quolibet » finito dato, aliquid ultra molitur apprehendere; unde qualibet linea finita » data, aliquam majorem molitur apprehendere, et similiter in numeris... » Altitudo autem et virtus est finita cujuslibet substantiae creatae. »

douteuse. L'Ange de l'École s'est formé à l'école d'Aristote. Il a sur les Platoniciens le capital avantage d'être très-peu mystique en philosophie. Pour lui, comme pour son maître, l'observation est à la fois le point de départ et le contrôle de toute bonne spéculation.

Le fondement de sa preuve n'est pas énoncé d'une manière tout à fait explicite : il suffit néanmoins de méditer ses paroles, pour se convaincre qu'il n'est autre que *l'infaillibilité et la stabilité providentielles des lois de la nature.* C'est bien là ce qu'entend le S. Docteur par cette prédisposition de la raison (*ordinatio animae*) à s'élever d'instinct vers un intelligible plus parfait. Son raisonnement est tout à fait dans l'esprit de la science positive. Incontestablement, c'est le plus vigoureux effort de la pensée, au moyen âge, pour instituer une démonstration anthropologique de l'Infini. Anselme était fort bien connu de l'Ange de l'École. Sa preuve du Prosloge aura indiqué à S. Thomas et la vue où le Docteur du Bec devançait son siècle, et l'erreur dont il devait se garder lui-même, en l'accueillant dans sa philosophie.

Duns Scot devait subir également l'influence d'Anselme. Il a très-bien saisi la part de vérité renfermée dans son argument, tout en le modifiant dans le sens d'Alexandre de Halès et de S. Bonaventure. « L'objet de l'intellect, dit-il, est l'Être. Or, l'intellect ne trouve aucune contradiction dans le concept de l'Infini. Bien plus, il lui apparaît comme le suprême intelligible.... Ce qui peut légitimer jusqu'à un certain point la démonstration d'Anselme touchant la notion de l'Infini, c'est qu'*en cet objet l'intellect se repose entièrement ;* il a donc la qualité de premier intelligible, savoir de l'Être (parfait).... Le plus parfait intelligible existe [1]. »

Il est aisé de voir que, malgré l'époque, la preuve anselmienne avait fait une impression sérieuse sur les Scolastiques. Voici à son

[1] « Intellectus cujus objectum est ens, nullam invenit repugnantiam intel- » ligendo Ens infinitum, imo videtur perfectissimum intelligibile... Per illud » potest colorari ratio Anselmi de summo cogitabili... quia in tali cogitabili » summo *summe quiescit intellectus;* ergo in ipso est ratio primi objecti » intellectus, scilicet Entis... Vel coloratur sic : Majus cogitabile est quod » existit, id est perfectius cognoscibile... Ergo perfectissime cognoscibile » existit. » (*De primo principio*, c. IV, num. 24, 25.)

tour le Docteur subtil qui y démêle le trait capital déjà signalé par l'Ange de l'École. « *Dans l'Infini*, dit-il, *l'esprit se repose complétement.* » Nous savons la portée de cette parole. Elle est l'expression de l'affinité sympathique de l'esprit humain, avec la Vérité, et par-dessus tout avec l'Être infiniment parfait, son principe et sa fin.

Mais jusqu'à l'époque de la prétendue rénovation de la méthode philosophique tentée par Descartes, la preuve du Prosloge ne devint pas d'une véritable importance. La plupart des Docteurs, convaincus par les objections de Gaunilon, de S. Thomas et du Docteur subtil, l'abandonnèrent sans se soucier de la soumettre à une analyse plus approfondie. Nous ne répéterons pas les réflexions de Scot, de Guillaume d'Occam, de Biel sur ce point. Elles sont connues et ne fournissent aucun appoint nouveau à la discussion. A mesure que la dialectique dégénérée du XIV^e siècle abaissait les esprits, l'élément ontologique caché dans la démonstration du S. Docteur fut de plus en plus négligé. Gerson, le chancelier de la Sorbonne, allait jusqu'à écrire à propos d'un argument pareil à celui d'Anselme qu'il était de tout point inepte [1]. Durant la longue querelle des Universaux, on se préoccupa très-peu de la valeur des facultés. Sous ce rapport les camps rivaux étaient d'accord. Mais du moment où Descartes mit en question leur portée et crut trouver dans l'*idée claire et distincte* le seul refuge de la certitude dont il avait sapé toutes les bases, la démonstration *a priori* ne pouvait manquer de reprendre une place prépondérante dans la discussion philosophique.

Le gentilhomme tourrangeau avait observé que nos diverses facultés étaient exposées à tant de méprises, d'illusions et de préjugés, que c'était bien mal assurer la certitude que de la con-

[1] « Nescio quis insipientior sit, an is qui putat hoc sequi; an insipiens qui » dixit in corde suo : Non est Deus.... Si per hoc ille mihi velit affirmare de » insula illa quod vere sit, ambigendum ultra non esse ; aut jocare ipsum » credam ; aut nescio quem stultiorem debeam reputare : utrum me, si ei » concedam; an illum qui se putet aliqua certudine insulae illius essentiam » adstruxisse. » — In I, dist. III, q. II, ad finem. — Cf. THÉOPH. RAYNAUD, *Theol. naturalis*, d. V, q. 1, a. 2. — VASQUEZ, in I, d. XX, ad finem.

fier à des organes aussi précaires. Cependant, selon lui, dans cette universelle fluctuation, une chose restait inaccessible à l'erreur : c'était le fait même de la *pensée* impliquée d'évidence dans le *doute*. Dès lors la première vérité pour Descartes peut se formuler ainsi : *Je pense, donc j'existe.* Mais d'où lui vient ce privilége singulier de défier le doute? Précisément de ce que la pensée est comprise dans la claire idée du doute. Quelle sera dès lors la première loi de la certitude? *L'idée claire et distincte des choses.* Descartes applique ce raisonnement à la démonstration de l'existence de Dieu. Ici les analogies avec le procédé d'Anselme deviennent frappantes.

Le philosophe français pose d'abord en thèse qu'il a dans son esprit, par-delà la notion des choses corporelles et limitées, l'idée claire de l'Être infini. Il n'est pas difficile, dit-il, de trouver le principe du premier ordre d'idées. L'expérience, la réflexion y suffisent. Mais l'idée de l'Infini ne peut venir à l'homme par cette source. Elle doit évidemment lui avoir été communiquée par Dieu. « Parce que, dit-il, nous trouvons en nous l'idée d'un Dieu ou d'un Être tout parfait, nous pouvons rechercher la cause qui fait que cette idée est en nous : mais après avoir considéré avec attention combien sont immenses les perfections qu'elle nous représente, nous sommes contraints d'avouer que nous ne saurions la tenir que d'un Être très-parfait, c'est-à-dire d'un Dieu qui est véritablement ou qui existe, pour ce qu'il est non-seulement manifeste par la lumière naturelle que le néant ne peut être auteur de quoi que ce soit, et que le plus parfait ne saurait être une suite et une dépendance du moins parfait; mais aussi pour ce que nous voyons par le moyen de cette même lumière qu'il est impossible que nous ayons l'idée ou l'image de quoi que ce soit, s'il n'y a en nous ou ailleurs un original qui comprenne en effet toutes les perfections qui nous sont ainsi représentées... [1]. — Descartes exprime les mêmes idées dans sa Méditation III. « Par le nom de Dieu, dit-il, j'entends une substance infinie, éternelle, immuable, indépendante, toute intelligible, toute-puis-

[1] *Principes de la phil.*, I., art. 18.

sante, et par laquelle moi-même et toutes les autres choses qui sont (s'il est vrai qu'il y en ait qui existent) ont été créées et produites. Or, ces avantages sont si grands et si éminents, que plus attentivement que je les considère, et moins je me persuade que l'idée que j'en ai puisse tirer son origine de moi seul. Et par conséquent il faut nécessairement conclure de tout ce que j'ai dit auparavant que Dieu existe. Car encore que l'idée de la substance soit en moi de cela même que je suis une substance, je n'aurais pas néanmoins l'idée d'une substance infinie, moi qui suis un être fini, si elle n'avait été mise en moi par quelque substance qui fût véritablement infinie..... Et l'on ne peut pas dire que peut-être cette idée de Dieu est matériellement fausse, et par conséquent que je la puis tenir du néant, c'est-à-dire qu'elle peut être en moi pour ce que j'ai du défaut, comme j'ai tantôt dit des idées de la chaleur et du froid et d'autres choses semblables (apparentes souvent et fausses) : car au contraire, cette idée étant fort claire et fort distincte, et contenant en soi plus de réalité objective qu'aucune autre, il n'y en a point qui de soi soit plus vraie, ni qui puisse être moins soupçonnée d'erreur et de fausseté [1]. »

En cette même Méditation III[e], Descartes donne une forme mathématique à la même considération. Toute idée objective exige une cause, dans laquelle sa réalité n'existe pas seulement d'une façon objective, mais formelle et transcendante. Or, nous avons l'idée de Dieu, et sa réalité objective n'est en nous-mêmes ni formellement ni éminemment : elle ne peut exister qu'en Dieu seul. Donc cette idée suppose Dieu pour sa cause. Donc Dieu existe.

Dans le Prosloge, Anselme, nous le savons, se contentait d'analyser l'idée de l'Être absolument le plus parfait en soi; et il en concluait son existence d'une façon directe. Descartes, qui pouvait connaître la critique du moine de Marmoutiers et les réflexions de S. Thomas, a voulu rendre la démonstration moins subjective [2].

[1] *Med.*, III.

[2] Sur la connaissance que Descartes a eue des écrits d'Anselme, voyez BOUCHITTÉ, ouv. cité, p LXVIII; et surtout M. HAURÉAU, *Hist. littér. du Maine*, t. I[er], pp. 335 et suivantes.

Il s'est attaché à la *cause* de l'idée de l'Infini. Grâce à cet élément *externe,* il a cru assurer à la preuve le fondement objectif dont elle manquait auparavant. En cela il se trompait.

Le fondement prétendu de la preuve de Descartes, l'assertion que l'*Infini seul peut être cause de son idée,* est une nouvelle erreur ajoutée au vice de forme du Prosloge, je veux dire, à l'assimilation perpétuelle de l'ordre idéal avec l'ordre réel. Les contemporains de Descartes ont très-bien relevé ce dernier point. Malebranche mentionne les savants qui regardaient l'argument comme un pur sophisme [1], à moins de présupposer l'existence de l'Être nécessaire. Un théologien hollandais, le Dr Catérus, donna à cette remarque des développements laborieux et un peu pesants qui font songer à Gaunilon [2]. Mais ce qu'en écrivirent Huet et Buffier rentre trop bien dans notre discussion, pour être passé sous silence. Leur censure est la meilleure critique de l'argument de Descartes, dans son application à la Théodicée.

« L'argument de Descartes, dit Huet, devient plus clair, si on le ramène à cette forme : ce qui est souverainement parfait existe nécessairement. Cet Être infini dont j'ai l'idée dans mon esprit est souverainement parfait. Donc l'Être infini et parfait dont j'ai l'idée dans mon esprit existe nécessairement. — Je distingue la première proposition : L'Être souverainement parfait existe nécessairement, de la manière qu'il est. *S'il est en réalité,* il existe nécessairement en réalité. S'il existe seulement dans l'intelligence, il n'aura d'existence nécessaire que dans l'intellect. La seconde proposition est susceptible de la même distinction : — Cette chose infinie et souverainement parfaite, dont j'ai l'idée dans l'esprit, est tout à fait parfaite, mais *selon l'être idéal.* Car tout ce qui est en jeu ici, c'est une pure idée, et c'est de là que Descartes s'efforce de conclure que Dieu *existe en réalité.* Le sens de la conclusion est donc manifeste : Cet Être infini et parfait dont j'ai l'idée dans l'esprit existe *nécessairement*, quant à l'ordre intel-

[1] *Recherche de la vérité*, l. IV, c. XI, § II.

[2] Voir les objections de Catérus contre les médit., 3, 5, 6. — *OEuv. de Descartes* (Éd. Cousin), I, pp. 354 et suivantes.

ligible, mais non selon la réalité [1]. » — Buffier n'est pas moins persuasif : « Des esprits sublimes ont pris le change, dit-il, appliquant indifféremment à toutes les vérités *internes* et *externes* ce qui ne convenait qu'aux internes seules. Par là encore, et par la simple idée de Dieu, ils ont cru pouvoir prouver l'*existence de Dieu,* parce que l'existence de Dieu est essentiellement renfermée dans l'idée de Dieu; mais ils ne prouvaient ainsi que l'existence de Dieu en *idée,* c'est-à-dire, ils prouvaient seulement que l'on ne saurait se former l'idée de Dieu sans y comprendre l'existence. Mais tout cela ne fait qu'une *vérité interne*, laquelle ne prouve rien à l'égard de ce qui est hors de notre idée et de notre esprit [2]. »

Dans sa réponse à Gaunilon, Anselme en appelait *à l'identité de l'essence et de l'existence de l'Être absolu,* et c'était sur ce caractère distinctif qu'il basait son argument, selon lui *applicable à Dieu seul.* Descartes, pressé par de nombreux adversaires, revient encore avec plus d'insistance à cette observation. « De cette claire notion on passera sans aucun raisonnement, dit-il, à la connaissance de l'existence de Dieu. De fait, en lui l'essence et l'existence sont identiques. » Nous savons déjà que cela n'améliore en rien la preuve. Dans tout ce raisonnement, comme le répétait avec la ténacité de sa nation le professeur Catérus, ces considérations sont purement logiques et ne touchent en rien à la réalité, si l'on n'a démontré que de fait *il existe un Être nécessaire.* C'est à l'analyse qu'il appartient de montrer ultérieurement son infinie perfection. Or l'*existence de la cause nécessaire* n'est pas le corollaire d'une idée, mais d'arguments *a posteriori,* tirés surtout de la considération de l'univers et des phénomènes de la conscience [3].

[1] *Censura philosophiae cartesianae*, c. IV, § VIII.

[2] *Éléments de Métaphysique*, entret. IV, n° 49.

[3] Nous nous faisons un plaisir de transcrire ici le grave jugement — posthume, hélas! — du Dr Ueberwegg sur l'argument cartésien : « Descartes » begeht hier den gleichen fehler, wie Anselm, die bedingung jedes catego- » rischen schlusses aus der Definition, dass nämlich die Setzung der Subjectes » *anderweitig* gezichert sein müsse, zu vernachlässigen; dieser vorwurf

Il y a plus : nous avons vu que dans sa réplique à Gaunilon, Anselme, avec quelque embarras, il est vrai, se rejette *sur l'existence d'une Cause nécessaire* pour montrer ensuite, par l'idée même de cette cause, qu'elle ne peut pas être simplement un être logique, mais une vivante et infinie Réalité. Eh bien! ce même écart de procédé se retrouve chez Descartes. Il signale en sa propre personne des imperfections et des limites; il en conclut à l'existence d'un Être plus parfait. Mais ce retour à l'ancienne théodicée ne l'empêche pas de s'en tenir à la démonstration idéaliste, comme à la meilleure preuve de l'existence de Dieu. C'est une ressemblance de plus avec S. Anselme.

Après ce que nous avons dit, nous pouvons être très-court sur le perfectionnement qu'un autre homme de génie tenta d'apporter à l'argument commun de Descartes et de S. Anselme. « La preuve, dit le grand Leibnitz, offre une remarquable beauté, mais elle a besoin d'un complément. Voici le point. Tout ce qui peut être trouvé dans la notion d'une chose peut être attribué à la chose elle-même. Or de la notion de l'Être parfait ou de l'Être le plus grand suit son existence. Donc l'existence peut être

» wird him von dem die thomistiche Widerlegung der Anselmschen Argu-
» mentes gegen ihn kehrenden Catterus in den *objectiones primae* mit recht
» gemacht; seine nichtssagenden schlusse, dass wenn Gott ist, die Existenz,
» him zukommt, und wenn Gott fingirt wird, er als seiend fingirt werden
» muss. Zudem hat die Cartesianische form des Ontologischen Argumentes
» einen Mangel, von dem die Anselm'sche frei ist, dass nämlich die Prämisse:
» — das sein gehört zu den vollkommen heiten, — eine sehr bestreitbare
» Auffassung der seins als einer Prädicates neben anderen Prädicaten involvirt,
» während Anselm eine bestimmte art der seins, nemlich dass nich bloss in
» unserm Geiste, sondern auch ausserhalb desselben statthabende sein als
» etwass vollkommeres bezeichnet hatte. Nur wenn Gott selbst und unser Got-
» tesbegriff identificirt wurde, könnte in dem Gottesbegriff als solchem die
» bürgschaft der seins Gottes gefunden werden: den dass der Gottesbegriff
» in dem wir ihn denken, eben vermöge dieser denkens in uns ist oder Exis-
» tenz hat, ist freilich unleugbar und sogar selbstverständlich; aber jene
» identificirung ist eben nicht Cartisianisch, der Descartes unter Gott, dem
» schöpfer der Welt, zwar das durch unsern Gottesbegriff gedachte object
» (*ens*), aber nicht diesen begriff selbst versteht. » *Geschichte der Phil.*, III, p. 55; Berlin, 1872, 3e aufflage.

attribuée à l'être le plus parfait, ou : *Dieu* existe. On prouve la mineure : L'Être tout parfait ou le plus grand renferme toutes les perfections, donc il implique l'existence : celle-ci est certes une perfection; il est plus parfait d'exister que de ne pas exister. Voilà l'argument de Descartes. Mais en laissant de côté la notion de grandeur ou de perfection, on peut construire une preuve plus directe et plus ferme, de cette façon-ci : l'Être nécessaire existe. Ou bien : l'Être à l'Essence duquel appartient l'Existence, ou encore, l'Être nécessaire existe. *Cela est clair d'après les termes mêmes.* Or Dieu est un tel Être (*c'est sa définition*). Donc Dieu existe. Cet argument est concluant, dès qu'on accorde que l'Être parfait ou nécessaire est possible et n'emporte pas contradiction; ou ce qui revient au même, dès qu'il est *possible* qu'il y ait une Essence à laquelle appartient l'existence. Mais aussi longtemps que cette possibilité n'est pas prouvée, il ne faut pas se flatter que l'existence de Dieu puisse être parfaitement démontrée par un tel argument.... Il reste donc, afin de construire une démonstration géométrique de l'existence de Dieu, à prouver, selon la rigueur géométrique, et avec soin, la possibilité de Dieu [1].

Voilà sans contredit la plus spécieuse forme de la preuve dite *à priori*. Est-il besoin d'observer cependant que Leibnitz laisse le vice de l'argument cartésien parfaitement intact? La *possibilité de Dieu* ou de l'Être absolu est envisagée par l'illustre philosophe d'une manière purement abstraite. La majeure n'est que la formule qui exprime le rapport *idéal* de l'Essence et de l'existence, dans l'Être nécessaire, dans l'Infini. A moins de supposer dans le syllogisme *un quatrième terme*, l'*existence* de cet Être ne peut être affirmée, en la mineure, que d'une manière également abstraite. « De la combinaison de deux prémisses abstraites, dit très-justement M. Cousin, il ne peut sortir qu'une abstraction. Le syllogisme est donc bon en lui-même, mais il n'a et ne peut avoir qu'une valeur syllogistique. L'existence que donne le syllogisme ne peut être

[1] *Epist. ad Bierlingium*, Éd. Korthold, 1710, t. IV, p. 21. — Cf. *Ep. ad Meierum*, t. VI, p. 147. — *Animadversiones ad Cartesii principia philosophica*, t. V. — *Nouveaux essais*, l. IV, c. X, § 7.

que l'existence en général, à l'état abstrait, c'est-à-dire sans réalité véritable. Leibnitz a donc perfectionné le syllogisme cartésien, si Descartes a voulu faire un syllogisme; mais loin de fortifier la preuve cartésienne, il l'a compromise. En logique, l'argument peut avoir l'autorité d'un syllogisme irréprochable, mais il manque du caractère objectif et réel auquel il prétend[1]. » — Ces réflexions suffisent. Je n'ajouterai qu'un mot : Leibnitz tenait à ce qu'on démontrât, selon la rigueur géométrique, *la possibilité de Dieu.* Mais qui ne voit que cette possibilité même, fondement de toute sa démonstration, aurait gardé le caractère des preuves géométriques, caractère abstrait, sans aucun lien avec la réalité de l'existence? Se figure-t-on d'ailleurs ce que peut être une preuve de la *possibilité* de Dieu [2] ?

Il faut en dire autant de la confirmation que M. de Bonald essaya de donner à l'argument de Leibnitz. Elle se résume en ce que si Dieu n'existe pas, on ne peut assigner aucune cause dont il puisse recevoir l'existence. Donc il ne serait pas même possible [3]. — N'insistons pas. M. de Bonald renverse les termes de la démonstration de Leibnitz. Tout le monde voit qu'au fond il est d'accord avec lui. Il prouve que la possibilité *externe* même ferait défaut à l'Être absolu, s'il n'existait pas de fait. Mais M. de Bonald ne s'aperçoit pas que, lorsqu'il ajoute ensuite que cependant la possibilité de Dieu n'est contestée par personne, c'est de la possibilité interne seulement que cela peut être affirmé. C'est la preuve précédente retournée : elle a ses défauts sans avoir sa clarté.

Il est impossible de ne pas se sentir frappé de cette persistance des plus nobles génies à restaurer le célèbre argument. Dès qu'on y réfléchit on en découvre le motif. L'existence de la Cause absolue se dégage avec une si grande évidence de l'observation du monde et de l'âme, que la droite raison s'y élève comme d'elle-même.

[1] *Leçons sur la phil. de Kant*, 1844, p. 258.

[2] Kant a très-bien vu cette infirmité du raisonnement de Leibnitz. — Voir son ouvrage : *Der einzig mögliche Beweisgrund zu einer Demonstration des Daseins Gottes*, t. VI, pp. 1-46; Éd. Leipzig, 1839.

[3] *Recherches phil.*, c. IX.

En présence de cet intelligible transcendant, qui est le dernier mot de notre destinée, la transition de l'ordre idéal à l'ordre réel est si rapide, qu'elle en est presque insensible. De très-éminents esprits n'ont pas toujours discerné les deux moments de la démonstration; c'est précisément que l'élément objectif de l'Idée de l'Infini s'est découvert à eux avec une si vive lumière qu'elle a paru se projeter sur la notion subjective elle-même.

Veut-on se convaincre de la vérité de cette observation? Qu'on relise le passage où Descartes rend compte de la genèse de l'idée de l'Infini. « Et de vrai, dit-il, on ne doit pas trouver étrange que Dieu, en me créant, ait mis en moi cette idée, pour être comme la marque de l'ouvrier empreinte sur son ouvrage; et il n'est pas aussi nécessaire que cette marque soit quelque chose de différent de cet ouvrage même : mais de cela seul que Dieu m'a créé, il est fort croyable qu'il m'a en quelque façon produit à son image et ressemblance, et que je conçois cette ressemblance, dans laquelle l'idée de Dieu se trouve contenue, par la même faculté par laquelle je me conçois moi-même, c'est-à-dire que lorsque je fais réflexion sur moi, non-seulement je connais que je suis une chose imparfaite, incomplète et dépendante d'autrui, *qui tend et aspire sans cesse à quelque chose de meilleur et de plus grand que je ne suis*, mais je connais aussi en même temps que celui duquel je dépends possède en soi toutes ces grandes choses auxquelles j'aspire et dont je trouve en moi les idées, non pas indéfiniment et seulement en puissance, mais qu'il en jouit en effet, actuellement et infiniment, et ainsi qu'il est Dieu. — Et toute la force de l'argument dont j'ai ici usé pour prouver l'existence de Dieu consiste en ce que je reconnais qu'il ne serait pas possible que ma nature fût telle qu'elle est, c'est-à-dire que j'eusse en moi l'idée d'un Dieu, si Dieu n'existait véritablement : ce même Dieu, dis-je, duquel l'idée est en moi, c'est-à-dire qui possède toutes ces hautes perfections dont notre esprit peut bien avoir quelque légère idée, sans pourtant les pouvoir comprendre, qui n'est sujet à aucuns défauts, et qui n'a rien de toutes les choses qui dénotent quelque imperfection. D'où il est assez évident qu'il ne peut être trompeur, puisque la lumière naturelle nous enseigne que la tromperie dépend nécessairement de quelque défaut [1]. »

Ces explications sont d'une importance extrême pour la complète intelligence de l'argumentation de Descartes et de ceux qui l'ont accueillie en la modifiant.

Quel est le point de départ caché de l'argument psychologico-ontologique de Descartes? C'est l'économie providentielle en vertu de laquelle la première Cause a doué la créature raisonnable sortie de ses mains, de facultés capables de la conduire à sa fin. Or cette fin est l'Infini lui-même. N'est-il pas rationnel qu'il y ait dans notre âme une certaine prédisposition à s'élever vers lui et, par conséquent à le reconnaître avec facilité? Descartes nomme cette prédisposition l'*Idée de Dieu.* Nous pouvions nous y attendre de la part d'un homme qui avait mis dans les notions claires et distinctes le critère de la vérité. Mais de quelle idée entend-il parler? Est-ce d'une idée innée, dans le sens propre de ce terme, source d'équivoques infinies? Descartes ne revendique, on le sait, que des *facultés innées* [2]. Est-ce d'une idée immédiate et de simple vue? Il est très-vrai que Malebranche a repris dans ce sens son sentiment et l'a donné pour fondement à la théorie de la Vision. Mais tout en reconnaissant le caractère original de la notion de l'Infini, Descartes ne l'a prise ni pour une idée innée, ni pour une vue directe de l'Absolu. Il affirme, après tout, qu'il ne la considère pas comme essentiellement *différente* de l'esprit humain. Il avoue, dans le passage précité, que cette idée présuppose *la perception de la contingence de l'être créé,* et que *c'est sur elle qu'elle est fondée.* La même faculté, ajoute-t-il, qui constate l'universelle dépendance des créatures, perçoit également l'existence d'une Cause nécessaire à laquelle elles doivent leur apparition et leur réalité. En cela, et ceci encore est d'une extrême gravité, il faut voir, selon Descartes, comme un dessein providentiel du grand

[1] *Médit.*, III.

[2] « Cum dicimus ideam aliquam nobis esse innatam, non intelligimus eam » nobis semper obversari, sic enim nulla prorsus esset innata, sed tantum » nos habere in nobis ipsis facultatem illam eliciendi. » *Resp. ad object. tertias*, p. 89.

Ouvrier désireux de laisser son cachet sur son œuvre par excellence. L'âme se sent imparfaite, incomplète, dépendante; elle tend et aspire sans cesse à quelque chose de plus grand et de meilleur. Il en conclut que l'Être dont elle dépend possède en soi toutes ces grandes choses auxquelles elle aspire. Qu'on rapproche maintenant de ces considérations cet aveu de Descartes : l'idée innée est, à rigoureusement parler, *la faculté de la concevoir*, et l'on pourra se rendre un compte exact de son raisonnement. Avec une confusion singulière il renferme la plupart des éléments de l'argument de S. Thomas : l'analyse psychologique de la faculté de connaître, son aspiration instinctive vers une réalité supérieure, le rapport tout à fait spécial de l'Absolu avec notre esprit. Par malheur, Descartes laisse dans l'ombre le considérant le plus grave de tous; je veux dire la légitimité des tendances primitives et originelles des êtres. C'est une lacune d'autant plus déplorable que son idéalisme ne pouvait qu'égarer les esprits, sur le fond même de la démonstration.

Il est vrai que pour assurer aux Idées claires une stable garantie, le réformateur se réclame de la véracité de Dieu qui n'a pu douer sa créature de facultés fatalement vouées à l'erreur. Ce procédé devait sembler étrange! En appeler à la vérité, à la sainteté de l'Être dont l'existence elle-même est en jeu! Je sais bien que selon M. Bouchitté, par sa théorie de la véracité divine, Descartes n'aurait entendu autre chose que la loi instinctive de l'intelligence; ce que S. Anselme nommait *veritas* et S. Thomas *ordinatio animae*. Cette explication est très-plausible. Mais encore un coup, sur ce point aussi bien que sur l'innéité de l'idée de l'Infini, combien n'est-il pas regrettable pour l'auteur des Méditations d'avoir énoncé ses vues avec aussi peu de précision! Plus que personne, il devait avoir souci de la clarté, en la question de la valeur des facultés. Où il aurait fallu placer des faits, des lois naturelles simples et fécondes, Descartes met un attribut de la Divinité, telle que nous la manifeste sa claire et distincte idée! Ce vice de raisonnement fut pour une très-grande part la ruine de sa méthode. Il la livrait aux justes réclamations des dialecticiens. Ses adversaires sérieux, ses détracteurs jaloux n'eurent qu'à ameuter contre lui la troupe bruyante des régents de logique. Son système eût été moins précaire qu'il aurait succombé sous la fronde de ces ergoteurs encore plus emportés que superficiels.

De la théodicée idéaliste de Descartes à l'Ontologisme, la transition était aisée. Le critique avait insisté avec une prédilection marquée sur l'impuissance de l'esprit à s'élever par ses seules forces à l'Idée de l'Infini. Dans cette idée et dans toutes les notions absolues qui n'en sont que les formules diverses; que dis-je, en l'essence de chaque être créé, Malebranche prétendit voir l'Infini lui-même se manifestant directement à la raison de l'homme. « Lorsqu'on voit une créature, dit-il, on ne la voit en elle-même, ni par elle-même, car on ne la voit que par la vue de certaines perfections qui sont en Dieu, lesquelles la représentent. Ainsi on peut voir l'*essence* de cette créature, sans en voir l'*existence :* on peut voir en Dieu ce qui la représente, sans voir qu'elle existe. C'est à cause de cela que l'existence nécessaire n'est point renfermée dans l'idée qui la représente, n'étant point nécessaire qu'elle soit, afin qu'on la voie. Mais il n'en est pas de même de l'Être infiniment parfait : on ne peut le voir qu'en lui-même, car il n'y a rien de fini qui puisse représenter l'Infini. On ne peut donc voir Dieu qu'il n'existe; on ne peut voir l'essence d'un être parfait, sans en voir l'existence : on ne peut le voir simplement comme un être possible : rien ne le comprend, et si l'on y pense, il faut qu'il soit [1]. » — « Les preuves de l'existence, dit-il ailleurs, et des perfections de Dieu tirées de l'idée que nous avons de l'Infini, sont des preuves de simple vue. On voit qu'il y a un Dieu dès qu'on voit l'Infini [2]... » — Malebranche ajoute : « Cette proposition : *Il y a un Dieu,* est par elle-même la plus certaine et la plus claire de toutes les propositions qui affirment l'existence de quelque chose [3]. » Voici, dit-il encore, une démonstration fort simple et fort naturelle de l'existence de Dieu, et la plus simple

[1] *Recherche de la vérité*, l. IV, c. XI, § III.
[2] *Ibid.*, l. VI, 2e part., c. VI.
[3] *Entretiens sur la Métaphysique*, entr. II, § V.

de toutes celles que je pourrais vous donner. Penser à rien et ne point penser, apercevoir rien et ne rien apercevoir, c'est la même chose. Donc tout ce que l'esprit aperçoit immédiatement et directement est ou existe... Tout ce que l'esprit aperçoit immédiatement est réellement. Car s'il n'était point, en l'apercevant, je n'apercevrais rien, donc je n'apercevrais point. Or, je pense à l'infini : j'aperçois immédiatement et directement l'Infini. Donc il est [1]. »

Pourquoi Thomas d'Aquin et les Scolastiques après lui, rejetaient-ils l'argument d'Anselme? Parce que pour saisir dans l'Essence de Dieu son existence elle-même, il est nécessaire d'avoir l'intuition de l'Être divin. Malebranche, lui, nie aussi que la simple notion psychologique abstraite de l'Absolu donne à l'esprit le droit d'en induire la réalité de l'Infini. Mais nous avons, selon lui, la vision directe de Dieu, et c'est pour cela seul que nous en avons la connaissance. Les arguments de l'existence de Dieu ne prouvent rien, si ce n'est à la condition d'être des *preuves de simple vue*.

Dans son traité de l'*Existence de Dieu*, Fénélon donna de nouveaux développements à la théorie de Malebranche [2]. L'illustre Gerdil les reprit avec éclat et les exposa avec une grande habileté pendant la première période de sa féconde carrière d'écrivain, en s'ingéniant à concilier les principes de l'Ontologisme avec les doctrines du Docteur Angélique [3].

Ce n'est pas ici le lieu d'approfondir cette nouvelle phase de la démonstration; ce serait sortir des bornes du sujet prescrit par l'Académie et oublier le but de ce travail [4].

Nous l'avons dit ailleurs : la vision immédiate de l'Absolu est une théorie gratuite et, à nos yeux, inacceptable. Les ontologistes les plus habiles de notre temps, mitigeant la doctrine de Malebranche, mettent le principe supérieur de la raison dans l'aper-

[1] *Entretiens sur la Métaphysique*, Entr. II, § V.

[2] Part. II, nos 53 et suiv.

