

算學小叢書



算學的故事

拉萊特著
徐韞知譯



商務印書館發行

算學小叢書

算學的故事

拉萊特著

徐韞知譯

商務印書館發行

年 代 表

本書各章所述的故事在歷史上的順序是怎樣貫串的，請看
下表分曉：

公 元	算學故事	同時的世界大事
前 1000	愛默士 (II)	公元前 735 羅馬建國
	忒理斯 (III)	前 551 孔子誕生
前 500	畢達哥拉 (III)	前 323 亞歷山王薨
	齊娜 (III)	前 214 秦始皇築長城
	梅奈克姆 (III)	
公元 500	歐几里德 } (IV)	公元 608 日人來華留學
	阿幾默德 }	
	亞波羅紐 }	
	希臘學派結束 (IV)	
1000	數碼輸入歐洲 (V)	
	牛津劍橋兩大學成立 (IV)	1118 中國賜詔於日本
1500	採用十號與一號 (VII)	1492 哥崙布西航大西洋
	笛卡兒 (VIII)	
	發明對數 (VII)	
1689	牛頓 } (VIII)	1689 劃定中俄國界
	來本之 }	
	尤拉 } (IX)	
	拉果蘭諸 }	
	拉普拉斯 }	
1759	朱爾 } (X)	1759 英敗法取加拿大
	克爾文 }	1783 英許美獨立
1871	愛恩斯坦 } 相對論 (VIII)	1871 德國統一
	明可斯基 }	
1915	相對論 (VIII)	1914 歐洲大戰

目 次

年代表	1
第一章 緒論	1
第二章 古代 <u>埃及</u> 的貢獻	8
第三章 『幾何學』的發達	13
第四章 <u>歐几里德</u> 『幾何學』	22
第五章 數碼的來源	33
第六章 中古時代大學的情況	38
第七章 『文藝復興』(renaissance) 運動 中的『算學』	46
第八章 近世算學的形成 —— <u>牛頓</u> 和時代 背景	51
第九章 算學的理論和實務	65
第十章 能力	73

第十一章	圓周率·····	81
第十二章	科學上的新觀念·····	85
第十三章	『相對論』淺釋·····	91
第十四章	科學的統一性·····	99
第十五章	結論 ·····	103

算學的故事

第一章 緒論

歷史使人明敏，詩歌使人詼諧；算學使人精巧；
物理學使人深沉；道德使人嚴肅；邏輯和修辭學
能使人善辯。

——培根(Bacon)——

不要設想算學是困難麻煩，而和常識無關的，其
實他純是常識的精華。

——凱爾文(Lord Kelvin)男爵——

編這本書的目的並不是要用來教讀者的什麼算學，本來關於這科有價值的算學教科書儘多現成的，而且學校的教師們也隨時在講授着各種算學的基本理論；不過我們默察學生們學習算學，感到困難，就常常發生疑問——(1)究竟算學這個科目怎樣發生的？(2)這科的用處在甚麼地方？第一個問題大都是屬於歷史的方面。研究一種學問，

如果能夠知道他發展的程序和時代的背景，纔容易從活的積極的方面推闡起來；否則這種研究是死的，自然不會懂得這種學問連鎖演進的條理，和更精邃的演繹。第二個問題是屬於性質的方面。研究一種學問，如果能夠明瞭他實際的用途和影響的範圍；這種研究纔算是現實的而且人生的。這本小書就是把自古以來算學發達的情形簡略的敘述出來，同時，拿時代作背景把他的各種顯著的應用簡單說明。我們不惟重視各種日常度支計算和商業應用的核算能力；並且還應該明白每種科學工作以及聯帶的各種發明和算學的關係。

說到算學的用途，最顯著的是在各種機械工程，電氣工程，建築工程等方面。但是社會問題和經濟問題也無不和各種統計學算學有密切關係。再如最近的數理哲學 (mathematical philosophy)，數理邏輯 (logique mathématique) 的發達，構成哲學邏輯學上最光明之一頁。還有近代的實驗心理學也和算學有很多的關係。這些都是抽象的

學問應用算學的例證。至於自然科學方面更可見着算學偉大的用處。我們若果拿史的眼光來看，算學的確是黑暗時代阿拉伯 (Arabs) 人遺留下來的一線光明，可惜這種學問的本身過於專門，因此普通學習的人只會增加一種神祕或盲目的崇拜，結果差不多好像一堆啞謎。發明固然必要，可是確定和表明他存在的價值，尤為一切工作中最切要的工作。

原始社會進化到稍有經濟組織雛形的時候，人們在日常生活中自然就需要計算，因為需要計算，就漸漸想出計算的方法，懂得計算，自然會想用法子來記載計算的結果，留着以備後來考查。社會日益進化，人類要求亦益增多，自人們會利用思維，便常常發出疑問如『為什麼』？……『怎麼樣』？……『為什麼天上的星會動』？……『太陽離我們幾多遠』？……有了這些問題，也就會設法來求解答。經過幾千百年後，問題的數目增多，從事解決這些問題的科學家也隨着增多。因

此，自然界逐漸開放了他互古保藏着的祕密。到了這個時候，學科家的武器，不僅是望遠鏡，物理儀器等等；並且還有前輩遺留的條理，整齊的記錄，這種表示許多精確的綜合結果成爲精確的格式的能力，是科學家對付環繞四圍的自然界的最有力的武器。這種能力就是『算學』（mathematics）。沒有『算學』科學的進步實際上就不可能。我們要問算學的用途在甚麼地方，這就是他的答案；而且只要自然界還有許多祕密尙待啓發，人類還在尋求知識，『算學』在科學中仍然佔一個中心位置，繼續發展他的效用，或爲人類解決無數問題，這答案總是對的。

有史以前人類在科學上的成就如何，我們所知道的實在有限。我們只是從兩方面得到一點知識：第一，從遺留到今的古石器，陶器及壁畫等方面來研究；第二，從現存的退化民族的習慣方面來研究。我們由這兩方面的研究，可以猜想：很早以前，人已經能夠區別一個大數目和一個小數目，

並且能辨別這兩個數目的不同；稍久漸具有計算的能力。我們從退化的民族看起來，原人係用手指來計算數目的，或許只能夠計到『十』位，現在有些民族用的數目名稱，還和手指的名稱一樣。

『十』位以上，退化民族通常都不能計算；所以他們常說『十』位以上的數目爲『多數』，或其他類似的名辭。至於用符號來代替數目直到後來很久纔算發達。

其次一個時期，因爲社會經濟組織變繁，人類的慾求增加，用手指來計算已經不夠，於是改用石子來代替手指。依照自然界表現的例證，每組『十』個的若干石子就構成計數的工具。這種進步實在是計數科學的萌蘗。這種進步同時也表現『思想』上發生的一個重要的進步。他們計數的方法，先把第一組大小同樣的『十』個石子放在一排，然後再把另一組放在側邊，仿此類推，就可以計算超過『十』位的數目。又因爲用到兩組以上的石子，就發生了一個『單位』(unit)的觀

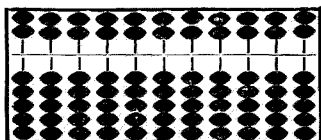


圖 1 算盤

念。他們再改良這種方法，用第二組的一個石子來代表第一組的五個石子。如此就有了計算到『百』位的工具。再用到第三組石子，可以計數到『千』位。後來文化較高的民族改進這種方法，結果就造出『算盤』(abacus)來。這種東西自從有史記載直到近百年間還是唯一通行的計數工具。『算盤』係用『算珠』來代替石子。中間用一條木片隔成上下兩格(如第一圖)；上窄下寬。『盤』上縱串許多銅線；每條銅線上串着七個『算珠』，兩個在上格，五個在下格，都留有適當的空隙，以使用者自由撥動。珠算上用的『單位』觀念和前邊所說的一致。不過為便利起見，每條銅線的上格一個『算珠』代表下格五個『算珠』；換句話說，下格的五珠相當於上格的一珠。這是中國式的『算盤』。西洋式的『算盤』沒有那條橫

隔的木片，每條線上共有十個『算珠』；用的單位自然較中國式的『算盤』上用的單純。但中國的『算盤』自有其相當的歷史和進步，我們如果從他的實用方面來看，卻也很有存在的價值。

這就是我們能夠敘述的有史以前和古代人類對於算學的一點成就；現在開始來說『算學』有記錄以後直到今日的情形。

第二章 古代埃及的貢獻

造成金字塔，只有努力。埃及雖然滅亡，努力的
紀念碑永遠存在着啊！

——楊(Young)——

我們今日所有最古的筆錄的『算學』著作，是在紀元前一千年左右一個埃及的教士，叫做愛默士 (Ahmes) 用通草寫的。這本筆記普通認為是較早幾百年前一種類似著作的抄本。這本筆記內中包含着許多算術和幾何學的問題。前邊曾經說過古代人的算術能力如何；再從這本筆記看來，愛默士實在很通曉算術演算的基本方法以及分數的應用。他用的方法有的非常奇特，不過都表現出很難得的巧妙；同時還足以證明他完全精通這種學問。

『算術』(arithmetic) 的來源實在要歸結到原人用石計數的行爲，不過經過埃及人的努力以後，它的基本演算法則纔算從此確立，所以我們不能

不承認埃及人對於算術有他們相當的貢獻。還有『幾何學』(geometry)這種學問大概也是發源於埃及(Egypt)地方。埃及許多區域每年都受尼羅河(Nile)定期汎濫的影響，沿河兩岸水漲時常被淹沒，水落時則漾出灘地。這種灘地的形狀逐年不同，然而這種很適宜於農作物。因為關係於他們生產事業異常重要，所以需要一種地形測量術，因此纔發明『幾何學』。我們雖不能說這種說法完全真實，不過埃及人測量的知識的確豐富。再根據史的記載，希臘人(Greeks)的『幾何學』知識還是從埃及人方面得來的。

我們由埃及境內寺廟的遺蹟看來，前邊所述『幾何學』導源於埃及的話似乎近理。埃及人都固定在類似的位置建造寺廟——這種事實自然就需要決定東西和南北方向的工具。他們先觀察天上的星如北極星(polar star)得到南北向；再用巧妙的方法作南北向的垂線，就得到東西向。這種法子是先取一根繩子，按照 3 : 4 : 5 的比例打兩個結，

然後沿着結摺成一個三角形，在這個三角形內，兩個短邊間的角度是個直角。如果一條短邊是南北向，另一條短邊和它垂直就是東西向，這樣要定的東西向就立刻得出。這種方法和今日建築上用的大同小異。

愛默士書裏提到『幾何學』的問題，大半是關於各種形的面積，和與金字塔 (pyramids) 相關的問題。本來在較古以及那個時候，『幾何學』的發明由於人類的實際需要，所以一切研究也只限於實際的應用。直到後來希臘人纔開始把這種學問做成一種抽象科學來研究。

在這時期內，與埃及同時的其他世界各國的科學成就究竟怎樣，我們不大清楚。又因為缺乏信史的記錄的原故，所以敘述更加困難。不過我們用史的眼光來判斷，腓尼基 (Phoenicians) 的社會背景本是個商業極發達的國家，他們具有的『算學』知識想來至少足夠他們在商業活動上的應用。所以我們相信『算術』的知識在腓尼基民族中一

定有相當的成就，還有他們的鄰國卡泰人 (Chaldeans) 多半喜歡星象，在歷法上很有貢獻，並且他們觀察星象的結果，後來逐漸集成一類極豐富的『天文學』 (astronomy) 的知識。比較遠一點的還有東方的中國和印度 (India)，中國的『算學』側重實用方面，雖然在裝飾的藝術上，可以見得出他們的精巧；但是沒有理論的記載，在這種學問上不能有什麼貢獻。至於印度方面，後章將要說到。古代印度算術上的許多知識，再經過幾度變遷，就是現在『算術』中許多材料。還有今日通用的方法。也是古代印度人的計數知識的一種遺留。

這許多古代民族的『算學』能力都是偏於實用方面的，並且多半是實地觀察的結果。我們再留心埃及的金字塔，寺廟，巴比倫 (Babylon) 的空中花園等工程，對於他們只用簡單的工具和粗淺的學識，竟能成就這樣偉大的工程，這可不能不佩服他們的才力和勇氣。希臘人由埃及方面得到

