Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Riemannsche Flächen

Vorlesung 21

?ech-Kohomologie

Für die Garbe der holomorphen Funktionen auf einer riemannschen Fläche X haben wir die kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d^a} \mathcal{E}^{(0,1)} \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow 0$$

(siehe Satz 16.14 und Lemma 18.12) kennen gelernt. Im ersten Fall werden die holomorphen Funktionen in die reell-differenzierbaren Funktionen und im zweiten Fall in die meromorphen Funktionen eingebettet. In beiden Fällen ist die globale Auswertung im Allgemeinen hinten nicht surjektiv. Diese globale Nichtsurjektivität wollen wir systematisch verstehen. Es stellt sich heraus, dass in beiden Fällen die Nichtsurjektivität durch eine einzige Gruppe gemessen wird, die nur von der Strukturgarbe abhängt, nämlich durch die sogenannte erste Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{O}_X)$.

Eine wesentliche Idee dazu kann man sich folgendermaßen klar machen. Es sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum X. Die globale Auswertung

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{H})$$

ist exakt, wobei die hintere Abbildung im Allgemeinen nicht surjektiv ist. Es sei $t \in \Gamma(X, \mathcal{H})$. Aufgrund der Garbensurjektivität gibt es eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

und Schnitte $s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{H})$, die auf $t|_{U_i}$ abbilden. Die Differenzen $s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j}$ sind somit Schnitte von $\mathcal{G}$ über $U_i \cap U_j$, die auf 0 in $\mathcal{H}(U_i \cap U_j)$ abbilden und daher zu $\mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ gehören. Wir erhalten also eine Familie $r_{ij} = s_i - s_j \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$, die allein auf die Garbe $\mathcal{F}$ und auf die Zweierdurchschnitte der Überdeckung Bezug nimmt. Ferner gilt auf den Dreierdurchschnitten $U_i \cap U_j \cap U_k$ die sogenannte Kozykelbeziehung

$$r_{ij} + r_{jk} = s_i - s_j + (s_j - s_k) = s_i - s_k = r_{ik}$$

Dabei handelt es sich um einen ersten ?ech-Kozykel in $\mathcal{F}$.

Wir entwicklen die zugehörigen Begrifflichkeiten.

Es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes X. Für eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ setzen wir $U_J := \bigcap_{i \in J} U_i$. Für $J \subseteq L \subseteq I$ ist $U_L \subseteq U_J$. Für eine Garbe $\mathcal{G}$ von kommutativen Gruppen auf X betrachtet man die Auswertungen $\mathcal{G}(U_J)$ zu den verschiedenen J, und zu $J \subseteq L$ gehören die Restriktionen $\mathcal{G}(U_J) \to \mathcal{G}(U_L)$. Für ein Element $s \in \mathcal{G}(U_J)$ schreiben wir dann abkürzend

$$s|_L = s|_{U_L}$$

und oft häufig einfach s. Wir fixieren eine Wohlordnung auf I (man braucht hauptsächlich den Fall für endliches I). Damit können wir nun ?ech-Koketten, ?ech-Ableitungen, ?ech-Kozykel, ?ech-Koränder, den ?ech-Komplex und die ?ech-Kohomologie definieren, die ein wichtiges Werkzeug zur Berechnung von Garbenkohomologien ist.

Definition 21.1. Es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ eines topologischen Raumes X und $\mathcal{G}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf X. Unter einer k-ten *?ech-Kokette* versteht man ein Element

$$(s_J) \in \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G}) := \prod_{\{J | \#(J) = k+1\}} \mathcal{G}(U_J),$$

wobei $U_J := \bigcap_{i \in J} U_i$ bezeichnet.

Die Menge der k-ten ?ech-Koketten $\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ bildet mit der komponentenweisen Addition, wobei eine Komponente durch eine Teilmenge $J \subseteq I$ gegeben ist, eine kommutative Gruppe. Für $k = 0$ ist speziell

$$\check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \prod_{i \in I} \mathcal{G}(U_i),$$

für $k = 1$ ist

$$\check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \prod_{\{i,j\} \subseteq I} \mathcal{G}(U_i \cap U_j)$$

und für $k = 2$ ist

$$\check{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \prod_{\{i,j,k\} \subseteq I} \mathcal{G}(U_i \cap U_j \cap U_k).$$

Bei $k = \#(I) + 1$ ist

$$\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \mathcal{G}\left(\bigcap_{i \in I} U_i \right).$$

Wenn $k > \#(I) + 1$ ist, so ist die Indexmenge zu $\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ leer und dieser Term ist einfach 0. Ebenso setzt man für negatives k die Kokettengruppe gleich 0.