[3] *Difesa del sentimento del P. Malebranche sulla natura ed origine delle idee, contra l'esame di Locke.* — Cf. Lepidi, *de Ontologismo*, pp. 254-277.

[4] Le R. P. Gratry a très-bien relevé les exagérations de Malebranche, dans sa *Connaissance de Dieu*, I, p. 400.

ception directe de l'Essence divine en tant qu'elle est la source des Idées générales. Nous savons qu'à propos de cette idéologie, ils se réclament de l'autorité d'Anselme. Son plus savant commentateur, le célèbre d'Aguirre ne trouve en ses écrits aucune trace de ce système. Je n'emprunterai à son vaste travail qu'une considération purement rationnelle : S'il se trouve un être, dit-il, dont la nature implique la vision de Dieu, celle-ci implique également l'union réelle (physique) de cet être avec une propriété ou une perfection propre à la divinité... Car la créature qui exige de sa nature la vision de Dieu exige du même coup d'être réellement unie à l'essence divine, remplissant pour elle le rôle de médiateur intelligible. La vision des bienheureux elle-même ne peut avoir lieu qu'à condition que leur intelligence soit déterminée par l'Essence divine... Or l'Essence divine, en tant que principe de connaissance, constitue la propriété essentielle de Dieu, à cause de sa suprême actualité et de son identité avec lui. Il est démontré en effet par les philosophes que toute connaissance suppose l'union de l'objet et de la faculté : d'où il suit que l'intellect ne peut engendrer la connaissance de quoi que ce soit, sans être fécondé intrinsèquement, soit par son union immédiate avec l'objet, soit par quelque principe intermédiaire. Ce dernier ne peut exister par rapport à la vision de Dieu. La connaissance intuitive de la Divinité suppose donc l'union de l'intellect avec l'Essence divine, ou l'union de Dieu avec l'intellect, et cela comme principe déterminant à l'égard de celui-ci... En outre, toute créature requiert, en vertu de sa nature, un complément soit substantiel, soit intellectuel; elle l'exige comme une perfection propre, proportionnée et adaptée à son être... Si elle exige, à cet effet, une forme incréée d'un ordre supérieur, elle l'exige comme une qualité qui lui est propre. Donc elle s'égalerait et se mesurerait à elle : elle l'exigerait selon toute sa capacité et complétement [1]. Nous savons déjà combien cette interprétation est conforme à la

[1] « Quidquid exigit connaturaliter visionem Dei, exigit etiam unionem rea-
» lem cum aliqua proprietate vel perfectione Dei propria... Quidquid exigit
» connaturaliter visionem Dei, exigit quoque unionem realem cum essentia

réalité. Dans sa réplique à Gaunilon, Anselme, pressé de s'expliquer sur la façon dont l'esprit s'élève à Dieu, ne mentionne que le procédé familier aux écoles : le dégagement du concept de la Cause première de l'observation des choses créées. Mais contre Malebranche, les conclusions du cardinal d'Aguirre sont sans appel.

Le subjectivisme idéaliste de Descartes et l'ontologisme des disciples de Malebranche appelaient une réaction. Elle tarda quelque peu à se produire, mais elle fut excessive comme le système qu'elle prétendait renverser. Ce fut Kant surtout qui l'inaugura.

» divina, sub munere speciei impressae. Visio enim beatifica non aliter oritur » ab intellectu creato, quam foecundato ab ipsa Divinitate, realiter sibi unita » sub munere speciei impressae. Sed essentia divina sub munere speciei impressae est proprietas seu perfectio Dei propria; utpote summe necessaria » et identificata cum ipso Deo. Ergo quidquid exigit connaturaliter Dei visio» nem, exigit etiam unionem realem cum aliqua proprietate aut perfectione » propria Dei... — Cum enim ex philosophia compertum sit, ex objecto et » potentia pari notitiam, intellectumque non posse quidquam concipere nisi » intrinsece foecundetur, vel per ipsum objectum unitum in ratione speciei, si » uniri potest; vel media specie seu vicaria, consequens est, ut, quandoqui» dem repugnat species Dei vicaria in ordine ad visionem ipsius, necessario » praesupponatur unio essentiae divinae, sive ejusdem Dei cum intellectu sub » munere speciei... Ergo necessario debet habere illum intelligibiliter unitum, » seu intra se. Cumque nequeat habere illum sibi unitum media specie dis» tincta, ad visionem consequens est ut debeat habere ipsam Divinitatem » conjunctam sub ratione speciei... — Natura exigens ab intrinseco compleri » substantialiter aut intelligibiliter per formam increatam alterius ordinis, » exigeret illum veluti perfectionem propriam, ut patet. Ergo adaequaretur » et commensuraretur cum illa : ac proinde exigeret eam adaequate et secun» dum se totam. » (*S. Anselmi theologia,* Tr. I, disp. X, s. III, §§ 23, 23, 31.) — Je me borne à cette citation. La Dispute X du Docteur de Salamanque est, dans son ensemble, une solide réfutation de l'ontologisme. Mais elle est écrite presque entièrement au point de vue théologique. Il faut signaler surtout la section IV. L'auteur y réfute l'objection de ceux qui nient que l'union immédiate dont il vient de parler soit intrinsèque à l'intellect créé, sur ce motif que Dieu peut de telle façon s'unir à la raison qu'il lui découvre son Essence, dans la mesure où cela lui plaît. — C'est précisément la manière dont les ontologistes modernes les mieux avisés ont tempéré l'idéologie de Malebranche!

Nous n'avons qu'à nous occuper ici de sa théorie sur la connaissance rationnelle de Dieu.

Disons-le tout de suite ; le philosophe de la Raison pure est invincible contre tous ceux qui prétendent tirer directement l'existence de la Cause nécessaire et infinie de sa notion idéale. Kant a repris contre eux les objections de Gaunilon et des Scolastiques. Il y a ajouté quelques éclaircissements; mais il n'a pas apporté un seul élément original dans la discussion. Comme le moine de Marmoutiers, Albert le Grand, Thomas d'Aquin et Scot, Kant rappelle avant tout que les raisonnements fondés sur des formules logiques n'ont qu'une portée purement spéculative. Ce sont des abstractions d'où l'on ne peut légitimement induire aucune conséquence touchant à l'ordre réel. Descartes et ses partisans ont coutume de parler d'une démonstration géométrique de l'existence de Dieu. Or, dit Kant, les preuves des géomètres, toutes leurs constructions n'ont qu'une portée spéculative. Dans leur rapport avec l'ordre réel, elles sont purement hypothétiques. Nous montrons que *si le triangle existe,* la somme de ses trois angles doit équivaloir à deux angles droits. Quant à prouver *qu'en effet un triangle déterminé existe,* la Géométrie ne l'essaye même pas. Que l'on ne répète plus, dit avec toute raison le critique de Kœnigsberg, que l'Infini a ce privilége singulier qu'il s'affirme comme *existant. Ontologiquement, cela peut être vrai;* mais au point de vue de la démonstration, il serait puéril de ne pas reconnaître que c'est justement cette propriété qui est en question. Les notions de l'ordre abstrait ne peuvent mener qu'à des conclusions logiques, et celles-ci n'impliquent par elles-mêmes aucun sujet réel. L'existence physique n'est nullement contenue dans les idées de la raison pure. Toutes les fois que de la non-répugnance du concept de l'Absolu, on a conclu à sa réalité, on a confondu la possibilité *idéale* avec la possibilité *externe.* A l'analyser sérieusement, la proposition : l'*Être absolument parfait est possible, donc il existe,* présente à l'analyse un sens absurde. Elle revient à celle-ci : l'Être absolu n'existe point en réalité : donc il faut admettre son existence réelle. — Cette dernière remarque pourrait sembler exagérée en ce qu'elle met sur le même rang l'Être infini et le fini. Mais Kant reste dans l'hypothèse qui prétend tirer l'existence réelle de l'Absolu de son idée logique, de sa notion idéale. Sous ce rapport tous les êtres sont soumis à des conditions pareilles. L'argument ontologique se ramène à la relation logique des attributs et du sujet. Pose-t-on ce dernier, il est clair que cette relation se vérifie en réalité et il répugne à la raison de la nier ou de la méconnaître. Mais qu'on supprime par la pensée le sujet lui-même, le rapport s'évanouit. Toute la question est de savoir si l'on peut nier l'existence de l'Être absolu. C'est là précisément le problème. Ce jugement est-il analytique, demande Kant, ou bien synthétique? Dans le premier cas, c'est une énonciation purement idéale, elle ne porte pas sur l'ordre de la réalité. Soutenir qu'elle est synthétique, c'est commettre une absurdité, puisqu'on ne peut soumettre un concept de ce genre au contrôle des sens ou de l'expérience.

L'Idée de l'Être au-dessus duquel on n'en peut penser de plus grand présente en mainte occasion une grande utilité : Kant en tombe d'accord. C'est une base de *raisonnements* très-solide, mais elle est incapable, par elle-même, de nous conduire jusqu'à la réalité. Nous n'avons aucun moyen de vérifier si de fait les attributs que nous considérons comme les prédicats de l'Absolu se réunissent dans une synthèse vivante, réelle. Sur tout cela nous jugeons uniquement *a priori*, c'est-à-dire selon l'ordre logique. Or, selon Kant, le critère et le contrôle des jugements synthétiques doit se trouver dans la sphère du monde sensible. Il s'ensuit que même la possibilité de l'Être le plus grand ne peut être démontrée, comme s'en flattait Leibnitz. Tous ceux qui admettent l'argument ontologique sont dans le cas d'un homme qui s'affirmerait possesseur de cent thalers, sur cette raison que ceux-ci existent dans son idée [1]. — Kant nous ramène presque aux « îles perdues » de Gaunilon!

Voilà les objections qu'oppose l'auteur de la critique *de la Raison pure* à l'idéalisme de ses devanciers. Kant, on le sait, fut

[1] *Kritik der reinen Vernunft:* Elementarlehre, II Th., II Abth., 2 Buch., 3 Haupst., § IV.

incapable de reconstruire l'édifice qu'il avait renversé et dont, mieux que personne, il a signalé les défauts. On sait le résultat de sa critique; il est tout entier dans la phrase devenue fameuse: « Les lois qui gouvernent nos facultés ne sont que les points de vue différents de notre propre existence; les formes de la vérité sont également les modes de la pensée humaine. » Le philosophe appliquait sa conclusion à notre sujet en affirmant que l'idée de l'Être absolu n'est que le type transcendant de l'esprit, conception purement subjective qui nous laisse dans la plus complète incertitude, dans une radicale ignorance concernant l'existence réelle de son objet. — Pour conserver la notion de Dieu et de la responsabilité morale, Kant finit par leur chercher un abri dans son postulat de la *Raison pratique*. Cela seul découvrait l'infirmité de sa théorie. Mais contre Descartes aussi bien que contre les idéalistes qui voudraient s'en tenir à la lettre d'Anselme, nous n'hésitons pas à dire que sa critique générale est invincible.

Elle avait désespéré la raison. La nouvelle école panthéistique issue de lui la divinisa pour la venger. L'argument *a priori* revint en faveur. Déjà Leibnitz avait remarqué que Spinoza avait emprunté plus d'une considération sur la nature de Dieu à la philosophie Cartésienne. Il est certain que le sophiste-géomètre avait systématiquement insisté sur le rapport essentiel entre l'essence de Dieu et son existence. En plusieurs endroits de ses principes de philosophie et de l'Éthique, il définit Dieu *l'Être dont l'existence réelle dérive de sa notion.*

On devine la raison de cette insistance. Dans le théorème de sa démonstration, Spinoza mettait que la substance est « l'être dont la notion n'implique celle d'aucun autre être. » Il tenait comme axiome, que Dieu est l'être qui existe de soi, par le privilége réservé de la Cause absolue. Le corollaire suivait naturellement : donc il n'y a qu'une seule substance qui est Dieu [1]. Tout le panthéisme était dans l'ingénue conséquence, et c'était là ce que Spinoza voulait. Il appelait ce procédé *de la philosophie à la manière des géomètres!*

[1] *Princ. phil.*, prop. V. — *Ethica more geometrico demonstrata*, p. I, df. I. — *Epist.* 29.

Au rebours de Kant, Schelling, de tous les arguments de l'existence de Dieu, ne voulut accepter que la seule preuve ontologique. « Si Dieu existe, dit-il, la seule cause de son existence, *c'est qu'il est*. Son essence et son existence sont une seule et même chose... Aussi la proposition *Dieu existe* est indémontrée et *absolument indémontrable*, tout comme le premier principe de la philosophie critique : *Moi j'existe.* » Quant à Descartes et Leibnitz qui, à la suite d'Anselme, proposèrent l'argument ontologique, Schelling veut qu'ils ont fait preuve d'infiniment plus de sens critique que les dogmatistes curieux de prouver l'existence de Dieu à l'instar d'un vulgaire problème d'histoire. L'idée de l'Absolu, dit-il, n'a point manqué à ceux-ci, mais ils l'ont mal comprise. Le procédé réflexe qu'ils suivaient repose sur l'antithèse entre *l'idée* et *l'être*. Aussi dans leurs systèmes, Dieu n'est l'Absolu que pour autant que de son idée suit sa réalité. — L'Être divin, écrit-il encore, n'a pas été pour eux l'Absolu véritable, qui est tel par lui-même : ils ne l'ont conçu comme tel que parce qu'ils ne connaissaient aucun être plus grand ou plus excellent. C'est là une notion purement empirique, que tout homme incapable de s'élever au vrai concept de Dieu se forme en soi-même [1]. — Je n'ai garde de montrer l'injustice de ces dernières allégations. On comprend trop que le philosophe qui faisait du *moi* et du *non-moi*, de Dieu et de l'esprit une seule réalité devait répudier tous les arguments qui supposaient une distinction entre la raison humaine et le suprême intelligible.

Plus encore que Schelling, Hégel assure que c'est en revenant à la preuve ontologique que la théodicée peut vivre. Mais veut-on savoir comment il la comprend? Avant tout, il faut que l'on n'aille pas établir une distinction entre l'*idée de l'Absolu* et l'*Absolu lui-même*. Ce sont deux choses identiques. Quant à ceux-là qui, comme Gaunilon, ont combattu la doctrine Anselmienne, Hégel estime qu'ils n'y ont rien compris. Ils se sont imaginé qu'Anselme a entendu parler de la notion psychologique de l'Infini, tandis

[1] *Philosophische Schriften*, t. Ier, p. 152, sqq. — *Neue Zeitschrift fur speculative Physik*, t. Ier, p. 38, seq.

que tout son raisonnement repose sur une *intuition directe* de l'objet pensé. Le sentiment intime de tout homme regarde comme imparfaite la représentation idéale, *abstraite* des choses. Nous portons en nous la conviction que la perfection de la science implique l'*identité de l'idée et de son objet.* Il est superflu de chercher à renverser le point de vue d'Anselme; il plonge ses racines dans les entrailles de l'esprit humain et de la philosophie. Le Docteur du Bec n'eut qu'un tort : ç'a été de proclamer l'identité de l'essence et de l'existence, de l'idée et de la réalité pour l'Absolu seul, tandis qu'elle est l'universelle loi des êtres. — Ces dernières vues montrent assez l'abîme qu'il y a entre les doctrines d'Anselme et celles d'Hégel. Personne n'a aussi bien mis ce point en relief que M. de Rémusat. Écoutons-le : Pour Hégel, écrit l'éminent académicien, le mouvement de la pensée par lequel elle applique l'existence indéterminée à une réalité extérieure, qu'elle conçoit alors comme existante, en telle sorte que le moi est l'*être ayant conscience de l'être*, ce mouvement, dis-je, est plus que la représentation, il est le développement, la production même de ce qui est, si bien que la notion est le fond même de la réalité, et que la dialectique est l'ontologie. Or, comme cela ne peut être vrai de l'être en général, sans être vrai de tout l'être, de l'être absolu, ce n'est point une propriété particulière de l'être divin. Il n'en est ainsi de l'être divin que parce qu'il en est ainsi de tout : ou plutôt c'est de l'être divin, de l'être absolu que cela est vrai, et cela même est l'être divin. *Le mouvement dialectique est la vie divine, identique avec la vie des choses.* Rien n'est que l'identique absolu, dont toutes les déterminations, toutes les diversités apparentes ne sont que des moments. Mais de ce système général, la première application a été la preuve ontologique de Dieu, qu'Anselme n'eut que le tort de croire un cas particulier, et qui, dès lors, s'appuyait sur une supposition qu'il était hors d'état de démontrer. C'est là pour Hégel le grand défaut de la preuve ontologique. Comment conclure, en effet, que Dieu existe de ce que Dieu est l'idée du Parfait, si l'on n'a pas démontré, ou du moins expliqué que l'*idée contient la réalité*, ou, comme il dit, a le pouvoir de s'objectiver elle-même? Tant que la notion de Dieu n'est pas identifiée avec la notion du Parfait, elle est défectueuse, elle est imparfaite. Mais la détermination de perfection épuise, pour ainsi parler, sa déterminabilité. Dès que Dieu est conçu comme le Parfait, l'unité de la pensée et de l'être, de la notion et de la réalité est supposée. C'est là ce que suppose l'argument d'Anselme, de même que les philosophes en général, et Kant lui-même, ont supposé l'existence d'un homme concret, dont la pensée n'était qu'une activité partielle, et par conséquent, n'atteignait aucune totalité. Cependant, pour Descartes, pour Spinosa, même pour Leibnitz, *la substance absolue est l'unité de l'être et du penser*. Mais comment accorder cela avec la multiplicité, avec le dualisme de la philosophie ordinaire, pour laquelle l'idée n'est qu'une idée, c'est-à-dire une chose sans réalité? C'est de ce problème qu'Anselme suppose la solution. Le point de vue moderne, le progrès de ces derniers temps, est la recherche ainsi que la découverte de l'unité, sans laquelle il n'y a pas de preuve de l'existence de Dieu [1]. » — Nous tenons de la bouche d'un rapporteur exact les raisons de préférence de Hégel pour la preuve de S. Anselme. Nous n'avons plus à les combattre ici. S. Thomas et, en certains points, Kant lui-même ont réfuté d'avance les sophismes du fondateur de la Logique de l'identité. Nous avons entendu leurs principes : il serait oiseux d'y revenir.

En terminant cette exposition, nous voudrions essayer de reprendre les éléments acceptables de la démonstration d'Anselme, en tenant compte des rectifications qu'y ont introduites Alexandre de Halès, Albert le Grand, S. Thomas d'Aquin, S. Bonaventure et Duns Scot. Le grand Docteur Dominicain a basé son argument sur les tendances naturelles de la Raison, et sur son mouvement spontané et sans cesse progressif vers l'Absolu. Nous pouvons étendre ce raisonnement à tout l'ensemble des facultés de l'âme. Ce sera terminer de la meilleure manière, croyons-nous, cette partie de

[1] Ouv. cit., p. 545.—Voir, du reste, *Vorlesungen über reine Phil.*, 2 Ausg. II, p. 214. — *Encyclopädie in Grundrisse*, 2 Ausg , §§ 51, 75, 76. — Cf. Rixner : *Handbuch der Geschichte der Philos.*, II, p. 21.

notre travail consacrée, selon le vœu de l'Académie, à l'appréciation critique de la preuve Anselmienne.

Nous l'avons rappelé plus haut : chaque être vivant tient de la nature un instinct actif qui le pousse irrésistiblement à réaliser le but spécial de son espèce. Cet instinct spontané implique d'évidence l'existence réelle de son objet. Une tendance unanime, constante vers une fin déterminée et qui ne serait qu'une pure illusion subjective, serait une contradiction. L'admettre pour l'homme serait accepter, pour le plus élevé des êtres vivants, une anomalie sans exemple dans l'univers. Ce serait consacrer une solution de continuité dans la marche de la nature, sortir gratuitement de l'observation des faits, et s'inscrire en faux contre les principes les plus certains du déterminisme scientifique. En fait, l'infaillibilité des instincts primitifs et innés est la plus universelle et la mieux démontrée des lois du monde vivant. Tous les chefs d'école sont d'accord là-dessus. Nous l'avons reconnu : s'ils ne formulent pas toujours cette fondamentale loi, c'est que son évidence leur paraît au-dessus de toute démonstration. Elle est le principe générateur de la philosophie et de la physique d'Aristote. La métaphysique et l'Idéologie des Docteurs Scolastiques s'appuient sur elle [1]. Nous avons entendu Anselme la rappeler comme une axiome incontesté. Il serait aisé de montrer que Kant, Schelling et Hégel ont emprunté à ce principe presque tout ce que leurs doctrines contiennent de vérité. Leurs erreurs viennent de son oubli.

Or, quel est l'objet propre de l'instinct supérieur de l'homme? quel est le terme de la tendance primitive de ses facultés? C'est l'Absolu, l'Infini.

Dès que l'homme parvient à la conscience de soi, il se démontre avec une irrésistible évidence, que les êtres changeants et imparfaits de l'univers n'ont pu être leur cause et leur fin. Il se saisit soi-même comme dépendant, progressif dans sa vie intellectuelle aussi bien que dans sa vie morale; il en conclut à l'existence d'un Être, Principe transcendant et personnel de tous les êtres, d'une Vérité et d'une Bonté nécessaires et dès lors absolues, d'une

[1] Voir surtout S. Th. *Sum. cont. Gent.*, II, c. 76.

beauté parfaite, splendeur et harmonie suprême, vivante règle de toutes les beautés périssables d'ici-bas. C'est le commun argument de toutes les Écoles. — A cette déduction basée sur le monde extérieur correspond un phénomène psychologique, le plus grave sans contredit du monde interne. C'est précisément celui-là que nous signale, avec sa profondeur accoutumée, le grand Docteur du moyen âge : je veux dire le mouvement naturel de notre âme vers le Dieu infini. Oui, ainsi que s'en exprime S. Thomas, l'intelligence, en son essor indompté, s'élance plus loin que toute vérité circonscrite, fragmentaire, incomplète. La volonté recherche, comme l'objet de ses idéales amours, l'absolue perfection; l'imagination rêve la beauté sans ombre, la jouissance sans retour et sans mélange. — Rien de fini ou d'imparfait ne saurait satisfaire l'âme. La science, la possession des réalités terrestres ne font que stimuler son désir de l'*au delà*, de l'Absolu. L'homme rapproche ces deux considérations solidaires l'une de l'autre : l'existence d'une Cause nécessaire, infinie, prouvée par la nature de l'univers, et ses propres aspirations vers ce Principe supérieur. Il sent que cet élan vers l'Infini est sa tendance innée, et sa raison appuyée sur une rigoureuse induction et sur l'universelle observation des lois, la juge infaillible. — Mais si les inclinations instinctives des êtres sont légitimes, il faut d'évidence que leur objet existe véritablement. C'est à coup sûr *comme la plus haute réalité* que Dieu se pose devant la conscience. C'est l'Infini vivant et personnel que recherchent, dans la limite de leur capacité native, la pensée et l'inquiet sentiment de l'homme. Nul autre symbole ne serait l'expression adéquate de ses aspirations. Nous déduisons ainsi l'Infini objectif et de la nécessité même de la Cause du monde, et aussi de notre tendance naturelle vers l'Absolu, mise en regard de la plus universelle des lois physiques : la légitimité des instincts primordiaux dans toutes les classes d'êtres organisés [1].

[1] *De Ontologismo*, par A. Lépidi, p. 248; Louvain, Fonteyn, 1874. — J'emprunte à cet excellent critique ce passage décisif, et avec d'autant plus de bonheur que lui-même a bien voulu me le signaler comme la meilleure preuve de la commune doctrine sur le point qui nous occupe : « Ratio » objectiva creaturarum talis est, ut habeat intrinsecam et naturalem ordi-

Faut-il le dire? Cette preuve n'implique ni une intuition directe de l'Absolu; ni le saut logique de l'esprit, inférant de l'élimination des limites l'*existence de l'Infini,* au nom du procédé infinitésimal dont le terme n'est que le *seul Indéfini;* ni l'idée innée de Dieu; ni la foi ou l'aveugle instinct des Écossais, de Jacobi et des Fidéistes. L'extrême facilité avec laquelle la raison s'élève à l'Absolu à la vue des êtres créés, n'exige en rien ces précaires hypothèses. Il suffit, pour en rendre compte, de se rappeler l'*évident* rapport de l'être conditionnel avec une Cause nécessaire, et surtout la présence toujours active de l'Absolu dirigeant les facultés et les tendances des êtres vivants, et les élevant jusqu'à lui-même, leur source et leur fin.

Ces données suffisent à la raison pour qu'elle affirme l'existence de l'Être-Principe et lui attribue, dans un degré excellent, toutes les perfections compatibles avec la notion de l'Infini. L'universel consentement des hommes n'est que l'expression de cette croyance, loin d'en contenir la démonstration. Envisagée en ses caractères essentiels, elle se retrouve parmi tous les peuples du monde, Nous pouvons l'appeler, avec un critique illustre : « la loi de l'histoire [1]. »

Il n'importe d'ailleurs que la manière dont l'homme se repré-

» nationem in Deum, tanquam in ultimum finem. Hoc quisque animadvertere
» potest in illo universali rerum consensu, secundum quem omnia conspirant
» in unum; *praesertim vero* in inclinatione naturali animae intellectivae,
» *quae ad Deum tendit,* cum Deo conjungitur, eique naturaliter *per sensum*
» *religiosum* subjicitur. Est autem res manifesta, quod nequeat cognosci
» hujusmodi *naturalis* rerum ordinatio ad Deum, quod nequeat sentiri
» viva illa inclinatio nostrae voluntatis in Deum, quin in ipsa et per eam Deus
» cognoscatur. » (*Ibid.*, p. 107.)

[1] Bunsen, *Dieu dans l'histoire.*—Conclusion, p. 519. — « Nous pouvons constater que le sentiment de Dieu, inné à l'homme, parle avec une vérité infaillible. Pour cela, nous n'avons besoin que d'avoir dans la raison cette même foi avec laquelle l'humanité croit à sa propre existence et à la réalité visible. L'historien, qui réfléchit sur l'histoire, est puissamment fortifié dans cette foi par l'observation que les plus nobles tribus de l'humanité s'y sont attachées dans tous les âges, selon la mesure où elles ont été éclairées, vertueuses et heureuses. »

sente le type concret de ses aspirations, varie selon les aptitudes et le degré de culture. L'Européen poli l'envisage autrement que le sauvage sans culture; le métaphysicien se le figure mieux que le vulgaire. Seulement, à cet égard, notons que l'Absolu peut être conçu sous son aspect rudimentaire, grossier, ou bien dans sa forme scientifique. Au premier cas il sera considéré sous les traits d'un Être supérieur à la nature, arbitre des œuvres, terme de la destinée. Ce type, nous le rencontrons jusque parmi les peuplades les plus abaissées, malgré les erreurs de toute sorte qui l'enveloppent. Cela est si vrai que l'un des plus célèbres naturalistes de notre siècle, M. de Quatrefages, n'a pas hésité à faire de la croyance en l'Être suprême et à l'ordre moral, le critère distinctif de l'espèce humaine.

Quant à l'Absolu considéré dans sa notion scientifique, son caractère fondamental et transcendant ne disparaît pas non plus de la conscience humaine, quelles que soient les aberrations des hommes sur la nature de ses perfections. L'École ionienne, par exemple, comme les matérialistes, en général, voyait en lui le principe physique des choses; mais ce principe est la Force qui préside aux phénomènes, l'âme du monde, la source de toute harmonie. La raison n'est elle-même qu'une de ses manifestations. Ce n'est pas sur le *caractère absolu* de la première Cause que s'égare le matérialisme, mais sur sa forme purement spirituelle, c'est-à-dire sur un moment déjà moins primitif de la question. — Cela est bien plus vrai dans la théorie panthéistique. Elle n'est que l'exagération du concept de l'Absolu, exagération funeste certes, mais bien différente néanmoins de sa négation. Dans leur excessive théosophie, les panthéistes de l'Inde, aussi bien que les Éléates, tenaient Dieu pour la seule cause immanente des choses, toujours active parmi leur flux incessant. C'est l'ensemble des produits cosmiques et de la Force supérieure qui s'y manifeste, que les Stoïciens nommaient Dieu ou *Logos*. Le principe d'après lequel la Force centrale se détermine n'est autre que la *Finalité universelle*. De la sorte ils lui reconnaissaient la raison et l'intelligence. Ils oubliaient de poser cette intelligence comme personnelle, il est vrai; ils ne la concevaient pas à part des apparitions changeantes et progressives auxquelles elle s'assimile, en son développement éternel; mais c'est que le problème de la personnalité fut, en général, peu approfondi par l'antiquité [1]. En souhaite-t-on une preuve? Le système panthéistique est incompatible avec la liberté. Les critiques signalent l'inconséquence des Stoïciens s'évertuant à concilier le libre arbitre avec le dogme de l'évolution fatale des êtres. Niera-t-on pour cela que l'antiquité ait connu les conditions naturelles des facultés? Il serait puéril de le penser. — On ne peut assez s'en souvenir en toute cette question : autre chose est la complète et exacte conception scientifique de l'Absolu, autre chose ses lignes fondamentales. Laissée à elle-même, la raison prend aisément le change sur les formes abstraites de la question. Mais la nature redresse les excès et les défaillances de la pensée. C'est ainsi qu'à chaque instant, les panthéistes transportent à leur Cause universelle les attributs caractéristiques de l'individualité : l'intelligence, la sagesse, l'harmonie, la finalité. Ni la dépravation et le raffinement des systèmes, ni des erreurs séculaires n'ont pu détruire, en ses éléments essentiels, l'instinctif mouvement de l'âme vers l'absolue Raison et l'absolue Bonté. Preuve manifeste qu'il lui est inné, qu'il est sa plus haute expression, sa suprême loi.

En présence de ces considérations, concluons que la substance autonome, parfaite que la nature révèle, existe avec une absolue nécessité. La cause que la raison assigne à la création est bien, comme le disait Anselme, l'*Être au-dessus duquel on n'en peut penser de plus grand*, Celui qui seul existe par lui-même, et dont l'existence nécessaire constitue l'essentiel attribut, Il est la *Vérité absolue*, car il est le principe des Idées, le Type incréé des Essences, et c'est grâce à sa direction incessante, à sa présence immédiate dans l'esprit que l'homme doit la connaissance de la sagesse. — N'est-ce point là une démonstration à la fois efficace et populaire de l'exis-

[1] Voyez à ce sujet Heinze, *Die Lehre von Logos*, 1872, art. *Die Stoïker*, passim. — Zeller, *Philos der Griechen*, II, pp. 459 et suiv.; Tubing., 1861. — Trendelenburg, *Nothwendigkeit und Freiheit in der Griech. Phil.*, p. 162. — Schneider, *Unterblichkeitslehre der Aristoteles*, p. 79; Passau, 1867. — Biese, *Philos. des Aristoteles*, I, pp. 87-461, etc.

tence de la Divinité? Elle n'est que l'expression scientifique de l'universelle tradition des hommes, *le témoignage de l'âme naturellement chrétienne.* Elle comprend le « sentiment divin » dont Platon est rempli; » l'influx de l'intellect pur, « de l'acte précédant toutes les virtualités » d'Aristote; l'impression lumineuse du souverain Bien et la conscience intérieure de la Divinité que vantait Augustin; la « prédestination » providentielle de la raison à l'Infini de S. Thomas et des Docteurs; le « dessein et la marque de Dieu » sur la créature de Descartes; la présence de l'Absolu dans l'âme humaine de Bossuet et de Fénélon. — Cette preuve n'est pas exclusivement spéculative, mais elle embrasse l'ordre pratique aussi bien que le raisonnement, puisqu'elle s'appuie sur toutes les facultés de l'homme. Vivante comme son objet, elle nous conduit, selon le vœu de Pascal, à « un Dieu qui remplit l'âme et le cœur qu'il possède. »

Certes, cette démonstration de l'infinité du premier Être n'est pas tirée de sa notion, de son idée. Elle est déduite de la manière toute spéciale dont l'Absolu se pose devant nos facultés, notre conscience, et tout notre être. En ce sens, elle présente avec l'argument du Prosloge une parenté réelle. Mais elle s'appuie ultérieurement sur l'infaillibilité des lois instinctives qui régissent le monde organisé. Sous ce rapport surtout, elle n'est que le développement des vues de S. Thomas d'Aquin, de S. Bonaventure et de Duns Scot. Il est trop clair d'ailleurs qu'elle n'atteint que l'existence de l'Être infini. Elle est en parfait accord avec la commune doctrine des Maîtres qui ne reconnaissent à l'homme qu'une science abstractive, analogique des *perfections* de l'Absolu, de sa vie intime, inaccessible au regard mortel. Elle est conforme de tout point à la tradition historique, contrôle nécessaire de toute philosophie sérieuse et positive.

§ 3.

De l'essence et des attributs de Dieu.