他們的『幾何學』知識，再從而發揚光大之，就形成了這種學問的基礎。

第三章 『幾何學』的發達

『幾何學』(Geometry)是唯一足以使上帝愉悅
降福人類的科學。

——霍布士(Hobbes)——

希臘研究學問的風尚，古代就很發達，在各個城市中都有幾個學派，作成各種學術研究的中心，內中『算學』學派的設立，應該歸功於米迺特(Miletus)地方的忒理斯(Thales)。忒理斯生在紀元前六四〇年前後，他的生平，我們不大明瞭；不過根據史的記載和傳說，知道他是個著名精明的商人，能夠利用平日的餘暇專心來研究學術。他後來放棄了商賈的生涯，開設一個學校在他的故鄉米迺特教學。我們由他的算學知識看來，相信他經營商業的時候，或許到過埃及，從那裏自然就會鼓勵起他研究『算學』的興趣來。實際他的『算學』知識範圍究竟怎樣，我們到也很難說明，不過根據後來許多著作家的意見歸納起來，他還

能通曉不少關於三角形和圓形的基本性質。然而他的興趣卻不祇限於『幾何學』，他與當時許多學者相彷彿，也喜歡從事形而上學和天文學的研究。還有，普通承認他發現琥珀經磨擦能夠吸取輕物體的現象。設若這樣確是事實，那末他不僅和『算學』『哲學』發生關係，抑且是發明『電學』的始祖了。他設在米迺特的學校，雖然維持了一百多年，可是他的那些學生對於『算學』卻沒有甚麼很難得的貢獻。

在這個時代中希臘特別著名的學者就是畢達哥拉(Pythagoras)。我們只要說到直角三角形的基本性質——即對直角斜邊上的正方面積等於其餘兩邊上兩正方面積的和，也就是周髀算經內『勾三股四弦五』的原則——就會聯想到他的大名。這個定理在他以前本來就有人發明過，但是他最先替這個定理做個證明，因此現在簡稱這個定理為畢達哥拉定理。後來歐几里德(Euclid)另作證明，也是現在普通『幾何學』書裏通行的一個。

我們根據史的觀察，無論如何，畢達哥拉在希臘科學史上實在應該佔一個特出的位置。紀元前五六九年前後他生於薩摩士(Samos)地方，他的生平在他夫人的傳記裏敘述得很詳細，可惜這部著作後來失傳，所以我們現在不能多說。不過他在當時實在是數一數二的大宗師，信徒是很多的。他的門徒共分兩等：第一等爲初學者；第二等爲畢達哥拉派。畢達哥拉派是程度較高學識優長的學生；畢達哥拉傳授他們許多重要的發明和學說。畢達哥拉派的學生在研究學問期間，自成一派哲學的結合，實行一種極嚴格的生活信條。本來這種動機和行爲都很好的，不幸後來漸變成一個秘密結合，爲了參加政治活動的嫌疑，觸怒了地方當局，結果不久發生暴動，畢達哥拉和許多門徒都犧牲性命。這種悲慘的結局，對於當時的學派發生一個很大的刺激。各個學派得着這種教訓後都拋棄政治活動的野心，專一來做學術上的努力。

當時希臘除掉前述兩個學派外，幾個大城市還

有幾個比較次要的學派。內中有一個最值得敘述的就是詭辯學派。這個學派曾經在愛拏(Elea)地方發達過。詭辯學派的宗師就是齊娜(Zeno)，曾經提出許多謬說來，最有名的一個就是亞齊兒與龜賽跑的謬說 (the paradox of Achilles and the tortoise)，(亞齊兒是傳說中善走的英雄) 他說：『如果亞齊兒跑的有龜跑的十倍快，現在如果龜先跑的一千碼，(不限定多少遠的距離當中)，那末亞齊兒就絕對的永遠的追不上龜。因為亞齊兒跑到一千碼的處所，龜一定又再前進一百碼；亞齊兒跑過這一百碼，同時龜一定又前進十碼，仿此類推，沒有止境，亞齊兒就永遠追不上龜』。他這種說法究竟對不對呢？我們知道這完全是騙人的話，在一定的時間內亞齊兒總能追及龜的。這種學派的特色就是討論類此的各種問題，當時也很能吸收許多信徒。後來齊娜與畢達哥拉派相彷彿，因參加政治活動，受圖謀顛覆政府的罪名，紀元前四三五年在愛拏地方犧牲了。這

一點事實和前述畢達哥拉派的結局對映着是很值得注意的。

希臘在這個時期中，國家地位在國際上已達到極度，所以雅典（Athens）——希臘的首都——差不多變成唯一的政治和文化事業的中心。因為雅典社會很發達，許多學者都在那裏設立學派，傳播思想，從事實際研究和交換討論。同時小亞細亞（Asia Minor）陳舊的學派也逐漸變成無足輕重了。

雅典學派的領袖人物應該是柏拉圖（Plato），他是大哲學家蘇格拉底（Socrates）特出的門徒，雖然他主要的學說是在哲學方面，可是他在算學上的工作究仍有相當的重要。他最先發表哲學和算學的關係，後人大半承受他的這種影響，纔會用幾個成文的『公理』（axioms）和『假說』（postulates）來確定下『算學』的基礎，和採取嚴密的證明方法來肯定『算學』上一切理論。

在這個時期中，希臘算學家普遍都好研究下邊

三個問題的解法：——

第一種，『圓化方』(squaring the circle)

就是作一個面積和一已知圓的面積相等的
正方形的作圖法。

第二種，『二倍立方』(duplication of the cube)

就是體積等於已知立方體的兩倍的一個立
方體的作圖法。

第三種，『三等分已知角』(the trisection of
a given angle)

就是作兩直線三等分一已知角的作圖法：

這三個問題究竟怎樣發生的，我們很難確定。據
傳說所述，三個問題都出自神話上。解決這三個
問題所准用的工具，限制一條無刻度的尺和一付
圓規；除這兩種以外就不得用到別種工具。因為
有了這許多嚴厲的限制，雖然第二種和第三種兩
個問題可以用後章所述的一種稱爲『圓錐曲線』
(conic sections)的來解，可是當時都公認爲這三
個問題不能解決。這段時期內，希臘幾何學家因

爲研究這三個問題，無意中得到許多附帶的發明，所以結果這段時期內『幾何學』獲得極多的重要發展。這時候的算學家很多著名的，現在我們來約略敘述內中三個最著名的：

第一位是希批亞 (Hippias)。他發明一種曲線，稱爲『求方曲線』(quadratrix)。應用這種曲線可以三等分一個角，這是他研究第三種問題解法的結果。不過因爲他應用的工具不僅是尺和圓規，所以他雖然發明出作這類曲線的一種器具和方法，當時一般幾何學家都不承認他所得的結果正確。

第二位是希坡克拉底 (Hippocrates)。後代公認他最先應用『圖表』(graphs)，拿文字來代表各種不同的點。他最好研究第一種『圓化方』的問題，他在研究這種問題的解法的工作中，附帶發現出圓的許多重要性質。

第三位是梅奈克姆 (Menaechmus)。他是亞歷山大大帝 (Alexander the Great) 的師傅。那時候，普通都公認他爲當代有數的重要教師之一。但

是亞歷山大聰敏異常，總覺得他研究方法呆板，據傳說所載，亞歷山大有時要他把傳授的幾何定理另自簡單證明，梅氏卻回答說：『在這國裏可有私用的路，以及王者的道路，但是在幾何學裏卻只有一條路。』他最先注意到稱爲『拋物線』(parabola)的特別曲線的性質，並且發表應用這種曲線兩條相交就可以解決第二種『二倍立方』的問題的話。這種解法或許也就是希坡克拉底所主張的。

梅奈克姆死在紀元前三二五年，正當他的門徒亞歷山大大帝即位後十一年，當他死後這位新皇帝不久就侵略埃及和小亞細亞兩處地方，因爲梅奈克姆平時教育的影響，亞歷山大在軍馬倥偬的生活裏從沒有忘記研究學術的宗旨。所以他佔領埃及以後，就在尼羅河口上尋覓一個適當的地點，建設起亞歷山得列城和大學(city and university of Alexandria)，這回建築的計劃是出於伊飛蘇(Ephesus)地方著名神廟的建築師笛娜克拉底

(Dinocrates)的手。並且不遺餘力的工作，纔形成了一個最偉大的教育和文化的中心。這個大學在設計上有一個顯著的特色，就是教室都環繞着一個大圖書館。希臘科學在這個亞歷山列得大學共發達千多年之久，這個大學的生命直到六四一年回教徒佔據亞歷山得列城和破壞大學的建築後纔算告終。這個大學最先的時候，難得遇著三個有特別能力的算學家——即歐几里德，阿幾默德 (Archimedes) 和亞波羅紐 (Apollonius)。經過他們的研究和發明，我們的『算學』特別迅速發達起來，後來再得大學裏後繼者發揚光大，『算學』成爲專科研究的基礎纔算確定。建立亞歷山得列大學在古代科學史上實在是最恰當的一個分野。我們在後面一章裏特別來詳細說明這個古代大學中的『科學』研究怎樣發達的情形。

第四章 歐几里德『幾何學』

仔細咀嚼一本書，
尋覓真理的光明。

——愛的勞動的損失——

自從紀元前三二三年亞歷山大死後，埃及成爲托迺米 (Ptolemy) 統治的領土。他還繼續亞歷山大的許多設施，維持這個大學。並仍然盡力吸收當代最著名的學者，所以校中良好的教師很多。這個大學的算學部歸最著名的希臘算學家歐几里德主持。歐氏在算學上的功績究竟怎樣呢？我們可以說：只要『算學』還是一種學術研究的對象時，歐几里德就應該有他相當的位置。他或者就算古代最淵博高明的『算學』大宗師。對於後代從事『算學』研究的一切後進很有大的影響。我們也不大明瞭他的生平。根據史的記載和一般的傳說，他是一個頭腦冷靜行爲謹慎的學者。他常說：爲了知識本身所以就值得來尋求知識。他著過許多

『算學』書籍，內中最有盛名的就是他的『幾何學大綱』(Elements of Geometry) 他編這部書的動機是要爲他的學生做一本『幾何學』的教本，這部書的價值如何，我們只消看它通行的時間性；實際上這部書直到兩千年後的今日還足爲一般研究算學的人奉爲圭臬。我們試想學術上的教材有幾部能夠存留到這樣長久的呢？歐几里德在這部書裏搜羅所有已知關於單形的『幾何學』的討論，把這些結果都按照邏輯的方法排列起來；同時替每一個結果都做一個邏輯的證明和判斷。所以這部書的內容不惟豐富，並且異常精湛；應用到的各種方法和假說也十分正確。因爲如此難能可貴，這書居然流傳到近幾十年。最近，科學方法發達，並且『幾何學』的範圍擴大，纔有別種新穎的更精密的類似的『幾何學』著作代替而興；但是這部書的價值卻永久不可磨滅的。

歐几里德同時還著有研究曲線性質和其他關於這類的書籍，此外當時一部有名的討論『光學』

(Optics)的著作也是他做的。實際上他還不僅是個著名的算學家，而且是個卓異的好教師。亞歷山得列大學得着他來指導許多學術上的研究，真正幸運！他大約死於紀元前二七五年。他留下在學術上的工作就由他的學生擔當，繼續努力下去。他們對於『算學』上的成績如何以及他們的生平，因為缺乏史的記載，我們現在無從知道。不過不久亞歷山得列大學就另出來一個特出人物——就是阿幾默德。

阿幾默德當紀元前二八七年生於西拉苦(Syracuse)地方。他來亞歷山得列讀書，正當歐几里德死後沒有幾年。完成他的學習歷程以後，就回轉到他的故鄉去；在此消磨了他畢生的精力。因為他有特異的天才淵博的學識和超人的能力；西拉苦的國王希羅(Hiero)非常敬重他。據史的記載所述，他在故鄉做了著名的貢獻：例如有一次羅馬人(Romans)圍攻西拉苦城。阿幾默德應用『透鏡』(lens)把太陽的光輝集中在『焦點』

