萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

代數方程及函數概念

密勒　白黎斯著

鄭太朴譯

商務印書館發行

代數方程及函數概念

密勒 白黎斯著
鄭太朴譯

算學小叢書

王雲五主編

萬有文庫

第一集一千種

代數方程及函數觀念

密勒 [illegible]斯著

鄭太朴譯

發行兼印刷者　上海寶山路　商務印書館

發行所　上海及各埠　商務印書館

中華民國十九年十月初版

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

THE ALGEBRAIC EQUATION, by S. A. MILLER
THE FUNCTION CONCEPT, by G. A. BLISS

Translated by
CHÊNG T'AI P'O
THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1930

目　次

代 數 方 程

S. A. Miller 著

I. 引 言

1. 本篇之目的。 本篇目的，在略述有幾個最為根本的方法，於中代數方程占一中心的地位，因而較之一短篇方程理論為能使注意更完全的集中於其下的思想及歷史的來歷上。但本篇用意在於補充這種短的篇，而非欲代之。由歷史的敘述有許多簡易事實上，希望其中數部分，能對於僅有初等代數學之方程智識者，亦有些用處。

2. 如何讀法。 讀者須知在沒有讀到其下文以前，不能求每一所說者均得明白了解。對於有許多讀者，"有理性之領域"，"代屬"(*substitution group*)，及"ρ 值有理函數" 等諸概念或尚未知道，因而簡單的一說殊以為未足。但稍明白這些重要的概念及其應用，較之全不知實好的多，而倘使本篇能引

人去求此重要的方面之智識,則其目的亦不虛了。

3. 所假定的數學程度。 為避免冗長計,看來有許多處所須假定一些簡易的定列式(*determinants*)之智識,以及單變數函數之第一次引生函數(*derivative*)之智識,但既不能假定一些格老司(*Galois*)氏方程論之簡易智識,故有許多根本方法,實不能述之完備。然希望所採用的觀點,能作此通論之先引;而所用解三次及四次方程之法,則尤能如此。至方程的智識之公路,引過許多問題,故有時似可廣研究歷史的來歷及在其下的原理,俾引起新刺激及較深的見解。很希望本篇能於作此項研究上有幫助。

4. 所研究的問題之格式。 於方程通論中,$x^n=1$形式的方程,實占重要地位。因這些方程之根本屬性,於本叢書第25種數論篇,28及29節中已論之,故本篇中不再及。因$x^n=\pm a$之諸根,可自正數a之算術的n次根,乘$x^n=\pm 1$之諸根上得之,故$x^n=1$形式的方程之理論,與二係數非為零

的方程之理論差不多同其價值。對於有許多目的上，自係數之數目(假定其非爲零者)的觀點上研究方程較爲便利，而於此數目不超過3者尤便，但本篇內則照未知數之次數分類。自假定係數繼續的代表數目之序(*sequence*)之各項上，所生可注意的屬性，因篇幅關係祇可從略。

II. 歷史的略述及定義

5. 引言. 英國物理學者洛奇(*Oliver Lodge*)氏曾說:“方程是數學上最利害且最重要的東西”。論其來歷，實亦是最古的數學概念中之一，因計算之根本法，其本身是建立在所計算的事物間之一種相等性的觀念上。卽簡易的代數方程，其來亦已很古；大約紀元前一千七百年，有埃及人名阿姆斯(*Ahmes*)者，其所著書中已有此項例:“堆積之七分之一，加其全部，得19”;“堆積之三分之二，加二分之一，又加七分之一，又加其全部，得33”。由這些例，及有許多相類的例上，可知古埃及人之“堆積”，其意義與近代的x同，而以上的二例，實卽等

於以下的二方程：

$$\frac{x}{7}+x=19,\ \frac{2x}{3}+\frac{x}{2}+\frac{x}{7}+x=33.$$

近今考得古埃及所遺下的斷編零簡（或者較阿姆斯之著作尤古）上，有與現在相當的二同局方程：

$$x^2+y^2=100, \qquad y=\frac{3}{4}x.$$

卽特別的 n 個未知數的 n 同局方程，古時亦已有解之者。有一希臘人名德馬利達斯 (*Thymaridas*) 者，曾作出一規例，用以解以下的諸同局方程：

$$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n=s$$

$$x_1+x_2=a_1,\ x_1+x_3=a_2,\ \cdots\cdots x_1+x_n=a_{n-1}.$$

所可注意者，"已知"與"未知'這二個專門用語，此古的規例中已包含之。 紀元後六世紀時，有一印度人名阿拉巴他 (*Aryabhata*) 者，亦曾解過類此的同局方程，惟解普通 n 個未知數的 m 同局方程，則其法之來比較的還在後，通言之，古代數學家及中世紀之數學家，祇知求諸方程中未知數之數目上的值，但不列出用係數表出未知數的式。

6. 定義。 作以下形式的一方程：

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots\cdots+a_nx_n=k,$$

於此 $a_1,a_2,\cdots\cdots a_n,k$ 假定其爲已知數，而 $x_1,x_2,\cdots\cdots x_n$ 爲未知數，名爲一個"一次方程"（或亦稱"線的方程"）。方程中有須設條件，卽須設所有的未知數有特別的値，才能用者，名爲有條件方程"。倘使一方程對於任何指定給未知數的値均通用，或祇是已知數間之眞實的關係，則此方程名爲"自方程。"例如 $2\cdot3+4\cdot7=34$，$3m-2m=m$ 爲自方程，而 $2x+3y=1$，$5x-2y=12$ 則爲有條件方程。[註：自方程內之符號＝，每用≡代之。照克朗納格（*Kronecker*）氏"數目論講演"中所說，此符號作目前的意義用，實創自黎孟（*Riemann*）。高斯（*Gauss*）於"相合理論"中用此符號，其意義與目前者不同，例如 $10\equiv3\,(mod.\ 7)$，（見本叢書　數論篇）時候較黎氏早些，在 1801。因此，現在用此符號時，其所表者有時較＝所表者爲強，有時則較弱。克氏以爲此符號≡所表較之＝所表者爲強，意義上似稍自然些，但使用上則卻多用較弱的方面。]

倘假定方程內之未知數有一級數目可取，則此項未知數，卽名爲"變數。" 方程內之字母所表者爲未知常數或變數，此則自隨觀點而異，但這些概念間之分別，則不可不留意。 字母意義之變換上，可見出方程之完全意義及用處。

一方程倘使沒有帶有分數指數的未知數在內，而至少有一項，於中其未知數指數之和爲 n，此外亦無未知數指數之和超過 n 的項，則此方程名爲"n 次"者。倘一方程之一切項(非同爲零)其次數均等，則名爲"齊次"方程。例如 $x+y=0$ 爲一次齊次方程，而 $x^2-xy+7y^2=0$ 則爲二次齊次方程。

因古時幾何上的解釋，二次方程通常稱爲"平方方程，"三次方程則爲"立方方程。" 倘將數目代入未知數處而使此方程成爲自方程，則此項數目稱爲此方程之"根，"此項根能滿足方程者。決定此項根的方法，名爲"解"此方程。 倘二或更多的方程，其未知數假定其有同値者，則這些方程名爲"同局"方程。

7. 根本問題。 方程理論中有二根本問題,卽 n 次一未知數的普通方程之解法,以及 n 未知數的 m 同局方程之解法是。 雖然前者是後者之一特例,其重要幷困難,則直可視爲方程理論中之根本問題。這些問題,祇是其特例,古代及中世紀數學家已有解之者,而由其心核所生出的較廣的理論,則目前尙在發展中。 第一問題特例之解法,前所述阿姆斯之"堆積"問題已見其一例。至其他例中,則有以下者可述:平方根之求法,如

$$\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4},\qquad \sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

輓近於一埃及古紙上見之,現存柏林博物院中;幾何的表象次數不大的方程之諸根,古希臘人,歐几里得(*Euclid*)亦在內,已用之,而亞拉伯人尤用此;地哇范土司(*Diophantus*)已知求二次方程之一正的有理根; 而印度人與亞拉伯人則已知至少有幾個數目的二次方程有二根。

由這樣的特例出發, 數學家漸漸能知道每一 n 次一未知數的方程恰恰有 n 個根。 此雅緻的定

理，平常即稱爲"代數學上之根本定理"（其證可參觀本叢書代數幾何之基本附錄二）。法國方面此定理亦稱爲"德亞萊伯（*D'Alembert*）定理，"因德氏於1746年曾發表其證，那時大家以爲此證嚴格可用。惟第一個可滿足的證，則高斯於1799年時所發表。向此證之漸漸的進步，經數百年，足可使人知數學智識進化過來之遲，以及此項定理四圍之可注意的歷史。

前述的第二個根本問題，近代由此亦得了許多結果。倘祇限於 n 未知數的 m 個同局一次方程，此問題引至數學上一重要的部分，即"定列式，"而定列式理論則轉對於此問題多有所供獻。古埃及人及希臘人之離散的同局方程，實表出人心上之需要，此已大部滿足，然藉此又引出更深的感覺，求其仍向前發展，并希望此項發展將得到。在此短篇中，對於一未知數的方程，將多些篇幅研究之，因此項方程，亦爲 n 未知數的 m 同局方程理論之基礎。

8. 符號。 古時及中世紀的數學家,於一方程之兩端間,尋常寫一“等”字,未有等號。然此亦非普遍的如是者,有許多數學家已曾各用過符號於方程兩端之間,以代此等字。阿姆斯用(≺)爲等號,地哇范士司則用(l)以代等字,而西亞拉伯人所用等號,則類J字。十六世紀時,等號大多用∝。目前我們所用的號=是1557年時黎考(*Record*)所創出,其所以特作此號的理由,則是“沒有兩件事物能較二平行線更相等。”十七世紀時,每用二平行的縱線代=,而尤其是法國方面如此,蓋後者用以表二數目間之絕對的差。中世紀的文稿中幷通用此號代“*est*”一字。

方程中最重要者是未知數。事實上,未知數實表出一有條件的方程之特色,而決定未知數之一列值,則爲方程之重要職務(註:此係就初等的見地而言。若自他方面言之,亦可說已知的係數最占重要,幷決定未知數之可能的值)。各種用過的單一未知數之符號中,看來其清晰暢達,莫過於紀

元前 1700 年阿姆斯所用的那一個；蓋"堆積"一語自然含有其各個之數目尙未知的意義。地哇范土司用 ς 表未知數；而印度人婆羅馬古太 (*Brahmagupta*) 則用"*yávat távat*"表第一未知數，倘未知數多於一，則用顏色名，黑，青，黃，等等，以表其餘的未知數。著名的亞拉伯人亞爾加利斯米 (*Alkarismi*)，現在所用"亞爾格伯拉"(卽代數學)一語卽從他的書上得來，而他的名字則後來變成"亞爾各利塞姆"(*algorithm*) 一語（譯者按歐洲古時用一種器具類似算盤者供計算，其後此亞拉伯人之算法傳入，於是卽生出一種新的算法，而卽以此人之名字名之，以與舊者相對待。惟目今 *algorithm* 一語之用法，與原意義已不同），稱未知數爲"事物"或"根，"中世紀時，此二語頗通用。1637 年時，法人笛卡士 (*Descartes*) 始創用現在的習慣，將字母之末數字 (x, y, z) 代未知數，而開首數字 (a, b, c 等) 代已知數。

9. 有理性之領域。 關於代數方程方面，近代有

一最有用的概念，即是“有理性之領域”(*domain of rationality*)。倘使一服從尋常代數學上定律的符號 R 用加，減，乘，除(但不得用 0 除)儘可能的與其自己連結，并與所得連結之結果連結，則得一個各種式之總，此總有此重要屬性，即，倘用這四種演算法之任何一種以連結總內之式，則不能再得外此的式。這些演算法，統名“代數學上之有理演算法，”而所得的總，稱爲 R 所構成的“有理性領域，”用 (R) 表之(參觀本叢書尺規作圖篇第 4 節)。如 R 爲數目 1，而用代數學上之有理演算法將此數目并所得結果的數目儘可能的演算之，則所得的總乃是一切有理數目。倘使 R 爲任何一其他有理數目，但不得爲 0，則所得結果的總仍是此。此即是，$(1)\equiv(n)$，於此 n 爲任何有理數，但不得爲 0。

欲了解此種有理性領域之意義，須觀察其所包者爲一總，對於代數學上之有理演算法而言，乃是封鎖的。於此關係上，頗可注意，單位一之 n 個 n 次根，對於乘與除而言乃是一封鎖的總，但對於

加與減卽不能。蓋設取其四個四次根 $1,-1,i,-i$ $(i\equiv\sqrt{-1})$，而用乘與除儘可能的連結之，則不能得外此的數目。仿此，以下八個數目，對於自 2 減去及除 2 而言，亦爲封鎖的一個總：$-1,-2,3,4,\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{4}{3}$。此項封鎖的總，無論其所有分開的元素爲有限的或無限的，於各種數學論題方面，占根本的重要。對於加及減而言爲封鎖的一個數目之總，尋常稱爲一"數目率。"例如有理整數卽是這樣一率，但非爲一有理性領域。

通言之，有理性領域 (R) 必包括有理數目領域，因其包括 $\frac{R}{R}=1$。因之，初等算術上之有理數目，構成最小可能的有理性領域（註：由 0 所成瑣小的領域，這裏不計入），而此領域則包在其他每一領域之內。(R) 領域之最普通的式，可化成此形式：

$$\frac{a_0+a_1R+\cdots\cdots+a_nR^n}{b_0+b_1R+\cdots\cdots+b_mR^m}$$

於此，$a_0,a_1,\cdots\cdots a_n$ 及 $b_0,b_1,\cdots\cdots b_n$ 爲尋常的正或負的整數。此卽是：有理性領域 (R) 爲一切 R 之有理函數帶有整係數者所成。

很明白的，有理整函數所成的總，卽，以下形式的一切函數

$a_0+a_1R+\cdots\cdots+a_nR^n$ (a_0, $a_1\cdots\cdots$所表如前)

所成的總，有此屬性，將其中任何二個（或任何一個與其自己）用加，減，乘三者中之一連結起來，不能得外此的函數。此總稱爲由 R 所構成的"整性領域，"用 $[R]$ 表之。倘 $R=1$，則此領域卽化成爲尋常正與負整數之總，而 $[R]$ 則總是包在 (R) 內。我們可看出，倘一切有理演算法相繼於 R 上使用，則卽得 (R)。此事實通常如此說法：(R) 由 R 對於有理演算法所生出。反之，$[R]$ 不是常爲 R 所生出，例如 $R\equiv\sqrt{2}$ 卽是如此。但 $[R]$ 內有無限數元素之對，倘對於代數學上之有理整演算法連結之，則能生 $[R]$。最簡單的對，卽 R 與 1。

$R_1, R_2, R_3,\cdots\cdots$諸符號（符號之數目爲有限或無限的）之有理函數，帶有有理係數者，所構成的總，名爲一"有理性領域，"用 $(R_1, R_2, R_3, \cdots\cdots)$ 表之。而 $R_1, R_2, \cdots\cdots$中每一符號，名爲"領域之元素。"

仿此，適才所說者內，倘於有理函數處易以整函數，有理係數易以整係數，即可得整領域 $[R_1, R_2, R_3, \cdots\cdots]$ 之定義。一 x 之有理整函數 $f(x)$，倘其一切係數均在此有理性領域內，則此函數即在此領域 $(R_1, R_2, \cdots\cdots)$ 內；倘其一切係數均在整性領域 $[R_1, R_2, \cdots\cdots]$ 內，則即名爲在此整領域內。設 $f(x)$ 爲同此有理性領域內二有理整函數之積，$f(x)$ 即爲此領域內之"可化"者。倘於一領域內不能如此，即云 $f(x)$ 於此領域內"不可化。"

