圓周率π之歷史及

其超絕性

David Eugene Smith著

目　　次

圓周率π之歷史及其超絕性

David Eugene Smith 著

1. 問題之性質 人類最初準確測量得的面積，自然是直角方形，尤是正方形，無疑。倘直角方形之邊有度量上的公單位可通約之，則此問題不難解決了；而實用上，亦總可找得此。其第二步或者是測量平行方形或三角形，後此則繼之以梯形，最普通的直線形於是完了。理論上，這些多邊形之測量尚不大難，而由此則其他多邊形之面積亦已可求得。及至求曲線形之面積，即有

困難了，其最普通者，古時已早有此項努力，想求得一與已知圓等積的正方形，然後由此計算圓之面積。換言之，即是“求圓之方”的問題。倘若能求得一與圓周等長的直線，則此問題即可解決；於是此問題成為“求圓周之直線”的問題了。而倘若我們能求得圓周率 π 之值為一整數或分數或小數，則此問題又不難解決；又因可用界尺與圓規作某種圖形故，所以若能以有限數的平方根表 π，換言之，若能用有理算法及祇有一定數的平方根之無理算法表出 π，則此問題亦即可解。反之，凡用界尺與圓規為之的幾何作法，無異於決定二直線之相交，一線與一圓之相交，或二圓之交，等於有理算法或開平方。故凡不如是者，即不可作(參觀第八篇2,11兩節)。於是此問題成為決定 π 之性質的問題，即 π 是否為一代數方程之根，可如是得之者。

2. 此問題之歷史　此問題之歷史可分為三時代論之。第一時代自古時至十七世紀之中；此時

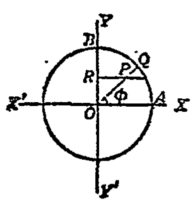
代中大都是求一正方等於一已知的圓者等努力，或用目前的初等教科書中所述的那種純粹幾何方法，求π之近似值。第二時代約有一百年之久，自發明微積分起至1766年良伯（*Lambert*）發表關於此的著作止。此時代中之特色，乃是解析方法代了古時的幾何方法，研究者中之尤著名的，有牛頓，萊伯尼茲（*Leibnitz*），柏諾利兩昆仲（*Bernoulli*），歐拉（*Euler*）等諸人。這時代中，不用古時的“竭盡法”，而用無限級數及乘積以求π之值，有歐氏公式等。第三時代則自十八世紀之中起直至今日；其特色在求π之性質，是否爲有理的，抑係代數的或超絕的。所謂“代數數目”者，乃是能爲方程$C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n=0$（$C_0$，$C_1$，$\cdots C_n$爲有理數）之根的數目；不則稱爲“超絕數目”。又，倘一數目是一代數方程帶有理係數者之根，則必亦爲帶整係數者之根。爲此，我們可限於整係數的方程。

第一時代之開始，已在有史以前，聖經上載π

之值爲3,上古時大都如是。巴比倫(*Babylonian*)人對此的見解,迄今未有所知,而古印度人及中國人之上古紀載,則不可靠。但在埃及人方面,則曾發見四千年前的π之值爲$\frac{256}{81}$或3.1604……。

古希臘哲學家中,曾有不少的人想解決此問題。最初對此有供獻的,爲伊里之希璧亞司(*Hippias of Elis*)(紀元前四百餘年),他發見一曲線,即所謂"求直曲線"(*quadratrix*)者是。此曲線尋常稱爲地諾司德拉圖(*Dinostratus*)氏之曲線,蓋他曾詳細研究過此。

此曲線可述之如下:以直角坐標系之起點爲心作單位圓,設Q與R爲二點,以整齊的速度一於AB弧上一於OB半徑上運動,由A與O同時起,



并同時至B，則OQ與R點OB之垂線之相交點P作出一求直曲線。這裏，縱坐標y與角ϕ為比例的。當$y=1$時，$\phi=\frac{\pi}{2}$，故$\phi=\frac{\pi}{2}\cdot y$。又因