(focus) 發生燃燒，將對方羅馬人的兵艦焚燬。還有，他應用機械方法替船工把不能移動的船隻送下水去。最著名的一件事就是他發覺金匠舞弊的事。希羅想做金冠，就稱若干金塊去命金匠製造。金匠製好後，希羅疑惑到這個金冠或者摻雜別種賤金屬的合金。但是重量不錯，有甚麼方法來判別呢？他沒有辦法就拿去請阿幾默德替他考驗。阿幾默德接到這種委託後，用盡許多方法，都不發生效力。後來他出浴時，忽然想出一種道理，據史的記載說，當時他喜極欲狂，甚至裸露着出浴的身體，呼喚着：『找到了，找到了！』(eureka! eureka!) 在西拉苦街市上亂跑。究竟他發現的道理是什麼呢？究竟他應用的方法是什麼呢？懷悌海教授(Prof. Whitihead)說：『如果我們知道這一天應該紀念為『算學物理』(mathematical physics)的生日；這門科學在牛頓(Sir Iseac Newton)果園的發現以前——就是萬有引力的發現——早就有來歷了。』

阿幾默德發現的道理就是浮力的原理。一個物體沈在水裏，所受的向上壓力等於沈沒時所排去的水的重；換一句話，物體在水中減輕的重量等於與物體同容積的水的重量，因為物體在水裏有浮力，所以一個物體在水裏稱着，要比在空氣裏去稱減輕。這種物體在空氣中的重量和排去的水的重量，（就是與物體同容積的水的重量）的比，通常稱為該物體的『比重』（specific gravity）。阿幾默德應用這種道理和方法，引伸起來，先決定希羅金冠的比重，再拿來和同法求得的純金的『比重』比較；金匠摻雜合金的弊端纔算因此發覺。

阿幾默德的活動是多方面的，所以我們也很難將他在『算學』上的貢獻能夠用簡短的幾句話可以說得完全。他的著作很多的，如討論『拋物線』（parabola）和『螺旋線』（spiral）的性質的，討論在各種機械上『算學』的應用——如滑車和槓杆（system of pulleys and levers）等的——等類。尤其是他關於浮體（floating body）的研究，開創

近代『水力學』(hydrostatics)的基礎。這些浮體研究的結果綜合成一部專集，許多年一般還公認為這種學問的基本著作。

這時候希臘已到日暮途窮之境，代替而興的就是羅馬。紀元前二一二年羅馬軍隊佔領西拉苦，當時羅馬將領曾通告他們的部隊，不得危害阿幾默德的生命，但是不幸，他畢竟在亂軍中犧牲了。懷悌海教授批評這段事實說：『阿幾默德死在羅馬軍人手裏的事實，適足以表現全社會已經發生很嚴重的變化；學尚理論和愛好抽象科學的希臘人在歐羅巴社會的領導權已經被注重實際的羅馬人取得。貝康司飛男爵(Lord Beaconsfield)在他著的一篇小說裏下『實際人』的定義為，能實踐他的祖先的錯誤的人。羅馬人本來就是偉大民族，可惜過於偏重實際，人們都責備他們無創造。他們沒有改進過他們祖先的知識；他們所有的進步祇是工程方面一小部分。他們完全沒有支配自然力的眼光。更沒有過羅馬人因為專心設計一個

算學圖形而送命的。懷梯海教授批評的最後一句話很足以表現羅馬人在學術上的地位。羅馬人研究的學術只有法律，那些要想學習科學的就得到亞歷山得列去，或者從到過該處的人去研究，所以，很值得注意的，這一個偉大民族實際在科學的進展上並沒有甚麼貢獻。

希臘科學上偉大的人物除前述的歐几里德和阿幾默德兩個外，還有第三個亞波羅紐 (Apollonius)。亞波羅紐在紀元前約二六〇年時生於帕加 (Perga) 地方。他也在亞歷山得列大學講過學。他最先詳細說起那種稱爲『圓錐曲線』 (conic sections) 的重要曲線。本來這種『圓錐曲線』在他以前已經有人提過；並且這類曲線的幾種的性質也有人發現出來。但是這些結果都是零碎的無系統的；直到亞波羅紐纔最先將這類結果作爲系統的記載。究竟『圓錐曲線』是甚麼呢？這種曲線有幾點應該說明的：『算學』上說的『圓錐』 (cone)，通常係指一個『複合圓錐』 (double cone) 而言，如

下圖所表示。分別『圓錐』各部；就得三種形狀完

全不同的曲線：——

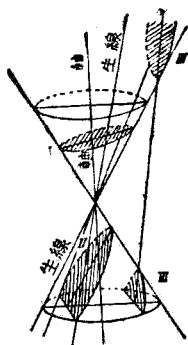


圖 2 圓錐曲線

第一種，一個卵形的曲線（圖中 I）稱為『橢圓形』（ellipse）。如果平面截時和『圓錐』的『軸』（axis）垂直，則變成一個『圓形』（circle）；所以在算學上的解釋，『圓形』是『橢圓形』的特例。

第二種，一個『拋物線』（圖中 II）（parabola）。這種曲線是當截面和圓錐的一條『生線』（generators）平行時發生的。

第三種，一個『雙曲線』（hyperbola）（圖中

III)。這種曲線是當平面同時斜截『複合圓錐』的兩部分，所以結果得為兩條位置不同的曲線。

前述的這些曲線，都是亞波羅紐研究『圓錐』得到的曲線。他有著作專門討論這幾種曲線的性質，這部著作直到十六世紀時代仍舊是研究『圓錐曲線』的基本著作。不過我們在此應該注意，他討論這些曲線還是和當時一般算學家相同，認做實際從『圓錐』截割得來的這種見解，直到十九世紀笛卡兒(Descartes)發明『解析幾何』analytical geometry)的原理和比較簡單的解決方法以後，纔有變更。得著解析方法，替代幾何方法來做研究的工具；這些曲線的性質就容易明白了。

一般希臘人都好研究『幾何學』，所以這時代希臘『幾何學』的成績特別優異。他們除掉研究『幾何學』外，還好研究『天文學』。當時的天文家為數也很不少；最著名的兩個就是希帕苦(Hipparchus)和妥奈米(Ptolemy)。希帕苦生在

紀元前兩世紀。他也在亞歷山得列大學受過教育；畢業後就去羅得(Rhodes)地方，在此發表許多著作。後來不幸他的存錄完全損失，甚至於他的一點消息，還是取材於妥奈米的偉大的著作天文家(The Glmagest)。根據普遍的意見，都公認他最先發表各角間的三角性質的研究。另外，還做過一本關於角度表的書籍。還有他曾經彙集一千多種星的名稱和位置，錄成一個專門的目錄。他用那種很粗淺的儀器竟能得着這樣的結果，真算難能而可貴。在他後三年妥奈米將這些結果整個系統化，就編成他的天文學，這都著作在當時的社會上的貢獻很大。直到開布勒(Kepler)出來，證明太陽，而非地球是行星系的中心。這部主張地球中心的天文學上的權威著作纔算失效。

六四一年回教徒佔領亞歷山得列城，希臘的『算學史』就算從此告終。這回變動不僅希臘算學受其摧殘，甚至各種學術也橫遭破壞。這種打擊在學術上實在重大，整個大學完全消毀，其中最著盛

名的圖書館也被焚燬。能夠碩果僅存的只有少數教師，他們都避難到君士坦丁堡 (Constantinople) 去。同時他們的學術上的工作，也就移植到這個地方去，不過這一個拜贊庭 (Byzantine) 學校卻沒有甚麼特出的學術上的表現，他們最大的任務只是保存許多希臘遺留的著作和學說，沒有想到去改進一切。經過一段很長久的時期到一四五三年土耳其人 (Turks) 佔領君士但丁堡，學術上沉寂的空氣頓然打破，從這個中心點君士但丁堡就產生十五世紀以後學術上主要的高潮。

第五章 數碼的來源

人生沒有算術將若何？

只是一個恐怖的景象。

——西得列斯密(Sydney Smith)——

由六世紀到十一世紀，在這一段長時期裏，說到科學的進步，實在沒有甚麼。這時代的生活方式都離開理論，轉來偏重實際；所以研究學問只成爲極少數人的點綴品。歐洲學術的光明當時已經是不絕如縷。幸而希臘科學的遺稿輾轉傳到阿拉伯去，中古黑暗時代歐羅巴僅有的一線光明算得在阿拉伯人中維持着。所以我們緬懷亞拉伯人的功績，不能不把他們的學校敘述幾句。這些學校很有他們重要的價值：第一層，因爲十二世紀西班牙(Spain)的穆爾人(Moors)，纔重新把希臘的學術傳近歐洲，因而發生古代科學的注重復新運動。第二層，因爲從阿拉伯人方面得到了如今計算上的通用的『十進法』(decimal system)

和『阿拉伯數碼』(Arabic numerals)。

阿拉伯人怎樣獲得他們學術上的知識呢？我們由史的觀察分析起來，共有兩個來源：就是，一，希臘方面；二，印度方面。阿拉伯和希臘的關係是由於阿拉伯國王常請希臘學者到京城報達 (Bagdad) 去講學。歐儿里德，阿幾默德，阿波羅紐和其他許多希臘學者隨身攜帶的東西自然是他們國中最豐富的學術上的知識；這樣亞歷山得列大科學家的學問和著作就一同輸進阿拉伯去。最值得注意的是：希臘學者的原稿多半不存，只賸有許多阿拉伯當時的譯籍留傳至今成爲孤本。實際上，希臘學者的原本正當回教徒侵略亞歷山得列城的時候業已喪失罄盡。我們對於阿拉伯保存希臘學者的著作的事，實應有相當的感謝。

阿拉伯和印度的關係，又由於平時貿易上的接觸，因爲他們雙方常有往來，所以印度算學家的學說和著作也漸流傳到阿拉伯，陸續爲他們的學者所通曉。印度多注重『算術』(arithmetic) 和

『代數』(algebra); 而希臘的算學多偏重於『幾何學』, 到了這時代, 印度的算學已有較高的程度。阿拉伯承受這兩個來源的『算學』知識, 就形成一部整個包括印度的『算術』, 『代數』和希臘的『幾何』『三角』的初級算學。

印度人特別的研究『算術』和『代數』, 也有相當的緣故。本來這兩種『算學』多半偏於實際應用方面。他們因為經濟生活和社會生活的需要, 就不得不努力去研究。因此得到的結果就很多, 並且常和日常生活有關。我們看印度學者所遺留的著作大概都是解釋日常生活中發生的各種問題。因為和實際人生有關, 阿拉伯也就需要這種知識; 所以印度算學就陸續傳播到阿拉伯去。還有現在通行的數碼方法一般認為導源於印度。本來這些數碼的來源實在渺茫得很。但在十世紀的時候, 這些數碼在印度已經很是通行。後來十二三世紀間, 阿拉伯人和穆爾人把這種記數法改良, 慢慢就在西班牙通行起來, 這是『數碼』正式傳進歐洲的

開始。

當初傳進西班牙的時候，歐洲人民並不大注意這種新方法。後來為時不久，這種方法的便利已經為歐羅巴全境公認。計算和記數改用『數碼』，特別方便，前邊已經說過古代計算都用『算盤』來做；但要將數目寫出，卻就難了。最先的人表數自然是用手指。埃及人用象形文字 (hieroglyphics) 表數，實際不過手指圖形表示的變相。希臘人用他們的字母的各種拼合來表數，羅馬人取各數的名稱的首字來表數——例如 C (centum) 代替百，M (mille) 代表千——這等表示法都很麻煩，直到阿拉伯方法傳進歐洲，一切計算和記數上遇到的困難纔算從此完全打破。

阿拉伯人雖然集了古代人的算學的大成，但是他們並沒有推廣這種學問。他們只是保存着較高的算學知識，說不上一點創造。其中最著名算學家只有亞爾卡里米 (Alkarismi)。他著過一部很有價值的『代數學』(algebra)的討論。這部書

是中古代數學研究的基本著作。在這部名著裏，他常用『幾何』方法來求『代數』結果；甚至還把一大部分『算術』和『代數』混合起來討論。

中古『算學』得經阿拉伯人的保存，纔算渡過黑暗時代摧殘的難關。再經阿拉伯人的媒介，東方『算學』和西方『算學』結合起來，形成後代歐洲算學發展的基礎。

第六章 中古時代大學的情況

一個大學一定是一個光明，自由，博學的地方。

——以色列(D'Israeli)——

直到十一世紀末葉，歐洲許多國家從黑暗時代掙扎出來，重新恢復注重學術研究的風氣。在這時候以前一切文化事業的中心祇有寺院，本來這些所在，實際上是專心做學術探討最適當的清靜地方。在黑暗時代中，歐洲學術備受摧殘，已經留存無幾。再遇到十世紀發生的大混亂，這種僅存的一點知識也幾乎全體消滅；所以當時的學校真是不易掙扎。幸虧這些學校都附屬在教堂和寺院的保護之下。纔藉免於完全消滅罷了。