Die Koketten zu verschieden k werden durch die ?ech-Ableitung miteinander in Beziehung gesetzt.

Definition 21.2. Es sei $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ eines topologischen Raumes X mit einer wohlgeordneten Indexmenge I und $\mathcal{G}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf X. Zu $k \in \mathbb{N}$ nennt man den Gruppenhomomorphismus

$$\delta_k\colon \check{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{G}) \longrightarrow \check{C}^{k+1}(\mathcal{U},\mathcal{G}),\ s = (s_J)_J \longmapsto \delta_k(s) = (\delta_k(s)_L)_L$$

zwischen den Gruppen der ?ech-Koketten, der durch

$$(\delta_k(s))_L := \sum_{\ell=0}^{k+1} (-1)^\ell s|_{L\setminus\{i_\ell\}}$$

gegeben ist, wobei man $L = \{i_0, i_1, \ldots, i_{k+1}\}$ gemäß der Ordnung auf I schreibt, die k-te *?ech-Ableitung* (zur Garbe $\mathcal{G}$ und zur Überdeckung).

Die verschiedenen Kokettengruppen und die Ableitungen fasst man zum *?ech-Komplex*

$$\check{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{G}) = \left(\check{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{G}), k \geq 0,\, \delta_k\right)$$

zusammen (zur Garbe $\mathcal{G}$ und zur Überdeckung $\mathcal{U}$). Bei einer Überdeckung aus zwei offenen Mengen U und V ist der Komplex gleich

$$0 \longrightarrow \Gamma(U,\mathcal{G}) \times \Gamma(V,\mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U\cap V,\mathcal{G}) \longrightarrow 0\,,$$

wobei (s,t) auf $t|_U - s|_U$ abgebildet wird, und bei einer Überdeckung aus drei offenen Mengen U, V und W ist der Komplex gleich

$$0 \longrightarrow \Gamma(U,\mathcal{G})\times\Gamma(V,\mathcal{G})\times\Gamma(W,\mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(V\cap W,\mathcal{G})\times\Gamma(U\cap W,\mathcal{G})\times\Gamma(U\cap V,\mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U\cap V\cap W,\mathcal{G}$$

Zum Verständnis der Homomorphismen ist es schon in diesen Fällen sinnvoll, mit den durchnummerierten Bezeichnungen U_1, U_2, U_3 zu arbeiten. Die erste Abbildung ist

$$(s_1,\, s_2,\, s_3) \longmapsto (s_3 - s_2,\, s_3 - s_1,\, s_2 - s_1)$$

und die zweite Abbildung ist

$$(t_{23},\, t_{13},\, t_{12}) \longmapsto t_{23} - t_{13} + t_{12}\,.$$

Definition 21.3. Es sei $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ eines topologischen Raumes X und $\mathcal{G}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf X. Eine k-te ?ech-Kokette $(s_J) \in \check{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{G}) = \prod_{\{J|\#(J)=k+1\}} \mathcal{G}(U_J)$ heißt ein k-ter *?ech-Kozykel* (zur Überdeckung $\mathcal{U}$ und zur Garbe $\mathcal{G}$), wenn sie zum Kern der ?ech-Ableitung

$$\delta_k\colon \check{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{G}) \longrightarrow \check{C}^{k+1}(\mathcal{U},\mathcal{G})$$

gehört. Die Gruppe der k-ten ?ech-Kozykel wird mit $\check{Z}^k(\mathcal{U},\mathcal{G})$ bezeichnet.

Definition 21.4. Es sei $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ eines topologischen Raumes X und $\mathcal{G}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf X. Eine k-te ?ech-Kokette $(t_J) \in \check{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{G}) = \prod_{\{J|\#(J)=k+1\}} \mathcal{G}(U_J)$ heißt ein

k-ter *?ech-Korand* (zur Überdeckung $\mathcal{U}$ und zur Garbe $\mathcal{G}$), wenn sie zum Bild der ?ech-Ableitung

$$\delta_{k-1} \colon \check{C}^{k-1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \longrightarrow \check{C}^{k}(\mathcal{U}, \mathcal{G})$$

gehört. Die Gruppe der k-ten ?ech-Koränder wird mit $\check{B}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ bezeichnet.