函數之於一領域內爲不可化者，於他領域內或可化。例如 x^2+x-1 於 $(\sqrt{2})$ 內不可化，但於 $(\sqrt{5})$ 內則可化；反之，x^2-2 則於前者內可化，而於後者內即不可化。若在有理數領域內，則此二函數均不可化，雖然此二者均在此領域內。由根本定理上，可知每一有理整函數，爲 x 所成，其次數超過一者，於有的有理性領域內是可化的。倘我們研究二個或多個變數的有理整函數，即不能證得一相仿的定理。例如 $xy-1$ 一函數，是在有理數領

域內，但可證明不能將此函數解爲二因子，其係數在任何有理性領域內者。

III 一未知數及帶有文字係數的方程

10. 通說。 古代及中世紀的數學家，祇知有五種代數的演算法，卽，加，減，乘，除及開方。這五種算法，對於以下形式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$$

的方程（這裏 $a_0, a_1, \cdots\cdots$ 等爲實或雜數，倘未特別聲明，總假定 $a_0\neq 0$，而當 a_0 爲實時，幷可假定其爲正，若爲雜，則卽不能作此假定，蓋正與負二語對於雜數不能直接應用。n 則爲正整數），倘 $n<5$，已可够用；但如 $n>4$，則卽不够了。此定理最初於 1824 年時爲那威數學家亞倍爾(*Abel*)所嚴格證明，實於四次以下及以上的方程間，劃了一條界線。凡亞氏以前之種種努力，想用這五種算法以解五次以上之普通方程者，自然均歸失敗。（註：用此五種算法的解法，名根數解法）這裏所須注重者，證明 $f(x)=0$ 有一根"存在，"以及"求得"此根之間，

實有極大的分別。有一根存在，此是代數學上之根本定理所證明者，但欲找得方法，用係數 a_0, a_1, ……以表出此根，則當 $n>4$ 時，大不容易。1858年時，著名的法國數學家赫米脫（*Hermite*）曾發見一種方法，用此可將普通五次方程之一根用橢圓函數表出之。輓近復有人證明，普通 n 次方程之一根，可用所謂福克司函數（*Fucsian function*）將其用係數表出之。

倘 x_1 爲 $f(x)=0$ 之一根，則 $f(x)$ 可爲 $x-x_1$ 所除，此重要的定理爲笛卡士所發見。由此定理，可得二根本事實，即，(1) 求 $f(x)=0$ 之諸根，等於將 $f(x)$ 分解成爲一次的因子，而 (2) 倘證明 $f(x)=0$ 有一根，即幷證明其有 n 個根。且此重要定理亦不難證明，可如下得之：

設 $$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n \tag{1}$$

因 x_1 爲 $f(x)=0$ 之根，故得 $f(x_1)=0$，或

$$0=a_0x_1^n+a_1x_1^{n-1}+\cdots\cdots+a_n \tag{2}$$

自 (1) 減 (2)，即得

$$f(x)=a_0(x^n-x_1{}^n)+a_1(x^{n-1}-x_1{}^{n-1})+\cdots+a_{n-1}(x-x_1)$$

但當 l 爲任何正整數時

$$x^l-x_1{}^l=(x-x_1)\,(x^{l-1}+x_1x^{l-2}+\cdots\cdots+x_1{}^{l-1}),$$

故可證明　　$f(x)=(x-x_1)f_1(x)$,

於此 $f_1(x)$ 爲 x 之有理整函數，$n-1$ 次者。換言之，卽 $f(x)$ 可爲 $x-x_1$ 所除。

但 $f_1(x)$ 之格式與 $f(x)$ 無異，故可仍用此推理法於其上。詳言之，倘 $f(x)$ 形式之普通函數有一根，$f_1(x)$ 亦必有一根 x_2，故亦可爲 $x-x_2$ 所除，而得商 $f_2(x)$。n 既爲一有限的正整數，故反復用此法後，最終必可得一一次的商，因而證明

$$f(x)=a_0(x-x_1)\,(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_n)。$$

所須注重者，此法必假定每一如 $f(x)$ 的函數至少有一根存在，纔能證明其有 n 個一次的因子。故適才所證定理，實卽是"倘 $f(x)$ 爲 $x-x_1$ 所除，則其餘爲 $f(x_1)$"一定理之特例。

1629年紀拉(*Girard*)發表一重要著作，名"代數學上之新發見，"中述 $f(x)=0$ 有 n 個根之定理，

并觀察得根之初等相稱函數及方程之係數間，有數種普通關係存在。 此項關係之特例，以前卡大(*Cardan*)及維他(*Vieta*)已見到。 而其較普通的關係，則自此事實

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_n)$$

上蓋已不難推得。 將此方程右端之因子乘出，即可見根之和是$\frac{-a_1}{a_0}$，而 α 個根之各種組合之積之和，則為$\frac{(-1)^\alpha a_\alpha}{a_0}$(於此 $\alpha=2,3,\cdots n$)。

紀氏并曾算出以下的根之相稱函數之值

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2,\qquad \sum_{i=1}^{i=n} x_i^3,\qquad \sum_{i=1}^{i=n} x_i^4,$$

用以下的諸比表出之：$\frac{a_1}{a_0},\frac{a_2}{a_0},\cdots\cdots,\frac{a_n}{a_0}$。 如前段所觀察到，這些比分開的代表諸根之相稱函數，而此項可注意的相稱函數，則用專門語時，即稱為 n 個根之"初等相稱函數，"乃是 1,2,$\cdots\cdots n$ 次均有的。紀氏著作，實為"每一 $x_1,x_2,\cdots\cdots x_n$ 之整相稱函數，祇能以一個樣式作為諸初等相稱函數之一

整函數表出之"一定理之先聲。

11. 置代(*Substitution*)**與代羣。** 欲精深研究代數方程,不僅須知相稱函數之屬性,兼須知不相稱的有理函數。拉格倫(*Lagrange*)於其"方程之代數的解法"及"柏林皇家科學院記事錄"(1770 及 1771 年)中曾澈底的研究過一番用以解次數高的方程之已知的方法,訂正卡大,梵拉利(*Ferrari*)笛卡士,芝倫霍斯(*Tschirnhaus*),歐拉(*Euler*)及伯楚(*Bézout*)等諸人所用過的方法。他觀察到,一代數方程之解,依於一其他方程之解上,即後來所稱爲分解式(*resolvent*)者,他指出,各種分解式之諸根,乃是所設的方程之諸根之有理函數。此即引至此根本事實,即,解方程之問題,依於根之有理函數之屬性。

拉氏於前述的著作中所達到的見地,引起較廣的研究有理函數之屬性,尤其是當此項函數之 n 個元素儘可能的變互(*permute*)時,關於其假定的值之數目之研究。此項研究,引至置代理論,即拉

氏所稱為"組合算法"者，而此則乃是對於一代數方程之性質得一深的見解之利器。可稱為與拉氏同有發見置代理論之根本重要之功者，尚有羅飛尼(*Ruffini*)亞倍爾格老司,及郁爾德(*Jordan*)等可一提及。

一有理函數之元素或字母變互時，可得各種形式，此項研究實能最自然的使人知置代及代屬之眞意義。例如,此歷史的函數$x_1x_2+x_3x_4$,倘將x_1易以x_2,x_2易以x_1,則自然仍不變動。此種事實,可更簡單的說:$x_1x_2+x_3x_4$函數用置代(x_1x_2)轉換成自己。若用置代(x_3x_4),可知亦轉換成自己。倘二置代(x_1x_2),(x_3x_4)相繼用之,則用$(x_1x_2)(x_3x_4)$表之,而此置代卽名(x_1x_2),(x_3x_4)二置代之"積。"很明白的,倘二置代各將一函數轉換成自己,則其積亦必轉換此函數成自己。一組不同的置代,倘有此屬性,能包括其各個之方,及其任何二者之積,則卽稱為一"代屬。" 因$(x_1x_2)^2=(x_3x_4)^2=[(x_1x_2)(x_3x_4)]^2=1$，這裏1卽為所論的函數之一切元素

均不變動的意義，可知以下四置代乃是一代屬。

$$1,(x_1x_2),(x_3x_4),(x_1x_2)(x_3x_4)。$$

代屬分爲級，而卽以其所有置代之數目別之，如是，此代屬卽爲級四者。此屬於許多數學研究上占根本的地位，而其抽象的各種名稱則如下：軸屬，橫錯比屬，平方屬，四屬，矩形屬等等。

倘再用外此的置代，$(x_1x_3)(x_2x_4)$，$(x_1x_4)(x_2x_3)$，$(x_1x_3x_2x_4)$，$(x_1x_4x_2x_3)$（此末二置代表明 x_1,x_3,x_2,x_4；x_1,x_4,x_2,x_3 照所設次序循環的變互之），則可知所設的函數亦仍轉換成自己。并很易證明，以下這八置代，成爲一屬：

$$1,(x_1x_2),(x_3x_4),(x_1x_2)(x_3x_4),(x_1x_3)(x_2x_4),$$
$$(x_1x_4)(x_2x_3),(x_1x_3x_2x_4),(x_1x_4x_2x_3),$$

而爲這幾個字母所有惟一的諸置代能轉換此函數成自己者。一屬包含在他屬中者，名爲一"亞屬"。因之，此級八的代屬之前四置代，構成一亞屬，其級爲四，而其前二置代，則構成一級二的亞屬。讀者很易自己證明此事實，卽此級八的屬含有二，且

祇含二其他級四的亞羣,及四其他級二的亞羣。此羣抽象的稱爲"八羣"或"平方之羣。"

欲明白所謂格老司氏代數方程論,則置代理論實爲首要,且此理論於其他數學部分內亦極重要,然因此理論之要素未普通明白,而自開首起將此理論相當的敍述之,則非本篇之篇幅所能容,故以下不能清楚的用之。不過仍可以提及幾條基於此理論上的定理,有前面所說者當至少已能部分的了解之。

前已見到 $x_1x_2+x_3x_4$ 一函數用一個級八的羣內之一切置代,可轉換成自己,但沒有其他的置代可如此。 此種事實,尋常卽說:此函數 $x_1x_2+x_3x_4$ 隸於此羣內。我們很容易可求得這些字母所成的其他函數,例如 $(x_1+x_2-x_3-x_4)^2$,亦隸於此羣內者;又已經證明,對於一已知的羣,有無限數的不同的有理函數隸屬之,而這樣一函數則祇隸屬於一個羣。 卽是,包含某幾個字母之有理函數及這些字母之代羣間,有一$(\infty,1)$的相當,而隸屬於同一羣

的一切函數，則相互為有理函數。拉格倫曾見到這樣一函數之 n 個元素儘可能的變互時，其所可有的值之數目，乃是 $n!$ 之除數。例如 $x_1x_2+x_3x_4$ 可得以下三值：

$$x_1x_2+x_3x_4,\quad x_1x_3+x_2x_4,\quad x_1x_4+x_2x_3。$$

此與普通理論相合，因 3 乃是24之除數；然欲作一四字母所成的有理函數，其元素儘可能的變互時，能恰有五個值者，則卽不能，因 5 非 24 之除數。

雖然一不超過 n 次的有理函數，當其字母儘可能變互時，其能有的值之數目乃是 $n!$ 之除數，但卻不是 $n!$ 之每個除數有這樣一函數。事實上，已證明當 $n>4$ 時，卽不能對 $n!$ 之每個除數作一函數，而當 $n<5$ 時，則可以如此。不能作一五個字母的有理函數，當其字母儘可能的變互時能有 3,4,或 8 個值者，此則羅飛尼於 1799 年已發表其證明。此事實，無異於以下之定理：“不能有五個字母或較少數的字母之代屬，其級為以下的任何一數目者： 40,30,15。”

12. 一次方程。 每一一次方程有一未知數者，可化作此形式

$$ax=b$$

這裏 a 與 b 爲已知數，x 則爲未知數。

此方程可以解的必要且充分條件，乃是或則 a 與 b 均爲零，或則 a 非零。倘滿足前者，則此方程有無限數的解，因 x 可任取一值均合理。反之，若滿足後者的條件，則此方程祇有一解；這裏，x 之值乃是用 a 除 b。因此是一有理的方法，故此方程之根必在由 a 與 b 所構成的有理性領域 (a,b) 內。然此根不必在其整領域 $[a,b]$ 內。

倘 a 與 b 限於"自然"數目，則不能將每一一次方程化爲單獨的一種形式，但可化爲以下二種形式中之一：

$$ax=b, \qquad ax+b=0。$$

即或 a 與 b 限於"正"有理數時亦然。古代與中世紀之數學家，普通多將後者的限制加於 a 與 b 及根上。故第二種式即不能求解。因此，欲得一次

方程之普通解法，卽須推廣數目概念，使負數與分數亦包入才行。如此推廣數目概念後，一次方程除 $a=0$ 而 $b\neq 0$ 外卽均可解。至其更廣的推廣數目概念，將無理數與尋常的雜數亦包入，則與一次方程無關。

13. 二次方程。 每個一未知數的二次方程，可化爲此形式

$$a_0x^2+a_1x+a_2=0。$$

倘設 $x=z+k$，則此方程卽作

$$a_0z^2+(2a_0k+a_1)z+a_0k^2+a_1k+a_2=0。$$

因 $a_0\neq 0$，故由前節可知總可以解以下由 k 所成的一次方程：

$$2a_0k+a_1=0,$$

於是得一方程作此形式者

$$z^2=A,$$

這裏祇須開一數目之平方便得。解二次方程上最重要的事，乃是開一數目之平方根。事實上，二次方程之解法與前一次方程者所不同的，卽是這裏

多開方一法，此則觀於前所說者易知。但須知開平方根一事，在數學上實非小事。由此，生出無理數及尋常雜數的問題了——此二問題至爲深淵遠大。

因適才所得數目 A 爲係數 a_0, a_1, a_2 之有理函數，故必在此諸係數所構成的有理性領域內。因此，一未知數的二次方程，倘我們能將其係數所構成有理性領域內之一切數目均開其平方根，則此方程總能得解。但我們知道，任何實數及任何尋常的雜數，均可開其平方，故一未知數的二次方程，倘其係數爲尋常的實或雜數，即總能得解。

一未知數的一次方程，其根是在其係數所構成的有理性領域內，但二次方程之根，則不必如此，因開平方根不是一種有理演算法。倘二次方程之係數爲有理數，則其一根所構成的有理性領域，自能包括其他一根，但倘其係數爲無理數或雜數時，即不必如此。然一未知數的二次方程之二根，必在由其係數及其一根所構成的有理性領域內，此

則總是如此的，因每一根均可用有理法自其係數及其他一根上得之。換言之，一未知數的二次方程，在由其係數及其一根所構成的有理性領域內，總是“可化”的，但在較小的有理性領域內卽不是如此。

將一二次方程化爲 $Z^2=A$ 之形式，乃是將以下方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

中之第二項遷去的一特例。設如於此方程內用 $z+k$ 代 x，卽得

$$a_0(z+k)^n+a_1(z+k)^{n-1}+\cdots+a_n=0,$$

此式內 z^{n-1} 之係數亦是 a_0nk+a_1。

因 a_0 與 n 均非 0（不則此方程不能爲 $n>0$ 次者）。故總能求得一數目代入 k 處，使 a_0nk+a_1 成零。此數目有時稱爲“a_0nk+a_1 函數之零，”但尋常則稱爲以下 k 所成一次方程之根：

$$a_0nk+a_1=0。$$

因此，解一一次方程已足決定一數目，用此可使

x^{n-1} 之係數成零。 通言之,解一 a 次的方程,足使 x^{n-a} 之係數成零。詳細說,亦可云欲使絕對的一項 a_n 成零,必解此 n 次方程而後可。

14. 由二次方程所得數目概念之擴充。解普通的二次方程,能引起 $a+b\sqrt{-1}$ 形式的數目(這裏 a 與 b 爲實數),卽當其係數 (a_0, a_1, a_2) 爲有理數時亦能如此。已經證明,此種形式的數目,已夠用以解一未知數的 n 次方程,卽當方程之係數亦爲此項數目時,亦已可够。 然不可因而以爲用以解帶有理係數的二次方程之此項數目,其多與用以解 n 次方程者等。 1770 年時,拉格倫證明,凡爲有理係數的二次方程之根的實無理數,有此特性,可用週期連分表之,其元素則爲整數。 於是二次方程生出此分別各種無理數的大問題,此問題在今日爲重要研究之對象。