在這段時期裏，因為學術研究和學校都受教會保護，所以一切知識和消息的溝通與傳達，都要用拉丁文字靠着教會中人來做領導的。因此就發生了研究古典文字的風氣。當時寺院對於學術的

貢獻雖然有限。但是他們搜集若干重要的書籍，後代的人得從這些地方去研究古代學者的著作和學說，不可謂非寺院一種相當的功績。

渡過黑暗時代，歐洲社會的混亂現象逐漸恢復秩序，一切學術的研究也陸續着手。羅馬王國因為國家治理上的需要制定著名的羅馬民法，同時新興的宗教逐漸制定一切約束教徒的教規；這些事業在社會上非常重要，而對於知識的復興漸漸接近，也不無影響。羅馬政府開始制定學校的組織和限制，並另設特殊的學校來研究普通學科以外的學問。這類專門學校中有一個最古的設在意大利(Italy)的薩勒娜(Salerno)，這個學校以『醫學』(medicine)著名。另有一個設在波羅拏(Bologna)，這個學校以『法律』(law)著名，是由龍巴德(Lombard)的商人管理的。龍巴德的商人因為商業特別發達，發生交涉就有明白法律的需要，所以設立這個學校，以備他們法律上的顧問。這許多學校慢慢進化就成功若干大學。

波羅拏學校的學生這時候在『婦女解放』運動以前很久，自然全是男性，與今不同。他們常集合參加各種課外活動，組織許多行會，好像當時各種商會的雛形一樣。不過他們雖是大學生，外界人常沒有如今日待遇大學生的情形對他們有相當的敬重；因此他們爲了求學還需要特別保護。積日既久，這種裂痕逐漸擴大；結果，大學生和市民間發生仇恨，激起以後稱爲『市學衝突』的暴動，這種變動實在是學校史上最不幸的事實。

大學生設立的各種行會，和普通商會一樣也能夠施行自治，限制會員的行爲，監導他們的工作狀況，和得到『法律商人』的特權；並且在相當時間內也能夠聯合起來成爲一兩個團體。——牛津 (Oxford) 大學的商會在一二一四年得到國家正式承認；劍橋 (Cambridge) 大學在一二三一年得到承認。這些團體和組織雖然都不是教會機關，但是他們常受附近教主和僧正的保護；最先的時候，教會的教主和僧正並且常在這類團體的董事

會中佔據重要的位置。

我們現在轉來說這時候科學的地位：黑暗時代實在無所謂『科學』，到了中古時代『科學』也不過是許多人的點綴品，所以『鍊金術』(alchemy)就是盤據當時人民腦海裏最時髦的一種科學；研究求『點金石』和『長生不老藥』就是當時科學上努力的目標。可惜這種科學實驗都帶有許多神秘的意味，同時記載這些結果全都用些隱語，很難得一般人了解。所以當時騙子和流氓活動的機會非常之多，神通也非常廣大；無不借着這種『鍊金術』作為炫世感人的利器。雖然有幾個天才之人還在篤信真理，真實來做學問上的努力；究竟很多的詐徒都因此在國家和教會兩方面種下了許多罪惡。這派『鍊金術』士，結局也和主張『永遠運動』(the perpetual motion)的人一樣，完全沒有甚麼成就；雖然他們這種探討完全失敗，但在努力的過程中間無意竟得着許多重要的發現。經過這時間，研究學問的風氣纔算逐漸恢復，以

後學術的研究，漸有一個比較健全的樣子。到了這個時候，一般人纔棄掉神怪的廢話，改來採取理性的觀念。

在這些時候裏，各種研究需要的科目很是奇特：拉丁文法，修辭學和邏輯學等『三科』(trivium)爲各種學問的基礎。必要在先通曉這三科學問，纔能求其他專門的知識。

如果修習前三科已到了相當程度，然後有的纔專門來研究『神學』，『法學』或『醫學』中的一種『技能』(faculties)，以作一種有學識的職業的準備。

有的或者願意更求專門的學問，於是再來研究『算術』，『幾何』，『音樂』和天文學等『四科』(quadrivium)。這四科學問需要的標準也並不高：『音樂』差不多只是教堂裏用得着的和聲和唱歌；『天文學』也只限於教堂裏復活節日的計算。至於『算學』當時的工作大半也只是寺院或類似教會的機關需要的統計的知識和技能；

除此以外，也不過用來製定或統計教會的曆書。羅革培根(Roger Bacon)就是十三世紀後期在牛津大學講學的一個法西斯派教士，他是當時有數的學者。但是他告訴我們說：他的學生讀到歐几里德『幾何學』前五個定理以外的實在沒有幾個。他自己雖然是當時具有真實科學的眼光的一個有數人物，他的學生的算學知識仍是這樣的淺薄，可見當時的科學實在幼稚得很。這段時期，社會上一般的科學程度固然很是淺薄，可是羅革培根和亞伯杜馬路(Albertus Magnus)，表現的知識，仍舊能夠和別時代的學者相頡頏。他們就是在複雜的『算學』方面雖然有種種不便——例如工具不全和記錄的經驗缺乏等——可是他們貢獻的研究結果，已經足夠後人佩服。尤其是在當時不重科學的精深研究的社會背景中，他們能夠超脫一般人故步自封的境界，有這樣成績，實在是這個時代中一種特異的光明。這時代的一切研究自然都受過政府和教會的檢查；幸而當時『玄學』家沒

有認為異端的誤會；不然，這點僅存的光明也將有被摧殘的危險了。

自然，在這樣一種環境裏，『算學』的研究難望有甚麼高深的進步。甚至於羅革培根雖然能有勇氣這樣明白樹立科學研究應走的道路，也不免染着一點時代流行的『迷信』色彩。他和當時星象家一樣，相信星象影響人體。還有，他在一本書裏發表過一段意見說：大概只是由於幾度變遷，『自然』纔不再繼續產生金鏞，但是另自改造成地中現有的許多賤金屬來彌補。這種說法也難怪他或許就能代表當時一般流行共通意見。

在這樣一個迷信的時代，民衆無知無識，支配社會的只有腐敗現象，神權和君權。但是學術的研究雖然淺薄，還能在這種極端的時候繼續進行，實在應該感謝當時幾個光明學者。這時候中國的『印刷術』還沒有從東方傳進去，交通和傳達的機關很缺乏，所以阿拉伯的成績和學說也很緩的傳進歐洲。不過，因為商業發達，東方民族和西

方民族常在貿易上接觸，所以無意中西方商人計算都採用阿拉伯的新記號；後來及至十五世紀這種記號遂通行歐洲全部。還有一件最值得注意的事就是當時佛洛稜斯(Florence)的商人，已經採用現在稱爲複式(double-entry system)的『簿記術』。除此以外，就是票據等類的東西也都很有通用，甚至近代商業上的各種手續，也可以說是從這個時候開始實用。

這種學術上無知無識的空氣到文藝復興(renaissance)運動以前纔變換過來。這時候社會上特別表現一種新鮮空氣，當時學者打破了古典思想；把一切古代的學說和著作都放在新基礎上，用新時代的方法來研究。因此，一切科學的研究纔從此離開單純的直覺和空想，著重精密的實驗。這種變遷實在是科學史上最值得注意的。

第七章 『文藝復興』運動中的 『算學』

『科學』是解救狂熱和迷信的毒的藥劑。

——亞當斯密(Adam Smith)——

一四五三年土耳其人佔領君士坦丁堡，希臘學術的最後中心點也就從此結束。君士坦丁堡的人民受了異族的壓迫，君士坦丁堡的思想，受了異教的摧殘，於是許多人都避到西方的歐洲本部去。但是這些難民有的就隨身攜帶著希臘偉大學者的各種筆記和譯稿，自然各種思想和學說也就傳進歐洲本部去，因此對於西方的『科學』發生一個很大的影響。還有中國印刷術由阿拉伯人和回教徒的媒介輸入歐洲，所以後此發表各種發明，比較從前特別迅速。有這兩個原因，就形成一般稱爲『文藝復興』運動的思想上學術上偉大的進步。

這個時期自然各種學術都有長足的進步，算學

方面在十五世紀是『算術』和『代數學』兩門學問特別發展。本來『算術』和『代數學』都是印度古代擅長的算學。現在經阿拉伯人和回教徒的媒介傳進歐洲，在歐洲發榮滋長。於是我們對於阿拉伯人不能不有相當的感激。最普通的就是我們常用的加減號。也是在這個時期中輸入的。實在這兩個記號的來源說起來也很渺茫，至今共有許多特別有趣的說法。最著名的一個解釋叫做『堆棧』（“warehouse”）說。這種說法認為這兩個記號的來源，由於當時的商人好用一個『+號』來表示商品過剩的重量；『-』號表示不足的重量。這兩個符號都代表實際盈虧的數目。因為商人常用這種符號表示，習慣既久，後來普通的科學工作中也就採用。在採用這兩個符號以前，算學家還用過許多方法來表示『加法』（addition）和『減法』（subtraction），但是這些方法究竟都沒有這個新方法的通行和便當了。

在這個世紀有幾個關係的人物值得我們來說的：

最著名的或者就是大藝術家雷那德達維錫 (Leonardo da Vinci)。他是算學方面也有相當的貢獻。這種工作大半和機械的問題——如槓杆 (levers), 磨擦 (friction) 等問題上『算學』的應用——等有關係。自從阿幾默德以後, 這類問題很少人提過; 所以這種應用算學上的新貢獻是值得注意的。雷那德對於這種學問並沒有很大的成績, 但是他的這種研究卻很深切影響當時的算學界。十六世紀還有兩個關係人物也應該值得提述一下: 第一個是司提芬 (Stifel) 一本小代數學的著者。他原來是奧古斯丁派 (Augustine) 的教徒, 他拋棄了他的舊信仰來和馬丁路德 (Martin Luther) 合作的。不幸司提芬相信算學解析能夠用到宗教問題上去, 他很粗率的發表了許多聖經的解釋, 例如預言世界的末日等等; 這種無謂的事業差不多耗盡了他終生的心血。

這時候第二個著名的算學家是卡當 (Cardan)。提到這個名字, 我們一定會聯想起解三次方程式

的一個特別方法來。雖然由卡當所發表的著作的表現看來，好像他是一個頭腦清晰的人物；可是他實際卻是一個天才和瘋狂結合的特例。三次方程式的解法他是從他同時的達塔利亞 (Tartaglia) 方面偷來的，後來雙方有過很厲害的爭辯。他經過一種浪漫生活以後，在剛被任爲教庭的星象家的時候，他自殺了。

在文藝復興運動的終局，我們看到有兩個重要的發展：第一個是一六一七年約翰奈批爾 (John Napier) 發明『對數』，和約翰布利格 (John Briggs) 發表第一本對數表。布氏從一六二〇年直到一六三一年死時都是牛津 (Oxford) 大學的教授。這兩個人的工作的重要實在很難形容。有『對數』幫助，任何繁難的計算都能夠迅速做出；所以無怪這種計算法從此普遍歐洲。

在未完本章之先，我們還要簡短的敘述加利諾 (Galileo, 1564-1642) 和開布勒 (Kepler, 1571-1630)；但是他們都是在天文學方面特著盛名的。

加利諾有一個時候在批薩 (Pisa) 做教授，利用批薩著名的斜塔做了許多關於落體的實驗，這類實驗樹立了近代力學研究的基礎。開布勒是第一個發現行星運動定律的，並且證明了行星繞太陽的軌道是橢圓的現象。由這兩個人的工作，牛頓就構成關於物理學的近代的新學說。

第八章 近世算學的形成——牛 頓和時代背景

『我不知道，我在世界上算個甚麼？但是在我個人方面，我不過只像在海邊玩耍的一個小孩，時刻用心來尋覓不同尋常的一個較光滑的石子，或者一個較美麗的甲殼，可是整個真理的大海放在我面前尚未發現的』

——以薩牛頓(Sir Isaac Newton)——

十七八兩個世紀在算學史上要算個最重要的時期。這個時期和前世紀都互相有連帶關係，並沒有很明瞭的鴻溝；和前述希臘學派時代的情形相彷彿。在這個時期中，雖然一切學術的發展都和前期有關，不過近世算學的新基礎卻是從此確立的。我們現在在本章裏來講明在這個時期中算學發生的一切進步。從史的方面來觀察，假設置身在當時，來考察眼前的情形：根據前述，在前幾世紀中，『算術』和『代數學』已經都有長足的進步。