Les considérations sur l'existence de la Cause première avaient d'elles-mêmes conduit Anselme à la concevoir comme l'Être par soi, la Cause absolue et parfaite. Tout le développement de sa Théodicée n'est qu'une suite de corollaires logiques tirés de cette donnée fondamentale. Nous pourrons nous contenter de les exposer sommairement. Ce qu'il importe de noter ici, c'est l'ordonnance rigoureuse et systématique de cette partie de l'œuvre d'Anselme. La philosophie chrétienne n'avait jusqu'alors produit aucune démonstration d'une aussi sévère ordonnance. Le Monologue et le Prosloge, dans leur longue suite de chapitres, présentent l'évolution progressive du concept de l'Être absolu. L'esprit est véritablement enchanté de rencontrer au seuil du moyen âge un monument d'une si haute et si puissante raison.

Déjà les arguments du Monologue ont mis en évidence l'aséité de la première Cause. Les perfections changeantes, bornées des êtres de l'univers accusent leur dépendance d'une Cause transcendante, principe nécessaire et autonome de toute réalité. Mais comment faut-il concevoir l'acte primitif qui appela à l'existence les êtres bornés de l'univers? Question capitale qui a fait le désespoir de la sagesse humaine! C'est avec beaucoup de vérité que Lactance écrit que toutes les philosophies sont demeurées impuissantes à concilier la multiplicité, l'imperfection des choses visibles avec l'unité et l'excellence de la Cause absolue. De là les deux grands systèmes sur l'origine des choses, auxquels on peut ramener tous les autres : le Panthéisme et le Dualisme. Celui-ci cherche à rendre raison des contrastes du monde physique et moral, en les attribuant à deux principes coéternels et opposés; celui-là ne voit en elles que les phases progressives et nécessaires de l'Activité absolue.

L'histoire des formes multiples que revêtirent ces deux systèmes a été écrite par des maîtres célèbres. Rappelons seulement ici qu'aucune école de l'antiquité n'a clairement professé la doctrine de la création substantielle. Hésiode, dans sa généalogie des Dieux, ne remonte pas au delà du Ciel et de la Terre. Les Ioniens tiennent le dualisme matérialiste de la *Matière* et de la *Force*. Le Dieu de Platon n'est probablement que l'ordonnateur de l'éternelle matière: celui d'Aristote est le Premier moteur vers lequel tend l'univers, éternel comme lui. Le Dualisme apparaît dans les Principes actif et passif des Stoïciens. A côté de ces vues dualistes s'était de bonne heure développé le Panthéisme. Les Védas regardaient la Lumière comme la Source des êtres : ils la personnifiaient dans Brahma. — Bientôt les deux principes des Ioniens s'unirent dans une substance primitive où ils se trouvèrent confondus. Les Éléates furent des panthéistes avoués : Xénophane professa la doctrine de l'Être pur, fonds universel des phénomènes; Parménide tint l'identité de l'Être et de la pensée : c'est l'Hégel de la Grèce antique. Les Néoplatoniciens éclectiques enseignèrent à leur tour l'émanation des êtres créés du sein du Démiourge, qui lui-même procède du Dieu suprême par une fatale et inconsciente opération. Plotin, Porphyre, Proclus s'accordèrent à refuser à la première Hypostase la production et la science des choses. C'eût été, selon eux, altérer la substance divine que de lui attribuer un rapport même lointain avec le monde imparfait, périssable.

De bonne heure, cette thèse de la dégénérescence de l'Être producteur du monde avait passé de la Philosophie dans la Religion. Elle s'y était incarnée en des Mythes d'une saisissante poésie. C'est Bel se décapitant soi-même, et de son sang mêlé à la terre procréant le premier homme. C'est le Lohengrin du Nord dont le corps mutilé devient l'aliment vital de l'humanité. C'est le Taureau sacré mis à mort par Arhiman et engendrant le froment et le vin, la commune nourriture des mortels. C'est surtout Dionysios Zagrée massacré par les Titans, parce qu'il s'est apitoyé sur le sort de la terre, et dont les membres jetés dans une chaudière seront les éléments du monde nouveau. Partout, dit l'un des plus profonds mythographes de notre temps, partout dans l'antiquité païenne, la production du Cosmos commence le martyre de la Divinité; c'est qu'on se figurait la création comme un morcellement de l'Unité infinie : « D'après la théologie des anciens, Dieu est sorti par amour pour les hommes de son existence isolée; il s'est sacrifié lui-même en créant les êtres et en leur communiquant une partie de sa vie. Le sang divin est recueilli dans la coupe du monde. Voilà le sens du gobelet magique que tient en main le Démiourge... C'est le double cornet de Bacchus dans lequel s'accomplit la magie de l'univers, le calice du salut que porte en sa main le Dieu Égyptien Seth ou Sérapis, ce maître de la vie et de la mort : enfin c'est le calice prototype de l'universelle communion, le S. Graal où les hommes puisaient l'aliment et la boisson de l'immortalité [1]. » — Quelle distance de ces théories fantaisistes au dogme de la Création ! La raison et l'expérience proclament que l'activité est proportionnée à l'Être. Une nature bornée, successive, composée, implique une action finie, dépendante de conditions multiples, imparfaite et partielle par conséquent. Mais dès qu'on pose, ne fût-ce qu'à titre d'hypothèse, que la Substance infinie opère au dehors, son opération se manifeste à l'esprit comme un acte tout à fait autonome dans ses éléments constitutifs. Le produit de cet acte sera fini sans doute, c'est-à-dire substantiellement distinct de la Cause; celle-ci étant tout à fait simple, son essence ne peut ni se multiplier, ni se diviser sans perdre son éternelle immutabilité. Mais cette substance engendrée dans le temps et dans l'espace n'a pu être tirée à l'origine d'une matière préexistante : l'Absolu ne peut être subordonné dans ses actes à des principes étrangers. Cette causalité pure n'est-elle pas plus conforme à la notion de l'Être infini que les théories du Dualisme ou de l'émanation? Anselme est le premier Docteur scolastique qui ait exposé le concept de la création d'une manière scientifique et développée. Il l'a fait avec une précision et une force de raisonnement que l'école rationaliste a parfois méconnues, mais qu'elle a bien rarement égalées.

[1] Dr Sepp, *Jésus-Christ*, II, c. LXI.

Les réalités perfectibles et indépendantes nous ont démontré l'existence d'un Être nécessaire et absolu. Ce principe admis, Anselme conclut que les êtres de l'univers ne peuvent exister de fait qu'en vertu de l'opération de la Cause première. Mais, celle-ci, demande Anselme, comment subsiste-t-elle dans sa vie intime [1]? Nous avons vu qu'elle se révèle à l'esprit comme l'Être suprême, qui a de lui-même tout ce qu'il est. Dès lors il est impossible qu'elle ait reçu l'existence ou de soi ou d'une autre cause quelconque, ou d'une matière préexistante. Supposer cela, ce serait la rendre dépendante et inférieure à son principe, ou du moins admettre

[1] « Quoniam igitur non semper eumdem habet sensum quod dicitur esse » per aliquid aut esse ex aliquo, quaerendum est diligentius quomodo per » summam Naturam vel ex ipsa sint omnia quae sunt Et quoniam id quod est » per se ipsum, et id quod est per aliud, non eamdem suscipiunt existendi » rationem, prius separatim videamus de ipsa summa Natura quae per se est, » postea de his quae per aliud sunt.

» Cum igitur constet, quia illa est per seipsam quidquid est, et omnia alia » sunt per illam id quod sunt, quomodo est ipsa per se? Quod enim dicitur » esse per aliquid, videtur esse aut per efficiens, aut per materiam, aut per » aliquod aliud adjumentum velut per instrumentum. Sed quidquid aliquo » ex his tribus modis est, per aliud est, et posterius, et aliquo modo minus » est eo per quod habet ut sit. At summa Natura nullatenus est per aliud, nec » aliquid est per nihil. Si igitur est aliquo modo ex nihilo, aut per se, aut » per aliud est ex nihilo. Per se autem nihil potest esse ex nihilo; quia si » quid est ex nihilo per aliquid, necesse est ut id, per quod est, prius sit. » Quoniam igitur haec essentia prior seipsa non est, nullo modo est ex nihilo » per se. At si dicitur per aliam aliquam naturam extitisse ex nihilo, non est » summa omnium, sed aliquo inferior; nec est per se hoc quod est, sed » per aliud. Item, si per aliquid est ipsa ex nihilo, id, per quod est, magnum » bonum fuit, cum causa tanti boni fuit. At nullum bonum potest intelligi » ante illud bonum, sine quo nihil est bonum; hoc autem bonum, sine quo » nullum est bonum, satis liquet hanc esse summam Naturam de qua agitur. » Quare res nulla vel intellectu praecessit, per quam ista ex nihilo esset. De- » nique, si haec ipsa natura est aliquid aut per nihil aut ex nihilo, procul » dubio aut ipsa non est per se et ex se quidquid est, aut dicitur ipsa nihil; » quod utrumque superfluum est exponere quam falsum sit. Licet igitur » summa substantia non sit per aliquid efficiens, aut ex aliqua materia, nec » aliquibus adjuta sit causis ut ad esse produceretur, nullatenus tamen est » per nihil aut ex nihilo, quia per seipsam et ex seipsa est quidquid est. (C. VI.)

qu'en elle il puisse y avoir progrès, mutabilité, succession. D'un autre côté, ne serait-ce pas le comble de la démence que de lui refuser l'existence, pour ce motif qu'elle n'a point de cause [1]? Peut-on nier la réalité de l'Être auquel tous les autres doivent leur existence? Un Être en est-il moins réel parce qu'il existe, par soi, sans changement et sans imperfection? — Tiendra-t-on que son principe soit le néant? La première cause est-elle sortie de ce néant par sa *propre force?* En ce cas, ce ne serait pas le néant, mais bien cet élément immanent qui la détermine à l'apparition, qu'il faudra nommer sa cause. Nous voilà amenés à l'absurde hypothèse d'un être antérieur à soi-même. — Aurait-elle été produite par un autre agent? Elle n'est donc point ce qu'elle est par elle-même, elle ne peut être considérée comme la suprême réalité; elle est inférieure à celle dont elle a reçu l'existence! — En outre,

[1] « Quae licet ex his, quae rationis luce de summa jam animadverti sub-
» stantia, putem nullatenus in illam posse cadere, non tamen negligam hujus
» rei probationem contexere. Quoniam namque ad magnum et delectabile
» quiddam me subito perduxit haec mea meditatio, nullam vel simplicem
» peneque fatuam objectionem, mihi disputanti occurentem, negligendo volo
» praeterire. Quatenus et ego nihil ambiguum in praecedentibus relinquens,
» certior valeam ad sequentia procedere; et si cui forte quod speculor per-
» suadere voluero, omni vel modico remoto obstaculo, quilibet tardus intel-
» lectus ad audita facile possit accedere.

» Quod igitur illa natura, sine qua nulla est natura, sit nihil, tam falsum
» est, quam absurdum erit si dicatur, quidquid est nihil esse. Per nihil vero
» non est, quia nullo modo intelligi potest, ut quod aliquid est sit per nihil.
» At si quo modo est ex nihilo, aut per se, aut per aliud, aut per nihil est ex
» nihilo. Sed constat, quia nullo modo aliquid est per nihil... Quomodo ergo
» tandem esse intelligenda est per se et ex se, si nec ipsa sibi materia extitit
» nec ipsa se quolibet modo, ut quod non erat esset, adjuvit? Nisi forte eo
» modo intelligendum videtur quo dicitur : quia lux lucet vel lucens est per
» seipsam et ex seipso. Quemadmodum enim sese habent ad invicem lux et
» lucere et lucens, sic sunt ad invicem essentia et esse et ens, hoc est, exis-
» tens sive subsistens. Ergo summa essentia, et summe esse, et summe ens,
» id est, summe existens, sive summe subsistens non dissimiliter sibi conve-
» niunt quam lux et lucere et lucens. » (C. VI.) — Voir les développements de d'Aguirre sur cette partie du Monologue : Disp. XV et surtout Disp. XVI et Disp. XVII, XVIII : *De potentia instrumentali et obedientiali creaturae ad creationem.*

cet Être auquel la cause première devrait son actualité, est certes un grand bien. Mais ce bien présuppose ultérieurement *le principe de toute bonté,* qui n'est autre que l'Être suprême. Il est par conséquent impossible de concevoir, même comme un simple être de raison, la Cause qui aurait tiré l'Être suprême du néant. — Enfin, dans cette supposition, il faut admettre l'une de ces deux conséquences, également insensées : ou bien que l'Absolu est lui-même le néant, ou bien qu'il doit son essence à un principe distinct de soi. En cette ardue matière, ajoute Anselme, cherchons un éclaircissement dans la nature physique. La lumière éclaire de soi, sans avoir reçu ni d'elle-même ni d'un principe distinct le pouvoir d'éclairer. Ainsi de cette suprême Essence : elle subsiste de soi, d'une manière ineffable, sans causalité ni externe ni interne, dans l'absolue actualité de sa personnalité infinie.

Voilà certes de subtils arguments; ils trahissent le XI[e] siècle, mais ils ne sont pas aussi vains qu'on serait porté à le croire. M. Bouchitté lui-même avoue qu'ils renferment quelque utilité [1] ! N'est-ce pas déjà un vrai mérite pour le Docteur de Cantorbéry, que de marquer avec une aussi grande fermeté l'aséité du premier Être. Même *à l'égard de soi-même,* Dieu n'est le terme d'aucune causalité proprement dite, d'aucune détermination progressive. Il est le *Bien* de Platon, l'*Un* de Plotin et de Proclus. Que dis-je? le Dieu d'Anselme est autrement parfait. Son infinité n'est pas l'inertie immobile : Dieu n'est point un Boudha sacré, banni du monde au nom d'une excellence illusoire. C'est à ce grand Être qu'Anselme attribue la création des êtres de l'univers. Mais en lui-même, pour l'exprimer en langage moderne, il est l'Absolu. C'est l'un des plus nobles mérites de notre Docteur d'avoir exposé, avec une telle insistance, ce concept fondamental de Dieu.

Seulement, qu'on nous laisse dire ici toute notre pensée. En ce chapitre et en ceux qui suivent, Anselme s'appuie à l'excès sur le raisonnement abstrait. C'est un défaut que nous lui avons reconnu déjà. L'élément empirique, les données de l'observation et de la

[1] *Trad. du Monologue*, ad h. l.

conscience ne sont pas assez fréquemment rapprochés des dilemmes ou des alternatives logiques. De là une argumentation un peu vague et d'une extrême sécheresse. Mais la démonstration n'en est pas moins solide au fond. Les panthéistes et les matérialistes modernes, souvent si près de s'entendre dès qu'il est question de la genèse des êtres, croient avoir beau jeu des preuves d'Anselme et de celles qui leur ressemblent. L'Être-Principe pour ceux-ci est le Moi universel ou bien l'Absolu qui n'est que la synthèse de la Pensée et de l'Être, ou encore l'Idée indéterminée, la puissance du devenir. Pour ceux-là, c'est un atome doué d'une force primitive de mouvement, et fatalement prédestiné à des développement indéfinis.

Mais ces gratuites affirmations ne suffisent pas à rendre raison de l'apparition des choses. Le Panthéisme antique des Ioniens et des Éléates considérait la *Haine* ou la *limite fatale*, si l'on veut, comme un des facteurs de l'existence. Fichte et Schelling ont senti également que l'*Absolu impersonnel* ne pouvait suffire à expliquer l'origine des êtres finis et multiples. Avec plus de finesse que de raison, ils en appellent, comme en passant, à l'*obstacle* occasionnant la réflexion du premier Principe sur lui-même, et impliquant ainsi la distinction des deux moments de l'Absolu, le *subjectif* et l'*objectif*, l'*Être* et la *Pensée*. Hégel pose l'*actuation* nécessaire, l'universel devenir de l'Idée indéterminée. Eh bien! contre ces sophismes nouveaux en apparence seulement, le vieil argument d'Anselme conserve une invincible vérité. Qu'est-ce que cette force, ce mouvement primitif? Une loi aveugle et fatale, principe inconscient d'harmonie, occasionnant par ses évolutions successives l'ordre universel? Mais il restera éternellement vrai qu'une loi dont le résultat général est l'ordre le plus parfait et le plus constant suppose en dernière analyse un moteur intelligent [1]. Celui-ci, principe de l'économie du monde, ne peut être le *produit de ses propres effets*, bien moins encore d'un chimérique néant ou d'un hasard heureux. Toutes ces vaines hypothèses ne

[1] Cf. Kant, *Der einzig mögliche Beweisgrund zu einer Demonstration des Daseins Gotter*, IV Abth. — § *Das nothwendige Wesen ist ein Geist.* — S'il

sont, pour employer un mot d'Aristote, que le langage de gens qui ne s'entendent pas eux-mêmes. — Mais surtout, cet *obstacle*, ce *développement spontané* et ce *retour du Principe sur lui-même* auxquels est si souvent revenu le Panthéisme dogmatique, quelles inventions, quelles rêveries! Ne l'oublions pas. C'est la *première origine* des choses qu'il s'agit d'expliquer. Dès que, pour en rendre compte, on a posé l'*Absolu*, ce qu'on appelle l'*obstacle*, l'arrêt dans l'indéfinie progression, ne se conçoivent plus. D'où seraient-ils venus? C'est une condition nécessaire, dit-on! Elle est, certes, tout à fait nécessaire pour que l'esprit puisse, jusqu'à un certain point, se sauver de l'absurde, et se figurer comment, sans création, de l'illimité, de l'inconditionnel ont pu naître les contingences multiples, changeantes, bornées. C'est donc une *loi intelligente, rationnelle*. Encore une fois, puisque les phénomènes ne sauraient exister par le développement de l'Absolu qu'à condition que celui-ci soit circonscrit entre des limites déterminées, il faut bien lui attribuer l'intelligence et la personnalité, ou bien placer *au-dessus de lui* une cause régulatrice douée de conscience et de raison. L'argumentation d'Anselme demeure vraie : sa forme seule a été rajeunie.

Mais il faut l'entendre expliquer d'une manière plus approfondie l'opération créatrice. Comment a été formée, se demande Anselme, en précisant ainsi le sens de la question, la matière première de l'univers, le *substratum* universel ? Il pose le problème dans les termes de la vieille physique hermétique, et certes, sous ce rapport, de la façon la plus rudimentaire [1]. Mais ce n'est pas de physique qu'il s'agit; nous sommes en ontologie, et M. Bouchitté observe très-bien que c'est le concept de la créa-

plaît au lecteur de comparer cette étude avec le chapitre de la *Critique de la Raison pure* intitulé : *Unmöglichkeit eines kosmologischen Beweises von Dasein Gottes*. (Éd. 1839, t. X, p. 484), il pourra se faire une juste idée de la méthode de ce philosophe qui a mêlé, dans une si large mesure, la vérité et l'erreur, et dont la célébrité paraît surfaite à d'excellents juges.

[1] *Mon.*, c. VII.

tion seule qu'il nous importe ici d'élucider. Avant tout Anselme écarte la théorie de l'émanation. L'univers, dit-il, ne peut exister par soi, nous le savons. Il ne peut non plus avoir pris naissance par une sorte d'effusion de la divine substance. Pourquoi cela? Si de la substance même de cette cause pouvait sortir *quelque être inférieur à elle*, une semblable émanation altérerait l'infinie simplicité de sa nature [1]. Ainsi l'univers ne peut être considéré comme procédant substantiellement de la première cause. Il n'est point de soi; il n'a pas sa raison dernière dans une substance quelconque. L'Essence créatrice seule est de soi et par soi (*ex se et per se*). Mais en outre, elle existe *en soi*, sans que sa substance puisse se répandre au dehors, par un fractionnement incompatible avec sa nature. — Reste donc que l'universalité des phénomènes est le terme concret de la *causalité pure*, de l'Absolu;

[1] « At si ex summae Naturae materia potest esse aliquid minus ipsa, summum Bonum mutari et corrumpi potest, quod nefas est dicere. Quapropter, quoniam omne quod aliud est quam ipsa minus est ipsa, impossibile est aliquid aliud hoc modo esse ex ipsa. Amplius, dubium non est, quia nullatenus est bonum per quod mutatur vel corrumpitur summum Bonum. Quod si qua minor natura est ex summi Boni materia, cum nihil sit undecumque nisi per summam essentiam, mutatur et corrumpitur summum Bonum per ipsam. Quare summa essentia, quae est ipsum summum Bonum, nullatenus est bonum; quod est inconveniens. Nulla igitur minor natura materialiter est ex summa Natura. Cum igitur minor natura eorum essentiam, quae per aliud sunt, constet non esse velut ex materia ex summa essentia, nec ex se, nec ex alio, manifestum est quia ex nulla materia est.

» Quare, quoniam quidquid est per summam essentiam est, nec per ipsam aliud aliquid esse potest nisi ea aut faciente aut materia existente, consequitur ex necessitate, ut praeter ipsam nihil sit nisi ea faciente. Et quoniam nihil aliud est vel fuit nisi illa et quae facta sunt ab illa, nihil omnino facere potuit per aliud, vel instrumentum vel adjumentum, quam per seipsam. At omne quod fecit, sine dubio aut fecit ex aliquo velut ex materia, aut ex nihilo.

» Quoniam igitur certissime patet, quia essentia omnium, quae praeter summam essentiam sunt, ab eadem summa essentia facta est, et qui ex nulla materia est, procul dubio nihil apertius quam quia illa summa essentia tantam rerum molem, tam numerosam multitudinem, tam formose formatam, tam ordinate variatam, tam convenienter diversam, sola per seipsam produxit ex nihilo. » (C. VII.)

en d'autres termes, qu'elle est *faite de rien!* — Mais il faut bien entendre ce terme : Anselme fait à ce sujet quelques instances dans le goût de son époque. On peut dire en trois cas différents qu'une chose est *faite de rien* [1]. On s'exprime parfois ainsi pour signifier que la chose en question n'est point faite du tout, à peu près comme lorsqu'on dit : *Cet homme parle de rien*, c'est-à-dire, *il ne parle pas.* On pourrait aussi comprendre par là que *le rien, le néant,* est la matière dont la chose est faite ; et Anselme ajoute que cette façon de penser et de parler serait absolument fausse. Enfin, nous pouvons dire qu'une chose a été faite de *rien*, pour nier qu'il y ait eu un élément *préalable* qui a servi à sa production. Dans cette dernière acception, on tient que la *puissance interne* de l'agent est le seul principe auquel l'effet produit doive l'existence. « De cette manière, conclut Anselme, il est aisé de comprendre que l'essence créatrice a tout fait de rien, ou que tout a été fait par elle de rien : c'est-à-dire que *ce qui n'était pas encore a reçu l'être.* Car lorsqu'on dit que cette Essence a fait ces choses, ou que ces choses ont été faites, on comprend nécessairement que lorsqu'elle les a faites, elle a fait quelque chose, et que lorsque celles-ci ont été faites, elles sont devenues quelque chose. C'est ainsi que lorsque nous voyons une personne élevée par une autre d'une position tout à fait basse, aux honneurs et aux richesses, nous disons : celle-ci l'a faite *de rien* ce qu'elle est, ou celle-là a été faite *de rien* ce qu'elle est par celle-ci ; c'est-à-dire : cet homme qui naguère était regardé comme rien, est, par le bienfait de cet autre, devenu quelque chose. »

A part les antithètes et le style, il n'est pas possible de nier que le concept de la création ne soit exposé ici avec une grande netteté de vues. C'est là un mérite d'autant plus grand pour Anselme que de

[1] « Tertia interpretatio, qua dicitur aliquid esse factum de nihilo, est, cum » intelligimus, esse quidem factum, sed non esse aliquid unde sit factum. Per » similem significationem dici videtur, cum homo, contristatus sine causa, » dicitur contristatus de nihilo. Secundum igitur hunc sensum si intelligatur, » quod supra conclusum est, quia praeter summam essentiam cuncta, quae » sunt, ab eadem ex nihilo facta sunt, id est, non ex aliquo ; sicut ipsa con-

fait il était le premier, à son époque, à traiter en détail ce difficile sujet. Rien de mieux attesté : les Pères des premiers siècles enseignent d'une voix la doctrine de la création : Jean-Jacques Rousseau seul a pu rêver, en cette matière, un dissentiment entre l'Église grecque et l'Église latine [1]. Mais il faut l'avouer : l'influence des doctrines néoplatoniciennes se fit sentir chez quelques écrivains ecclésiastiques. Quelque jugement que l'on porte sur l'orthodoxie du pseudo-Denys et de Jean Scot Érigène, par exemple, il est certain que leur langage est peu correct. On peut croire leur pensée meilleure que leur style. Mais il est sûr que celui-ci, au point de vue philosophique et dogmatique, mérite le blâme. Loin d'énoncer la doctrine de la création *ex nihilo*, qu'il passe entièrement sous silence, l'Alexandrin parle la langue des Émanatistes. Plotin, dont il s'était nourri, a exercé sur lui une influence malheureuse. Malgré cela, dans les passages où il enseigne que les principes des choses et les choses mêmes viennent de la Beauté suprême et préexistent en elle comme les nombres dans l'unité; qu'elle est l'essence de tout ce qui est, la cause de toute vie et de toute essence par la fécondité de son amour, nous ne saurions trouver, pour notre compte, que des expressions ambiguës. Rien

» clusio praecedentia convenienter consequitur, ita ex eadem conclusione
» nihil inconveniens subsequetur.

» Quamvis non inconvenienter et sine omni repugnantia, ea quae facta sunt
» a creatrice substantia, dici possint esse facta ex nihilo, eo modo quo dici
» solet dives factus ex paupere, et recepisse quis sanitatem ex aegritudine, id
» est, qui prius pauper erat nunc est dives, quod antea non erat, et qui prius
» habebat aegritudinem nunc habet sanitatem, quam antea non habebat. Hoc
» igitur modo non inconvenienter intelligi potest, si dicatur creatrix essentia
» universa fecisse de nihilo, sive quod universa per illam facta sint de nihilo,
» id est, quae prius nihil erant nunc sunt aliquid. Hac ipsa quippe voce, qua
» dicitur, quia illa fecit, sive quod ista facta sunt, intelligitur, quia cum illa
» fecit, aliquid fecit, et cum ista facta sunt, non nisi aliquid facta sunt. Sic
» enim aspicientes aliquem de valde humili fortuna, multis opibus ab aliquo
» honoribusve exaltatum, dicimus : ecce fecit ille istum de nihilo, aut factus
» est iste ab illo de nihilo, id est, iste, qui prius quasi nihilum deputabatur,
» nunc illo faciente vere aliquid existimatur. » (C. VIII.)

[1] Voir le complet développement de la Doctrine catholique à cet égard dans le Traité *de Deo creatore* du R. P. Franzelin, S.-J.

n'y accuse avec certitude l'émanatisme néoplatonicien. Dans le texte qu'à bon droit les critiques ont signalé comme le plus suspect [1], nous lisons que les choses subsistent en Dieu *d'une façon incompréhensible,* sans *diversité,* sans *pluralité.* — Cela seul atténue beaucoup le reste, surtout si l'on tient compte des enseignements de Denys sur les Idées divines, sur l'essence de Dieu et l'égalité substantielle des trois personnes de la Sainte Trinité. Il n'en est pas moins vrai que le pseudo-Aréopagite parlait beaucoup plus comme un Alexandrin que comme un Docteur chrétien. — Jean Scot Érigène, son traducteur, dont les écrits devaient être connus d'Anselme, renchérit sur la diction vague et défectueuse de Denys. Il approuve celui-ci pour avoir dit que la Cause première seule subsiste réellement. Il appelle Dieu le principe, le milieu et le terme des choses, puisque l'univers est de lui, qu'il persiste en lui et qu'il tend vers cette fin universelle. Mais en outre, pour lui, la création est l'évolution de la substance divine, par l'intermédiaire des principes ou des causes originelles, c'est-à-dire, des idées. Cette émanation est éternelle, bien qu'elle se révèle dans le temps et l'espace. Tous les phénomènes subsistent dans l'essence même de Dieu. Aussi ne devons-nous pas concevoir Dieu et le monde comme deux êtres distincts : ils ne sont qu'une seule et même chose. Le monde subsiste en Dieu ; et dans le monde, Dieu est réalisé d'une manière ineffable : l'Invisible s'y rend visible, l'Incompréhensible s'y fait comprendre, le Voilé s'y découvre, l'Inconnu s'y révèle, celui qui n'a ni forme, ni apparence y apparaît. L'Essence absolue s'épand dans les créatures comme l'eau de la fontaine dans le fleuve ; au sein des multiples transformations des êtres, elle retrouve sa source primitive et rentre dans l'abîme, d'où elle est sortie un jour dans son mystérieux essor. Scot veut que cette doctrine ne soit pas seulement applicable au mystère de l'Incarnation, mais aussi à la Très-Sainte Trinité. Il affirme que sa théorie est tirée de Denys et de son commentateur Maxime [2]. Les meilleurs critiques ont jugé qu'il

[1] Voir l'Étude de M. le Dr Laforêt sur Denys, *Revue de Louvain*, mars 1868.

[2] *De div. nat.*, I, c. XII ; Cf. M. Hauréau, t. I, pp. 158 et suiv.

a singulièrement exagéré les vues de Denys. Mais il est à peine besoin de revendiquer la supériorité d'Anselme sur les deux écrivains, qui avant lui s'étaient préoccupés du rapport originel des êtres avec la Cause suprême. Augustin son maître a certes pu contribuer à le préserver des aberrations de ses devanciers. Je ne puis m'empêcher de traduire ici le passage du Docteur d'Hippone, que l'on se rappelle involontairement à la lecture du Monologue. Expliquant les paroles de l'Épître aux Romains : *Omnia ex ipso, et per ipsum, et in ipso,* Augustin écrit : « Le souverain Bien, en dehors duquel il n'en est point de plus grand, est Dieu. Il est donc le Bien immuable et immortel. Tous les autres biens sont *par lui* quoiqu'ils ne soient pas *de lui.* Par ces dernières paroles j'entends *l'essence de Dieu elle-même.* — *Par lui* sont les êtres, qui ne sont point ce qu'il est en soi. Par conséquent, si lui seul est immuable, les autres êtres sont changeants : il les a créés du néant. Il est si puissant qu'il peut créer de rien, c'est-à-dire faire de bonnes choses, de grandes choses et de petites choses *de ce qui n'existe en aucune façon.* Ce que dit l'Écriture : « Il a dit et les choses furent faites » prouve à l'évidence que ce n'est point de sa substance qu'il les engendra, mais par sa parole et par son ordre. S'il ne les fit point de sa substance, il les tira du néant. Car il n'y avait aucune matière d'où il aurait pu les extraire. Aussi l'Apôtre dit-il très-justement : *Toutes choses sont de lui, par lui, en lui.* — *Ex ipso :* cela ne signifie point de sa substance (*de ipso*). De fait ce qui serait de sa substance pourrait être nommé *ex ipso.* Mais ce qui est *par lui* (*ex ipso*) ne peut signifier *de lui* (*de ipso*). Par lui (*ex ipso*) sont le ciel et la terre parce qu'il les a créés : non *de lui* (*de ipso*), car il ne les a pas tirés de sa substance [1]. » — Augustin, l'illustre défenseur de l'Exemplarisme, maintient en même temps, avec un soin jaloux, la doctrine de la création. Malgré la vive admiration que lui causaient les doctrines des Néoplatoniciens, il se prononce de la façon la plus explicite contre l'émanatisme. Un tel maître fut pour Anselme un inestimable secours.

Mais il lui revient le mérite éclatant d'avoir exposé le concept

[1] *De nat. conc. adv. Manich*, c. I et XXVII.

rationnel de la création avec une telle précision que l'on devra méconnaître ses explications pour l'attaquer désormais. — On sait combien M. Cousin a triomphé de la formule orthodoxe de la création *ex nihilo.* Hégel tirait l'*être du néant*, au nom d'un principe indéterminé qui s'appelle l'*éternel devenir.* Tout récemment M. von Hartmann a posé « l'Inconscient », le Principe universel, comme une *pure virtualité,* dont les phénomènes sont les actes successifs, engendrés par une volonté désordonnée et par une idée harmonique. Ce néant, cette puissance indéterminée, germe de toute réalité, ne se conçoivent pas. Mais quelle extravagance y a-t-il à se représenter, avec Anselme et les Docteurs, l'opération externe de l'Absolu comme l'acte dans lequel, par sa vertu infiniment simple et féconde, il réalise en dehors de lui, selon leur essence propre, les types divers où sa raison reconnaît les imitations lointaines de ses perfections? — A mesure que son art devient plus parfait, l'artiste ne simplifie-t-il pas ses procédés d'exécution? A mesure qu'il s'affranchit des instruments extérieurs, son œuvre devient plus intime, plus personnelle. L'Être en lequel il n'y a que causalité pure ne peut conserver, dans ses opérations, aucune dépendance. Dans son *principe*, son acte est intelligence et volonté libre : dans son *effet,* production absolue, donc création, et *création ex nihilo.* Le dogme de la Foi est la meilleure formule : il n'en est point de plus philosophique.