$\phi=arc\ tan\ \frac{y}{x}$，故$\frac{y}{x}=tan\frac{\pi}{2}\cdot y$，而

$x=\frac{y}{tan\frac{\pi}{2}y}$。因之，此曲線過$x$軸於

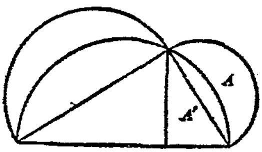
$$x=\lim_{y=0}\frac{y}{tan\frac{\pi}{2}y}=\frac{2}{\pi}。$$

倘我們能作出此曲線，則即能得此值，因而不難由此以推π。然作此曲線之困難，則與求π同，實際上乃是相同的問題。

與希氏同時者，有安抵風(*Antiphon*)與柏拉孫(*Bryson*)兩人，目前解初等幾何學上問題的方法，他們多所供獻。安氏用內切多邊形增加邊數之法，以求圓面積之近似值。柏氏則於內切形外，并作相似的外切形，而以為圓之面積，乃是前二者之算術的平均值，所設雖不合，但又逼近了一

步。安氏方法，實已開近代微積算法之先聲。

想求圓之方的第一人，是喜帕克拉底（*Hippocrates*，紀元前 450 年）。他證明倘於直角三角形之各邊上如圖所示作半圓，則月形 A 等於三角形 A'，此法於圓之普通問題上實無所供獻。



希臘人中之最有供獻者，爲亞基默德（*Archimedes*），他有量圓法之命題三條。實際上，他的方法仍是增加內外切形邊數之法，以倍數進行，與今日初等幾何學中者同。用此法，他求得 $3\frac{1}{7}>\pi>3\frac{10}{71}$，故 $3\frac{1}{7}$ 亦稱亞氏率，而因其便於計算，至今仍還用之。其後托來末（*Ptolemy*）改良亞氏率，得 $\pi=3.14166\cdots\cdots$。

在印度人方面，約當紀元後五百年時，其率亦與此相似；亞拉巴太（*Aryabhatta*）曾設 $\pi=3.$

1416。稍後，則有婆羅馬古太(*Brahmagupta*)，所得值與亞氏率同。當中世紀時，此率使用極廣。

在中國人方面，於此頗有可注意的獲得。東漢安帝時人張衡(西曆78-139年)曾得$\pi=\sqrt{10}$。後此，則當三國時吳人王蕃(西曆229-267年)求得$\pi=142:45$或3.1555…，而同時劉徽用一種方法與安提風法相同者，獲3.14。最可注意的，則爲宋末南齊祖沖之(約當西曆四百餘年時)的發見，他求得π之値在3.1415926與3.1415927之間，幷知$\frac{22}{7}$與$\frac{355}{113}$乃是其近似值。後者尋常稱爲安托尼玆(*Adriaen Anthonisz*，十六七世紀時人)率，實則祖氏早已發見了。其後還有人計算此值，惟未有良好結果。清初康熙時(十八世紀之初)所編"數理精蘊"上載π之値至十九位。

歐洲當中世紀時，皮舍諾(*Pisano*)求得$\pi=3.1418$。自後直至十七世紀時，始有安托尼玆重發見中國祖沖之在千餘年前所早已知道的值$\frac{355}{113}$。同時有維太(*Viète*)用希臘人的方法，取$6\cdot 2^{16}$邊

形，求得π之值與今時所用有九位相同。而羅曼(*A. Romanus*，亦當此時)則計算π之值至十七位小數。稍後，即有魯道爾夫(*Ludolph*)推廣至三十五位，因此，至今德國方面有稱π爲魯氏數者。最後，胡耕詩(*Huygens*)用此項方法，祇取60邊形，而得九位之數。第一時代於是告終了。

第二時代以十七世紀後半紀爲始，已有新的解析方法供應用，牛頓，萊伯尼茲，梵馬(*Fermat*)，華里士(*Wallis*)，白朗克(*Brouncker*)，伯諾利昆仲等於是大有供獻。古時的幾何方法到此不用了，其所用者性質上與前此的根本不同，乃是解析的表出π，展之爲無限級數或乘積。此中首爲華里士之工作，他證明