二次方程幷生出一方程所可能有的根之數目的問題。但所須注意者,對此問題所下的答案,隨觀點而定。地哇范士司及其他古代的數學家旣不用

負數,無理數，或雜數作方程之根,故大部分的二次方程都不能有根,有的祇有一根,但絕沒有這種例，於此古代的希臘人或古時數學家會見到至少有幾個二次方程可有二根。反之,十二世紀時,有一印度數學家巴斯卡拉(*Bhaskara*)曾見到有幾個二次方程有二根,不過還有許多二次方程,則在他看來亦是不能有根的,因他不用雜數。他曾作以下可注意的規例:“正數或負數之平方均是正的,一正數之平方根乃是兼正與負二者。負數無平方根,因負數非平方。”

引至二次方程的問題,往往極狹的觀之,以爲祇有一根或竟沒有根能有意義者,而二根之存在,每引至此問題之較廣的概念。此方程因之實能使人對於此問題之性質作更正確及更深的思想。這是很重要的事，我們見到於研究一方程之根之性質及屬性上,不僅能清楚的了解此方程之精要,兼且可使人對於引起此方程的問題之性質，有更深的見解。此種觀點爲法國數學家潘叔德(*Poinsot*)

所採取，與其前德亞萊伯氏之觀點相反背，蓋德氏之意，以爲除了引起此問題的根，其餘的根滋多不便，不足爲代數學上之長處。

一方程所有根之數目之問題，不盡限於此數目的領域，即假定未知數之値在其中者。倘二次方程爲一整平方時，則又有困難。例如 $x^2-2x+1=0$ 一方程，我們說其祇有一根時，似很有理由，因此方程祇有 1 爲其解。然若將此方程之左端寫作 $(x-1)(x-1)$，則可知 $x=1$ 能使其二因子各成零，故可說 1 是一"重"根。不過此僅是一種沿習，欲求簡單及淸楚——此二者於數學之發展上爲極有力的分子。因此，說一二次方程總有二根亦祇有二根，實負有重大意義的歷史事實，幷爲普通方程理論中之和諧及簡練之先聲。

15. **三次方程。** 解一普通三次方程，於解二次方程所需的演算法外，還須要開立方根的方法。然三次方面，開方之準備不若二次方面之明顯。事實上，有許多數學家曾試過此項先引的轉換未

成,後來有意大利數學家名法羅(*Scipione del Ferro*)者始成功。自此後,有許多不同的解法,并有許多關於三次方程的文字作出。這些解法中,有許多其所根據的理證不能應用於 n 次之普通方程,但就三次而言,卻極雅觀。但我們這裏先用一方法,包括許多極可注意的普通定理但須用冗長的算者,蓋廣被的思想較之簡單的特別方法於數學家較切要。

用 13 節內所說方法,可將一普通三次方程之第二項遷去,於是其形式即作

$$x^3+qx+r=0。$$

設 x_1,x_2,x_3 爲此方程之根,今可一論以下函數:

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3),$$

$$(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)^3,\quad (x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3)^3,$$

這裏 ω 爲一之幻的立方根。可觀察當這些函數中任何其一在此諸根之一置代上不變動時,其他二者亦然。即是,每一函數由此諸根之同的置代轉換成自己。因凡二有理函數爲同的置代所轉換

成自己者,能互相有理的表出 (11 節),故知這裏每一函數能互相有理的表出。此中第一函數之平方是相稱的,所以此平方可用初等相稱函數 q 與 r 有理的表出之,如 11 節中所說。

此普通的定理使我們能明白三次方程之如何解法。今試將$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$作爲$q$ 與 r 之有理函數之平方根表出之,則其他二函數均可作爲此平方根之有理函數,而開此有理函數之立方根。如是,可求以下二者之值:

$$x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3,\quad x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3。$$

但我們知道 $x_1+x_2+x_3=0$,於是得三個三未知數的一次方程;由此,已不難得此項未知數之值了。這裏須注意到,此種普通方法能使我們於演算之前,先明白如何以求其根。而此未運算先明白事物則實是數學中之重要趨向。正則言之,純粹數學中應當思想在前,不當運算之後才思想。運算作出如下:

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)=\sqrt{\mid 4q^3-27r^2};$$

$$x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3=\sqrt[3]{-\frac{27}{2}r-\frac{3}{2}\sqrt{12q^3+81r^2}};$$

$$x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3=\sqrt[3]{-\frac{27}{2}r+\frac{3}{2}\sqrt{12q^3+81r^2}};$$

$$x_1+x_2+x_3=0。$$

將後三方程相加，可得：

$$x_1=3\sqrt{-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}}+3\sqrt{-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}}$$

此卽是所謂卡大氏式，因他最先發表此。實際上，卡氏得之嗒德格拉 (*Tartaglia*)，并許嗒氏守祕密，後來卻背約，將其發表在他 1545 年出版的書中。

1591 年時，法國數學家維他曾作出一雅觀的，簡單的，三次方程之解法。他先將普通的方程化作以下形式：

$$x^3+3ax=2b,$$

而設 $x=\frac{a-y^2}{y}$，則此方程卽作

$$y^6+2by^3=a^3。$$

因此方程作二次方程之形式，故極易得 y 之可能的值，既得後卽可代入 $x=\frac{a-y^2}{y}$ 以求 x 之值。

還有其他許多簡法,這裏不再述。

16. 四次方程。 我們可以見到,解普通的四次方程,不需要開平方及開立方根以外之其他非有理算法。故解四次方程所用算法與三次者同格式。如前三次者那樣,這裏先述一方法,因其明晰及所含思想之廣,頗爲有價値,不過自實用上言之,則較爲不簡單。在有許多方程上,下面的法極爲有利:

我們可假定,將普通的四次方程已化作此形式:

$$x^4+qx^2+rx+s=0,$$

而其根則爲 x_1, x_2, x_3, x_4。下面的三函數,用此諸根每一置代,可見其均轉換成自己或互相轉換成:

$$(x_1+x_2-x_3-x_4)^2, \qquad (x_1-x_2+x_3-x_4)^2,$$

$$(x_1-x_2-x_3+x_4)^2。$$

故以此三函數爲根的三次方程,其係數必爲 x_1, x_2, x_3, x_4 之相稱函數。因這些相稱函數可作爲初等相稱函數 q, r, s 之整函數表出,故知此三次方程在這些初等相稱函數所構成的有理性領域內。事實上,此三次方程爲

$$y^3+8qy^2+(16q^2-64s)y-64r^2=0。$$

解此三次方程，并以 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 表其三根，則得以下四未知數的四個一次方程：

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0,$$

$$x_1+x_2-x_3-x_4=\sqrt{\theta_1},$$

$$x_1-x_2+x_3-x_4=\sqrt{\theta_2},$$

$$x_1-x_2-x_3+x_4=\sqrt{\theta_3}。$$

將這些方程相加，可知 x_1 是該三次方程之根之平方根之和之四分之一。 x_1 既知，其餘三根自不難得了。

普通四次方程之解法，爲卡大之學生梵拉利所發見。梵氏發見此時，還沒有滿二十三歲，這是極可注意的。即亞倍爾與格老司於方程理論上供獻其根本的工作時，亦均在二十三歲以前。梵氏解法之要義如下：將四次方程寫作

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0,$$

於兩端各加 $(ax+b)^2$，而假定其左端是一整平方，即

$$x^4+px^3+(q+a^2)x^2+(r+2ab)x+s+b^2=$$

$$(x^2+\frac{1}{2}px+k)^2。$$

將兩端同次方的 x 之係數相等，消除 a 與 b，則得一 k 之三次方程。由此方程既求得 k 之值，即須分解

$$(x^2+\frac{1}{2}px+k)^2-(ax+b)^2=0$$

之因子，便可將解四次方程化爲解二個二次方程。在這二個二次方程之解內，必包括原方程之根。

17. 四次以上之方程。 意大利的數學家既發見三次及四次方程之解法後，曾引起許多企望，想將較高次的普通方程用有理演算法及開方法（這幾種方法爲那時所僅知的代數演算法）解之。這些努力自不免僅歸失敗，直至梵拉利發見四次方程解法後之三百年，始由亞倍爾最初嚴格的證明普通五次方程不能用這些初等演算法解之，彼時亞氏還只二十二歲。很可注意的，亞氏初亦曾試過用這些初等的演算法以解五次方程，他并曾有一時信以爲求得一解，但後來他卻發見了其自己的錯誤。他這成功得到了其同國人亨司鼎(*Hansteens*)

之終身的友誼并資助。

但亞氏并非想及去證明普通五次方程不能用開方法求解之第一人，在他以前二十餘年，羅飛尼對於能有力足以證明此事實的方法上，實多供獻。他於代屬方面曾作出許多定理。故五次方程之普通解法上所生困難，實爲後來數學發達之大富源。除羅氏外，對於此項發達上有錚錚之供獻者，爲芝倫霍斯，歐拉，拉格倫，高斯，格老司，及赫米脫諸人。

格老司(生於 1811 年，卒於 1832 年，享年僅二十一歲)之工作，其於證明每一方程屬於一個一定的代屬，而此屬之屬性則可使人確定的明白其所屬的方程之能否用初等演算法解之，對於方程理論及代屬理論之間，立了較確定的關係，實尤爲根本的。此重要的定理，卽，任何方程之根之二有理函數，於方程之係數之有理性領域內，可互相有理的表出，則早前拉格倫已證明。

IV. 一未知數及帶有數字係數的方程

18. 通說。 雖然有許多數字的代數方程之來，

已在有史以前，但希臘文精華錄方面關於算術的小品文字卻使我們作此假定，這些方程由疑謎及字方程來的。完全發達的方程,代表純正思想之大道沒有小徑，而係數決定這些大道之可能的命運。古代求將一立方倍之及將一角三等分之的問題,使人注意於這些大道之需要,但其作係數,卽可視爲隨意者,則有大困難。卽在有三實根的三次方程方面，卡大公式亦以二幻式之和的形式表實根,而已經證明,於此欲用根數以實的形式表三次方程之根是不可能的。惟法國大代數學家維他曾證明三根之實値,可用三角學得之。

由前面所說，可知卽一定次的普通方程之根之公式已知,欲解該次之數字方程,亦還多困難。因得這些公式旣不易,而此外還有如此困難,於是使人注意到當方程之係數爲數字時,求特別的解法。但須注意,對於有許多代數學之應用上,祇需要實根之近似値。此項需要引起許多著作,其中包括有關於代數方程之極好的結果。數字方程之一次

及二次者，已可自普通解法上得其値，故下面假定所論的方程，其次數大於 2。數字方程之解法，有時倘先一研究其係數之原性，則大可簡易些，故其詳節頗爲重要。

數字方程理論之大部限於實數，因往往祇是這些數目能直接應用於發生此方程之條件上。關於方程之係數尤是如此。當有理整函數 $f(x)$ 之係數包括雜數，則自然可將此函數寫作

$$f(x)=\phi(x)+i\psi(x),$$

於此，有理整函數 $\phi(x)$ 與 $\psi(x)$ 之係數爲實數。用其共軛値 $\phi(x)-i\psi(x)$ 乘此方程之兩端後，則得一新的 x 之有理整函數，能包括 $f(x)=0$ 之一切根，但祇有實係數。故如我們能求得每一實係數的 x 之有理整函數之一切根，則卽能求得雜係數的如此一函數之一切根。又，自 $f(x)$ 之形式上，可觀察到 $f(x)=0$ 之任何實根，乃是 $\phi(x)=0$ 與 $\psi(x)=0$ 之共的根，故卽是 $\phi(x)$ 與 $\psi(x)$ 之最高公生數之根。爲此事實，幷爲簡單明晰計，本章內統

假定 $f(x)$ 之一切係數是實數。

19. 倍根。 倘 $f(x)$ 能爲 $(x-r)^{a}$ 所除，但不能爲 $(x-r)^{a+1}$ 所除，則 r 可說恰恰 a 次爲 $f(x)=0$ 之根；有時這樣一根亦名爲 $f(x)$ 之零。如 $a>1$，r 名爲 $f(x)=0$ 之倍根，或 $f(x)$ 之倍零。欲決定 $f(x)=0$ 之倍根，用向所知道的屬性較爲便利，即，任何一根恰 a 次爲 $f(x)=0$ 之根者，於 $f'(x)=0$ 必恰 $a-1$ 次爲其根，於此 $f'(x)$ 乃是 $f(x)$ 之第一次引生函數。因之，$f(x)$ 之一倍根，亦即是 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之最高公生數之根。因 $f(x)$ 之第一次引生可用有理法得之，故 $f(x)$ 有倍根時，於其係數之有理性領域內是可化的，惟此定理之例，則不必可用。

由適才所說，可知 $f(x)=0$ 之倍根可自 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之最高公生數得之。但此最高公生數之倍根亦可同此得之，故知當 $f(x)=0$ 所有倍根之數不多於 β 時，這些根可用有理算法及解超過 β 次的方程得之。有時倘 $f(x)=0$ 祗有一倍根，則可

用有理算法得之。用視察法以求有理倍根，這是往往可以的。

用 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之最高公生數除 $f(x)$ 所得的商包括 $f(x)$ 之每一根一次且祇一次，故以下可假定 $f(x)=0$ 沒有倍根。此項假設大可簡省說法。

20. 司徒姆(*Sturm*)氏定理。 此定理(1829年證明)為每一種求實係數的代數方程內未知數之近似值的方法，立了數學的基礎，因他能確定指出二任意指定的數目間之實根的數目。而此定理之證亦幷不難，乃是建設於下面二簡易的事實上：(1) $f(x)$ 之連續性，(2) 倘 a 為 $f(x)=0$ 之實根，h 為充分小的正數，則 $f(a-h)$ 與 $f'(a-h)$ 之號不同，而 $f(a+h)$ 與 $f'(a+h)$ 之號則必同，於此 $f'(x)$ 為 $f(x)$ 之第一次引生函數。

我們可恰如求 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之最高公生數那樣以得司氏級數，不過這裏每一餘數之號須改之。如是，可得以下之關係：

$$f(x)=q_1(x)f'(x)-r_1(x),$$

$$f'(x)=q_2(x)r_1(x)-r_2(x),$$

$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)-r_3(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{n-2}(x)=q_n(x)r_{n-1}(x)-r_n(x),$$

於此，$r_n(x)$ 是一常數，非爲零，因 $f(x)=0$ 無倍根。這級數

$$f(x), f'(x), r_1(x), r_2(x), \cdots\cdots r_n(x)$$

有以下的屬性：沒有二相接的函數，對於 x 之同的值會均成零；不則其下一切函數對於此 x 之值均會成 0，但此是不可能的，因 $r_n(x)$ 非爲零。當任何一函數成零時，其二相接的函數之號必不同，俾能滿足此所設的方程。故當 x 連續的自實數 a 增加其值至實數 b 時，我們欲求此級數中號改變之數目，可不須問任何函數之成零，惟第一個除外。倘此成零，則號之改變即失，如前所觀察得者。此則證明司氏定理如下：

倘任何二實數 a 與 b 代入司氏級數

$$f(x), f'(x), r_1(x), r_2(x), \cdots\cdots, r_n(x)$$

中之 x 處，則此級數中當 a 代入 x 時之號改變之數目與當 b 代入時之數目之差，恰為 a 與 b 間 $f(x)=0$ 所有實根之數目。

$f(x)=0$ 所有實根之總數，等於這些函數中將 $-\infty$ 代入 x 與將 $+\infty$ 代入後之符號改變之差。欲求正根之總數，可求 0 與 $+\infty$ 之差，欲求負根，則求 $-\infty$ 與 0 之差。此定理較之笛卡士之符號規例尤廣，蓋後者祇能求得實根數目之高限。惟司氏定理亦殊有不便處，蓋求司氏級數太費事，而 $f(x)$ 之次數大時，級數中相繼的函數中之係數可大，則尤費事。惟相繼的餘數則可任用正數乘或除之，且不必求出 $r_n(x)$ 之正確的值，蓋應用上祇問及其號。