Voulons-nous être convaincus de l'assertion? Écoutons M. Cousin exposer la conception qu'il préfère à la croyance chrétienne. « Qu'est-ce que la création, qu'est-ce que créer, se demande l'illustre fondateur de l'école éclectique, avec sa délicate ironie? — Voulez-vous la définition vulgaire? La voici : Créer, c'est faire quelque chose de rien : c'est tirer du néant; et il faut que cette définition paraisse bien satisfaisante, puisqu'on la répète encore aujourd'hui presque partout. Or Leucippe, Épicure, Lucrèce, Bayle, Spinoza démontrent trop aisément que de rien on ne tire rien, que du néant rien ne peut sortir; d'où il suit que la création est impossible. » La conclusion est raide. Nous savons ce que M. Cousin, pour sa part, entendait par création. « En prenant une tout autre route, dit-il, nous arriverons à un tout autre résultat:

que la création est, je ne dis pas *possible*, mais nécessaire... Dieu, s'il est une cause peut créer; et s'il est une cause absolue, il ne peut pas ne pas créer; et en créant l'univers, il ne le tire pas du néant; il le tire de lui-même, de cette puissance de création et de causation dont nous autres, faibles hommes, nous possédons une portion, et toute la différence de notre création à celle de Dieu est la différence générale de Dieu à l'homme, la différence de la cause absolue à la cause relative [1]. » Les lignes que nous venons de rapporter contiennent un exemple frappant de la puissance de l'esprit de système, sur l'une des plus fermes et des plus nobles intelligences de ce temps-ci. Je n'oserais croire que M. Cousin ait cru que, d'après Anselme et l'Église, le néant soit une entité positive d'où le monde ait été extrait par Dieu, comme le rêvait Leucippe. Il est revenu d'ailleurs sur ce préjugé, qui intéressait sa gloire. Ce qui est patent, c'est que cette « autre route » dont parlait le savant académicien n'est que la première, et selon lui la mauvaise route, prise à rebours. M. Cousin tient la création pour un effet de la causation pure, absolue. Et Anselme? Et nous tous, chrétiens? Enseignons-nous autre chose? — Mais on voulait arriver à une « création nécessaire, » pas seulement *possible !* Cela changeait un peu la question. Eh quoi! *créer de rien* est absurde! Voici bien autre chose : *L'Absolu* nécessairement dépendant du temps et de l'espace, et de la matière et de ses déterminations, et de la pensée, des erreurs et des défaillances de l'homme! Je n'éprouve aucune humiliation d'esprit à croire à la création substantielle. Mais je ne conçois pas du tout l'opération nécessaire de l'Infini *au dehors de lui*. La théorie du moine du XI^e siècle, la définition « vulgaire » sourient autrement à ma raison!

Malgré ses mérites éminents de traducteur et de critique de S. Anselme, M. Bouchitté n'a pas mieux voulu entendre ce point. Il applaudit à la façon dont Anselme montre que la Cause absolue ne relève que d'elle-même. Mais il estime que la création d'êtres distincts de Dieu emporte une imperfec-

[1] *Hist. de la phil.*, 1841, V^e leçon.

tion dans le fond même de sa substance. « La nature suprême, dit-il, n'a pu donner naissance à quelque chose d'inférieur à elle-même, sans partager cette infériorité; et d'un autre côté, l'être inférieur qui ne peut manquer d'être altéré, supposerait que cette altération existe jusque dans l'essence suprême qui lui aurait donné l'être; ce qui est impossible. Saint Anselme qui vient de montrer avec clarté que la substance suprême n'avait pu naître de rien, et qui a fait ressortir habilement l'absurdité d'une semblable condition, s'arrête ici impuissant devant un problème analogue. La subtilité malheureuse de son argumentation aboutit à une difficulté plus grande, à la *création ex nihilo*, qu'il interprète d'une manière plus malencontreuse encore [1]. » M. Bouchitté croit qu'Anselme n'eût pas éprouvé cet embarras, s'il se fût souvenu de l'explication de J. Scot Erigène. Celui-ci interprète le *néant* d'où émergea l'univers d'une manière mystique; il le prend pour l'omnipotente causalité de l'Absolu, aussi inaccessible au regard de l'homme que si de fait elle était un pur néant. — Voilà des raffinements. Nous n'avons pas à rechercher s'il y a une vue panthéistique sous la formule d'Erigène : M. Bouchitté repousse le panthéisme. Mais, ce péril écarté, la doctrine d'Anselme qu'on taxe d'impuissance et celle de Scot sont tellement similaires sur ce point, qu'il est impossible d'y apercevoir une différence. En énonçant la création *ex nihilo*, on envisage le *terme créé* (terminus ad quem) : en rapportant le monde à la simple activité de la première cause, on considère le principe formateur (le *terminus a quo*). A ce dernier point de vue, nous pouvons appeler la création *une théophanie*, selon le langage de Scot, vanté par M. Rousselot, équivoque et suspect pour d'autres. Le censeur d'Anselme ajoute que celui-ci rentre dans une voie plus sûre en se rejetant sur *la préexistence idéale des Créatures dans le Verbe*. Certes le S. Docteur a tenu cette doctrine. Mais qu'on nomme un seul défenseur de la Création substantielle qui en cela ne l'ait pas imité ! Qui s'avisa jamais, parmi les chrétiens, de méconnaitre l'existence transcendante de l'univers dans la

[1] Ouv. cité, XXVII.

pensée de Dieu ? Il est trop commode d'argumenter contre Anselme et contre les dogmes, en mutilant leur notion ! La « difficulté » dont nous a entretenu M. Bouchitté, et qui, par euphémisme, signifiait l'absurdité de la Création, n'existe que dans l'imagination de ceux qui en défigurent la signification véritable.

Je sais que le savant critique a proposé une autre explication, à la place de celle d'Anselme. Il convient de la soumettre au jugement du lecteur : « Il est contradictoire, assure-t-il, de dire que l'univers a été fait de rien, à moins que l'on ne regarde comme *rien* la volonté et l'intelligence divines Tout le monde est d'accord sur ce point. Mais la création *ex nihilo* a été imaginée contre les panthéistes qui, s'appuyant sur le principe que rien ne saurait être fait de rien, prétendent identifier la substance du monde avec celle de Dieu même. Nous reconnaissons que le panthéisme se trompe; mais cette erreur n'empêche pas celle que renferme la création *ex nihilo,* et l'on voit ici que toute la peine que s'est donnée Anselme pour la bien établir, n'a d'autre résultat, si ce n'est que *rien* veut dire ici quelque chose. Le seul sens raisonnable que l'on puisse attacher au mot *nihilo* dans ce cas, c'est d'y voir l'expression du principe absolu et *non manifesté.* Ainsi le monde est pour nous créé de rien, c'est à dire qu'il est la manifestation partielle du principe insondable qui lui a donné l'être. Il est né de rien, c'est-à-dire que la cause qui lui a donné l'être nous reste inconnue, malgré son œuvre, et reste pour nous, quant à son contenu, comme si elle n'était pas [1]. » — Disons-le sans détour : tout ce qu'il y a de vrai dans ce passage, Anselme l'a écrit, l'a prouvé. Nul plus que lui n'a insisté sur l'existence *idéale* des choses dans le Verbe *Créateur.* Nul aussi n'a mieux caractérisé l'abîme qui sépare les êtres finis et changeants de la Cause immuable, infinie. Mais est-il exact d'ajouter que, malgré la création, « la Cause du monde reste pour nous inconnue, *comme si elle n'était pas ?* » L'artiste qui vous révèle quelques-unes des œuvres de son génie ne vous le découvre pas en entier; on l'accorde. Ne le connaissez-vous pas mieux néan-

[1] Ouv. cité, pp. 39 et suivantes.

moins, à la vue de ses productions ? Pour parler avec M. Bouchitté, « est-il pour vous, comme s'il n'était pas ? » Mais l'artiste divin est l'*Infinie intelligence !* Soit ! Ne déplaçons pas la question. On nous concède qu'elle s'est partiellement manifestée dans la création. Nous en avons donc une certaine connaissance, n'importe le degré, n'importe l'abîme sans fond et sans rivages que recouvriront d'éternelles ténèbres. En toute sincérité, il semble que la création *ex nihilo,* expliquée par Anselme, est incomparablement plus rationnelle que l'amendement qu'on voudrait lui substituer.

A la suite des considérations sur l'acte créateur, Anselme établit le rapport idéal des êtres créés avec leur Cause éternelle. Nous avons exposé en son lieu cette partie importante de la Métaphysique du S. Docteur.

L'existence de l'univers, contingent et fini, n'est qu'une création continuée. Les créatures, enseigne Anselme, sont maintenues dans l'existence et dans leurs opérations propres par son incessant concours. Ce qui a été fait par un autre, ce qui ne possède pas en soi la raison de son existence, ne saurait non plus la conserver par sa propre vertu.

L'activité de la créature implique l'incessante assistance du premier Moteur : celui-ci les meut à leurs actes, non d'une manière uniforme et mécanique, mais selon leurs diverses natures, comme nous le dira un jour S. Thomas [1]. Avant lui, Anselme a mis en relief ce point capital de la théorie du concours de Dieu avec les créatures. Il la résume en cette formule : « Il est nécessaire que de même que rien n'a été fait si ce n'est par l'essence créatrice se rendant présente à son œuvre, de même rien ne se conserve que par la *présence conservatrice* de cette même essence... Il suit de là que la Cause absolue soutient et excède, enferme et pénètre tous les autres êtres. C'est elle qui, dans un sens vrai, existe en tout et partout. — Par elle et en elle subsistent toutes les créatures [2]. »

[1] Cf. *De Malo*, q. VI, a. 1. ad. 3. — « Deus movet voluntatem immutabiliter, » sed ob naturam voluntatis motae quae indifferenter se habet ad diversa, » non inducitur necessitas, sed libertas. »

[2] *Mon.*, c. XII, XIII.

Ici encore Anselme s'inspire d'Augustin : « A chaque jour, écrit ce Père, Dieu continue de régir ce qu'il a créé, afin que ses créatures ne perdent pas leurs mouvements naturels, par lesquels elles agissent et vivent; afin qu'elles puissent être véritablement des principes actifs, et que chacune, selon son espèce, persévère dans son essence et ne retombe point dans le néant, comme ce serait le cas si elles étaient abandonnées par cet esprit de sagesse qui dispose toutes choses avec suavité [1]. »

L'absolue et indépendante causalité du premier Être a été mise en lumière par les considérations précédentes. Anselme essaye maintenant de pénétrer plus avant dans cette analyse de la première Essence. Il sait que les perfections que nous trouvons aux êtres créés sont à une infinie distance d'elle. Il veut néanmoins rechercher en quel sens il est permis de les lui attribuer. Cette partie de la synthèse théologique d'Anselme est d'une grande élévation; elle constitue l'une des plus remarquables parties de la théodicée scolastique.

Avant tout, écrit le S. Docteur, il est clair qu'aucune formule basée sur la perfection des créatures ne peut énoncer, à proprement parler, la nature de l'Absolu, comme c'est le cas, par exemple, de la phrase : Dieu est plus grand que tout ce qu'il a fait; et d'autres propositions pareilles. Supposons que l'univers créé n'existe point, ce rapport de la première Cause à ses œuvres serait supprimé du même coup. En serait-elle moins parfaite cependant ? Évidemment non, puisque son excellence ne dépend absolument que d'elle-même, et nullement d'aucun être créé [2].

A coup sûr cette manière de représenter la première Essence,

[1] *In Joh.*, c. V, v. 17. — Cf. *De Genesi ad litter.*, c. IV; XII.

[2] « Itaque de relativis quidem nulli dubium, quia nullum eorum substantiale est illi de quo relative dicitur. Quare, si quid de summa natura dicitur relative, non est ejus significativum substantiae. Unde hoc ipsum, quod summa omnium, sive major omnibus quae ab illa facta sunt, seu aliud aliquid similiter relative dici potest, manifestum est quoniam non ejus naturalem designat essentiam. Si enim nulla earum rerum umquam esset, quarum relatione summa et major dicitur, ipsa nec summa nec major intelligeretur, nec tamen idcirco minus bona esset, aut essentialis suae magnitudinis in aliquo detrimentum pateretur. » (C. XV.)

est bien différente de celle des Panthéistes. Pour ceux-ci Dieu n'est actualisé qu'à condition de devenir relatif; il vit dans l'animal, il acquiert la conscience de soi dans l'homme. En un mot, la réalité concrète de l'Infini est le terme de son identification progressive avec les êtres et les phénomènes du monde. La façon de concevoir l'Absolu sous le symbole de la Cause transcendante, possédant en soi même le principe complet de son existence, de sa vie et de sa personnalité, paraît autrement conforme à la raison.

C'est insister peut-être à l'excès sur le panthéisme. Nos devanciers nous y ont obligé. L'on sait que parmi les nombreuses accusations dont on a accablé les Docteurs scolastiques, celle d'avoir donné dans ce système est l'une des plus graves. Anselme a été jugé diversement sous ce rapport. Parlant précisément de la question qui nous occupe, M. Hauréau s'explique sur le Docteur du Bec avec une franchise digne d'un si pénétrant écrivain. « Son langage, dit-il, repousse tout soupçon de panthéisme. » Nous savons qu'il n'y a rien d'exagéré dans ce jugement. Il n'en est pas tout à fait de même de M. Xavier Rousselot. Sans doute, dans l'étude qu'il consacre à S. Anselme, ce savant affirme « qu'on aurait grand tort de croire qu'il cherche à lancer contre sa doctrine une accusation de panthéisme. » Mais il faut bien cependant qu'Anselme ait penché très-fort de ce côté, si nous en croyons M. Rousselot. La doctrine d'Anselme, assure M. Rousselot, c'est l'Unité de l'être. Or, « cette unité est pour lui la réalité. » Le vrai c'est ce qui est; et tout ce qui est, est bien. *Est igitur veritas in omnium quae sunt essentia. Omne quod est, recte est.* Donc *le Vrai* et *le Bien* sont identiques et ne forment qu'une seule et même chose; d'où il suit encore que, au point de vue ontologique, le mal n'est pas, c'est une pure négation. Les êtres ou les individus sont des parties de l'être, comme les vérités particulières sont des parties de la Vérité. — M. Rousselot rapproche de ces pensées la doctrine de Scot Erigène, où il tient que le Bien et le Vrai sont des réalités substantielles. Il en conclut que le Docteur normand n'a été que le continuateur habile du moine Irlandais [1]. Dans son

[1] Ouv. cité, p. 255.

premier ouvrage aussi bien que dans son dernier, continue M. Rousselot, il ne se soucie que d'une chose, c'est d'établir la Vérité une, réelle, ontologique, la réalité qui est en même temps la substance et la perfection infinie, communiquant la vie à toutes les choses particulières. Deux pages plus loin, M. Rousselot appelle cette vue fondamentale de la philosophie d'Anselme la doctrine de l'unité de substance.

Après cela, le lecteur jugera de l'absolution de panthéisme octroyée à Anselme par son juge. N'est-il pas vrai que ces insinuations présentent deux inconvénients graves ? Elles échouent devant la clarté indiscutable des textes et tout l'ensemble de la théodicée d'Anselme; en outre elles sont conçues dans un sens tellement vague que nous avouons n'y comprendre que très-peu de chose. Quoi ! l'on constate des degrés dans la perfection des êtres de l'univers; de leur contingence l'esprit s'élève à la Perfection en soi, à la Cause absolue. On met en lumière le rapport constant de la Vérité et de la Bonté avec l'Être considéré sous la forme la plus générale. On montre enfin que les êtres multiples qui remplissent la nature ne doivent leur réalité qu'à la causalité de l'Essence première... Mais de bonne foi, est-ce que pour cela l'on songe à admettre le dogme de l'*unité de substance* dans le sens de Spinoza ? N'est-ce pas, au contraire, le commun procédé de tous les Docteurs orthodoxes, si soucieux de maintenir entre les créatures et Dieu une distinction essentielle ? C'est ainsi que M. Hauréau lui-même a interprété Anselme. « Les phrases extraites par M. Rousselot du *Dialogue sur la Vérité,* dit-il, signifient que S. Anselme est avant tout curieux d'établir la nécessité d'une substance unique, suprême, souverainement grande, et souverainement bonne. Mais cette définition est celle de la substance séparée, et non pas de l'univers. Quant à ce principe interne des choses qui, suivant les termes du *Monologium*, subsiste en chacune et dans toutes, c'est la *vie;* ce n'est pas la cause de la vie, *ce n'est pas Dieu*... C'est l'unité théologique et non pas l'unité ontologique que S. Anselme recherche et prétend démontrer [1]. »

[1] Ouv. cité, p. 200.

A quiconque a lu notre Docteur, les explications du lauréat de l'Institut de France paraîtront autrement sérieuses que celles de M. Rousselot. Au fond, les Docteurs sont tous d'accord avec Anselme. Mais il serait inepte de les juger sur la foi de quelques expressions isolées. Alain de Lille, ce mystique si élevé, dans son curieux livre l'*Anti-Claudianus,* est rempli d'expressions qui, prises à la lettre, pourraient paraître panthéistes. Cela ne l'empêche pas de formuler en même temps le dogme de la création *ex nihilo,* et d'affirmer que Dieu est présent à tous les êtres créés en tant qu'il est leur Cause, mais non comme leur substance. Si la critique de M. Rousselot pouvait être accueillie, les Victorins, Albert le Grand, Thomas d'Aquin lui-même seraient des Alexandrins. Le Docteur angélique va jusqu'à appeler *émanation* l'apparition originelle des créatures dans le monde de la réalité. Tous ces maîtres signalent l'éclatante transcendance de la Cause première par delà toutes les substances relatives. S. Thomas la déduit nommément de sa qualité de Principe et de Créateur des êtres finis, de l'ineffable actualité du premier Moteur opposée à la passivité de la matière première, fond commun des choses. Il affirme que le rapport de communication qu'il faut reconnaître entre Dieu et le monde, ne doit pas être entendu de l'essence, mais uniquement de la ressemblance ; il affirme, pour son compte, que c'est là tout ce qu'a voulu dire le pseudo-Denys. Il exclut toute identité essentielle entre le Créateur et la créature : ils sont, dit-il, de *genres* totalement distincts, et ne peuvent, pour cette raison, être l'objet d'une stricte proportion mutuelle. Ce n'est pas seulement le système de l'identité absolue qui est rejeté en ces passages de l'Ange de l'École. Il s'y prononce en outre contre la doctrine que le Dr Gunther a récemment mise à sa charge, et que ce savant nomme le *semi-panthéisme,* parce qu'elle tient qu'entre l'Esprit infini et les substances spirituelles, il n'y a qu'une différence de degré ou de perfection et non une distinction d'essence [1].

[1] Voir sur ce point KLEUTGEN, *Phil. der Vorzeit*, III, pp. 928 et suiv., et l'excellente étude sur la *scolastique* du Dr Mattès dans le *Dict. théol* de Welte et Wetzer.

Ce qui nous importe, c'est qu'Anselme, de l'aveu même de l'École éclectique, défendit, dès l'aurore du moyen âge, les mêmes idées.

Qui ne sait qu'en philosophie, en métaphysique surtout, ce sont bien souvent les nuances qui font la vérité et l'erreur des théories? Voici un penseur moderne qui a vécu au temps de Schelling et d'Hégel. Cet homme fera sagement s'il se garde d'une phraséologie qui pourrait créer à ses doctrines une apparente affinité avec la philosophie de l'identité. L'ira-t-on cependant soupçonner de panthéisme sur cela seul que quelques-unes de ses expressions se rapprochent du langage de ces maîtres? Ce serait du fanatisme! En voici un exemple très-curieux : M. Bouchitté ne veut pas du panthéisme. Qu'on lise les pages finales de son introduction, si belle à beaucoup d'égards, à la traduction du *Monologue :* il y a là des phrases qui se rapprochent de l'émanatisme jusqu'à en devenir tout à fait inexactes ; celle-ci par exemple : « L'Être ou la substance de l'univers, et avec elle les formes innombrables qu'il revêt ne peuvent être conçues que comme émanations passagères et de l'Être absolu et éternel, et des formes analogues qui sont ses attributs absolus et éternels comme lui. » Ce n'est pas nous qui, sur la foi de ces lignes, nous récrierons contre le panthéisme de M. Bouchitté ! Mais l'on peut trouver surprenant qu'à certains moments M. de Rémusat lui-même se préoccupe si fort, dans son exposition de la philosophie d'Anselme, de « passages isolés, » qui se plient à de dangereuses interprétations! L'effroi que cause au critique français la théorie d'Anselme sur le concours de l'Être absolu avec les Causes secondes est quelque peu excessif. « De là, s'écrie-t-il, cette conséquence que là où Dieu n'est pas, il n'y a rien. Dieu est donc le principe immanent des choses; et survient aussitôt le danger de diviniser les choses. En bonne foi, est-il possible de dire formellement que l'Essence suprême est en tout (*in omnibus*); que tout est d'elle, par elle et en elle (*de illa, et per illam, et in illa*) sans confondre le Créateur avec la création?... C'est qu'il y a un point dangereux où, peut-être par l'imperfection nécessaire du langage, la théologie la plus orthodoxe touche au Spinozisme. Mettons du moins en regard du principe de la création continuée les mots de Platon : « L'auteur du monde estime qu'il vaudrait mieux que son ouvrage se suffît à lui-même que d'avoir besoin de secours étranger [1]. » Nous concevons fort bien, pour notre part, comment la cause seconde appelée à l'existence par la libre volonté du Créateur ait besoin pour s'y maintenir de son persistant concours : elle est distincte de lui par le fait de son origine ou, ce qui revient au même, par sa nature finie ; pourquoi se confondrait-elle avec ce grand Être, sur ce motif qu'il la soutient de son énergie toujours active ? Anselme ne tombe pas dans le Spinozisme, ce semble, pour enseigner la doctrine du concours. Mais son langage s'en rapproche, dit-on ! Qu'importe qu'il s'en rapproche, s'il ne l'exprime pas ! Ce sont les idées qui font les doctrines, non les apparences. A côté des paroles de Platon qu'on nous vante, citons celles de S. Paul : « C'est en Dieu que nous vivons, que nous nous mouvons et que nous existons. » Mais laissons une bonne fois en dehors de la critique une exégèse intolérante ! Que la lettre se taise devant l'esprit, et les textes isolés devant l'ensemble !

Quels sont les attributs positifs que nous pouvons attribuer à Dieu ? Ce sont ceux-là qui renferment une véritable perfection. Il faut bien entendre cela. Considérée en soi, toute réalité est bonne. Un sage, dit Anselme, ne vaut-il pas mieux qu'un homme qui n'est pas doué de cette qualité, quoiqu'il puisse arriver qu'un juste dépourvu de science soit plus recommandable qu'un sage pervers ? — Mais si l'on envisage les qualités d'une manière plus générale, on s'aperçoit à l'instant qu'il y en a dont la présence emporte *la négation d'une perfection supérieure,* tandis que les autres, au contraire, n'impliquent par elles-mêmes aucune imperfection. Ce sont celles-ci que les Grecs appelaient τέλεια κατηγορήματα. La matérialité de l'être, par exemple, suppose la négation de l'intelligence. Mais la vie, l'intelligence, la volonté libre ne suggèrent à l'esprit qu'une perfection simple, sans aucune immixtion de défaut, sans négation d'une excellence supérieure quelconque.

[1] Ouv. cité, p. 502. — S. Anselme dit que toutes choses sont d'elles (*ex illa, non de illa*), ce qui est différent.

Or, Dieu est l'Être au-dessus duquel on n'en peut penser de plus grand. Dès lors tous les attributs de la deuxième catégorie lui conviennent, mais d'une manière propre et transcendante. Il est donc permis de lui attribuer la vie, la sagesse, la puissance, la vérité, la justice, la félicité, l'éternité et toute autre qualité meilleure que ce qui n'est pas elle-même [1].

On peut dire que dans sa majeure partie, le Prosloge n'est que le développement de cette conception. Contentons-nous d'en indiquer les principaux traits. Sous forme de prière ou de soliloque et dans une suite d'antithèses, Anselme montre que Dieu, bien qu'il ne soit pas corporel, est néanmoins sensible, en ce sens qu'il connaît les choses physiques d'une manière transcendante [2]. Il est tout-puissant, bien qu'il ne puisse rien qui soit contradictoire, ou opposé à sa propre excellence et à la nature des choses:

[1] « Et quidem si quis singula diligenter intueatur, quidquid est praeter » relativa, aut tale est ut ipsum omnino melius sit quam non ipsum, aut tale » ut non ipsum in aliquo melius sit quam ipsum. Ipsum autem et non ipsum » non aliud hic intelligo, quam verum non verum, corpus non corpus, et his » similia. Melius quidem est omnino aliquid quam non ipsum, ut sapiens » quam non sapiens, id est, melius est sapiens quam non sapiens. Quamvis » enim justus non sapiens melior videatur quam non justus sapiens, non » tamen est melius simpliciter non sapiens quam sapiens; omne quippe non » sapiens simpliciter, in quantum non sapiens, est minus quam sapiens, quia » omne non sapiens melius esset, si esset sapiens. Similiter omnino melius est » verum quam non ipsum, id est, quam non verum, et justum quam non justum, et vivit quam non vivit. Melius autem est in aliquo non ipsum quam » ipsum, ut non aurum quam aurum. Nam melius est homini esse non aurum » quam aurum; quamvis forsitan alicui melius esset aurum esse quam non » aurum, ut plumbo. Cum enim utrumque, scilicet homo et plumbum, sit » non aurum, tanto melius aliquid est homo quam aurum, quanto inferioris » esset naturae si esset aurum, et plumbum tanto vilius est, quanto preciosius esset si aurum esset.

» Cum igitur quidquid aliud est, si singula despiciantur, aut ipsum sit » melius quam non ipsum, aut non ipsum in aliquo sit melius quam ipsum, » sicut nefas est putare quod substantia supremae naturae sit aliquid quo » melius sit aliquo modo non ipsum, sic necesse est ut sit quidquid omnino » melius est quam non ipsum. Illa enim sola est qua penitus nihil est melius, » et quae melior est omnibus quae non sunt quod ipsa est. » (C. XV.)

[2] C. VI.

ce qui ne dénote pas l'impuissance, comme notre infirme langage pourrait le faire supposer, mais la suprême perfection [1]. Il est miséricordieux puisqu'il exauce nos prières, et impassible, car nos misères ne sauraient altérer son immuable félicité [2]. Il est juste et en même temps sa bonté est si grande qu'elle pénètre sa justice, puisque les méchants ne sont pas privés de ses bienfaits; il va jusqu'à rendre bons par la grâce non-seulement ceux qui ne le sont pas, mais ceux-là même qui sont positivement mauvais. Et cette bonté ne peut qu'être la plus haute justice. Qui oserait dire que Dieu pardonne injustement? D'autre part, néanmoins, c'est encore par justice qu'il punit les coupables; c'est en cela que consiste la sanction des œuvres [3].

Il y a plus, poursuit Anselme : dans leur acception ordinaire, les qualités impliquent la *participation* de l'être dont on les affirme à leur excellence respective. Cela suffit pour montrer qu'on les énonce d'une manière bien différente de la Cause absolue qui a *de soi-même* toute sa perfection. De là il suit que lorsqu'on dit, par exemple, qu'elle est juste par la justice, cela signifie qu'elle est juste par elle-même, puisqu'elle est la justice substantielle. Les qualités n'expriment pas autre chose que son essence : *ce qu'elle est, non pas ce qu'elle a* [4]. Dieu, comme Anselme le dit dans le Prosloge, EST la vie même dans laquelle il vit; il EST la sagesse par laquelle il est sage, la bonté par laquelle il est bon (*Prosl.* CXII). C'est d'une manière ineffable et transcendante que l'Être suprême est l'ordre, l'harmonie, la beauté (XVII). Et ces qualités qu'on peut énoncer de la Cause absolue, parce qu'elles ne renferment par soi aucune négation d'une excellence supérieure, elle les a infiniment, au plus haut degré (XV). D'où l'on voit que l'Absolu n'est que la synthèse transcendante de ces perfections simples de l'être subsistant par lui-même dans une immuable unité. Dieu est la vie, la sagesse, l'éternité, l'ensemble de tous les biens. Il les a, non pas comme un tout composé de ces perfec-

[1] C. VII.
[2] C. VIII.
[3] C. IX-XII. — Cf. D'AGUIRRE, disp. XXIII, sect. II.
[4] *Mon.*, XVI.

tions, mais dans une si parfaite simplicité, qu'elles ne diffèrent en rien de sa nature : de sorte que tous les attributs sont en lui identiques (XVII-XVIII). Seul l'Absolu existe ainsi d'une manière immuable, dans l'unité de son être infini [1] (XVIII-XXII).

Nous avons signalé déjà comme l'un des plus nobles mérites de la philosophie d'Anselme, le développement qu'il a donné au caractère *absolu* de la Divinité [2]. Il a montré en elle l'absolue Vérité dont dépendent toutes les vérités relatives ou contingentes (*Dial. de veritate*); l'absolue Idée et l'absolue Causalité : il la représente en outre comme l'*absolue Perfection* possédant d'une manière immanente et simultanée, tous les attributs de l'Être infini. Le savant d'Aguirre rappelle que toute la doctrine de l'aséité divine, considérée comme la note fondamentale de l'être divin, se trouve en germe dans les enseignements d'Anselme. Il veut, dit-il, que toute perfection simple soit attribuée à Dieu, au plus haut degré. Or, la perfection par excellence est bien celle de l'aséité; Anselme lui-même résout chacune des excellences divines dans leur possession autonome et complète. Il reproduit encore en cela le sentiment de ses maîtres de prédilection. « L'Être par soi, avait dit le faux-Denis, est antérieur (logiquement) à la vie elle-même, à la sagesse elle-même qui participent excellemment de l'être. Aussi, c'est en tant qu'*Être* que Dieu est surtout glo-

[1] « Es ist das wesen des Absoluten eben dies, durch sich selbst zu sein, nun so ist es auch unmittelbar, was es ist, und so kann es sich zu nichts machen, was es nicht schon wäre, sondern einfach nur sein. In dem durchsichselbst-sein liegt die vollkommenste Identität mit sich, welche ieden Gedanken aan ein werden auschliesst Aber wohl, muss man sagen, kann das absolute nach aussen causal, causatif sich verhalten. Denn sein kann es allerdings nur es selbst, bewirken aber, hervorbringen, verursachen auch ein anderes; ja one dies vermögen würde es nicht einmal das absolute sein, weil es dann an diesem andern eine schranke hätte. Das sein aller andern ausser dem Absoluten ist also ein bewerktsein, causirtsein durch das Absolute zu fassen. » — Hasse, ouv. cit II, p. 190.

[2] Rappelons encore ces paroles alors si nouvelles : « Non omnino non sunt (res creatæ) quia per illum qui solus *absolute est,* de nihilo aliquid facta sunt. » *Mon.*, c. XXIX.

rieux : c'est le plus primitif de tous ses attributs [1]. » « Sans nul doute Dieu est substance, écrit S. Augustin, ou pour mieux parler, *Essence*, *οὐσια*, comme disent les Grecs... *L'Essence* a été nommée ainsi de celui qui est. Et qui donc *est* plus véritablement que celui qui a dit à son serviteur Moïse : *Je suis celui qui suis :* et tu diras aux fils d'Israël : *Celui qui est* m'a envoyé vers vous [2]! » C'est Anselme qui eut l'honneur de transmettre aux grandes écoles de l'Occident ces vues d'une si noble philosophie, et qui donnèrent naissance à des développements féconds. Nul ne s'inspira mieux d'Anselme, sous ce rapport, que S. Thomas d'Aquin. Il porta la doctrine de l'*Acte pur*, symbole par excellence de l'Absolu, à sa plus haute perfection. « L'Être divin, dit ce grand homme, n'est qu'Être. Mais pour cela, il est loin d'être privé des autres perfections : au contraire il les possède en tous genres : il les contient d'une manière éminente; en lui, elles sont *une seule et même chose ;* dans les créatures, elles subsistent dans la diversité. Voilà pourquoi en Dieu les perfections multiples se réunissent selon leur essence pure, à l'instar de celui qui, possédant dans une seule qualité la vertu de toutes les autres, aurait dans celle-là seule toutes les autres ensemble [3]. »

De la nécessité du premier Être dérivent son éternité et son immensité. — Dans le Monologue, Anselme établit avec de longs détails que Dieu n'a pu venir à l'existence dans le temps, puisqu'il est par lui-même déterminé à l'être et qu'il constitue la règle et le principe de la Vérité (C. XVIII-XIX). Intelligence absolue, activité pure, il embrasse et excède éminemment tous

[1] *De divin. Nominib.*, c. V.

[2] *De Trin.*, V, c. II.