至於希臘的『幾何學』由來很久，雖然已負盛名，實際上長期完全沒有進步。及至當時，這幾種算學結合，形成一種新學問的基礎——就是『解析幾何學』(analytical geometry)。

『解析幾何學』是什麼東西呢？汎言之，這種新學問就可以解釋為幾何學中的代數方法的應用。這種新的學問——解析幾何學用的方法和工具就是『坐標』(coordinates)。『坐標』的原理很簡單的在各種『圖表』如溫度，壓力和各種統計結果中已經很普遍的見到。『坐標』系包含兩條相交的無限直線；這兩條直線相交成直角稱為『軸』(axes)。在這兩條『軸』上有適當的分度，知道『坐標系』中若干點的位置，然後用『曲線』連絡這許多點就得到一個『圖表』。應用這種方法，容易作成，並且所得結果又準確，所以這種新學問後來不祇在學術研究方面，並且在專門的機械問題和建築問題上都有很廣的用途。

解析幾何學的發明普通公認為海奈笛卡兒

(Rene Descartes, 1596—1650)的功績。海奈笛卡兒最初本來是法國軍隊中的一個軍官；退伍以後，就專心來研究『哲學』和『算學』。他不僅採取『坐標系』來圖表許多應用；並且還發明用這種方法得到的曲線的性質能夠用『代數方程式』(algebraical equation)說明；反過來說，曲線上各點

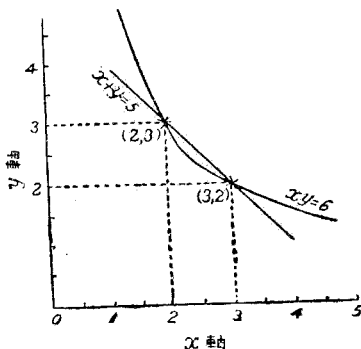


圖3

$$\begin{aligned}
 &xy=6 \cdots \cdots \text{(I)} \\
 &x+y=5 \cdots \cdots \text{(II)} \\
 &x=2, \text{ 或 } 3 \cdots \cdots \text{(i)} \\
 &y=3, \text{ 或 } 2 \cdots \cdots \text{(ii)}
 \end{aligned}$$

的代數關係可以用幾何學來解釋。這種學說用圖表來說明：則圖上所作兩個『曲線』代表『代數方

程式』(I)和(II) (注意：『算學』上『曲線』還包括有『直線』在內) 這個表式根據『代數學』的解釋，這兩個『方程式』可以用(i)和(ii)來滿足；根據『幾何學』的解釋，這兩個『方程式』所代表的兩個『曲線』相交於 A, B 兩點：因此A的『坐標值』(coordinates) 爲 2 和 3 (就是，A 距 Y 軸二個單位遠，距 X 軸三個單位遠)；B的『坐標值』爲 3 和 2。這種方法和學理推廣起來，無論在算學的各個部分都能有很大的應用。由此看來，笛卡兒的這種貢獻，在科學上實在非常重要；因此他所著的幾何學 (géométrie) 也有永久不能磨滅的價值，並不只因爲內容解釋明白纔得有盛名的。

我們簡單的說過這一點幾何學的發展，現在轉來敘述科學界的泰斗牛頓爵士 (一六四二——一七二六) 牛頓是林肯歇爾 (Lincolnshire) 地方的一個小農夫的兒子。本來家庭的環境很不佳，命運已經註定他應該走他父親的路上去的。但是他在格蘭黑 (Grantham) 小學校求學，已經表現

出偉大的發明的天才。當時他雖然還年幼，但是已經能夠製造出各種特別的簡單的機械，這些地方使他的教師和他的家庭都很驚奇。所以後來他們就決定繼續送他到劍橋的三一學院（Trinity College）去求學。他在這個學院居然能夠很迅速的學完一切必修的課程和書籍，因此不久全校都公認他有過人的聰明和偉大的能力。再幾年後，他的教師巴洛（Barrow）把路加（Luca）大學的講座也讓給他這個超等的學生擔任。牛頓擔任這個講座共歷十八年。他在這裏和他的學生在許多門科學上做了許多的研究，發表了很多的貢獻。他的知識特別淵博，差不多各種學問沒有不和他發生關係的。同時差不多他對於各種學問很少沒有貢獻的。他在『光學』方面，發表三稜體的現象——就是一個光線通過一個透明三稜體，屈折後就分析成各種單色，形成一個『光帶』（spectrum）——應用這種現象也就是他對於『虹』的現象的解釋。又因為他注意研究星的運動和宇宙的現象，

他發明一種新式望遠鏡，用來觀察天體的運動。牛頓在畢生的研究事業中，消磨很多時間來討論這類問題；所以他對於『天文學』發表了許多重要的貢獻。他得到的重要結果；很有幾個值得注意的。

我們現在先來提兩個問題：第一個問題是，天體運動的解釋是怎樣的？第二個問題是，太陽和各星球所發的光線怎樣達到地球的？當時牛頓做的許多工作大部分就是用來解釋這兩個問題的：由第一個問題引起『重力』(gravity)和『重力作用』(gravitation)的研究；由第二個問題，產生他的光的學說。

牛頓關於光的學說，當時有許多年在科學上佔過中心位置；不過後來經實驗證明這種學說並不大健全，地位纔從此逐漸失墜。牛頓的光學究竟怎樣解釋呢？假如一個發光體，例如太陽發射出許多成一列的『分子』(particle)或如普通稱為『原子』(corpuscles)來，這些『分子』和眼睛接觸就發

生光的現象。牛頓根據這種假說，發表光學上許多著名的定律：例如反射作用 (reflection) 定律，屈折作用 (refraction) 定律和分析光線爲『光帶』的分解作用 (Decomposition) 定律等。有了這些理論，當時學者研究光學理論減少許多麻煩。

關於光的來源共有兩種學說：——第一種稱爲『分子說』(theory of particles)；第二種稱爲『波動說』(theory of wave-motion)。『分子說』就是牛頓主張的學說，這種學說解釋光的現象由於實在物質原子發射出來。『波動說』解釋光的現象由於一種假定充滿全空間的『以太』(ether) 物質的『波動』(wave-motion) 發生的。胡金司 (Huygens) 在一六九〇年詳細發表這種『波動說』的主張。後來兩派理論發生長時間的爭執。牛頓『分子說』的主張在先本佔優勢；及至十八世紀的終局，楊氏 (Young) 和佛奈爾 (Fresnel) 的研究和實驗的結果發表出來，一般學者遂拋棄『分子說』的主張，共同承認『波動說』有科學上真實的

價值。

牛頓發表過一部最有盛名的著作，就是格致原理 (Printipia)，這部著作包括有他在重力學說 (theory of gravitation) 方面和重力學說在天文學與力學上的種種應用的方面的一切成績。在學術上的價值實在也用不着我們來多說。這部著作所有的中心主張很長久的維持到十九世紀末葉；這種著作也同樣地成爲研究『物理學』和『算學』的人不能不學的基本書籍。

牛頓根據『兩個物體間有一種與兩物體間距離成反比的力互相吸引』的假定，證明開布勒相信行星沿橢圓軌道繞太陽作運動的主張是準確的；同時他再進一步來詳細研究行星運動 (planetary motion) 和潮汐與月運動的關係等類現象。他的工作還沒有止於此點。本來事實上也常遇到，學術上這部分有發明就連帶那部分也有發明。所以牛頓在研究『力學』和『天文學』的工作當中，又附帶發表許多和方程式論 (algebraical equations)

有關係的結果，這些結果增加當時算學的知識不少。並且又因為研究這些關係的結果，就引起『微分法』(calculus)的發明。牛頓當時稱這種方法為『變動法』(method of fluxions)。

『微分法』的發明實在是當時學術上最大的貢獻之一。有這種『微分法』的方法，實在是以後科學家應付他們目前各種問題一個最強有力的武器。牛頓雖然在他著格致原理時就已經完全說定『微分法』的一切原則，但是他這部著作中討論的仍舊還應用幾何方法，並不是解析方法。他採用的方法和記號就是現在英國學校和著作都通行的。自從他死後直到現在，英國人沿用他的研究，來做成他們關於這種學問研究的基礎。

『微分法』的基本觀念是怎樣的呢？要解釋這個問題也很容易明白。現在先來說一說『函數』的定義：——假設有兩個數在變化：一個數變化如果能夠影響另一個數對應的變化，這兩個數有的關係就稱為『函數關係』(functional relation)；

這一個就是那一個數的『函數』(function)。舉一個例來說明：假如圓的半徑和面積。現在如圓的半徑發生變化，同時圓的面積也一定發生變化；質言之，圓面積就是圓半徑的函數。這樣兩個數量變化的『量』的比稱爲『微係數』(differential coefficient)。故設數 B 爲『變數』(variable) A 之『函數』。今如變數 A 在甲時，對應函數爲 B_1 ；又在乙時爲 B_2 。那末 B_2 和 B_1 之差與『變數』 A 在乙時和甲時之差的比稱爲差比 (ratio of difference)。如果甲乙的差異爲無限小時，那末前述的差比的極限就是『函數』 B 的『微係數』。計算這種係數的方法稱爲『微分演算』(differentiation)，和此相反的方法就是『積分演算』(integration)。「積分演算」就是已知『微係數』，求原來數量的變化的演算；質言之，即求原『函數』的方法。「微積分」(calculus) 就是我們研究正繼續變化的數量所用的方法；得有這種方法幫助，我們可以研究無數重要的科學問題。

還有，關係這種『微積分』方法發明者的問題，在科學史上也是一個著名的爭執，並且直到如今還無從解決。大陸派學者公認德國大算學家來本之(Leibnitz, 1646-1716)最先發明『微積分』的原則和方法；但是英國學者又認為是牛頓最先發明的。究竟誰是誰非，至今也難判定。不過事實上來本之最先發表這種學問；並且他用的方法和一切記號也比較牛頓主張的簡明。現在除英國方面因為無謂意氣上的成見尚沿用牛頓的記號外，其他各國都已普遍採用來氏的主張了。

德意志各邦中漢諾威(Hanover)王國的大哲學家來本之，他在少年時代是蘭布齊(Leipzig)大學特出的學生；畢業後，在梅茵(Maine)自由區擔任外交職務，後來纔成為漢諾威王國的官吏。他不僅是學術界公認的大哲學家，同時，也是個最有盛名的大算學家。他在一六八四年發表論文宣布這種新方法和新記號。這個時間實在牛頓在英國發表以前的三年。說到微積分方法發明的爭

執，大衛布列士特(David Brewster)在所著的牛頓評傳(The Life of Newton)裏有下列公允的一個斷案：

(一)牛頓本來在一六六六年就已經發表『微分法』的方法；不過其中所用的記號很不完全，並且這種方法的基本原則在一六八七年以前並沒有公開宣布到社會上來。

(二)來本之在一六六七年將他發明的微分方法和比較完全的新記號通知牛頓；至於公開發表在一六八四年。

前邊這個意見實在也是如今科學界共同的主張。

一六八九年牛頓代表劍橋大學當選為國會議員，直到他死前一年，因為健康太壞纔放棄這個選區的代表資格。一六九五年他脫離劍橋，就任明特(Mint)的校長；在這個地方不幸因為月的研究，和皇家天文學專家佛拉斯提(Flamsteed)意見不和，竟沒有做出甚麼成績來。一七〇五年安娜皇后(Queen Anne)賜他爵位，在劍橋的三一學院

舉行典禮。最難得的是皇后和太子眷屬都步行到新市(Newmarket)來參加這次典禮；一切招待很是隆重，後來發生一段笑話，大學本部因為這次招待費不敷，不得已還向外告貸五百鎊來彌補這筆虧欠。

牛頓死於一七二六年，葬在英國最有名的威斯妥明寺(Westminster Abbey)，葬儀非常隆重，英國各界並且在寺裏爲他建立了一個莊嚴華麗的紀念碑。

在十七世紀很能夠看到一種充滿熱忱和毅力的學術研究的精神。因為這種風氣的影響，一六六六年英國在倫敦設立皇家學會(Royal Society)，約莫同時意大利和法國巴黎也有同樣的組織成立。從此以後，科學研究成爲國際公開研究的事業，各方面互相交換通訊和公開討論他們研究的結果。這種活動差不多是這時候學術上最時髦的事體。所以實際上，這時候纔算真正科學研究的起點。由這個時代起，再過一百多年，中古遺留下來的