司氏級數足以求一方程之有理根，及可逼近無理根至任何正確的程度，惟其他方法所需計算往往較少。勘定一方程之根，有一極有用的補助定理，如下：倘 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之號為不同者，則 a 與 b 間所有根為奇數。此定理直接得自此事實，即

$f(x)$是連續的，故祇有經過零時，a 與 b 間纔能變號。很明白，當$f(a)$與$f(b)$之號同，則 a 與 b 間根之數爲零或偶的。

21. 有理根。 笛卡士已曾見到，

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$$

之每一根，乃是$\frac{a_n}{a_0}$之除數。又，倘使一根是有理的，則將其約盡時，其分子是 a_n 之除數，而分母則爲 a_0 之除數，此則將此項根$\left(\frac{m}{l}\right)$代入$f(x)=0$時卽可見。事實上，或者除第一項外，

$$a_0l^{n-1}\left[\left(\frac{m}{l}\right)^n+\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{m}{l}\right)^{n-1}+\cdots+\frac{a_n}{a_0}\right]$$

之一切項均是整數，這是很明白的。惟這些項之和是零，故第一項亦非爲整不可。又，m 能將一切項除盡，故雖可能的不能除末項，然亦必能除之。倘 $f(x)=0$ 還有一第二有理根，而此根亦將其約盡，則其分子自能除 $a_n\div m$，其分母除 $a_0\div l$，等等。因每一有理根約盡時其分子能除 a_n 而分母能除 a_0，故知我們能求 $f(x)=0$ 之一切有理根，用一定

數目的試驗便得，而當 a_n 與 a_0 所有因子不多時，此項試驗的數目亦不大。

22. 無理根。 照前面的理論，可知我們總能求得二有理數，其差小於任何可指定的有限數目，俾此中一數目大於所需的無理根，而其他一數目則小於此。我們可繼續的選擇這些有理數，使其差以 $\frac{1}{10}$ 之方計算；卽，開首時可選二整數其差爲 $10^0=1$，使無理根在其間，然後再選二有理數其差爲 10^{-1} 者，使根在其間，如是下去選相差爲 10^{-2} 的，等等。此二有理數中之較小者，名爲此根之近似值，而求之之法，則名"向根逼近"。實用上，此法大可改變，俾得省些事。

1767年拉格倫發表以連分數求無理根近似值之方法，此法理論上較簡單。此法之主要處如下：旣求得 $f(x)=0$ 之根在整數 r 與 $r+1$ 之間，卽可於 $f(x)=0$ 中 x 處代入

$$x=r+\frac{1}{y_1}=\frac{ry_1+1}{y_1},$$

於是得一其他的 n 次方程 $f_1(y_1)=0$，此方程所有大於 1 的實根之數目，如 $f(x)=0$ 在 r 與 $r+1$ 間所有實根。 仿此仍再求得一整數 $r_1>0$，俾 r_1 與 r_1+1 間之一根，并於 $f_1(y_1)=0$ 中代入

$$y_1=r_1+\frac{1}{y_2}=\frac{r_1y_2+1}{y_2}。$$

如是卽得一 n 次 y_2 之方程，所有大於 1 的實根，如 $f_1(y_1)=0$ 所有 r_1+1 與 r_1 間之實根。

繼續用此方法，必可得一方程祇有一根大於 1，而此根則可任意追索之。於是原方程之一根之值，可用以下連分數表之：

$$x=r+\cfrac{1}{r_1+\cfrac{1}{r_2+}}$$

雖此法極淸晰，并明白表顯每步驟之理法，然其使用則遠不如著名的霍納(*Horner*)氏之法。

23. 畫圖及用機器的解法。 倘能作出 $y=f(x)$ 之精確的圖，并能精確的量得圖過 x 坐標軸的點之坐標，則由此項坐標之數字的量上，可得 $f(x)=0$

之一切實根。此方法之長處，在於顯出 $f(x)$ 之值屬於 x 一定界限內之一切值者。其短處則因量及畫每不完美，故所作圖畫不能說能精確代表函數。但其使尋常看來似為不關連者有一致，則頗有假設的作用，故極有用處，而於初學者尤然。有許多事實，尋常往往其意義不甚明了者，用此卽易知之。

古希臘人曾用幾何作法以解某幾種幾何問題，與解二次方程相等者，不過目前方程之圖畫解法，則大部為十九世紀之初以來所發展者。在有許多例上，此種方法祇能顯出某種解法是可能的，在還有的例上，可為其計算精確與否之粗粗的校核，惟用此項解法所得者於有許多問題上，則亦可為充分精確。然其於詳節上尤能節省思想，則將來算學方法之應用更廣時，其愈占重要地位亦自無疑。

倘不作 $y=f(x)$ 之圖，而作二曲線，俾其交點之坐標為 $f(x)=0$ 之根，則往往尤為便利。有時可使一曲線於同次數的一切方程固定着，而其他曲

線則變動之以與係數之各值相當。在 1637 年時，笛卡士已用一固定的拋物線及一變動的圓，以解三次及四次之方程，他幷曾解五次及六次的方程，所用者為一固定的第三級曲線及一圓。關於此項圖畫代數學之著作極多，且日有增加。

與此圖畫法緊相接的，有各種求數字方程的根之近似值之機器。有的頗爲精巧，係用力之平衡，流體靜力學，及電學上之原則者。雖然古希臘人曾用機械的方法解決了德里問題 (*Delian Problem*)，這裏即包有一三次方程之解法，惟適於求各種方程之根的機器，則是較近的發見。此中最著名者，爲西班牙工程師篤力士 (*M. L. Torrés*) 所發明的一具。

24. 錯誤及須當謹慎者。因數學之主要目的是建築永久的及引人的思想之大道，務能直接引至理智之寶庫，故觀察到爲旁徑所引不顧危險記號之處實可注意。此記號中最顯著的一個，是：不可用其值爲 0 的式去除方程之二端。倘可用如是

一式以除，則容易證明每一數等於 0。其一證如下：由 $x=1$，卽能相繼的得

$$x^2=1,\quad x^2-1=0,\quad x+1=0,\quad x=-1,$$

$$1=-1,\quad a=-a\quad 2a=0。$$

因 a 旣可如是選擇，使 $2a$ 爲任意一數目，故由此必得任何一隨意的數目是零。

又，我們每易忘卻一數目有 n 個 n 次根，於是可得一性質較異的錯誤。觀下面二例可知此：

$$\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1},$$

將兩端開平方，得

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$$

將分數化盡，幷觀察，倘$\sqrt{\ }$代表一單獨的根，$(\sqrt{1})^2=1$ 而$(\sqrt{-1})2=-1$，則得

$$1=-1。$$

這裏，其危險的記號是：須知一數目有 n 個 n 次根。

初等算學中根數之用法實不如所應當者那樣謹

齊。 例如$\sqrt{\ }$號或則應包括二值，故不當其前加以$\pm$，或則須有一稍改變的符號以表算術的平方根。倘假定$\sqrt{\ }$祇用以表正平方根，則如此的方程

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{x}=1,\ a>1$$

自然不能成立。 反之，倘此號表其二可能的平方根，則卽可能，而x之可能的值可照尋常方法化其根數得之。 故倘未說明$\sqrt{\ }$之意義爲算術的時，卽不能說此項方程不可能。

方程 $(x^{\frac{1}{q}})^{p}=(x^{p})^{\frac{1}{q}}$ （p與q爲整數）

不能視爲一自方程，因$(x^{\frac{1}{4}})^{4}$祇有一值，而$(x^{4})^{\frac{1}{4}}$則普通有四值。此方程左端之一切值乃是其右端之值，惟不能反之。 故此項方程不能不審愼用之。

V. 同局方程

25. 引言。 5節内已見到，最古的算學遺跡上已有同局方程發見，而n個同局方程之特例之解法，古希臘人已知之。惟在定列式未發達時，欲充分研究此是不可能的。 此事之來較在軌近，其起

原可自萊伯尼茲(*Leibnitz*)之著作中得之,而在十八世紀末葉十九世紀初葉之算學著作中,實占顯要的地位。在下文中,將假定若干定列式簡易屬性之智識。

倘祇有一個一未知數或多未知數的方程,則我們知道,至少各未知數有一值能滿足此一方程者。惟若未知數之一切係數均等於 0,而已知數不等於 0,則爲例外(註:解方程時我們祇論未知數之有限值)。倘有一系統的方程,則卽有許多可能性發生,而其第一個問題,則爲能解與否。倘能,此系統卽爲"相容"者。

一組 mn 個數量,將其排成方形作 m 橫列及 n 直行,名爲一"模"(*matrix*)。如 $m=n$,卽名"方模",一定列式之模總是一方模。模之級,以模中所含最大非爲零的定列式之次序別之。

26. 一系統的一次方程之相容性。 試論以下一系 n 未知數的 m 方程:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n+b_1=0,$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n+b_2=0,$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n+b_m=0,$$

於此 m 與 n 爲任何二正整數,則有三例可發生:

(1) 這些方程不能解,故爲"不相容"的。

(2) 祇能有一解。

(3) 可有不止一解。

但極易看出,倘若不止一解,則卽可有無限數的解(事實上,每一未知數沒有,有一,或無限數的值),故可能的例是:沒有解,一解,或無限數的解。欲證此,可論以下二模:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn} \end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}b_2 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn}b_m \end{vmatrix}$$

於此,後者是由加一直行 b 於前者中所得,故卽名爲此系統中之"擴大的模",而 A 則爲"系統中之模"。 很明白,B 之級不能小於 A 之級,而前

者之超過後者不能多於一。 故得二種可能的例：(1) A 之級等於 B 者，(2) A 之級小於 B 者一。

假如此一系統方程爲後者之一例，則可假定 B 之級是 r，而 A 者則爲 $r-1$，并可假定此一系統方程如是排列，B 中 r 次序的非爲零的定列式，是在此模之上面右角。 因 A 之級是 $r-1$，故此系統中開首 r 個方程之均齊的部分 $(f_1, f_2, f_3, \cdots f_r)$ 可用常數 $(c_1, c_2, \cdots c_r)$ 乘之，俾

$$c_1f_1+c_2f_2+\cdots\cdots+c_rf_r=0,$$

與未知數之值無關，而這裏至少有一個 c 非爲 0。倘用 $F_1, F_2, \cdots\cdots$ 以代此系統中方程之左端，使 $F_i=f_i+b_i (i=1,2,\cdots\cdots m)$，則由前

$$c_1F_1+c_2F_2+\cdots+c_rF_r=c_1b_1+c_2b_2+\cdots+c_rb_r=c。$$

因 B 之級是 r，故必然 $c\neq 0$，不則一非爲零的定列式之模內一列之每一元素，將爲其他列中相當元素之同的一次方程。

對於未知數之任何可能的值，$c\neq 0$，足可證明此系統是不相容的，蓋若相容，則未知數可有值能使

各函數 $F_1, F_2, \cdots F_r$ 均成零，因而 c 爲 0。既證明當 B 之級大於 A 者時，此系統卽不相容，今可證倘 A 之級等於 B 者，則此系統必相容。今設此二模均爲 r 級者，而方程則如是排列着，此二模之上面左角各有一非爲零 r 次的定列式。因每個 $r+1$ 次的定列式必爲零，故得

$$c_1F_1+c_2F_2+\cdots\cdots+c_rF_r+\ c_{r+1}F_{r+1}=0,$$

此項關係與未知數之值無關。$c_1F_1+c_2F_2+\cdots\cdots+c_rF_r\neq0$ 既無關於未知數之值，故 $c_{r+1}\neq0$。因之，我們可用 c_{r+1} 除此方程，而以 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_r$ 表 F_{r+1}。同此的論證旣并可用於 $F_{r+2}, F_{r+3}\cdots\cdots F_m$，故知開首 r 方程得解，則其餘一切亦得解。

倘此系內之開首 r 個方程內，我們隨意給 $x_{r+1}, \cdots\cdots x_n$ 以值，則得一系統可尋常的用定列式解之，因此系統之定列式非爲零。如是，我們祇得一個值以給每個未知數 $x_1, \cdots\cdots x_r$。這裏種種所論，可證明以下的定理：一系統的一次方程其相容之必要并充分的條件，是此系統之模，其級與擴大模者

同。因所指定於 $x_{r+1}, \cdots\cdots x_n$ 之值是任意的，故并知倘一系統一次方程之解多於一，則即有無限數的解。今試論下面諸系統，俾爲前定理作說明：

$$I\begin{cases}3x-2y+z=8,\\ x-4y+2z=6。\end{cases}\qquad II\begin{cases}3x+4y=7,\\ 6x+8y=10。\end{cases}$$

$$III\begin{cases}x+2y=5,\\ 2x-\ \ y=0,\\ 4x+3y=10。\end{cases}\qquad IV\begin{cases}x-\ \ y+3z=4,\\ 2x+3y-\ \ z=5,\\ 3x+2y+2z=10。\end{cases}$$

系統 I 中其模之級爲 2，因

$$\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -4\end{vmatrix}\neq 0。$$

其擴大模之級亦爲 2，故此系統是相容的，故 y 或 z 可任意給以值；惟 x 則祇能以 2 爲值。（註：一次方程的相容系統中之一未知數，欲其於每可能的此系統之解上所取的值不變，則其必要并充分的條件是此系統之模之級，當此未知數之係數於模中取出後，會減小）。系統II之級是 1，而其擴大模之級則爲 2，故此系統不能解。系統 III

中模之級與擴大模之級同爲 2;故此系統有一解,且亦祇有一解,卽,$x=1,y=2$。 系統 IV 亦不能解,因其模之級爲 2,而其擴大模之級則爲 3。

27. **幾何的解釋。** 凡未知數不多於三的一次方程可簡便的視爲尋常空間中之一平面,故若想代表一系方程之諸平面,則每能得淸晰見解。 例如前節內之系統 I 代表二平面相交於 $x=2$ 平面,故這二平面爲每一與 $x=2$ 平行的平面以平行線割之,而爲與 $y=0$ 或 $z=0$ 平行的平面以二相交線割之。系統 II 表二平行平面,系統 III 表三平面經過一與 Z 坐標軸相平行的線,而系統 IV 代表三平面相交於三平行線。 此項解釋,直接自立體解析幾何學得之,頗能使一次方程之系統之理論得明白,惟非爲此理論中之要素。

28. **一未知數的二方程間之相容性。** 假如二 x 之有理整方程 $f_1(x)=0$ 與 $f_2(x)=0$ 有一公根。倘 $f_1(x)$ 之次數爲 m 而 $f_2(x)$ 之次數則爲 n,則繼續用 $x, x^2, \cdots\cdots x^{n-1}$ 乘 $f_1(x)$ 及用 $x, x^2, \cdots\cdots$

x^{m-1} 乘 $f_2(x)$ 後，可得 $m+n$ 個方程，有 $m+n-1$ 個未知數 x, x^2, ……x^{m+n-1}。 此系統之相容性，須使其擴大模之定列式等於零。 而此定列式，則稱爲此項方程之"結局"(*resultant*)，其用以得此的方法，則爲"薛氏(*Sylvester*)分解消除法"。二一次方程 $ax+b=0, a_1x+b_1=0$ 之結局爲

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1-a_1b=0;$$

而二二次方程 $ax^2+bx+c=0$, $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ 之結局則爲四次的定列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0。$$

例如 $x^2+4x-21=0$, $x^2+2x-15=0$ 二方程是相容的，因其結局爲 0。 用此方法并可於二未知數的二同局方程中消除一未知數。

26. 等值方程。 初等代數學中，倘二方程之一

切根皆相共,則此二方程稱為"等值"的。仿此,倘二系統同局方程其所有解均相同,則亦稱為等值者。反之,等值一語往往似可對於一組轉換而言以定其義,我們可說:二式或二組式對於一組轉換而言,倘此組中至少包括一轉換能將其一轉成其他,并至少還有一轉換能將其他轉成其一,則此二式或二組式是等值的。 對於一組轉換而言是等值的,對他組轉換不必亦等值。