Lemma 21.5. *Der ?ech-Komplex ist in der Tat ein Komplex.*

Beweis. Siehe Aufgabe 21.3. □

Für eine Überdeckung

$$X = U_1 \cup U_2 \cup U_3$$

mit drei offenen Teilmengen und $k = 1$ geht es um die Gesamtabbildung

$$0 \longrightarrow \Gamma(U_1, \mathcal{G}) \times \Gamma(U_2, \mathcal{G}) \times \Gamma(U_3, \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_1}$$
$$\Gamma(U_2 \cap U_3, \mathcal{G}) \times \Gamma(U_1 \cap U_3, \mathcal{G}) \times \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_2}$$
$$\Gamma(U_1 \cap U_2 \cap U_3, \mathcal{G}).$$

Um nachzuweisen, dass die Hintereinanderschaltung die Nullabbildung ist, kann man sich auf einen Schnitt der Form $s \in \Gamma(U_1, \mathcal{G})$ beschränken (die anderen Komponenten seien also gleich 0). Dieses Element wird auf

$$(0, -s|_{U_1 \cap U_2}, -s|_{U_1 \cap U_3})$$

abgebildet, und dieses wiederum auf $s|_{U_1 \cap U_2 \cap U_3} - s|_{U_1 \cap U_2 \cap U_3}$, also auf 0.

Definition 21.6. Es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ eines topologischen Raumes X und $\mathcal{G}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf X. Zu $k \in \mathbb{N}$ definiert man die k-te *?ech-Kohomologie* $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ als die k-te Homologie des ?ech-Komplexes $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G})$.

Es ist also

$$\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \check{Z}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G}) / \check{B}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G}).$$

Wie bei jeder Homologie zu einem Komplex geht es also um die Restklassengruppe aus dem Kern modulo dem Bild an einer jeden Stelle des Komplexes. Das zu einem ?ech-Kozykel gehörige Element in der k-ten ?ech-Kohomologie nennt man auch *?ech-Kohomologieklasse.* Die nullte ?ech-Kohomologiegruppe ist einfach gleich $\mathcal{G}(X)$, wie direkt aus der Garbeneigenschaft folgt, siehe Aufgabe 21.1.

Beispiel 21.7. Wir betrachten auf dem Kreis S^1 die Überdeckung mit zwei offenen (zu reellen Intervallen homöomorphen) Kreissegmenten $S^1 = U_1 \cup U_2$, deren Durchschnitt $U_1 \cap U_2 = S \cup T$ die disjunkte Vereinigung von zwei Intervallen ist. Es sei G eine diskrete topologische Gruppe und $\mathcal{G}$ die Garbe der stetigen also lokal konstanten G-wertigen Funktionen auf dem Kreis. Auf U_1 bzw. U_2 und ebenso auf S^1 sind die lokal-konstanten Funktionen konstant. Auf $S \cup T$ hingegen ist eine lokal konstante Funktion dadurch gegeben, dass auf S und davon unabhängig auf T ein konstanter Wert vorgegeben ist. Der relevante ?ech-Komplex ist daher

$$\Gamma(U_1, \mathcal{G}) \times \Gamma(U_2, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{G}) \cong G \times G \longrightarrow 0\,,$$

wobei (f, g) auf $g - f$ (auf beiden Zusammenhangskomponenten) abgebildet wird. Dabei werden genau die lokal konstanten Funktionen auf $S \cup T$ erreicht, die konstant sind. Die erste ?ech-Kohomologie ist daher $\check{H}^1(U_1, U_2, \mathcal{G}) \cong G$.

Beispiel 21.8. Wir betrachten auf der zweidimensionalen Sphäre S^2 die Überdeckung mit zwei offenen (zu offenen Kreisscheiben homöomorphen) überlappenden Schalen $S^2 = U_1 \cup U_2$, deren Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ homöomorph zum Produkt $S^1 \times I$ mit einem offenen Intervall I ist. Es sei G eine diskrete topologische Gruppe und $\mathcal{G}$ die Garbe der stetigen also lokal konstanten G-wertigen Funktionen auf der Sphäre. Auf U_1 bzw. U_2 und ebenso auf $U_1 \cap U_2$ sind die lokal-konstanten Funktionen konstant. Der relevante ?ech-Komplex ist daher

$$\Gamma(U_1, \mathcal{G}) \times \Gamma(U_2, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{G}) \cong G \longrightarrow 0\,,$$

wobei (f, g) auf $g - f$ abgebildet wird. Diese Abbildung ist surjektiv. Die erste ?ech-Kohomologie ist daher $\check{H}^1(U_1, U_2, \mathcal{G}) \cong 0$.