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

以及

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\cdots}}}}},$$

此第二連分式，實則自朗克已得之，惟無證。

此時所得最重要的無限級數用以計算圓者，是格里郭(*J. Gregory*)於1670年及萊伯尼玆於1673年所發見的級數：

$$arc\ tan\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

格氏曾知須研究此級數之收斂性，萊氏則稍後從事之。格氏并曾説過，耑通圓之扇形與其內切或外切形之面積之比不能用有限數的代數項表出之。$arc\ tan\ x$ 之級數中倘$x=1$，卽得

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

然此級數收斂極慢，實用上頗不便。通常此級數稱為萊氏級數，實則非彼一人所發見。倘於此級數中不設 $x=1$，而設 $x=\sqrt{\frac{1}{3}}$，則得

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{3^2\cdot 5} - \frac{1}{3^3\cdot 7} + \frac{1}{3^4\cdot 9} - \cdots\right),$$

此較前者爲便於用。若更用反三角函數上之定理加以變化，則可得更便利者：$\frac{\pi}{4}=4\,arc\,tan\frac{1}{5}-arc\,tan\frac{1}{239}$

$$=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot5^3}+\frac{1}{5\cdot5^5}-\frac{1}{7\cdot5^7}+\cdots\right)$$
$$-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot239^3}+\frac{1}{5\cdot239^5}-\cdots\right),$$

此式爲梅卿(*Machin*)所得，用之可計算π之值至100位。

此外，略可一述者，有拉格尼（*Laguy*）氏計算π至127位小數；范箍(*Vega*)至140位，大才(*Dase*)至200位，黎希德（*Richter*）至500位小數，山克(*Shanks*)至700位。由此，可見此項解析方法之遠勝於古法，不過實用上則自不必如此。但關於π之性質，究竟這是一有理數或無理數，抑或其他，則尚未能由此窺得。

解決此π之性質的問題，歐拉實於其關於訥氏對數底e的公式建下基礎。試自麥老令(*MacLaurin*)公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

入手，可知 $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots,$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots,$$

均是收斂的。由此，歐拉證明

$$e^{ix}=1+ix-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\cdots$$

以及 $$i\sin x=ix-\frac{ix^3}{3!}+\frac{ix^5}{5!}-\cdots,$$

故 $$e^{ix}=\cos x+i\sin x。$$

設$x=\pi$，卽得 $e^{i\pi}=-1$，或 $1+e^{i\pi}=0$，

此式內所含五個數，盡是數學上最可注意者。歐氏得此式後約百有五十年，始藉其助以證明π之超絕性。

歐氏還作出其他π與e之關係，以及用無限級數及乘積與連分各樣的表出此二者之值。例如：

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots,$$

$$\frac{\pi^3}{32}=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\cdots,$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\cdots,$$

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}},$$

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cdots}}}}}。$$

第三時代以良伯之著作爲始。他於關於此的著作中有二根本命題：

(1) 設 x 爲有理數非爲 0 者，則 e^x 不能爲有理的；

(2) 設 e^x 爲有理的，非 0，則 x 不能爲有理的。

他自歐拉之 $\frac{e-1}{2}$ 的公式（見前）入手，而指出

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{1}{\cfrac{2}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{6}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{10}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{14}{x}+\cdots}}}}$$

以及
$$\tan x=\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{3}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{5}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{7}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{9}{x}-\cdots}}}}},$$

由此項連分，他即得如是的結論，其證實不嚴格。於 $x=\frac{\pi}{4}$，我們得 $\tan\frac{\pi}{4}=1$，故他說 π 不能為有理的。良氏之誤，後經萊根德(*Legendre*)為之訂正。故 π 之無理性，實由萊氏始證明之，他并曾證得 π^2 之無理性。