本篇內祇用前者之等值定義,而我們先問去分數對於某種一未知數的有理方程有何影響。但不妨先一述此很明白的定理:n 個有理的數字分數,$\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\cdots\cdots\frac{a_n}{b_n}$,之和其形式作

$$\frac{a_1b_2b_3\cdots b_n+a_2b_1b_3\cdots b_n+\cdots+a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}}{b_1b_2\cdots b_n}$$

者,欲使其成為最簡的式,則必要并充分的條件乃是此 n 個分數每個須為最簡式,而其分母 $b_1,b_2,\cdots b_n$ 為相互的質數。 設

$$\frac{f_1(x)}{\phi_1(x)}+\frac{f_2(x)}{\phi_2(x)}+\cdots+\frac{f_n(x)}{\phi_n(x)}=0 \qquad (1)$$

爲一方程，其中每一分數已約爲最簡式，而各分母爲相互的質數，$f_1,\cdots f_n,\phi_1,\cdots\phi_n$ 卽代表 x 之有理整函數，其中亦可有常數在內。去分數，此方程卽作

$$f_1(x)\phi_2(x)\cdots\phi_n(x)+\cdots+f_n(x)\phi_1(x)\cdots\phi_{n-1}(x)=0 \quad (2)$$

設 a 爲(2)之根，則

$$f_1(a)\phi_2(a)\cdots\phi_n(a)+\cdots+f_n(a)\phi_1(a)\cdots\phi_{n-1}(a)=0 \quad (3)$$

於此很易見沒有一個中能等於 0 者，蓋試設 $\phi_1(a)=0$，則必

$$f_1(a)\phi_2(a)\cdots\cdots\phi_n(a)=0。$$

a 既非 $f_1(x),\phi_2(x),\cdots\cdots\cdots,\phi_n(a)$ 中任何一函數之根，故不能爲其積之根。 卽是，$\phi_1(a)\neq 0$。因沒有一個 ϕ 爲零，故可用 $\phi_1(a)\cdots\phi_n(a)$ 除(3)，

則得 $$\frac{f_1(a)}{\phi_1(a)}+\frac{f_2(a)}{\phi_2(x)}+\cdots+\frac{f_n(a)}{\phi_n(a)}=0。$$

此卽證明(2)之每一根亦卽是(1)之根，反之亦然，因用有理整函數乘一方程之二端時，不會失去一根。故知(1)與(2)是等值的。倘於前述二條件中，卽 ϕ 爲互相質數及分數已約爲最簡式，任去其一，則(1)與(2)卽不必等值了，此可於下例中見之：

方程 $$\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x-1}=0。$$

不能有根，因這裏祗有一數目 1 可論，而用 0 除是不許的，惟若作

$$x(x-1)-x+1=0$$

則卽能有 1 爲重根。於此我們須觀察，倘用前第一方程之最小母乘其自己後，所得方程爲

$$x-1=0,$$

故此卽有一根，然當其作分數式時則無之。反之，二方程

$$\frac{x-1}{x^2-1}+\frac{1}{x}=0, \quad 2x^2-x-1=0$$

中，後者有 $x=1$ 一根，此根前者無之。尤可注意，我們可見到前者之一切根，亦不必爲後者之根，因後者乃是用 x 之有理整函數乘前者之二端得之。

幾何學上的研究往往對於此項等值方程問題有所供獻。例如以下二方程代二軌迹，除起點外其餘一切點均共

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2 \text{ 及 } x+y=2xy。$$

後者是一雙曲線，而前者倘能精確作出之，其圖與

後者之差，沒有顯微鏡能察出之，因此圖不能察出遺失的點。又，嚴格不許用0除，不是一切算學家均遵之，而古時有許多名算學家不完全廢此項除。

30. 方程等值與否之幾種試驗法。倘一方程之二端用一未知數所成的有理式（此式不能爲未知數限於其中的有理性領域內之零或無限大）乘或除之，則所得者與原方程等值。設 $A=B$ 爲任何一方程，K 爲任何一式，對於所論未知數之任何值不能爲 0 或無限大者。方程

$$KA=KB, \qquad \frac{A}{K}=\frac{B}{K}$$

可寫作 $$K(A-B)=0, \qquad \frac{1}{K}(A-B)=0。$$

因 K 不等於 0 或∞，這些方程祇能用未知數之值其能使 $A=B$ 者滿足之。故知二方程於一有理性領域內等值者，不必於其他領域內亦等值。例如，倘未知數之值限於實數，則 K 可爲 x^2+1，惟當 x 爲任何一整雜數時，K 不能有此值。

倘方程之二端由此同的式所增加或減少，則所

得方程自與原方程等値。這裏，很明白的包括將任何項自一端遷至他端，以及將一方程每項之號改變。於轉換方程上，很要觀察所引出的方程實在是否與原方程相等値。倘原方程所有的根，引出者均有之，且增加其他根，則稱爲"加盛"的，倘所有不及原方程之多，則爲"欠缺"的。由前面所說，可知尋常的去分數法，或則引出一等値的或則一加盛的方程。

函數及微積分之基本概念

Gilbert Ames Bliss 著

目　次

函數及微積分之基本概念

Gilbert Ames Bliss 著

I. 引言

1. 歐几里得幾何學爲一論理的模型。 算學史家告訴我們，歐几里得（*Euclid*）將彼時算學家所已知的幾何原理化之爲系統，對於算學上的供獻，實較之其作出新定理尤爲重要。他所建築出的歐氏幾何學，輓近來頗受批評，惟他的敍述法自今日所用方法之觀點上言之，雖不無可議，然無論如何我們不能不承認他是現在那樣論理形式的應用算學至於自然現象上去的一個最早的代表者。這樣的應用之結構，有重要部分二：一，由我們直覺的解釋自然現象上所得一組自題；二，許多定義及用定義表出，依論理方法自最初的假設所推出之定理。自題爲其基礎，定義及定理則爲其上面的建築。

2. 其他科目敍述法之不完全。 極早供獻於人類的歐氏幾何學理論，其形式對於富於直覺或論理性的人均能引其注意，許多世紀以來於教育上功課表中占主要的地位，即至於今日，亦還是初等算學教程上之珍貴品。但在其他初等算學科目之敍述法要想如歐氏理論點，在論理上如是完備，且對於傾向算學思想的人如是有味者，乃大大缺乏。例如代數學則尤是如此。我們祇要一觀任何一册此項教科書之目錄，即可見其所敍述者之雜亂。論題之內中有關但無明白指出的關係者，於雜亂的根數，指數，級數，幻數等等中繼續列出，實使初學者不能連貫的了解之。輓近出版的教科書中已竭力設法改良，將方程爲中心概念，而將其他尋常的簡易代數概念聚於此，俾敍述上較可統一，亦收了些成效。 我們并可注意到，敍述法的雜亂於三角學及解析學方面較不甚，良因其算學材料本身較爲整齊之故。 然亦極少想將這些如是佈置，俾能見出其爲一大的算學理論之有關的各部分者。

3. 函數概念中之補救法。 本篇中有一個目的，想指出此項不統一可用算學上極重要的一個概念名函數者補救之。函數概念之來已久，其特別的形式亦已久爲學者所承認，惟其在算學家心目中如是普通，則是狄利希萊(*Dirichlet*)以來之事。很可注意，狄氏之定義較之其前算學家所下者看來似大爲抽象。但實爲研究一關於熱流之實用問題，其中須用級數表函數而得。他的定義至簡單，初看來則似太廣，不能用爲廣的函數理論之基礎，或爲其他科學上之應用。欲解釋此，須先研究用以定此函數概念之意義的變數究是何物。

II. 變數與函數

4. 變數之定義。 一變數祇是一符號，例如 x，在一種討論內可用以表一組事物內之任何一個。用一變數我們卽能用單獨一種包括 x 的說法以表出一組事物內各個所共有的一屬性。例如我們說對於任何正整數 x，$3x+2$ 一數目用 3 除時得餘數 2，這裏我們表出每一正整數之屬性。或如我

們說任何連二點 p 與 q 的一曲線,較 pq 直線爲長,我們可用 C 表任何一曲線而說 C 長於 pq 線。一組事物,其每個用 x 表之者,名爲"變數之列",而在初等算學中尋常爲數目所成,不過適纔所舉的例,則使我們知道亦可爲性質上全不同的元素。

5. **函數舉例**。萊伯尼玆(*Leibnitz*)用函數一字以指各種類的幾何量與曲線上一變動的點相結合者,然微積分發達後,其意義可爲任何含有一變數 x 的算學式,其值可由所指定於 x 的值上算之。狄氏定義更廣,我們可先舉幾個簡單的例一研究之,然後觀其定義當可較明白。試一觀下面所附的表,於中第一行中爲一日間之鐘點,第二行中之數目則爲與此相當的温度。倘 x 爲一變數,可代表其中任何一鐘點者,y 爲一變數代表温度,則表中將 x 與 y 之值如是相當着,當我們任給 x 一值時,y 卽有一相當的值不二的爲其所決定,y 卽名爲"x 之函數"。仿此,一算學式 $y=\frac{x}{x^2-1}$ 內,x 任取何值時,y 之值卽不二的爲其決定,惟 $x=$

鐘點	溫度
8	52.2
9	58.4
10	61.0
11	69.8
12	75.7
1	77.8
2	78.1
3	76.9
4	72.5
5	67.8
6	66.8
7	60.0
8	51.1

± 1 爲例外,這裏,y 亦爲 x 之函數;而 x 變數之列乃是實數之全部,惟 ± 1 二值不計入,幷不難知 y 之值爲 $-\infty$ 與 $+\infty$ 間之一切數目。

6. 函數之定義。既知這些例,乃可照狄氏,定一變數 x 之單值的函數之意義爲:一第二的變數 y 如是與 x 相關,當 x 任取 x 列中一值時,y 列中即有一相當的 y 之值不二決定。 x y 與列中事物之相當,不必定用尋常所謂算學式作出之,乃是可任何決定者,祇須對於每一能用 x 代表的事物爲不二的便行。 定義中之重要處在獨立變數 x 及其列,與 x 及 y 間之相當。 相依變數 y 之列不必爲相當所窮盡。他裏面可有元素不與 x 列中任何事物相當者。

7. 函數之例。第一次見此定義者,必以爲此極人工的,且太廣,不足以有若何用處。然却可闡發出極普通的例之精緻的重要的函數理論,祇當 x

之列隨意任之，而 y 之列包括實數。此定義之廣性不僅由於其無有 x 與 y 列之性質上之特別，且由於選擇函數相當性上可有自由，即當列爲實數所成亦無關。

由前面鐘點與溫度之例上，可知函數不必用算學式表出之，此外同此的例亦復不少。然其相當性亦可全爲人工的。蓋設 x 列爲自 0 至 1 之一切實數所成，而對於 x 之任何有理值，假定 y 之值均爲 $+1$，倘 x 爲無理值時，y 即取 -1。則 y 爲 x 自 0 至 1—間隙中之函數，而 y 列祇有二元素。此例顯出一常函數之定義，即，此函數中 x 雖有一列值，但相依變數 y 則祇有一值。常數可視爲列中祇有一元素的變數。

此最後所說的函數，x 列有無限數值，而 y 列則祇有二值，我們可作一表以指出此項函數的相當。但若 y 列亦有無限數的值，則即不能於一表中列出 x 之各值與 y 之各值相當。算學理論中所撞見的大部分的函數，其相當性不是用一表指

出之，而是用一算學公式代此，幷內涵的定此獨立變數 x 之列及其相當性之意義。例如前面的 $y=\frac{x}{x^2-1}$ 一式定下一 x 之函數，對於 x 之一切實值，除 $x\pm=1$ 外，均是一定的，我們幷已知 y 列中有 $-\infty$ 與 $+\infty$ 間之一切值。

8. 變數列非爲數目字的函數。 前舉諸例說明獨立變數之列爲數目字所成的函數。我們很容易找到此列中有完全異類元素的函數。設如二點 p 與 q 用一曲線 C 連之，則圖中 $pqrs$ 面積爲此曲線之形所不二的決定。如是，變數 C（其列爲一切連 p 與 q 的曲線）及代表面積的變數 A 之間，有一種函數的相當性。我們說一依附變數 y 爲一獨立變數 x 之函數時，尋常用一方程 $y=f(x)$ 表出之，這裏 $f(x)$ 一符號乃是"獨立變數 x 之函數"之略。故如欲表出適纔所說面積 A 爲 C 之函數之意，則可用符號 $A(C)$

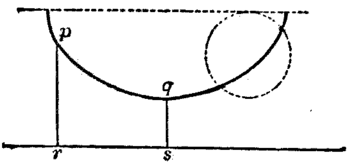


圖 一

表之。仿此,曲線 C 之長為 C 之其他函數,可用 $L(C)$ 表之,而當此全形以 rs 線為軸旋轉時,C 弧所作出的面其積則可作 $S(C)$。

算學之一部分名為"變分法"之內,有一著名的問題,生出一函數其格式與適纔所論者全同。設如我們欲求得一曲線,於此上一物能以最短的時間自 p 滾至 q。這裏時間乃是依曲線 C 之形式而定,故為一函數 $T(C)$。但在此我們不能一述提出此問題的約翰柏諾利 (*Jo n Bernoulli*) 與其兄詹姆士(*James Bernoulli*)因解決不同而起的爭論,亦不能詳細研究他們用以求得此最小曲線的方法。所可說者,他們的工作,實為變分法全部之起原。這裏亦可一說他們所得的結果,似亦不無關係。這最小曲線乃是一擺線,即圓周上一點當圓周在一直線上滾時所作的軌迹。圖中擺線作倒形,其較直的部分近 p 點,俾此滾的物於開初時速度高。

其他前面所說的二函數亦有最小的問題可提出。

如 $L(C)$ 函數,則最小值的曲線自然是連 p 與 q 的直線;若論以 rs 為軸旋轉時作出的面其積為最小的曲線,則即為鏈形曲線,此曲線之形若一重鏈以二端懸於空中然,故名。

一固定點 p 與一變動點 q 間之最短或直線距離 $D(q)$,可為一函數,其獨立變數有另一種類的列者之一個例子。於此,獨立變數乃是 q 點,能經過平面之全部,而依附變數 D 之列,乃是 0 與 ∞ 間之一切數目。由此例及以前的例,可明白有許多重要的例,於中獨立變數之列內之元素是實數,曲線之弧,或平面上之點,其他還可找許多例以明此項變數之列之種類不同,於此不能述及。惟前述諸例中,依附變數之列乃是實數所成,實際上有時亦不必盡然。

9. 函數之圖。 函數之二列均為實數者,笛卡士 (*Descartes*) 曾設法用圖表出之,其法極熟知,這裏自不必多述。惟關於此有一些不能不一說。我們任取一橫直線,於其上作 0 點及度量用的單位

點(觀圖二),俾對於 x 之每個值，有線上一點與之相當，倘 x 爲正，則此點在 0 點之右，爲負，則在其左。欲表出 x

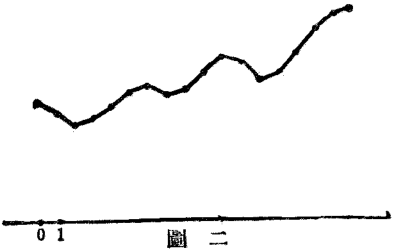


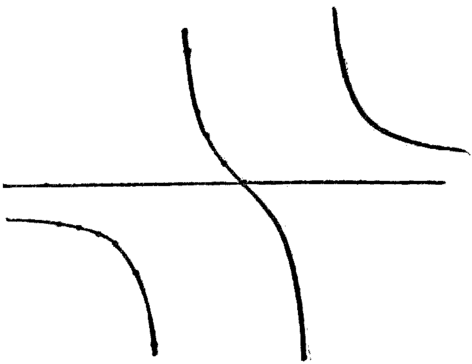
圖 二

點一函數之值，可作一垂線，其長與 $f(x)$ 數目等。若 $f(x)$ 正爲，則其距離向上量之，爲負，則向下量之，這裏此橫直線名爲橫坐標軸，而其垂直的縱直線則名爲縱坐標。尋常每於 0 點作垂直線名 y 軸，但這樣一線於表出函數上全不重要，笛卡士之解析幾何學，其前數版統無此線。