[3] *De Ente et Essentia*, c. VI. — « Sic similiter esse divinum, quamvis sit » esse tantum, non oportet quod deficiant ei reliquae perfectiones et nobilitates, imo habet omnes perfectiones et nobilitates quae sunt in omnibus » generibus; et habet eas modo excellentiori omnibus rebus... : quia omnes » in eo sunt unum, sed in aliis diversitatem habent. Et hoc est quia omnes » illae perfectiones conveniunt sibi secundum suum esse simplex : sicut si » aliquis per unam qualitatem posset efficere operationes omnium qualitatum, » in illa una qualitate omnes qualitates haberet. »

les instants de la durée et tous les points de l'espace, sans être circonscrit par aucun d'eux, à la façon des êtres corporels (XX-XXIV), sans subir aucun changement parmi les perpétuelles vicissitudes des réalités inférieures (XXV). A une Cause si parfaite, dit Anselme, aucun nom du langage humain ne saurait convenir rigoureusement. Avec un juste discernement, néanmoins, on peut l'appeler *Substance*, parce que l'existence substantielle est la plus parfaite que nous manifeste la nature. En outre, parmi les substances, la plus élevée est l'esprit immatériel. Nous avons établi plus haut l'unité et l'incommunicabilité de sa nature. Dieu sera donc une substance spirituelle unique et autonome : en un mot, l'Être infini, vivant et personnel qu'a toujours reconnu l'humanité (XXVII).

C'est ici, on le voit, une réminiscence de l'enseignement néoplatonicien. Après Clément l'Alexandrin, après Plotin et Proclus, Augustin avait montré l'impropriété du terme de *substance* appliqué à Dieu, essence infinie et simple, inaccessible à toute modification accidentelle [1]. Le faux Denys, conformément aux principes de la théologie *négative*, tient que Dieu n'est pas substance, parce qu'il est au-dessus de toute substance, et qu'il possède en soi toute la plénitude de l'être. Scot Érigène, son traducteur, affirme à son tour qu'en raison de son incompréhensibilité essentielle, Dieu doit plutôt être nommé *Néant* que substance [2]. Avec plus de mesure que ces derniers philosophes, Anselme reprend ces idées, que S. Thomas d'Aquin développera dans sa Somme théologique, notamment dans l'admirable dissertation des *Noms de Dieu* [3].

[1] « Est tamen Deus sine dubitatione *Substantia*, vel si melius hoc appel- » latur Essentia quam Graci usiam vocant. Sed aliae quae dicuntur essentiae » sive substantiae *capiunt accidentia*, quibus in eis fiat parra vel magna vel » quantacumque mutatio : Deo autem aliquid ejusmodi *accidere* non potest, » et ideo sola est incommutabilis substantia vel Essentia quae Deus est. » — *De Trin.*, c. V, II.

[2] « (Deus) per excellentiam nihilum non immerito vocatur. » (*De Div. Nat.*, p. 127, cf. DE RÉMUSAT, p. 497.)

[3] Q. XIII.

On voit, continue Anselme, qu'à strictement estimer les choses, à l'Absolu seul convient le nom d'Être ; les créatures relatives et subordonnées sont à peine dignes de ce titre. Elles passent du néant à une existence éphémère, bornée, continuellement changeante, prête à retomber dans l'abîme originel, si la première Cause ne la conservait [1].

Arrivé à ce point de sa théodicée, S. Anselme reprend l'investigation spéculative du Verbe, et en prend occasion pour se livrer à l'examen approfondi du mystère de la Ste-Trinité, dans les limites où la raison peut pénétrer les données de la Révélation. Cette partie appartient aux théologiens : achevons l'esquisse de la théodicée rationnelle.

La suite des considérations auxquelles nous sommes jusqu'ici parvenus, dit le Docteur de Cantorbéry, s'appuie sur des arguments d'évidence scientifique. Mais toutefois cette évidence ne projette pas son éclat jusque dans les intimes secrets de l'Essence et de la vie divines. L'existence de Dieu est accessible à la démonstration ; sa nature nous reste cachée. Quoi de surprenant en cela ? Nous ne pouvons entièrement comprendre le rapport primitif de la première Cause avec les êtres distincts d'elle, et nous préten-

[1] Je ne puis m'empêcher de relever ici une distraction étrange de M. Bouchitté. Il veut que la signification attachée par Anselme à la substance soit celle de Spinoza ! (p. 102). Toute la théodicée d'Anselme, empruntée à celle d'Augustin, roule sur la *transcendance* du premier Être « qui ne se divise par aucun partage, » qui est « simplement et sous tous les rapports seul parfait, simple et absolu... » (C. XXVII, XXVIII, trad. Bouchitté.) La *substance* de Spinoza existe, il est vrai, d'une absolue nécessité, *mais* elle reçoit *intrinsèquement* les *modes*, c'est-à-dire *tous les phénomènes*, de sorte que « l'homme, par exemple, n'est qu'un mode, une affection exprimant d'une manière déterminée *la nature de Dieu.* » (*Ethica*, p. II, prop. X.) — Les *modes*, c'est-à-dire *les choses, l'univers*, dérivent fatalement de l'essence même de l'Absolu (*Ethica*, p. I, prop. I-XIV; p. II, prop. X, schol.) Dieu ne *pense* et ne *veut* que dans la raison et la volonté de l'homme. En soi, en tant que *natura naturans*, comme l'appelle Spinoza, il n'a ni intelligence, ni arbitre. (*Ibid.*, prop. XVII, schol.) — Chez Anselme, transcendance de l'absolu ; chez Spinoza, immanence et potentialité de la Substance unique, dans son éternelle évolution au dehors ; voilà deux concepts qui se ressemblent assez peu !

drions atteindre jusqu'aux profondeurs de son Être! Ce que le sage découvre de l'Essence suprême, c'est à sa lumière même qu'il le doit. Il voit Dieu, et tout ensemble il ne le voit pas; la clarté de la raison dont l'Infini est le Principe est mêlée de ténèbres. Dieu n'est que lumière, mais l'esprit de l'homme ne peut supporter son éclat, ni fixer sa splendeur. Son œil est trop infirme; il est arrêté par cette incomparable gloire (*Prosl.*, XIV). La pensée ne peut s'y reposer, trop de lumière y resplendit! (*Ib.*, XV-XVI.)

Nous n'en avons pas moins poussé aussi loin que nos forces l'ont permis, l'investigation de l'Absolu. Les conclusions auxquelles a abouti cet examen sont véritablement certaines, bien qu'elles n'apportent point à l'esprit une complète science en un aussi sublime et mystérieux sujet. Nous avons dû imiter ceux-là qui saisissent un certain côté de la vérité, sans l'égaler entièrement. Ils en parlent sans erreur, mais dans un langage analogique, imparfait. Nous atteindrons à une plus parfaite connaissance de ce souverain Être, selon que nous prendrons pour échelle de comparaison, une nature créée plus excellente. — C'est par l'intermédiaire de l'âme humaine qu'on parvient le mieux à connaître la Divinité (*Mon.*, LXVI-LXVII). Non-seulement l'âme est le miroir de Dieu parce qu'elle peut se souvenir, comprendre et vouloir, et qu'elle reflète en soi l'image de l'adorable Trinité : en outre, il y a en elle, comme son signe caractéristique, la faculté d'aspirer au souverain Bien, de le comprendre et de l'aimer. Elle est le reflet lumineux de l'éternelle Intelligence, sa plus fidèle copie, et le plus sûr degré pour s'élever jusqu'à elle (*Ib.*, LXVIII).

Anselme, avant de terminer son examen rationnel de la suprême Essence, insiste sur les conséquences pratiques de cette étude. Nous savons, dit-il, que l'âme doit au suprême Créateur son existence, sa nature et ses énergies. Or, le propre de l'intelligence n'est-ce pas de discerner la souveraine excellence de tous les autres biens? Le devoir de la libre volonté ne consiste-t-il point à se porter vers cette perfection sans limites? N'est-ce point dans ce but que l'intelligence et la volonté nous sont communiquées? Mais il n'est pas possible que l'être intelligent recherche par l'amour le souverain

Bien, sans qu'il s'en souvienne et le comprenne dans la mesure possible à ses forces. C'est donc dans la pensée, l'intelligence et l'amour de l'Absolu que se trouve le dernier mot de la destinée humaine (LXVIII, LXIX).

D'autre part, continue Anselme, l'âme ne peut renoncer au but de son existence par l'effet de sa libre volonté, ni d'une manière involontaire. Elle aimera sans terme le Bien absolu ; son existence ne saurait donc finir. Le Créateur souverainement bon n'anéantira point l'âme pendant que celle-ci l'aime, puisque cet amour est la réalisation de sa destinée et l'accomplissement de la loi qu'il lui a donnée lui-même. Par conséquent, l'âme fidèle au précepte de l'amour divin ne saurait périr; elle vivra sans fin, d'une vie véritablement heureuse (LXIX).

Au point de vue de la seule raison, quelle sera cette félicité? Dieu a donné à l'être raisonnable la faculté de pouvoir le comprendre et l'aimer, même dès cette vie. En quoi pourra consister l'éternel bonheur, si ce n'est dans la possession et la jouissance réelle de cette Essence suprême dont le désir et la pensée nous poursuivent? Est-il possible d'aimer la justice, le bonheur, l'incorruptibilité, sans en désirer la possession? Et qui peut accorder à l'âme des biens si excellents, si ce n'est Celui qui les possède, celui dont ils constituent l'essence? L'homme recevrait en partage toute autre récompense que la possession de ce Bien parfait qu'il n'en serait ni consolé ni satisfait! — Et certes, si Dieu ne se donne pas lui-même à l'âme affranchie des contingences terrestres, il ne veut pas qu'on l'aime pour lui-même. — Il est donc tout à fait certain que l'homme fidèle au grand devoir de l'amour de Dieu en ce monde, parviendra un jour à posséder, à voir, dans sa propre lumière, Celui qu'il entrevoyait ici-bas à travers le miroir et derrière le voile des choses.

Pourquoi rechercher les faux biens qui ne sont pas Dieu lui-même? Lui seul satisfait aux désirs ardents du cœur de l'homme! En lui est la Beauté, la Liberté, la Félicité, les transports de la vraie joie, le rhythme de la suprême mélodie, la Sagesse, l'Amitié, la Concorde, la Toute-puissance, la complète sécurité. Voilà la béatitude promise à celui qui aura obéi avec fidélité à la loi de la vie. Il s'en réjouira pour soi-même, et plus encore pour Dieu, que cette béatitude honore. Il la goûtera dans son être tout entier, et dans chacune des facultés de son âme. Cette félicité ne sera épuisée jamais. La joie des mortels transfigurés sera égale à leur amour, leur amour égal à leur connaissance de l'éternelle Beauté (*Mon.* LXX, *Prosl.* XXVI).

Mais au contraire, l'âme qui transgresse cette loi fondamentale de l'amour de Dieu s'expose d'une manière assurée à un malheur sans terme. Ce ne serait pas assez pour sa punition de perdre l'existence : elle ne ferait que retourner ainsi dans l'état où elle se trouvait, avant d'avoir trahi ses devoirs. La sanction de la loi ne trouverait pas sa consécration dans cette hypothèse. La divine justice ne discernerait en rien celui qui n'a point fait le mal, et celui qui a commis le plus grand des délits, en refusant un légitime hommage à la Divinité. L'âme infidèle jusqu'à la fin à l'ordre établi par le Créateur souffrira donc, en punition de son iniquité, un malheur éternel, comme l'âme juste recevra, en prix de sa fidélité aux devoirs que la raison et la foi lui révèlent, une perpétuelle récompense. Cette sanction de la loi implique pour l'âme une existence immortelle, affranchie des vicissitudes du temps. — N'est-ce pas l'arrêt même de la raison? (LXXI.)

Nous avons dû résumer, dans cette sèche analyse, la trame de la théodicée rationnelle d'Anselme de Cantorbéry. Il ne nous est pas facile aujourd'hui de porter sur elle un jugement complet et impartial. Les doctrines d'Anselme, accueillies par les Scolastiques et développées en tous sens depuis tant de siècles par d'illustres esprits, sont devenues le commun patrimoine des Écoles chrétiennes. — Mais cela même est un des plus beaux titres de gloire de notre Docteur. Avant Anselme, aucun maître dans l'Église latine n'avait écrit un traité philosophique sur l'existence et l'essence de la Divinité considérée en elle-même et dans ses rapports avec le monde. Anselme a tenté cette entreprise, et autant qu'il était possible à un homme du XI[e] siècle, il l'a réalisée avec un rare bonheur. On ne peut qu'admirer cet effort de la raison perfectionnée par la foi. Le solitaire de l'abbaye du Bec s'est proposé de chercher dans les seules lumières de l'esprit les preuves de la Théodicée chrétienne. Il n'a voulu laisser sans réponse aucune objection, aucune difficulté sans éclaircissement. Sous ce rapport, il a poussé le scrupule jusqu'à l'excès. Le lecteur moderne se sent parfois impatienté de ces lentes allures, de ces distinctions subtiles. Ce sont ces laborieux essais qui ont fondé la science de la pensée. Ce qu'il faut louer sans réserve, dans le Monologue et le Prosloge, c'est la liaison générale des conséquences et des prémisses. Spinoza se réclamait de l'enchaînement géométrique dans un livre où la rigueur apparente cachait mal les données systématiques et les habiles *postulats*. Tout le Monologue n'est qu'une suite serrée, progressive d'inévitables conclusions. Ce n'est pas encore le procédé scolastique dans toute sa maturité, mais c'en est le prélude. Avec plus de liberté dans la forme, c'est la même sévérité d'analyse, quelquefois une plus grande élévation de raison.

La manière syllogistique qu'emploieront les Docteurs du XIIIe siècle sera plus rigoureuse que celle de S. Anselme. Mais la Philosophie et la Théodicée, en particulier, garderont l'empreinte profonde de la méthode et des doctrines du Régent de Ste. Marie du Bec. Dans ses éclaircissements sur la Création, Thomas d'Aquin ne fera que développer ses idées. Les élévations d'Anselme sur l'exemplarisme, la suprême perfection de l'Essence divine, sa nécessité et son actualité; ses explications sur l'éternité et l'immensité de Dieu; sur ses rapports avec les êtres et les phénomènes changeants de l'univers compteront parmi les plus belles pages de la Philosophie scolastique. En ces points d'une capitale importance, le glorieux disciple de S. Augustin restera le précurseur, et souvent le maître des grands théologiens du moyen âge.

En mettant fin à l'analyse des œuvres philosophiques d'Anselme, qu'il nous soit permis de saluer une dernière fois cette douce et vénérable figure! Cet austère enfant de la solitude et des sacrés autels fut vraiment un puissant remueur d'idées, un pionnier avancé de la grande science de la pensée. Loin de gêner l'essor de son génie, sa foi l'assura, l'ennoblit, et lui ouvrit des voies nouvelles, à la hauteur de l'Infini! Au lieu de dessécher son âme, la métaphysique lui communiqua cette sérénité, qu'on dirait un reflet des éternelles lois. Lui, si âpre à l'argumentation, si élevé en ses vues, il montre dans ses Lettres, ses Homélies, ses Méditations un cœur d'une délicatesse pleine de grâce et d'ingénuité. Comme Augustin, son maître, comme S. Thomas d'Aquin, comme le Docteur séraphique, il cultiva, autant que le souffrait son époque, les lettres, la poésie, la beauté esthétique, épanouissements divers de l'absolue Unité. Appelé de son cloître studieux aux hautes dignités de l'Église, l'homme de l'idéal se montra, par un rare exemple, fin diplomate, administrateur consommé. En des temps difficiles, il maintint l'indépendance de l'Autel contre un prince ombrageux, et son intrépidité sans fanatisme lui en fit un admirateur, sinon un ami. En ce siècle agité et généreux, parmi les soucis mesquins et les affaires banales, la mémoire de tels hommes fortifie et console; elle venge la philosophie des dédains vulgaires; et si elle ne nous apporte pas un prochain présage de l'avenir, elle garde du moins le parfum d'un passé qui pourrait revivre, plus radieux encore, en s'illuminant de nos progrès. C'est un regret, peut-être une espérance.

CHAPITRE V.

DOCTRINE DE S. ANSELME DE CANTORBÉRY SUR LES RAPPORTS DE LA PHILOSOPHIE ET DE LA THÉOLOGIE.

§ 1.

De la nature des arguments par lesquels on peut arriver à l'*intelligence* des mystères.

C'est l'honneur de la science moderne d'avoir consacré définitivement l'union de la méthode expérimentale et du raisonnement. Les théories gratuites, les conceptions abstraites resteront jusqu'à la fin des temps le délassement des spéculatifs. Mais le *philosophique pur* est désormais jugé : c'est une chimère et une erreur. Le pressentiment instinctif, providentiel des lois du monde matériel et du monde intelligible; leur vérification par l'expérience réitérée; enfin, l'expression du rapport des phénomènes avec leur cause, voilà la formule générale du déterminisme rationnel. C'est ainsi que l'a défini naguère son éloquent et profond interprète, M. Claude Bernard, de l'Institut. Qui ne sait que c'est au fond la méthode d'Aristote, le philosophe de la nature?

Mais si la Philosophie *pure*, sans le contrôle des faits est mise au rang des rêves, un nombre très-considérable de lettrés persistent à réclamer pour la raison une absolue indépendance à l'égard de ce qu'ils nomment, avec un dédain peu voilé, les *Dogmes ecclésiastiques*.

Nous n'avons pas le moindre goût d'ouvrir, à l'occasion de la Philosophie d'Anselme de Cantorbéry, un tournoi théologique. Mais il faut bien mentionner la thèse du divorce entre la Vérité révélée et la Philosophie, puisqu'elle rentre historiquement dans les limites de ce travail, et qu'Anselme a beaucoup parlé des rapports de la Raison et de la Foi.

S'il faut en croire de très-habiles gens, tout penseur qui fait le moindre état des enseignements de la Foi trahit l'autonomie de la science; il l'asservit à un pouvoir étranger. Il y a dans cette vue une singulière confusion d'idées. Pour quiconque juge froidement les choses, ne paraît-il pas évident que les philosophes ne doivent pas plus s'alarmer de la Religion que de la Physiologie et de la Mécanique? Toute la dispute se réduit à une simple vérification. Le christianisme présente-t-il à l'adhésion de l'esprit des garanties suffisantes, aussi bien que les principes des sciences naturelles? Voilà ce qu'il importe de voir. Décliner cet examen, c'est mesquinement préjuger la question. Il est vrai que, sous ce rapport, les croyants sont désormais mis hors la loi. On leur a dit qu'il est inutile et vain de vouloir se démontrer la réalité d'une communication supérieure de la Vérité religieuse. On ajoute que « pour la science, une explication surnaturelle n'est ni vraie ni fausse; ce n'est pas une explication. Il est superflu de la combattre, assure-t-on, parce qu'une telle hypothèse correspond à un tout autre état de l'esprit humain qu'à celui qui a définitivement prévalu, depuis que le principe d'induction est devenu l'axiome fondamental qui règle nos actes et nos pensées [1]. » C'est précisément au nom « du principe d'induction » que nous protestons contre cette sentence d'ostracisme. Elle frappe des croyances qui n'ont pas cessé de paraître raisonnables à d'éminents esprits, très-exercés à la critique, à l'histoire. Il est moins aisé qu'on ne pense de faire abstraction du surnaturel dans l'étude des sciences historiques. C'est encore M. Renan qui a écrit ceci : « Demander à la science de ne pas s'occuper des choses dont s'occupe la religion, c'est lui demander de ne pas être. Qu'est-ce qu'un historien libre, à condition de ne jamais dire un mot du plus grand des problèmes historiques, de celui qui est la clef de tous les autres? » Rien de plus vrai! Mais en quoi déroge-t-il à la liberté de la pensée, celui-là qui, loin de la crédulité et de l'obstination, examine les titres de

[1] M. E. Renan, *Lettre à mes collègues*, p. 23.

la Révélation évangélique? Sans contestation, en cet examen préjudiciel, la raison ne relève que d'elle-même, de l'évidence, non d'une autorité extérieure. Dans la discussion de la légitimité de la Foi, l'esprit juge et conclut avec une autorité souveraine. Nous ne croyons, dit le Docteur angélique, que parce que la raison le persuade [1]. La Philosophie, nul ne le nie, a un domaine distinct de la Théologie ; elle s'y meut avec une parfaite autonomie. Mais cette indépendance a sa limite; la raison finie est de sa nature subordonnée à la Raison absolue, sa source, sa règle et sa fin. Il n'y a en cela, ce semble, ni mysticisme, ni contradiction, ni servitude. La foi a, dans un sens très-vrai, son fondement dans un acte de raison : sans cela, on l'a dit très-justement, elle ne serait qu'un attachement aveugle à une sublime hypothèse, la sanction d'une tyrannie que le Christ n'a pas voulue et que la conscience repousse. Mais si l'impartiale investigation établit la réalité d'une communication de la Vérité par Dieu à l'homme, n'est-il pas rationnel que celui-ci s'y soumette? En ce cas, professer des thèses contraires à cet enseignement sans égal serait un caprice aussi insensé que d'opposer de vains systèmes à une doctrine scientifique d'une autorité incontestée. L'incrédulité absolue est

[1] « Non enim crederet (christianus), nisi *videret* ea (dogmata) esse cre- » denda. » (*Sum, th.*, 2ª 2ª, q. 1, art. 4.) — C'est le sentiment unanime des Docteurs. Tout ce qu'ils ont écrit touchant l'obscurité des Mystères présuppose ce libre examen que ne relève que de la seule raison. Il importe de distinguer dans leurs déclarations ces deux moments du problème. Ils répètent avec S. Ambroise, à propos de l'acte final de la Foi : « Si ratione convincor, fidem abnuo! » Mais ils disent tous avec lui : « Morale est omnibus qui fidem exigunt, ut » fidem adstruant. » (*In Luc.*, l. II, c. I.) Et avec Suarez en qui Bossuet acclame toute l'École moderne : « Ante fidem necessarium est velle credere, et » *ante* hanc voluntatem necessarium est judicium quo voluntas inclinatur ad » volendum credere, quod non est aliud nisi *judicium* de credibilitate. Ergo » vel judicium illus est certum vel incertum : si certum est, est etiam *evi-* » *dens;* si autem est incertum, *non est sufficiens ad credendum.* » (*De Fide*, d. VI, sect. II, nº 4.) — De là le jugement doctrinal promulgué par Innocent XI : « L'adhésion de foi surnaturelle et salutaire est *conciliable* avec une démonstration simplement *probable* de la révélation. » — Voir ma Dissertation inaugurale *de Miraculo*, p. 26; Louvain, 1867.

la négation de l'ordre, des lois constitutives de l'esprit humain. La théorie des deux *Vérités contraires,* celle de la Raison et celle de la Foi, a pu être défendue au déclin du moyen âge comme un adroit subterfuge. Mais qui se serait attendu à la voir restaurer, au XIX^e^ siècle, par des philosophes sérieux ?

Les Maîtres de la philosophie chrétienne ont constamment suivi la voie que nous venons de rappeler. Ils n'ont exigé la foi à l'Évangile qu'après avoir montré que la communication divine des Dogmes est *un fait historique.* Toutes leurs spéculations sur le concept, la filiation et les conséquences des vérités révélées présupposent cette démonstration préliminaire; elles reconnaissent par conséquent l'autorité de la raison, ce reflet de l'Intelligence absolue, sans laquelle il n'est pas même possible d'aller à Dieu.

Comment établissent-ils le *fait de la Révélation ?* Ils évoquent avant tout la suite des témoignages qui en garantissent la réalité. Ils n'insistent pas moins sur les grandes manifestations surnaturelles qui ont accompagné la prédication de l'Évangile, et qui continuaient à se produire sous leurs yeux. Justin, Théophile, Origène, tous les Apologistes ont suivi cette méthode positive et historique. Ce dernier l'appelle « la démonstration de famille » des chrétiens. – Vers 126 le philosophe Quadrat osait se réclamer auprès de l'Empereur Adrien de la résurrection de plusieurs morts opérée par la vertu du Christ, et dont quelques-uns étaient encore en vie [1]. Après lui Irénée [2], Tertullien [3], Origène [4], Athanase [5], Théodoret de Cyr [6], Irénée de Gaza [7], Ambroise [8], Augustin [9], Eusèbe [10], nous ont laissé le récit des événements dont ils

[1] Ap. Euseb., *Hist. eccl.,* IV, c. III.
[2] *Cont. Hær. II,* c. XXXII.
[3] *De Præscript.,* c. XXX. — *Apol.,* c. XXXIII.
[4] *Cont. Cels.,* I, c. XLVI.
[5] 1^a^ *Apol.*
[6] *Vie de S. Antoine*, préface.
[7] *Hist. religieuse*, introd.
[8] *Ep.,* XXII.
[9] *De civ. Dei*, XXII, c. IX.
[10] *Hist. eccl.,* III, c. XXXVII; V, c VII. – Voir *Acta S.S.* ad diem XIX sept.

furent eux-mêmes les témoins et les narrateurs. Tous en appellent à la perfection surhumaine de la Doctrine et de la personne du Christ, dont Strauss et M. Renan eux-mêmes ont écrit qu'il est en toutes choses le Type unique et inégalé, l'inaugurateur de la plus haute conception morale et religieuse. Sans doute, on peut rejeter « au nom de l'état actuel de l'esprit humain, » ces dépositions émanées d'hommes d'une vertu et d'une culture pareilles, ralliés à l'Évangile par les prodiges mêmes qu'ils rapportent. Mais c'en serait fait à ce compte de la méthode positive. Ce serait consacrer une école de haute fantaisie, sacrifier les faits aux idées.

Nous avons prononcé tout à l'heure le nom de S. Augustin. C'est le maître préféré de S. Anselme de Cantorbéry. Il résume les droits et les devoirs de la raison, avant l'acceptation de la Foi, en d'énergiques sentences. Ce n'est pas injustement, dit-il, que nous avons la prétention de savoir non-seulement les choses que nous voyons, mais même celles que nous ne voyons pas, mais que nous croyons *sur la foi de témoignages suffisants* [1]. Ils se trompent étrangement, ceux qui s'imaginent que nous croyons au Christ, sans preuves du Christ. Y a-t-il des preuves plus convaincantes que les prophéties que nous voyons présentement accomplies [2]? — « C'est ainsi, ajoute-t-il, que nous sommes conduits à la science par une double route : par l'autorité et par la raison. Dans l'ordre du temps, c'est l'autorité qui est la première ; en réalité, c'est la raison [3]. »

Quant à Anselme lui-même, il ne s'est pas occupé, dans ses écrits, de la preuve historique de la Révélation. Les Scolastiques se sont en général contentés à cet égard des recherches déjà faites par les

[1] *Ep.*, p. 147, *de videndo Deo.*

[2] « Multum falluntur qui putant nos sine ullis de Christo indiciis credere » in Christum. Nam quae sunt indicia clariora quam ea, quae nunc videmus » praedicta et impleta ? » *De fide rerum quae non videntur*, c. V.

[3] « Ad discendum necessario dupliciter ducimur : auctoritate atque ratione. » Tempore auctoritas, re autem ratio prior est. » *Cont. Academic.*, III, 43-9. (*De ordine*, l. I, c. IX.) — Voyez encore *Confess.*, X, 40 ; *De utilit. credendi*, VII, IX, XI, XVI ; *De Trinit.*, IX, 1 ; *Retract.*, I, 1, 2 ; *De lib. arbit.*, II, 7 ; *Soliloq.*, II, 1 ; *De vera relig.*, c. 24, 25 ; *Enarrat. in Psalm.* 118, *Serm.* 18 ; *De civ. Dei*, XVII passim.

Pères. Son biographe Eadmer nous apprend néanmoins qu'il avait voué de longues veilles à l'étude des Prophéties [1]. Il n'a fait qu'insinuer en passant le rapport abstrait de la démonstration surnaturelle ou du Miracle avec les vérités de la Foi. « Nous n'annonçons aucune vérité fructueuse pour le salut des âmes, dit-il, qu'on ne trouve dans l'Écriture de l'Esprit Saint, qui elle-même a été fécondée par le Miracle [2]. »

Mais Anselme a concentré toute son activité sur les Dogmes eux-mêmes. Ce qui l'intéresse, c'est de tracer *les règles de la science de la Foi.* Avant tout, il esquisse les *conditions morales* qu'exige dans le philosophe chrétien la recherche de la Vérité. Le Docteur de Cantorbéry sait que ce n'est pas uniquement par la raison que l'homme s'élève à la connaissance de l'Absolu, de l'Infini. Les dissipations et les révoltes des sens, les secrets penchants de la volonté exercent sur l'esprit un pouvoir d'autant plus fort qu'il est moins apparent. Le sage doit s'affranchir de ces entraves pour aller à la vérité : « Il faut d'abord, écrit Anselme, purifier le cœur par la foi, conformément à ce qui est dit que *Dieu purifie le cœur par la foi* (Act. XV, 9); il faut éclairer les yeux par l'observation des commandements, car « le commandement du Seigneur est lumineux et éclaire les yeux » (Ps. XVIII, 9); il faut devenir, par une humble soumission aux témoignages d'en haut, comme de jeunes enfants... De la sorte, en écartant ce qui appartient à la chair, il faut que nous vivions selon l'esprit, avant que nous discutions, en les jugeant, les secrets de Dieu [3]. »

[1] *Vita S. Anselmi*, l. I, c. II.

[2] « Sicut Deus in principio per miraculum fecit frumentum et alia de terra » nascentia ad alimentum hominum sine cultore et seminibus, ita sine humana » doctrina mirabiliter fecit corda prophetarum et apostolorum nec non et » evangelistarum fecunda salutaribus seminibus... Siquidem nihil utiliter ad » salutem spiritualem praedicamus, quod sacra Scriptura Spiritus Sancti *mi-* » *raculo foecundata* non protulerit aut intra se non contineat. » (*De conc. Praesc. et lib. arb.*, c. VI.)

[3] « Prius ergo fide mundandum est cor... et prius per praeceptorum Domini » custodiam illuminandi sunt oculi, quia *praeceptum Domini lucidum illu-* » *minans oculos*... Prius, inquam, ea quae carnis sunt postponentes, secun- » dum spiritum vivamus, quam profunda fidei dijudicando discutiamus... » (*De fide Trinitatis*, c. III.)

Anselme avait puisé cette doctrine de l'épuration du sentiment, non-seulement dans son cœur, mais aussi dans les écrits de S. Augustin, qui l'avait lui-même entendu professer à l'école de Plotin et de Platon : « Dieu de la force, s'écrie Augustin, convertissez-nous, montrez-nous votre face, convertissez-nous! Car quel que soit l'objet où se tourne mon âme hors de vous, elle se cloue à quelque peine; qu'elle s'attache à toutes les beautés hors d'elle-même, hors de Vous, beautés qui n'existent que par Vous, ces beautés naissent et meurent : elles commencent, elles s'élèvent, elles croissent pour atteindre le plus haut point : arrivées là, elles vieillissent et descendent... Ne sois donc plus vaine, ô mon âme. Ne permets plus à ce tumulte de fermer l'oreille de ton cœur. Écoute : le Verbe, à toi aussi, te crie de revenir au lieu de l'imperturbable repos. Là est l'amour que son objet n'abandonne pas, si lui-même ne l'abandonne pas [1]! » — Les païens eux-mêmes avaient connu cette purification du cœur qui leur faisait dire que *philosopher c'est mourir*. Plotin en particulier a décrit, avec la précision d'un ascète, l'austère épreuve du dépouillement imposée à l'amant de la sagesse ? N'est-ce pas lui qui disait « qu'après avoir purifié l'âme, il faut l'unir à Dieu avec qui elle a des liens de parenté, et que cette conversion ne commence pas à s'opérer après la purification, mais qu'elle en est le résultat même [2] ? » Porphyre ne recommandait-il pas à Marcella de faire de son intelligence le temple de Dieu [3] ? « C'est l'écho des belles sentences de Platon : « Prenez les âmes dès l'enfance, dit le chef de l'Académie, coupez et retranchez en elles ce qu'y mettent les passions voisines de la génération : dégagez-les de ces lourdes masses attachées aux plaisirs de la table et aux voluptés du même ordre; ôtez ce poids qui déprime le regard de l'esprit vers tout ce qui est bas. Aussitôt et dans la même âme, le regard devenu libre se tourne vers ce qui est, et y voit clair aussi bien qu'il voit clair dans les autres choses qui l'occupent actuellement [4]. » C'est surtout par les tendances du

[1] Voir aussi *Confess.*, VI, p. 7, sqq.

[2] *Enn.*, I, l. II, 4.

[3] *Lettre à Marcella*, Éd. Maï.