其次有廖維萊(*Lionville*)在1840年證明 e 不能為有理係數的二次方程之根，即，設 a,b,c 是有理的，則此方程 $ae^2+be+c=0$ 不可能。此實為證實萊氏說之第一步，即 π 或者非為一代數數目，不能滿足有理係數的代數方程。於是問題分為二重：倘有代數方程，則何種項數有限係數有理者

能為 e 與 π 所滿足？有無此項不能滿足如是方程的數目？對此第二重萊氏巳疑及之，而廖氏則於1844年證明確有不能滿足前述的代數方程的數目，故可分數目爲代數的與超絕的二類。

1873年時，赫末脫 (*Hermite*) 研究指數函數之結果，證明 e 是超絕數，其後卽有林德曼(*Lindemann*)根據赫氏之工作，證明 π 亦是超絕的。林氏之證，在於指出方程 $a_0+a_1e^p+a_2e^q+a_3e^r+\cdots=0$ 內，指數與係數不能均爲代數數目。歐氏方程 $1+e^{i\pi}=0$ 內係數旣爲代數的，故指數 $i\pi$ 不能爲代數的，因而 π 是超絕數。今將先證 e 之超絕性，然後再論 π。

3. e之超絕性 自赫氏證明 e 之超絕性後，繼起者頗不乏人，類多將此問題約成簡單了；對此有供獻者爲希爾白 (*Hilbert*)，霍爾維玆 (*Hurwitz*)，戈登 (*Gordan*) 等諸人。今錄一簡單證法如下：

欲證明 e 爲超絕的，須指出不能有此項普通方

程

$$C_0+C_1e+C_2e^2+\cdots+C_ne^n=0 \qquad (1)$$

存在，於此n爲正整數，$C_0, C_1, \cdots$爲有理數，0亦在內，惟C_0與C_n假定其非0，不則次數卽變動了。爲簡單計，今不用此項普通n次的方程；而用三次者，卽指出不能有方程

$$C_0+C_1e+C_2e^2+C_3e^3=0 \qquad (2)$$

此項證法，實質上無異於普通n次者，然卻可簡便些，亦易廣之至普通方程。我們可先一論二重要函數，因使用多，表之爲$f(x)$與$F(x)$。$f(x)$爲有理整函數n次者，而$f(0)=0$，其形式作

$$f(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n,$$

於此a_i爲有理數。此證，在於選出一函數

$$f(x)=\frac{x^{p-1}[(x-1)(x-2)(x-3)]^p}{(p-1)!},$$

此中p爲質數，後當定之。設

$$f(x)=\frac{x^{p-1}[(x-1)(x-2)(x-3)]^p}{(p-1)!}=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n \qquad (3)$$

則可知$n=3p+p-1$，而a_{p-1}爲非是0的第一係數，因x之最低乘方是x^{p-1}。若廣之，則可使其分子爲$x^{p-1}[(x-1)(x-2)\cdots(x-m)]^p$，但於此前者已够用。

至其他一函數，則如下：

$$F(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)+\cdots+f^{(n)}(x) \tag{4}$$

於此$f'(x),\cdots f^{(n)}(x)$爲$f(x)$之各次引生。今先述三補題，而其證則俟後面：

補題 I 設$f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，而設$S_n$爲$e^x$級數之首$n$項之和，$S_1=1$，$S_2=1+\frac{x}{1!}$，$S_3=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}$，…

則由(4)
$$F(x)=1!\,S_1a_1+2!\,S_2a_2+3!\,S_3a_3+\cdots+n!\,S_na_n \tag{5}$$

而
$$F(0)=1!\,a_1+2!\,a_2+3!\,a_3+\cdots+n!\,a_n \tag{6}$$

補題 II 設p爲質數，n爲正整數，C_0,C_1,C_2,C_3，爲整數，

則 $$C_0F(0)+C_1F(1)+C_2F(2)+C_3F(3)=$$

$$C_0(3!)^p+pQ \tag{7}$$

於此 Q 爲整數爲諸 C 及 p 所決定。

補題 III 設 $A_1=|a_1|, A_2=|a_2|, \cdots A_n=|a_n|$，而 $X=|x|$，

則 $$A_1X+A_2X^2+A_3X^3+\cdots+A_nX^n=$$

$$\frac{X^{p-1}[(X+1)(X+2)(X+3)]^p}{(p-1)!} \tag{8}$$

入手時先寫出於x任何值均收斂的級數以定e^x:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \tag{9}$$