倘 x 列所有元素之數目是有限的，例如一統計表內所有者，則函數之一切值可如是作出之，其所得的圖較爲有意義可尋，且較之值之表本身尤易解釋。 例如所附的圖，表出一孩子之年齡與體重之關係，其年齡以星期計作爲橫坐標，而體重以磅數計作爲縱坐標。由此圖，卽一個未結婚者，亦能

一目了然其所有不快樂的時期，若欲自其表上得之，則非稍加研究不可。於此例中，縱坐標點表體重函數之値，所畫折線，不過助觀覽而已。

反之，若 x 列所有元素無限多，則尋常則無法作出函數之完全的圖，我們祇能照便利及所論問題之性質酌量作出些點，而用一連續曲線連之，俾能略知其函數之値及當 x 變時，此項値之變。試



圖三

一論 $y=\frac{x}{x^2-1}$ 一函數。倘祇作出圖中所點出的諸點，則其餘自必自由畫之(圖三)。

圖祇能作爲一函數之近似的代表，其所有的錯誤，大要爲以下二種。因距離不能極精確的用有

廣義的記號表出之，故第一個錯誤之源在於所任用畫圖器上，非但與器具之精良，且與畫者之手腕亦有關。其第二個錯誤之源，則在我們所能作的點其數有限，於是圖之大部分不能不隨意作出之。由第一原因所得錯誤，祇能實驗圖具之精良及作者之手腕以估計之。至第二個錯誤，則沒有實驗的證明，亦不能說其錯誤的程度至於何若。但如圖具上之不精不計，并將實際上所作有限的點用直線連起來，則可證明有幾種函數已能頗確的為此項折線所代表出，而一定間隙內之錯誤，倘所作點充分多并充分相接近，則可減少至隨意小的程度。其證可藉函數之一種屬性名"一致的連續性"者明之，此則於後論之。目前祇須明白初等算學中一切函數，能隨作者之意，相當的求其圖之正確。

1). **有不連續的圖之函數。** 由前所說，已可推得有許多函數不能正確用圖表之者；如以前所舉一例，當 x 之值為 0 與 $+1$ 間之有理數時，其值為 $+1$，為無理數時，其值為 -1，即是此性質。蓋與

x 軸平行的一直線，將其代表有理點處函數之值，則照尋常圖之意義，亦卽包入 $+1$ 爲 x 取無理值時此函數之值。卽凡能用算學式以定出其函數的相當性的函數，亦不必盡可用曲線表之。湃滂 (*Pierpont*) 曾作出許多可注意的公式，其幾何上的解釋至爲奇異，其中適才所說的一個，代表一函數沒有正確的圖者。

他入手時研究一函數，名爲"*signum* x"或簡寫作 $sgn\ x$，而用下面的條件定其意義：

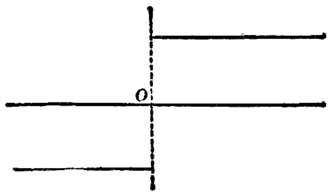


圖 四

$$sgn\ x = +1 \qquad 於此\ 0 < x \leqq 1$$

$$sgn\ x = \quad 0 \qquad 於於\quad x = 0$$

$$sgn\ x = -1 \qquad 於此 -1 \leqq x < 0。$$

此函數有以下較爲簡單的公式。

$$sgn\ x = \frac{2}{\pi} \lim_{n=\infty} arc\ tan\ nx \tag{1}$$

蓋設 x 爲正，則極限之值爲 $\frac{\pi}{2}$，設 x 爲 0，其值亦爲 0，設 x 爲負，則其值爲 $-\frac{\pi}{2}$。

由此 $sgn\ x$ 函數，可得一公式表一函數，當 x 之值爲有理時，即能取任何一定的值 a，當其爲無理時，取一其他值 b。 試論此函數

$$g(x)=a+(b-a)\lim_{n=\infty} sgn(sin^2\ n!\ \pi x) \qquad (2)$$

設 x 爲有理數，則括弧內式當 n 充分大時成零，因 $n!\ \pi x$ 爲 π 之整倍數。於是 $sgn(sin^2\ n!\ \pi x)=0$，而 $g(x)$ 之值爲 a，即是 $sgn\ x$ 屬性之結果。倘 x 爲無理數，則 $n!\ \pi x$ 不能爲 π 之整倍數，故 $sin^2\ n!\ \pi x$ 之值在 0 與 1 之間。 如是，$sgn(sin^2\ n!\ \pi x)=1$，而 $g(x)$ 之值爲 b。

湃氏還有一其他的例，乃是此函數。

$$y=\lim_{n=\infty}\frac{x}{\frac{1}{n}+x}。$$

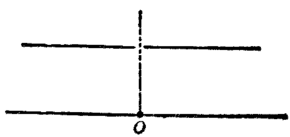


圖 五

於此，x 之值非爲 0 時，其值爲一；若 $x=0$，即亦爲零。

尤奇者，是 $$y=\lim_{n=\infty}\frac{(1+\sin\ \pi x)^n-1}{(1+\sin\ \pi x)^n+1}$$

其圖如圖六所示爲不連續的。設 x 爲整數，此式卽爲 0。倘 x 之值在 0 與 1 之間，括弧中值大於一，故當 n 極大時，其 n 次乘方卽近於無限大，於是此分數之極限爲 $+1$。反之，倘 x 之值在 1 與 2 之間，則括弧中值小於一，故若 n 極大時卽近於 0，而此分數之極限爲 -1。

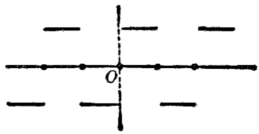


圖 六

11. 函數之分類。 由適纔所舉種種例，已可知若欲明白研究函數，卽非先分類之不可。分類之法不一，每種在函數論之某部分內極爲重要，但有一種，卽目今所欲述明之者，由簡易函數之觀點上言之，則尤爲可注意．而在該種分類法之基礎上，并將作幾個關於敘述簡易問題之建議，希望此項建議不致太急進不可用。教師於教授上求改良時，每爲書本子所阻礙。但改變些方法，俾於初等學

生方面收成效，似尙能對於現有的書本子適應得過去；倘若此爲急進的根本改良，則必須有善本及能用的教科書纔行，俾能收全效及廣被。這裏所欲作的建議，都是極緩和的，惟關於代數者或稍不然，著者對於此以爲須有徹底的將其材料內容改組過，斯能得極大的進步。

12. 代數函數。 最簡單的函數，是一多項式

$$y=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m,$$

有時亦名有理整函數；其次卽爲有理函數或二多項式之商：

$$y=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n} \tag{3}$$

這二種函數祇須用加，減，乘，除四法便得作成，而稍進於此的一類函數，自然是於此四法上再加一種開方法所能表出的函數。但如是作成的函數及多項式與有理函數，最好視之爲屬於一大類，所謂代數函數者之內，其定義如下。設如有一方程

$$a_0(x)y^n+a_1(x)y^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x)y+a_n(x)=0 \tag{4}$$

其 y 諸乘方之係數，本身爲 x 所成的多項式。倘

給 x 以任何值，則所得 y 之方程可有幾個根，普通是 n 個。故此方程對於每個 x 指定幾個 y 之值，如是，y 卽名爲 x 之倍值函數。很明白的，多項式或有理函數乃是一代數函數，後例內 y 所滿足的方程，極易自 (3) 得之，祇作一公分母便行。欲證明任何一函數凡能用根數表出之者卽爲代數的，頗非易事，但舉幾個例，則可略明其何以可如此。試取此二函數

$$y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}, \qquad y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}。$$

用尋常代數上的有理化方法，x 與 y 二變數可見其能滿足此二方程：

$$y^6-2xy^3+x^2-x=0, \quad y^4-4y^2+4x^2=0,$$

而通常可證明，任何一函數得自加，減，乘，除及開方諸法者，能滿足如 (4) 那樣的方程。根數可有各種不同的值，故函數可有諸倍值，但五次以上之方程，祇是其特例能用根數解之，故卽可知代數方程中有許多是不能光用這些簡單方法計算的。能用根數決定的函數之性質，使其普遍化至於最普通

的代數函數之相當的性質，實爲數學研究上一個最收成效及可注意的區域。

13. 超絕函數。 三角函數，逆三角函數，對數及指數函數，以及還有許多祇於高等解析學中遇見的函數，均不能滿足(4)那樣的方程，我們名之爲"超絕函數"。這些函數之值，不能解析的用一定次數的加，減，乘，除計算之，而須用無限次數的這些算法，卽由乘方級數所指出者。此項級數中最熟知的，如正弦，對數及指數之級數：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots\cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

凡函數之値能用一乘方級數表出者，卽謂之"解析函數"，我們很易證明，不僅此項超絕函數，且一切代數函數亦均可如是表出之。此解析函數之範圍雖已大，但一實變數所成函數之可能性尙未盡於是；惟本篇內不再進論此項分類法了。卽如前

面所舉函數(2),乃是此項函數之一個例,卽 x 取實值時,不能用乘方級數表之者;此外還有其他。我們適纔分類所及,其結果可簡單結束之爲以下一表:

- 解析函數
  - 代數函數
    - 有理函數
      - 多項式
      - 有理分數
    - 無理函數
      - 能用根數表之者
      - 不能如是表之者
  - 超絕函數
    - 三角函數及其逆函數
    - 對數及指數函數
    - 其他性質較不簡易者
- 非解析函數

14. 三角函數與指數函數爲超絕的。 自初等的

觀點上言之，對於此分類有可議處，這裏須一述之。欲證明一切函數凡能用根數表出之者，是代數的，頗不易，而又極須證明凡超絕函數不能有此項屬性。本書後面第八篇內（5及6節）已證明，祇是能用平方根數以表出之的一切數目，乃爲代數方程之根，我們可作類此的證，於能如此表出的 x 之函數方面。但於高級根數方面，此問題頗不簡易，非這裏所能及。湃滂氏曾有一簡易的證，明 $y=\sin x$ 一函數不能滿足(4)那樣的方程。蓋設有如是一方程能爲 $y=\sin x$ 滿足者，則能有一最低次同屬性者作此形式

$$y^n+a_1(x)y^{n-1}+\cdots\cdots+a_n(x)=0 \tag{5}$$

於此，其係數爲 x 之有理分數。因正弦函數之週期性，此二方程

$$y^n+a_1(x+2m\pi)y^{n-1}+\cdots\cdots+a_n(x+2m\pi)=0,$$

$$[a_1(x+2m\pi)-a_1(x)]y^{n-1}+\cdots+[a_n(x+2m\pi)-a_n(x)]=0,$$

亦必對於任何 m 之整的值能爲 $y=\sin x$ 所滿足。

但因 m 之有理分數祇於有限數的幾個值能成零，故若相當的選擇 m 時，後者方程之係數不能成零，於是前面的假定以爲(5)是一最低次的方程爲 y 所滿足者卽矛盾。 設如 $y=sin\,x$ 非爲代數的，則其逆函數 $x=arc\,sin\,y$ 亦不能；蓋(4)那樣的方程對於其一如此，卽能決定其他之代數性質。 其他三角函數及指數函數 $y=e^x$ 與其逆 $x=log\,y$ 亦可仿此證之，祇須幷許用 x 變數之幻值。 前面的證法，依於正弦函數之週期性上，我們知道指數函數同樣的有幻週期 $2m\pi\sqrt{-1}$。

15. 函數概念在高等學校教授上之應用。以前曾提及過，這裏所述函數分類法可於使高等教育功課表之各部相互關連上有些幫助。欲知何以能如此，我們可先一論初等教學上所研究的諸題與前所列表之關係。三角學上研究的主題是一類函數，卽是在超絕函數以內者，其注重在三角函數及其逆函數上。 指數函數尋常祇視爲對數之先引，而對數函數則祇在使學生能會用對數表。欲正確

指出代數中何處所論者是屬於本表內，自然不易，但其大部分與多項式或有理分數相關，下節內將正確指出，此項關係若何可利用之。他方面解析幾何學則與函數之圖表法有關，而簡易代數方程其意義爲以下方程所定者：

$$ay+bx+c=0, ay^2+(bx+c)y+(dx^2+ex+f)=0,$$

其屬性亦與之有關。

16. 對於目前所用方法之異議。尋常教授這些科目之方法，對之實可有許多異議，祇舉出數者已足指出至少有改良的可能性。有一種，目今對之已有許多改進者；即是，目前之一種不明的傾向，將函數之圖表法完全限於解析學教程方面。函數之圖表法實爲一種至重要的方法，不僅於圓錐曲線之研究上及直線之研究上如此，兼且於研究其他一切初等函數上亦然，故於學生之數學教程上，不會嫌其過早教之。第二種不對處，即是對於指數及對數太不注意。我們可以說，我們表內所有函數，其應用之廣，無有出其右者，然學生對於

此，其了解遠不如其他，學之祇爲檢查對數表之用。代數教程上之缺統一，及其需要圖表法，已如前指出。又，微積分之簡易觀念，最好於代數及解析學二者之適當處均用入。解析學上尤其是在求圓錐曲線之切線處，含有切線之斜度之微分觀念，然著書者之尋常習慣於此竭力免去較進步的觀念及記號法。著書者於此竭力避免侵入其他範圍，實無理由。

17. 改良的建議。 然則我們究得何種結論，并如何改良呢？ 第一，因目前高等學校之組織將數學分成數班教授，是不是每班當從事一特種的函數，而開初時候是不是應將學習此項函數的各班之目的使學生明白，并於相當的時候再提及之，以至於完全明白？ 倘是的，則不僅三角學須與初等超絕函數相關，及解析學爲研究簡單無理代數函數，且代數學之材料亦須使之與研究有理代數函數，多項式及有理分數相關。其未曾相關者，須移至其他相當處。這些函數之研究於學生能自己尋

思時,須儘量求完全,并稍先用些微積分之概念。至超絕函數之微分法則於三角學中實不宜論及,蓋其極限方法於初等學生太複雜了,惟於代數學中,則有許多可提及,俾助開始研究多項式之引生函數(*derivatives*)及反引生函數(*anti-derivatives*),以及助解析幾何學中所遇見的初等代數函數之引生函數之研究。

我們現在可定出高等學校第一年之功課大略,看來當不致與目前的功課表太相反背,然足够系統的研究初等函數。入手時可先論函數概念,舉特別的例以明之,并常用圖表法(此法以後一直須用)。指數及對數因其於計算數目上及作其他函數上殊重要,故可次論之。其圖不難作出,不必用表,祇須注意 $y=a^x$ 極易作其圖,至對數之圖,則祇要於經過起點與 x 軸作 45° 角的直線將平面旋轉便得。這些引子教畢後,尋常的三角學乃可開始,因學生既習於圖表法并對數表用法,故大能減省時間。

代數教學上看來函數概念最能用以收極大的改良。但欲看出尋常代數學上所論者如何與有理函數有關,似頗不易,故於此簡單一述教法大要。

入手時可先解釋將研究的函數之種類,并指明凡祇用四種初等算法所作成的函數是一有理分數。這裏可使學生得到許多練習化雜分數的機會。繼此,可教多項式之算法,包括除方程

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x),$$

綜合除法 (*synthetic division*), 及用此法以計算以下多項式之係數:

$$a_0(x+a)^m+a_1(x+a)^{m-1}+\cdots\cdots+a_{m-1}(x+a)+a_m$$

於是教一次函數, 藉二次定列式之助研究其圖與相交。 二次函數之理論上,頗有機會注重及多項式之根之觀念,可用以引入二新觀念,卽曲線之斜度,由此可決定最大與最小者,以及幻數。於此略論幻數及德莫夫來 (*de Moivre*) 定理亦不可少。繼此,卽可作高次多項式之圖表的研究,此中包括借助於引生函數之最大與最小之理論。於是可以