思想和觀念等陳腐的勢力已經完全打破，一切社會上和學術界上纔從此實用新時代的研究方法。

第九章 算學的理論和實務

沒有熱忱，就沒有偉大的成功。

——愛默生(Emerson)——

自從牛頓死後，差不多有五十餘年，全世界都採用牛頓的學說；加以研究。但是，不幸因為牛頓派信徒和來本之派信徒雙方意見爭執過深，很在影響當時的一般科學家。所以，大陸派科學界雖然已經採用比較精密的笛卡兒發明的解析幾何學的方法和比較進步的來本之主張的微分法的記號；但是英國派的學者還仍舊沿用牛頓主張的幾何的方法和記號。直到十九世紀初葉，這種成見纔算從此打消；同時各派見解也可以自由交換，結果形成近代科學的新基礎。

『算學』發達到十八世紀末葉至十九世紀期間，所有各種理論已漸高深，一切表式也已經十分繁複而且專門。要是完全不用一點科學的公式和方

法，根本就不能把這時期算學的發達史簡單說明。但是本書限制用到一切公式和專門術語，所以我們現在只能把這個時候的幾處特點提出，讀者藉此或許可以從當時『算學』的各種情形上得出一個普遍的觀念來。

我們如果換一個不同的立足點來說明當時算學發展的情形，自然又比較純從專門學術上的研究一方面來講容易一點。在十八世紀以前普通認為『算學』這種學問的價值祇是在學術研究方面，並沒有人留心到『算學』在『自然』上的一切應用。及至十八世紀，社會的需要和欲求擴充，一切學術的研究方式也完全變更；於是許多人研究學術都取一種比較寬泛的眼光，自然『算學』尤為顯著。從此許多人對於『算學』都向着兩條幹路去努力

——

(一)完成『算學』這種學問的本身，因而形成應付眼前許多問題一種強有力的武器。

(二)用『算學』到各種能夠擊算學方法來應付和

解決的學問上去。

這兩條幹路中，第一條可以說屬於『純粹算學』(pure mathematics)方面；第二條可以說屬於『應用算學』(applied mathematic)方面。我們把『算學』類分爲『純粹的』和『應用的』兩種，實際上也不會妨礙『算學』的統一和完整。

還有，自從十八世紀以後，社會經濟組織的方式已經很有進步，同時教育的思潮也異常高漲。各種教育事業和教育機關特別增多，所以當時一般人研究『算學』的機會也特別普遍。並且，工業上的印刷機的發明，和文化上定期刊物以及雜誌等類的創設，都使科學上發明的結果容易公開到社會上。有了這許多方便的原因，算學的研究比較從前能夠多有人來努力。不過在這段時期裏，所有的大算學家無論在『純粹算學』方面或『應用算學』方面都同有相當的貢獻。由這種事實看來，足見十八世紀以後科學研究普遍都是理論和實務雙方並重，這也是當時的思想和以前的思想。

最顯著的差別。

在科學上對於理論和實務雙方都有貢獻的——例如尤拉(Euler, 1707-1783)。尤拉是瑞士的大算學家，也是當時科學界傑出的人物。他一方面在『代數學』上做了許多貢獻和發表『算學解析』(mathematical analysis)的方法；可是一方面又從事研究『液體動力學』(hydrodynamics)裏的液體的運動。液體靜力學自從阿幾默德發現『浮力』定律以後，千數年來很有長足的進步。再增加尤拉液體動力學方面許多結果；這些結果形成近代潛艇飛機等的應用，和引起特別注意的『液體力學』的基礎。另外他還有許多『天文學』研究上的重要貢獻，例如月表的製法等。因為他在多方面都有偉大的成績，英國議會所以通過贈他一個英國的名譽學位，以表彰他這種的努力。

這時候還有兩個法國的大算學家：就是拉果蘭諸(Lagrange, 1736-1813)和拉普拉斯(Laplace, 1794-1827)。他們在『純粹算學』方面很有許多

重要的結果：例如『代數學』中之『方程式論』(Theory of Equation)，『行列式』以及『解析學』中之『微積分』、『級數論』(Theory of Series等。同時他們在『應用算學』方面，如『天文學』、『力學』等實在也有特殊的貢獻。我們因為內容限制，在這裏不能詳細來說明他們的成績，不過我們可以承認他們都是最精邃的算學家，同時在『天文學』，『力學』和別的科學的研究上也有相當的貢獻的。

我們在這段時期中算學除掉本身有極度的發展外，又因為各種需要，已經逐漸開始和別種科學發生關係。在此以前，別種科學都沿着各自的進路發展，互相間沒有關係的。後來算學上的記號的簡便和方法的精密，已經為學術界共同承認。因此，結果幾乎『物理學』和『化學』等類科學各個部分都受了『算學』記號和方法的影響。直到現在，實在沒有任何一種科學今後在研究的工作中用不着算學的。甚至就是關於生產，死亡和

婚嫁等諸如此類的枯燥無味的統計，到得算學家的手裏也都會變成有意味的題目。但實際這些統計材料和國家，社會以及經濟各種生活，卻有非常密切關係的。

當時『算學』這種迅速的發展，結果就促成『算學』的研究範圍的擴大。以後，算學家研究的趨勢不惟在『算學』的定理和演式上用功夫，並且還特別注意最重要的『算學』的基本理論和方法。這種研究差不多也是當時一般大算學家共同努力的對象。在這段過程裏，考齊(Cauchy, 1759-1857)和當時的一般科學家表現很偉大的成績。他們因為研究算學基本的理論和方法，就創立了『微積分』的基礎和各種應用的原則。這種新學問在先雖有來本之和牛頓發明，但是直到此刻，纔完全確定成一門新『算學』——就是『函數論』和『算學解析』。

最後，天文學有個大發現也是值得我們敘述的，就是海王星(neptune)的發現。多年以前，因為

天王星軌道上發生衝突現象，科學界就懷疑天王星（Venus）附近還有別個行星存在。後來又因法國學者里伏希爾（Leverrier）和英國學者亞當（Adams）同時發現這種衝突現象的原因，更引起當時科學界嚴重的注意。但是他們解釋海王星發現的這種特別現象多是應用『算學』的研究。他們假設在天空某一位置安置一個望遠鏡，在一定時間以內利用這個望遠鏡來做理論的和計算的各種測驗。因為這樣由假定實驗得來的結果恰和星體實在的現象一致，所以肯定『海王星』的存在。但是這種發現實在可以說是算學應用的成功。這種算學的實務發現，增進算學原來的地位不少。

在這個時代中，學術本身已經比較前百數年有很大的進步；並且當時的科學界的眼光和思想都發生一個極嚴重的變遷。當時已經沒有中古時代無意義的武斷的觀念，一切空想和投機完全放棄，更沒有如鍊金術士一流人的各種欺人之談了。

這時代的各種學術一方面注重純理的邏輯的推

論，一方面注意實際的科學的應用。尤其是在『算學』上更表現這種特色。所以這段歷史實在非常重要。有一個學者批評這個時代說：『這是自來的一個大關鍵，在此表明：物理科學的真理絕對不能憑武斷來研究，自然界的系統更不能純從心裏製造出來；研究的工夫只有忍耐的觀察和仔細的實驗纔能完成的。』

到迷信的和傳襲的思想上和實務上的一切束縛解開之後，學術自然會發生實際的進步的。所以如果根據此點，十九世紀的學者表現的知識和能力，可以說由於時代背景的影響，並不是當真這個時代的人比較別時代的人特別高明。總之，在一個思想自由的環境裏，真實的科學研究自然會發達的。但是反過來，在一個神祕的和迷信的時代裏，研究的精神就不免感受多少的摧殘了。

第十章 能力

科學是連帶着理性的真的判斷。

——柏拉圖(Plato)——

十九世紀的最重要的成就之一，就是構成一個精確的『能力』的理論。雖然這時候以前，毫無疑義的許多科學家已經有過關於支配『能力』的定律的知識，但是這種知識在十九世紀並沒有發表過一點。

這世紀的開端就有工業革命發生。棄掉陳舊的製造方法，設立許多工廠，用機器替代了舊時遲緩的手工勞力。新都市工業化的結果，使鄉村工業趨於衰滅。這樣深刻的一個革命，影響當時人民底社會的和經濟的生活很大，但是這種影響也一樣的推行到科學的研究上來。最顯著的就是『能力』理論的擴充。表現『能力』最普通的現象就是『熱』。工業革命的主要動機，就是採用蒸

氣機關 (steam engine)。蒸氣機關的用處就是在使『熱能』化爲『動能』。因此就需要明白火爐所供給的熱和機關可做的工作量間的關係。

我們在未說這個問題之先，應該明白『能力』和『工作』這兩個觀念。『能力』和『工作』是構成人類日常生活的一種要素。但是究竟甚麼是『能力』呢？甚麼是『工作』呢？我們現在說的『工作』的定義就是能發生效果的稱爲『工作』(work)。能做工作的力量稱爲『能力』(energy)。各種能力的效果都用他所做的『工作』來量。工作量普通的單位是『呎磅』(foot-pound)。『呎磅』是甚麼？就是舉起一磅重的東西到一呎高的位置所作『工作』的量。我們舉一個例來說明『工作』和『能力』間的這種關係：我們常見過許多磚瓦從地上用滑車或類似的工具搬運到屋頂上去。旋轉絞盤就能夠把許多不能移動的東西舉起來。究竟舉起或搬運這些東西要做的工作量怎樣呢？計算起來也十分簡單，牠是和重量(磅)和移動的距離

(呎)成比例的。這種工作量算出的結果爲(呎磅)，就是工人供給的肌肉能力的分量。

各種『能力』並不是同樣的。因此許多學者用各種方法分爲若干種類，有的將前面的例子用來解釋『能力』分爲兩類——就是『有效能力』(available energy)和『散失能力』(diffuse energy)。『有效能力』就是用來即刻能發生機械的效果的；『散失能力』是不能這樣用，並且實際上是沒有用的。工人舉起石頭的能力不完全用在舉的工作上；有些消失在機械各部分的磨擦上，和關節發熱發聲等的工作上，這些就是『散失』能力。通常多半類分『能力』爲『運動能力』(kinetic energy)和『位置能力』(potential energy)兩種。『運動能力』是甚麼？『運動能力』就是一個物體因爲牠本身運動而具有的：——例如用來移動重物的蒸氣起重機的能力。『位置能力』是甚麼？『位置能力』就是一個物體因爲牠的位置，或者因爲牠的性質而具有的：——例如開緊錶的法條使錶走

的能力。還有混合硝石，硫黃，木炭三種物質就構成一種能生爆發的化學變化的混合物——火藥——。這種爆炸，就是這些混合物有位置能力的表現。這樣分類雖然比凱爾文爵士分爲『有效能力』和『散失能力』的分類法普通些，但是也很難說兩種的優劣。『運動能力』和『位置能力』很容易互相轉變。例如我們開鐘，就是用『運動能力』做加緊法條的『工作』；這種『運動能力』就變成法條儲蓄的『位置能力』。法條的『位置能力』後來再逐漸放鬆，又變成『運動能力』來推動機器。如此循環就形成鐘錶的運動。

不過各種『能力』上的變化都是受偉大的那種『能力不滅定律』(principle of the conservation of energy)——科學上兩大基本定律之一——的支配。所以根據此點，宇宙間的『能力』，既不能增多，也不會減少。牠是繼續不斷的變形以產生自然的變化和各種現象。牠在這裏集中，就在那裏消散；數量上永不變更。有人批評這個定律說：

『這個定律是近代物理學最真實的綜合，並且各種實驗和物理上各種原則的應用證實牠的真實；實在物理學沒有一部分不和牠有關係的。』牛頓對於這個定律有些主張，和他同時的學者也有類似的意見，不過到一八四二年，馬耶 (Mayer) 纔發表完全的更普通的解釋。

但是『能力不滅』定律還是不能完全包括一切自然現象。所以我們再進而說到第二個支配宇宙間發生的各種變化的偉大的原則；這個原則就是一八五二年凱爾文爵士發表的『能力消散定律』 (principle of the dissipation of energy)。