[4] *Rép.*, l. VII, p. 510.

sentiment et de la volonté qu'Anselme se rapproche des Platoniciens. Sous ce rapport, il est permis de lui appliquer cette parole qu'on a dite de son maître : *Quidquid est in Platone vivit in Augustino.*

Mais abordons avec notre Docteur les conditions positives de l'étude de la Sagesse. Il insiste spécialement sur *l'impossibilité d'une opposition réelle entre les Dogmes et les déductions certaines de la raison.* « Lorsque la raison, dit-il, affirme quelque chose (touchant les mystères divins), et que nous ne pouvons ni le trouver dans les divines Écritures, ni le démontrer par elles, nous apprenons par la chose même s'il faut la rejeter ou l'accueillir. Si la conclusion rationnelle a un fondement certain, et que l'Écriture ne lui est en rien contraire, elle peut être affirmée d'après son autorité. Mais si, au contraire, l'Écriture est certainement opposée à notre sentiment, celui-ci parût-il inexpugnable, il ne faut cependant lui reconnaître aucune vérité[1]. » — Dans la préface de son Traité sur la Sainte Trinité, Anselme s'exprime ainsi sur *la nature* et le *but de l'examen rationnel des Vérités révélées :* « Quoique après les Apôtres, les saints Pères et nos Docteurs en grand nombre aient dit, touchant la raison de notre Foi, tant et de si grandes choses pour confondre l'impertinence et briser la dureté des infidèles, et pour nourrir l'intelligence de ceux qui, ayant le cœur déjà purifié par la Foi, trouvent leurs délices dans la raison de la Foi, raison qui, après la certitude de cette même Foi, doit être l'objet de nos vifs désirs; quoiqu'ils aient dit sur ce sujet de si grandes choses que nous n'espérions pas de trouver, soit de notre temps, soit dans les temps à venir, quelqu'un qui les égale dans la contemplation de la vérité, toutefois

[1] « Si quid ratione dicamus aliquando, quod in dictis ejus (S^{ae} Scripturae) » aperte monstrare, aut ex ipsis probare nequimus, hoc modo per illam cognoscimus, utrum sit recipiendum aut respuendum. Si enim aperta ratione colligitur, et illa ex nulla parte contradicit, quoniam ipsa sicut nulli adversatur » veritati, ita nulli favet falsitati, hoc ipso quia non negat quod ratione dicitur, ejus auctoritate suscipitur. At si ipsa nostro sensui indubitanter repugnat, quamvis nobis ratio nostra videatur inexpugnabilis, nulla tamen » veritate fulciri credenda est. » (*De conc. grat. et lib. arb.*, c. VI.)

je pense que personne ne doit être critiqué si, *étant affermi dans la Foi*, il veut s'exercer à en rechercher la raison.... Laissons les autres paroles par lesquelles la Sainte Écriture nous invite à en rechercher les fondements (de la Foi): rappelons seulement celles-ci: « *Si vous ne croyez pas, vous ne parviendrez pas à comprendre* (Isaïe, VII, 9). Elle nous exhorte évidemment ici à nous efforcer d'acquérir l'intelligence, puisqu'elle nous enseigne de quelle manière nous devons y arriver. Je conçois l'intelligence dont nous sommes capables dans la vie présente, comme quelque chose d'intermédiaire entre la Foi et la Vision céleste; je pense que plus on avance dans cette intelligence, plus on s'approche de cette Vision universellement désirée [1]. »

[1] « Quamvis, post apostolos, sancti Patres et doctores nostri multi tot et » tanta de fidei nostrae ratione dicant ad confutandam insipientiam et frangendam duritiam infidelium, et ad pascendum eos qui, jam corde fide mundato, ejusdem fidei ratione, quam post ejus certitudinem debemus esurire, » delectantur, ut nec nostris nec futuris temporibus ullum illis parem in » veritatis contemplatione speremus; nullum tamen reprehendendum arbitror, » si fide stabilitus, in rationis ejus indagine se voluerit exercere. Nam et illi, » quia *breves dies sunt*, non omnia quae possent, si diutius vixissent, dicere » potuerunt; et veritatis ratio tam ampla, tamque profunda est ut a mortalibus nequeat exhauriri; et Dominus in Ecclesia sua, cum qua se esse usque » ad consummationem saeculi promittit, gratiae suae dona non desinit impertiri. Et, ut alia taceam, quibus sacra pagina nos ad investigandam rationem » invitat, ubi dicit : *Nisi credideritis, non intelligetis*, aperte nos monet » intentionem ad intellectum extendere, cum docet qualiter ad illum debeamus proficere. Denique, quoniam inter fidem et speciem intellectum, quem » in hac vita capimus, esse medium intelligo, quanto aliquis ad illum proficit, » tanto eum propinquare speciei, ad quam omnes anhelamus, existimo. Hac » igitur ego consideratione, licet sim homo parvae nimis scientiae, confortatus, *ad eorum quae credimus rationem intuendam*, quantum superna gratia » mihi dare dignatur, aliquando conor assurgere, et cum aliquid quod prius » non videbam reperio, id aliis libenter aperio; quatenus quid secure tenere » debeam, alieno discam judicio. Quapropter, mi pater et domine, christianis » omnibus cum reverentia amande et cum amore reverende, Papa Urbane, » quem Dei providentia in sua Ecclesia summum constituit Pontificem, quoniam nulli rectius possum, vestrae sanctitatis praesento conspectui subditum opusculum, ut ejus auctoritate, quae ibi suscipienda sunt, approbentur, et quae corrigenda sunt emendentur. » (*De Trin. prœm.*)

On voit déjà quelle doit être, au sentiment de notre Docteur, l'attitude de la Philosophie à l'égard de la Foi. L'examen présuppose la démonstration du fait de la révélation. Il implique la croyance préalable des Mystères. C'est de la donnée divine que part le Philosophe chrétien. Elle est le fondement de ses investigations. Dans le domaine de la Doctrine sacrée, toute édification qui dévierait de cette base posée par l'infinie Intelligence et confiée par Elle à la garde de l'indéfectible Église serait vouée à une inévitable ruine. Mais aussi, dès qu'il s'est soumis à cette loi, ce doit être pour le chrétien éclairé l'objet des vœux les plus ardents que de pénétrer dans le sanctuaire intime placé sur le seuil de l'éternelle lumière, et dans lequel unissent leurs clartés la raison de l'homme et l'infinie Sagesse de Dieu. C'est conformément à ces principe qu'Anselme veut que le philosophe chrétien se borne à chercher comment ce que la Foi enseigne est ainsi en réalité, et s'interdise de poursuivre les raisons *contraires* aux Dogmes révélés [1]. D'après cette même règle, il « se propose de montrer que les questions de la Foi ne doivent pas être examinées par les premiers Dialecticiens venus, mais qu'elles doivent être discutées avec modestie par des hommes versés dans les Saintes Lettres. » — Il fait cette remarque, dit-il, « afin de contenir la présomption de ceux qui, par une criminelle témérité, osent disputer *contre* un point quelconque de la Foi chrétienne, *pour la raison qu'ils ne peuvent le comprendre par leur esprit.* Ceux-là estiment, dans leur orgueil insensé, que ce qu'ils ne peuvent comprendre ne peut exister, au lieu d'avouer, avec une humilité vraiment sage, qu'il peut exister beaucoup de choses qu'ils ne peuvent comprendre. »

Il est patent que, d'après Anselme, le rôle de la Philosophie dans les choses de la Foi n'est pas *négatif* ou hostile, mais positif et tendant à engendrer l'intelligence des Mystères, dans la mesure

[1] « Nullus christianus debet disputare *quomodo* quod Ecclesia catholica » corde credit et ore confitetur *non sit*, sed semper eamdem fidem indubi- » tanter tenendo, amando et secundum illam vivendo, humiliter, quantum » potest quaerere rationem *quomodo sit.* » (*De fide Trin.*, c. II.)

accessible à notre esprit. « Le véritable ordre exige, dit-il encore, que nous croyions les profondeurs de la Foi chrétienne avant de prétendre les discuter par la raison ; mais aussi, il me paraît qu'il y aurait négligence, pour ceux qui sont ancrés dans la foi, à ne pas chercher à comprendre ce qu'ils croient. » — « Aucun chrétien ne doit chercher à prouver comment ce que l'Église catholique croit de cœur et confesse de bouche *n'est pas en réalité*, mais il doit en retenant sans aucun doute la même Foi, en l'aimant et en y conformant sa vie, s'efforcer avec humilité et de tout son pouvoir à trouver *la raison qui démontre qu'elle est réellement ainsi.* S'il parvient à comprendre, qu'il en remercie Dieu. S'il n'y arrive point, qu'il ne lève pas le front pour s'insurger, mais qu'il incline la tête en signe de soumission. » Anselme compare la folie de ceux qui veulent faire de leur raison la mesure de la Foi à des oiseaux nocturnes « assez sots pour lutter en plein midi contre l'aigle dont la prunelle fixe sans sourciller le soleil, tandis qu'eux ne peuvent voir le ciel qu'au sein des ténèbres. » — On sait que la comparaison d'Anselme a passé dans la langue des Scolastiques.

A ces audacieux, notre Docteur rappelle que « plus nous sommes nourris des Saintes Écritures, des dogmes qui fortifient l'âme par l'obéissance, plus sublime devient notre essor vers les choses qui rassasient l'âme elle-même. » — « Que personne, dit-il, ne se plonge dans les profondeurs des Dogmes divins, s'il n'a auparavant acquis la solidité de la Foi et la gravité des mœurs du sage : sans cela, en parcourant avec une imprudente légèreté les multiples détours des sophismes, il pourrait se prendre sans retour à quelque erreur [1]. » — Anselme développe ces vues en

[1] « Sed priusquam de quaestione disseram, aliquid praemittam ad com-
» pescendam eorum praesumptionem, qui nefanda temeritate audent dispu-
» tare contra aliquid eorum quae fides christiana confitetur, quoniam id intel-
» lectu capere nequeunt, et potius insipienti superbia judicant nullatenus
» posse esse quod nequeunt intelligere, quam humili sapientia fateantur esse
» multa posse, quae ipsi non valeant comprehendere.
» Nullus quippe Christianus debet disputare quomodo quod catholica Eccle-
» sia corde credit et ore confitetur, non sit; sed semper eamdem fidem indu-

les appliquant au Mystère de la Sainte Trinité. Il tient que non-seulement la Philosophie chrétienne présuppose la Foi, mais qu'en outre *elle ne peut prétendre qu'à une connaissance partielle des Dogmes.* « Si quelque (dialecticien), dit-il, nie qu'il soit possible d'affirmer *trois choses d'une,* ou *une de trois* de façon à ce que ces trois choses ne soient pas affirmées réciproquement les unes des autres, ainsi qu'il se vérifie dans ces *trois personnes* et dans *l'essence une* de Dieu; s'il le nie, dis-je, parce qu'il ne trouve rien de semblable dans les autres choses, et qu'il ne le comprend pas en Dieu, qu'il veuille bien tolérer qu'en la Divinité il y ait quelque chose que son esprit ne peut pénétrer, et qu'il n'égale point l'être transcendant qui n'est soumis à aucune loi de temps, de lieu ou de composition aux créatures assujetties au lieu, au temps et à la composition de parties : qu'il croie que dans cet être il y a quelque chose qui ne peut se rencontrer dans celle-ci, et qui acquiesce à l'autorité chrétienne, sans *disputer contre elle* [1]. »

» bitanter tenendo, amando et secundum illam vivendo, humiliter quantum » potest, quaerere rationem quomodo sit. Si potest intelligere, Deo gratias » agat; si non potest, non immittat cornua ad ventilandum, sed submittat » caput ad venerandum. Citius enim potest in se confidens humana sapientia » impingendo cornua sibi evellere, quam vi nitendo petram hanc evolvere. » Solent enim quidam, cum ceperint quasi cornua confidentis sibi scientiae » producere, nescientes quia, si quis aestimat se scire aliquid, nondum » cognovit quemadmodum oporteat eum scire, antequam habeant per soliditatem fidei alas spirituales, praesumendo in altissimas de fide quaestiones » assurgere. Unde fit ut, dum ad illa, quae prius fidei scalam exigunt, sicut » scriptum est : *Nisi credideritis, non intelligetis,* praepostere prius per » intellectum conantur ascendere, in multimodos errores per intellectus » defectum cogantur descendere. Palam namque est, quia illi non habent » fidei firmitatem, qui, quoniam quod credunt intelligere non possunt, disputant contra ejusdem fidei a sanctis Patribus confirmatam veritatem; velut » si vespertiliones et noctuae, nonnisi in nocte coelum videntes, de meridianis solis radiis disceptent contra aquilas, solem ipsum irreverberato visu » intuentes. » — *De fide Trin.*, c. II.

[1] « At, si negat tria dici posse de uno et unum de tribus, ut tria non dicantur de invicem, sicut in his tribus personis et uno Deo facimus, quoniam » hoc in aliis rebus non videt, nec in Deo intelligere valet, sufferat paulisper

Les mêmes pensées se rencontrent également dans les autres traités spéculatifs d'Anselme. « Je n'essaye point, Seigneur, écrit-il dans le Prosloge, de pénétrer votre sublimité, je n'ai garde de lui égaler ma raison : je désire seulement, *en quelque degré*, comprendre la vérité que croit et aime mon cœur. Je ne cherche point à comprendre afin de croire, mais je crois afin de comprendre. Car je suis persuadé qu'à moins de croire, je ne saurais comprendre [1]. » — « L'esprit qui médite sur Dieu, s'écrie-t-il dans le style emphatique de son siècle, est repoussé par son éclat, vaincu par sa grandeur, renversé par son immensité, confondu par sa compréhension [2]. » — « Qui nous expliquera la façon dont l'infinie Sagesse se connaît et s'affirme? L'homme n'en peut savoir rien ou presque rien. » — « Nous ne saurions comprendre complétement, avait-il écrit auparavant, comment Dieu connaît les œuvres qu'il a réalisées dans le temps. Comment aurions-nous la parfaite intelligence de la manière dont il se connaît et se parle lui-même [3] ? »

Anselme appliquait pratiquement, sa doctrine, quand, dans sa lettre à Foulques, évêque de Beauvais, il n'hésite pas à dire qu'il

» aliquid quod intellectus ejus penetrare non possit esse in Deo, nec com- » paret naturam, quae super omnia est libera ab omni lege loci et temporis » et compositionis partium, rebus quae loco aut tempore clauduntur aut par- » tibus componuntur; sed credat aliquid in illa esse, quod in istis esse nequit, » et acquiescat auctoritati christianae, nec disputet contra illam. » (*De fide Trin.*, c. VII.)

[1] « Non tento, Domine, penetrare altitudinem tuam, quia nullatenus com- » paro illi intellectum meum; sed desidero aliquatenus intelligere veritatem » tuam, quam credit et amat cor meum. Neque enim *quaero intelligere ut cre- » dam, sed credo ut intelligam.* Nam et hoc credo, quia nisi credidero, non » intelligam. » (*Prosl.*, c. I.)

[2] « Non potest oculus meus ad illam, nimis fulget, non capit illam, nec suf- » fert oculus animae meae diu intendere in illam. Reverberatur fulgore, vin- » citur amplitudine, obruitur immensitate, confunditur capacitate. » (*Prosl.*, c. XVII.)

[3] « Si superior consideratio rationabiliter comprehendit incomprehensible » esse, quomodo eadem summa sapientia sciat ea quae fecit, de quibus tam » multa nos scire necesse est, quis explicet quomodo sciat aut dicat se ipsum » de quia nihil aut vix aliquid ab homine sciri possibile est. » (*Mon.*, c. LXIV.)

n'y a qu'une seule façon de justifier son orthodoxie et celle de son maître Lanfranc, qu'on croyait calomnié comme lui par l'imprudent Roscelin, qui voulait faire d'eux des précurseurs de son Trithéisme [1]. « Je crois en Dieu le Père, dit Anselme, Créateur du ciel et de la terre, et je crois en un seul Dieu le Père (non en trois Dieux comme Roscelin). » — « Notre foi doit être défendue contre les infidèles, non contre ceux-là qui se prévalent de l'honneur du nom chrétien. C'est justice d'exiger de ceux-ci qu'ils conservent religieusement la promesse faite à leur baptême. A ceux-là nous pouvons montrer avec combien d'injustice ils nous méprisent. Le chrétien, lui, doit par la foi s'élever jusqu'à la connaissance, et non parvenir par celle-ci à la foi. S'il peut s'élever à l'intelligence des Mystères, il se réjouit :

[1] « De me autem hanc veram omnes homines habere volo sententiam. Sic » teneo ea quae confitemur in Symbolo, cum dicimus : *Credo in Deum Patrem* » *omnipotentem, creatorem coeli et terrae.* Et : *Credo in unum Deum Pa-* » *trem omnipotentem factorem coeli et terrae.* Et : *Quicumque vult salvus* » *esse, ante omnia opus est ut teneat catholicam fidem*, et ea quae sequun- » tur; haec tria christianae confessionis principia, quae hic praeposui, sic » inquam, haec et corde credo et ore confiteor, ut certus sim quia quicumque » horum aliquid negare voluerit, et nominatim quicumque blasphemiam, » quam supra posui me audisse a Roscelino dici, pro veritate asseruerit, sive » homo, sive angelus, anathema est; et confirmando dicam, quamdiu in hac » perstiterit pertinacia, anathema sit; omnino enim Christianus non est. Quod » si baptizatus et inter christianos est nutritus, nullo modo audiendus est : » nec ulla ratio aut sui erroris est ab illo exigenda, aut nostrae veritatis illi » est exhibenda; sed mox, ut ejus perfidia absque dubietate innotuerit, aut » anathematizet venenum quod proferendo evomuit, aut anathematizetur ab » omnibus catholicis, nisi resipuerit. Insipientissimum enim et infrunitum » est, propter unumquemque non intelligentem, quod supra firmam petram » solidissime fundatum est, in nutantium quaestionum revocare dubietatem. » Fides enim nostra contra impios ratione defendenda est, non contra eos qui se » christiani nominis honore gaudere fatentur. Ab his enim juste exigendum est » ut cautionem in baptismate factam inconcusse teneant; illis vero rationabiliter » ostendendum est quam irrationabiliter nos contemnant. *Nam christianus* » *per fidem debet ad intellectum proficere, non per intellectum ad fidem* » *accedere, aut, si intelligere non valet, a fide recedere.* Sed cum ad intellec- » tum valet pertingere, delectatur ; cum vero nequit, quod capere non potest. » veneratur. » *Ep.* II, XLVII, *ad Fulc.*

il vénère ce qui lui reste obscur. » — C'est dans le même esprit qu'est conçue l'adresse au pape Urbain II, où il soumet au jugement du Pontife ses Traités de l'Incarnation et de la Trinité. « Comme la divine Providence, écrit notre Docteur, a choisie Votre Sainteté pour lui confier la conservation de la Foi et de la vie chrétienne ainsi que le gouvernement de son Église, il n'est personne à qui l'on puisse en référer mieux qu'à vous, s'il surgit dans l'Église quelque chose de contraire à la foi catholique, pour qu'il soit corrigé par votre autorité ; et si une réponse est donnée à l'erreur, on ne peut la montrer plus sûrement à aucun autre qu'à vous, pour qu'elle soit examinée par votre prudence. Ainsi de même que je ne puis adresser la présente lettre plus convenablement qu'à vous, je l'adresse le plus volontiers à votre sagesse, afin que si elle contient quelque chose à corriger, votre censure le corrige, et afin que ce qui est conforme à la règle de la vérité, votre autorité le confirme [1]. » — N'oublions pas que Roscelin se prétendait catholique, et voulait être traité comme tel. Dès lors, les paroles d'Anselme étaient tout à fait justes.

Dans le plus original et le plus spéculatif de ses écrits, Anselme résume une dernière fois ses idées sur les rapports de la Raison et de la Foi. Il rappelle d'une façon saisissante que dans la Philosophie chrétienne, la croyance précède la démonstration. La fin de celle-ci est double : procurer au fidèle l'intelligence des Mystères, avec les saintes joies dont elle est la source ; répondre, pour l'honneur de la Religion et le bien des âmes, aux objections des infidèles et des impies. « Un grand nombre d'hommes, écrit notre Docteur, m'ont demandé souvent et avec beaucoup

[1] « Quoniam divina providentia vestram elegit sanctitatem, cui fidem et » vitam christianam custodiendam, et Ecclesiam suam regendam committe- » ret ; ad nullum alium rectius refertur, si quid contra catholicam fidem oritur » in Ecclesia, ut ejus auctoritate corrigatur ; nec ulli alii tutius, si quid contra » errorem respondetur, ostenditur, ut ejus prudentia examinetur. Quapropter, » sicut nulli dignius possum, ita nulli libentius praesentem epistolam quam » vestrae destino sapientiae ; quatenus si quid in ea corrigendum est, vestra » censura castigetur, et quod regulam veritatis tenet, vestra auctoritate robo- » retur. »

d'insistance, par lettres et par paroles, de fixer par écrit le souvenir des preuves de ce point de foi (l'incarnation du Verbe) que j'ai coutume de communiquer à ceux qui en enquièrent auprès de moi. En demandant cela, *leur but n'est pas de parvenir par la raison à la Foi, mais de se réjouir par l'intelligence et la contemplation des choses qu'ils croient* (déjà), et aussi d'être prêts, dans la mesure du possible, de donner satisfaction à tous ceux qui demanderaient la raison de l'espérance qui est en nous [1]. » — Boson, son interlocuteur, lui dit dans le même sens : « Je ne viens point te trouver, afin que tu dissipes en moi un doute contre la Foi, mais bien afin que tu me montres la raison de ma certitude... Permets donc que je me serve ici des paroles des infidèles. Car il est juste que nous qui cherchons la raison de notre Foi, nous nous servions des objections de ceux qui ne prétendent pas venir à la Foi sans la raison. *Eux,* sans doute, *cherchent la raison parce qu'ils ne croient point; nous la cherchons, au contraire, parce que nous croyons :* cependant ce qu'ensemble nous cherchons, c'est une seule et même chose [2]. »

Voilà des textes d'une apparence bien théologique. Mais pou-

[1] « Saepe et studiosissime a multis rogatus sum et verbis et litteris, quatenus cujusdam quaestionis de fide nostra rationes, quas soleo respondere » quaerentibus, memoriae scribendo commendem; dicunt enim sibi placere eas, » et arbitrantur satisfacere. Quod petunt, non est ut per rationem ad fidem » accedant, sed ut eorum quae credunt, intellectu et contemplatione delec- » tentur, et ut sint, quantum possunt, parati semper ad satisfactionem omni » poscenti se rationem de ea, quae in nobis est, spe. Quam quaestionem solent » et infideles nobis simplicitatem christianam quasi fatuam deridenter obji- » cere, et fideles multi in corde versare; qua scilicet ratione vel necessitate » Deus homo factus sit et morte sua, sicut nos credimus et confitemur, mundo » vitam reddiderit; cum hoc aut per aliam personam, sive angelicam, sive » humanam, aut sola voluntate facere potuerit. De qua quaestione non solum » litterati, sed etiam illiterati multi quaerunt et rationem ejus desiderant. » Quoniam ergo multi de hac tractari postulant, et licet in quaerendo valde » videatur difficilis, in solvendo tamen omnibus est intelligibilis et propter » utilitatem rationisque pulchritudinem amabilis, quamvis a sanctis Patribus » inde quod sufficere debeat, dictum sit, tamen de illa curabo, quod mihi Deus » dignabitur aperire petentibus ostendere. » (*Cur Deus homo*, I, 1.)

[2] *Ibid.*

vais-je omettre de rappeler le sentiment d'Anselme sur les rapports de la Raison et de la Foi? Nous n'aurions pas connu complétement l'esprit de sa Philosophie, si nous eussions négligé cet examen. Nous ne sommes pas les premiers, du reste, à nous occuper de ce point de sa doctrine. Déjà le Dr Ritter avait apprécié son importance, dans l'histoire de la pensée au XIe siècle. Faut-il le dire? L'illustre historien a interprété si étrangement les vues du Docteur de Cantorbéry qu'il a justifié d'avance ceux-là qui y sont revenus après lui. Écoutons plutôt : « Lorsque nous considérons les idées d'Anselme sur les fondements de la science de la Foi, nous ne pouvons nous dissimuler qu'elles n'ont rien à démêler avec la Foi chrétienne. Elles envisagent la Foi sous un esprit tout à fait général, comme *la croyance convaincue de l'âme à une vérité suprasensible* qui est l'objet de son amour et qu'elle recherche et exprime dans sa vie morale. C'est pour cela qu'Anselme regarde la Philosophie qui n'a confiance qu'aux sens comme une incrédulité véritable, et qu'il exige que nous fixions dans notre volonté et que nous éprouvions dans notre vie intime la force impérative des principes des sciences et des vérités générales, avant que nous songions à nous élever à leur connaissance [1]. — Ainsi, au jugement du docte historien, la Foi dont nous a tant entretenu Anselme est la certitude et le sentiment des principes d'évidence rationnelle ! Les érudits ont leurs distractions, même en Allemagne. Après ce que nous avons entendu de la bouche même d'Anselme, sur la raison des Dogmes, nous nous garderons de redresser celle que nous venons d'entendre.

Pour nous, il sera aisé maintenant de résumer en quelques mots toute cette doctrine de notre Docteur. Par elle-même, la raison peut parvenir à se démontrer avec certitude toutes les vérités morales, et avant toutes les autres, l'existence d'un seul Dieu, Être infiniment parfait, créateur et conservateur de l'univers, arbitre souverain des actions humaines. Elle établit avec l'évidence des faits historiques le fait de la Révélation et les critères de crédibilité de la Religion surnaturelle. Elle démasque la fausseté des sophismes

[1] *Geschichte der Phil.*, VII, p. 332.

opposés à ses Dogmes. Elle peut s'élever, dans une certaine mesure, jusqu'à l'intelligence des vérités révélées et de leur économie intime. Jamais cependant le voile qui couvre les Mystères ne sera entièrement écarté, durant l'épreuve terrestre. La Philosophie religieuse, ou, si l'on aime mieux, la Théologie spéculative d'Anselme est symbolisée dans le titre qu'il avait d'abord donné au Prosloge : *Fides quærens intellectum*, et dans ces deux autres formules célèbres : *Credo ut intelligam*, — *Fides praecedit intellectum :* Je crois, afin que par la foi, je parvienne à la connaissance [1]. La Foi est antérieure à la connaissance, c'est-à-dire que ce n'est qu'à condition de croire qu'on s'élève à une science véritable, vivante, complète de la Doctrine révélée.

C'est l'enseignement de toute l'antiquité. *L'intelligence de la Foi* d'Anselme n'est que la *Gnose* fondée sur la croyance que louait tant Clément d'Alexandrie, même à l'époque où les éclectiques de ce temps la compromettaient par leurs exagérations. C'est la recherche des raisons probables des Mystères, la connaissance de l'immuable en tant qu'il est accessible à l'esprit, dont parlent les premiers Pères. C'est l'exposition systématique de la Religion que recommande Origène ; la discussion des vérités nécessaires de Tertullien ; les raisons de convenance des Mystères que présentent tour à tour S. Athanase, les deux Grégoire, S. Basile, S. Hilaire. Mais c'est Augustin qui suggéra surtout à notre Docteur ses principes sur les rapports de la Raison et de la Foi. Dans la Préface de son Monologue, il prie le lecteur de ne pas le décrier

[1] M. Ampère, en son *Hist. litt. de la France*, t. III, p. 366, caractérise très-bien le rôle qu'Anselme prescrit à la raison, dans l'examen de la question religieuse. Écoutons ces paroles qui résument le reste : « Son but n'est point de mettre les mystères à la portée de l'esprit humain, mais de tenter tout ce qui est possible à l'esprit humain pour se satisfaire par la démonstration de ces mystères, après les avoir admis préalablement. On ne saurait s'élever à une plus grande hauteur philosophique, sans dépasser jamais les limites de la plus stricte orthodoxie. » — Dans son *Histoire des révolut. de la philos. en France*, t. I^{er}, pp. 60 et suiv., M. le duc de Caraman présente aussi plusieurs idées ingénieuses et justes. Mais sa critique n'est pas très-forte. — Voir aussi M. de Rémusat, *S. Anselme de Cantorbéry*, pp. 447 et suiv.

comme un novateur présomptueux, mais de commencer par étudier avec soin les Traités de S. Augustin sur la Trinité, et de le juger d'après ces livres. — « Je n'ai rien voulu affirmer, dit-il, que je ne pusse facilement défendre par les Saintes Écritures ou par la doctrine du bienheureux Augustin [1]. » — « En revoyant ce que j'ai écrit, dit-il, je n'ai rien pu trouver qui ne fût en complet accord avec les écrits des Pères catholiques, surtout de S. Augustin. » — De fait, les idées des deux Docteurs touchant la matière que nous traitons sont identiques. « Si quelque raison est apportée contre l'autorité des Saintes Écritures, dit Augustin, quelque subtile qu'elle soit, ce n'est qu'une trompeuse apparence, car elle ne saurait être fondée. Et de même, si l'autorité des Saintes Écritures est opposée à une manifeste et certaine vérité de la raison, celui qui proclame cette contradiction manque d'intelligence. Ce n'est pas le vrai sens des Écritures qu'il allègue contre la raison, il n'a pas su le pénétrer; mais bien la signification qu'il leur prête [2]. » — Passant à l'usage positif de la Raison en matière de Foi, Augustin s'exprime en ces termes : « Si la foi ne différait point de la science, et s'il ne fallait avant tout croire les grandes et divines vérités que nous souhaitons comprendre, le prophète aurait dit en vain : *Si vous ne croyez pas, vous ne comprendrez pas* [3]. » — Con-

[1] *Praef. ad Mon.* — *Ep.* I, LXXIV.

[2] « Si ratio contra divinarum scripturarum auctoritatem redditur, quamlibet acuta sit, fallit verisimilitudine; nam vera esse non potest. Rursus si manifestissimae certissimaeque rationi velut scripturarum sanctarum objicitur auctoritas, non intelligit qui hoc facit; et non scripturarum illarum sensum, ad quem penetrare non potuit, sed suum potius objicit veritati; nec quod in eis, sed quod in se ipso velut pro eis invenit, opponit. » (*Ep. 143 ad Marcellin*, n° 7.)

[3] « Nisi aliud esset credere, et aliud intelligere, et primo credendum esset, quod magnum et divinum intelligere cuperemus, frustra propheta dixisset : Nisi credideritis, non intelligetis. Ipse quoque Dominus noster et dictis et factis ad credendum primo hortatus est, quos ad salutem vocavit. Sed postea cum de ipso dono loqueretur, quod erat daturus credentibus, non ait : haec est autem vita aeterna ut credant, sed *haec est,* nequit, *vita aeterna, ut agnoscant te solum Deum verum et quem misisti Jesum Christum.* Deinde jam credentibus dicit : *Quaerite et invenietis :* nam neque inventum dici

sentius avait défini la Foi une affaire où l'autorité doit être recherchée, et non la raison. Si vous exigez de moi ou de quelque autre, lui écrit Augustin, de vous faire comprendre ce que vous croyez déjà, changez donc votre définition de la foi, non afin de la mépriser, mais afin d'arriver à comprendre par la lumière de la raison ce que vous tenez déjà par la fermeté de la croyance. — « Si quelqu'un, ajoute encore Augustin, me dit : je veux *comprendre afin de croire*, je lui répondrai : *Crois, afin de comprendre* [1]. » — « Nous cherchons donc l'intelligence de la Trinité, écrit le grand Docteur, non d'une Trinité quelconque, mais de celle-là qui est la véritable Divinité... Vous qui entendez ces choses, attendez : nous cherchons encore : celui qui cherche l'intelligence de ces Mystères ne doit être repris par personne, à condition qu'il demeure très-ferme dans sa foi... La Foi assurée commence d'une certaine manière la connaissance [2]... »

Mais ici surgit une difficulté grave qu'il faut dissiper, avant d'aller plus loin. Malgré ces déclarations réitérées sur la distinction des vérités rationnelles et des vérités révélées, S. Anselme affirme qu'il a composé le Monologue et le Prosloge dans le but de démontrer, par des vérités nécessaires et sans l'autorité des Écritures, ce que nous croyons de la nature de Dieu et des Personnes divines. — « Dans la préface du Monologue, il écrit que ses confrères l'avaient prié de ne s'appuyer nulle part dans cet ouvrage sur l'autorité de l'Écriture, mais d'exposer dans un style clair, en des arguments à la portée de tous, et d'une facile discussion, les conclusions de chacune de ses recherches, telles que la

» potest quod incognitum; neque quisquam inveniendo Deo fit idoneus, nisi » antea crediderit quod est postea cogniturus. » (*De lib. arb.*, l. II, c. II.)

[1] « Dicit mihi : Intelligam, ut credam. Respondes : Crede, ut intelligas. » *Serm.* XLIII.

[2] « Trinitatem ergo quaerimus, non quamlibet, sed illam Trinitatem quae » Deus est... Expecta ergo quisquis haec audis : adhuc quaerimus, talia quae- » rentem nemo juste reprehendit, si tamen in fide firmissimus quaerat... Certa » enim fides utrumque inchoat cognitionem : cognitio vero certa non perficie- » tur nisi post hanc vitam, cum videbimus facies ad faciem. » (*De Trin.*, l. IX, c. I.) — Cf. Laforêt, *Coup d'œil sur l'hist. de la Dogm.*, p. 25.

raison force de les admettre et que l'évidence de la vérité les montre [1]. » De même, en l'Introduction de son Traité sur la Rédemption (*Cur Deus Homo?*), « il cherche à réfuter les objections des incrédules contre la Foi chrétienne, et à prouver par des raisons nécessaires, — comme si jamais il n'eût été question du Christ, — que nul homme n'a pu parvenir au salut sans lui [2]. » — Au livre II du même ouvrage, il montre par une démonstration non moins manifeste, « tout comme si l'on ne savait rien du Christ, que la nature humaine a été prédestinée à la bienheureuse immortalité dans tout son être, dans son corps et dans son âme : en outre, qu'il était nécessaire que l'homme parvînt à sa destination, mais que cela ne pouvait se réaliser que par l'Homme-Dieu, et que tout ce que nous croyons à son sujet s'est accompli avec une absolue nécessité [3]. » — De fait, les Théologiens notent

[1] « Duo parva opuscula mea, Monologion scilicet et Proslogion, ad hoc » maxime facta sunt, ut quod fide tenemus de divina natura et personis prae- » ter Incarnationem, necessariis rationibus, sine Scripturae auctoritate pro- » bari possit. » (*De fide Trinitatis*, c. IV.)