剩餘定理爲基礎系統的研究多項式之根，而霍納(*Horner*)法所基於其上的定理，則尤須注意。既教過根之數字的決定法，包括霍氏法在內，即可及特別多項式。例如 x^n-a 引至於根數理論及分數指數，其屬性能完全或者亦最好由 $x^n=a$ 一方程推得之；$(a+x)^m$ 引入二項式定理，而 $a+(a+x)+(a+2x)+\cdots\cdots+(a+nx)$ 以及 $a+ax+ax^2+\cdots\cdots+ax^n$ 則爲級數。多項式之初等屬性既盡，則有理分數之圖表的理論乃可闡發出，繼則研究應用於部分分數的不定係數及不定式。級數，變互法(*permutation*)，組合法，或然性，於初等函數論似不適宜，不過級數可視爲項數有限的多項式之推廣至於項數無限，而組合法之公式則於證二項式定理上有用。n 個事物之 k 個的組合，其數爲 $\frac{n!}{(n-k)!k!}$，可證明 $(a+x)^n$ 中所有 $a^{n-k}x^k$ 形式之項亦等於此數。至或然性及定列式理論之處所，尙未說及。前者或可讓給本班學生所需尤要的論題，後者則屬於方程理論或立體解析幾何學。

平面解析幾何學之教程,除前述者外,餘無多可說。 此方面須注重於簡單無理函數理論,包括同局二次方程之解法,應用於圓錐曲線之相交上,以及引至求代數函數之引生函數, 而以決定切線之斜度問題爲解釋。至詳細研究超絕函數及代數函數之微分法,自然須於微積分內及之,在這裏,又自另一觀點上研究函數了。微積分內則函數之連續性,微分法,積分法當最注重,而爲這些算法下的函數之性質之基礎,除前面所述分類法外,還可述其他於高等解析上有用的分類法。

18. 函數之連續性。倘不將前面提及過的連續性一說,則函數之研究不能完備。 粗言之,一函數之圖倘能够不斷的,此函數卽是連續的。 如是,$y=\dfrac{x}{x^2-1}$對於 x 之任何值除 $x=\pm 1$ 外總是連續的。 前 10 節內之函數(1)於 $x=0$ 不連續, 蓋其函數值,當 x 增加至此值時,突由 -1 跳至 0 及至 $+1$。 解析的言之,函數 $f(x)$ 於 $x=a$ 處,倘 a 屬於 x 值之列(於此 $f(x)$ 爲定者),而倘 $f(x)-f(a)$

之差可因 x 充分近 a 而隨意的小，則爲連續的。倘一函數有此屬性，則 x 逼近 a 時，$f(x)$ 自亦必逼近 $f(a)$。若欲再嚴格些，則可云：對於任何小的正數目 ε，可求得一其他正數目 δ，俾 x 與 a 之差小於 δ 時，$f(x)$ 與 $f(a)$ 之差小於 ε，如是，則 $f(x)$ 爲連續的。圖表的說來，此即是在 $a-\delta$ 至 $a+\delta$ 間隙內，任何一對縱坐標 $f(x)$ 與 $f(a)$，屬於 $y=f(x)$ 一曲線者，其差小於 ε。

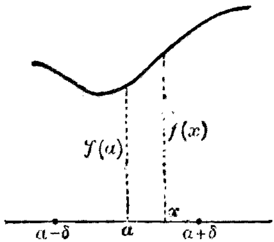


圖 七

由其圖已不難明白，且亦不難解析的證明，多項式對於 x 之每一值均是連續函數，而有理函數除能使其分母成零的值外，對於每一值亦均爲連續者。其他諸初等函數亦大率均是如此，除有幾個可能的孤立的值外，其餘 x 之一切值均連續的。例如三角函數上的正弦與餘弦乃是一切處均連續的，惟正切則於 x 之值爲 $\frac{\pi}{2}$ 之奇倍數時爲無限，

因而是不連續的。但此外的函數則其不連續殊爲複雜，例如函數(2)於每點均不連續。初等函數之連續性的屬性，比較是其簡單者，故卽止於此，而一論其他微積分中所遇見的函數之重要屬性。

III. 微積分之基本概念

19. 微積分之三基本概念。微積分上有基本概念三，與函數相連結者，而函數論在幾何學，力學，物理學及他處上應用之大部與此有關。此三概念卽是"引生函數"，"反引生函數"或"無定積分"，以及"有定積分"。此三者均可幾何的解釋之幷用多項式簡單說明之，這裏擬略一及此。微積分之難處在於應用此項基本概念至於無理代數函數及超絕函數。

20. 引生函數及其解釋。我們自此以後祇論 x 於完全實數列內或於此列內之某間隙 $a \leqq x \leqq b$ 上爲有定的函數 $f(x)$。倘以 x 表任何刻之時間，而自其列一端之值一致的增加至於其他端，則變數 $y=f(x)$ 將同時的變其值。對於 x 之每一值，其

函數將與 x 相關的有些變動，可如下定其意義。試論 x 值之一個間隙在 x 與 $x+\triangle x$ 之間者，這裏 $\triangle x$ 祇是一符號，用以表示一加於 x 上之量。當 $x+\triangle x$ 時，其函數 y 之值可用 $y+\triangle y=f(x+\triangle x)$ 表之，將此與開初時的值 $y=f(x)$ 相減，得 $\triangle y=f(x+\triangle x)-f(x)$。而此商數

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x} \tag{6}$$

則表 x 自 x 變至 $x+\triangle x$ 時其函數變動之平均率。$\triangle x$ 逼近於零時此商數之極限即是所謂函數在 x 值之變動率。自然，倘有此極限，則是一變數乃是爲 x 之每一值所不二決定者，因而其本身是一新函數，尋常用符號 $f'(x)$ 表之。

此 $f'(x)$ 函數，即名爲 $f(x)$ 之引生或變動率，不是每一函數均有的，此則不難明白。惟於初等函數則此項變動率總能求得。計算之的方法，可用熟知的物體下墜問題說明之。設如一重物下墜，則 t 時間內所經過距離乃是 t 之函數，由著名的公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

定之。倘 $t+\triangle t$ 時間內所經過距離用 $s+\triangle s$ 表之，則得

$$s+\triangle s=\frac{1}{2}g(t+\triangle t)^2,$$

而當 $\triangle t$ 時之平均速率爲

$$\frac{\triangle s}{\triangle t}=\frac{1}{2}g\ \frac{(t+\triangle t)^2-t^2}{\triangle t}=gt+\frac{1}{2}g\triangle t.$$

若 $\triangle t$ 逼近於零，此平均速率逼近極限 gt，此爲下墜物體於任何時刻 t 之實在的速率。

適纔所計算出變動率乃是一極簡單 t 之多項式者。用二項式定理，即可得任何多項式之變動率，其法與前同。試先論函數 $y=ax^n$。用前所述法，自 x 至 $x+\triangle x$ 之平均變動率，乃是商數

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=a\frac{(x+\triangle x)^n-x^n}{\triangle x}$$

$$=anx^{n-1}+\triangle x\ \text{之諸乘方所成的項。}$$

故 ax^n 之變動率爲 anx^{n-1}，此式對於任何正整數 n 均可用。仿此，倘 $y=2x^3-x+5$，則 x 至 $x+\triangle x$ 之平均變動率爲

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=2\ \frac{(x+\triangle x)^3}{\triangle x}-\frac{(x+\triangle x)-x}{\triangle x},$$

而其極限則爲 $6x^2-1$。由此，可推得任何多項式

之引生函數可應用 ax^n 之公式至其各項，然後加其結果。

前面定引生函數之意義爲變動率，實使此函數於力學問題上極重要，然引生函數於此外還有可注意的幾何解釋。假如 $y=f(x)$ 之圖如第八圖所示，於 x 之任何值，垂線 xp 其長等於 $f(x)$ 函數之值，而於 $x+\triangle x$，其相當的縱坐標自 $x+\triangle x$ 至 q，其值爲 $f(x+\triangle x)$。故第八圖內 $pr=\triangle x$，$rq=f(x+\triangle x)-f(x)$，而 $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ 之值即爲 $\frac{rq}{pr}$，此即是 rq 割線之斜度。若 $\triangle x$ 近於零，q 與 p 二點即相逼近，而 pq 割線以逼近 p 處切線爲其極限。故 pq 之斜度必同時逼近此切線之斜度，而引生函數 $f'(x)$ 之值，其數目與切線 pt 之斜度等。

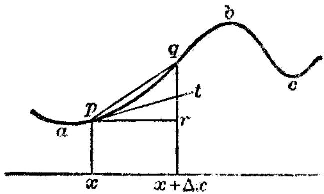


圖　八

21. 函數之最大與最小。 引生函數之幾何上概念之應用，或者以決定函數之最大與最小值爲最

要。很明白的，第八圖中最大點與最小點 a, b, c 處切線之斜度是零，故如求得一函數 $f(x)$ 之引生

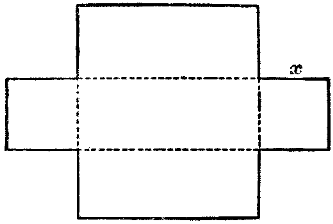


圖 九

$f'(x)$，則祇須得 x 之值能使 $f'(x)$ 成零者，卽可決定 $f(x)$ 之最大與最小值了。

例如有鐵片一方，欲於其四角各割去一平方塊，以 x 爲邊者，然後摺之成一方盒（觀圖九），今欲求此所成的方盒其體積須爲最可能的大，則應如何割法？這裏，倘原有鐵片之長寬爲 4 與 6 寸，則此盒之體積乃是 x 之函數，爲以下的方程所決定：$v=(6-2x)(4-2x)x=24x-20x^2+4x^3$。此函數之圖爲第十圖所示者。其任何點切線之斜度爲引生

$$v'=24-40x+12x^2,$$

而此則於 v 之最大點 a 必爲零。解此引生函數而求其根，得 $x=\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}$，$x=\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}$，後者卽爲

a 點 x 之值。 故知若欲得一盒，其體積最可能的大者，則各角應割去以 $\frac{5-\sqrt{7}}{3}$ 爲邊的平方。

倘一函數 $f(x)$ 其值各處均爲 c，則其變動率爲零，而其圖則是一與 x 軸平行的直線。反之，亦可知任

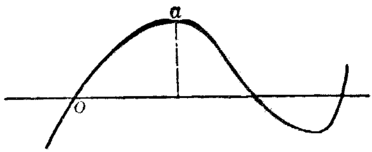


圖 十

何一函數 $f(x)$ 之變動率爲零者，其圖必爲一與 x 軸平行的直線，而對於 x 之每一值，其值均同。試論二變動率同的函數 $f(x)$ 與 $g(x)$，則其差 $f(x)-g(x)$ 乃是一 x 之新函數，其變動率各處是零，因乃是 $f(x)$ 與 $g(x)$ 二率之差。但如前所說，如是一函數總是一常數 c，故知倘二函數之引生相同者，其相關總可以一方程作以下形式者表之：

$$f(x)=g(x)+c。$$

22. 反引生函數。 既知此，乃可一論微積分上之第二基本概念，即所謂"反引生函數"者是。 我們已知道，普通任何一函數 $f(x)$ 有一引生函數

$f'(x)$，卽表其變動率者，與之相連。但我們可問，能不能有這樣一函數，$f(x)$本身爲其引生。普通大約能有如此一函數，卽名爲$f(x)$之反引生。倘將x^n之引生的公式記在心上，則不難用視察求得任何一多項式之反引生。用此公式，可知$a\frac{x^{n+1}}{n+1}$之引生爲ax^n，因而此卽是ax^n之反引生。故一多項式每項之反引生，卽爲將該項之指數加一，而用已加後之指數除此項。而多項式之反引生，則爲此各項之反引生之和。例如

$$7x^6-12x^2+5$$

乃是x^7-4x^3+5x之變動率，此則用前所述微分求法不難明。

然一函數$f(x)$之反引生，不如引生那樣的只須知$f(x)$便可不二的決定之。爲便利計，可用$a(x)$表反引生，這裏a表明二函數間之關係。設$A(x)$爲$f(x)$之其他一反引生，則$A(x)$與$a(x)$照定義其引生同，因而其相關可用一方程作

$$A(x)=a(x)+c$$

形式者表之。故知雖反引生不是不二的，但若知其一，則其他卽須加一常數於已知者便得。

23. 模範的力學上之應用。反引生用法之一種，可以向上擲一球之問題說明之，卽已知開始時之速度於任何時刻決定其高度。物理的實驗告訴我們球之速度每秒鐘一致的減少，其量爲 $-g$，於此 g 大約爲 32.2 英尺。換言之，速度之變動是一常數 $-g$。倘已知 $-g$ 之反引生，則速度 v 與此之差祇是一常數了。用前面的公式，此反引生已不難得之，其結果爲 $-gt$，而 v 之式爲

$$v=-gt+c。$$

於此，常數 c 可用開始速度 v_0（當球擲時，卽 $t=0$）決定之。蓋此方程於 t 之任何値均可用，故當 $t=0$ 自亦可用，因而 $c=v_0$。仿此可求得其高度 s 之公式，用 t 表之者，此則祇須求其變動率 v 之反引生便得。此反引生之値爲 $-\frac{1}{2}gt^2+v_0t$，故此與 s 必滿足一方程

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+d。$$

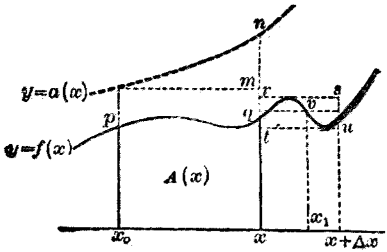
但當 $t=0, s=0$，故 d 必為零，而 s 之最後式為

$$s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2。$$

由此項問題，可知求函數之反引生與引生之方法，實至重要。求一函數之引生，名為"微分法"，而求其反引生，則名"積分法"。微積分算法上之一個要務，是儘量求決定各種不同的函數之引生與反引生。

24. 函數與其反引生間之關係。 $a(x)$ 與 $f(x)$ 之圖，其相關上有二極可注意的屬性，其一則直由反引生之定義上得之。對於 x 之任何值，圖十一中反引生曲線 n 處切線之斜度，數目上等於原曲線 $y=f(x)$ 之相當的縱坐標 xq 之線的單位。若 $y=a(x)$ 有最大與最小，則 $y=f(x)$ 必交 x 軸，因前者之斜度即後者縱坐標，於此為零。

其第二種關係則尤為可注意，亦尤關重要，但欲顯明之，必須先證明 $y=f(x)$ 之一種屬性。試論圖中由曲線，縱坐標 x_0 與 x 及 x 軸所包的面積 A。A 之值對於 x 之每一值是不二的決定，而照