一八四〇年英國滿卻斯登 (Manchester) 地方的詹姆士布利司可朱爾 (James Prescott Joule) 發表『熱』和『能力』的性質一樣，同時各種『能力』都能變形成『熱』的主張。另外他還證明『熱力學』 (thermodynamics) 上一個最重要的事實。就是能力的量和所發生的熱量間有一定相當的關係，這種關係通稱為熱的機械當量 (mechanical

equivalent of heat), 但是物理上仍舊有一種不可解的現象。——雖然無論那種機械的『能力』都能全體改變做『熱』, 可是倒轉手續要變『熱』為各種機械『能力』實際就很困難; 並且如有一定量『熱』, 絕對不能使全部『熱』都來做機械工作。能用來做工作的機械『能力』的比例叫做能力的『有效率』。(availability)。現在我們要說這些觀念怎樣適合於『能力不滅』定律。宇宙間能力的總量是有定的。但是因為常發生無數的變形和各種『能力』因受粗接觸面的磨擦和各種抵抗常有變為『熱』而失去的趨勢, 所以實際上宇宙的能力的『有效率』常在減少。這種『能力』消失的解釋究竟合理麼? 我們可以說: 這種解釋是對的。不過這種消失的現象實在很遲緩, 很細微, 甚至雖然能力不斷消失, 幾千年後世界也並不覺得到甚麼。

我們現在來簡單解釋這種能力變遷是怎樣的情形: 近年來相信這是一種連續的現象; 但是後來原子構造的研究已經使這種觀念有點改變。科學

上相信『原子』的構造 (structure) 是一個帶陽電的『中心核』(Central nucleus) 周圍繞着許多帶陰電的質點叫做『電子』(electron)，沿圓的或橢圓的軌道進行，好像行星繞着太陽的運動一樣。不過和行星不同的是有些電子有交迭的軌道 (alternate orbits)，他們都可以沿着這軌道運動的。並且，還有他們能夠偶然從這一個軌道可以『跳』到那一個去，每一跳就發射出『能力』；這樣發射出來的『能力』的量，成爲一個固定單位的倍數——這叫做『能力的分量』(quantum of energy)。好像物體由不能分的單位叫做『原子』的構成一樣『能力』也是由『原子』發生的；凡有變化，分量常是一定的。這樣一種觀念在最近科學的見解上發生出許多的變化。不過雖然現在已經有比較詳密的實驗，和其他證明來維持這種主張，究竟全部真理還有尙待研究的。所以我們就此拋開再回轉到本題來。

我們已經說到的這兩個基本原則好像到現在已

經完成。不過實際究竟能否說明宇宙的全體現象也還難置答的。科學上的發明近年來很快的一個跟着一個。在最近的將來也許我們能夠得到實現變化各種『能力』的機械的學理；這就有待於我們學科學的人努力了。

第十一章 圓周率

圓，徑一周三。

——周髀算經(商高)——

我們在前幾章已經說過近代算學的形成和今後的趨勢；現在本來應該說明『算學』在二十世紀發展的情形和介紹這個時代中的一切新方法和新觀念。但是在未說到這些之先我們還得認識一個常見的量——『圓周率』。現在算學上代表這量都通用希臘第十六個字母『 π 』。究竟『圓周率』是甚麼？就是指一個圓的周界與其直徑之比而言；不過在高等『算學』的許多部分裏，『 π 』完全用來常做一數量。我們現在先從初等一方面來研究『圓周率』的意義。

爲什麼數目中包含有這個奇怪的數目『 π 』呢？要解釋這層懷疑，我們可以把社會組織來比方數目。社會之構成原是由於許多人的結合，這些人

各自有他們獨立的『人格』，同時也共同具有一些同點。但是社會的人羣中常有極少數的人，雖然也具有社會各分子共具的特點，可是他們自己表現的異點又非常顯著。數目中有『 π 』存在的理由與此完全類似。其實我們嚴密分析『 π 』的性質和普通的數目也沒有很大的差異。

我們在前幾章業已說過：『幾何學』是算學中最早的一種；古代學術界對於這門學問已經有很豐富的知識。這類知識最普遍多半是關於簡單圖形部分；而當時最注意的簡單圖形莫過於『圓』。所以他們從『圓』的各種研究就發現『 π 』的許多性質。關於『圓周率』『 π 』的數值的估定，古代東西文明各國都有過許多努力：巴比倫人和猶太人估定圓的周界為其直徑之三倍，所以定『 π 』值為『三』。再從愛默士遺留的原稿看來，當時埃及人在金字塔的工作中用的『 π 』值為三·一四一六，這個值已經是實用上認為比較準確的值。現在粗率一點，常取『 π 』值等於 $\frac{22}{7}$ ；如果精確計算，則得

$$\pi = 3.14159265358\dots\dots$$

復次，希臘古代著名的三大問題中有一個是討論『圓化方』的就是作一個正方形，面積和一個已知圓相等的問題。這個問題實際上就等於用幾何方法來定『 π 』的值。希臘人雖然始終沒有解決出這個問題，不過阿幾默德卻已經用幾何方法表明過『 π 』所在的極限。還有安迺米求得『 π 』值為三·一四一六，實際已很接近真值。印度的『算學』對於此類數目卻沒有這樣的成就。我們從他們的著作看來，知道他們實在只能求得『 π 』值為 $\sqrt{10}$ 。中國算學上關於『圓周率』的發明另自成一系統。自從周髀算經定『 π 』值為『三』起，若秦若漢都有陸續的推求。及至晉代，『圓周率』已得為小數值下許多位。（參考科學雜誌）。

各國承受古代的遺留以後，又經過許多努力，纔確定這個神祕數目的值，不過這個值的結果仍是個不盡值。後來布利格（Briggs）和奈比兒（Napier）發明『對數』（logarithms），應用對數的

方法研究這個數目從此格外容易；不過在當時的計算上『 π 』值求到十二位以上仍是用不着的了。後來朗白特(Lambert, 1728-1777)證明『 π 』確是一個不能算盡的數目；——換言之，就是，這個數值到底不能定出。

及至十八世紀，尤拉(Euler, 1707-1783)纔將『 π 』這個記號用到各種教科書裏去。再到一八八二年林德滿(Lindeman)發表『 π 』不能為任何『代數方程式』(algebraical equation)之根後，『 π 』的研究就從此結束。

第十二章 科學上的新觀念

科學就是有組織的知識。

——海爾巴特斯賓塞(Herbert Spencer)——

自從古埃及以後，西方文明繼續至今將及三千多年。雖然政治方式，經濟組織，社會制度以及普遍的思想都經過無數的變遷；但是綜合起來實在只形成三個段落。在這樣三個段落中，每個時代各自有獨立的宇宙觀，和各種方式及發展。不僅社會，政治和經濟三方面發生顯著的變化，就是文化上學術上也各有異樣的特點。這種每個時代學術思想上發生的重大的變化，實在也就是支配各時代的基本動力。這三個段落的分野究竟怎樣的呢？我們可以說：第一個時代完全被『地中心』的觀念支配；第二個時代實在受『太陽中心』的觀念所影響；第三個時代就是今後，正是偉大的『相對論』(relativitat) 學說和『時』『空』四度觀

念發展的時候。『相對論』的發展不惟影響今後之世界形成一個新時代；並且否定牛頓舊力學的根據，進而開闢一條新途徑；這些都值得我們來特別注意的。所以要是不說，一說這種二十世紀偉大發現——『相對論原理』，本書還不算完全。

『相對論』的基礎有兩方面：一種是哲學的方面；一種是算學的方面。這種學說在哲學方面的基礎雖然重要，但本書限於篇幅不能論及；再在純粹算學方面來研究，也因內容複雜而且十分困難，不能多說。我們現在只能把這種學說特別重要的幾點概括說出。至於讀者要想得較深的認識，可以參考更完全的專書（商務書館有此類譯書數種出版）。如果詳細研究之後，自然可以得到這種學說更豐富的知識。

第一層，我們要討論一個最普通的概念，——就是『長』的概念。『長』是甚麼？我們平常已經熟習這個字和它的意義。最明顯的事實就是在我們想買布的時候：我們回想布店的情況和夥計在我

們面前用尺來量我們選好的那捲布的樣子，這樣我們就得到用一條尺量出來的幾尺布。

現在我們要研究的問題是：究竟那條尺是否永久一樣長？換言之，我們肉眼雖不能察出變化，甚至顯微鏡也不能看出，本來實用上也無須乎顧到這個問題；不過從純粹學理的觀點上立論『長度』的變化實在很有關係的。設如我們取一根棍先在南北方向刻成剛好一定長度；然後轉成東西方向。試問這個『長度』有無變化呢？我想讀者毫不猶豫的答復說『沒有變更』。但是這不過我們不能用現有的方法查出一個變化來。因其不能查覺變化，卻並不能決定就沒有變化。再假如這條棍順着他的『長度』方向以最高速進行，它的『長度』也能夠不變化嗎？現在我們把這條棍照着地球運動的方向放好，用最高速跟着地球移動，試問表現的長度又將如何。一八八四年米齊生（Michelson）和莫朗（Morley）因為別種目的的研究，實驗發現一個結果：——一個物體在運動時，一

定向牠運動的方向稍微縮短。這種現象稱爲菲刺蓋拉德『縮短』(Fitzgerald contraction)。這種『縮短』是極微細的，以地球的直徑來說尚不過一吋的變化；所以實際上可以不管。如果我們研究宇宙間最大的距離或一個『原子』(atom)裏『衛電子』(satellite electron)的高速度時，本體既然很大，所生的影響卻不能不注意到。因此，剛纔所說根的『長度』，沿地球運動的方向安放和放在其他方向時也有差別了。

前邊已經把幾千年傳襲的長度不變的話推翻，現在再轉過來研究『時間』問題。『時間』這種觀念，老早就已經存在人類的知覺中。例如我們把一壺冷水放在一個煤氣管上，我們可以看出：第一，煤氣發焰；第二，壺水沸騰。由煤氣發焰到壺水沸騰中間的間隔，就構成『時間』的觀念。若要就此觀察記錄出它的結果，只要用一個鐘來量這需要的『時間』距離。現在先設想地球是靜止的，固定於一定空間中。設在這地球上有一個觀察者用

一壺冷水，一個煤氣管和一個鐘，來做實驗，如前例測量這壺冷水達到沸騰時所需要的時間。又設另有他組同樣的壺盛同量的冷水，相似的煤氣管和鐘；以一定的速度從地球離開作運動。這個觀察者同時也來測量這組所需的時間。根據科學上的實驗的證明，這個固定觀察者一定會發現在第二個情況裏的『時間』距離比第一個情況裏的『時間』短；恰像前面『空間』觀念中度量的棍會發生『減縮』一樣。

由此歸納起來，『時間』和『空間』都是相對的，並不是絕對不變的東西。這兩個觀念都受運動的影響，不過人在普通現象上難以查覺而已。因為這兩個新觀念發生，『算學』的基礎根本上感受很嚴重的影響。直到現在，科學界已經公共感到牛頓的舊力學理論實在需要急切的改正。不過我們應該要補充的：——自從菲刺蓋拉德『減縮』學說發生以來，『時間』和『空間』兩個觀念雖然需要改變，但是也不致如想像那樣急切。況且這種『減

縮』實在是極細微的；只有遇着大距離或高速度纔會發生影響的。（所說『高速度』指和光度——就是每秒一八六，〇〇〇哩——差不多的一種速度。）因此在目前的物質環境中，這種新觀念還不見得十分重要；不過今後科學事業正在發展，也許在最近的將來，社會日常生活上也普遍要注意到這種『減縮』的現象，這就不能逆料了。

第十三章 『相對論』淺釋

有學問的好研究自然，

愚蠢的喜歡安於所素。

——波甫(Pope)——

我們現在來應用剛才說過的兩個新觀念，同時來研究這些觀念如何結合在一起就形成了那通稱爲『相對論』(die relativitat)的理論。要說明『相對論』，先應該明瞭『系』(System)這個字，——它在算學上的意義比語言中常用的系字還要肯定。現在所謂的『系』，就是指具體的並且對於人做每一種實驗或度量時都很重要的各種事物。在前章我們說過一個固定的觀察者煮熟一壺水，並注意這壺水沸騰所需的時間；現在我們可以說這個觀察者，煤氣管，水壺，鐘和他所有的別種度量的東西，全體形成一個『系』。爲方便起見，可以叫做『系A』。