Beispiel 21.9. Wir betrachten auf dem Kreis S^1 die Überdeckung mit zwei offenen (zu reellen Intervallen homöomorphen) Kreissegmenten $S^1 = U_1 \cup U_2$, deren Durchschnitt $U_1 \cap U_2 = S \cup T$ die disjunkte Vereinigung von zwei Intervallen ist. Es sei $\mathcal{G}$ die Garbe der stetigen $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen auf dem Kreis. Eine stetige Funktion auf $S \cup T$ ist durch eine stetige Funktion auf S und durch eine davon unabhängige stetige Funktion auf T gegeben. Wir betrachten im Anschluss an Beispiel 21.7 eine lokal konstante Funktion, die auf S den Wert a und auf T den Wert $b \neq a$ besitzt und eine nichttriviale Kohomologieklasse in $\check{H}^1(U_1, U_2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ definiert, wobei $\mathbb{R}$ links die Garbe der lokal konstanten reellwertigen Funktionen bezeichnet. In der größeren Garbe $\mathcal{G}$ ist die entsprechende Kohomologieklasse aber trivial, da man auf U_1 eine stetige Funktion finden kann, die auf S den Wert $-a$ und auf T den Wert $-b$ besitzt und dazwischen (beispielsweise linear) interpoliert. Zusammen mit der Nullfunktion auf U_2 erhält man ein Urbild, der den Kozykel als Korand nachweist.

In Satz 25.4 wird gezeigt, dass in der vorstehenden Situation die erste Kohomologiegruppe zu $\mathcal{G}$ und zu jeder Überdeckung gleich 0 ist.

Beispiel 21.10. Es sei X eine riemannsche Fläche und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Dies bedeutet, dass es eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Trivialisierungen

$$\varphi_i \colon \mathcal{L}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{O}_X|_{U_i}$$

gibt. Für offene Mengen U_i, U_j ergeben sich auf $U_i \cap U_j$ die Übergangsabbildungen

$$\varphi_i|_{U_i \cap U_j} \circ \varphi_j^{-1}|_{U_i \cap U_j} \colon \mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j} \longrightarrow \mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j}\,.$$

Diese Isomorphien sind durch Multiplikationen mit holomorphen Einheiten $r_{ij} \in \Gamma\big(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^\times\big)$ gegeben. Da die Daten von der einen invertierbaren Garbe $\mathcal{L}$ herrühren, gilt dabei die Kozykelbedingung $r_{kj} \cdot r_{ji} = r_{ki}$, was man auch als $r_{kj} \cdot r_{ki}^{-1} \cdot r_{ji} = 1$ schreiben kann. Es liegt also ein ?ech-Kozykel in der Garbe der holomorphen Einheiten vor. Ein solcher Datensatz r_{ij} legt umgekehrt durch eine Verklebung eine invertierbare Garbe fest.

Wenn die invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ trivial ist, so gibt es einen globalen $\mathcal{O}_X$-Modulisomorphismus $\psi\colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$. Dann liegen auf den U_i die Isomorphismen

$$\mathcal{O}_X|_{U_i} \xrightarrow{\psi|_{U_i}} \mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{O}_X|_{U_i}$$

vor, die insgesamt durch Einheiten $s_i \in \Gamma\big(U_i, \mathcal{O}_X^\times\big)$ festgelegt sind. Für diese gilt die Beziehung

$$s_i \cdot s_j^{-1} = (\varphi_i \circ \psi) \circ (\varphi_j \circ \psi)^{-1} = r_{ij}$$

für alle i, j. Wenn umgekehrt solche realisierende Einheiten s_i gegeben sind, so werden durch