[2] « Quidam fratres saepe me studioseque precati sunt, ut quaedam, quae » illis de meditanda divinitatis essentia et quibusdam aliis hujusmodi me- » ditationi cohaerentibus usitato sermone colloquendo protuleram, sub quo- » dam eis meditationis exemplo describerem. Cujus scilicet scribendae medi- » tationis magis secundum suam voluntatem, quam secundum rei facilitatem » aut meam possibilitatem, hanc mihi formam praestituerunt : quatenus » auctoritate Scripturae penitus nihil in ea persuaderetur; sed quidquid per » singulas investigationes finis assereret, id ita esse plano stylo, et vulgari- » bus argumentis, simplicique disputatione, et rationis necessitas breviter » cogeret, et veritatis claritas patenter ostenderet. Voluerunt etiam, ut nec » simplicibus peneque fatuis objectionibus mihi occurrentibus obviare con- » temnerem. » (*Mon. Proœm.*)

[3] « Quorum prior quidem infidelium respuentium christianam fidem, *quia* » *rationi putant illam repugnare*, continet objectiones et fidelium respon- » siones; ac tandem, *remoto Christo*, quasi nunquam aliquid fuerit de eo, » probat rationibus necessariis esse impossibile ullum hominem salvari sine » illo. In secundo autem libro similiter, quasi nihil sciatur de Christo, mon- » stratur non minus aperta ratione et veritate naturam humanam ad hoc insti- » tutam esse, ut aliquando immortalitate beata totus homo, id est in corpore » et in anima frueretur ac necesse esse ut hoc fiat de homine propter quod » factus est, sed nonnisi per hominem Deum, atque ex necessitate omnia, » que de Christo credimus, fieri oportere. » (*Cur Deus Homo, in praef.*)

qu'Anselme a enseigné, contrairement aux autres Docteurs, l'absolue nécessité de la Rédemption et de l'Incarnation. — Comment concilier ces vues avec ses principes sur les rapports naturels de sa Philosophie et de sa Théologie? Comment en cela l'excuser d'un certain rationalisme ? Ce n'est pas une question théologique que nous soulevons, c'est une question de méthode générale; et nous avons d'autant plus le devoir de la poser, que plus d'un philosophe a accusé, en cette matière, notre Docteur d'hétérodoxie.

Nous répondrons avant tout qu'en bonne critique il faut juger du sentiment d'un écrivain par l'ensemble de ses idées. Toutes les fois qu'il s'est agi d'exposer l'esprit de sa doctrine, nous avons entendu le Docteur de Ste-Marie du Bec déclarer que les Dogmes doivent être la base de l'investigation rationnelle. Ce n'est qu'en tenant compte de ces explicites déclarations que nous pourrons intepréter sainement les passages incriminés. Un esprit si éminent, un aussi orthodoxe Docteur n'a pu se contredire sur l'essence même de la Démonstration chrétienne. Mais il est raisonnable de chercher dans le contexte des passages incriminés la solution des difficultés que nous venons de rappeler.

Le premier des textes incriminés appartient au chapitre IV du Traité *de la Foi en la Sainte Trinité.* Il suffit de mentionner les considérations qui précèdent pour voir toute son innocuité. L'auteur se réclame des arguments « invincibles » des Pères, surtout de S. Augustin. Il dit que ces preuves ont succédé à celles des Apôtres. C'est déjà tomber d'accord que les raisonnements d'Anselme, aussi bien que ceux d'Augustin, *présupposent l'enseignement révélé et s'appuient sur lui.* Mais, loin de confirmer la doctrine des Écritures, sa démonstration en serait l'antithèse, si elle avait pour but avoué d'entourer d'une complète évidence des Mystères dont les maîtres de la science sacrée attestent de concert l'obscurité et la transcendance. Aussi, quand il parle des spéculations du Monologue et du Prosloge conçues *en dehors de l'Écriture,* Anselme dit simplement qu'on ne pourra, à son avis, ni les rejeter, ni les dédaigner. Mais nulle part il n'affirme qu'on peut parvenir à se démontrer les Dogmes complétement, d'une façon adéquate et avec une pleine évidence.

Le passage tiré de l'opuscule *Cur Deus Homo?* implique, au point de vue des rapports de la Philosophie et de la Théologie, une très-sérieuse difficulté. Il est certain qu'Anselme y annonce l'intention de démontrer par la seule raison et sans tenir compte des Écritures, tous les points de la croyance catholique concernant l'Incarnation du Verbe. C'est par des vues purement spéculatives qu'il prétend établir *la nécessité* de toute l'économie de la Rédemption. Néanmoins, quelle est la marche que suit notre Docteur pour arriver à son but? Dans tout son raisonnement, il présuppose la donnée fondamentale de la chute originelle [1]. Ne l'oublions pas, cette vérité, la Révélation seule l'enseigne. En outre, dans la Préface de l'Opuscule dont nous nous occupons, le S. Docteur avertit qu'il va répondre aux objections des incrédules contre l'Incarnation. Or, dans le cas présent, ces objections s'appuyaient précisément sur le Dogme, loin d'en faire abstraction. Anselme ajoute que l'homme avait été créé par Dieu pour le posséder éternellement, et que le nombre de ceux-là qui doivent parvenir au salut est connu du Seigneur [2]. Il y a plus : avec son maître Augustin, avec Jean Scot, Erigène, il présuppose le conseil divin de remplacer par d'autres créatures raisonnables les Anges déchus, dans la béatitude céleste. Il ajoute que l'homme a été soumis à la tentation de l'esprit du mal, pour permettre à une créature inférieure de surpasser en fidélité les hiérarchies supérieures [3]. — Je ne fais que mentionner ces données. Elles appartiennent à la théologie, en partie à la mystique. Mais il sera certes permis de conclure que d'elles-mêmes, elles sont inaccessibles à la raison. Sans doute, dès qu'il les aura connues, le Docteur chrétien pourra construire, à part de toute théologie positive (*remoto Christo*), tout un système rationnel pour montrer que, dans l'hypothèse d'une *réparation complète,* l'Incarnation du Verbe fut la

[1] *Cur Deus Homo*, c. XVI.

[2] *Ibid.*

[3] *Ibid.* — Cf. Augustini Enchirid. ad Laurentium, c. XXIX. — *De civ. Dei*, l. XXII, c. I. — Jo. Scot. Erig., *de divisione naturæ*, l. V. — Ap. Abroell, *de mutuo fidei ac rationis consortio*, p. 84; Wirceburgi, 1864.

conséquence du péché d'Adam. Il n'en reste pas moins vrai que la base de l'argumentation d'Anselme se trouve dans la doctrine de la Foi. Il part de celle-ci pour s'élever à la connaissance des Mystères. C'est l'application de ses principes : *Credo ut intelligam ; Fides procedens intellectum.* Dans le développement de la théorie de la Rédemption, c'est à la raison seule qu'il emprunte ses preuves, « comme s'il n'était pas question du Christ. » Mais c'est du Christ, c'est des Écritures ou de la parole révélatrice, qu'il a accepté tous les fondements de ses spéculations. La démonstration ne serait entachée de rationalisme, qu'au cas où elle prétendrait à l'évidence absolue dont les mystères chrétiens ne sont pas susceptibles. Anselme parle beaucoup d'*arguments nécessaires.* Faut-il entendre ces mots dans toute leur rigueur? Nous allons demander la réponse à Anselme lui-même.

Dans le *Monologue,* il dit en parlant de la Génération du Verbe, que c'est un Mystère supérieur à toute intelligence créée. Mais malgré son insuffisance à le pénétrer, celle-ci n'a pas le droit de refuser son assentiment à un Dogme dont elle s'est prouvé la vérité au moyen d'*arguments nécessaires* que ne contredit aucune raison évidente [1]. « Anselme se demande ensuite comment peuvent coexister des preuves nécessaires et des Mystères. Il répond que ces preuves n'éclaircissent qu'une partie des Dogmes. » Nous pouvons les éclaircir partiellement, surtout au point de vue polémique. Nous pouvons montrer qu'on ne peut leur opposer « aucune raison évidente, » pour parler avec notre

[1] « Videtur mihi hujus tam sublimis rei secretum transcendere omnem » intellectus aciem humani, et idcirco conatum explicandi, qualiter hoc sit, » continendum puto. Sufficere namque debere existimo rem incomprehensi- » bilem indaganti, si ad hoc ratiocinando pervenerit, ut eam certissime *esse* » cognoscat, etiamsi penetrare nequeat intellectu *quomodo* ita sit; nec idcirco » minus his adhibendam fidei certitudinem, quae *probationibus necessariis* » nulla alia repugnante ratione asseruntur, si suae naturalis altitudinis incom- » prehensibilitate explicari non patiantur. Quid autem tam incomprehensibile, » tam ineffabile quam id quod supra omnia est? Quapropter, si ea quae de » summa essentia hactenus disputata sunt *necessariis sunt rationibus asserta,* » quamvis sic intellectu penetrari non possint ut et verbis valeant explicari, » nullatenus tamen certitudinis eorum nutat soliditas. » *Monol.,* c. LXIV.)

Docteur. Mais dans leur totalité, ils restent obscurs, comme il s'en explique avec tant d'énergie [1]. « Pour parler du Traité sur la Rédemption, je n'y veux élucider le grand Mystère, dit-il, qu'à une condition : c'est que si ma preuve n'est point confirmée par une plus grande autorité, bien qu'elle paraisse approuvée par l'esprit, elle ne soit néanmoins regardée comme certaine, qu'en attendant que Dieu m'inspire quelque chose de mieux. Si je parviens à satisfaire en quelque manière à votre question, qu'il soit établi qu'un autre plus sage y répondrait bien mieux. Il est à noter que quoi que l'homme puisse dire ou savoir, en cette matière, les plus hautes raisons d'un si auguste secret lui restent cachées [2]. » Anselme n'insiste pas moins sur l'impuissance de l'esprit à concevoir l'élection des prédestinés. « Dieu la réalise, dit-il; si nous ne pouvons la comprendre, il ne faut pas s'en étonner, mais souffrir avec vénération qu'il y ait dans l'abîme d'un pareil dessein un côté qui nous reste ignoré. » Aussi Anselme s'excuse auprès de Boson sur son incapacité de développer dignement le sujet qu'il l'engage à traiter.

Les éclaircissements que nous venons d'entendre sauvegardent parfaitement l'obscurité essentielle des Dogmes. Même après le fait de la révélation, Anselme ne croit pas qu'on puisse démontrer d'une façon complète les Mystères de la Foi chrétienne. Mais si de la critique interne, nous passons à la critique externe, son senti-

[1] « Sed rursum, si ita se ratio ineffabilitatis illius habet, imo quia sic est : » quomodo stabit quidquid de illa secundum Patris et Filii et Spiritus proce- » dentis habitudinem disputatum est? Nam si vera illud ratione explicitum » est, qualiter est illa ineffabilis? Aut si ineffabilis est, quomodo est ita sicut » est disputatum? Aut quodantenus de illa potuit explicari, et ideo nihil pro- » hibet esse verum quod disputatum est; sed *quia penitus non potuit com-* » *prehendi*, idcirco est ineffabilis? » *Ibid.*, c. LXV.

[2] « Sed eo pacto quo omnia quae dico, accipi volo : videlicet ut si quid » dixero, quod major non confirmet auctoritas, quamvis illud ratione pro- » bare videar, non alia certitudine accipiatur, nisi quia interim mihi ita vide- » tur, donec Deus melius aliquid modo revelet. Quod si aliquatenus quaes- » tioni tuae satisfacere potero, certum esse debebit, quia et sapientior me » plenius hoc facere poterit, imo sciendum est, quidquid homo inde dicere vel » scire possit, altiores tantae rei adhuc latere rationes. » *Cur Deus homo*, c. II.

ment devient plus certain encore. Lui-même, en plusieurs endroits, affirme la solidarité de sa doctrine avec celle de S. Augustin. Le Docteur d'Hippone n'admit jamais qu'une démonstration analogique des Vérités de Foi. Toutefois comme Anselme, dans la spéculation, son grand souci, c'est la *valeur logique* de l'argumentation. « S'il s'agit des Vérités de Foi, répète Augustin, croyons sans aucune infidélité. S'il s'agit de leur intelligence, affirmons sans témérité. Là, il faut tenir l'autorité; ici, il ne faut rechercher que la Vérité. » — Traitant de la Rédemption des hommes, il affirme que l'économie du salut fut de tout point parfaite, et conforme à la divine miséricorde; il ajoute néanmoins que « Dieu à la puissance duquel toutes les choses sont également soumises, ne manqua pas d'autres moyens pour nous sauver [1]. »

Rien d'étonnant, après tout cela, que Duns Scot ne veuille accepter les « Arguments nécessaires » d'Anselme que dans un sens large, et non selon l'absolue rigueur des termes [2]. Cette interprétation est fondée sur la terminologie du temps. La langue technique n'existait pas au XI[e] siècle. Ce n'est pas seulement Anselme, mais aussi Richard de S. Victor qui s'exprime de cette manière. « Je crois sans hésitation, dit celui-ci, que pour n'importe quelle démonstration de choses nécessaires, il ne peut manquer d'exister des arguments non-seulement probables, mais *nécessaires* [3]. » Hugues de S. Victor mentionne aussi les preuves « qui engendrent la claire démonstration [4]. » Cela n'empêche pas ce dernier d'écrire

[1] « Istum modum quo nos per mediatorem Dei et hominum Christum Jesum » Deus liberare dignatur, asseramus bonum et divinae congruum dignitati, » verum etiam ostendamus, non alium modum possibilem Deo defuisse, cujus » potestati cuncta aequaliter subjacent. » (*De Trin.*, l. XIII, c. X.)

[2] « Ad auctoritates Richardi et Anselmi dicendum, quod adducunt ipse, » sicut et caeteri doctores, rationes necessarias, sed non evidenter necessa- » rias : non enim omne necessarium est evidenter necessarium. » (*Report. Paris.*, prol. q. 2, n° 18.)

[3] « Credo namque sine dubio, quoniam ad quorumlibet explanationem quae » necesse est esse, non modo probabilia, sed etiam necessaria argumenta non » deesse, quamvis illa interim contingat nostram industriam latere. » (*De Trin.*, l. I, c. IV.)

[4] « (Sunt quaedam signa) expressa imagine et perfecta similitudine consig- » nata *quae claram demonstrationem efficiunt.* » (*De sacr. fidei*, l. I, p. II, c. VI.)

que « bien que la raison ne puisse comprendre les vérités révélées, » cependant elle n'y contredit pas. Il appelle ces mêmes arguments des « *preuves probables* [1]. » — Richard de S. Victor, malgré les assertions que nous venons d'entendre, n'en partage pas moins le sentiment d'Augustin et d'Anselme touchant la transcendance des choses « dont on obtient la certitude par la Foi. » — Il y a dans son traité *de la Trinité* une distinction qui peut jeter quelque jour sur les *démonstrations nécessaires* de S. Anselme. Richard range dans cette catégorie les preuves déduites de la nature des choses et qui sont, par conséquent, immuables et éternelles, *au moins pour celui qui connaît leur essence*. Les *vérités contingentes* sont celles qui ont leur source dans la *libre volonté* de Dieu ou des créatures. Cette vue peut servir à l'intelligence d'Anselme. Dans le Monologue comme dans l'Opuscule : *Cur Deus Homo ?* les spéculations du S. Docteur sont toutes basées sur des principes absolus, logiques ou métaphysiques. Les déductions concernant l'existence de Dieu et son essence sont tirées du concept de *l'Être le plus parfait*. Les élucidations sur la très-sainte Trinité sont principalement basées sur l'anthropologie : l'Être absolu, le Verbe intérieur, reflet immanent de l'objet perçu ; le nécessaire amour du premier Principe pour la parfaite image de son infinie Perfection, voilà les facteurs de l'argumentation. Nous savons, comme en avertira un jour le Docteur angélique, que tous ces symboles ne prouvent pas encore *l'unité essentielle* des trois divines hypostases. Mais ils n'en sont pas moins fondés sur *des idées logiques*, et en ce sens, sur *des considérations nécessaires*. — Il faut en dire autant du principe d'où Anselme induit la nécessité de l'Incarnation, ou de l'impossibilité de restaurer l'ordre moral troublé par la chute d'Adam, sans une expiation accomplie par un Dieu incarné. Encore une fois, cette considération, elle aussi, est empruntée à l'ordre logique. Elle repose sur une hypothèse : la nécessité de sauver le genre humain déchu, pour restaurer le plan primitif de la création, et l'impossibilité de

[1] *Ibid.*, p. III, c. XXVIII. — Sur toute cette question voyez la thèse du Dr Abroell : *De mutuo fidei ac rationis consortio*. Wurzbourg, 1864. — Nous avons fréquemment suivi ce savant et solide travail.

réaliser ce but sans une satisfaction accomplie par une personne infinie, dans un corps passible. Sans doute, — et Anselme a trop laissé ce point dans l'ombre, — le rachat de l'homme prévaricateur présuppose un libre décret de la divine miséricorde, renonçant aux droits vengeurs de sa justice. Cependant, en partant des postulats généraux qu'il avance, il a pu nommer ces preuves des arguments nécessaires. En tout cas, lui-même nous l'apprend : ces démonstrations restent inadéquates, parce qu'elles ont pour dernier terme l'Intelligible absolu, l'Infini. L'esprit qui pourrait embrasser toute la portée de certains de leurs principes arriverait à plonger son regard jusqu'au cœur du mystère. Mais la raison bornée de l'homme n'entrevoit qu'en partie leur nécessité, leur extension : surtout, elle est incapable d'égaler la compréhension de la première prémisse d'où découlent les propositions subséquentes : l'essence de l'Être absolu. C'est ainsi que d'excellents juges ont compris les paroles de Duns Scot au sujet de cette question. « Quoique les raisonnements de Richard, d'Anselme et des autres Docteurs, dit celui-ci, soient composés de vérités nécessaires, cependant leurs prémisses ne sont pas évidentes pour nous, en vertu des termes eux-mêmes [1]. » Avant Scot, S. Thomas d'Aquin avait interprété dans ce sens le Victorin : Il a enseigné, dit-il, que les mystères considérés en eux-mêmes ont des raisons et des preuves nécessaires dans l'Intelligence ou dans l'Essence divine, mais il n'a pas écrit que ces raisons sont accessibles à l'esprit humain [2]. Nous n'hésitons pas à appliquer ces paroles aux démonstrations d'Anselme et des Docteurs qui ont adopté son langage [3].

Je sais que deux autres maîtres illustres, Alexandre de Halès et S. Bonaventure, estiment que notre Docteur n'a entendu parler,

[1] « Licet sunt ex necessariis, non tamen praemissae sunt necessario evi» dentes, quia non sunt notae ex terminis nobis notis. « (*In I sent.*, d. 42, q. 1, n° 4.) — Voir Denzinger, *Relig. Erkennt.*, t. II, pp. 107 et suiv.

[2] Cf. S. Thomas, *Quaest. disput.*, q. 14.

[3] Notre Henri Goethals (Gandavensis) se rapproche surtout de la phraséologie d'Anselme. — Cf. *Quodlib.*, VIII, q. 14. — *Quodl.*, XII, q. 2. — Voyez aussi Gerson, *Alphabet*, XIII. — Cf. Suarez, *De myst. S. Trin.*, l. I, c. XII. — D'Aguirre, *Theologia S. Anselmi*, t. 1er, disp. 1. — Kleutgen, *Theol. der Vorzeit.*, t. III, p. 830, sq.

dans ses recherches sur la Rédemption que d'une nécessité *de simple conséquence*, ou logiquement postérieure au décret de l'Incarnation lui-même. Difficilement les textes se plieraient à cette exégèse. Nous préférons croire, avec Suarez, qu'Anselme a voulu parler d'une nécessité dans le sens large du mot, d'une haute convenance, à peu près comme nous l'avons entendu signaler ces *arguments nécessaires,* laissant toutefois aux Mystères, avec leur obscurité essentielle, leur impénétrable profondeur [1]. Cette interprétation est d'autant moins gratuite que dans une de ses Méditations, notre Docteur lui-même assure que Dieu pouvait sauver l'humanité déchue de plusieurs manières, mais qu'il préféra l'Incarnation afin d'exalter sa miséricorde. Nous avons le droit de conclure des réflexions qui précèdent que la nécessité de l'Incarnation n'a pu être par lui défendue que *dans l'hypothèse préalable* du décret divin de pardonner la faute originelle et d'en exiger une *rigoureuse et complète réparation*. Qu'Anselme s'appuie dans ses conclusions sur ce que Dieu fait toujours ce qu'il y a de mieux et de plus convenable [2], cela ne doit pas nous faire changer de sentiment. Vasquez [3] et Ruiz [4] ont établi que les Pères dont le Docteur du Bec suit les traditions enseignent à la vérité que, dans ses opérations au dehors (*operationes ad extra*), Dieu assure à chaque être créé la part d'activité la mieux appropriée à sa nature, et à l'ordonnance de l'ensemble. Mais quant à la perfection *absolue* et même impossible, ils ne la requièrent que dans les actes immanents qui constituent la vie intime de la Divinité. SS. Athanase [5], Grégoire de Nazianze [6], Cyrille d'Alexandrie [7], Théodoret [8], Léon le Grand [9], et

[1] Cf. Suarez, *de Incarn.*, d. IV, sect. II, n. 4.

[2] *Cur Deus homo*, c. X.

[3] *In III P. S. Th.*, d. 1, n° 10.

[4] *De Trin.*, d. XCIII, sect. V.— Lugo traite admirablement toute cette question, au point de vue spéculatif. *De Incarn.*, d. II, sect. I.— Dans ces doctes pages l'optimisme est pressenti et réfuté d'avance.

[5] *Serm.*, III, cont. Ar.

[6] *Or. IX.*

[7] *De Incarn.*, ap. Euthim, lit. XIII.

[8] *Orat. cont. Graec.*, VI.

[9] *Serm. II de Nativit.*

par-dessus tous, le maître principal d'Anselme, Augustin, sont formels sur la liberté de la Rédemption et de l'Incarnation du Verbe [1]. Les passages où quelques-uns d'entre eux, S. Cyrille par exemple, semblent parler de la nécessité de l'économie actuelle, présupposent le *libre* conseil d'exiger de la faute d'Adam une *satisfaction stricte* [2].

Il n'est pas douteux qu'Anselme aurait pu s'expliquer avec plus de précision en certains éclaircissements qu'il a donnés aux Dogmes. Parfois, l'alliance, nous dirions volontiers le mélange de l'élément révélé et de l'élément spéculatif nuit à la logique de ses argumentations. Les Docteurs postérieurs s'en sont plaints, quelques-uns assez vivement. Cette sorte de laxisme dialectique se conçoit : Anselme est un esprit synthétique, à la manière des Platoniciens. Pour des hommes ainsi organisés, l'idée, le type rationnel est facilement représenté comme un fait, comme une réalité. A leur insu, la thèse se glisse dans l'argument. Cela est vrai dans les applications comme dans la théorie pure. Combien de tels procédés créent d'embarras, causent de surprises ! Mais ces réserves faites [3], l'on aurait tort de prêter à la méthode d'Anselme, une affinité réelle avec le semi-rationalisme théologique de quelques modernes. Le Docteur de l'abbaye du Bec n'a jamais tenu qu'on peut démontrer complétement les Mystères de la Foi, même après leur révélation. Ses déductions, parfois, sont contestables; ses paroles présentent quelques nuages; sa pensée, à cet égard, reste claire. Nous nous serions volontiers dispensé de le rappeler, n'étaient les suspicions soulevées contre son système par l'un ou l'autre critique. Ces dernières pages sont devenues quelque peu théologiques : ce n'est pas notre faute.

Il nous reste, pour compléter notre Étude, à porter un jugement d'ensemble sur le mouvement intellectuel auquel se rattache la philosophie d'Anselme de Cantorbéry.

[1] Voir le texte cité p. 386, note 1, et *De agone christiano*, c. XI.

[2] Cf. PETAU, *de Inc.*, l. II, c. XIII.

[3] Denis Pétau, Lugo, Suarez, tous les grands Théologiens les ont très-formellement faites.

§ 2.

Nature caractéristique du procédé scientifique d'Anselme. — De la méthode scolastique.

Nous venons de le constater : la Méthode de philosophie religieuse de S. Anselme ne diffère pas, pour le fond, de celle des premiers Maîtres chrétiens. Il y a toutefois, dans ses écrits, un élément caractéristique tout à fait remarquable. C'est la rigueur scientifique des formes du raisonnement et l'évolution régulière des preuves. Anselme ne se sert pas du syllogisme, dans l'exposition de la doctrine, comme cela deviendra l'habitude au XIII^{e} siècle. Mais ses ouvrages présentent une suite d'enthymèmes, de propositions exclusives et distributives, que l'on ne rencontre pas, à ce degré, chez les écrivains de l'époque patristique. Presque jamais il n'use de l'argumentation pour formuler lui-même contre le Dogme des difficultés d'où l'esprit attend des lumières nouvelles. La démonstration est consacrée à la preuve directe de la thèse. L'objection semble, pour Anselme, d'une assez médiocre importance. Il s'arrête peu aux sophismes d'un adversaire supposé, il les préoccupe. — Moins technique, moins artificielle que la forme postérieure, celle de notre Docteur fixe peut-être mieux le regard de l'esprit sur les principes eux-mêmes. Quoi qu'il en soit, l'appareil dialectique des traités de notre S. Docteur, et l'ensemble organique qu'ils présentent sont un trait distinctif : ils ne se rencontrent, en une telle mesure, chez aucun écrivain antérieur à Anselme.

De fait, c'est que la science était entrée dans une période nouvelle. La Méthode dite scolastique va régner universellement dans les écoles. Nous devons nous arrêter quelque temps à ce mouvement de l'esprit. Son appréciation rentre d'autant plus dans notre sujet, qu'on a coutume d'appeler Anselme *le Père de la Scolastique.*

Les savants n'ont pas omis, on le pense bien, d'interpréter la restauration célèbre que nous venons de nommer. Lorsque les érudits expliquent les faits, ils transportent parfois dans la vie réelle le raffinement de leurs pensées. Volontiers l'homme de l'idée accommode les événements à ses conceptions grandioses ou ingénieuses. Eh! presque toujours, la simplicité de la nature déconcerte les systèmes laborieux!

Aux yeux de Tiedemann, la Scolastique n'aurait été que l'élucidation *a priori* des Vérités religieuses, dans laquelle, après l'exposition des raisons *pour* et *contre* le Dogme, la conclusion est tirée, en forme syllogistique, d'Aristote, des Pères de l'Église et des systèmes ecclésiastiques [1]. — A bon droit, le Dr Tennemann estime que son prédécesseur n'a tenu compte que de l'aspect extérieur du problème. Pour lui, il aime mieux voir, dans la Scolastique, l'effort de l'esprit, timide encore, mais aspirant à découvrir dans la philosophie, la connaissance des vérités suprasensibles, renfermées dans la révélation [2]. — Möhler y signale un mouvement de la pensée cherchant à démontrer que « tout ce qui est chrétien est rationnel et que tout ce qui est rationnel est chrétien [3]. » Cette vue brillamment développée dans

[1] *Gesch. der Phil.*, t. IV, p. 125. — « Sie (die scholastik) ist diejenige behand-
» lung der gegenstande *a priori*, wo nach aufstellung der meisten *fur* und
» *wieder* aufzutreibenden Grunde, in syllogistische form, die Entscheidung
» aus Aristoteles, den Kirchenvatern und dem herrschenden glaubens ge-
» baude genommen wird. » — Tiedemann, malgré ses erreurs, s'est occupé bien plus sérieusement à demêler la nature de la Scolastique que Tribbechovius (*De doct. schol.*, c. III) et Campanella (*De Gentilismo non retinendo*). Ceux-ci ont vu dans la scolastique un mélange de vues grecques et arabes!

[2] *Geschichte der Phil.*, t. V, p. 28.

[3] « Die scholastik überhaupt können wir jenen vom Ende der elften bis
» zum Anfang des sechzehnten Jahrhunderts dauernden versuch nennen,
» das christliche als rational, und das wahrhaft rationale als christlich zu
» erweisen; womit das bemühen notwendig sich vereinte, klar, scharf und
» bestimmt die begriff der christlichen lehren festzusetzen. Denn nichts ver-
» mag als Idee aufgefatzt zu werden, was in sich selbst unbestimmt ist,
» sobald sie klar gedacht worden. » — *Gesammelte schriften und Auffatzen*, herausgegeben von Dollinger, 1839, I, pp. 129 et suiv. (Anselm von Canterbury).

la monographie d'Anselme de Cantorbéry, contient une grande part de vérité. Mais sa forme est un peu exclusive. Tous les Docteurs, depuis Clément l'Alexandrin et S. Justin, se sont proposé le but que Möhler assigne à la Scolastique. Est-ce d'un développement de la forme ancienne qu'a voulu parler le célèbre auteur de la Symbolique? En ce cas, l'explication serait plus juste. Möhler a voulu, sans doute, caractériser l'esprit général de la Scolastique, et l'opposer aux critiques mesquins qui n'y voient qu'un retour à la Dialectique d'Aristote [1]. Il est bien mieux inspiré, sans contredit, lorsqu'il y montre la démonstration de la Foi elle-même. Mais ce n'est pas ce qui la distingue. Les Pères ont poursuivi le même but. M. Hauréau l'a écrit fort judicieusement : « Reconnaissons, dit-il, que nos Docteurs du moyen âge furent à la fois théologiens et philosophes; accordons même qu'ils osèrent demander à leur Métaphysique la solution des problèmes les plus redoutables, et disserter avec elle sur l'Essence même de Dieu; mais ajoutons aussitôt que les Pères les mieux famés avaient eu cette audace [2]. »

Faut-il penser, avec d'autres écrivains, dont un consciencieux commentateur d'Anselme s'est fait l'organe, que les Scolastiques n'ont fait que coordonner systématiquement les écrits des Pères? Les Docteurs des âges de foi ont-ils pris pour base unique de leurs travaux les traités des anciens, comme ceux-ci s'étaient référés aux Écritures [3]? — Soutenir cela, n'est-ce pas amoindrir à l'excès

[1] Voir *Ibid.*, pp. 130 et suiv.

[2] I, p. 3.

[3] Le Dr Hasse, dans son grand ouvrage sur la vie et les œuvres d'Anselme, distingue dans l'histoire du symbole la *Foi* (Christenthum als glaube), la *conscience* (Christenthum als bewusstsein), enfin la *science* (Erkenntniss).—Après une exposition habile et éloquente du mouvement de l'idée chrétienne jusqu'au moyen âge, il conclut ainsi : « Um es kurz zu bezeichnen : den inhalt der theo- » logie hatte die Patristische speculation erzeugt, die wissenschaftliche form » aber fehlte. Hier was es nun, wo das Mittelalter eintrat. Der Glaube hatte » obgesiegt, das Dogma stand fest : jedes apologetische, jedes kirchlich-prak- » tische bedurfniss fiel hinweg. Erst da also konnte ein rein-theoretische inte- » resse entstehen, erst da die Erkenntniss sich selbstzweck werden. Unde » hatte er in der alten kirche silh wesentlich um die herausetzung, um die

la Scolastique? Je sais qu'à propos de celle-ci, le Dr Hohne tient que c'est l'usage des esprits subalternes d'ordonner et de classifier les créations des penseurs de génie [1]. Mais qui voudrait ranger parmi ces intelligences secondes des Maîtres comme Anselme, les Victorins, Albert le Grand, Thomas d'Aquin, Bonaventure, Duns Scot? Pour citer quelques exemples, les vues de S. Anselme sur la preuve de l'existence de l'Être infini, sur la nécessité de l'Incarnation, sur la nature de la Vérité, les magnifiques développements donnés par Thomas d'Aquin à l'idée de la Création, à la Vie divine, à toute la Théodicée ne renferment-elles pas bien des traits originaux? Sans doute, au moyen âge, la science du Dogme avait accompli de très-sérieux progrès : les polémiques des six premiers siècles touchant les principaux mystères du Christianisme avaient circonscrit et précisé la Doctrine sur la plupart des points essentiels. C'est avec toute raison que le Dr Hasse relève ce point. Mais la question de l'Adoptianisme, la renaissance de l'Émanatisme alexandrin, sous Jean Scot Érigène, plus tard la controverse si subtile sur la procession du S. Esprit, le débat du Nominalisme et du Réalisme dans ses hauts sommets et dans ses applications aux Mystères, les démêlés sur l'Eucharistie, les disputes sur la liberté divine dans ses opérations

» objectivirung des Glaubens gehandelt, so musste jetzt die umgekehrte bewe-
» gung eintreten, das subject sich wieder des objects zu bemächtigen, es
» wieder in sich hereinzuziehen, sich zu assimiliren suchen, nur diesmal
» denkend, nicht glaubend. » (*Anselm von Canterbury*, p. 15.)