并仍照補題 I 中以 S_n 表此級數之首 n 項之和。又可設

$$U_n=x^n+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\cdots \tag{10}$$

如 $U_1=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\cdots$, $U_2=x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\cdots$等等，而用 $1!, 2!, 3!\cdots, n!$ 繼次乘(9)，則得

$$\left.\begin{array}{l}1!e^x=1!S_1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2\cdot3}+\cdots=1!S_1+U_1,\\[2ex] 2!e^x=2!S_2+x^2+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{3\cdot4}+\cdots=2!S_2+U_2,\\[2ex] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\[2ex] n!e^x=n!S_n+x^n+\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+\dfrac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\cdots\\[2ex] =n!S_n+U_n。\end{array}\right\}(11)$$

用(3)之諸係數 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 乘(11)，并相加之，即得

$$(1!a_1+2!a_2+\cdots+n!a_n)e^x=(1!S_1a_1+2!S_2a_2+\cdots+n!S_na_n)+(a_1U_1+a_2U_2+\cdots)$$

由(6)知 $F(0)=1!a_1+2!a_2+\cdots+n!a_n$,

由(5) $F(x)=1!S_1a_1+2!S_2a_2+\cdots+n!S_na_n$。

故即得 $F(0)e^x=F(x)+a_1U_1+a_2U_2+\cdots+a_nU_n$。

爲便利計，設 $\psi(x)=a_1U_1+\cdots+a_nU_n$ (12)

於是有 $F(0)e^x=F(x)+\psi(x)$ (13)

因之，我們得一 e^x 之式，與 $F(x)$ 或即與(3)中之 p 相關。

試於(13)內 x 處相繼以 0,1,2,3 代入，用 C_0，C_1,C_2,C_3 乘之，即：

$$\left.\begin{aligned}F(0)C_0 &= C_0F(0)+C_0\psi(0)\\ F(0)C_1e &= C_1F(1)+C_1\psi(1)\\ F(0)C_2e^2 &= C_2F(2)+C_2\psi(2)\\ F(0)C_3e^3 &= C_3F(3)+C_2\psi(3)\end{aligned}\right\}(14)$$

加之得 $F(0)[C_0+C_1e+C_2e^2+C_3e^3]=$

$$C_0F(0)+C_1F(1)+C_2F(2)+C_3F(3)+C_0\psi(0)+C_1\psi(1)+C_2\psi(2)+C_3\psi(3) \qquad (15)$$

我們的目的，是欲證明 $C_0+C_1e+C_2e^2+C_3e^3=0$ 之不可能，故若指出(15)之不可能，卽明白了。由(7)，若(15)可能，卽(2)可能，則得

$$0=[C_0(3!)^p+pQ]+[C_0\psi(0)+C_1\psi(1)+C_2\psi(2)+C_3\psi(3)] \qquad (16)$$

故現在的問題，是在證明(16)之不可能。欲證此，須證明

(1) $C_0(3!)^p+pQ$ 之絕對值大於或等於1；以及

(2) $C_0\psi(0)+\cdots+C_3\psi(3)$ 之絕對值小於1。

蓋如是則可得 $\pm1\pm n=0(n<1)$，因而(16)不可能。

(1)設p為質數>3，非C_0之因子，則$C_0(3!)^p$不能為p所除，pQ則可為p除。因C_0非0，故其絕對值$\geqq1$。

(2)我們知道諸數之和之絕對值，小於或至多等於諸數之絕對值之和；例如 $|2-2+2-2|=0$，而 $|2|+|-2|+|-2|+|2|=8$。而諸ψ則為(10)中之U所定。由(10)

$$U_n=x^n\left[1+\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)(n+2)}+\cdots\right]$$