現在設想甲觀察者用一量尺和時鐘來研究某一個『系』S系的某一個現象。假定他在空間中的某一固定地點，來記錄他觀測的結果。又設乙觀察者同樣準備研究同樣現象在另一個『系S'』裏。再設乙觀察者和他的『系』都正在空中移動，但不自注意於此仍以爲他同他的『系S'』在地球上之情形一樣。這樣實驗所得兩種結果的記錄一定相等；並且沒有那一個觀察者能夠由他得到的結果斷定他在運動或者停止。

現在，我們再進一步假設甲觀察者從他固定位置能夠注意到運動『系』，S'和乙觀察者；同樣乙觀察者也能注意到甲的方面。這樣每人所得的結果還是相同。兩個人都一定能覺得S和S'這兩個『系』中間有一個相對的速度（relative velocity），但是甲觀察者或乙觀察者都不能由他的結果斷定那一個在運動着，除非他預先知道那一個『系』是固定的。不過我們在地球上還不能遇到前述這種『空間』中的固定位置，能夠實地做這種測量的；

所以我們知道的運動現象，還不外是與在地球外空間中的物體相對的。因此，也可以換一句話說，『絕對運動』還是不可測定的。

前述的結論再根據哲學的方式演繹，就形成近代偉大的『相對論』基礎。『相對論各論』(die spezielle relativität) 是愛因斯坦(Einstein)在一九〇五年發表一篇有名的討論。在這篇討論中，他證明在運動的『電磁系』中，米齊生莫朗實驗的一個結果——菲刺蓋拉德『減縮』實在有的。當時他雖將這種結果發表出來，並沒有引起學術界的注意。後來，他又把所得的結果演繹，增加許多證明；再進而發表『相對通論』(die gemeinsame relativität)。從此相對論的理論已具雛形。近幾年來因為愛因斯坦根據『相對論』原理預先解釋的現象多半正確，同時全個問題已經科學界詳細研究，結果我們從前所有物理學上的一切概念都逐漸採用他這一種新奇的方式來解釋了。

現在，這種學說已經在許多物理學問題上有廣

大的應用。甚至最根本的『重力』——『地心吸力』——問題也陸續採用『相對論』的解釋。本來百餘年前科學家就在研究在宇宙中發生作用的各種力的解釋。又因『電磁力』（electric-magnetic forces）和『重力』（gravitation）是支配宇宙現象的兩大主幹，所以一切研究都集中於『電磁力』和『重力』的解釋上。十九世紀的物理學家都用『以太』理論來解釋『電磁力』現象，他們說：空間的全部都充滿一種假想的物質，叫做『以太』（ether）。如果『以太』的分佈成緊張狀態，這樣就發生出力來；這種力就是『電力』（electric forces）和『磁力』（magnetic forces）。自然沒有人離開過這種『以太』物質，究竟可能與否也很難說定。法拿德（Faraday），克那馬克思威爾（Clerk-Maxwell）和他的後起者，根據這種『以太』物質幾種假定的性質，發表出一個關於電磁現象很完全的解釋。不過用這種『以太』的假設，根本上也有一個很難打破的障礙。在這種『以太』理論中，可

以解釋電磁現象的『以太』，卻不能用來解釋重力現象；反過來說，能夠解釋重力現象的一種『以太』，又不能說明電力現象。因此，『以太』理論在當時已經表現出顯著的弱點。

直到最近『相對論』發表；科學家纔用『相對論』的理論代替『以太』理論，戰勝這種不完全的困難，得到一個解決。明可斯基 (Minkowski)受了愛因斯坦學說的影響，在一九〇八年做成一種『四度空間幾何學』(Four-dimensional geometry of space)——就是『長』，『寬』和『高』等『空間』三度和『時間』——在這種理論中，『時間』和『空間』絕對不能分開。不過這樣一個『空間』是不能用感官覺察的。專門的算學者，可以從他的符號和方程式中表現出來。至於要想在腦海中構成這『明可斯基世界』(Minkowski-world)的圖形是不可能的。愛因斯坦在『相對各論』的理論得到這種解釋，就促成他更進一步的貢獻。於是在一九一五年發表出他的『相對通論』(die gemeinsame

relativität) 來；不過這種理論多半偏於電學方面，我們現在就不再說下去。

相對論開始最大成功之一，就是解釋天文學上的一種奇象，——水星(Mercury)軌道的運動。許多年前，里伏希爾(Levicier)已經證這個行星的軌道慢慢在變着方向；不過當時唯一的解釋認為或許是附近別個未知的星球使水星軌道上發生出這種妨礙。但是這種解釋終究勉強。後來愛恩斯坦根據『相對論』學說完全解除這種困難；甚至就是他預測出來的軌道的旋轉運動，也完全證實和實在的現象一致。

從愛恩斯坦的『相對論』學說還得到另一個推論，就是光線接近着大的物質時就要向着吸引的質量屈折的現象。這種現象，舉個例來說，如從一個遠處的星發出來的光線，經過太陽附近就會屈折到地球上來；結果這個星好像稍微向太陽方向離開原位置。這結果從一九一九年和一九二二年日食(solar eclipse)時證實，於是這個革新的意義

纔算確立了。

因為這個學說推論得出的幾個重要結果都得到肯定的證明，所以現在不少的科學家都以爲宇宙的祕藏已經開發。原來這『相對論』學說的理論，也未必就此一成不變。我們還應該抱定自然界的祕密是無窮盡的信仰來努力，不過總不要忘記黑沙爾 (Herschel) 的名言：『輕率的綜合就是科學的致命傷。』

最後我們引著名的科學家湯姆士普列斯登 (Thomas Preston) 的著作裏的一段話來結束本章——

『常有人說玄學的幻想是一種過去的事；物理學已經摧毀過它。但是因爲人的思想是活潑的，幻想還是如在泰爾士 (Thales) 時候一樣令人迷惑。也許沒有一個時代科學界所潛伏着的幻想比現在多；差不多每天在懷疑或假設的基礎上面做了許多新發現，構成而且改進了許多新的理論；但是同時各種心理上錯亂的種子也就在此充滿。主張

永久運動說的人和相信地球是平坦的人都沒有絕跡；靈魂學者和江湖派的科學家增加得可怕，檢定的醫生發財，同時真實科學的研究精神在厲害的生存競爭中受犧牲了。』

第十四章 科學的統一性

各種科學都有一個目的，就是尋求自然界的一種理論。

——愛默生(Emerson)——

前章說過西方文明的三個段落；代表每個段落都有一種偉大的學說：第一個時代就是妥迺米發表的『地中心』學說。這個學說支配當時思想幾百年。及至開布勒主張『太陽中心』說，學術思想又經過一度重大的變化。中間有牛頓力學的成就，形成第二個時期的中心。到了最近愛因斯坦相對論學說和明可斯基四度幾何理論發表，又形成第三個時期的發展。但是每個時代的學說都支配着當時的學術思想，尤其是近代科學進步，更可以表現這種事實。所以，相對論本身雖然是一種算學的觀念，但是它的原則在各種科學研究上差不多都能應用。由這種事實，我們發現科學間一個重要的特點——就是科學的統一性。

讀者設置身圖書館中，常見『化學』『物理學』『生物學』『地質學』等各種科學的記錄在書架上整齊的排列著，並且按門分開，究竟這種分開適當嗎？實際上，許多科學並沒有明白劃分的界線，勉強分開就無異蛇足。試舉一個例來說：關於氣體性質的記載，在化學書裏如定比例定律，查爾士定律等；但是這些也都可以物理學上尋得。又如『地質學』有各種白堊層的研究也就是生物學範圍內關於某種下等動物生活體的問題。所以，祇要稍留心研究，科學間相互的關係就很可明白。

復次，從前科學還沒有甚麼進步，所以各種學問祇有少許共同點，也許連一點也沒有。最近幾十年來，各種科學都有極度的發展，相互間的錯綜關係，也就比較容易密切。『算學』是一切科學的基礎，自然不在例外。

現在我們綜合起全部算學史來觀察，無意中發現一個重要事實——就是，在算學發達的過程中，每一次採用新記號，就促成一次算學上偉大的進

步；因為採用阿拉伯新記號，就有算術上的進步。十八世紀『微積分』方法發明，後來算學上採用這種新記號，就發生十九世紀許多偉大的進步。同樣，現在因為採用另一種新符號『動量解析』(vector analysis)；相對論學說的研究就特別容易。由此類推，將來只要能有更新的記號發明，現在『相對論』不能解決的許多問題，也許到那時就能迎刃而解。過去的每次進步都逐漸增廣『算學』的範圍，擴大算學的影響。那末將來新記號發明，算學進步的結果，也許會重新打破現在各種科學人爲的界限，對於自然界的神祕能有更進一步的了解啊！

朗布教授(Prof. H. Lamb)說過一段話最足以表明這種科學的統一性。一九二五年他在英國協會(British Association)的主席致詞中說：『科學史裏的確有許多這種科學會和別種科學發生許多意想不到的例子。我只說兩個特別和我有關的：我想，一般人總不會明白彈性學說在用爲一種根

本而且重要的訂正法的賴郎 (Rayleigh) 氏氣體相對重量的分類測定上有重要的關係。還有，液體動力學的算學的理論，不管有許多重要的成功，普通都分類為討論理想的流體的純粹算學之一類；這種學說自然比較精密，但是用以說明普通自來水管中的現象根本就沒有用。然而最近在布郎得耳 (Prandtl) 的手裏，這種學說居然用以改良飛機上的各力配置的關係，甚至且用以說明尚在糾紛的螺旋推進機的問題了。』

第十五章 結論

『成功不過是進步的大道上的一個計程碑——這
個旅程的終點還在很遠的。』

——阿囊(Anon)

我們在前從歷史的方面和性質的方面（換言之，即應用方面），已經將『算學』的發達約略說明，並且還介紹過幾個重要的新的觀念。讀者對於這簡短淺近的敘述或不致感到十分失望，不過有一層，我們還該解釋的。就是：研究『算學』的人有時常懷疑到——他這種研究究竟是否白費時間；還是把這努力去做解救人類痛苦的工作，那一種比較值得？要答復這個疑問，哈第教授（Prof. Hardy）在牛津大學舉行他的講座典禮時表示過下邊的意見：——

『我假定，各個研究算學的人，也像我自己一樣，常常感到無益無用的緣故發生沮喪。我並不是宣傳能夠得一個很滿意的安慰。但是研究算學

的人的生活卻完全是一般有知識的人不能享受的；尤其是有幾點印象，使我常覺得從這些地方能夠得到一點安慰。第一層，算學的研究即使真正無用，總是一種完全無害而且坦白的事業；並且事實告訴我們，絕對不會無益而有損的。第二層，宇宙的範圍很廣，就算我們研究『算學』是荒廢工夫，不過極少數大學生的終生的消耗也決不是不可抵補的變故。第三層，我們的作為雖很小，但是都有一個永久的性質；無論一首詩，或者一個幾何定理，只要產生一點永久的利益，就可以做出多數人力所不逮的工作。最後，『算學』史上已經表明出算學不是很平凡的學問，過去的算學家總還沒有被忽略和輕視；他們受過的報酬，雖然不算甚麼，但是實際總很隆重的。總之，我們能夠斷言，如果我們不明瞭我們所努力的宗旨，我們只有無意識地迷信名流的偶像來求一知半解。實際在現在新舊思想衝突的時候，算學的研究不祇限於開端的畢達哥拉，或結尾的愛因斯坦；應

該最新的和最舊的雙方並重啊!』

還有，李文(M. Lévè) 在就法國科學院長職時演說過：

『我們切不要忘記……如果我們現在能立刻計算出最複雜的機器的各部分，是由於最早加泰和猶太的牧人觀察列星的結果；由於希怕苦聚合他們和他自己的觀察，遺留給我們今天的結果；由於太考布拉愛(Tycho Brahe)更進一步的觀察的結果；由於二千年前一個偉大的幾何學家，帕加的亞波羅紐發表多年還當做無用的『圓錐曲線』的結果；由於開布勒的天才，利用這種名貴的成績和太考布拉愛的觀察而得的定律（爲那功利派，誤認爲不足輕重者）的結果；最後由於牛頓發現「萬有引力」定律的結果』。

在這一段話裏，我們當然還應該增加進愛因斯坦，明可斯基等的貢獻。我們相信，如果用公正眼光來敘述各時代的歷史，大算學家的地位一定不會亞於當時一切大事業家。他們的貢獻不只是

單純的『算學』，並且還無形中支配了各時代的宇宙觀，人生觀和思想。尤其是最近『相對論』學說的發明，更確定『算學』的真價值啊！