[1] « Scholastici vocantur qui hoc munus subierint et *materiam* (istam) a » patribus jam coacervatam in certam quamdam *formam* redigere studuerint. » Hanc enim semper posteriorum curam esse constat, quorum animi majorum » ingenium et inventionem non adaequent. Ac laude graviore inde carere » solent qui non tam de adaugenda *rerum* veritate quam de rerum compo- » nendarum *ordine* et *perspicuitate* bene mereantur... Ita vero duae res » minime inter se similes conjungi coeptae sunt; nam quae *credebant* chris- » tiani *ultra omnem conceptum* esse, ea *praeter* ecclesiae *auctoritatem* vel » etiam *rationibus* argumentisque explicari et firmari, inde vero *notionibus* » circumscribi et cogitatione percipi posse videbantur. — *Anselmi Cant. Phi- » losophia cum aliorum illius aetatis decretis comparatur.* » — *Dissert.* Aem., Hoehne (praemio donata), a Facult. theol Lipsiensi, 1867.

externes et sur le concours de la Grâce avec le libre arbitre, les discussions touchant le Panthéisme d'Amaury de Bène et de David de Dinant, la querelle sur l'intellect agent d'Aristote, tout cela, sans égaler toujours l'intérêt des grandes causes patristiques, fut cependant d'une incontestable gravité. Pour traiter de pareils sujets, il ne suffisait pas de systématiser les traités des Pères. Afin d'y réussir, il était besoin d'unir au sens traditionnel une grande finesse et beaucoup d'élévation d'esprit. — Ce n'est pas uniquement en des vues isolées, s'écrie Möhler, par intuitions instantanées, et sans atteindre à une claire conscience d'elle même que se manifeste l'originalité des Scolastiques : c'est en des conceptions nettement définies, accusées avec vigueur, approfondies sous tous les rapports [1].

L'un des plus sagaces critiques d'Anselme, le Dr Franck, ne dénonce pas seulement dans la Scolastique ce mouvement de simple réflexion sur les doctrines des Pères sans originalité ni initiative : il reproche, en outre, aux docteurs de n'avoir pas saisi le concept fondamental, le principe interne et générateur des Dogmes. C'est à l'absence de ce fil conducteur qu'il attribue l'inextricable complication des disputes et les vaines subtilités qui, selon lui, divisèrent les Écoles. « L'on peut dire, écrit ce savant, que la Scolastique ne présente aucun ensemble systématique ; elle a manqué d'un Principe, pour autant que par principe l'on entend la force interne qui meut *le tout*, se répand dans chaque partie et élève ainsi l'ensemble à l'état d'organisme. Par-dessus tout il faut mettre le défaut de la Scolastique, dans son ignorance de la méthode scientifique, consistant dans l'évolution progressive du Concept. La Scolastique s'est tenue sur le domaine de la réflexion ; elle n'a eu de réalité que dans la spéculation intellectuelle sur les données révélées qui lui étaient communiquées du dehors [2]. »

M. Franck est un disciple d'Hégel. Il y a dans sa critique une certaine confusion. Toute doctrine qui se pose comme révélée

[1] *Op. cit.*, p. 130.
[2] *Anselm von Canterbury*, dargestellt von C.-F. Franck, pp. 84 et suiv.

est par son essence *extrinsèque,* puisque son origine est surnaturelle, et son contenu supérieur à l'intuition de l'esprit. Mais elle n'en a pas moins en soi un principe actif d'évolution. Comment cela? N'est-elle pas une manifestation de la Vie Intime de Dieu, se découvrant jusqu'à un certain point à l'homme? Certes le *fond* de l'Essence infinie ne peut nous être connu. Mais est-il impossible à l'intelligence créée d'entrevoir, à la double lumière de la raison et de la Foi, quelques côtés de l'Absolu? Sans tenir avec les hégéliens, que la Vérité est la *thèse* ou le concept absolu posant fatalement son *antithèse* dans la nature et arrivant à la *synthèse* ou à la conscience dans la pensée de l'être raisonnable, ne peut-on chercher la loi fondamentale de l'Intelligence infinie, lien des mystères qu'Elle-même a manifestés à l'homme, et qui expriment, dans une juste mesure, les mystères de l'Absolu? Anselme lui-même a trouvé le principe objectif de la science de l'Infini, je veux dire sa nécessité et son actualité suprême. Les autres Maîtres, Thomas d'Aquin et S. Bonaventure notamment, dans leurs études profondes sur la Théodicée et la très-sainte Trinité, n'ont-ils pas montré l'enchaînement harmonieux des Dogmes, et réalisé cette conception organique de la théologie que vante M. Franck ? Ces Docteurs n'ont-ils pas expressément signalé dans l'aséité et l'actualité infiniment simple de Dieu le principe interne, le concept fondamental, pour ainsi parler, de la vie immanente du premier Être? Il est très-vrai; pour rendre compte des opérations extérieures de la Divinité, il faut d'après eux, à côté de cette nécessité de l'Essence absolue, reconnaître sa libre volonté. L'école de Hégel ne veut pas de ce deuxième facteur. Mais elle n'a pas le droit de blâmer les Scolastiques d'avoir faussé la démonstration des Dogmes, parce qu'ils n'ont pas jugé à propos de souscrire à ses thèses idéalistes [1].

[1] Ajoutons que malgré l'arrêt sévère qu'il rend contre la méthode scolastique, M. Franck est loin de n'y voir qu'une vaine exhibition de subtilités et de sophismes dialectiques. — Il lui reconnaît de très-sérieux mérites. On a quelque peine à comprendre comment une science sans principe générateur ait pu échapper à une universelle médiocrité.

Croirait-on qu'après une pareille sentence contre la Scolastique, le Dr Franck y ait aperçu un mouvement hostile à l'autorité de l'Église? Le critique allemand se rapproche en cela de M. Barthélemy S. Hilaire, qui juge aussi que la Scolastique est, dans son résultat général, « la première insurrection de l'esprit moderne contre l'autorité [1].» Baumgarten-Crusius y dénonce également une école se mouvant en dehors de l'enseignement officiel, pour chercher à la pensée de plus vastes horizons et échapper aux lisières des Dogmes ecclésiastiques [2]. M. Hauréau acclame dans les spéculations du moyen âge cet esprit révolutionnaire qui, souvent à l'insu des pieux Docteurs, sortait de leurs subtiles disputes et préparait l'avénement du libre examen.

Ne serait-il pas étrange qu'une méthode qu'on accuse si fort de passivité et d'impuissance, fût devenue l'organe de la critique émancipée? Qu'y a-t-il de vrai, qu'y a-t-il de précaire dans ces vues? Sont-elles conformes à l'histoire?

C'est d'après son esprit, d'après son concept fondamental qu'il faut juger d'un mouvement intellectuel. Là est son principe, sa source de vie, l'âme qui le meut, la force qui explique et relie ses multiples manifestations. Or, le principe de toute la Scolastique est celui qu'Anselme le premier a formulé dans les sentences énergiques que nous savons : *Credo ut intelligam; Fides præcedit intellectum.* Les écarts que subira la science doivent être estimées par le critique à leur juste valeur : ce sont des contingences accidentelles, des déviations irresponsables ou des ruptures avouées. On nous dit que déjà Jean Scot Érigène est un hétérodoxe : on cite au même titre Abélard, Gilbert de la Porrée, Amaury de Bène et surtout, après les orageux débats sur les universaux, Guillaume d'Occam, le père de la critique moderne! Mais Scot, pour ses témérités mêmes, demeura solitaire, presque en dehors du mouvement : son influence, Ritter l'avoue, a été insignifiante; Anselme ne le cite nulle part. Roscelin n'osa être trithéiste qu'en se prétendant disciple de Lanfranc et d'An-

[1] *De la logique d'Aristote*, t. II, p. 194.
[2] *Ibid* II, pp. 524-525.

selme, malgré ces maîtres. Abélard poussa fort loin la hardiesse : sa vanité et ses aventures l'avaient rendu suspect. Mais au jugement de très-habiles critiques, les audaces de son langage ont plus d'une fois dénaturé sa doctrine. Ce qui est capital, c'est que ce bouillant penseur rendit hommage à l'esprit de son temps. S'il ne fut pas orthodoxe, il se vanta de l'être, fit tout pour en persuader l'Église et mourut admiré par Pierre le Vénérable, et loué par lui pour l'humilité et la foi de ses dernières années. Gilbert de la Porrée et Amaury de Bène ne se soucièrent pas davantage de se séparer des fidèles. Quant à Occam, ce n'est plus un scolastique, mais un rebelle, un dissident. A force de s'exagérer les enseignements du passé, il finit par le prendre en haine et se sépara de l'Église aussi bien que de l'École.

Dira-t-on que la spéculation, l'analyse, la manie de tout scruter, d'abord pour la gloire de Dieu, puis par amour de l'idée, amenèrent la réaction contre les Dogmes ? Que les liens respectés d'abord finirent par être tranchés par le glaive de la discussion ? Eh ! du moment que le principe d'autorité, dont ils s'étaient démontré la légitimité, demeurait par eux respecté, les Scolastiques furent certes de très-indépendants penseurs. Mais en cela ils usèrent du droit que le Christ a assuré à tous les croyants. Qui fut plus hardi qu'Augustin ? Quel théologien osa expliquer le Mystère de la Rédemption avec autant de liberté qu'Anselme de Cantorbéry ? Scot n'était pas timide non plus, quand il faisait de son opposition à S. Thomas, le plus considérable des Maîtres, une sorte de système. — Les Docteurs se souvenaient des Pères. Sûre de leur orthodoxie, l'Église n'entrava point leur génie. Il y avait longtemps qu'elle leur avait octroyé la charte de la vraie liberté scientifique, dont Vincent de Lérins s'était fait l'interprète et le champion, lorsqu'il adressait aux philosophes chrétiens ces paroles restées fameuses : « Que grâce à vos lumières, la postérité se félicite de comprendre ce que vos devanciers croyaient avec vénération, sans en avoir l'intelligence. Enseignez les mêmes choses qui vous ont été transmises, de façon qu'en les présentant sous une forme nouvelle, vous n'inventiez pas des dogmes nouveaux... Il est juste de limer, de polir avec le temps les thèses antiques de la philosophie sacrée;

mais c'est un crime de les changer, c'est un crime de les altérer, de les mutiler. Qu'elles reçoivent une lumière, une clarté nouvelle, qu'elles gagnent en précision, mais que toujours elles conservent leur plénitude, leur intégrité, leur nature [1] ! » L'Église demeura fidèle à ses traditions en condamnant les novateurs, comme autrefois, elle avait condamné les Semi-Ariens qui faisaient d'Aristote la règle des Dogmes, et plus tard le brillant Origène, le hardi Pélage. Voilà la loi qui, dès l'origine, régit la science religieuse, dans ses rapports avec la philosophie. Ce n'est pas de la Scolastique qu'est sortie la libre pensée : c'est de l'abandon de son principe fondamental. Nous n'aurions en garde de le rappeler, n'était la persistance de très-habiles gens à reprendre sans cesse cette assertion de haute fantaisie.

Ce que nous venons de dire nous conduit au vrai sens du mouvement scolastique. En quoi a-t-il consisté ? La chose paraît bien simple. Dans une nouvelle application, proportionnée aux circonstances sociales et intellectuelles, du principe chrétien : *Croire afin de comprendre.* Les Pères avaient presque toujours écrit leurs œuvres, en vue des hérésies régnantes et du besoin immédiat des âmes. De là le caractère *fragmentaire, polémique* de la science religieuse des premiers temps. En cette période, elle a pour objet des traités isolés. Les ouvrages encyclopédiques sont rares. Après les *Principes* d'Origène, la *grande Catéchese* de S. Grégoire de Nysse, l'Enchiridion de S. Augustin, la *Règle de la vraie Foi* de S. Fulgence de Ruspe, l'*Exposition de la Foi orthodoxe* de S. Jean de Damas, il n'y a presque plus rien à citer en ce genre.

Mais voici qu'après les longues perturbations qui ont marqué la chute de l'empire d'Occident et les invasions barbares, l'Idée chrétienne monte avec Charlemagne sur le trône de l'Europe. L'idéal du grand conquérant est d'assurer au christianisme la complète suprématie. Pour lui, comme pour ses contemporains, la Philosophie et l'Évangile ne sont pas seulement deux puissances amies, elles ne sont pas même séparées. La politique, les arts, les

[1] *Commonit.*, c. XXIII-XXIV.

sciences, s'unissent dans la vivante synthèse qui va constituer l'État chrétien. La grandeur de l'État, les intérêts de toute sorte, la ferveur religieuse du conquérant, l'esprit public de l'époque commandaient et réalisèrent cette union des deux pouvoirs dont l'universelle primauté de l'Église fut le résultat.

A la gloire de fondateur d'empire, Charlemagne ajouta celle de restaurateur des Écoles. Les nouveaux Régents ne purent avoir qu'un but : fondre en un seul corps de doctrine l'ensemble des vérités dont la société avait le patrimoine. Par un temps si éloigné de nos distinctions confessionnelles et doctrinaires, la science ne pouvait exister que sous le symbole d'une *Encyclopédie classique,* dont la Religion était le fondement, le sommet, la règle. C'est en vue des Dogmes eux-mêmes que les maîtres s'occupent désormais des mystères. Le caractère *harmonique* de la science sacrée se substitue au caractère *polémique.* Or l'enseignement officiel s'était conservé dans les monastères de l'Hibernie. Ce fut de là surtout que vinrent les professeurs des Franco-Germains. L'*École du Palais,* mère de l'immortelle Université de Paris, fut établie par Alcuin, selon les traditions du Quadrivium et du Trivium. Elle fut le modèle de toutes les autres, de celles d'Orléans, de S. Denis, de Lyon, et des écoles monastiques de S. Martin de Tours, de Fulde, de Corbie. Bientôt il y eut partout des maîtres et des disciples. A Paris même, outre l'école épiscopale, on compta de bonne heure un grand nombre d'Académies. M. Hauréau a écrit sur cette renaissance des lettres quelques lignes éloquentes qui montrent bien ce que le mouvement nouveau avait de contagieux, de passionné. Nous voulons citer ces paroles. Le régime des *Écoles* est d'une importance extrême pour l'intelligence de la *Scolastique.* « Pour avoir acquis le droit d'enseigner aux autres, dit le savant historien, il fallait avoir fait quelque séjour dans les écoles de Paris : quiconque n'avait pas été entendre les régents de la grande École, passait pour ignorer même les rudiments de la science. Quand aux derniers confins de la Bretagne insulaire, aux plus lointaines retraites de la Calabre, de l'Espagne, de la Germanie, de la Pologne, un jeune clerc manifestait quelque inclination pour les hautes études, et semblait à ses supérieurs promettre un logicien, aussitôt on l'envoyait à Paris. Il partait seul à pied, traversant les fleuves, les montagnes, les mers, sous la protection des gens de guerre, ou même des gens de rapine qu'il rencontrait sur sa route. C'était une vie d'aventures et de périls qui le disciplinait d'avance aux agitations et aux rudes épreuves de l'école. Chaque soir, il trouvait un asile dans le plus prochain monastère : si la nuit le surprenait loin d'une bourgade, il allait frapper au seuil de quelque maison isolée; et pour obtenir le plus cordial accueil, il lui suffisait de déclarer son titre d'écolier : ici l'hospitalité lui était libéralement accordée; ailleurs, elle lui était due, et la loi municipale punissait comme un délit toute infraction à cet article de la coutume: les écoliers ont partout le droit d'asile [1]. » — C'était à la lettre l'épopée de la vie intellectuelle.

La scolastique, dans son ensemble, ne fut ainsi que l'expression nouvelle donnée par la race franco-germanique aux rapports de la Raison et de la Foi. Transportez au temps d'Origène ou d'Augustin les circonstances de l'époque de Charlemagne, et la fameuse méthode sera plus vieille de quatre siècles. En résumé, la science du moyen âge est chrétienne ou *surnaturaliste* dans son esprit; contentieuse et dialectique dans la manière; presque toujours aristotélicienne, parfois augustinienne dans la forme extérieure; systématique et bientôt encyclopédique dans l'ensemble. Elle se rattache essentiellement au mode général d'enseignement de l'époque, la *tradition des Écoles*. De là son nom [2]. La *scolastique* devint par excellence le nom commun de la philosophie et de la théologie, toujours unies, parfois presque confondues durant cette fervente période, et enseignées dans les *écoles* épiscopales, monastiques et privées. Entre la méthode scolastique et celle des Pères, il n'y eut qu'une différence de forme, non de nature. La philosophie scolastique, dit M. Ritter, ne pouvait

[1] I, p. 24. Cf. Brucker, *Hist. Phil.*, t. III. — Kaulich, *Gesch. der Schol. Phil.*, 1853. Pragg, t. I. — Dr Stöckl, *Gesch der Phil. des M. A.*, t. I.

[2] Cf. — D'après Heumann (praef. ad Tribbechovium : *De doctoribus ecclesiasticis*), le mot *Scolasticus* aurait été introduit ou employé pour la première fois en latin par Pétrone. (*Satyr.*, l. IV.) — Cf. Quintilien, *De causis corruptae eloq.*, c. XXIII.

être qu'un développement de la philosophie des Pères. Elles se distinguent moins par leur objet que par la forme même de leur doctrine [1]. » Cette interprétation accueille tout ce qu'il y a de vrai dans les explications diverses des érudits. Elle est bien simple, mais elle semble conforme aux faits.

Anselme de Cantorbéry n'a pas vécu aux jours où la synthèse religieuse s'éleva à l'apogée. Mais il est le premier Docteur en qui le nouvel esprit franco-germanique parvint à sa maturité. Il applique successivement l'investigation analytique à tout l'ensemble des Dogmes. La science spéculative du moyen âge naît avec lui. Après les travaux de ses devanciers, l'on éprouve un saisissement profond en présence de son œuvre. — C'est la stupeur qu'on ressentirait à la vue d'un temple s'élevant au milieu d'une forêt à peine frayée. Anselme n'a pu rassembler en un seul corps les matériaux divers de ses longues méditations. Sa vie fut trop mêlée au tracas des affaires, aux soucis de l'administration pour lui permettre de composer une *Somme.* Mais qu'on réunisse ses traités, et l'on verra qu'il a touché à tous les grands problèmes de la philosophie et de la théologie. Nous connaissons ses enseignements sur la nature de la vérité, sur la substance physique et sur l'essence de l'Absolu. Le Dr Hasse entrevoit déjà dans le *Monologue* un rudiment de Somme. De fait, Anselme y approfondit tour à tour l'existence, la nécessité, l'actualité et les attributs de Dieu, sa causalité externe ou la création des choses finies, les relations de l'Être infini avec le temps et l'espace, le mystère de l'ineffable Trinité, le sens de la destinée humaine, les devoirs fondamentaux de l'homme et la sanction de la loi morale. Il s'occupe ailleurs du concept de la liberté humaine, et montre que la chute ou la défaillance morale suppose toujours l'infidélité volontaire de la créature. Cet ordre de considérations le conduit à l'investigation du péché d'origine, des mystères de l'Incarnation et de la Rédemption qu'il explique avec une élévation et une hardiesse rarement égalées. De la sorte, il a parcouru presque en son entier tout le cycle de la Doctrine. La mort le surprit méditant un traité sur l'origine des âmes.

[1] *Gesch. der Phil.*, t. VII, p. 235.

Certes ce caractère d'ensemble de l'œuvre d'Anselme marque un progrès immense. Pour avoir le premier réuni, dans une aussi large mesure, les spéculations rationnelles et les données du Symbole, pour leur avoir donné cette physionomie encyclopédique, Anselme a bien mérité le nom de *Père de la scolastique* que lui décerna la postérité.

C'est assez de tenir compte de ces observations sur l'esprit général du mouvement scolastique, pour réduire à leur juste valeur le blâme que certains critiques ont infligé à notre Docteur, au sujet de sa manière de comprendre la science des Dogmes. S'il faut en croire M. Rousselot, Anselme aurait trahi la Philosophie, du jour où il se sépara de Roscelin : « Il semble, dit cet écrivain, que pour le Docteur de Ste-Marie du Bec, la Philosophie ne puisse s'affranchir de la Foi : s'il consent à philosopher, c'est dans les limites de la croyance. »

L'un des premiers, M. Rousselot a porté contre Anselme de Cantorbéry une accusation aussi grave. Elle ne frappe pas seulement le régent de Ste-Marie du Bec, elle atteint tous les scolastiques. Après bien d'autres [1] M. Franck et le M. Dr Hoehne [2] l'ont reprise dans leurs remarquables Mémoires sur la doctrine d'Anselme. Eux aussi estiment qu'il a mis la Philosophie en tutelle, grâce à sa condescendance pour les dogmes ecclésiastiques, dont il a fait la règle de toutes ses études.

Il est difficile de discuter des assertions comme celles que nous venons d'entendre. — M. de Rémusat était mieux avisé, lorsqu'il avertit que les œuvres scientifiques doivent être jugées d'après les idées de l'époque qui les a vues naître [3]. Les scolastiques partent du fait de la révélation divine des vérités de foi; c'est le principe, c'est la base de toutes leurs démonstrations. Leur formule célèbre : *Philosophia Theologiae ancilla* a pu paraître obscure, froissante en sa rude simplicité. Bien entendue, elle se concilie avec le respect passionné de tous les

[1] Franck, *l. c.*, passim.
[2] Hoehne, *op. cit.*, § 1, p. 7.
[3] *S. Anselme de Cant.*, p. 454.

droits de la raison. S. Jean de Damas l'a transmise aux Docteurs, mais elle était connue de Clément l'Alexandrin et d'Origène [1]. Elle n'exprime que la subordination essentielle de l'intelligence finie à la raison absolue et son obligation de s'y soumettre, à condition que le fait historique de la Révélation soit prouvé. Schelling, la plus forte tête de la pléiade panthéistique, n'en jugeait pas autrement. On connaît ses paroles qui firent sensation en Allemagne : « Comme source spéciale de nos connaissances, la métaphysique est pour l'esprit un simple instrument, un organe, et en ce sens, en tant que moyen de connaître, elle ne peut avoir à l'égard de la Théologie, maîtresse de la vérité révélée, d'autre rôle que celui d'une science subordonnée. Ce serait tout bonnement une méprise que de faire de la destination naturelle de la raison un reproche à la Théologie. »

Sans doute, les éléments bâtards de la scolastique dégénérée ont péri sans retour. La dialectique excessive et étroite, les stériles argumentations édifiées sur des hypothèses abstraites auxquelles, après une éclatante période de gloire, revinrent les régents du XIV[e] et du XV[e] siècle, la vogue de la formule, tout cela a fait place à une science moins arbitraire, à des démonstrations plus vivantes. La psychologie, la physiologie, l'observation des faits ont pénétré jusque dans l'ontologie. Mais c'est aux thèses essentielles d'Aristote, de S. Thomas d'Aquin, de S. Bonaventure que reviennent chaque jour les plus fermes esprits [2]. Après tant de systèmes, après une confiance si généreuse et tant de fois trompée dans les conceptions nouvelles, ne serait-il pas temps de comprendre qu'en philosophie aussi, le mot de Platon contient la vraie, l'unique solution : « Tous les sages n'ont qu'une voix? » — Il y a une tradition philosophique. Son identité fondamentale est visible, à travers les variations, les crises, les défaillances de la pensée. Elle ne peut être que l'expression de la raison humaine elle-même. La mission de la critique est d'en dégager le sens, d'en suivre le

[1] Voir *De scholasticorum sententia : philosophiam esse theologiae ancillam*, p. 2, sqq ; Monasterii, 1856.

[2] Cf. l'article du baron G. von Hertling, de Bonn : *Les derniers efforts de la phil. allem.* Revue générale : avril, 1875.

courant souvent troublé et interrompu, jamais tari. — Parmi tant de méthodes, quelle est celle qui est fondée sur la nature, sur la réalité, non sur des rêves personnels, sur des conceptions sans contrôle? Quel est le premier principe de la doctrine d'Aristote, de Platon, disons mieux, de tout le genre humain? N'est-ce pas l'infaillible certitude et la portée objective des tendances originelles, primitives des êtres, des facultés? Nous avons vu que les scolastiques aussi bien que les Pères ont accepté ce principe. Il est la clef de voûte, cachée parfois, de leur Ontologie, de leur Idéologie, de leur Physique, de leur Théodicée. Au-dessus des entraves des temps; par delà les témérités et les faiblesses inséparables de tout grand mouvement intellectuel, il leur reste l'honneur d'avoir signalé cette vérité, de toutes la plus universelle et la plus féconde. — Et ajoutons-le, puisqu'il s'agit de choses si intimement unies : quel est le principe de la théologie spéculative des scolastiques? Au point de vue *historique,* la Révélation de la suprême Intelligence, sous la forme d'enseignement religieux. Au point de vue de la *théorie,* l'effort de la pensée à se démontrer l'évidence de ce fait générateur, à pénétrer les données divines, à entrevoir leur lien mutuel et leur rapport avec les idées de la raison et les aspirations de la conscience. — N'est-ce pas une noble doctrine que celle qui tend à unir aux clartés de la science terrestre quelques reflets de cette lumière meilleure qu'appelait Platon [1]? Mais n'est-ce pas tout l'esprit de la scolastique? Et qui donc l'a mieux caractérisé que son premier Docteur, dans le titre primitif du Prosloge : La Foi cherchant l'intelligence, *Fides quaerens intellectum?* — C'est la formule chrétienne de la métaphysique du divin Philosophe, mettant la connaissance « dans le goût intime des choses célestes et immortelles [2]. » C'est, en un sens excellent, la sagesse d'Aristote, nous avertissant que « l'homme, selon le conseil des doctes, doit apprendre à sortir de lui-même, à ne plus rien sentir de mortel, mais à vivre d'immortalité et de la vie du principe supérieur qui

[1] Cf. OZANAM : *Dante et la Phil. catholique :* Préface.
[2] *Tim.*, 90.

est en lui [1]. » — Par sa puissante pensée, par son commerce avec le plus fidèle représentant chrétien de l'antiquité, Anselme a restauré les dogmes principaux de la tradition philosophique. Là est son originalité, sa gloire, le secret de l'éclatant prestige, de la sympathie prolongée qui s'attachent à son nom ! Qu'importent, après cela, quelques lacunes dans son œuvre, quelques faiblesses dans ses argumentations ? Qu'importe que Gaunilon, ce Kant des anciens temps [2], ait opposé à la preuve du Prosloge des objections qu'on n'a pas encore réfutées ? L'humanité ne vit pas seulement de méthode, ni de démonstrations correctes, ni de froide et banale exactitude ? Qui se souviendrait aujourd'hui du zélé dialecticien de Marmoutiers si l'Abbé de Ste-Marie ne nous eût conservé sa censure? Seul, malgré les erreurs de détail, l'homme de génie, révélateur des principes et des grandes lois, donne aux idées une impulsion vivace. — Fils d'un siècle inexercé, le disciple de Lanfranc a renouvelé l'aspect de la philosophie et ouvert la voie aux grands scolastiques. Le premier, au moyen âge, il a signalé le phénomène central de la conscience humaine : sa tendance naturelle à l'Infini, à l'Absolu. Les pressentiments de ce hardi penseur agitent encore la science. Aussi longtemps qu'il y aura une philosophie, elle reconnaîtra l'empire d'Anselme de Cantorbéry !

[1] *Ethic. ad Nicom.*, X, p. 7.
[2] Hégel.

(407)

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE III.

VUES DE S. ANSELME DE CANTORBÉRY SUR LA NATURE DE LA SUBSTANCE PHYSIQUE.

CHAPITRE IV.

THÉODICÉE DE S. ANSELME DE CANTORBÉRY.

§ 1.

§ 2.

§ 3.

CHAPITRE V.

DOCTRINE DE S. ANSELME DE CANTORBÉRY SUR LES RAPPORTS DE LA PHILOSOPHIE ET DE LA THÉOLOGIE.

§ 1.

§ 2.

ERRATA.

Page 367, note 1, lisez : *Confess.*, IV ; X, 15, ap. Gratry, *Connaissance de Dieu*, I, p. 213.

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME XXV.

SCIENCES.

LETTRES.

PUBLICATIONS DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

Nouveaux Mémoires, tomes I-XIX (1820-1845); in-4°. — **Mémoires**, tomes XX-XL ; tome XLI, 1re partie (1846-1875); in-4°. — Prix : 8 fr. par vol. à partir du tome X.

Mémoires couronnés, tomes I-XV (1817-1842); in-4°. — **Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers**, tomes XVI-XXXVIII; tome XXXIX, 1er et 2e fasc. (1843-1875) ; in-4°. — Prix : 8 fr. par vol. à partir du tome XII.

Mémoires couronnés, in-8°, tomes I-XXV; tome XXVI, 1er fascicule. — Prix : 4 fr. par vol.

Tables des Mémoires (1816-1857). In-18.

Annuaire, 1re à 41me année, 1835-1875; in-18. Fr. 1,50.

Bulletins, 1re série, tomes I-XXIII; — 2me série, tomes I-XXXIX; in-8°. — **Annexes** aux *Bulletins* de 1854, in-8°. — Prix : 4 fr. par vol.

Tables générales des Bulletins : tomes I-XXIII, 1re série (1832-1856). 1858, in-8°. — 2me série, tomes I-XX (1857-1866). 1867; in-8°.

Bibliographie académique. 1854; 1 vol. in-18. 1875; 1 vol. in-18.

Catalogue de la bibliothèque de l'Académie. 1850; in-8°.

Catalogue de la bibliothèque de M. le baron de Stassart. 1863; in-8°.

Centième anniversaire *de fondation* (1772-1872). 1872; 2 vol. gr. in-8.

Commission pour la publication des monuments de la littérature flamande.

OEuvres de Van Maerlant : DER NATUREN BLOEME, tome Ier, publié par M. J. Bormans, 1857; 1 vol. in-8°; — RYMBYBEL, avec Glossaire, publié par M. J. David, 1858-1860; 4 vol. in-8°; — ALEXANDER GEESTEN, publié par M. Snellaert, 1860-1862; 2 vol. in-8°. — **Nederlandsche gedichten**, etc., publiées par M. Snellaert, 1869; 1 vol. in-8°. — **Parthonopeus van Bloys**, publié par M. J. Bormans, 1871; 1 vol. in-8°. — **Speghel der Wysheit**, door Jan Praet, publié par M. J. Bormans. 1872; 1 vol. in-8°.

Commission pour la publication d'une collection des œuvres des grands écrivains du pays.

OEuvres de Chastellain, publiées par M. Kervyn de Lettenhove, 1863-1865, 8 vol. in-8°. — **Le 1er livre des Chroniques de Froissart**, publié par le même. 1863, 2 vol. in-8°. — **Chroniques de Jehan le Bel**, publiées par M. Polain. 1863, 2 vol. in-8°. — **Li Roumans de Cléomadès**, publié par M. Van Hasselt. 1866, 2 vol. in-8°. — **Dits et contes de Jean et Baudouin de Condé**, publiés par M. Auguste Scheler. 1866, 3 vol. in-8°. — **Li ars d'amour**, etc., publié par M. J. Petit. 1866-1872, 2 vol. in-8°. — **OEuvres de Froissart** : *Chroniques*, publiées par M Kervyn de Lettenhove. 1867-1875, 21 vol. in-8°; — *Poésies*, publiées par M. Scheler. 1870-1872, 3 vol. in-8°; — *Glossaire*, publié par le même. 1874, un vol. in-8°. — **Lettres de Commines**, publiées par M. Kervyn de Lettenhove. 1867; 3 vol. in-8°. — **Dits de Watriquet de Couvin**, publiés par M A. Scheler. 1868, 1 vol. in-8°. — **Les Enfances Ogier**, publiées par le même. 1874, 1 vol. in-8. — **Bueves de Commarchis**, par Adenès li Rois, publié par le même; 1874, 1 vol. in-8°. — **Li Roumans de Berte aus grans piés**, publié par le même. 1874, 1 vol. in-8°.

Commission royale d'histoire.

Collection de Chroniques belges inédites, publiées par ordre du Gouvernement; 41 volumes in-4°.

Compte rendu des séances, 1re série, avec table (1837-1849), 17 vol. in-8°. — 2me série, avec table (1850-1859), 13 vol. in-8°. — 3me série (1860-1872), 14 vol. in-8°. — 4me série, tomes I et II (1873-1874).

Annexes aux *Bulletins*, 13 volumes in-8°.

Commission pour la publication d'une Biographie nationale.

Biographie nationale, t. I à IV. Bruxelles, 1866-1875; 4 vol. gr. in-8°.