如(8)那樣，設$|x|=X$，得

$$\left|U_n\right|\leqq X^n\left[1+\frac{X}{n+1}+\frac{X^2}{(n+1)(n+2)}+\cdots\right]。$$

而 $$\left|U_n\right|<X^n\left[1+\frac{X}{1!}+\frac{X^2}{2!}+\cdots\right]$$

因後者之分母均小了。由(9)

$$|U_n|<X^n e^x \tag{17}$$

仿此，設 $|a_1|=A_1$，等等，卽得

$$|\psi(x)|<A_1|U_1|+A_2|U_2|+\cdots+A_n|U_n|。$$

照(17)，并使n繼次爲1,2,…，卽得

$$|\psi(x)|<e^x[A_1X+A_2X^2+\cdots+A_nX^n]$$

由(8) $|\psi(x)|<e^x\dfrac{X^{p-1}[(X+1)(X+2)(X+3)]^p}{(p-1)!}$，

故 $|\psi(x)|<e^x(X+1)(X+2)(X+3)$

$$\frac{[X(X+1)(X+2)(X+3)]^{p-1}}{(p-1)!} \tag{18}$$

對於 X 之任何值，可取極大的 p 俾

$\dfrac{[X(X+1)(X+2)(X+3)]^{p-1}}{(p-1)!}$ 成爲任何隨意的小，故 p 充分大時 $|\psi(0)|$，$|\psi(1)|$，$|\psi(2)|$，$|\psi(3)|$ 均可隨意使之小。因之，$C_0\psi(0)+C_1\psi(1)+C_2\psi(2)+C_3\psi(3)$ 之絕對值，必可使其小於1。

如是，可知(16)不可能，(15)不可能，卽(2)不可能，而e非整係數的三次方程之根。此項結

果，因證內未嘗限 $n=3$，故可推至於 n 次的任何方程。於是證明了 e 之超絕性。

補題 I 之證　我們可寫 $f(x)$ 作此式：

$$f(x)=1!\,a_1\frac{x}{1!}+2!\,a_2\frac{x^2}{2!}+\cdots+n!\,a_n\frac{x^n}{n!}。$$

則 $f'(x)=1!\,a_1+2!\,a_2\frac{x}{1!}+3!\,a_3\frac{x^2}{2!}+\cdots+n!\,a_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

$$f''(x)=\qquad 2!\,a_2\qquad+3!\,a_3\frac{x}{1!}+\cdots+n!\,a_n\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n!\,a_n.$$

加之，卽得

$$f'(x)+f''(x)+\cdots+f^{(n)}(x)=1!\,S_1a_1+\cdots+n!\,S_na_n。$$

補題 II 之證　將 $f(x)$ 寫作

$$f(x)=\frac{B_{p-1}x^{p-1}+B_px^p+\cdots+B_{4p-1}x^{4p-1}}{(p-1)!},$$

這裏諸 B 均爲整數，因是整數之積，而

$$B_{p-1}=[(-1)(-2)(-3)]^p=\pm(3!)^p。$$

取其各次引生，而設 x 爲 0，則得

$$f'(0)=0,\ f''(0)=0,\cdots f^{(p-2)}(0)=0,$$

而 $f^{(p-1)}(0)=B_{p-1}$，$f^{(p)}(0)=pB_p$，$\cdots f^{(n)}(0)=p(p+1)\cdots nB_n$。

故　$F(0)=B_{p-1}+pB_p+\cdots+[p(p+1)\cdots nB_n]$。

將前 B_{p-1} 之值代入，得 $C_0F(0)=C_0(3!)^p+$ 許多有 p 爲因子的整數。

仿此，可知 $F(1)$，$F(2)$，$F(3)$ 均等於有 p 爲因子的一組整數。相加後，卽得(7)。

補題 *III* 之證　由

$$f(x)=\frac{x^{p-1}[(x-1)(x-2)(x-3)]^p}{(p-1)!}，可知$$

$f(x)$ 各項之號正負相雜，故改爲正號時乃能相等得(8)。

4. π 之超絕性　π 之超絕性之證，卽基於前節內之(13)與(18)二式，及 $1+e^{i\pi}=0$　(19)