圖十一

函數之定義，故可爲一函數 $A(x)$。此函數之引生不難算得。圖中由曲線，縱坐標 x 與 $x+\triangle x$ 以及 x 軸所包的面積，即是 $A(x+\triangle x)-A(x)$ 之差。後者之面積小於以 $x, r, s, (x+\triangle x)$ 爲角的直角方形，而大於 $x, t, u, (x+\triangle x)$ 直角方形，故等於介乎此二者間之一方形，其上面邊與曲線相交於 v，可以 x_1 表其橫坐標。因此方形之高爲 $f(x_1)$，其面積即爲 $f(x_1)\triangle x$，而

$$A(x+\triangle x)-A(x)=f(x_1)\cdot\triangle x。$$

商數 $$\frac{A(x+\triangle x)-A(x)}{\triangle x}=f(x_1)$$

之極限於是爲 $f(x)$，因 x_1 之值總是在 x 與 $x+\triangle x$ 之間，若 $\triangle x$ 逼近零，即近於 x。由此得極

注目的結果：$A(x)$面積之變動率，數目上等於面積邊界處縱坐標 $f(x)$之長。

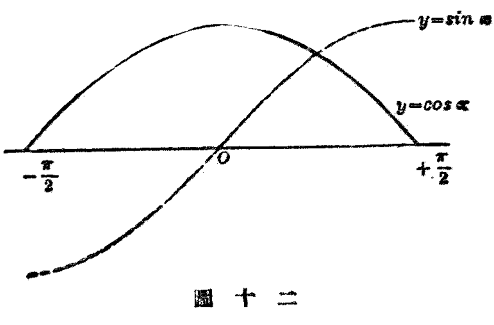
25. 用一線代表一面。 試論 $A(x)$ 與 $a(x)$二函數，此二者均是 $f(x)$之反引生，故必滿足一方程作此形式

$$A(x)=a(x)+c \qquad (7)$$

者，於此，c 是一常數，可使 $x=x_0$ 以決定之。$A(x_0)$爲零，故當 $x=x_0$，此方程卽作 $0=a(x_0)+c$，於是(7)可成爲

$$A(x)=a(x)-a(x_0)。\qquad (8)$$

幾何的言之，此重要的方程卽是說：$A(x)$ 內平方單位之數目，等於 mn 線內線單位之數目，而 mn

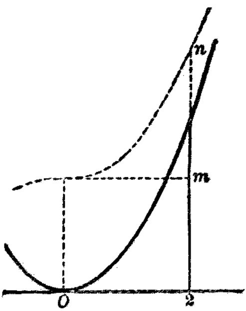


圖十二

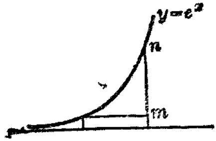
則爲反引生曲線之縱坐標 $a(x)$ 與 $a(x_0)$ 之差(觀圖十一)。

試一論二曲線 $y=3x^2=f(x)$, $y=x^3+1=a(x)$。於此,第十二圖中 $y=3x^2$ 與起點及 $x=2$ 縱坐標所包面積,數目上等於 mn 線之長,爲 $a(2)-a(0)=(2^3+1)-1=8$。

第十三圖所示 $y=e^x$ 之曲線($e=2.718+$),其引生曲線亦卽是其本身。故曲線,x 軸及任何二縱坐標所包之面積,數目上等於二縱坐標之差。



圖十三



圖十四

仿此,我們如知餘弦之反引生爲正弦,則餘弦曲線任何弧所包面積便不難計算得。由適纔所證定

理,此面積等於 $\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2$。

26. 有定積分。流體壓力。 適纔所明引生與反引生曲線間之關係,幾何上頗可注意,然其重要則在其應用至於計算微積分上之第三個基本概念,即有定積分是。 試先論幾個引至有定積分的例。設如有一圓筒,中盛以水,今欲求其水對於筒邊所施之壓力。 物理學上有一條著名的原理,即是流體內任何點之地平壓力同於垂直向下的壓力。設一立方單位水之重爲 w, 而 x 爲所論的點之深,則該深處每單位面積壓力等於橫切面一平方單位 x 單位高的水柱之重 wx。 今設將此流體面與底間之圓柱面用平面 (與筒底平行者)分之爲 n 個地平圈,其寬爲 $\triangle x_1,\triangle x_2,\cdots\cdots\triangle x_n$。設圓筒之半徑爲 r, 則任何一圈之面積爲 $2\pi r\triangle x_k$。

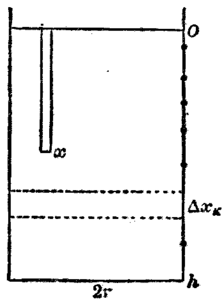


圖 十 五

此面積上之壓力小於

$2\pi r\triangle x_k$ 與圈下邊的壓力之積，而大於其上邊與 $2\pi r\triangle x_k$ 之積，故等於 $2\pi rwx_k\triangle x_k$，這裏 x_k 為 $\triangle x_k$ 間之相當的深處。其和

$$2\pi rw(x_1\triangle x_1+x_2\triangle x_2+\cdots\cdots+x_n\triangle x_n) \qquad (9)$$

乃是總壓力。因 x_k 之值未定，故此總和照目前之式難以計算，然其極限當 $\triangle x_k$ 減小時則用後面將說明的方法，極易算出。此總旣等於所求之壓力，故其極限之值必同。

倘若對於許多例均寫下其詳細的和及極限之說明，則極費事，故不能不想出一種記號法，能使人一目卽想及其方法中之主要處。如前所舉的例，其極限用符號

$$\int_0^h 2\pi rwxdx \qquad (10)$$

表之，於此 h 爲水之總深。此記號法中 $\int$ 一號卽是積分號，實爲舊時 s 字母之變形，意表取一和之極限。0 與 h 兩界，表明和由以構成之間隙；而"積分者"$2\pi rwxdx$ 則表明所總和的項之性質。此全式名爲"函數 $2\pi rwx$ 在 0 與 h 兩界間之有定積

分"。

27. **旋轉體之積。** 用此有定積分,一其他簡單的問題亦不難解決,即求圓錐體之積。今將第十六圖內所示的三角形於 x 軸上旋轉之,則得一圓錐體。此三角形之弦,即是 $y=\frac{ax}{h}$

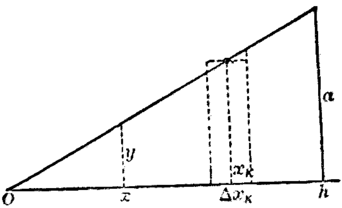


圖 十 六

一函數之圖之一部,因其任何一點,y 與 x 之比為 $a:h$。 將自 O 至 h 一間隙分為 n 個 $\triangle x_k$ 如前。則 $\triangle x_k$ 上梯形所生出的體積,等於相當選擇出以 $\triangle x_k$ 為底 $y_k=\frac{ax_k}{h}$ 為高的直角方形所生體積。直角方形所生出體積是圓柱體,等於底 $\pi\frac{a^2x_k{}^2}{h^2}$ 乘高 $\triangle x_k$ 之積。 於是此圓錐體之積,就等於 $\pi\frac{a^2x_k{}^2\triangle x_k}{h^2}$ 那樣的許多項之和,而照前的說明,其極限可表以

$$\int_0^h \pi\frac{a^2}{h^2}x^2dx \tag{11}$$

圓錐體之積自可用初等幾何學上之方法算之。

然此法則能使我們同樣的容易計算出一任何曲線 $y=f(x)$ 於 x 軸上旋轉所生的體積，例如前第十一圖內 x_0pqx 所生體積亦極易如是計算得之，此則初等方法所不能的了。若欲計算後者之體積，可於 $\pi\frac{a^2}{h^2}x^2dx$ 處易以 $\pi f^2(x)dx$，而 O 至 h 之間隙易作 x_0 至 x 便行，

即
$$\int_{x_0}^{x}\pi f^2(x)dx \tag{12}$$

28. 面積。 第十一圖中之 x_0pqx 面積，亦可用有定積分表之。蓋 $\triangle x_k$ 上曲線下之面積，大於 $\triangle x_k$ 乘此間隙中最高縱坐標之積，而小於乘其中最短縱坐標之積，故等於乘其中介的縱坐標 $f(x_k)$ 之積。故全面積乃是作 $f(x_k)\triangle x_k$ 形式的許多項之和，$\triangle x_k$ 近零時，其極限即是有定積分

$$\int_{x_0}^{x}f(x)dx。$$

29. 有定積分之算法根本定理。 面積 x_0pqx 既可用有定積分式表之，於是即想得求一公式，由此可極易計算有許多有定積分之值。前論一函數之曲線與其反引生之曲線之關係中，已知 $y=f(x)$ 之

x_0pqx 面積等於反引生曲線 x_0 與 x 處縱坐標之差。將此二結果相比較，即得一可注意的定理，所謂"積分算法之根本定理"是。照此，有定積分

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \lim_{\triangle x=0}\{f(x_1)\triangle x_1 + f(x_2)\triangle x_2 + \cdots + f(x_n)\triangle x_n\}$$

之值，可由此式

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = a(x) - a(x_0)$$

得之，於此 $a(x)$ 爲 $f(x)$ 之任何反引生。

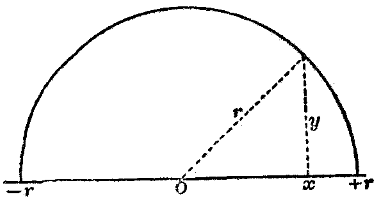
30. 應用。 倘用二反引生，則由前式所得有定積分之值仍是同的，因二反引生之差，祇是一常數。此定藉幾何上觀念推得，惟有定積分實是一解析的觀念而有幾何的解釋者，而此定理本身之性質，則主要的爲解析。由此，我們可計算任何有定積分之值，能得一反引生，不必問其幾何上的或力學上的解釋。如前所舉第一例，積分號下之函數是 $2\pi rwx$[見(10)]，用尋常方法可計算得其反引生爲 πrwx^2。故總壓力爲

$$\int_0^h 2\pi rwx dx = \pi rwh^2 - \pi rwo^2 = \pi rwh^2。$$

仿此，(11)之值可算得爲

$$\int_0^h \pi\frac{a^2}{h^2}x^2dx=\frac{1}{3}\pi a^2h。$$

用同樣的方法,可計算球之體積,這裏用公式(12)。以 r 爲半徑,起點爲心的半圓上之任何點,其 x 與 y 坐標必滿足此關係 $x^2+y^2=r^2$,故圓之函數,其方程爲 $y=\sqrt{r^2-x^2}$。若將此半圓於地平軸上旋轉之,則生出一球,其半徑爲 r。(12)式中之 $f(x)$易以$\sqrt{r^2-x^2}$,則所得者即爲一有定積分表此球之體積:



圖十七

$$\int_{-r}^{+r}\pi(r^2-x^2)dx。$$

此所"積分者"之反引生爲 $\pi(r^2x-\frac{1}{3}x^3)$,故

$$\int_{-r}^{+r}\pi(r^2-x^2)dx=\pi(2r^3-\frac{2}{3}r^3)=\frac{4}{3}\pi r^3。$$

倘將前第十二圖內 $y=3x^2$ 曲線所包面積於 x 軸旋轉之,則所生出的體積亦可如此求得之,其定積分爲

$$\int_0^2 \pi 9x^4dx=\frac{9}{5}\pi(2^5-0^5)=\frac{288\pi}{5}。$$

31. 函數與圖之關係。今將再一論前所提出的

用圖表函數之問題，以結此簡單的研究。倘一函數在一間隙 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ 內之各點均連續的，則若間隙內 x' 與 x'' 二值充分近時，$f(x')$ 與 $f(x'')$ 之差可使其任意小。欲證明連續函數之此項屬性乃是其 α 與 β 間各點連續性之結果，頗爲複雜，於此不能及。此屬性本身名爲"$f(x)$ 在 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ 間隙內之一致連續性"。假定其眞，則不難明白任何一

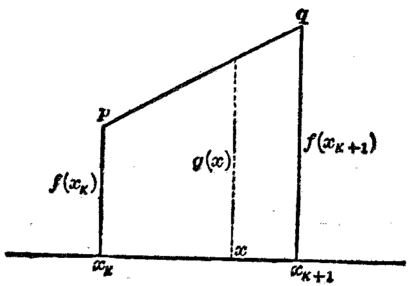
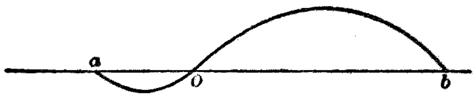


圖 十 八

連續函數可用一多角形近似的表之。蓋設 α 至 β 間隙爲許多值 x_k 分成爲段，其值之互相接近，如是 $f(x)-f(x_k)$ 之差，對於任何 x_k 與 x_k+1 間之值 x，可小於任何一數目 ε。今將與相繼的二值 x_k

與 x_k+1 相當的二點 p 與 q 作出，而連 p 與 q 二點之直線之縱坐標表之爲 $g(x)$，則 $g(x)-f(x_k)$ 之差，亦必小於 ε，因 $f(x_k)-f(x_{k+1})$ 小於 ε，而 $g(x)$ 則在 $f(x_k)$ 與 $f(x_{k+1})$ 之中間。$f(x)$ 及 $g(x)$ 與 $f(x_k)$ 之差，均小於 ε，故其本身之差，不能大於 2ε。此結果於每段 $\triangle x_k$ 均可用，不問 ε 小至何若，祇須 α 至 β 間隙內之分點充分相近。從可知一連續函數之圖表，可任意至如何程度數目上的正確，祇須所作的許多點充分相近，而用直線連之。

然數目上的正確，非圖表之惟一性質所須論之者。折線能相當的正確代表函數之値，然普通不能充分指出其他性質，若作一過多角形角之曲線，則又多誤。例如，在眼看來，好像在一綿延的曲線之每一點有一切線，其方向因切點之移動而連續的變動，故其斜度亦是連續變動的。因此，如是一曲線所表的函數 $f(x)$ 當有一連續的引生，然事實上不盡如此。伐愛司德拉司(*Weirstrass*)曾舉出一例，明有的函數雖於一間隙內連續的，然於此內却沒



圖十九

有引生。關於第二次引生$f''(x)$及其以後高次的引生，圖上不能表出什麼。於一段向下凸的弧 ao 上，第二次引生是正的，於此切線之斜度是增加，而於向下凹的弧 ob 上，引生是負的。於 O 處可改變其號而成零，不過亦可於此點突然改變，例如ao與 ob 爲以下二曲線之弧即然：

$$y=x+x^2,\quad y=x-\frac{1}{2}x^2。$$

此二曲線均過起點 0，其引生 $1+2x$ 與 $1-x$ 於 $x=0$ 同值，故此二曲線於此點互爲切線。反之，其第二次引生則一爲 2，一爲 -1。由此，故知看來爲綿延的曲線，其第二次引生可不連續，或竟無第二次引生。

32. 圖爲數學上的符號。由所說者可推知圖有二種不同的重要的用處，其第一種即是數目的表出一函數之值。我們已知道，即函數祇是連續而

沒有引生,此項圖表亦可有意義。 然圖在數學上作爲函數之符號,則其用處與 $f(x)$ 爲函數之符號,$\int_{a}^{\beta} f(x)dx$ 爲有定積分之符號等。一觀圖卽能看出許多性質,此則較祇表 x 之函數關係的符號 $f(x)$ 尤爲有用了。 由$y=\frac{x'}{x^2-1}$之圖(圖三),卽可知該函數除 $x=\pm1$ 外,是連續的,且有連續的引生;當 x 自$-\infty$增加至 -1 時,此函數總是減少自 0 至$-\infty$,而x自-1增加至$+1$時,自$-\infty$增至$+\infty$;而x自$+1$至∞時,此函數卽自$+\infty$至 0;祇當 $x=0$ 時,卽成零,其引生爲負的有種種變動;其第二次引生於$x=0$成零,等等;凡此種種屬性用語言表之殊麻煩,用圖則一觀卽得。

但數學上記號法之有用與否在其所定出的概念是否切確,則圖之用處祇當於所表函數之性質能先前明白舉出時,以及函數之屬性能用曲線之特別處表出時,纔能有其用處。如前所見,看來第一次與第二次引生之性質似特宜於圖表,幷可知若函數爲連續的,於一定間隙內祇有有數的最大與

最小,其第一二次引生均是連續的,則曲線爲函數之符號實有用處。初等函數及其他解析函數均有此項屬性。惟所表的函數亦不必以性質爲限,祇須函數之解析的性質與其曲線之性質間之相當性能明白了解便得。初等教學上自不能論及什麽圖與解析概念間關係之精微處,圖表法則極可用。然教師心上必須特別顧及圖表法與解析法間之相當性,以後學生將熟習者。

爲高等數學之入門的微積分,今已簡略一論過了。因有種種困難,故不能應用微分求法及積分求法至於其他函數,而祇限於最簡單的多項式。然由此,已可明白引生,反引生,有定積分及有幾種其間之關係。其餘理論之大部分,大約均是各方面應用此三基本概念至於種種不同的函數上。希望未習過微積分的讀者於讀畢本篇後,能消釋其前此對於高等數學之畏葸心,同時并略知其與實用問題及其他科學上問題間關係之重要并衆多。