$$\psi|_{U_i} := \varphi_i^{-1} \circ s_i$$

Modulisomorphismen von $\mathcal{O}_{U_i}$ nach $\mathcal{L}_{U_i}$ auf U_i festgelegt, die verträglich sind und daher einen globalen Isomorphismus zwischen $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{L}$ festlegen. Eine invertierbare Garbe mit Trivialisierungen auf U_i kann man also mit dem Datensatz (U_i, r_{ij}), der die Kozykelbedingung erfüllt, identifizieren, wobei ein solcher Datensatz als trivial anzusehen ist, wenn es Einheiten s_i mit

$$r_{ij} = s_i \cdot s_j^{-1}$$

gibt. Diese Situation kann man insgesamt durch den Komplex

$$\prod_{i \in I} \Gamma\big(U_i, \mathcal{O}_X^\times\big) \longrightarrow \prod_{i<j} \Gamma\big(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^\times\big) \longrightarrow \prod_{i<j<k} \Gamma\big(U_i \cap U_j \cap U_k, \mathcal{O}_X^\times\big)$$

ausdrücken, der einfach der Anfang des ?ech-Komplexes ist.

Verfeinerung der Überdeckung

Die zu Beginn der Vorlesung beschriebene Situation eines surjektiven Garbenhomomorphismus und Beispiel 21.10 machen deutlich, dass es nicht genügen kann, immer mit einer einzigen fixierten Überdeckung zu arbeiten, sondern dass man mit verschiedenen Überdeckungen simultan arbeiten muss.

Definition 21.11. Es sei X ein topologischer Raum. Eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ heißt eine *Verfeinerung* einer offenen Überdeckung $X = \bigcup_{j \in J} V_j$, wenn es eine Abbildung $\alpha\colon I \to J$ derart gibt, dass $U_i \subseteq V_{\alpha(i)}$ gilt.

Es sei nun eine Garbe von kommutativen Gruppen $\mathcal{G}$ auf X gegeben. Eine Verfeinerung definiert einen Kokettenhomomorphismus

$$\check{C}^1(\mathcal{V},\mathcal{G}) \longrightarrow \check{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{G}),\ s_{\{j_1,j_2\}} \longmapsto s_{\{i_1,i_2\}},$$

wobei die Bildkokette an der Stelle $\{i_1,i_2\}$ durch

$$s_{\{i_1,i_2\}} := s_{\{\alpha(i_1),\alpha(i_2)\}}|_{U_{i_1}\cap U_{i_2}}$$

definiert ist (bei $\alpha(i_1) = \alpha(i_2)$ ist dies als 0 zu interpretieren). Diese Abbildung führt Kozykel in Kozykel und Koränder in Koränder über und definiert daher einen Verfeinerungshomomorphismus

$$\check{H}^1(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}).$$

Lemma 21.12. *Es sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{G}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf X. Es sei U_i, $i \in I$, eine offene Überdeckung von X, die eine Verfeinerung der offenen Überdeckung V_j, $j \in J$, sei. Dann ist die Verfeinerungsabbildung*

$$\check{H}^1(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U},\mathcal{F})$$

unabhängig von der Indexabbildung $\alpha\colon I \to J$.

Beweis. Siehe Aufgabe 21.11. □

Definition 21.13. Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum X. Man bezeichnet

$$\check{H}^1(X,\mathcal{F}) := \lim_{\mathfrak{U} \text{ offene Überdeckung von } X} \check{H}^1(\mathfrak{U},\mathcal{F})$$

als die erste *?ech-Kohomologie* von $\mathcal{F}$ auf X.

Der (direkte oder induktive) Limes wird hier über alle ?ech-Komologien zu Überdeckungen genommen, die untereinander durch die Verfeinerungshomomorphismen miteinander verbunden sind.

Der verbindende Homomorphismus

Lemma 21.14. *Es sei X ein topologischer Raum und sei $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus zwischen den Garben von kommutativen Gruppen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf X. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Zu einer offenen Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ gibt es einen natürlichen Gruppenhomomorphismus*

$$\check{H}^1(U_i,\mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^1(U_i,\mathcal{G}).$$

(2) *Es gibt einen natürlichen Gruppenhomomorphismus*

$$\check{H}^1(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^1(X,\mathcal{G}).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 21.12. □

Lemma 21.15. *Es sei*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum X. Dann liegt eine lange exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} \check{H}^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{H})$$

vor.

Beweis. Siehe Aufgabe 21.13. □

Dabei heißt das δ der *verbindende Homomorphismus*. Er wird wie zu Beginn der Vorlesung beschrieben konstruiert.

Abbildungsverzeichnis