設如 π 爲代數的，則 $i\pi$ 亦然，卽爲有理係數

的代數式之根了。今試取其三次式，而假定其根爲 y_1, y_2, y_3，則 $i\pi$ 必在內。

但因(19)，可得 $(1+e^{y_1})(1+e^{y_2})(1+e^{y_3})=0$，

而 $1+(e^{y_1}+e^{y_2}+e^{y_3})+(e^{y_1+y_2}+e^{y_2+y_3}+e^{y_3+y_1})$

$+e^{y_1+y_2+y_3}=0$ (20)

今欲證明此式之不可能。

y_1, y_2, y_3 之相稱函數，由假設(1)是有理數，故 y_1, y_2, y_3 爲有理代數式 $\phi(x)=0$ 之根。y_1+y_2，y_2+y_3，y_3+y_1 者亦然，故爲 $\phi_1(x)=0$ 之根。仿此，$y_1+y_2+y_3$ 爲 $\phi_2(x)=0$ 之根。故

$$\phi(x)\phi_1(x)\phi_2(x) \tag{21}$$

爲 x 之整函數，而當 x 取 y_j, y_j+y_k 或 $y_1+y_2+y_3$ 中一值時卽成0。但其中有的或者爲0，例如有 N 個。因此我們可剔出因子 x^N，而使(21)等於0，則得一方程 $\theta(x)=0$，并可化其係數爲整者。0根旣挑出，$\theta(0)\neq 0$，故可寫 $\theta(x)$ 作

$$\theta(x)=ax^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m=0,$$

於此 a, a_1, a_m 爲整的，a 與 a_m 非0，a 并是正的。

此式不難改變其形作 $\theta_1(z)=z^m+b_1z^{m-1}+b_2z^{m-2}+\cdots b_m=0$ (22)

這裏係數爲整者，最高乘方者爲 1。設 $\theta(x)=0$ 之根爲 $x_1, x_2, x_3, \cdots$，此卽是 $y_j, y_j+y_k, y_1+y_2+y_3$ 中非爲0的數目。由(20)，可知必

$$K+e^{x_1}+e^{x_2}+e^{x_3}+\cdots=0 \tag{23}$$

今於(13)內x處依次代入 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 而加之，則用(23)可得 $K\cdot F(0)+F(x_1)+F(x_2)+\cdots+\psi(x_1)+\psi(x_2)+\cdots=0$ (24)

我們倘若證明此式不可能，則卽知 π 之非代數數目了。欲證此，則可證

(1) $K\cdot F(0)+F(x_1)+\cdots$ 爲整數非爲0；以及

(2) $\psi(x_1)+\psi(x_2)+\cdots$ 之絕對值 <1。

蓋如是則(24)卽不能成立。

我們可先設 p 爲質數，而 $f(x)=\dfrac{z^{p-1}[\theta_1(z)]^p}{(p-1)!}=\dfrac{a^{mp-1}x^{p-1}[\theta(x)]^p}{(p-1)!}$ (25)

蓋因 $\theta_1(z)$ 係用 a^{m-1} 乘 $\theta(x)$ 幷設 $z=ax$ 而得者。

將$[\theta_1(z)]^p$展之，$[\theta_1(z)]^p=A_0+A_1z+A_2z^2+\cdots$ $=A_0+A_1ax+A_2a^2x^2+\cdots$，於此諸$A$為整數，而由(22)，$A_0=b_m{}^p$；故非0。由(25)

$$f(x)=\frac{A_0a^{p-1}x^{p-1}+A_1a^px^p+A_2a^{p+1}x^{p+1}+\cdots}{(p-1)!} \quad (26)$$

取其引生，設$x=0$，得

$f(0)=0$，$f'(0)=0,\cdots$，$f^{(p-2)}(0)=0$，$f^{(p-1)}(0)$ $=A_0a^{p-1}=b_m{}^pa^{p-1}$，$f^{(p)}(0)=pA_1a^p$，$f^{(p+1)}(0)$ $=p(p+1)A_2a^{p+1},\cdots$

今若如是選擇p，使其大於最大的數目a, b_m，K，則$f^{(p-1)}(0)$不能為p除，而其他則或為0或可為p除。照(4)，可知$F(0)$為整數不能用p除者，$K\cdot F(0)$亦然。

(22)係用$z=ax$，故今可使$f(x)$作此形式：

$$f(x)=\frac{(z-z_k)^pB_1(z_k)+(z-z_k)^{p+1}B_2(z_k)+\cdots}{(p-1)!}=$$

$$\frac{a^p(x-x_k)^pB_1(z_k)+a^{p+1}(x-x_k)^{p+1}B_2(z_k)+\cdots}{(p-1)!} \quad (27)$$

於此Z_k為(22)之一根，$B_1(z_k)$，$B_2(z_k)$，…為z_k

之整函數，係數爲有理的。故如前，得

$$f(x_k)=0,\ f'(x_k)=0,\ f''(x_k)=0,\ \cdots,$$

$f^{(p-1)}(x_k)=0$，$f^{(p)}(x_k)=pa^pB_1(z_k)$，$f^{(p+1)}(x_k)$
$=p(p+1)a^{p+1}B_2(z_k),\cdots$

倘設 $Q(z_k)=a^pB_1(z_k)+(p+1)a^{p+1}B_2(z_k)+\cdots$，

則由(4)

得 $$F(x_k)=pQ(z_k) \tag{28}$$

故 $$F(x_1)+F(x_2)+F(x_3)+\cdots=p[Q(z_1)+Q(z_2)+\cdots] \tag{29}$$

但此式之右端乃是(22)之根之整相稱函數，故必整的，有 p 爲因子。并前者之結果，可知 $K\cdot F(0)+F(x_1)+F(x_2)+\cdots$ 爲一整數不能用 p 除，故非是0，而(1)已證明。

今證其(2)。將 $\theta(x)$ 寫作

$$\theta(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m) \tag{30}$$

則由(25)，得

$$f(x)=\frac{a^{(m+1)p-1}x^{p-1}(x-x_1)^p(x-x_2)^p\cdots(x-x_m)^p}{(p-1)!} \tag{31}$$

仍設 $|x|=X$，而 $|x_k|=X_k$，可知(31)內之係數不能大於

$$\frac{a^{(m+1)p-1}x^{p-1}(x+X_1)^p(x+X_2)^p\cdots(x+X_m)^p}{(p-1)!}$$

內者。今設 $P(X)=a^{m+1}X(X+X_1)(X+X_2)\cdots(X+X_m)$，則於任何 X，得

$$\frac{X^{p-1}[(X+1)(X+2)(X+3)]^p}{(p-1)!}<\frac{[P(X)]^p}{aX(p-1)!}=$$

$$\frac{P(X)}{aX}\cdot\frac{[P(X)]^{p-1}}{(p-1)!}。$$

今可如(18)從事，對於 X 之任何值，可選相當大的 p，俾

$$\frac{X^{p-1}[(X+1)(X+2)(X+3)]^p}{(p-1)!}$$

至隨意的小。由 (18)，$\psi(x)$ 可任意小，因之，$\psi(x_1)+\psi(x_2)+\cdots$ 之絕對值可使之小於 1，祇要相當選擇 p 便行；如所欲證者。

如是，π 之超絕性已明了。

28

中華民國二十年十二月初版
中華民國二十二年六月國難後第一版
中華民國二十三年九月國難後第二版

(55074)

算學小叢書 數論尺規作圖及周率一冊

J. W. A. Young: Theory of Numbers
L. E. Dickson: Construction with Ruler and Compass
David Eugene Smith: History of π

每冊定價大洋叁角
外埠酌加運費匯費

譯述者 鄭太朴
發行人 王雲五 上海河南路
印刷所 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

三五二上